



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“AJUSTE DE DATOS ASTRONÓMICOS POR MEDIO DE MÍNIMOS CUADRADOS”

TESIS:  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA:  
**VIRGILIO VÁZQUEZ HIPÓLITO**

DIRECTORES DE TESIS:  
**M.C. JUAN RAMÓN TIJERINA GONZÁLEZ**  
**Dr. LAURENT LOINARD CORVAISIER**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA. SEPTIEMBRE DE 2006.

# Índice General

Agradecimientos	v
Introducción	vii
<b>1 Introducción a la Astronomía</b>	<b>1</b>
1.1 HISTORIA	1
1.1.1 Babilonia	2
1.1.2 Egipto	3
1.1.3 China	3
1.1.4 Centroamérica y Perú	4
1.1.5 Grecia	4
1.1.6 Edad Media	6
1.1.7 El renacimiento	6
1.1.8 La Astronomía Moderna y Contemporánea	8
1.2 ESTRELLAS Y MEDIO INTERESTELAR	9
1.2.1 Evolución Estelar	9
1.2.2 Poblaciones Estelares	13
1.2.3 Medio Interestelar	15
1.2.4 La interacción del Sol con el medio interestelar	19
1.3 GALAXIAS Y COSMOLOGÍA	20
1.3.1 Galaxias	20
1.3.2 Tipos de Galaxias	21
1.3.3 Vía Láctea	22
1.3.4 El grupo local y el super grupo local	22
1.3.5 Cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias	23
1.3.6 Cosmología	23
<b>2 Astrometría</b>	<b>27</b>
2.1 COORDENADAS Y TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA	27
2.1.1 Coordenadas Astronómicas	27
2.2 DISTANCIA A LOS SISTEMAS ESTELARES	35
2.3 EL ARREGLO DE GRANDES LÍNEAS DE BASE	36

2.3.1	¿Qué es la RadioAstronomía? . . . . .	36
2.3.2	Centro de Operaciones del Arreglo VLBA . . . . .	38
2.3.3	El Correlador . . . . .	39
2.3.4	El Producto Terminado . . . . .	39
2.3.5	Estación del Hardware del VLBA . . . . .	39
2.3.6	La ciencia con el VLBA . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Complejo del Tauro, T-Tauri y estudios previos del VLBA.</b>	<b>43</b>
3.1	COMPLEJO DEL TAURO . . . . .	43
3.1.1	Las constelaciones: un aparente imagen estelar. . . . .	43
3.1.2	Los objetos observables en Tauro . . . . .	44
3.2	ESTUDIOS ÓPTICOS E INFRARROJO . . . . .	44
3.3	OBSERVACIONES VLBA PREVIAS DE T-TAURI SUR . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Método de mínimos cuadrados.</b>	<b>49</b>
4.1	MÍNIMOS CUADRADOS COMO UN ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD . . . . .	49
4.2	AJUSTE CHI-CUADRADO . . . . .	50
4.3	REGRESIÓN LINEAL . . . . .	51
4.4	MÍNIMOS CUADRADOS PARA UN MODELO LINEAL GENERAL . . . . .	54
4.5	SOLUCIÓN USANDO ECUACIONES NORMALES . . . . .	55
4.6	LA ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN . . . . .	57
4.6.1	Eliminación sobre Columnas-Aumentadas de Matrices . . . . .	57
4.6.2	Pivoteando . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Generalización al caso de ecuaciones acopladas</b>	<b>61</b>
5.1	PLANTEAMIENTO . . . . .	61
5.2	RESOLUCIÓN MATEMÁTICA . . . . .	63
5.3	IMPLEMENTACIÓN EN FORTRAN 77 . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Resultados y Conclusiones.</b>	<b>75</b>
6.1	DISTANCIAS OBTENIDAS . . . . .	75
6.2	CÁLCULO DE MASAS ESTELARES EN EL SISTEMA T-TAURI CON LA DISTANCIA ACTUAL . . . . .	78
	<b>Referencias</b>	<b>79</b>

# Agradecimientos

A mis padres **Juvencio Vázquez García y Margarita Hipólito González** por la comprensión que me han tenido y por su gran apoyo en cada momento de mi vida.

A mi asesor M.C. **Juán Ramón Tijerina Gonzáles**, por la ayuda y colaboración que me ha brindado para la realización de esta tesis.

A mi coasesor, el Doctor **Laurent Loinard Corvaisier**, por su tiempo tan valioso que me aportó para realizar esta tesis y por su gran comprensión durante todo el desarrollo de la misma.

Al M.C. **Juán Carlos Mendoza Santos** por sus consejos y ayuda que me brindó durante los cinco años de mi carrera.

A cada uno de mis sinodales: M.C. **Gustavo Yáñez Navarro**, M.C. **Juán Carlos Mendoza Santos** y el Dr. **Arturo Aguirre López**, por su apoyo y el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

**A mi hermano Antonio Vázquez Hipólito y su esposa Guadalupe Herrera Castro**, por haber permitido hacer mis sueños realidad y por confiar en mí.

A mis hermanos: Manuel Ramiro, Antonio, Rufino, Rufina, y Eloy por haber compartido conmigo sus experiencias y por sus palabras siempre positivas.

A la memoria de mi primo, Mario Hipólito Chávez, por haber compartido conmigo sus grandes experiencias de la vida.

# Introducción

Para un observador en la tierra, el cielo aparece como una estructura bidimensional, comúnmente llamada esfera celeste. Por lo tanto, la posición de un astro (estrella, planeta, galaxia, etc.) se mide especificando, sobre esta esfera dos ángulos contados a partir de un ecuador y un meridiando de referencia. La elección de dichos elementos de referencia es la que define el sistema de coordenadas. Para astros localizados fuera del sistema Solar, el marco de coordenadas más usado es el llamado sistema ecuatorial, que usa como referencias el ecuador celeste y el meridiano que pasa por la posición del Sol en el equinoccio de primavera. En este sistema, las dos coordenadas angulares se llaman ascensión recta ( $\alpha$ ) y la declinación ( $\delta$ ). Mientras que la declinación se mide en grados de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ , la ascensión recta se mide en horas de  $0^h$  a  $24^h$  ( $1h = 15^\circ$ ).

Debido a la naturaleza bidimensional de la esfera celeste, es imposible conocer a priori la distancia a los objetos celestes. En particular, una estrella aparentemente débil puede estar cercana y ser intrínsecamente débil, o ser intrínsecamente brillante, pero estar relativamente lejana. Esto es muy problemático, ya que sin conocer la distancia a un objeto dado, es imposible determinar sus características básicas (luminosidad, masa, tamaño, etc.). En consecuencia, el problema de la determinación de las distancias en el universo es un problema central en la astronomía. Desafortunadamente, solamente existe una manera directa de determinar la distancia a una estrella. Este método es análogo a una triangulación y se basa en la medición del desplazamiento aparente del objeto sobre la esfera celeste debido al movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Si vemos una estrella proyectada sobre la esfera celeste en una cierta dirección a una fecha dada, 6 meses después, la veremos proyectada en una dirección ligeramente distinta.

Si definimos la Unidad Astronómica (UA) como la distancia de la Tierra al Sol, y que llamamos  $d$  la distancia del Sol a la estrella, entonces el ángulo de cambio de posición  $\theta$  (llamado *paralaje*) se puede calcular como:

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{1UA}{d}$$

Ya que la distancia de la Tierra al Sol es bien conocida, la medición de  $\theta$  (a partir de imágenes obtenidas en varias épocas a lo largo de un año) permite determinar directamente la distancia  $d$ . Este método muy simple, conceptualmente es difícil poner en práctica, porque el ángulo  $\theta$  es siempre muy pequeño, de hecho, eso justifica la aproximación  $\tan \theta \approx \theta$  en la ecuación anterior. Aún

para estrellas cercanas, su valor es del orden de unos pocos milisegundos de arco. Para poner este valor en perspectiva, cabe mencionar que un instrumento capaz de medir un cambio de posición de 1 milisegundo de arco tendría suficiente resolución para distinguir una moneda de 1 peso localizada a 4000 km.

Además de su cambio aparente de posición debido a la órbita de la Tierra, las estrellas también tienden a tener un movimiento real relativo al Sol llamado *movimiento propio*. Por lo tanto, el camino que seguirán sobre la esfera celeste será la combinación de su paralaje y de su movimiento propio, posiblemente acelerado. La trayectoria debida a la paralaje es la proyección de la órbita terrestre (casi circular) perpendicularmente a la línea de visión. En consecuencia, para una estrella localizada en la dirección perpendicular al plano de la órbita terrestre, será un círculo; para una estrella en la dirección del plano de la órbita terrestre, será un pequeño segmento; y en caso general, será una pequeña elipse. Es importante notar que mientras que el tamaño de dicha elipse solamente depende de la distancia a la estrella, su orientación y forma solamente dependen de la posición de la estrella en el cielo. Eso permite representar la trayectoria como el producto del ángulo de paralaje  $\theta$  por una función  $f(\alpha, \delta, t)$  que describe la forma de la elipse. Proyectando sobre los ejes de ascensión recta y declinación, podemos escribir la ecuación de movimiento de una estrella como:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha t + a_\alpha \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\alpha(\alpha, \delta, t), \quad (1)$$

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu_\delta t + a_\delta \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\delta(\alpha, \delta, t), \quad (2)$$

donde,  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  son las proyecciones del movimiento propio de la estrella sobre los ejes de ascensión recta y declinación, respectivamente.  $f_\alpha$  y  $f_\delta$  son las proyecciones del movimiento de paralaje sobre esos ejes. Además  $a_\alpha$  es la aceleración en alfa y  $a_\delta$  es la aceleración en delta. Finalmente,  $\alpha_0$  y  $\delta_0$  son las coordenadas de la fuente a una época de referencia (generalmente el primero de enero de 2000).

Las dos ecuaciones anteriores muestran que si uno mide las coordenadas  $\alpha_i$  y  $\delta_i$  de una estrella en múltiples épocas  $t_i$ ; sus coordenadas a una época de referencia, su movimiento propio y su paralaje se pueden determinar usando un ajuste de mínimos cuadrados. En total, el número de parámetros que deben determinarse son 7:  $\alpha_0, \delta_0, \mu_\alpha, \mu_\delta, a_\alpha, a_\delta$  y el ángulo de paralaje  $\theta$ . Cada observación proporciona dos datos ( $\alpha$  y  $\delta$ ); por lo que se requieren por lo menos 4 observaciones para resolver éste problema.

Usando un arreglo de 10 radiotelescopios repartidos en todo el territorio de Estados Unidos llamado VLBA por sus iniciales en inglés (Very Long Baseline Array), se ha iniciado recientemente un programa observacional diseñado para medir la paralaje a una serie de estrellas jóvenes. Obtener distancias precisas a estos objetos es un paso importante para entender como procede la formación de las estrellas en el Universo. Para una de las fuentes (llamada T-Tauri), se ha determinado la paralaje usando un juego de 7 observaciones obtenidas cada dos meses entre septiembre de 2003 y septiembre de 2004. Para esta misma fuente,

se tienen ya otras 5 observaciones dando un total de 12 observaciones. Actualmente, se ha realizado un ajuste por separado a los datos de ascensión recta y declinación. Dicho en otras palabras, se ha obtenido un ajuste para la ecuación de la ascensión recta y otro ajuste separado a la ecuación de la declinación. Sería mejor, sin embargo, obtener un ajuste simultáneo de las dos ecuaciones, ya que los parámetros que minimizan cada ecuación no necesariamente son los que minimizan las dos conjuntamente. Esta modificación del código de ajuste es la meta de la tesis.

Este trabajo se encuentra dividido en 6 capítulos.

- En el primer capítulo se da a conocer la literatura astronómica, lo indispensable que hay que conocer acerca de la Astronomía, por ejemplo su historia; también daremos conceptos importantes acerca de las Estrellas y lo que es el Medio Interestelar. Finalmente daremos a conocer los tipos de Galaxias y un poco de Cosmología; que son temas primordiales para el estudio de la Astronomía.

- El capítulo 2 está dedicado a los tipos de coordenadas que existen en la Astronomía y las relaciones que existen entre ellas, se da a conocer la idea básica de lo que es una esfera celeste y como ubicar los objetos celestes sobre la esfera. Además en este capítulo se proporciona el concepto de lo que es el ángulo de paralaje, para la medición de las distancias, y por último nos enfocamos a lo que es el VLBA.

- En el capítulo 3 nos concentraremos a conocer el complejo del Tauro y a conocer nuestra estrella objetivo T-Tauri, su fecha de descubrimiento y los estudios que se ha hecho sobre ella. Además se describen las observaciones que se le han hecho a T-Tauri, lo que se ha analizado y lo que falta por analizar. También dará a conocer el porqué de la necesidad de las ecuaciones acopladas.

- En el capítulo 4 recordamos algunos conceptos previos acerca de lo que es el método de mínimos cuadrados desde la presentación simple hasta la formalización general.

- El capítulo 5 es el capítulo primordial de la tesis; aquí se desarrollará la generalización de mínimos cuadrados al caso de ecuaciones acopladas, donde se planteará el problema y se dará su solución matemática. Además estará dedicado a la implementación en Fortran 77.

- En el capítulo 6 se presentan los resultados a los que se han llegado, primeramente se obtiene el ajuste simultáneo pero sin considerar la aceleración, posteriormente se obtiene el ajuste simultáneo con aceleración constante; junto con estos dos casos y el ajuste obtenido en el artículo de Loinard et al. (2005) se hace una comparación general para determinar la calidad de cada ajuste.



# Capítulo 1

## Introducción a la Astronomía

### 1.1 HISTORIA

La astronomía es una de las ciencias más antiguas y al mismo tiempo de las más modernas. A veces desdeñada bajo el supuesto de que es considerada como una actividad contemplativa y ociosa en torno a objetos que nada tenían que ver con la vida cotidiana; pero realmente si se ocupó de los asuntos propios del hombre. Desde muy temprano, se ha usado para anticipar los eventos de la naturaleza, de carácter cíclico, que permitían la supervivencia del hombre: la caza, la pesca, la agricultura y el transporte.

Aunque el hombre en la vida citadina no observa las estrellas y se ha alejado de la naturaleza primitiva, habitando un medio más artificial, si ha entrado en la era de los cohetes lunares y los satélites. Hoy es indiscutible la importancia de esta ciencia que ha llegado a las mentes de un sector nutrido de la población. La astronomía y las ciencias vecinas están conociendo un crecimiento verdaderamente explosivo, que se traduce, sobre todo, en el número cada vez mayor de trabajos científicos.

La imbricación de la astronomía con otras ciencias como la filosofía, la física, la meteorología, la geología, entre otras, es cada vez más evidente.

Ciertamente la astronomía no fue nunca, ni siquiera en los primeros pasos de su evolución, una actividad puramente contemplativa e inútil para la vida práctica de las colectividades humanas. Las observaciones astronómicas entraron en el proceso de recolección y procesamiento de información, útil para la construcción del futuro; pues le es propio a esta especie, a diferencia de los animales, anticipar los hechos y prevenir las necesidades del futuro de una manera consciente. Los problemas del calendario, el cálculo del tiempo o la orientación en el campo y en el mar pertenecen a las bases mismas de nuestra cultura y civilización y sólo pueden resolverse mediante observaciones de los astros.

Observando el doble carácter, astronómico y mitológico, en la denominación

de los días de la semana; que en su orden se relacionan con la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus, Saturno y el Sol (Apolo), vemos que la astronomía tuvo en los primeros albores de su historia otra aplicación "utilitaria": la astrología. Según la cosmovisión de entonces toda la naturaleza, incluidos los astros de aspecto llamativo y movimiento errático, era animada y estaba poblada por dioses, espíritus y demonios, que influían definitivamente en los acontecimientos de la Tierra, como sequías, inundaciones y sismos, y en los acontecimientos humanos, como guerras, pestes y cambios de gobierno.

El deseo de anticipar eventos, que eran tenidos por designios de las divinidades astrales, llevó a estudiar cuidadosamente las trayectorias planetarias, en la medida en que los sencillos instrumentos de medición y teorías rudimentarias de entonces lo permitían. Si no contaban con aparatos ópticos, ni el desarrollo de las matemáticas, poseían instrumentos sencillos de medición de ángulos y dispositivos de alineamiento. Las series de observaciones obtenidas así a lo largo de los siglos e incluso milenios condujeron finalmente a valores numéricos bastante precisos. Especialmente avanzado estaba el conocimiento de la duración del año ligado a las estaciones, del mes al ciclo lunar y de la semana a las fases lunares, como claros estaban los períodos de los movimientos de los planetas. En esta fase del desarrollo de la astronomía no existía aún preocupación alguna por la explicación teórica del movimiento de los astros.

En el mundo antiguo hay que resaltar los siguientes centros y épocas de la astronomía:

### 1.1.1 Babilonia

Los inicios de la astronomía babilónica se remontan al tercer milenio A.C.. Alcanzó su auge hacia 600 – 500 A.C. y decayó en el último siglo antes de nuestra era. Para ver la precisión de muchos de sus datos astronómicos vamos a dar algunos ejemplos: según los babilónicos la duración media entre dos fases lunares iguales (mes sinódico o lunación) es de 29.530641 días; el valor moderno es de 29.530589 días (ver calendario actual). El valor hallado en el siglo II o I A.C. para la revolución sinódica de los planetas, es decir, el tiempo entre dos posiciones similares con respecto a la Tierra, no difería en más del 1% del día, del valor actual: en el caso de Venus, por ejemplo es de 583.91 días en lugar de 583.92 días. Sólo en el caso de Marte con, 779.995 días en lugar de 779.94 días, aparece una desviación algo mayor, que, sin embargo, tampoco tiene por qué ser del todo real, porque como hasta hace bien poco no se podían observar los planetas con instrumentos de medida modernos (desarrollo de los sistemas de Bessel en el siglo XIX), no es posible realizar con absoluta seguridad un cálculo retrospectivo de las revoluciones que, siempre sometidas a perturbaciones, eran diferentes hace 2 ó 3 mil años.

La observación babilónica más antigua de un eclipse de Sol total (de entre las fechadas con seguridad) se remonta al 15 de junio de 763 A.C. Sin embargo la periodicidad de los eclipses se había observado bastante antes, seguramente en el siglo III A.C. El descubrimiento del Ciclo de Saros (23 meses sinódicos o 18 años  $111/3$  días; ver Calendario actual) es, en este contexto, una de las

contribuciones más notables de la astronomía babilónica.

Los babilonios recurrieron en principio al ciclo lunar para confeccionar un calendario. Cada 12 meses de 30 días componían un año. Para absorber el desfase respecto de la duración real del año solar (365,25 días) se agregaba de vez en cuando un mes más. Reglas fijas para intercalar este mes no las hubo en el siglo VI A.C.. A partir del 383 A.C. se previeron 7 meses para intercalar cada 19 años (año lunisolar).

La división del día comenzaba con la puesta de Sol. Hacia 1700 A.C. aproximadamente se conocía ya la división en 24 horas iguales.

Las constelaciones más importantes recibieron ya sus nombres en el tercer milenio A.C. La astronomía moderna adoptó la mayoría de los nombres babilónicos para las constelaciones del zodiaco.

### 1.1.2 Egipto

El calendario egipcio, a diferencia del babilónico, se apoyaba en el ciclo solar. En el milenio IV A.C. se conocía el año solar de 365 días, con 12 meses de 30 días y 5 días complementarios. El comienzo del año venía determinado por el orto heliaco de la estrella Sirio, es decir, por su primera aparición en el amanecer después de su período de invisibilidad. Este acontecimiento coincidía originariamente con el inicio de la crecida del Nilo. Observaciones posteriores revelaron un retraso del orto heliaco de Sirio, y la crecida del Nilo no volvía a coincidir hasta 1460 años después (período sothíaco). De ahí se dedujo que la verdadera duración del año era de 365,25 días. A partir del 238 A.C. se agregó por eso a cada cuarto año un día intercalado.

Aparte de diversas constelaciones estelares, existía en Egipto una división del zodiaco en 36 decanos, regidas por divinidades.

### 1.1.3 China

Cuenta la historia de los desdichados astrónomos de la corte, Hsi y Ho, que fueron ejecutados por haber puesto en peligro la seguridad del mundo, al dejar de predecir un eclipse de Sol.

Al igual que en Babilonia, el antiguo calendario chino de principios del siglo II A.C. es un año lunisolar con ciclos bisiestos de 19 años. La obra *Calendario de Tres Ciclos*, aparecida hacia el principio de nuestra era y cuyo autor es Liu Hsin, describe la historia de la astronomía china desde el tercer milenio. Los astrónomos de la corte imperial china observaron fenómenos celestes extraordinarios cuya descripción ha llegado en muchos casos hasta nuestros días. Estas crónicas son para el investigador una fuente valiosísima porque permiten comprobar la aparición de nuevas estrellas, cometas, etc. También los eclipses se registraban de esta manera.

Por el contrario, el estudio de los planetas y de la Luna no estuvo hasta el siglo I A.C. en condiciones de proporcionar predicciones suficientemente exactas de los fenómenos celestes y de los eclipses. La antigua astronomía solar china

difiere mucho de la babilónica y la occidental. El ecuador celeste se dividía en 28 casas y el número de constelaciones ascendía a 284.

### 1.1.4 Centroamérica y Perú

Si los distintos pueblos del México antiguo llegaron hasta la fase jeroglífica, los mayas lograron la fase silábico-alfabética en su escritura. La numeración iniciada por los olmecas con base vigesimal, la perfeccionan los mayas, en los siglos III y IV A.C.. Los mayas conocieron desde el tercer milenio A.C. como mínimo un desarrollo astronómico muy polifacético. Muchas de sus observaciones han llegado hasta nuestros días (por ejemplo un eclipse lunar del 15 de febrero de 3379 A.C.) y se conocían con gran exactitud las revoluciones sinódicas de los planetas, la periodicidad de los eclipses, etc. El calendario comienza en una fecha cero, que posiblemente sea el 8 de junio de 8498 A.C. en nuestro cómputo del tiempo, aunque no es del todo seguro. Los mayas tenían además un año de 365 días (con 18 meses de 20 días y un mes intercalado de 5 días).

También la astronomía inca, en el Perú, tuvo en parte un gran desarrollo. Los incas, conocían la revolución sinódica de los planetas con admirable exactitud. Las anotaciones en los quipus (cordeles con nudos) dan 115.88 días para Mercurio, 584.8 días para Venus y 398.88 días para Júpiter. Los valores modernos son respectivamente 115.88 días, 583.92 días y 398.88 días. El calendario consistía en un año solar de 365 días, repartidos en 12 meses de 30 días y 5 días intercalados.

Todas las culturas pertenecientes al período de desarrollo comentado tenían una cosa en común y es que tomaban los fenómenos celestes como fenómenos dados, sin buscar para nada explicaciones ocultas. A la Tierra se le atribuía la forma de un disco plano, rodeada de la bóveda celeste.

### 1.1.5 Grecia

Para los Pitagóricos (572 – 48 A.C.), el cielo en su totalidad son números y armonía. Se predica la igualdad entre todos los seres vivos. Mientras desprecian el provecho económico y consideran que el trabajo está reservado para los esclavos, no escatiman esfuerzos para pensar en asuntos imposibles, de donde surgen conceptos fundamentales como los números irracionales, las cónicas, el infinito. Por oposición a este modo de pensar, el pensamiento práctico de Arquímedes (287 – 212 A.C.) expresado en sus aportes a la ingeniería, con las poleas y palancas, el empuje hidrostático, el tornillo sinfín, es la antítesis.

Tales de Mileto (640 A.C.), el primero de los grandes astrónomos, creía que el Universo era esférico. Aristóteles (384 A.C.) combatió la idea de una Tierra plana, basando sus puntos de vista en el cambio de posiciones de estrellas en el cielo con la latitud y en la forma circular de la sombra de la Tierra proyectada sobre la Luna durante un eclipse.

