



**Universidad Tecnológica de la Mixteca**

**”H-Convexidad”**

Tesis para obtener el título de:  
**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

Presenta:  
**Iván López Salmorán**

Director de Tesis:  
**M.C. José L. Carrasco Pacheco**

*Huajuapán de León, Oaxaca.  
Septiembre de 2006*

# Agradecimientos

A todas esas personas que de una u otra manera me han ayudado a realizar este sueño. Estoy seguro que ellas saben quienes son. No quisiera mencionar a nadie porque podría omitir a algunos y no sería justo; sin embargo creo que es muy necesario que enfatice mis agradecimientos hacia mi asesor el M.C. José Luis Carrasco Pacheco, por aventurarse en este tema un tanto desconocido para ambos; y hacia mis sinodales, la Dra. Virginia Berrón Lara y el M.C. Adolfo Maceda Méndez por tener la paciencia de revisar este trabajo y por darme las sugerencias pertinentes para que resultara mejor.

# Dedicatoria

*A mis padres y hermanas:*  
Por su apoyo en cada etapa de mi vida.

*A mi nueva familia:*  
Por ser un motivo mas para concluir este trabajo.

# Introducción

Realmente la teoría sobre los conjuntos convexos no es tan vieja como otras teorías, esta fue desarrollada principalmente por el famoso matemático alemán Herman Minkowski a finales del siglo XIX. Él investigó muchas propiedades sobre estos conjuntos tan especiales para después introducir conceptos tales como: envolvente afín, funciones convexas, hiperplano soporte, funcionales lineales sobre un conjunto convexo, entre otras.

Es cierto que las matemáticas son importantes por si mismas, pero lo son más cuando se tiene una aplicación a la vida práctica, esto no lo logró completamente Minkowski y fue por eso que algunos matemáticos no le dieron mucha importancia a sus aportaciones. Sin embargo, después de muchos años nos damos cuenta de que esos conceptos tan abstractos en un principio, ahora son muy importantes en muchas áreas de aplicación como: la Economía, la Optimización, la Programación Lineal, la Computación, entre otras.

Muchas ramas de las matemáticas han surgido por querer resolver un problema práctico, cosa que no sucedió con la "Geometría de conjuntos convexos", pero hoy no podríamos hablar de Convexidad sin mencionar los elegantes resultados que se han ido obteniendo. Hablemos de la teoría llamada *Programación lineal* que les permitió a varios matemáticos ganarse muchos premios importantes, y es que para resolver un problema de Programación lineal lo que tenemos que hacer es encontrar la solución óptima a un conjunto finito de restricciones lineales; y resulta que el conjunto donde hay que buscar la solución es un conjunto convexo, que podría parecer que no es importante pero la verdad es que ofrece muchas ventajas propias de la geometría de este tipo de conjuntos.

Ahora podemos hablar de la llamada *Geometría Combinatoria*, que se llama así en parte porque lo que se quiere hacer es hallar el máximo o mínimo de alguna propiedad sobre una colección de objetos geométricos o analíticos.

Un problema famoso es encontrar dentro de todas las figuras con perímetro dado a la que tenga la mayor área posible, este se resolvió primero para algunas clases de figuras y después se generalizó, encontrando que el círculo es la figura que tiene la propiedad deseada. Mas tarde se supo que en general, la esfera de dimensión  $n$  es el objeto con mayor volumen dentro de todos los objetos con superficie dada. Este problema puede ser de mucha utilidad en problemas tan sencillos como los relacionados con las propiedades de terrenos, cercas, pozos, etc.

También podemos mencionar otros resultados en Geometría Combinatoria como los debidos a los matemáticos Helly, Radon, Caratheodory, etc. los cuales se tratarán en detalle en el presente trabajo. Estos resultados pueden parecer muy sencillos, tal vez lo sean; pero lo que sí es seguro es que son muy importantes y tienen aplicaciones muy variadas tanto prácticas como teóricas.

La teoría de la *H-convexidad* es todavía mas nueva que la Convexidad misma. En esta teoría se definirán unos conjuntos especiales  $H$ , un funcional  $m_H$  sobre estos conjuntos y una métrica especial; eso nos permitirá definir unos nuevos conjuntos llamados conjuntos  $H$ -convexos, que en particular son convexos. Además este funcional y esta métrica nos permitirán generalizar algunos teoremas clásicos en un concepto de  $H$ -convexidad (Teorema de Helly, teorema de Jung). En general, la teoría de  $H$ -convexidad permite construir conjuntos de una interesante forma y estudiar sus propiedades pero de una manera geométrica diferente a la común.

En el primer capítulo se abordarán algunos conceptos básicos de la teoría de los conjuntos convexos. Comenzaremos definiendo lo que es un conjunto convexo y a lo largo del capítulo trataremos de caracterizar a estos conjuntos mediante otros objetos (hiperplanos, caras, puntos extremos) y además averiguaremos algunas propiedades geométricas y analíticas de importancia. Como un ejemplo básico de conjunto convexo estudiaremos algunas propiedades de los llamados *n-simplejos*.