El director de la Biblioteca de Alejandría, Eratóstenes (aproximadamente en 280-200 A.C.), mide el tamaño de la Tierra utilizando la altura del Sol de mediodía. Con la sombra de un elemento vertical proyectada en dos puntos

distintos, halló una diferencia de valor de  $7^{\circ} \frac{1}{7}$  para la distancia angular entre Asuán y Alejandría. Como la distancia horizontal entre ambos lugares era, según mediciones suyas anteriores, de 5,000 estadios, halló por métodos puramente geométricos, cuando aún no se había desarrollado la trigonometría, que el perímetro total de la esfera terrestre era

$$(5000)(360^{\circ})/7\frac{1}{7} = 252000 \text{ estadios} = 39690 \text{ Km.}$$

Hiparco (190-120 A.C.), el astrónomo griego más importante, inventó la trigonometría, hizo un catálogo de más de 1000 estrellas y descubrió la precesión del eje terrestre. Sus trabajos fueron la base para la gran obra de Ptolomeo, que se escribiría en el siglo II D.C.

También a otros astros se les atribuyó una forma esférica. Anaxágoras sostenía que el Sol era una roca incandescente y Demócrito afirmaba que la Vía Láctea consistía en numerosas estrellas. Una de las mayores contribuciones de la astronomía griega, entre las concepciones clásicas sobre las consideraciones del Universo como finito y geocéntrico —al lado de El Timeo de Platón, la Metafísica y el Tratado del Cielo y el Mundo de Aristóteles— fue el intento de explicar el movimiento de los planetas mediante una teoría de Hiparco y Claudio Ptolomeo (87-170 D.C.) que compiló en *Almagesto* todo el saber astronómico de la época.

Los siete planetas, entre los que tradicionalmente figuraban también la Tierra y la Luna, se movían en siete esferas alrededor de la Tierra, la cual ocupaba el centro (sistema geocéntrico). De adentro hacia afuera se sucedían la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno. Más allá de la órbita de Saturno se hallaba la esfera de las estrellas fijas. La Tierra no ocupaba el centro exacto de cada órbita, es decir, las órbitas planetarias eran algo excéntricas. Sólo el Sol y la Luna se movían en círculo; los demás planetas recorrían un epiciclo cuyo centro se deslizaba a lo largo de un círculo llamado deferente.

El sistema de Ptolomeo es geocéntrico, para más detalle ver [4]. Se supone la Tierra completamente estática, mientras todos los cuerpos celestes giran en torno suyo, por ser ella el centro del Universo. Obsérvense unos círculos menores llamados epiciclos y otros mayores, los deferentes. Los centros de los epiciclos de los planetas interiores se localizan sobre la recta Tierra-Sol, y la de los exteriores, sobre los deferentes. Epiciclos y deferentes son círculos, y los círculos suponen ser la geometría del movimiento perfecto.

La teoría de los epiciclos de Ptolomeo permitía no sólo dar una explicación teórica al movimiento de los planetas, sino también obtener predicciones fiables.

Al lado de la teoría geocéntrica aparecieron otras como la de Aristarco de Samos (310 a 250 A.C.). Según él, el Sol (Helios) se hallaba en el centro y alrededor de él giran en círculo los planetas, entre ellos la Tierra.

Los griegos fueron también los primeros en intentar medir distancias en el cosmos. Aristarco, aplicando métodos de paralaje, al proyectar la sombra de la Tierra sobre la Luna eclipsada, y que la Luna en los eclipses mostraba el mismo tamaño aparente del Sol, halló que la razón de las distancias Luna-Sol era de  $1/19$ . El diámetro de la Luna, según él, era 0.36 veces la de la Tierra, y el del

Sol 6.75 el de ésta, pues ambas cantidades deben guardar la misma proporción de las distancias.

### 1.1.6 Edad Media

Este período caracterizado por el dominio de la teología sobre las demás disciplinas intelectuales, va del año 476 D.C. cuando culmina el esplendor del imperio romano de occidente centrado en Roma, hasta el año 1453 cuando culmina el imperio romano de oriente, por la caída de Constantinopla en manos de los turcos otomanos.

Sobresalen Boecio (480 a 524), Cosmas Indicopleustes de Alejandría S. VI, Isidoro de Sevilla (570 a 636), Beda el Venerable de Inglaterra (673 a 735), Al-Manzur de Bagdad (siglo VIII) Harun Al Raschid (765-809), Thabit Ven Qurrah (836-901), Al Battani (868-929), Al Fargani (siglo IX), Ibn al Haytham (965-1039), Abubacer (? -1185), Averroes (1126-1198), Thierry de Chartres (? - 1150), Alfonso X el Sabio en Toledo (1221-1284), Roger Bacon (1214-1294), Pietro de Abano (1250-1316), Tomas de Aquino (1225-1274), Jean Buridan (1300-1358), Nicilás de Oresme (1323-1382), Nicolás de Cusa (1401-1464)

El legado de la astronomía griega pasó en los siglos X a XV a manos de los árabes principalmente. Tradujeron la obra de Ptolomeo, el Almagesto; a muchas de las principales estrellas de las constelaciones les dieron nombres especiales que aún hoy se conservan, y confeccionaron diversos catálogos de estrellas y tablas planetarias. Debe advertirse que muchos de los nombres babilónicos o persas, de las estrellas, son luego tomados y traducidos a su lengua por los griegos, para que los árabes les hagan suyos después, y finalmente, lleguen a los sabios alfonsíes quienes los acuñan en castellano y arabismos.

### 1.1.7 El renacimiento

Este período es el punto de llegada del humanismo y alcanza su mayor esplendor en el período que va desde 1492 hasta 1529.

- Nicolás Copernico (1473-1543). Considerado el verdadero artífice de la nueva astronomía. Basado en la lectura de autores antiguos que hacían referencia al sistema heliocéntrico de Aristarco de Samos observó lo improbable del Sistema Ptolemaico. Escribió el *Commentariolus*, que versa sobre la arquitectura del sistema planetario y en el cual postula que la Tierra gira alrededor de su eje y que ésta y los planetas se mueven alrededor del Sol; a estas ideas llegó no tanto por mediciones y observaciones como por razonamientos teóricos.

Lo cierto es que con las teorías copernicanas no se podían obtener predicciones precisas de los movimientos planetarios, por lo que se vio obligado a introducir gran número de epiciclos para que la teoría coincidiera hasta cierto punto con los hechos. El problema estribaba en que Copérnico se limitó a órbitas circulares.

La nueva concepción del mundo no provocó mayor preocupación, mientras no se extrajo de ella la inquietante consecuencia de que, si la Tierra no ocupa

una situación privilegiada en el Universo, tampoco existen privilegios sociales que sean absolutos e inmodificables.

Esta abolición de los privilegios dentro de la naturaleza, y por ende en la sociedad, expresada abiertamente con plena transparencia, constituyó el meollo del pensamiento copernicano que el más grande filósofo del renacimiento, Giordano Bruno, propagó por toda Europa hasta ser excomulgado por las iglesias Católica, Luterana y Calvinista, condenado a prisión en las mazmorras de la Santa Inquisición durante siete años y terminar por ser quemado vivo en Roma a sus 52 años, el 17 de febrero del año 1600, sin que se haya retractado de su herética posición.

- Tycho Brahe (1546-1601) - Johannes Kepler (1571-1630). Brahe, desde los observatorios de Dinamarca, observa entre otras cosas la órbita de Marte con grandes cuadrantes de pared. Fueron estas las medidas de posición astronómica más precisas antes de la invención del telescopio, pues el error medio en las determinaciones de los astros era del orden de los  $2'$  de arco.

Ya en Praga nombra ayudante suyo a Kepler, de quien conoció su obra *Mysterium Cosmographicum*. A la muerte de Brahe, Kepler evalúa las observaciones de Marte y en 1609 publica su *Astronomía Nova*, con las dos primeras leyes que señalan el movimiento elíptico y las áreas barridas por los radiovectores planetarios. La tercera ley de Kepler se publica en 1619 en su obra *Harmonices Mundi*. Son aportes de Kepler, además, la creación de la ciencia-ficción, el principio de la acción de la luna en las mareas, y el principio de la cámara oscura como su funcionamiento en la óptica del ojo.

- Galileo Galilei (1564-1642). Fue un defensor de la teoría copernicana, lo que le trajo grandes conflictos con la Inquisición de Roma, donde se le prohibió seguir defendiendo éste sistema. No obstante, era la teoría de la transubstanciación referida al sacramento de la Eucaristía, y no la teoría geocéntrica, el verdadero meollo del problema.

Este astrónomo que en 1610, al descubrir los cuatro satélites principales de Júpiter, encuentra la comprobación objetiva de la teoría copernicana, también descubrió las leyes de la caída libre, de la inercia, de la oscilación del péndulo y los principios de escala en la resistencia de materiales. Con Galileo se inicia la Física moderna, al introducir el Método Científico y al transformar el tiempo, de una función discreta a una función continua. Desde 1609 construyó un telescopio e hizo hallazgos y observaciones (manchas solares, cuatro lunas de Júpiter, fases de Venus, montañas lunares, etc.), que publicó en 1610 en *Siderius Nuncius*. Con las fases de Venus, advierte la rotación de este planeta entorno al Sol y no a la Tierra.

La difusión del telescopio indujo en el siglo XVII una oleada de nuevos descubrimientos. Entre los astrónomos de ésta época tenemos a Simón Marius (lunas de Júpiter, detección de la nebulosa de Andrómeda en 1612), Christoph Scheiner (primera obra sistemática de las manchas solares), Johannes Hevelius (observaciones de la Luna y los cometas), Christian Huygens (descubrimiento del anillo de Saturno y de Titán el mayor satélite del planeta), Giovanni Doménico Cassini (hizo numerosas observaciones planetarias, descubrió cuatro satélites de Saturno), Olaus Römer (determinación de la velocidad de la luz a partir de los

eclipses de los satélites de Júpiter), John Flamsteed (fundación del observatorio de Greenwich en 1675, catálogo estelar).

- Isaac Newton (1643-1727). Nacido un año después de la muerte de Galileo, es el creador de la Ley de Gravitación Universal, según la cual la caída de los cuerpos y el movimiento de los astros, se rigen por una misma fuerza. De aquí la importancia de dicha ley expresada como una teoría matemática capaz de explicar el movimiento de los cuerpos celestes.

En 1671 construyó un telescopio reflector, y al tiempo revoluciona los principios de la óptica con su descubrimiento de los colores en el espectro visible. Además, para sus desarrollos, creó su propia herramienta: el cálculo diferencial (que denominó Fluxiones), cuando contemporáneamente lo hacía Leibniz, por separado.

El descubrimiento de la Ley de la Gravitación Universal permitió, no sólo asentar el sistema copernicano sino, aumentar la precisión de los cálculos de órbitas lunares y planetarias, pues la ley también tenía en cuenta las perturbaciones gravitatorias entre los cuerpos que intervienen.

En el siglo XVIII y principios del XIX la mecánica celeste se desarrolla. No existe el computador. Halley calcula la órbita elíptica del cometa de 1682. Kant atribuye en 1755 la génesis del sistema solar a un proceso mecánico. Lagrange estudia en 1788 el conocido problema de los tres cuerpos y algunos casos especiales con solución. Laplace publica en 1799 su *Mecánica Celeste* y descubre la invariabilidad del eje mayor de las órbitas planetarias. Leverrier y Adams predicen la existencia de Neptuno por las perturbaciones que sufre Urano y el planeta es descubierto en 1846 en el Observatorio de Berlín. Bessel deduce en 1844, por las perturbaciones del movimiento propio de Sirio, la existencia de su compañera desconocida, que efectivamente es observada en 1862.

También, la técnica instrumental maduró en los siglos XVIII y XIX, lo mismo que las técnicas y métodos de medida experimentan un avance continuo. Nacen los primeros catálogos estelares. Con las investigaciones sobre el espectro solar y las rayas oscuras que llevan su nombre (1814), con la creación del análisis espectral por R. W. Bunsen y G. R. Kirchhoff (1895) y con la introducción de los métodos de fotografía y los fotómetros en la segunda mitad del siglo XIX, se funda la astrofísica.

### 1.1.8 La Astronomía Moderna y Contemporánea

- Edwin Hubble (1889-1953). La época grande de la cosmología se inicia a principios de éste siglo con la construcción de grandes telescopios como el de Monte Wilson en California (100 pulgadas). En 1917 los astrónomos identifican estrellas individuales en galaxias cercanas. Se inicia la gran discusión entre Curtis y Shapley, el primero sosteniendo la existencia de Universos islas y el segundo, un verdadero experto en estrellas cefeidas, resistiéndose a que nuestra galaxia perdiera su condición de privilegio; en el Smithsonian, el 26 de abril de 1920 confrontan sus tesis como si tratara de Copérnico y Ptolomeo. Para 1924 Hubble había descubierto 36 cefeidas en "nebulosas" espirales (galaxias)

extendiéndose así y de manera definitiva, el tamaño del Universo más allá de la Vía Láctea.

Hubble utiliza esos faros del Universo, constituidos por estrellas variables pulsantes de período regular. En 1929 da una noticia sorprendente, por su simplicidad y trascendencia, en un trabajo suyo titulado "Una relación entre la distancia y la velocidad radial de las nebulosas extragalácticas", en el que advierte que mientras más lejos está una galaxia, con mayor velocidad se aleja de nosotros; en esta relación, a doble distancia doble velocidad de recesión, a triple distancia triple velocidad de recesión.... Las consecuencias: el Universo se expande. Ese Universo homogéneo e isótropo, que se expande de forma relativista, que según Lemaitre debió nacer de una explosión, tiene un límite constituido por su tejido de expansión, cuyos cuerpos viajan aproximándose a la velocidad de la luz.

- Albert Einstein (1879-1955) y Stephen Hawking (1942). Einstein elimina el concepto newtoniano de espacio absoluto y demuestra que la luz además de ser onda, también se comporta como partícula. Con su expresión  $E = mc^2$  de 1905, al formular la Teoría Especial de la Relatividad (TER), los cuerpos pueden convertirse en luz y viceversa: Materia y Energía son entonces dos aspectos de la misma cosa. En 1916 publica la Teoría General de la Relatividad (TGR), que considera la aceleración de los cuerpos y con la cual la gravedad se explica, no como una fuerza a distancia sino, como la deformación del Espacio-Tiempo causado por la masa de los astros: La Masa le dice al Espacio como se curve y el Espacio le dice a la Masa como se mueva.

El soporte para la TER y la TGR está en la teoría Electromagnética de Maxwell (1831-1879), en el concepto de campo de Hertz (1857-1894) y Lorentz (1853-1928), y en el espacio pseudo euclídeo de Minkowsky (1864-1909) y la geometría curva de Riemann (1826-1866). Los aportes de A. Einstein, al lado de la Teoría Cuántica de Max Plank (1858-1947), la Teoría Atómica de Niels Bohr (1885-1962) y la Nueva Teoría Cuántica de 1925, permiten rehacer los fundamentos de la concepción del Universo.

Hoy los Modelos Cosmológicos y la Astronomía Observacional se muestran como poderosos soportes y única vía para continuar el desarrollo que antes pudieron jalonar los grandes aceleradores de partículas. Ahora es poco viable recurrir a los procedimientos de antes a causa del enorme costo que tienen los métodos instrumentales de la física de partículas, para avanzar en el conocimiento del Universo y de las leyes que rigen el cosmos.

## 1.2 ESTRELLAS Y MEDIO INTERESTELAR

### 1.2.1 Evolución Estelar

Las estrellas llegan a existir varios miles de millones de años, por lo cual no puede observarse la evolución de una única estrella desde su nacimiento hasta su muerte. Sin embargo, es posible construir un modelo de la evolución estelar al examinar numerosas estrellas que se encuentran en diferentes etapas de su



Figura 1.1: Esta fotografía, obtenida por el Telescopio Espacial Hubble, muestra una región de formación de nuevas estrellas en la nebulosa M16, ubicada a 6,500 años luz de la Tierra en la constelación Serpens.

existencia.

El nacimiento de una estrella tiene lugar en el medio interestelar, ver fig. 1.1; donde existen grandes masas de hidrógeno, helio y otros elementos en menor proporción, todos en forma gaseosa, los cuales van desarrollando débiles atracciones gravitatorias entre sí. Esta interacción tiende a agrupar ese material en nubes mayores, que a su vez se unen con otras similares hasta llegar a la primera etapa de la evolución estelar: una gran acumulación de gas y polvo, a la que se denomina núcleo pre-estelar.

A medida que se suma más material, la gravedad se hace cada vez más intensa. Cuando la protoestrella alcanza entre 0.1 y 1.4 veces la masa de nuestro Sol, la densidad y temperatura en su núcleo aumenta progresivamente, hasta causar el inicio de una reacción nuclear: millones de toneladas de átomos de hidrógeno se fusionan a cada segundo, desprendiendo gran cantidad de energía y transformándose en helio.

Mientras que la gravedad atrae a estos materiales hacia el núcleo, la irradiación del calor producido por las reacciones nucleares los empuja hacia afuera, por lo que se llega a un equilibrio hidrostático estable: a partir de ese momento, puede decirse que ha nacido una estrella.

En 1911 el astrónomo holandés Ejnar Hertzsprung, al observar las estrellas de algunos cúmulos estelares, notó que existía una relación directa entre su magnitud absoluta y su temperatura, véase [6]. Dos años más tarde, el

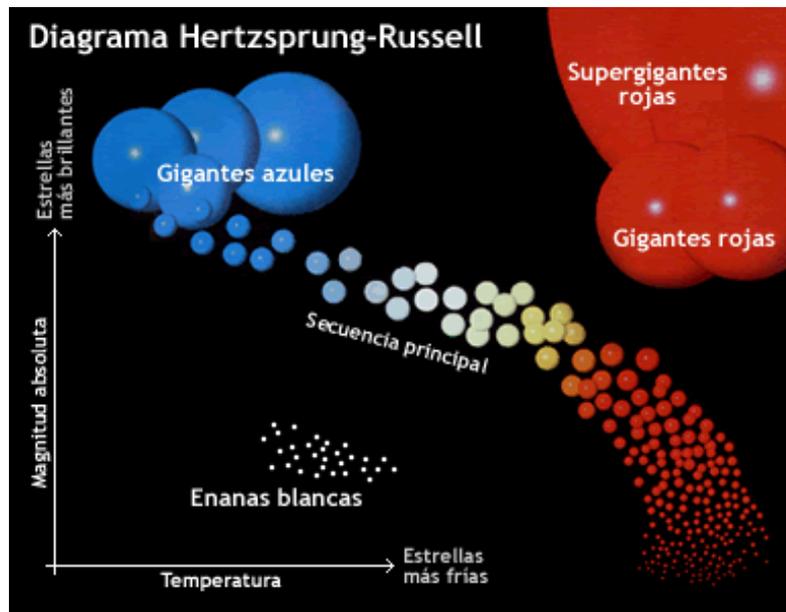


Figura 1.2: Diagrama H-R.

estadounidense Henry Norris Russell obtuvo el mismo resultado al estudiar todas las estrellas cuya distancia al Sol ya era conocida.

Precisamente, si se representan gráficamente los tipos espectrales o temperaturas de distintos tipos de estrellas en función de su magnitud absoluta, ver fig. 1.2, obtenemos lo que en honor a ambos astrónomos es denominado "diagrama Hertzsprung-Russell":

Las estrellas son muy diferentes entre sí, por lo que se suele adoptar la masa del Sol (aproximadamente 300,000 veces la de la Tierra) como unidad para compararlas, ver fig. 1.3. Tomando este valor como parámetro, la masa de una estrella puede ir de 0.08 a 100 masas solares, si bien la mayoría tiene una masa aproximadamente similar a la de nuestro Sol, y las estrellas que sobrepasan las 10 masas solares son poco comunes.

El rango de densidad de la materia en las distintas estrellas también es muy amplio. Por ejemplo, una gigante roja, ver fig. 1.4, como Betelgeuse es menos densa que el aire que respiramos, mientras una muestra de material de una enana blanca del tamaño de un terrón de azúcar pesaría en la Tierra más de una tonelada.

El tiempo que una estrella transcurre en la secuencia principal varía según su masa: a menor masa, la estrella es capaz de mantenerse consumiendo hidrógeno por mucho más tiempo que una de mayor masa. De hecho, actualmente, nuestro Sol se halla en la secuencia principal y esta etapa continuará por alrededor de 5,000 millones de años más.

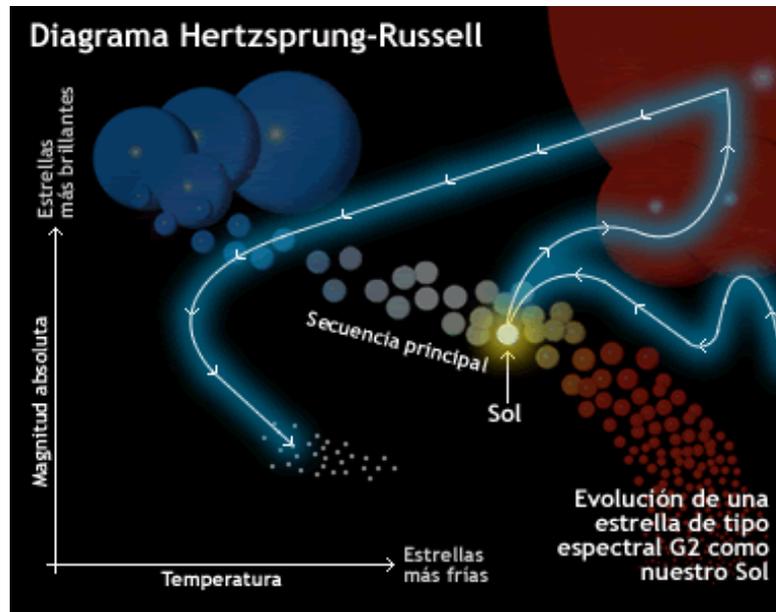


Figura 1.3: Posición de nuestro Sol en el diagrama H-R.

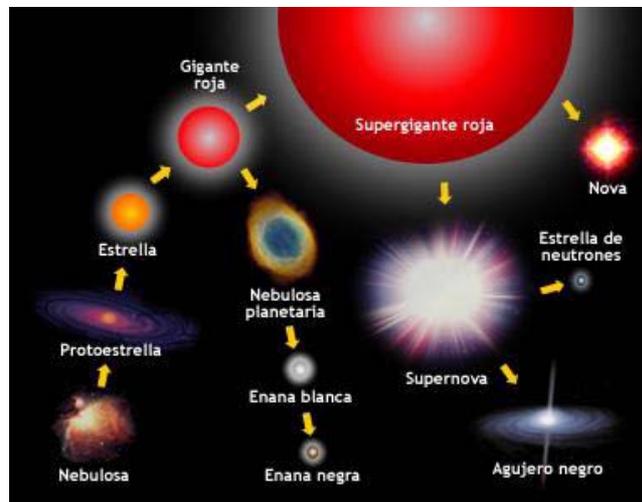


Figura 1.4: Esta figura muestra la etapa de la vida de las estrellas.

El modo en que se produce la muerte de una estrella depende decisivamente de su masa inicial. Si posee entre 0.08 y 8 masas solares, las capas exteriores de la estrella son expulsadas al espacio, formando lo que se conoce como una nebulosa planetaria; al detenerse la fusión nuclear en su interior, el núcleo inerte de la estrella se convierte en una enana blanca.

Muchas estrellas conforman sistemas múltiples, mayormente binarios, en los cuales dos estrellas orbitan una alrededor de la otra de acuerdo a las leyes de Kepler. Los sistemas binarios son muy útiles, dado que el análisis de las órbitas de sus integrantes es la única forma de determinar directamente la masa de las estrellas.

Cuando una enana blanca y una gigante roja forman un sistema binario, se provoca un flujo de material desde la más grande hacia la más pequeña, creando un disco de acreción a su alrededor.

Una vez que la enana blanca acumula suficiente material, se producen reacciones de fusión nuclear y la estrella aumenta súbitamente su brillo, convirtiéndose en una nova hasta volver a agotar su combustible. El proceso se repite cíclicamente; por ejemplo, la estrella T Coronae Borealis se convirtió en nova en 1866 y nuevamente en 1946.

Si la masa inicial de la estrella está por arriba de 8 masas solares, todo sucede mucho más rápido. Cuando cesan las reacciones nucleares, el núcleo ahora formado de hierro implosiona bajo su propia gravedad, tras lo cual se produce una explosión masiva, y la estrella se convierte en una supernova. La mayor parte del material de la estrella es expulsado al espacio, creando una nube de gas en expansión en cuyo centro se forma un cuerpo de altísima densidad (miles de billones de toneladas por centímetro cúbico) y unos pocos kilómetros de diámetro, formado enteramente por neutrones, o bien un agujero negro.

La estrella de neutrones resultante gira rápidamente (en algunos casos, muchas veces por segundo), y posee un poderoso campo magnético que direcciona los pulsos de radio emitidos por la estrella de manera similar a la de un faro, creando una fuente de radio pulsátil que los radioastrónomos denominan púlsar (contracción del inglés "pulsating star", estrella pulsátil). La rotación de este tipo de objetos se desacelera gradualmente, y eventualmente el púlsar se enfría hasta convertirse en un objeto inerte.

El primer púlsar fue descubierto en 1967 por Jocelyn Bell en M1, la Nebulosa del Cangrejo, ver fig. 1.5, y es el remanente de la explosión de la supernova del año 1054, que por algunos días fue visible a ojo desnudo en pleno día.

### 1.2.2 Poblaciones Estelares

Son dos diferentes grupos de estrellas. En la población I entran las estrellas de formación reciente como el Sol, que se encuentran en los brazos espirales de las galaxias; estas estrellas tienen elementos más pesados o metálicos. En la población II entran estrellas viejas, a veces contemporáneas con la formación de la galaxia, que se encuentran o en el núcleo galáctico o en los cúmulos globulares del halo. En la población II las estrellas casi no contienen elementos pesados, son de primera generación, con escaso contenido metálico pero ricas en hidrógeno.

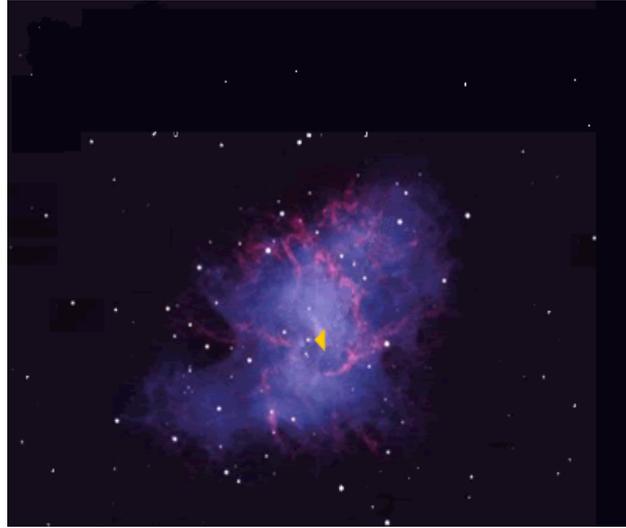


Figura 1.5: Esta fotografía muestra la Nebulosa Cangrejo, M1, en la constelación de Tauro, a 7,000 años luz de la Tierra. La nube de gas en expansión es iluminada por el pulsar (flecha) remanente de la explosión de una supernova en el año 1054, que fue observada por astrónomos chinos.

Las poblaciones pueden dividirse así:

1. Población I extrema (estrellas O y B, estrellas  $\delta$  Cephei, cúmulos abiertos).
2. Población I más vieja (estrellas A, gigantes normales, estrellas con fuertes rayas metálicas).
3. Población II intermedia (estrellas Mira de período corto, estrellas con velocidades superiores a los 30 km/s, perpendiculares al plano galáctico).
4. Población II del halo (estrellas en cúmulos globulares, estrellas RR Lyrae, subenanas).

Al observar nuestra galaxia, ver fig. 1.6, podemos identificar algunas estructuras, como el halo, el núcleo, el plano medio galáctico y el eje de rotación del sistema y el disco galáctico.

El halo es el volumen redondeado de la galaxia formado por cúmulos cerrados con órbitas poco circulares y muy inclinadas respecto al plano medio de la galaxia. La región es pobre en gas y polvo; y las estrellas orbitan a gran velocidad. El disco es el contorno de los brazos espirales localizados en el plano medio, donde hay estrellas jóvenes y se encuentran sumergidas en medio de gas y polvo. Las estrellas aquí, en cúmulos galácticos generalmente, están orbitando con trayectorias muy circulares y siempre perpendiculares al eje de rotación de la galaxia. La rotación galáctica es diferencial. Los objetos del centro son rápidos y los del disco lentos. El Sol podría pasar de un brazo a otro, mientras transita la galaxia con órbita casi circular.

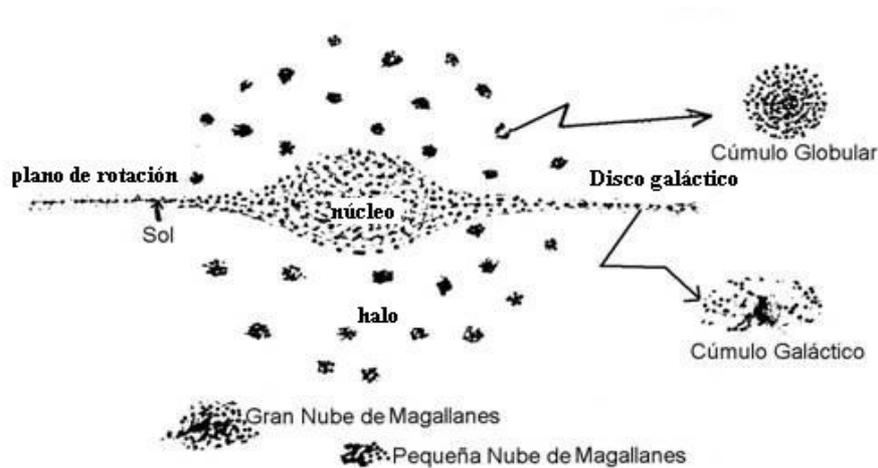


Figura 1.6: Perfil de la Vía Láctea con la posición relativa del Sol y las dos Nubes de Magallanes. En detalle los cúmulos estelares abiertos y cerrados típicos de esta galaxia.

### 1.2.3 Medio Interestelar

Una galaxia como la nuestra contiene unos cien mil millones de estrellas, que suman el 90 por ciento de su masa total. Sin embargo, esas estrellas sólo ocupan una pequeña parte del volumen total de la Vía Láctea. Se conoce como medio interestelar a la materia y energía que ocupa esos espacios, existentes entre las estrellas del común de las galaxias.

El medio interestelar está formado por una mezcla sumamente diluída de átomos, moléculas, polvo, radiación electromagnética, rayos cósmicos y campos magnéticos. La materia generalmente tiene dos componentes principales, las partículas de polvo y el gas. Por lo general, un 99 por ciento de la masa del medio interestelar está compuesto por partículas de gas, principalmente hidrógeno y helio.

El 1 por ciento restante contiene minúsculas partículas compuestas de silicatos, carbono, hielo de agua o hierro, de forma irregular y con un tamaño menor a un micrón. Se trata de material eyectado por las estrellas en las últimas etapas de su evolución, rico en elementos pesados, que se condensa al exponerse al frío del espacio interestelar y forma granos de polvo, que más adelante desempeñan un papel determinante en la formación de los planetas.

Como resultado de la nucleosíntesis primordial, el gas que compone el medio interestelar contiene un 75 por ciento de hidrógeno, un 25 por ciento de helio, y trazas de otros elementos de mayor peso atómico, denominados genéricamente "metales". Normalmente es un gas extremadamente tenue, con una densidad

típica de 1 átomo por centímetro cúbico, siendo un vacío muy superior al que es posible obtener en los mejores laboratorios terrestres.

A pesar de que las condiciones físicas del medio interestelar pueden variar drásticamente de una región a otra, la relación entre gas y polvo es aproximadamente constante en toda la galaxia. Precisamente, a causa de su rol intermedio entre la evolución estelar y la dinámica a gran escala de las galaxias, el medio interestelar es una de las áreas de estudio más importantes de la astrofísica moderna.

Dado que las condiciones imperantes en el medio interestelar son muy distintas a las que existen en la Tierra, las reacciones químicas que se desarrollan en el medio interestelar resultan diferentes a las terrestres. Por esta razón, recientemente se ha desarrollado una nueva rama de la astronomía, denominada astrofísica molecular, que tiene como objeto el estudio de la química en el medio interestelar.

Las estrellas se forman en regiones frías del medio interestelar a partir de nubes de hidrógeno neutro, cuya existencia es muy común en el plano galáctico. A su vez, reabastecen al medio interestelar de materia y energía a través del viento estelar, la expulsión de su envoltura y las explosiones de supernovas. Este intercambio, es el que define la rapidez con que una galaxia agota su contenido gaseoso, y por lo tanto, determina la duración del período de formación estelar activa en esa galaxia.

Los vientos estelares poseen velocidades típicas de 100 a 3,000 kilómetros por segundo, y la tasa de pérdida de materia en las estrellas masivas alcanza a veces una milésima parte de la masa del Sol por año. Además, las estrellas masivas emiten una gran cantidad de energía en forma de fotones, que ionizan el hidrógeno atómico del medio interestelar circundante, calentando el plasma hasta temperaturas del orden de los 10,000 °K. Ese gas, ionizado por la radiación estelar, recibe el nombre de región HII.

El estado actual de nuestros conocimientos sobre el medio interestelar que circunda al Sol se muestra en la figura 1.7 de 10 años luz a la redonda. En la actualidad, el Sol está atravesando un sector de la denominada Nube Interestelar Local, en color violeta, que mide 60 años luz de diámetro y se está apartando de la asociación de estrellas jóvenes de Scorpius-Centaurus.

El sector que estamos atravesando se mueve perpendicularmente (flecha naranja) al movimiento del Sol en el espacio (flecha amarilla). Los límites de la Nube Interestelar Local fueron determinados mediante la observación en longitudes de onda visibles y ultravioletas de algunas estrellas cercanas como Sirius, Alpha ( $\alpha$ ) Centauri y Altair, que revelaron la cantidad relativa de gas que se interpone entre ellas y nuestro sistema solar. Actualmente, el Sol se encuentra a 4 años luz del borde de la Nube Interestelar Local. En este diagrama, los movimientos son indicados en relación a las estrellas cercanas.

En la figura 1.8 de 1,500 años luz a la redonda del Sol puede verse una perspectiva más amplia de nuestro brazo de la Vía Láctea, obtenida a partir de numerosas observaciones y deducciones teóricas. La Nube Interestelar Local reside en un "agujero" de baja densidad en el medio interestelar, conocido como la Burbuja Local, mostrado en negro y con un diámetro de 300 años luz.

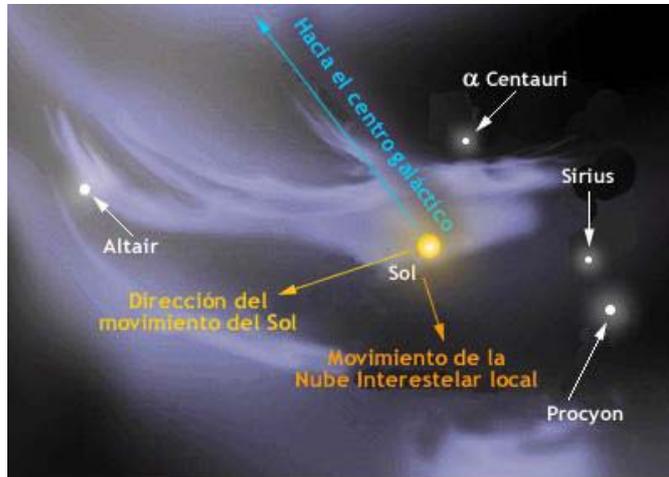


Figura 1.7: Nube Interestelar Local.

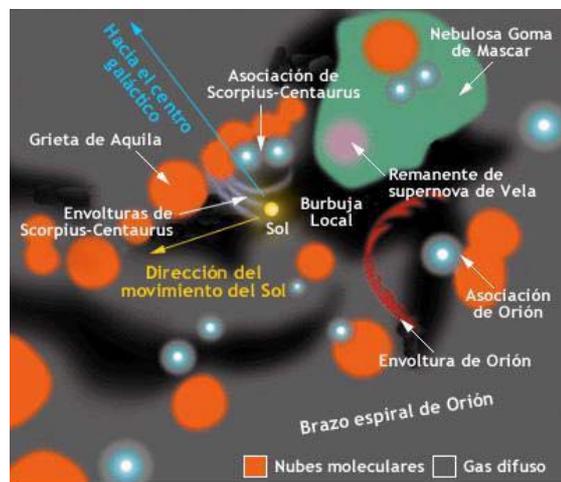


Figura 1.8: Burbuja Local.

En las cercanías se encuentran varias nubes moleculares de alta densidad, incluyendo la Grieta de Aquila, rodeada de regiones de formación estelar, cada una de las cuales se muestra en color rojo. La Nebulosa Goma de Mascar, en color verde, es una región HII, compuesta de hidrógeno ionizado a alta temperatura.

Dentro de la Nebulosa Goma de Mascar está el remanente de la Supernova de Vela, en color rosado, cuyo material se está expandiendo para formar capas fragmentadas similares a la Nube Interestelar Local. Futuras observaciones ayudarán a los astrónomos y astrofísicos a discernir más sobre nuestro vecindario galáctico y cómo éste puede haber afectado el clima de la Tierra en el pasado.

Uno de los grandes descubrimientos de la astronomía observacional del siglo pasado fué la detección a partir de 1937 de una serie de líneas muy estrechas en el espectro de estrellas levemente enrojecidas, que no podían tener un origen estelar. Astrónomos como Dunham, Adams, Swings y Rosenfeld concluyeron que se trataba de moléculas presentes en el difuso medio interestelar. Esto provocó el descubrimiento de las denominadas nubes moleculares, de pequeño tamaño pero sumamente masivas, donde se están formando nuevas estrellas.

Gracias a la elevada densidad en el interior de estas nubes, el resultado de esas reacciones es una sorprendente cantidad de moléculas complejas, incluyendo moléculas orgánicas, que han sido detectadas mediante observaciones espectroscópicas: agua, alcoholes, éteres, cetonas, hidrocarburos, aminas y aldehídos, entre otros.

Los rayos cósmicos y la radiación de las estrellas que nacen en el interior de dichas nubes también ionizan al gas circundante; a las bajas temperaturas que reinan en el interior de estas nubes, los iones resultan tremendamente reactivos. Se estima que la superficie de los granos de polvo actúa asimismo como catalizador de esas reacciones y como superficie de sostén para los reactivos, que se condensan sobre ellos. Al expandirse en el espacio, la interacción de una burbuja interestelar con este tipo de nubes moleculares puede dar origen a la formación de nuevas generaciones de estrellas.

El medio interestelar también es responsable del fenómeno denominado absorción o extinción cósmica, por el cual la intensidad de la luz de una estrella decrece a medida que se propaga a través del medio interestelar. La extinción es causada por la refracción y absorción de fotones en ciertas longitudes de onda. Por ejemplo, una longitud de onda de absorción típica es la del hidrógeno atómico, 121,5 nanómetros, a la que se denomina transición Lyman-alpha. Resulta casi imposible ver la luz emitida por una estrella en esa longitud de onda, ya que la mayor parte de la misma es absorbida durante su propagación hasta la Tierra.

Generalmente se divide al medio interestelar en tres fases, de acuerdo al modelo desarrollado inicialmente por Christopher McKee y Jeremiah Ostriker en 1977, y que ha resultado la base de los estudios realizados desde entonces. Dependiendo de la temperatura del gas componente del medio interestelar, se habla de fase "caliente" (millones de grados Kelvin), "tibia" (miles de grados Kelvin) o "fría" (decenas de grados Kelvin). La determinación de las proporciones relativas de estas tres fases en el medio interestelar es todavía un tema

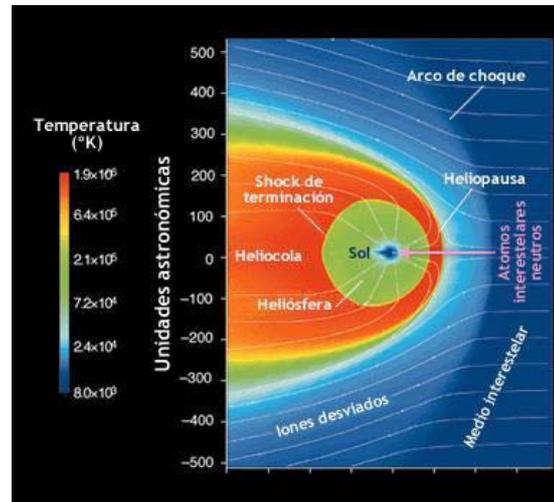


Figura 1.9: Viento Solar y Viento Interestelar

de considerable discusión en la comunidad astronómica internacional.

#### 1.2.4 La interacción del Sol con el medio interestelar

El viento solar, ver fig. 1.9, que emana del Sol llena un volumen del espacio alrededor del sistema solar, llamado heliosfera, que interactúa con el flujo de materia en el medio interestelar. El viento solar es un gas ionizado, que reduce su velocidad a niveles subsónicos al llegar al denominado "shock de terminación" y se detiene efectivamente al llegar a la heliopausa, el límite exterior de la heliosfera. Las partículas cargadas del viento interestelar (líneas blancas), en su mayoría iones de hidrógeno, son desviados a lo largo del límite de la heliosfera (la heliopausa), mientras las partículas neutras (flecha rosa), en su mayoría átomos de hidrógeno y helio, penetran la heliosfera.

El viento interestelar también "sopla" en dirección contraria al viento solar (líneas blancas dentro de la heliosfera), forzándolo a fluir formando una heliocola. Debido a que el viento solar cambia a lo largo de los ciclos de actividad solar, y el medio interestelar es una estructura heterogénea, hay una interacción siempre cambiante entre la heliosfera y su entorno galáctico. En este diagrama los límites de las características heliosféricas están mapeados de acuerdo a sus temperaturas relativas.

Aunque los iones, ver fig. 1.10, del medio interestelar resultan desviados alrededor de la heliosfera, la mayor parte de los átomos interestelares neutros fluyen a través del sistema solar. De hecho, un 98 por ciento del gas difuso en el interior de la heliosfera excluyendo al material asociado con cuerpos planetarios y cometas es de origen interestelar; la densidad del material interestelar y el

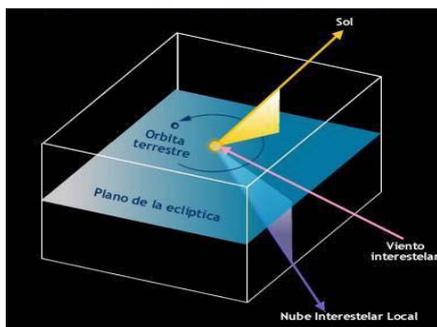


Figura 1.10: Movimientos relativos del Sol, la Nube Interestelar Local y el viento interestelar.

viento solar se equiparan cerca de la órbita de Júpiter. Aunque pueda resultar sorprendente, esto se debe a que el viento solar debe llenar un volumen cada vez mayor a medida que se aleja del Sol, por lo cual su densidad es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al Sol. En cambio, la densidad de los átomos neutros del viento interestelar cambia muy poco al fluir a través de la heliósfera, hasta que finalmente éstos resultan ionizados.

La primera detección de materia de origen interestelar dentro del sistema solar fue efectuada en 1960 por un satélite de observación de la geocorona terrestre, una capa de átomos de hidrógeno neutro que se forma en la parte exterior de la atmósfera de nuestro planeta. Se detectó la presencia de átomos de hidrógeno neutro con una distribución espacial distinta a la de la geocorona, lo que evidenciaba su origen interestelar.

## 1.3 GALAXIAS Y COSMOLOGÍA

### 1.3.1 Galaxias

Las galaxias son gigantescas agrupaciones de estrellas, gas y polvo, para más detalle consultar [6]. En su interior, las estrellas se organizan en cúmulos que han nacido de una misma nube de gas y polvo. Dichas estrellas, aunque congénitas, pueden estar unidas por la gravedad, o bien, pueden estar alejándose lentamente unas de otras. En el primer caso, se trata de cúmulos globulares o cerrados, donde el grupo tiene forma esférica, y está constituido por miles de estrellas viejas. En el segundo caso, por regla general, se tienen cúmulos galácticos o abiertos, denominados así por su forma irregular dada la dispersión de las estrellas, cuyo número de miembros es de algunos cientos de estrellas. Distinguimos en la galaxia su núcleo, su halo y su plano medio con brazos espiralizados.

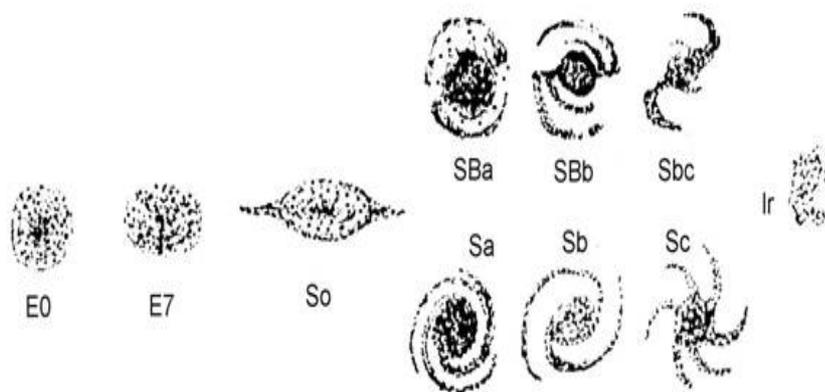


Figura 1.11: Sistema de clasificación de las galaxias. La frecuencia de las elípticas es 15%, de las lenticulares 6%, de las espirales 76% y de las irregulares 3%.

### 1.3.2 Tipos de Galaxias

Según Edwin Hubble, la clasificación de las galaxias según su forma está dada por la figura 1.11. Con E se codifican las elípticas, con SO las lenticulares, con S las espirales, con SB las barradas y con Ir las irregulares.

Se ha propuesto un esquema evolutivo de las galaxias sugiriendo que ellas empiezan sus vidas como estructuras esféricas que paulatinamente se van achatando, al contraerse gravitacionalmente, haciéndose elípticas y aumentando su velocidad rotacional. A su vez, las elípticas evolucionarán a espirales normales o barradas, mientras los núcleos van perdiendo importancia volumétrica y los brazos se van desarrollando. Las irregulares, en éste esquema, son las galaxias más jóvenes que acabarían; como quiera que nunca muestran estructura espiral o elipsoidal definida y que son agregados de polvo, gas y estrellas distribuidas aleatoriamente, siendo el resultado final de la evolución galáctica.

Pero la dificultad de esta teoría, en la cual las galaxias esféricas se transforman en elípticas, y estas en espirales, aparece cuando las observaciones señalan que las galaxias esféricas son tan lentas en su rotación, que difícilmente se achatarían; aún más, las elípticas no pueden desarrollar brazos espirales mientras su rotación no sea diferencial en un grado mínimo, ni pueden generar espirales teniendo más masa que estas.

En la actualidad se cree que la morfología de las galaxias se debe más bien a la interacción que tuvieron en el pasado con otras galaxias.

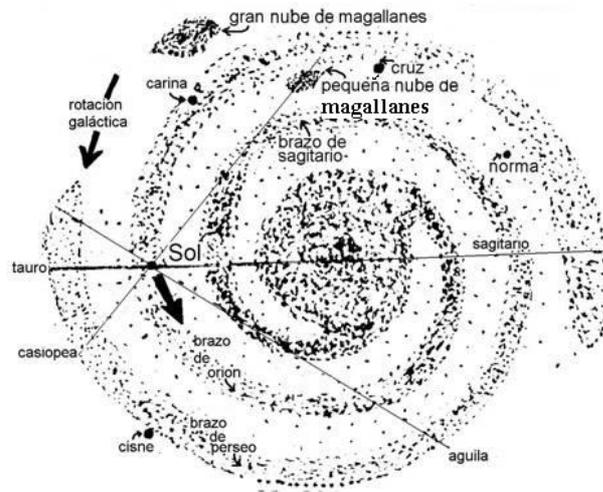


Figura 1.12: La vía Láctea con las nubes de Magallanes y el Sol sobre el brazo de Orión. Se muestra la rotación galáctica.

### 1.3.3 Vía Láctea

Es nuestra galaxia, ver fig. 1.12, con 100 mil millones de estrellas. El diámetro es de 100 mil años luz, el espesor de 20 mil años luz y estamos sobre el plano galáctico, a 30 mil años luz del centro. La galaxia muestra por lo menos tres brazos así: el de Sagitario a 24 mil años luz del centro galáctico, el de Orión (conteniendo el Sol) a 30 mil años luz del centro galáctico y el de Perseo a 36 mil años luz. El Sol órbita la galaxia a  $250 \text{ kms}^{-1}$  y tarda unos 200 millones de años en completar su órbita, véase [6].

Las dos nubes de Magallanes son satélites de la Vía Láctea a modo de un sistema planetario; la mayor de las nubes a 160 mil años luz tiene 10000 millones de estrellas y un diámetro de 35 mil años luz; y la menor a 190 mil años luz tiene 10 mil millones de estrellas y un diámetro de 20 mil años luz. Ambas son tipo irregular mientras la Vía Láctea es del tipo Sb.

### 1.3.4 El grupo local y el super grupo local

El grupo local lo conforman unas 30 galaxias siendo las más importantes la nuestra y la de Andrómeda (que en estrellas supera en 1.5 veces a la Vía Láctea). En este cúmulo reducido tenemos también M 32 (compañera de Andrómeda), M 33 (Nebulosa del Triángulo), And I, And II, And III (también compañeros de Andrómeda), Leo I, Leo II (ambos a 750 mil años luz), las del catálogo NGC de números 6822 (tipo Ir), 185 (tipo E0), 205 (tipo E6) y 147 (tipo E4), la IC 1613 (galaxia Ir de 10000 a. l. de diámetro), la Carina, la Formax, la Draco y

Sculptor.

Pero el grupo local pertenece al súper grupo local cuyo centro es Virgo a 50 millones de años luz de nosotros y compuesto por miles de galaxias ligadas gravitacionalmente en cúmulos. Entre sus muchos miembros diseminados en un volumen de unos 75 millones de años luz, se destacan Osa Mayor, Canes Venatici, Sculptor, grupo local, M 66, M 101, M 81, los NGC 4274, NGC 3245, NGC 5566, etc.

No obstante hay otros supercúmulos con cúmulos tan destacados como Boyero, el más lejano fotografiado, distante unos 5 mil millones de años luz y quien se aleja a la mitad de la velocidad de la luz, o el de Cabellera con unos 1000 miembros brillantes a 400 años luz ubicado, como su nombre lo indica, en la constelación Cabellera de Berenice.

### 1.3.5 Cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias

Las galaxias se organizan en colonias desde docenas hasta miles en cada una, llamadas cúmulos de galaxias. Estos a su vez, se organizan en cúmulo de cúmulos, los cuales se distribuyen uniformemente en el espacio.

Algunos cúmulos galácticos (nombres dados por la región), son:

Virgo, a 36 a.l., con 2500 objetos, alejándose a  $1150 \text{ kms}^{-1}$ .

Pegaso I a 130 a.l., con 100 objetos, alejándose a  $3800 \text{ kms}^{-1}$ .

Piscis a 130 a.l., con 100 objetos, alejándose a  $5000 \text{ kms}^{-1}$ .

Cáncer a 160 a.l., con 150 objetos, alejándose a  $4800 \text{ kms}^{-1}$ .

Perseo a 175 a.l., con 500 objetos, alejándose a  $5400 \text{ kms}^{-1}$ .

Gemini a 570 a.l., con 200 objetos, alejándose a  $23300 \text{ kms}^{-1}$ .

Bootes a 1240 a.l., con 150 objetos, alejándose a  $39400 \text{ kms}^{-1}$ .

### 1.3.6 Cosmología

Aún los astrónomos no saben con exactitud la edad del Universo y menos si éste es cerrado o abierto. La mayor parte admite que tenga 13.8 mil millones de años, y prácticamente, todos admiten que se originó a partir del big bang, véase [6].

Una de las pruebas del Big Bang es la expansión que se deduce al observar el corrimiento al rojo de las galaxias lejanas, hecho que nos lleva a un origen de materia comprimida si retrocedemos en el tiempo. En tales circunstancias deberíamos observar la luz de la gran explosión y deberían existir unos determinados desechos en la composición química del Universo, a causa de las reacciones nucleares ocurridas durante el paroxismo.

Ambas evidencias se tienen, de un lado la radiación de fondo de  $3^\circ\text{K}$  y de otro, las grandes cantidades de helio y las concentraciones de deuterio, isótopo del hidrógeno, que está presente en todo el Universo en una proporción de 20 a 30 partes por millón, confirmando que la temperatura, tres minutos después de la explosión, estaba en el justo punto para facilitar que los núcleos de deuterio se formaran, pues en las estrellas no pueden porque los enlaces de un neutrón con un protón (deuterio) no son muy fuertes.

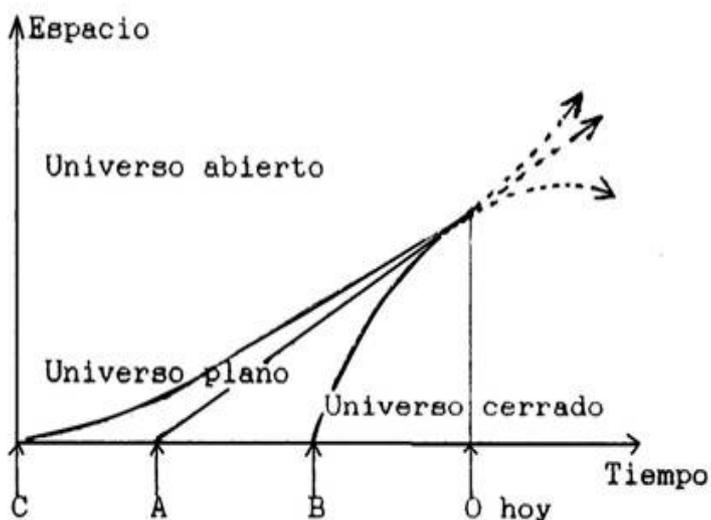


Figura 1.13: OA tiempo de Hubble ( $1/H$ ); OB tiempo cósmico, Universo abierto; OC tiempo cósmico, Universo cerrado.

Ninguna de estas posibilidades conduce a aclarar por qué la curvatura media del espacio tiempo es tan próxima a cero. Las observaciones actuales nos dan un error en la masa del Universo, entre diez veces y la décima parte de un valor crítico, que se correspondería con curvatura cero. De no ser así, la velocidad con la cual se ha expandido en los inicios (tiempo de Planck) no hubiese alcanzado un justo valor cercano al valor crítico, con una precisión de uno por 1060, que permitiera el que la materia no se disipe tan velozmente, como para no permitir la formación de galaxias, ni tan lentamente, como para que la gravedad hubiera interrumpido rápidamente la actual estructura que ofrece el Universo.

Conforme se han determinado, con mayor precisión las distancias a las galaxias más lejanas, se hizo necesario modificar la constante de Hubble. Como bien es sabido, ella está dada por el cociente de la velocidad de recesión de una galaxia y la distancia a la misma, en años luz.

Si la distancia que nos separa de la galaxia B, ver fig. 1.13, es el doble de la que nos separa de la galaxia A, entonces la galaxia B se está alejando de nosotros con una velocidad que el doble de la velocidad de la galaxia A. Esta relación, conocida como la Ley de Hubble, se puede expresar así:

$$\text{velocidad de recesión} = \text{constante de Hubble} \times \text{distancia.}$$

(Como  $v = d/t$ , el inverso de la constante será tiempo).

Trabajando en el tejido de expansión del Universo, para conocer su distancia, con el valor  $H = 65 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , donde la velocidad alcanza el límite  $c$ ,

tenemos:

$300000 \text{ km/s} = 65 \text{ Kms}^{-1} \times \text{Mpc}^{-1} \times \text{radio del Universo visible}$ , donde  $\text{Mpc} = \text{Megaparsecs}$  y  $1 \text{ Parsec} = 3.08568025 \times 10^{16} \text{ m}$ .

Teniendo en cuenta que 1 parsec equivale a una distancia de 3.26 años luz, a fin de obtener el valor del tiempo por la antigüedad de lo observado, calculamos la distancia a la cual se encuentran los objetos más antiguos y lejanos, así:

radio del Universo visible =  $300000/65 \times 106 \times 3.26$  años luz,  
radio del Universo visible = 15000 millones años luz .

De esta manera, la edad del Universo, correspondiente a la constante de Hubble de  $65 \text{ Kms}^{-1} \times \text{Mpc}^{-1}$  y dada por el inverso de la constante H de Hubble es:

Tiempo de Hubble = 15000 millones años.

Surge, ahora un nuevo problema, los datos confirmados por otras determinaciones astronómicas, como la presencia de halos galácticos con materia poco luminosa, sugieren que nuestro Universo sería el descrito por la Teoría de la Relatividad General, y que se corresponde con un espacio cerrado. En tal caso su densidad, necesariamente, debe superar un valor crítico, para que el espacio sea cerrado y limitado.

A partir de datos astrofísicos disponibles en la actualidad, aquella densidad supera en 100 veces a la densidad media de la materia condensada en estrellas y galaxias. Ello conduce entonces a la posibilidad de que exista materia oscura por una cuantía de entre 10 y 100 veces la materia observable.

Si en el futuro se pudiera llegar a afirmar que esa masa oscura no existe en realidad, habría que realizar una profunda revisión de las concepciones teóricas actuales a pesar de su magnífica cohesión lógica y múltiples comprobaciones de validez.



## Capítulo 2

# Astrometría

### 2.1 COORDENADAS Y TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

#### 2.1.1 Coordenadas Astronómicas

Llamaremos espacio tridimensional al conjunto de números reales  $(x, y, z)$ , ver fig. 2.1. Cada terna ordenada se llama punto de este espacio. Para fijar la posición del punto necesitamos un sistema de referencia formado por tres rectas o ejes coordenados que se cortan en un punto llamado origen y una unidad de medida. A estos tres números se les llama coordenadas cartesianas respecto al sistema  $OXYZ$ .

Se puede definir también la posición respecto a un punto cualquiera  $P(x, y, z)$  mediante coordenadas polares. Proyectando el punto  $P$  sobre el plano  $OXY$  y definiendo la dirección hacia  $P$  mediante dichos ángulos, basta tomar la distancia  $r$  sobre esa dirección para llegar a  $P$ .

Las coordenadas polares se relacionan con las cartesianas mediante:

$$x = r \cos \phi \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$z = r \operatorname{sen} \theta$$

En Astronomía la posición de un astro se determina ordinariamente mediante coordenadas polares, para más detalle consulte [10]. Sin embargo y dado que en principio la distancia  $r$  es desconocida, solo nos preocupará la dirección  $OP$  del astro, determinable mediante las coordenadas angulares  $\varphi$  y  $\theta$ . Lo que hacemos es proyectar todos los astros sobre una esfera de radio arbitrario, que se denomina esfera celeste. Tal esfera está centrada en el observador. En realidad el observador, prescindiendo de irregularidades topográficas, solo vé una semiesfera celeste, limitada por un plano que pasa por el pie del observador y que corta a la esfera celeste en un círculo llamado horizonte, véase [8].

Clasificación de los sistemas de referencia:

Los sistemas de referencia se clasifican, según la elección del origen, en:

Coordenadas topocéntricas: Centradas en el observador.

Coordenadas geocéntricas: Centradas en el centro de la Tierra.

Coordenadas heliocéntricas: Centradas en el centro del sistema Solar.

Coordenadas galácticas: Centradas en el centro de la Galaxia.

Atendiendo a que sus valores dependan o no de la posición del observador las coordenadas se clasifican en :

Locales : Coordenadas Horizontales y Horarias

No Locales: Coordenadas Ecuatoriales , Eclípticas, Galácticas

Procederemos con las coordenadas Locales:

### Coordenadas horizontales

*Vertical*: En cada lugar de la superficie terrestre, la dirección de la plomada determina, sin ambigüedad y con gran precisión , la dirección de la vertical del lugar, que corta a la esfera celeste en dos puntos llamados zenit y nadir.

*Eje del mundo*: Es el eje de rotación de la esfera celeste causado por el movimiento de rotación de la Tierra. Este eje corta a la esfera celeste en dos puntos llamados Polos, Norte al situado sobre la esfera celeste en nuestro hemisferio, y Sur al opuesto.

*Horizonte astronómico*: Es el plano que pasa por el observador y es perpendicular a la vertical. Su intersección con la esfera celeste se llama línea del Horizonte.

*Plano meridiano del lugar*: Es el plano determinado por la Vertical y el Eje del mundo. Su intersección con la esfera celeste es el meridiano del lugar.

*Línea meridiana*: El plano meridiano y el horizonte se cortan según una recta llamada meridiana. Su intersección con la esfera celeste determina los puntos cardinales norte y sur.

*Línea perpendicular*: Es una línea perpendicular a la meridiana y situada en el plano del horizonte. Su intersección con la esfera celeste determina los puntos cardinales este y oeste.

*Latitud del lugar*: Al ángulo formado por la meridiana y el eje del mundo se llama latitud.

La vertical, meridiana, y perpendicular forman un triedro en el que si tomamos los ejes coordenados tal como están dibujados en la figura 2.2 resulta inverso ó retrógrado. Las coordenadas  $(x, y, z)$  se denominan rectilíneas horizontales.

### Las coordenadas esféricas horizontales

*Acimut  $a$*  : Es el arco, ver fig. 2.2, de horizonte contado desde el punto sur hasta la intersección del horizonte con la vertical del astro, en sentido retrogrado de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

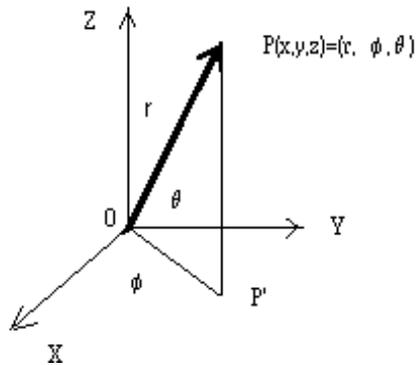


Figura 2.1: Espacio tridimensional.

*Altura h:* Es la distancia esférica del astro al horizonte. Varía de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  cuando la estrella está por arriba del horizonte y de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  cuando está por debajo.

*Distancia zenital z:* Es el arco complementario a la altura. Es decir la distancia de un astro al zenit,  $z = 90 - h$ .

Las líneas coordenadas son los Verticales caracterizados por  $a = cte$  y los almucantarantes con  $h = cte$  o  $z = cte$ . Los verticales son círculos máximos que pasan por el zenit y nadir y los almucantarantes son círculos menores paralelos al horizonte.

Por tratarse de coordenadas esféricas cualquiera:

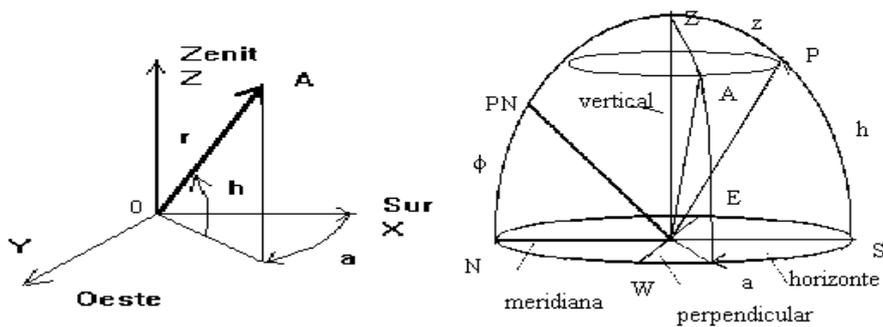


Figura 2.2: Coordenadas esféricas horizontales

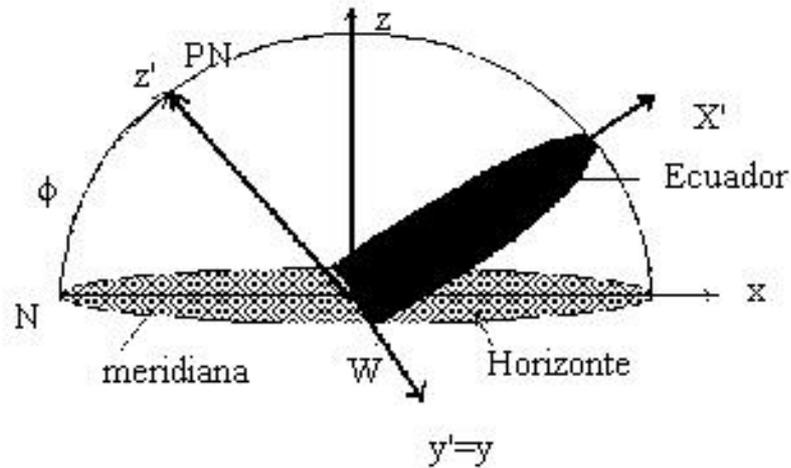


Figura 2.3: Coordenadas esféricas horarias.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(h) \cos(a) \\ r \cos(h) \operatorname{sen}(a) \\ r \operatorname{sen}(h) \end{pmatrix}.$$

### Coordenadas esféricas horarias

*Ecuador celeste:* Es el plano, ver fig. 2.3, que pasa por el observador y es perpendicular al eje del mundo. Su intersección con la esfera celeste también se llama Ecuador.

*Círculos horarios:* Son los círculos máximos de la esfera celeste que pasan por los polos celestes.

*Paralelos celestes:* Son los círculos menores paralelos al Ecuador.

El eje del mundo, la intersección del plano meridiano con el plano del ecuador, y la perpendicular, determinan un triedro centrado en el observador, que tal como está dibujado en la figura 2.3 y figura 2.4 es retrógrado. Las coordenadas de un punto  $A(x', y', z')$  se llaman rectilíneas horarias.

Las coordenadas esféricas horarias son:

*Ángulo Horario H:* Es el arco de ecuador, ver fig. 2.4, medido desde la recta de intersección del plano meridiano y el plano del ecuador, hasta el círculo horario del astro, en sentido retrógrado y desde 0h a 24h.

*Declinación  $\delta$ :* Es el ángulo medido desde el círculo del astro al Ecuador. Positiva hacia el Norte y negativa hacia el Sur. Varía pues entre  $90^\circ$  y  $-90^\circ$ .

*Distancia Polar P:* Es el complementario de la Declinación.

Las líneas coordenadas son las líneas horarias y los paralelos celestes. Por tratarse de coordenadas esféricas se cumplirá:

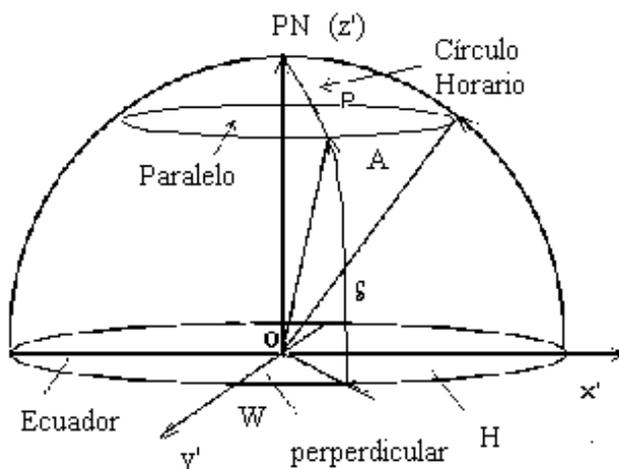


Figura 2.4: Coordenadas esféricas horarias.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos(\delta) \cos(H) \\ r' \cos(\delta) \text{sen}(H) \\ r' \text{sen}(\delta) \end{pmatrix}.$$

### Relación entre coordenadas horizontales y horarias

La relación entre las coordenadas horizontales y horarias viene dada por las expresiones conocidas como Fórmulas de Bessel, véase [10]:

$$\cos(\delta) \cos(H) = \text{sen}(\phi) \cos(h) \cos(\alpha) + \cos(\phi) \text{sen}(h),$$

$$\cos(\delta) \text{sen}(H) = \cos(h) \text{sen}(\alpha),$$

$$\text{sen}(\delta) = -\cos(\phi) \cos(h) \cos(\alpha) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(h).$$

Para la relación inversa (Horarias a Horizontales):

$$\cos(h) \cos(\alpha) = \text{sen}(\phi) \cos(\delta) \cos(H) - \cos(\phi) \text{sen}(\delta),$$

$$\cos(h) \text{sen}(\alpha) = \cos(\delta) \text{sen}(H),$$

$$\text{sen}(h) = \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(H) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\delta).$$

Los sistemas de coordenadas horizontales y horarias dependen del lugar del observador sobre la superficie de la Tierra, son por tanto sistemas locales. La altura y el azimut, merced al movimiento de la esfera celeste, cambian con la posición del observador y para un mismo observador cambian con el tiempo. En las coordenadas horarias el movimiento diurno solo afecta al ángulo horario H, mientras la declinación permanece fija con el tiempo. Observadores sobre el mismo meridiano terrestre miden la misma declinación y ángulo horario pero no si varía la longitud del observador. Los sistemas que estudiaremos a continuación tienen las coordenadas celestes independientes de la posición del observador y se denominan no locales.

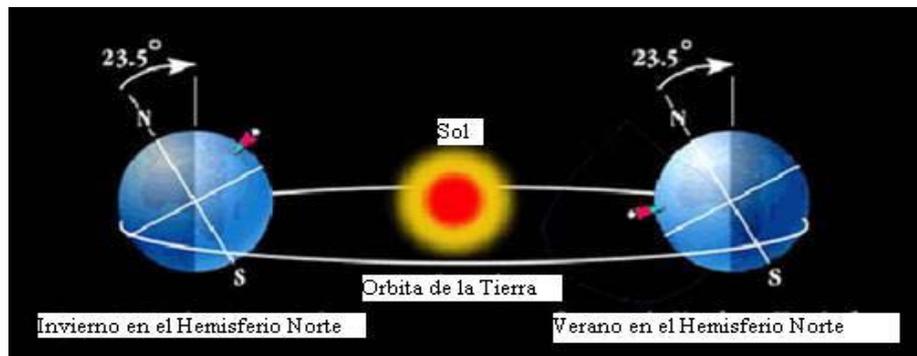


Figura 2.5: Esta figura muestra la Oblicuidad de la Eclíptica.

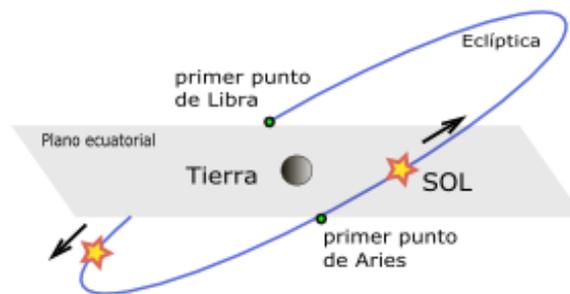


Figura 2.6: En esta vista se muestran los dos equinoccios que son la intersección del ecuador celeste con la eclíptica.

### Coordenadas ecuatoriales

El Sol, merced al movimiento real de la Tierra, describe una trayectoria aparente sobre la esfera celeste denominada, al igual que el plano que la contiene, eclíptica. A la línea perpendicular a dicho plano se le llama Eje de la Eclíptica, mientras que Oblicuidad de la Eclíptica: Es el ángulo que forma la eclíptica con el ecuador, véase [3]. Actualmente vale  $23^{\circ}26'$ , ver fig. 2.5.

*La Línea de Equinoccios:* Es la intersección del Ecuador con la Eclíptica, ver fig. 2.6. La intersección de esta línea con la esfera celeste son los puntos equinociales. Se llama punto vernal o punto Aries, al punto sobre la esfera celeste donde se ubica el Sol al pasar del hemisferio sur al norte.

*Punto libra:* Se denomina punto libra al punto diametralmente opuesto al punto Aries. Es el punto en el que el Sol pasa del Hemisferio Norte al Sur, cosa que ocurre hacia el 21 de Septiembre; iniciándose el otoño en el Hemisferio Norte y la primavera en el Hemisferio Sur.

*Triedro de referencia ecuatorial:* La línea de equinoccios (*eje x*), el diámetro

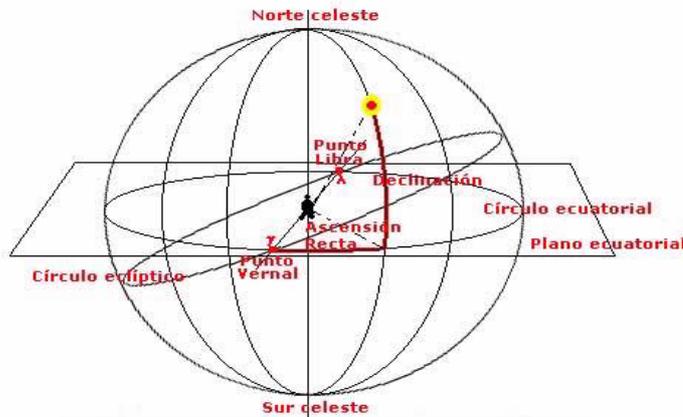


Figura 2.7: Sistema de coordenadas ecuatoriales.

ecuatorial perpendicular (*eje y*) y el eje del mundo (*eje z*), forman un triedro en el que cualquier punto viene representado por unas coordenadas rectilíneas ecuatoriales.

Las coordenadas esféricas ecuatoriales son:

*Ascensión Recta* ( $\alpha$ ) arco, ver fig. 2.7, contado en directo sobre el ecuador y a partir del punto Aries. Un giro completo son 24 horas, así que 1 hora equivale a  $15^\circ$ . Una hora tiene 60 minutos de arco y 1 minuto 60 segundos de arco. 4 minutos equivalen por cierto a  $1^\circ$  y es una antigua medida caldea de tiempo llamada *us*.

*Declinación* ( $\delta$ ): Ángulo que forma el astro con el ecuador, al igual que en coordenadas Horarias.

De la relación entre coordenadas cartesianas y esféricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\delta) \cos(\alpha) \\ r \cos(\delta) \text{sen}(\alpha) \\ r \text{sen}(\delta) \end{pmatrix}.$$

### Relación entre coordenadas horarias y ecuatoriales.

La única relación a establecer es entre el ángulo horario H y la Ascensión Recta  $\alpha$ .

El Tiempo sidéreo en un lugar e instante dado es el ángulo horario que forma el meridiano del lugar con el punto Aries en ese instante y representa el tiempo que ha transcurrido desde que el punto Aries pasó por el meridiano del lugar.

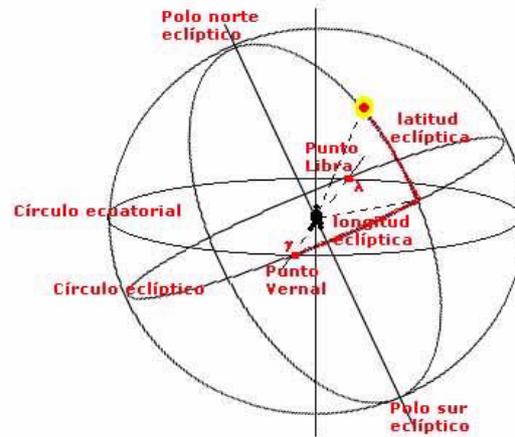


Figura 2.8: Sistema de coordenadas eclípticas.

Cuando un astro culmina o pasa por el meridiano  $H = 0$  por lo que el tiempo sidéreo local es la ascensión recta del astro.

### Coordenadas eclípticas

Las coordenadas esféricas eclípticas son:

*Longitud celeste ( $l$ ):* Es el arco de la Eclíptica contado a partir del punto Aries ver fig. 2.8 y en sentido directo.

*Latitud celeste ( $b$ ):* Es el ángulo que este astro forma con la eclíptica.

La relación entre coordenadas cartesianas y esféricas permite escribir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos(b) \cos(l) \\ r' \cos(b) \sen(l) \\ r' \sen(b) \end{pmatrix}.$$

### Relación entre coordenadas ecuatoriales y eclípticas.

La relación entre las coordenadas ecuatoriales y eclípticas viene dada por las expresiones conocidas como Fórmulas de Bessel:

$$\begin{aligned} \cos(b) \cos(l) &= \cos(\delta) \cos(\alpha), \\ \cos(b) \sen(l) &= \cos(\varepsilon) \cos(\delta) \sen(\alpha) + \sen(\varepsilon) \sen(\delta), \\ \sen(b) &= -\sen(\varepsilon) \cos(\delta) \sen(\alpha) + \cos(\varepsilon) \sen(\delta). \end{aligned}$$

Para la relación inversa (Eclípticas a Ecuatoriales)

$$\cos(\delta) \cos(\alpha) = \cos(b) \cos(l),$$

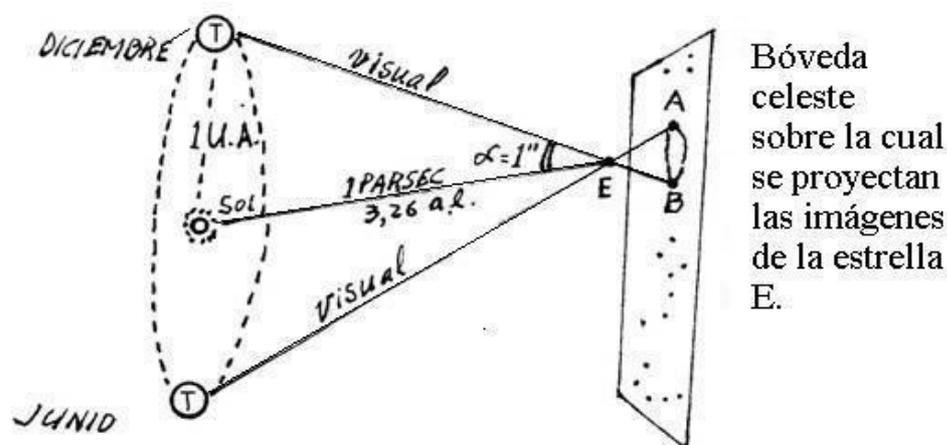


Figura 2.9: La paralaje de una estrella.

$$\begin{aligned}\cos(\delta)\text{sen}(\alpha) &= \cos(\varepsilon)\cos(b)\text{sen}(l) - \text{sen}(\varepsilon)\text{sen}(b), \\ \text{sen}(\delta) &= \text{sen}(\varepsilon)\cos(b)\text{sen}(l) + \cos(\varepsilon)\text{sen}(b).\end{aligned}$$

## 2.2 DISTANCIA A LOS SISTEMAS ESTELARES

La astrometría tiene como propósito medir de manera muy precisa la posición de los astros. A través de observaciones repetidas de la misma porción de cielo, se puede medir movimientos. Este movimiento puede tener dos orígenes:

- i) puede resultar el desplazamiento real del objeto;
- ii) o bien puede resultar a causa del movimiento de la Tierra alrededor del Sol,

y permite medir distancias a través de un método de triangulación.

Supongamos ver fig. 2.9 una estrella cercana. Al observarla desde los extremos de un diámetro de la órbita de la Tierra (observaciones separadas seis meses), la imagen de la estrella aparecerá proyectada sobre la bóveda celeste en dos puntos distintos, (A y B). Como el diámetro de la órbita de la Tierra se conoce, el triángulo que hacen las visuales, cuya base mide dos U.A., tiene solución.

Si el arco AB midiera dos segundos, el ángulo alfa, la media de AB, valdría un segundo de arco, y la distancia del Sol a la estrella mediría un parsec, equivalente a 3.26 años luz. El ángulo alfa se denomina la paralaje trigonométrica de la estrella.

Este método funciona hasta unos cientos de parsecs. Más distante a esto, el ángulo  $\alpha$  de paralaje se vuelve demasiado pequeño y hay que recurrir a otros métodos.

Por ejemplo, existen estrellas variables pulsantes, que permiten el cálculo de distancias mayores (que es la misma para todo el cúmulo estelar al cual pertenecen), para más detalle consulte [4]. Este método sirvió para determinar la distancia a la galaxia Andrómeda, que inicialmente se estimó en un millón de años luz y que, posteriormente, cuando se advierte la diferencia entre cefeidas de la población I y de la población II, se encuentra que la distancia a Andrómeda estaba errada.

Para los sistemas estelares más lejanos, nos basamos en el corrimiento al rojo que muestran las galaxias, como nubecillas en las cuales ya no se hace posible diferenciar estrellas individuales. No obstante, el comparar galaxias de un mismo tipo o forma, nos permite afirmar con alguna aproximación que las que aparecen en las imágenes con menor tamaño y brillo se encuentran a mayores distancias, que sus similares de gran tamaño y luminosidad.

## 2.3 EL ARREGLO DE GRANDES LÍNEAS DE BASE

El arreglo de grandes líneas de base (VLBA por sus siglas en inglés: Very Long Baseline Array, ver fig. 2.10) es un sistema de diez antenas de radio-telescopios, cada uno con un plato de 25 metros de diámetro y un peso de 240 tons, ver fig. 2.11. Desde Mauna Kea sobre la Isla Grande de Hawai hasta St. Croix en la Isla de Virginia en los Estados Unidos de América, el VLBA ocupa más de 5,000 millas, proporcionando a los astrónomos la visión más aguda que cualquier otro telescopio sobre la tierra o en el espacio. El VLBA tenía una habilidad para ver detalles finos equivalente a ser capaz de leer un periódico en los Angeles desde Nueva York. Una visión general del VLBA describe brevemente su equipo y diseño.

Las 10 antenas del VLBA son idénticas, manufacturados por la Universal Antenna Division del RSI. Las componentes fueron construidas en Texas, y entonces fueron transportadas en cada sitio por camión (excepto St. Croix y Mauna Kea). Una vez llegadas al sitio, se tomó seis a ocho meses para juntar la antena. La construcción fue empezada sobre los arreglos en 1986 y se completó en 1992.

### 2.3.1 ¿Qué es la RadioAstronomía?

Nosotros somos capaces de ver objetos porque nuestros ojos detectan la luz emitida o reflejada por dichos objetos. La luz consiste de ondas electromagnéticas. Los diferentes colores de la luz son ondas electromagnéticas de diferentes longitudes de onda.

La luz visible, sin embargo, cubre solamente una pequeña parte del rango de longitud de onda en el cual las ondas electromagnéticas pueden ser producidas. Las ondas de radio son ondas electromagnéticas de longitudes de onda mucho más grandes que la de la luz, véase [6].

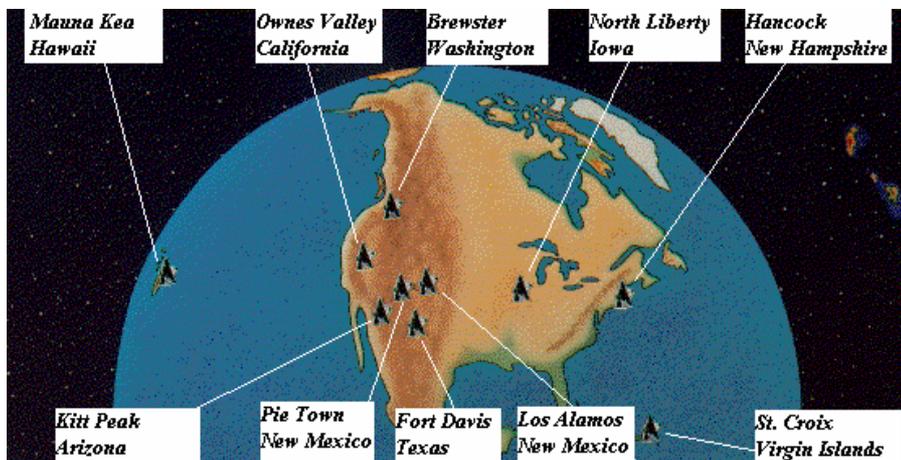


Figura 2.10: Very Long Baseline Array.



Figura 2.11: Partes de un radiotelescopio.



Figura 2.12: Centro de Operaciones del Arreglo VLBA.

Durante siglos, los astrónomos han aprendido acerca del cielo por el estudio de la luz que viene desde objetos astronómicos, primero por simple observación a los objetos y más tarde haciendo el uso de fotografías. Muchos objetos astronómicos emiten ondas de radio, como también ondas de luz, pero este hecho no fue descubierto hasta 1932. Desde entonces, los astrónomos han desarrollado sistemas sofisticados tales como el VLBA que les permite hacer imágenes a partir de las ondas de radio emitidas por objetos astronómicos.

Un número de objetos celestes emiten más fuertemente las longitudes de onda de radio que la de la luz, así, la radioastronomía ha revelado muchas sorpresas en la segunda mitad del último siglo. Al estudiar el cielo con telescopios radio y ópticos, los astrónomos pueden conseguir un entendimiento mucho más completo de los procesos para entender el universo.

### 2.3.2 Centro de Operaciones del Arreglo VLBA

Desde el Array Operations Center (AOC) en Socorro, Nuevo México, los operadores del VLBA, ver figura 2.12, son capaces de controlar y monitorear las estaciones vía remota a través del Internet. Los operadores pueden dirigir las antenas, seleccionar las frecuencias de radio para la observación, controlar la grabadora y monitorear el estado del equipo de cada sitio. En tiempo-real muestra si el estado de los arreglos es adecuado para los observadores, así como también monitorear sus experimentos.

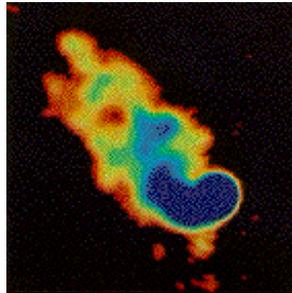


Figura 2.13: Análisis de un objeto con otro tipo de onda.

### 2.3.3 El Correlador

Los datos grabados en cada sitio del VLBA son mandados de regreso al AOC, por procesamiento del correlador, una computadora de propósito-especial con alta-interpretación que combina los datos desde cada estación para producir un único conjunto de datos a partir del cual las imágenes de alta-resolución pueden ser hechas. El correlador efectúa complejas operaciones matemáticas que permiten combinar las señales recibidas por las diez antenas. El correlador, diseñado y construido por el Observatorio Nacional de Radio Astronomía (NRAO, por sus siglas en Inglés), es capaz de efectuar 750 billones de operaciones por segundo.

### 2.3.4 El Producto Terminado

El resultado que se obtuvo desde el correlador es proporcionado a los astrónomos teóricos para involucrarse con la observación, el análisis más detallado y procesamiento de los datos. Esto se puede realizar en el AOC o en la universidad sede de los observadores. Dependiendo de sus intereses científicos, los investigadores pueden hacer imágenes en una variedad de formas, incluyendo tanto blanco y negro, como formatos de color, ver fig. 2.13.

### 2.3.5 Estación del Hardware del VLBA

#### Receptores de Radio.

Aunque son extremadamente sofisticados, los receptores de radio del VLBA efectúan funciones bastante similar a la del cualquier radio, ellos convierten las ondas de radio recogidas por la antena en señales eléctricas que pueden ser amplificadas y procesadas por equipos electrónicos adicionales. Los receptores de radio del VLBA están entre los más sensitivos del mundo. Ellos son enfriados por refrigeradores de helio líquido a temperaturas cercanas al cero absoluto (-273 grados Celsius) para ayudar a recibir señales extremadamente débiles desde el espacio. Las señales naturales desde los cuerpos astronómicos son billones

de veces más débiles que las señales recibidas por sistemas de comunicaciones ordinarias .

#### **Grabadoras, Estación de computadoras.**

Las señales de los receptores son amplificadas, digitalizadas y organizadas en un formato estandarizado, después son grabados en grabadores ultrarápidos. Una vez que las cintas contienen los datos registrados, se envían desde las estaciones del VLBA al correlador, en el centro de las operaciones de arreglos (AOC) en Socorro, Nuevo México. La estación de computadora en cada sitio controla todas las estaciones del equipo y asegura de que todas trabajen juntas correctamente. Cada computadora en un sitio también se comunica por Internet con un sistema de computadora maestra en el AOC, de modo que los operadores puedan supervisar la condición en cada estación simultáneamente.

#### **El reloj atómico (MASER de hidrógeno).**

Para la exactitud, cada estación utiliza este dispositivo para sincronizar sus relojes. Utilizando una resonancia natural de los átomos del hidrógeno como un estándar, las estaciones son capaces de mantener un cronometraje con una exactitud de un segundo en un millón de años. Este grado de exactitud es necesario para permitir que el correlator combine los datos de cada estación en una sola imagen.

#### **Estación meteorológica.**

Debido a que cada sitio es operado remotamente desde el AOC, es necesario para los operadores estar enterados de las condiciones meteorológicas que pueden afectar la calidad de los datos obtenidos durante una observación, o la seguridad del equipo. Cada estación envía continuamente al sistema informático principal en el AOC información sobre la temperatura del aire, el punto de condensación, la velocidad del viento, la dirección del viento, la presión barométrica y la precipitación.

### **2.3.6 La ciencia con el VLBA**

La visión aguda del VLBA, o la resolución, es una herramienta ideal para aprender nuevas cosas sobre una amplia variedad de objetos y de procesos astronómicos.

El VLBA puede mostrar nuevos detalles de los núcleos más potentes de los cuasares lejanos, los cuales expulsan enormes cantidades de energía. Puede hacer medidas exactas de la velocidad de los residuos de las estrellas que estallaron, conocidas como supernovas. Puede reducir la gran incertidumbre que todavía prevalece sobre algo tan fundamental como el tamaño de nuestro universo. Más cercano al hogar, el conocimiento exacto de la posición geográfica de cada estación permite que el VLBA sea utilizado para estudiar el movimiento

de las placas continentales y así, de los procesos de la Tierra que producen terremotos y los volcanes.

Muchos de los descubrimientos del VLBA eran totalmente inesperados. Incluso antes de llegar a ser completamente operacionales, el VLBA produjo resultados inesperados, incluyendo el descubrimiento de áreas inusuales de monóxido de silicio alrededor de viejas estrellas y de un jet extrañamente torcido de partículas rápidas que venían del núcleo de una galaxia a una distancia de 300 millones de años luz.

El VLBA es financiado por la Fundación Nacional de la Ciencia. Éste puede usarse por cualquier científico de los Estados Unidos y el exterior. Científicos que desean utilizar el VLBA envían propuestas al Observatorio Nacional de Radio astronomía, describiendo lo que quieren observar y los beneficios científicos que esperan ganar de la observación. Estas propuestas se envían a científicos fuera del NRAO para revisión y comentarios. Finalmente, un comité de asignación de tiempo concede el tiempo de observación, tomando en cuenta el mérito científico de las propuestas, según lo indicado por los revisores. Este proceso es típico en observatorios astronómicos internacionales.



## Capítulo 3

# Complejo del Tauro, T-Tauri y estudios previos del VLBA.

### 3.1 COMPLEJO DEL TAURO

#### 3.1.1 Las constelaciones: un aparente imagen estelar.

Desde nuestra perspectiva visual como habitantes de un pequeño planeta orbitando alrededor de una estrella en una cierta galaxia espiral, observamos, en todas las direcciones de la bóveda celeste, agrupaciones aparentes de estrellas que llamamos constelaciones.

Decimos que son agrupaciones aparentes porque, realmente, no tienen que estar —de hecho no lo están en general— agrupadas físicamente. Es esta la misma situación que se nos plantea en nuestra vida cotidiana cuando observamos a lo lejos dos objetos que aparentan estar juntos, y, ante la duda de si lo están o no, nosotros nos movemos lateralmente a una distancia suficiente para observarlos desde una perspectiva lateral. Es en ese momento cuando, vistos desde otro ángulo, comprobamos si están entre sí próximos o no.

Este movimiento lateral es muy sencillo de realizar en nuestros avatares de la vida cotidiana, pero es evidente que, a escala astronómica, es imposible con la tecnología existente en nuestra civilización. Es imposible para nosotros salir de la Vía Láctea, nuestra galaxia espiral, para poder observar “lateralmente” una cierta estrella doble, por ejemplo, de la que sospechamos que no es una doble física, interactuando gravitacionalmente, sino que es una doble de perspectiva.

Existen métodos radiométricos, espectrométricos, etc., que nos permiten calcular la distancia de las estrellas que observamos a simple vista, y sabemos que en general la distancia a nosotros, de astros de una misma constelación, varía grandemente. Algunas de ellas distan más entre sí de lo que nos parece. Sin embargo aparecen agrupadas, formando, para nuestra perspectiva visual,

constelaciones. Por eso hemos de entender que las constelaciones son imágenes estelares aparentes, que solo tienen sentido para un observador que se encuentre en nuestra posición.

### 3.1.2 Los objetos observables en Tauro

Una de las constelaciones más interesantes de observar es la Constelación de Tauro, una constelación del Zodíaco cuya línea de visión desde nuestra posición es atravesada por el Sol en los días finales del mes de mayo y en los días de junio próximos al solsticio de verano, para pasar, después, a Géminis.

En Tauro se pueden observar; fundamentalmente, y de forma muy sencilla, con simples medios de aficionados, varios objetos interesantísimos, algunos distinguibles a simple vista:

Una gigante roja: Observable a simple vista, es la alfa-tauri, a 68 años luz de nosotros.

Varias estrellas dobles visuales: Zeta-tauri, Sigma-tauri, Tau-tauri y Phi-tauri, todas ellas fácilmente separables y con magnitudes visuales asequibles a los telescopios de aficionados.

Varios cúmulos abiertos: Hay dos de estos cúmulos, observables a simple vista, las Híadas y las Pléyades formados por estrellas azules, muy jóvenes, de gran interés observacional. El resto de los cúmulos son menos asequibles a la observación.

Una gran nebulosa: La famosa Nebulosa del Cangrejo, objeto Messier M1, que corresponde a una explosión de supernova ocurrida en el año 1054.

Esta constelación contiene también numerosas estrellas, invisibles a simple vista, pero muy interesantes.

Una de ellas es T-Tauri, esta estrella fué descubierta al final del siglo XIX por el astrónomo inglés Hind quien la identificó por tener una nebulosa peculiar cercana a ella.

## 3.2 ESTUDIOS ÓPTICOS E INFRARROJO

El espectro de T-Tauri es distinto al de la mayoría de las estrellas, ya que tiene líneas de emisión que no se encuentran generalmente. Además, resulta ser muy enrojecida, lo cual evidencía una gran cantidad de polvo circunestelar. A partir de estudios detallados, se ha concluido que T-Tauri es una estrella muy joven, todavía embebida en el núcleo de gas y polvo del que se formó. De hecho, se convirtió en el prototipo de estrellas jóvenes; se habla de las estrellas T-Tauris para describir estrellas jóvenes en general.

Estudios infrarrojos relativamente recientes (de los años ochentas) revelaron que T-Tauri no es una estrella soltera, sino que tiene una compañera localizada a 0.7 segundos de arco al Sur. Para distinguir entre estas dos componentes, se refiere comunmente a la estrella T-Tauri misma como T-Tau N (por T-Tau Norte) y a su compañera como T-Tau S (Por T-Tau Sur), para más detalle consultar [12]. Mientras que T-Tau N es detectable (aunque débil) en la parte visible del

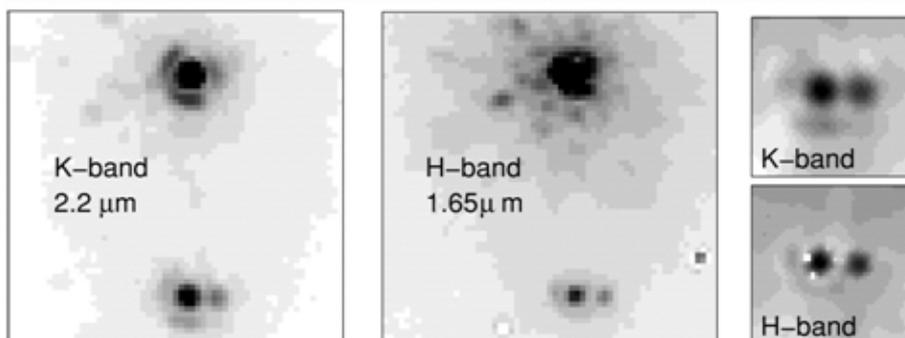


Figura 3.1: Sistema múltiple T-Tauri, de baja luminosidad (20 veces la del Sol), en el complejo molecular del Tauro (Koresko 1997).

espectro electromagnético, su compañera solamente se detecta a longitudes de onda mayores (infrarrojo y radio). T-Tau S es, de hecho, más brillante que T-Tau N en el infrarrojo, véase [15]. Además, mientras que el brillo de T-Tauri N ha sido constante en años recientes, después de variaciones históricas significativas, ver [12], grandes variaciones fotométricas han sido observadas recientemente en T Tauri S, ver [12]. Estudiando la distribución de la energía espectral de T-Tauri S, Koresko et al. (1997) encontró una temperatura bolométrica de  $\sim 500$  K, mucho más baja que la de una estrella T-Tauri normal (TTS) y típico de la clase de protoestrellas más jóvenes (fuentes llamadas de tipo I), véase [14].

Una posible interpretación de la gran variabilidad de T-Tauri S es que, como ocurre en FU Orionis, la luminosidad es enteramente dominada por la acreción (Ghez et al. 1991). La variabilidad entonces surgiría de cambios en la tasa de acreción sobre la estrella. Más recientemente, Beck et al. (2004) encontró que el flujo de una línea de emisión –sospechada de ser apoderada por acreción– correlaba con el flujo continuo en un camino que cualitativamente concuerda con el escenario FU Orionis. Sin embargo, Beck et al. también encontró un color significativamente variable para T-Tauri S, aparentemente contradictorio a dicho modelo.

Observaciones muy recientes de alta resolución angular han mostrado que T-Tau S es, a su vez, un sistema doble, para más información del sistema binario consulte [7], haciendo del sistema T-Tau un sistema triple. En estas imágenes, ver Fig. 3.1, la componente Sur se subdivide en dos estrellas llamadas T-Tau Sa y T-Tau Sb.

Espectros infrarrojos muestran que T-Tau Sb es una estrella T-Tauri clásica de baja masa, de un tipo espectral  $\sim M1$ , afectada por una extinción significativa ( $A_v \geq 8$  mag; [15]). T Tauri Sa, por otro lado, tiene un espectro continuo monótono con solamente una fuerte línea de emisión  $Br\gamma$ , y podría ser una estrella joven más masiva. Pertenecer a la clase misteriosa de objetos llamados *compañera infrarrojas* (IRC por sus siglas en inglés), que parecen ser estrellas

jóvenes muy extinguidas (la extinción hacia T-Tau Sa parece ser  $A_v = 40$ ). La binaridad de T-Tauri S lleva a reconsiderar la variabilidad de dicha fuente: ¿es solamente una de las dos componentes la que varía?, o ¿son las dos? Es interesante notar, en este sentido, que la estrella más brillante en el infrarrojo ha cambiado, de ser T-Tau Sa en el pasado a ser T-Tau Sb en la actualidad, véase [15].

Una posible explicación de la grande extinción que afecta a T-Tau Sa es que posee un pequeño disco circunstelar. Este escenario, evocado por Hogerheijde et al. (1997), Koresko (2000), y Beck et al. (2004), parecía ganar terreno cuando Walter et al. (2003) detectó una extendida característica absorbida que es enteramente opaca a los fotones ultravioleta para la localización de T-Tauri S. Sin embargo, el tamaño de esta estructura,  $\sim 70$  AU, es mucho más largo que el tamaño supuesto del disco circunstelar alrededor de T-Tau Sa. Hasta ahora, la localización del material extinguidor en frente de T-Tau Sa se ha quedado sujeto a debate.

Se sabe desde hace mucho tiempo que T-Tau es una fuente emisora de radiación en radio, la cual se origina en dos estructuras, una asociada con T-Tau N, y la otra con T-Tau Sb. Esta última es una fuente de radio variable, generada por el proceso de emisión giosincrotrón (Skinner y Brown 1994), y puede ser estudiada con el VLBA.

### 3.3 OBSERVACIONES VLBA PREVIAS DE T-TAURI SUR

Observaciones previas de T-Tau S con el VLBA se reportaron en el artículo “Multi-epoch VLBA observations of T-Tauri South “[11] desarrollado por Laurent Loinard, Amy J. Mioduszewski, Luis F. Rodríguez, Rosa A. González, Mónica I. Rodríguez, y Rosa M. Torres. Excepto Amy J. Mioduszewski quien es del National Radio Astronomy Observatory, USA todos los demás investigadores son del Centro de Radioastronomía y Astrofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, Michoacán, México. En éste artículo, se presentan los resultados de una serie de siete observaciones continuas de 3.6 cm (8.42 GHz) de T-Tau S obtenida cada dos meses entre Septiembre del 2003 y Septiembre del 2004 con el Very Long Baseline Array (VLBA) del National Radio Astronomy Observatory (NRAO), véase [9].

La posición absoluta de la estrella cambia significativamente de una época a otra. Esos desplazamientos resultan de la combinación de un movimiento aparente paralítico y de movimientos propios a la fuente. En consecuencia, se puede modelar la trayectoria que describe la fuente en el cielo luego en términos de la posición de la estrella a una época de referencia generalmente se toma enero de 2000 que denotamos como J2000.0 ( $\alpha_{J2000.0}$  y  $\delta_{J2000.0}$ ), su movimiento propio en la ascensión recta y la declinación ( $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$ ), y su paralaje  $\pi$ . Estos cinco elementos astrométricos fueron deducidos de las posiciones medidas de la estrella por minimización del  $\chi^2$  asociado con esta descripción usando un

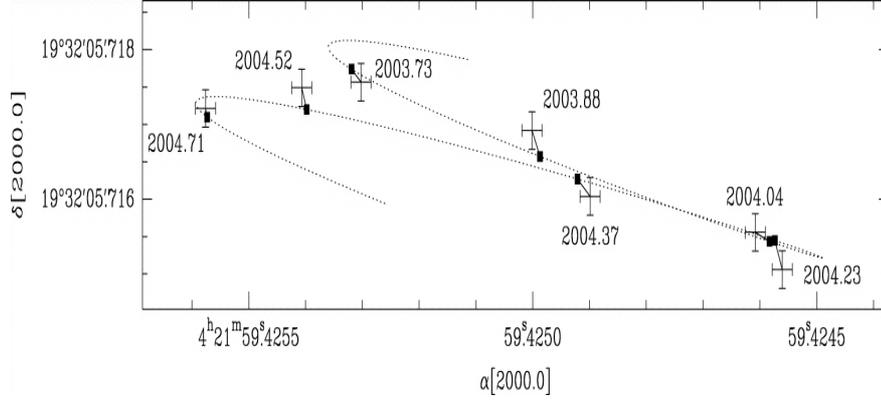


Figura 3.2: Esta figura muestra el ajuste por separado obtenida en el artículo de Loinard, véase [11].

esquema iterativo. Los resultados para los cinco parámetros astrométricos son:

$$\begin{aligned}\alpha_{J2000.0} &= 04^h21^m59^s.424015 \pm 0^s.000009, \\ \delta_{J2000.0} &= 19^{\circ}32'05''.71957 \pm 0''.00013, \\ \mu_{\alpha} \cos \delta &= 3.29 \pm 0.30 \text{ mas yr}^{-1}, \\ \mu_{\delta} &= -0.75 \pm 0.31 \text{ mas yr}^{-1}, \\ \pi &= 7.07 \pm 0.14 \text{ mas}.\end{aligned}$$

El paralaje reportado aquí para T-Tauri corresponde a una distancia  $d = 141.5 \pm \frac{2.8}{2.7} \text{ pc}$ , un valor mucho más preciso que el fue obtenido por el satélite

Hipparcos para T-Tauri N ( $d = 177 \pm \frac{70}{39} \text{ pc}$ ; Perryman et al. 1997). Con esta medida, T-Tauri viene a ser la segunda estrella joven en Tauro con una distancia conocida a este nivel de precisión. El primero fue V773 Tau, para la cual Lestrade et al. (1999) determinó un paralaje de  $6.74 \pm 0.25 \text{ mas}$  ( $d = 148.3 \pm \frac{5.7}{5.3} \text{ pc}$ ) usando observaciones multi-épocas globales del VLBI (Very Long Baseline Interferometry). Para V773 Tau, la distancia VLBI fue también significativamente más precisa que la de Hipparcos ( $d = 101 \pm \frac{40}{22} \text{ pc}$ ).

La trayectoria descrita sobre el cielo por la fuente T-Tau S así como el mejor ajuste se muestra en la Figura 3.2.



## Capítulo 4

# Método de mínimos cuadrados.

### 4.1 MÍNIMOS CUADRADOS COMO UN ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Supóngase que se desea ajustar  $N$  puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , a un modelo que tiene  $M$  parámetros  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ . El modelo predice una relación funcional entre las medidas independientes y variables dependientes,

$$y(x) = y(x; a_1 \dots a_M).$$

Queremos minimizar para obtener los valores ajustados de cada una de las  $a_j$ . Para realizar esto se utiliza el ajuste de mínimos cuadrados,

minimizar sobre  $a_1 \dots a_M$  :

$$\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i; a_1 \dots a_M)]^2. \quad (4.1)$$

Supóngase que cada punto  $y_i$  tiene un error de medida que es aleatorio independiente y que tiene una distribución normal (Gaussiano) alrededor del modelo real  $y(x)$ . Y supóngase que la desviación estándar  $\sigma$  de la distribución normal son las mismas para todos los puntos. Entonces la probabilidad del conjunto de datos es el producto de las probabilidades de cada punto,

$$P \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma}\right)^2\right] \Delta y \right\}. \quad (4.2)$$

Maximizar (4.2) es equivalente a maximizar su logaritmo, o minimizar el negativo de su logaritmo, es decir,

$$\left[ \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma^2} \right] - N \log \Delta y. \quad (4.3)$$

Dado que  $N$ ,  $\sigma$ , y  $\Delta y$  son todos constantes, minimizar esta ecuación es equivalente a minimizar a (4.1), para más detalle consultar [1].

Por lo tanto el ajuste de mínimos cuadrados es una estimación de máxima verosimilitud de los parámetros ajustados, si los errores de medida son independientes y distribuidas normalmente con desviación estándar constante, para más detalle ver [1].

## 4.2 AJUSTE CHI-CUADRADO

Si cada punto  $(x_i, y_i)$  tiene su propia desviación estándar conocida  $\sigma_i$ , entonces la ecuación (4.2) es modificada solamente poniendo el subíndice  $i$  sobre el símbolo  $\sigma$ . Lo mismo sucede en la ecuación (4.3), así que los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros del modelo se obtiene minimizando la expresión

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i; a_1 \dots a_M)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (4.4)$$

llamado el “Chi-Cuadrado”.

Si asumimos que todas las medidas tienen la misma desviación estándar, tendremos que  $\sigma_i = \sigma$ , y que el modelo se ajusta bien, entonces podemos proceder primero asignando una constante arbitraria  $\sigma$  a todos los puntos, luego ajustar los parámetros del modelo para minimizar  $\chi^2$ , y finalmente recalculer

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y(x_i))^2}{N - M}. \quad (4.5)$$

Si tomamos la derivada de la ecuación (4.4) con respecto a los parámetros  $a_k$ , obtenemos ecuaciones donde ocurre el mínimo para la chi-cuadrada,

$$0 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i^2} \right) \left( \frac{\partial y(x_i; \dots a_k \dots)}{\partial a_k} \right) \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es en general, un conjunto de  $M$  ecuaciones no lineales para las  $M$   $a_k$  desconocidas, consultar [1].

### 4.3 REGRESIÓN LINEAL

Consideraremos el problema de ajustar un conjunto de  $N$  puntos  $(x_i, y_i)$  a un modelo de línea recta

$$y(x) = y(x; a, b) = a + bx. \quad (4.7)$$

Este problema es frecuentemente llamado regresión lineal. Asumimos que la incertidumbre  $\sigma_i$  asociado con cada medida  $y_i$  es conocido, y que los  $x_i$ 's (valores de las variables dependientes) son exactamente conocidos.

Para medir que tan bien el modelo concuerda con los datos, usaremos la función chi-cuadrada (4.4), el cual en este caso es

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) se minimiza para determinar  $a$  y  $b$ . Para encontrar su mínimo, las derivadas de  $\chi^2(a, b)$  con respecto a  $a, b$  tienen que ser iguales a cero.

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2}, \quad (4.9)$$

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i(y_i - a - bx_i)}{\sigma_i^2}. \quad (4.10)$$

Estas condiciones pueden ser rescritas en una forma conveniente si definimos las siguientes sumas:

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2, \quad (4.11)$$

$$S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}. \quad (4.12)$$

Con estas definiciones obtenemos de (4.9) y (4.10) las siguientes dos ecuaciones con dos incógnitas

$$aS + bS_x = S_y, \quad (4.13)$$

$$aS_x + bS_{xx} = S_{xy}. \quad (4.14)$$

La solución de las ecuaciones se obtiene de la siguiente manera:

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta}, \quad (4.15)$$

$$b = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{\Delta}, \quad (4.16)$$

donde

$$\Delta = SS_{xx} - (S_x)^2. \quad (4.17)$$

De las ecuaciones (4.15) y (4.16) se obtienen los parámetros  $a$  y  $b$  que ajustan mejor el modelo.

Considerando la propagación de los errores, muestra que la varianza en el valor de cualquier función será

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2. \quad (4.18)$$

Para la línea recta, las derivadas de  $a$  y  $b$  con respecto a  $y_i$  puede ser directamente evaluada desde la solución:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\sigma_i^2 \Delta}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S x_i - S_x}{\sigma_i^2 \Delta}. \quad (4.20)$$

Resumiendo sobre los puntos, obtenemos

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta} S_{x^2}, \quad (4.21)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{S}{\Delta}, \quad (4.22)$$

las cuales son las varianzas en los estimadores de  $a$  y  $b$ , respectivamente. Y la covarianza entre  $a$  y  $b$  esta dado por

$$Cov(a, b) = \frac{-S_x}{\Delta}. \quad (4.23)$$

El coeficiente de correlación entre la incertidumbre en  $a$  y la incertidumbre en  $b$ , el cual es un número entre  $-1$  y  $1$ , esta dado por

$$r_{ab} = \frac{-S_x}{\sqrt{SS_{xx}}}. \quad (4.24)$$

Un valor positivo de  $r_{ab}$  indica que los errores en  $a$  y  $b$  tienen poca probabilidad de tener el mismo signo, mientras que un valor negativo indica que los errores están anticorrelacionados, poca probabilidad de tener signos opuestos para más detalle ver [1].

Las formulas (4.15) y (4.16) se pueden describir de la siguiente manera:  
Si definimos

$$t_i = \frac{1}{\sigma_i} \left( x_i - \frac{S_x}{S} \right); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

y

$$S_{tt} = \sum_{i=1}^N t_i^2, \quad (4.26)$$

entonces sustituyendo estas igualdades en (4.15) tenemos lo siguiente:

$$b = \frac{\frac{SS_{xy} - S_x S_y}{S}}{S_{xx} - \frac{2(S_x)^2}{S} + \frac{(S_x)^2}{S}}, \quad (4.27)$$

luego

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \frac{S_x}{S} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - 2 \frac{S_x}{S} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \frac{S_x^2}{S^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (4.28)$$

o bien

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \frac{S_x}{S}) y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( x_i - \frac{S_x}{S} \right)^2}, \quad (4.29)$$

por lo tanto

$$b = \frac{1}{S_{tt}} \sum_{i=1}^N \frac{t_i y_i}{\sigma_i}. \quad (4.30)$$

Por otro lado, la ecuación (4.16) se escribe,

$$a = \frac{SS_{xx} S_y - S_y (S_x)^2 - S_x S S_{xy} + (S_x)^2 S_y}{S(SS_{xx} - (S_x)^2)}, \quad (4.31)$$

de donde

$$a = \frac{\frac{S_y(SS_{xx} - (S_x)^2) - S_x(SS_{xy} - S_x S_y)}{SS_{xx} - (S_x)^2}}{S}, \quad (4.32)$$

luego ocupando la ecuación (4.16), se obtiene finalmente que,

$$a = \frac{S_y - S_x b}{S} \quad (4.33)$$

Haciendo sustituciones análogas a las anteriores se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{S} \left( 1 + \frac{(S_x)^2}{S S_{xx}} \right), \quad (4.34)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{S_{tt}}, \quad (4.35)$$

$$\text{Cov}(a, b) = -\frac{S_x}{SS_{tt}}, \quad (4.36)$$

$$r_{ab} = \frac{\text{Cov}(a, b)}{\sigma_a \sigma_b}. \quad (4.37)$$

## 4.4 MÍNIMOS CUADRADOS PARA UN MODELO LINEAL GENERAL

En este caso el propósito es ajustar un conjunto de datos  $(x_i, y_i)$  a un modelo que no sea solamente de una combinación lineal de 1 y  $x$  (es decir  $a + bx$ ), sino mas bien una combinación lineal de cualquiera  $M$  funciones específicas de  $x$ . Por ejemplo, las funciones podrían ser  $1, x, x^2, \dots, x^{M-1}$ , en cuyo caso su combinación lineal general,

$$y(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_Mx^{M-1}, \quad (4.38)$$

es un polinomio de grado  $M - 1$ . O bien, las funciones podrían ser *senos* y *cosenos*, en cuyo caso su combinación lineal general es una serie armónica.

La forma general de este tipo de modelo está dado por

$$y(x) = \sum_{k=1}^M a_k X_k(x), \quad (4.39)$$

donde  $X_1(x), \dots, X_M(x)$  son funciones arbitrarias fijas de  $x$ , llamadas funciones básicas.

Para este modelo lineal la función  $\chi^2$  queda,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - \sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i)}{\sigma_i} \right]^2. \quad (4.40)$$

Podemos construir una matriz  $A$  de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \frac{X_1(x_1)}{\sigma_1} & \frac{X_2(x_1)}{\sigma_1} & \dots & \frac{X_M(x_1)}{\sigma_1} \\ \frac{X_1(x_2)}{\sigma_2} & \frac{X_2(x_2)}{\sigma_2} & \dots & \frac{X_M(x_2)}{\sigma_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{X_1(x_N)}{\sigma_N} & \frac{X_2(x_N)}{\sigma_N} & \dots & \frac{X_M(x_N)}{\sigma_N} \end{pmatrix}.$$

También definimos un vector  $b$  de longitud  $N$  por

$$b_i = \frac{y_i}{\sigma_i}, \quad (4.41)$$

y un vector  $a$  cuyos componentes serán los parámetros por ajustar,  $a_1, \dots, a_M$ .

## 4.5 SOLUCIÓN USANDO ECUACIONES NORMALES

El mínimo de (4.40) ocurre donde la derivada de  $\chi^2$  con respecto a los  $M$  parámetros  $a_k$  son iguales a cero. Por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[ y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_j(x_i) \right] X_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \dots, M \quad (4.42)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^M X_j(x_i) a_j - \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} = 0, \quad (4.43)$$

$$\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \frac{X_j(x_i) X_k(x_i) a_j}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2}. \quad (4.44)$$

Luego, podemos describir a (4.42) de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} a_j = \beta_k, \quad (4.45)$$

donde

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_j(x_i) X_k(x_i)}{\sigma_i^2}, \quad (4.46)$$

o equivalentemente

$$\alpha = A^T A, \quad (4.47)$$

es una matriz de  $M \times M$ , y

$$\beta_k = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2}, \quad (4.48)$$

o equivalentemente

$$\beta = A^T b, \quad (4.49)$$

el cual es un vector de longitud  $M$ .

Las ecuaciones (4.42) ó (4.45) se llaman ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados. Dichas ecuaciones pueden ser resueltas para encontrar los elementos del vector  $a$  por métodos estándares, descomposición  $LU$  y sustitución hacia atrás, descomposición Cholesky, o eliminación Gauss-Jordan. En forma matricial, las ecuaciones normales pueden ser rescritas como  $\alpha a = \beta$  o como

$$(A^T A)a = A^T b. \quad (4.50)$$

Consideremos

$$a_j = \sum_{k=1}^M \alpha_{jk}^{-1} \beta_k = \sum_{k=1}^M C_{jk} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right], \quad (4.51)$$

y que las varianzas asociadas a los estimadores  $a_j$  pueden obtenerse como

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2. \quad (4.52)$$

Note que  $\sigma_{jk}$  es independiente de  $y_i$ , así que

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^M \frac{C_{jk} X_k(x_i)}{\sigma_i^2}. \quad (4.53)$$

Consecuentemente, encontramos que

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \sum_{k=1}^M \frac{C_{jk} X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right)^2, \quad (4.54)$$

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \frac{\left( \sum_{k=1}^M C_{jk} X_k(x_i) \right)^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.55)$$

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{k=1}^M C_{jk} X_k(x_i) \sum_{l=1}^M C_{jl} X_l(x_i)}{\sigma_i^2}, \quad (4.56)$$

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M C_{jk} C_{jl} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{X_k(x_i) X_l(x_i)}{\sigma_i^2} \right]. \quad (4.57)$$

El término que esta entre los corchetes es justamente la matriz  $\alpha$ . Ya que esta es la matriz inversa de  $C$ , (4.57) se reduce inmediatamente a

$$\sigma^2(a_j) = C_{jj}. \quad (4.58)$$

En otras palabras, los elementos de la diagonal de  $C$  son las varianzas de los parámetros ajustados  $a$ , para más detalle ver [1].

Como no solamente queremos calcular la solución del vector  $a$  sino también calcular la matriz de covarianza  $C$ , es más conveniente usar la eliminación de Gauss-Jordan.

## 4.6 LA ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Para una matriz invertible, la *eliminación de Gauss-Jordan* es más eficiente que cualquier otro método. Para resolver un conjunto de ecuaciones lineales, la eliminación de Gauss-Jordan produce tanto la solución de las ecuaciones para uno o mas vectores  $b$  del lado derecho de la igualdad, como la matriz inversa  $A^{-1}$ .

Por claridad, y para evitar escribir puntos suspensivos detallaremos el método solamente para el caso de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, y con tres diferentes vectores como segundo miembro que se suponen conocidos. Este método se puede extender en el caso de matrices de dimensión  $N \times N$ , con  $M$  conjuntos de vectores al lado derecho de la igualdad, de una manera completamente análoga.

### 4.6.1 Eliminación sobre Columnas-Aumentadas de Matrices

Consideremos la ecuación lineal matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{array} \right) \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \\ b_{43} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (4.59)$$

Aquí el punto  $(\cdot)$  indica multiplicación matricial, mientras la notación  $\cup$  sólo significa columna aumentada.

La matriz solución de

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2 \cup \mathbf{x}_3 \cup \mathbf{Y}] = [\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{b}_2 \cup \mathbf{b}_3 \cup \mathbf{I}],$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{Y}$  son matrices cuadradas, el símbolo  $\cup$  denota la columna de aumentación, las  $\mathbf{b}'_i$ s y  $\mathbf{x}'_i$ s son vectores columnas, e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, simultáneamente resuelve el conjunto lineal

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1 & \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2 & \mathbf{Ax}_3 = \mathbf{b}_3 \\ \text{y} & & \\ \mathbf{AY} = \mathbf{I} & & \end{array}$$

Ahora bien es necesario verificar los siguientes hechos acerca de (4.59):

1) Intercambiar cualesquiera dos filas de  $\mathbf{A}$  y las filas correspondientes de los  $\mathbf{b}'_i$ s y de  $\mathbf{I}$ , no altera (o modificar cualquier paso) la solución  $\mathbf{x}'_i$ s y  $\mathbf{Y}$ . Si

no mas bien, sólo equivale a escribir el mismo conjunto de ecuaciones lineales en un orden diferente.

2) De la misma manera, el conjunto de solución es impermutable y no hay paso alterado si remplazamos cualquier fila en  $\mathbf{A}$  por una combinación lineal de sí mismo y cualquier otra fila, tanto como hacer la misma combinación lineal de las filas de los  $\mathbf{b}'s$  y de  $\mathbf{I}$ .

3) Intercambiando cualesquiera dos columnas de  $\mathbf{A}$  da el mismo conjunto de solución solamente si intercambiamos simultáneamente filas correspondientes de los  $\mathbf{x}'s$  y de  $\mathbf{Y}$ . En otras palabras, este intercambio modifica el orden de las filas en la solución. Si hacemos esto, necesitaremos modificar la solución para reacomodar las filas a su orden original.

Eliminación Gauss-Jordan usa una o más de las operaciones de arriba para reducir la matriz  $\mathbf{A}$  a la matriz identidad. Cuando esto se haya completado, el lado derecho viene a ser el conjunto solución, como se ve inmediatamente de (4.59).

### 4.6.2 Pivoteando

En “eliminación Gauss-Jordan sin pivote” solamente la segunda operación en la lista anterior se utiliza. La primera fila es dividida por el elemento  $a_{11}$  (esta será una combinación lineal trivial de la primera fila con cualquier otra fila — coeficiente cero para la otra fila). Entonces la cantidad derecha de la primera fila es restada con cada una de las otras filas con el fin de hacer todos los  $a'_{i1}$ s restantes iguales a cero. La primera columna de  $\mathbf{A}$  ahora concuerda con la matriz identidad. Movemos a la segunda columna y dividimos la segunda fila por  $a_{22}$ , entonces sustraemos la cantidad derecha de la segunda fila con las filas 1,3, y 4, así para hacer sus entradas en la segunda columna cero. La segunda columna ahora es reducida a la forma identidad. Y así sobre la tercera y cuarta columna. Así como hicimos operaciones sobre  $\mathbf{A}$ , también realizamos operaciones correspondientes sobre los  $\mathbf{b}'s$  y la  $\mathbf{I}$ .

Obviamente entraríamos en problemas si nunca encontramos un elemento cero sobre la diagonal cuando vamos a dividir por el elemento diagonal. (El elemento que dividimos se llama elemento pivote o nada más pivote). No tan obvio, pero verdadero, es la razón que eliminación Gauss-Jordan sin pivote (no usa del primer o tercer procedimiento en la lista de arriba) es numéricamente inestable en la presencia de cualquier error de redondeo, aún cuando un pivote cero es no encontrado.

¿Pero, cuál es este magico pivote? Nadamás que intercambiando filas (pivoteo parcial) o filas y columnas (pivoteo total), pero cómo colocar un elemento particularmente deseable en la posición diagonal del cual el pivote se acerca a ser seleccionado, para más detalle ver [1]. Puesto que no queremos desordenar la parte de la matriz identidad que ya habíamos construido, podemos elegir entre elementos que están tanto:

(i) sobre columnas de abajo (o sobre) el primero que esté cerca para ser normalizado,

como también

(ii) sobre columnas a la derecha (o sobre) de la columna que estamos cerca por eliminar.



## Capítulo 5

# Generalización al caso de ecuaciones acopladas

### 5.1 PLANTEAMIENTO

En el artículo de Loinard et al. (2005) mencionado en el capítulo 3, sección 3.3, el ajuste de mínimos cuadrados se hizo de manera aproximada. Suponiendo un movimiento propio uniforme (sin aceleración), la ascensión recta y la declinación cambian como función del tiempo de la siguiente forma:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha t + \theta \cdot f_\alpha(\alpha, \delta, t), \quad (5.1)$$

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu_\delta t + \theta \cdot f_\delta(\alpha, \delta, t). \quad (5.2)$$

donde la notación es la misma que en la ecuación (1) y (2), ver pag. viii.

Se puede ver que la paralaje  $\theta$  aparece en las dos ecuaciones, de modo que dichas ecuaciones quedan acopladas, hecho que no fue tomado en cuenta en el artículo [11], donde se resolvieron las dos ecuaciones por separado. Eso permitió obtener dos valores de la paralaje, y el valor final dado en el artículo fue el promedio de los dos.

La meta de esta tesis fue encontrar una solución más elegante y correcta de la minimización de mínimos cuadrados requerida para resolver las dos ecuaciones anteriores.

Además, se hicieron 5 nuevas observaciones de T-Tau S, elevando el número total de observaciones de 7 a 12, y se encontró un error en el correlador del VLBA, que inducía un efecto sistemático y un aumento en el error astrométrico

de cada observación. Estos dos hechos nos llevaron a considerar un modelo donde el movimiento propio no es uniforme, sino que puede estar acelerado.

En este caso, el movimiento de T-Tauri sobre la esfera celeste es la combinación de su movimiento de paralaje y de un movimiento propio acelerado, su trayectoria se puede describir como:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha t + a_\alpha \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\alpha(\alpha, \delta, t), \quad (5.3)$$

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu_\delta t + a_\delta \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\delta(\alpha, \delta, t), \quad (5.4)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\delta_0$  son las coordenadas de la fuente a una época de referencia,  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  son las proyecciones del movimiento propio de la estrella sobre los ejes de ascensión recta y declinación, respectivamente. Además  $a_\alpha$  es la aceleración en alfa y  $a_\delta$  es la aceleración en delta.

Y por último  $f_\alpha$  y  $f_\delta$  están dadas como:

$$f_\alpha(\alpha, \delta, t) = \alpha + \theta \cdot (X \operatorname{sen}(\alpha) - Y \cos(\alpha)) / (15 \cos(\delta)), \quad (5.5)$$

$$f_\delta(\alpha, \delta, t) = \delta + \theta \cdot (X \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\delta) + Y \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\delta) - Z \cos(\delta)), \quad (5.6)$$

donde  $(\alpha, \delta)$  es la posición baricéntrica,  $\theta$  es el paralaje en segundo de arco,  $X, Y, Z$  son las coordenadas baricéntricas de la Tierra en unidades Astronómicas, para más detalle ver [2].

La meta de este proyecto es deducir los parámetros  $a_0, \delta_0, \mu_\alpha, \mu_\delta, a_\alpha, a_\delta$  y  $\theta$  de la serie de observaciones realizadas, a través del método de mínimos cuadrados aplicado a las ecuaciones acopladas.

El ajuste por separado a cada coordenada es un problema estándar de mínimos cuadrados. Podemos escribir un  $\chi_\alpha^2$  asociado a la primera ecuación y un  $\chi_\delta^2$  asociado a la segunda, y minimizar cada uno. Sin embargo, el coeficiente  $\theta$  aparece en ambas, por lo que las dos ecuaciones son acopladas. El coeficiente  $\theta$  que queremos determinar es el que minimiza la suma  $\chi_\alpha^2 + \chi_\delta^2$ .

La resolución de este problema ya no es una aplicación estándar del método de mínimos cuadrados, sino una extensión de él.

Para desarrollar un caso más general, supondremos que dos cantidades  $x$  y  $y$  se pueden describir con  $P$  coeficientes comunes y  $M$  coeficientes separados:

En este caso tenemos:

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^M a_j f_{xj}(t_i) + \sum_{k=1}^P c_k h_{xk}(t_i), \quad (5.7)$$

$$y(t_i) = \sum_{j=1}^M b_j f_{yj}(t_i) + \sum_{k=1}^P c_k h_{yk}(t_i). \quad (5.8)$$

En nuestro caso,  $P = 1$  y  $M = 3$ .

Por lo tanto nuestro  $\chi^2$  queda:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\left( x_i - \sum_{j=1}^M a_j f_{xj}(t_i) - \sum_{k=1}^P c_k h_{xk}(t_i) \right)^2}{\sigma_{xi}^2} \right] + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\left( y_i - \sum_{j=1}^M b_j f_{yj}(t_i) - \sum_{k=1}^P c_k h_{yk}(t_i) \right)^2}{\sigma_{yi}^2} \right]. \quad (5.9)$$

## 5.2 RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

Ahora para minimizar este  $\chi^2$  tenemos que derivar parcialmente con respecto a los  $a$ 's,  $b$ 's y  $c$ 's y después igualar a cero:

Para cada  $a$  tenemos:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{xi}^2} \left( x_i - \sum_{j=1}^M a_j f_{xj}(t_i) - \sum_{k=1}^P c_k h_{xk}(t_i) \right) f_{xm}(t_i) = 0, \quad (5.10)$$

con  $m = 1, \dots, M$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2} = \sum_{j=1}^M a_j \sum_{i=1}^N \frac{f_{xj}(t_i) f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2} + \sum_{k=1}^P c_k \sum_{i=1}^N \frac{h_{xk}(t_i) f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2}. \quad (5.11)$$

Ahora si definimos las siguientes variables de la forma:

$$\theta_m^{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2}, \quad (5.12)$$

$$\alpha_{mj}^{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{f_{xj}(t_i) f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2}, \quad (5.13)$$

$$\gamma_{mk}^{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{h_{xk}(t_i) f_{xm}(t_i)}{\sigma_{xi}^2}. \quad (5.14)$$

Obtenemos la siguiente igualdad:

$$\theta_m^{(1)} = \sum_{j=1}^M \alpha_{mj}^{(1)} a_j + \sum_{k=1}^P \gamma_{mk}^{(1)} c_k, \quad (5.15)$$

luego,

$$\theta^{(1)} = \alpha^{(1)} a + \gamma^{(1)} c. \quad (5.16)$$

Por lo tanto, pasándolo a su forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\left[\theta^{(1)}\right]_{M \times 1} = \left[\alpha^{(1)}\right]_{M \times M} [a]_{M \times 1} + \left[\gamma^{(1)}\right]_{M \times P} [c]_{P \times 1}, \quad (5.17)$$

De forma análoga obtenemos cada uno de los  $b$ 's :

$$\theta^{(2)} = \beta^{(1)} b + \gamma^{(2)} c, \quad (5.18)$$

donde

$$\theta_m^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i f_{ym}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2}, \quad (5.19)$$

$$\beta_{mj}^{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{f_{yj}(t_i) f_{ym}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2}, \quad (5.20)$$

$$\gamma_{mk}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{h_{yk}(t_i) f_{ym}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2}, \quad (5.21)$$

luego

$$\theta_m^{(2)} = \sum_{j=1}^M \beta_{mj}^{(1)} b_j + \sum_{k=1}^P \gamma_{mk}^{(2)} c_k. \quad (5.22)$$

Por lo tanto, su forma matricial queda:

$$\left[\theta^{(2)}\right]_{M \times 1} = \left[\beta^{(1)}\right]_{M \times M} [b]_{M \times 1} + \left[\gamma^{(2)}\right]_{M \times P} [c]_{P \times 1}. \quad (5.23)$$

Para cada  $c$  tenemos:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c_p} = \sum_{i=1}^N \frac{\left(x_i - \sum_{j=1}^M a_j f_{xj}(t_i) - \sum_{k=1}^P c_k h_{xk}(t_i)\right) h_{xp}(t_i)}{\sigma_{x_i}^2} + \sum_{i=1}^N \frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^M b_j f_{yj}(t_i) - \sum_{k=1}^P c_k h_{yk}(t_i)\right) h_{yp}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2} = 0, \quad (5.24)$$

con

$$p = 1, \dots, P.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i h_{xp}(t_i)}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{y_i h_{yp}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2} \right) = \sum_{j=1}^M a_j \sum_{i=1}^N \frac{f_{xj}(t_i) h_{xp}(t_i)}{\sigma_{x_i}^2} + \quad (5.25)$$

$$\sum_{j=1}^M b_j \sum_{i=1}^N \frac{f_{yj}(t_i) h_{yp}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2} + \sum_{k=1}^P c_k \sum_{i=1}^N \left( \frac{h_{xk}(t_i) h_{xp}(t_i)}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{h_{yk}(t_i) h_{yp}(t_i)}{\sigma_{y_i}^2} \right).$$

Ahora si definimos el primer miembro de la ecuación (5.23) anterior como  $\theta_p^{(3)}$  obtenemos lo siguiente,

$$\theta_p^{(3)} = \sum_{j=1}^M a_j \alpha_{pj}^{(2)} + \sum_{j=1}^M b_j \beta_{pj}^{(2)} + \sum_{k=1}^P c_k \gamma_{pk}^{(3)}. \quad (5.26)$$

Por lo tanto

$$\theta_p^{(3)} = \alpha^{(2)} a + \beta^{(2)} b + \gamma^{(3)} c, \quad (5.27)$$

o bien en su forma matricial queda,

$$\left[ \theta^{(3)} \right]_{P \times 1} = \left[ \alpha^{(2)} \right]_{P \times M} [a]_{M \times 1} + \left[ \beta^{(2)} \right]_{P \times M} [b]_{M \times 1} + [\gamma]_{P \times P} [c]_{P \times 1} \quad (5.28)$$

Ahora ya tenemos las tres ecuaciones matriciales; donde están involucrados todos los parámetros que queremos ajustar:

$$\left[ \theta^{(1)} \right]_{M \times 1} = \left[ \alpha^{(1)} \right]_{M \times M} [a]_{M \times 1} + \left[ \gamma^{(1)} \right]_{M \times P} [c]_{P \times 1}, \quad (5.29)$$

$$\left[ \theta^{(2)} \right]_{M \times 1} = \left[ \beta^{(1)} \right]_{M \times M} [b]_{M \times 1} + \left[ \gamma^{(2)} \right]_{M \times P} [c]_{P \times 1}, \quad (5.30)$$

$$\left[ \theta^{(3)} \right]_{P \times 1} = \left[ \alpha^{(2)} \right]_{P \times M} [a]_{M \times 1} + \left[ \beta^{(2)} \right]_{P \times M} [b]_{M \times 1} + [\gamma]_{P \times P} [c]_{P \times 1}. \quad (5.31)$$

Queremos trasladar las ecuaciones anteriores a la forma  $Ax = b$ ; haciendo algunos reacomodos obtenemos la siguiente matriz que es equivalente a las tres ecuaciones matriciales que queremos resolver.

$$\begin{pmatrix} (\alpha^{(1)})_{M \times M} & (0)_{M \times M} & (\gamma^{(1)})_{M \times P} \\ (0)_{M \times M} & (\beta^{(1)})_{M \times M} & (\gamma^{(2)})_{M \times P} \\ (\alpha^{(2)})_{P \times M} & (\beta^{(2)})_{P \times M} & (\gamma^{(3)})_{P \times P} \end{pmatrix}_{(2M+P) \times (2M+P)} \begin{pmatrix} (a)_{M \times 1} \\ (b)_{M \times 1} \\ (c)_{P \times 1} \end{pmatrix}_{2M+P} \quad (5.32)$$

$$= \begin{pmatrix} (\theta^{(1)})_{M \times 1} \\ (\theta^{(2)})_{M \times 1} \\ (\theta^{(3)})_{P \times 1} \end{pmatrix}_{2M+P}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones utilizaremos eliminación de Gauss Jordan con pivoteo.

### 5.3 IMPLEMENTACIÓN EN FORTRAN 77

Una vez que ya tenemos la ecuación matricial 5.32, procederemos a programarlo en fortran 77. A continuación se muestra el código fuente que se programó y algunas de las explicaciones más relevantes de ella.

#### CÓDIGO FUENTE PROGRAMA PRINCIPAL

El siguiente código es el programa principal que se utilizó la cual se llama fit. En este código utilizamos dos archivos llamados "data1\_//source//.dat" y "data2\_//source//.dat", el primer archivo contiene las coordenadas  $\alpha$  y  $\delta$  a diferentes épocas junto con sus respectivos errores. Por otra parte el segundo archivo contiene el día juliano junto con las coordenadas baricéntricas de la tierra, consultar [5]. Además en este código una vez obtenido las ecuaciones para el ajuste, utilizamos otras fechas para obtener posiciones del T-Tauri Sur en dichas fechas estos resultados se guardan en otros dos archivos llamados "res1\_//source//.dat" y "res2\_//source//.dat" para después ser graficados en el plano del cielo, como se muestra en las figuras 6.2 y 6.3.

```

PROGRAM fit
implicit none
REAL*8 pi,j2000,oneyear
INTEGER nobs,step,niter,nparam,nparam_ind,nparam_dep,mparam
CHARACTER*4 source
PARAMETER (nobs=12)
PARAMETER (source="ttau")
PARAMETER (nparam_ind=3)
PARAMETER (nparam_dep=1)
PARAMETER (nparam=7)

```

```

PARAMETER (mparam=4)
PARAMETER (step=3000)
PARAMETER (pi=3.1415926535898)
PARAMETER (niter=5)
PARAMETER (j2000=2451545.0)
PARAMETER (oneyear=365.242175)
REAL*8 julday(nobs),xx(nobs),yy(nobs),zz(nobs),dummy
REAL*8 alph1(nobs),alph2(nobs),alph3(nobs),alpha(nobs)
REAL*8 delt1(nobs),delt2(nobs),delt3(nobs),delta(nobs)
REAL*8 sigalp(nobs),sigdel(nobs),alphiter,deltiter
REAL*8 am(nparam,nparam),falpha(nobs),fdelta(nobs),bv(nparam)
REAL*8 chisq,d3,a3,finpar,errpar,dist,distmin,distmax
REAL*8 alphafin,deltafin,palphafin,pdeltafin,rms,rms1,rms2
REAL*8 aa,dd,diff1,diff2,diff3(nobs),aalphafin,adeltafin
REAL*8 cd,julian,xxx,yyy,zzz,func(mparam)
REAL*8 funca(mparam),funcd(mparam)
INTEGER i,j,d1,d2,k,a1,a2
CHARACTER*16 filedata1,filedata2,fileres1,fileres2,fileearth
INTEGER k1,k2,l,j1,j2
filedata1="data1_"/source//".dat"
filedata2="data2_"/source//".dat"
fileres1="res1_"/source//".dat"
fileres2="res2_"/source//".dat"
fileearth="earth.dat"
OPEN(1,file=filedata1,status='old')
DO i=1,nobs
READ(1,*) dummy,dummy,dummy,dummy,dummy,dummy,
# alph1(i),alph2(i),alph3(i),sigalp(i),delt1(i),
# delt2(i),delt3(i),sigdel(i)
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN(2,file=filedata2,status='old')
DO i=1,nobs
READ(2,*) dummy,dummy,dummy,
# julday(i),xx(i),yy(i),zz(i)
ENDDO
CLOSE(2)
DO i=1,nobs
alpha(i)=15.0*(alph1(i)+alph2(i)/60.0+alph3(i)/3600.0)
delta(i)=(delt1(i)+delt2(i)/60.0+delt3(i)/3600.0)
sigalp(i)=15.0*sigalp(i)/3600.0
sigdel(i)=sigdel(i)/3600.0
IF (delt1(i).lt.0.0) then
delta(i)=delt1(i)-(delt2(i)/60.0)-(delt3(i)/3600.0)
ENDIF
ENDDO

```

```

alphiter=alpha(1)
deltiter=delta(1)
DO l=1,niter
cd = cos(deltiter*pi/180.0)
DO i=1,nparam
bv(i)=0.0
DO j=1,nparam
am(i,j)=0.0
ENDDO
ENDDO
DO i=1,nobs
c Primer bloque
DO j=1,nparam_ind
call funca(julday(i),funca,mparam,alphiter,deltiter,
# xx(i),yy(i),zz(i))
DO k=1,nparam_ind
am(j,k) = am(j,k)+funca(k)*funca(j)/(sigalp(i)**2)
ENDDO
DO k=1,nparam_dep
k1 = 2*nparam_ind+k
k2 = nparam_ind+k
am(j,k1) = am(j,k1)+funca(k2)*funca(j)/(sigalp(i)**2)
ENDDO
bv(j) = bv(j)+alpha(i)*funca(j)/(sigalp(i)**2)
ENDDO
c Segundo bloque
DO j=1,nparam_ind
j1=nparam_ind+j
call funcsd(julday(i),funcd,mparam,alphiter,
# deltiter,xx(i),yy(i),zz(i))
DO k=1,nparam_ind
k1=nparam_ind+k
am(j1,k1) = am(j1,k1)+funcd(k)*funcd(j)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
DO k=1,nparam_dep
k1 = 2*nparam_ind+k
k2 = nparam_ind+k
am(j1,k1) = am(j1,k1)+funcd(k2)*funcd(j)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
bv(j1) = bv(j1)+delta(i)*funcd(j)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
c Tercer bloque
DO j=1,nparam_dep
j1=2*nparam_ind+j
j2=nparam_ind+j
call funca(julday(i),funca,mparam,alphiter,deltiter,

```

```

# xx(i),yy(i),zz(i)
call funcsd(julday(i),funcd,mparam,alphiter,deltiter,
# xx(i),yy(i),zz(i)
DO k=1,nparam_ind
am(j1,k) = am(j1,k)+funca(k)*funca(j2)/(sigalp(i)**2)
ENDDO
DO k=1,nparam_ind
k1 = nparam_ind+k
am(j1,k1) = am(j1,k1)+funcd(k)*funcd(j2)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
DO k=1,nparam_dep
k1 = 2*nparam_ind+k
k2 = nparam_ind+k
am(j1,k1) = am(j1,k1)+funca(k2)*funca(j2)/
# (sigalp(i)**2)+funcd(k2)*funcd(j2)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
bv(j1) = bv(j1)+alpha(i)*funca(j2)/(sigalp(i)**2)+
# delta(i)*funcd(j2)/(sigdel(i)**2)
ENDDO
ENDDO
call gaussj(am,nparam,nparam,bv,1,1)
bv(1)=bv(1)/15
a1=int(bv(1))
a2=int((bv(1)-a1)*60.0)
a3=(((bv(1)-a1)*60.0)-a2)*60.0)
d1=int(bv(4))
d2=int((bv(4)-d1)*60.0)
d3=(((bv(4)-d1)*60.0)-d2)*60.0)
alphafin=bv(1)
deltafin=bv(4)
palphafin=bv(2)*3600*1000*cd
pdeltafin=bv(5)*3600*1000
aalphafin=bv(3)*3600*1000*cd
adeltafin=bv(6)*3600*1000
finpar=bv(7)*3600*1000
DO i=1,nparam
am(i,i)=sqrt(am(i,i))*3600
ENDDO
am(1,1)=am(1,1)/15.0
am(2,2)=am(2,2)*1000*cd
am(3,3)=am(3,3)*1000*cd
am(4,4)=am(4,4)
am(5,5)=am(5,5)*1000
am(6,6)=am(6,6)*1000
am(7,7)=am(7,7)*1000
errpar=am(7,7)

```

70CAPÍTULO 5. GENERALIZACIÓN AL CASO DE ECUACIONES ACOPLADAS

```

dist=1000.0/finpar
distmin=1000.0/(finpar+errpar)
distmax=1000.0/(finpar-errpar)
distmin=dist-distmin
distmax=distmax-dist
if (l.eq.niter) then
WRITE(6,20)'J2000.0 alpha:',a1,a2,a3,am(1,1)
WRITE(6,20)'J2000.0 delta:',d1,d2,d3,am(4,4)
WRITE(6,21)'Proper motion in alpha:',palphafin,am(2,2),'mas yr-1'
WRITE(6,21)'Proper motion in delta:',pdeltafin,am(5,5),'mas yr-1'
WRITE(6,21)'Acceleration in alpha:',aalphafin,am(3,3),'mas yr-2'
WRITE(6,21)'Acceleration in delta:',adeltafin,am(6,6),'mas yr-2'
WRITE(6,22)'Parallax:',finpar,am(7,7),'mas'
WRITE(6,23)'Distance:',dist,distmin,distmax,'pc'
endif
alphiter = alphafin*15.0
deltiter = deltafin
enddo
alphafin=alphafin*15.0
finpar=finpar/1000.0/3600.0
palphafin=palphafin/1000.0/3600.0/cd
pdeltafin=pdeltafin/1000.0/3600.0
aalphafin=aalphafin/1000.0/3600.0/cd
adeltafin=adeltafin/1000.0/3600.0
rms=0.0
rms1=0.0
rms2=0.0
chisq=0.0
OPEN(11,file=fileres1,form='formatted',status='unknown')
DO i=1,nobs
aa=alphafin+(julday(i)-j2000)/oneyear*palphafin+
# 0.5*((julday(i)-j2000)/oneyear)**2*aalphafin+finpar*
# (xx(i)*SIN(alphafin*pi/180.0)-yy(i)*COS(alphafin*pi/180.0))
# /COS(deltafin*pi/180.0)
dd=deltafin+(julday(i)-j2000)/oneyear*pdeltafin+
# 0.5*((julday(i)-j2000)/oneyear)**2*adeltafin+finpar*
# (xx(i)*COS(alphafin*pi/180.0)*SIN(deltafin*pi/180.0)+
# yy(i)*SIN(alphafin*pi/180.0)*SIN(deltafin*pi/180.0)-
# zz(i)*COS(deltafin*pi/180.0))
write(11,41) julday(i),aa,dd,alpha(i),delta(i)
diff1=(alpha(i)-aa)*cd
diff2=(delta(i)-dd)
chisq=chisq+((diff1/sigalp(i))**2+(diff2/sigdel(i))**2)
diff1=diff1*3600*1000
diff2=diff2*3600*1000
write(6,*) diff1,diff2

```

```

diff3(i)=sqrt(diff1**2+diff2**2)
rms1=rms1+diff1**2
rms2=rms2+diff2**2
rms=rms+diff3(i)**2
ENDDO
CLOSE(11)
rms=sqrt(rms/nobs)
rms1=sqrt(rms1/nobs)
rms2=sqrt(rms2/nobs)
chisq=chisq/(2*nobs-nparam)
write(6,25) 'Post-fit rms in alpha:',rms1,'mas'
write(6,25) 'Post-fit rms in delta:',rms2,'mas'
write(6,25) 'Post-fit rms in distance:',rms,'mas'
write(6,26) 'Reduced Chi square:',chisq
OPEN(12,file=fileres2,form='formatted',status='unknown')
OPEN(13,file=fileearth,status='old')
DO i=1,step
READ(13,*) julian,xxx,yyy,zzz
aa=alphafin+(julian-j2000)/oneyear*palphafin+
# 0.5*((julian-j2000)/oneyear)**2*aalphafin+finpar*
# (xxx*SIN(alphafin*pi/180.0)-yyy*
# COS(alphafin*pi/180.0))/COS(deltafin*pi/180.0)
dd=deltafin+(julian-j2000)/oneyear*pdeltafin+
# 0.5*((julian-j2000)/oneyear)**2*adeltafin+finpar*
# (xxx*COS(alphafin*pi/180.0)*SIN(deltafin*pi/180.0)+
# yyy*SIN(alphafin*pi/180.0)*SIN(deltafin*pi/180.0)-
# zzz*COS(deltafin*pi/180.0))
write(12,40) julian,aa,dd
ENDDO
CLOSE(13)
CLOSE(12)
20 FORMAT(a25,10x,2(i2,1x),f10.6,1x,'+-',f9.6)
21 FORMAT(a25,10x,f10.4,1x,'+-',f9.4,1x,a8)
22 FORMAT(a25,10x,f10.4,1x,'+-',f9.4,1x,a3)
23 FORMAT(a25,10x,f6.2,1x,'-',f4.2,1x,'+',f4.2,1x,a3)
24 FORMAT(a25,10x,f10.4)
25 FORMAT(a25,10x,f10.3,1x,a3)
26 FORMAT(a25,10x,f10.3)
40 FORMAT(f15.4,3x,f20.12,3x,f20.12)
41 FORMAT(f20.6,3x,f20.12,3x,f20.12,3x,f20.10,3x,f20.10)
END

```

### SUBPROGRAMAS

La siguiente subrutina llamada funcsa se encarga de calcular los cuatro funciones que intervienen en la ecuación de la ascensión recta:

72CAPÍTULO 5. GENERALIZACIÓN AL CASO DE ECUACIONES ACOPLADAS

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha t + a_\alpha \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\alpha(\alpha, \delta, t) = \alpha_0 \cdot afunc(1) + \mu_\alpha \cdot afunc(2) + a_\alpha \cdot afunc(3) + \theta \cdot afunc(4).$$

```

SUBROUTINE funcsa(x,afunc,ma,alfa,delta,xx,yy,zz)
implicit none
REAL*8 pi,j2000,oneyear
PARAMETER (pi=3.1415926535898)
PARAMETER (j2000=2451545.0)
PARAMETER (oneyear=365.242175)
INTEGER ma
REAL*8 x,afunc(ma),alfa,delta,xx,yy,zz
afunc(1)=1
afunc(2)=(x-j2000)/oneyear
afunc(3)=0.5*((x-j2000)/oneyear)**2
afunc(4)=(xx*SIN(alfa*pi/180.0)-yy*COS(alfa*pi/180.0))
# /COS(delta*pi/180.0)
END

```

La siguiente subrutina llamada funcsd se encarga de calcular los cuatro funciones que intervienen en la ecuación de la declinación:

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu_\delta t + a_\delta \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\delta(\alpha, \delta, t) = \alpha_0 \cdot afunc(1) + \mu_\alpha \cdot afunc(2) + a_\alpha \cdot afunc(3) + \theta \cdot afunc(4).$$

```

SUBROUTINE funcsd(x,afunc,ma,alfa,delta,xx,yy,zz)
implicit none
REAL*8 pi,j2000,oneyear
PARAMETER (pi=3.1415926535898)
PARAMETER (j2000=2451545.0)
PARAMETER (oneyear=365.242175)
INTEGER ma
REAL*8 x,afunc(ma),alfa,delta,xx,yy,zz
afunc(1)=1
afunc(2)=(x-j2000)/oneyear
afunc(3)=0.5*((x-j2000)/oneyear)**2
afunc(4)=(xx*COS(alfa*pi/180.0)*SIN(delta*pi/180.0)+
# yy*SIN(alfa*pi/180.0)*SIN(delta*pi/180.0)-zz*COS(delta*pi/180.0))
END

```

Las siguiente subrutina llamada gaussj se encarga de calcular los siete parámetros que intervienen en las siguientes ecuaciones,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha t + a_\alpha \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\alpha(\alpha, \delta, t)$$

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu_\delta t + a_\delta \frac{t^2}{2} + \theta \cdot f_\delta(\alpha, \delta, t)$$

utilizando el método de la eliminación de Gauss-Jordan con pivoteo.

```

SUBROUTINE gaussj(a,n,np,b,m,mp)
INTEGER m,mp,n,np,NMAX
REAL*8 a(np,np),b(np,mp)
PARAMETER (NMAX=50)
INTEGER i,icol,irow,j,k,l,ll,indx(NMAX),indxr(NMAX),ipiv(NMAX)

```

```

REAL*8 big,dum,pivinv
do 11 j=1,n
  ipiv(j)=0
  11 continue
do 22 i=1,n
  big=0.
  do 13 j=1,n
    if(ipiv(j).ne.1)then
      do 12 k=1,n
        if (ipiv(k).eq.0) then
          if (abs(a(j,k)).ge.big)then
            big=abs(a(j,k))
            irow=j
            icol=k
          endif
          else if (ipiv(k).gt.1) then
            pause 'singular matrix in gaussj'
          endif
        12 continue
      endif
    13 continue
    ipiv(icol)=ipiv(icol)+1
    if (irow.ne.icol) then
      do 14 l=1,n
        dum=a(irow,l)
        a(irow,l)=a(icol,l)
        a(icol,l)=dum
      14 continue
      do 15 l=1,m
        dum=b(irow,l)
        b(irow,l)=b(icol,l)
        b(icol,l)=dum
      15 continue
    endif
    indxr(i)=irow
    indxc(i)=icol
    if (a(icol,icol).eq.0.) pause 'singular matrix in gaussj'
    pivinv=1./a(icol,icol)
    a(icol,icol)=1.
    do 16 l=1,n
      a(icol,l)=a(icol,l)*pivinv
    16 continue
    do 17 l=1,m
      b(icol,l)=b(icol,l)*pivinv
    17 continue
  do 21 ll=1,n

```

```
if(l1.ne.icol)then
dum=a(l1,icol)
a(l1,icol)=0.
do 18 l=1,n
a(l1,l)=a(l1,l)-a(icol,l)*dum
18 continue
do 19 l=1,m
b(l1,l)=b(l1,l)-b(icol,l)*dum
19 continue
endif
21 continue
22 continue
do 24 l=n,1,-1
if(indxr(l).ne.indxc(l))then
do 23 k=1,n
dum=a(k,indxr(l))
a(k,indxr(l))=a(k,indxc(l))
a(k,indxc(l))=dum
23 continue
endif
24 continue
return
END
```

## Capítulo 6

# Resultados y Conclusiones.

### 6.1 DISTANCIAS OBTENIDAS

Los resultados matemáticos obtenidos en el Capítulo 5 se implementaron en Fortran 77. Se hicieron dos versiones, una con términos de aceleración, el otro, suponiendo un movimiento propio uniforme. Se ejecutaron dichos programas usando como entradas las doce observaciones que se obtuvieron con el VLBA. Los resultados obtenidos para el ajuste sin aceleración son los siguientes:

J2000.0 $\alpha$ :	$4^h 21^m 59.423772^s \pm 0.000014^s$
J2000.0 $\delta$ :	$19^\circ 32' 5.721245'' \pm 0.000207''$
Movimiento propio en alfa ( $\mu_\alpha$ ):	$4.0142 \pm 0.0419 \text{ mas yr}^{-1}$
Movimiento propio en delta ( $\mu_\delta$ ):	$-1.2456 \pm 0.0445 \text{ mas yr}^{-1}$
Paralaje ( $\theta$ ):	$6.8448 \pm 0.0348 \text{ mas}$
Distancia:	$146.10 -0.74 + 0.75 \text{ pc}$

Mientras que incluyendo la aceleración se obtuvieron los siguientes resultados:

J2000.0 $\alpha$ :	$4^h 21^m 59.424989^s \pm 0.000126^s$
J2000.0 $\delta$ :	$19^\circ 32' 5.718568'' \pm 0.001864''$
Movimiento propio en alfa ( $\mu_\alpha$ ):	$-3.5419 \pm 0.1190 \text{ mas yr}^{-1}$
Movimiento propio en delta ( $\mu_\delta$ ) :	$-0.0685 \pm 0.8156 \text{ mas yr}^{-1}$
Aceleración en alfa ( $a_\alpha$ ):	$1.6352 \pm 0.1687 \text{ mas yr}^{-2}$
Aceleración en delta ( $a_\delta$ ):	$-0.2550 \pm 0.1764 \text{ mas yr}^{-2}$
Paralaje ( $\theta$ ):	$6.7770 \pm 0.0356 \text{ mas}$
Distancia:	$147.56 -0.77 + 0.78 \text{ pc}$

Las coordenadas ( $\alpha, \delta$ ) de las observaciones que se había hecho con el VLBA de la fuente T-Tauri Sur en las distintas épocas se pueden representar gráficamente en el plano del cielo para los tres casos. Notemos que en la figura 6.1 las

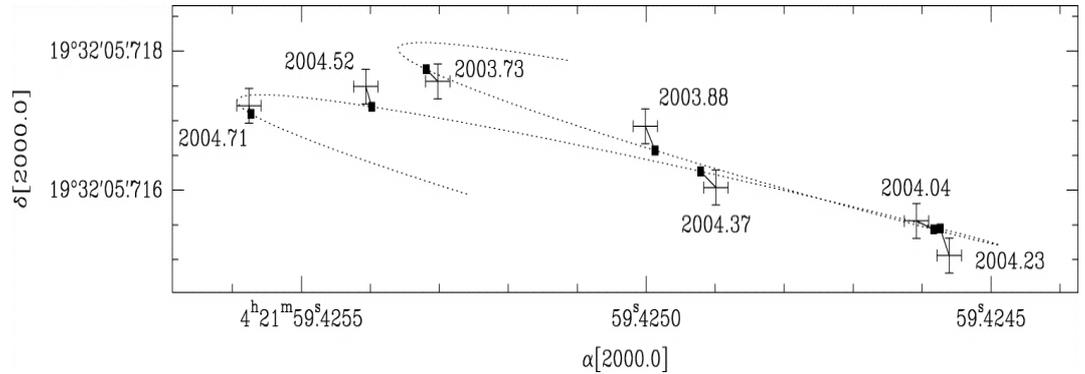


Figura 6.1: Esta figura muestra los resultados obtenidos con los ajustes por separado.

cruces que representan las posiciones medidas de la fuente están un poco más alejados de los cuadrillos rellenos los cuales muestran las posiciones ajustadas. En cambio en la figura 6.2 las cruces están más próximas a los cuadrillos, lo cual muestra un ajuste mucho mejor. Pero en la figura 6.3 es mucho mejor el ajuste que se ve a comparación de las otras dos.

Ahora si hacemos la comparación de estos dos resultados y de los resultados obtenidos en el artículo de Loinard, véase [11], podemos notar que el que da un ajuste muy bueno es el caso que incluye la aceleración, aunque el resultado obtenido en el segundo caso sin aceleración es mucho mejor que el primer caso, esto significa que al juntar las dos ji-cuadradas si se mejora bastante la precisión; pero se mejora aún más si involucramos la aceleración. También cabe mencionar que en el segundo y tercer caso incluimos más observaciones para el ajuste, y que se corrigió un error que tenía el correlador del VLBA.

Estos resultados se publicarán en la revista internacional *The Astrophysical Journal*.

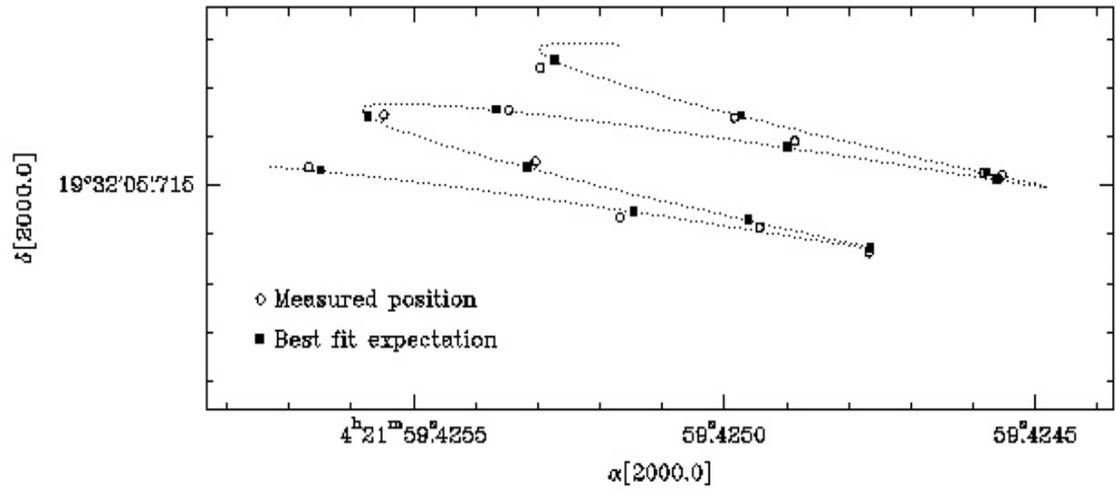


Figura 6.2: Esta figura muestra los resultados obtenidos con el ajuste simultáneo pero sin aceleración.

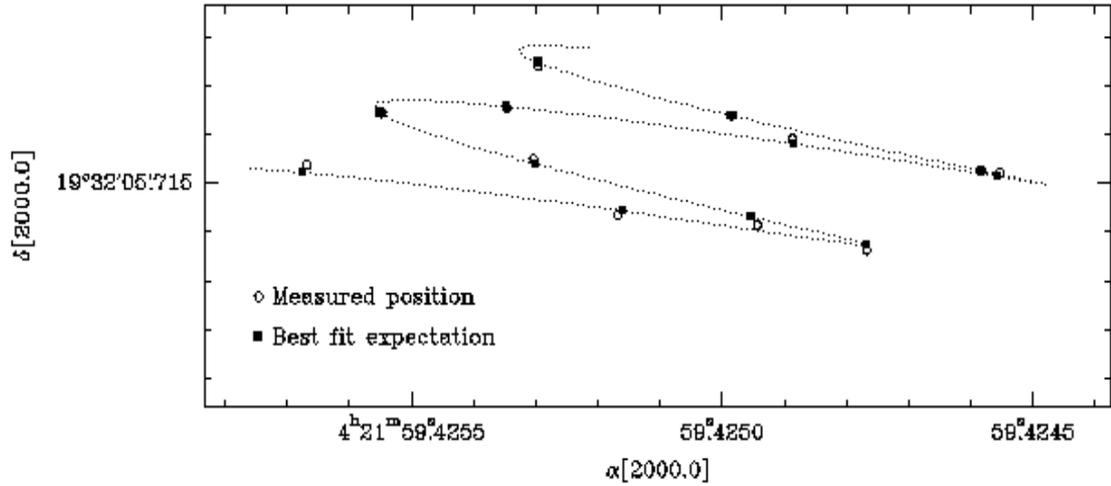


Figura 6.3: Esta figura muestra los resultados obtenidos con el ajuste simultáneo y con aceleración.

## 6.2 CÁLCULO DE MASAS ESTELARES EN EL SISTEMA T-TAURI CON LA DISTANCIA ACTUAL

Para ver la importancia del hecho de encontrar distancias precisas de los cuerpos celestes a continuación procederemos analizar el siguiente artículo [13] .

En este artículo los investigadores hicieron un estudio; para obtener las masas de cada una de las estrellas del sistema binario T Tau S, utilizando el hecho de que T Tau S pertenece a un sistema triple compuesta de dos orbitas perihélicas, se analiza simultáneamente el movimiento de T Tau Sb en el resto de los fragmentos de T Tau Sa y T Tau N. Con este método, los autores de [13] les fue posible localizar el centro de masa de T Tau S y , por lo tanto, determinar la masa de T Tau Sa y T Tau Sb sin suponer a priori el cociente de masa/flujo del sistema. Utilizando el hecho descrito se obtuvieron los siguientes parámetros:

$$a(10^{-3''}) = 82.1 \pm 1.8 , \text{ semieje mayor de la elipse.}$$

$$P(\text{yr}) = 21.66 \pm 0.93, \text{ periodo orbital del sistema.}$$

$$\mu = 0.183 \pm 0.044 , \text{ cociente de masas.}$$

Por otra parte se cumple la siguiente relación dada por la tercera Ley de Kepler,

$$GM_{total}P^2 = 4\pi^2a^3, M_{sb} = \mu M_{total} \text{ y } M_{sa} = (1 - \mu)M_{total}$$

donde

G=constante gravitacional.

$M_{total}$ =masa total del sistema.

$M_{sa}$ = masa de Sa y  $M_{sb}$ = masa de Sb.

P=periodo orbital.

a=semieje mayor de la elipse.

Utilizando estas relaciones, junto con la distancia  $d = 141.5 \pm \begin{matrix} 2.8 \\ 2.7 \end{matrix} pc$

obtenida en el artículo [11] se obtuvieron las siguientes masas:

$$M_{total}(M_{solar}) = 3.34 \pm 0.36$$

$$M_{Sb}(M_{solar}) = 0.61 \pm 0.17$$

$$M_{Sa}(M_{solar}) = 2.73 \pm 0.31$$

Ahora bien, si utilizamos la distancia encontrada con nuestro ajuste simultáneo con aceleración.

Obtenemos los siguiente resultados:

$$M_{total}(M_{solar}) = 3.79 \pm 0.36$$

$$M_{Sb}(M_{solar}) = 0.69 \pm 0.18$$

$$M_{Sa}(M_{solar}) = 3.10 \pm 0.34$$

Notemos que las masas obtenidas con la distancia actual son más grandes que las obtenidas en el artículo [13]. Esto implica, que la medición precisa de las distancias de los cuerpos celestes resulta de gran importancia para la comunidad científica en el área de la Astronomía; ya que esto permite determinar mejor sus propiedades como son: su masa en el artículo [13] que acabamos de analizar, como también la luminosidad, tamaño entre otras características que resultan necesarios conocer para así poder realizar avances científicos. Por tal razón, en el campo de la Astronomía, más específicamente la Astrometría de estrellas resulta de gran interés y los resultados que hemos aportado en esta tesis estamos seguros de que será de utilidad para otros investigadores que trabajan en distintas áreas de la Astronomía.



# Referencias

- [1] William H. Press, Saul A. Teukolsky, NUMERICAL RECIPES in FORTRAN, The Art of Scientific Computing, Second Edition, 1994.
- [2] P. Kenneth Seidelmann, EXPLANATORY SUPPLEMENT to the ASTRONOMICAL ALMANAC, 1992.
- [3] Chaisson McMillan, ASTRONOMY A Beginner's Guide to the Universe, THIRD EDITION, 2001.
- [4] Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie, AN INTRODUCTION TO Modern Astrophysics, 1996.
- [5] Multiyear Interactive Computer Almanach (MICA), Us Naval Observatory, 2005.
- [6] Frank Shu, The Physical Universe An Introduction to Astronomy, University Science Books, 1982.
- [7] R.W. Hilditch, An Introduction to close binary stars, Cambridge University Press, 2001.
- [8] Kovalevsky & Seidelmann, Fundamentals of astrometry, Cambridge University Press, 1999 .
- [9] W. GILLARD DAVID, HOLDAWAY RICHARD, The astronomical Almanach US Naval Observatory, 2005.
- [10] Arfken & Weber, Mathematical Methods for Physicists, Harcourt Academic Press, FIFTH EDITION, 2001 .
- [11] LAURENT LOINARD, AMY J. MIODUSZEWSKI, Multiepoch VLBA Observations of T Tauri Sur, 2005.
- [12] G. DUCHÊNE, A. M. Ghez and C. McCabe, The circumstellar environment of T Tauri S at High Spatial and Spectral Resolution, 2005.

- [13] G. DUCHÊNE, H. Beust, F. Adjali, Accurate stellar masses in the multiple system T Tau, 2006.
- [14] Loinard Laurent; Rodríguez Luis F.; Rodríguez Mónica I, Ejection of a Low-Mass Star in a Young Stellar System in Taurus. *The Astrophysical Journal*, Volume 587, Issue 1, pp. L47-L50, 2005.
- [15] Duchêne G.; Ghez A. M.; McCabe C, Resolved Near-Infrared Spectroscopy of the Mysterious Pre-Main-Sequence Binary System T Tauri. *The Astrophysical Journal*, Volume 568, Issue 2, pp. 771-778, 2005.