En el segundo capítulo serán abordados detalladamente los famosos teoremas de Helly, Radon, Carathéodory y Jung. Estudiaremos a groso modo como se relacionan entre sí y daremos algunos ejemplos pertinentes que los ilustren de buena manera.

En el capítulo 3 se dará una introducción a la teoría de  $H$ -convexidad. Dentro de este capítulo definiremos al funcional  $m_H$  que será un concepto im-

portantísimo en esta teoría, además presentaremos a los llamados conjuntos unilaterales y no-unilaterales los cuales nos permitirán construir un conjunto  $H$ -convexo, entre otros objetos. También daremos varios teoremas y ejemplos suficientes que nos ayuden a entender estos ingeniosos y novedosos conceptos.

Por último en el cuarto y mas importante capítulo se desarrollará de una manera muy detallada la versión  $H$ -convexa del teorema de Jung. En este capítulo es definida una nueva "métrica" que nos sorprenderá por la forma que toman las *bolas* resultantes y la manera de calcular el *diámetro* de un conjunto.

A lo largo de la tesis nos permitimos marcar como *proposiciones* a aquellos problemas propuestos por la bibliografía consultada y que nos fueron requeridos para dar una demostración o un ejemplo mas detallado.

# Índice general

Agradecimientos	II
Dedicatoria	III
Introducción	IV
<b>1. Elementos de Convexidad</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.2. Conjuntos convexos . . . . .	3
1.3. Hiperplanos . . . . .	10
1.4. Simplejos . . . . .	17
1.5. Caras . . . . .	23
<b>2. Teoremas importantes en Geometría Combinatoria</b>	<b>28</b>
2.1. Los Teoremas de Carathéodory, Helly y Radon . . . . .	28
2.2. Teorema de Jung . . . . .	33
<b>3. H-Convexidad</b>	<b>35</b>
3.1. Conjuntos unilaterales . . . . .	35
3.2. El funcional $md$ . . . . .	41
3.3. Conjuntos $H$ -convexos . . . . .	44

---

<b>4. Teoremas en H-Convexidad</b>	<b>48</b>
4.1. H-distancia y H-diámetro . . . . .	48
4.2. El $H$ -Teorema de Jung . . . . .	51
<b>Conclusiones</b>	<b>60</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>



# Capítulo 1

## Elementos de Convexidad

¿Qué es un conjunto convexo?, ¿Qué propiedades geométricas y topológicas posee?; estas, entre otras preguntas, trataremos de responder en este primer capítulo.

Trataremos también un ejemplo muy particular de los conjuntos convexos, nos referimos al llamado *n-simplejo*, veremos la importancia de este conjunto especial y estudiaremos algunas de sus propiedades, pues este conjunto nos será de gran utilidad en capítulos siguientes.

### 1.1. Preliminares

Trabajaremos en  $\mathbb{R}^n$ , cuyos elementos son de la forma  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , con  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , se define el **producto interno** de  $x$  con  $y$  como  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  y la **norma euclideana** de  $x$  como  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ . Dotaremos a  $\mathbb{R}^n$  con la topología euclideana  $\tau$  de  $\mathbb{R}^n$  definida como sigue:

Un subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  pertenece a la topología  $\tau$  si para cada  $a \in M$  existe  $r > 0$  tal que la **bola abierta**  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\} \subset M$ .

Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  se dice que es un **punto interior** de un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$ , si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset M$ . El conjunto de todos los puntos interiores de el conjunto  $M$  es llamado el **interior** de  $M$  y se denota por  $\text{int } M$ . Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es **abierto** si coincide con su interior. Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es un **punto límite** del conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$ , si cada bola abierta

centrada en  $x$  contiene por lo menos un punto de  $M$  distinto de  $x$ . La unión de  $M$  y el conjunto de todos sus puntos límites es llamada la **cerradura** de  $M$  y se denota por  $\text{cl } M$ . Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es **cerrado** si coincide con su cerradura. Es cierto que  $M$  es abierto si y sólo si  $\mathbb{R}^n \setminus M$  es cerrado. El conjunto  $\text{cl } M \setminus \text{int } M$  es llamado **frontera** de  $M$ , denotado por  $\text{bd } M$ .

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  y  $\lambda y = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n)$ . Con estas operaciones,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial y llamaremos a sus elementos **vectores**. Diremos que el vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es **combinación lineal** de los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  si  $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$  para algunos escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ .

Si  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ,  $x$  es **combinación afín** de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  y si además  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  son no negativos, entonces diremos que  $x$  es **combinación convexa** de  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son **afínmente independientes** si ninguno de ellos es combinación afín de los otros; esto es, si

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0 \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

implica que  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Diremos que los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  son **linealmente independientes** si dada  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0$  se tiene que  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . En base a esto podemos decir que  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son afínmente independientes si  $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$  son linealmente independientes.

Un **hiperplano** en  $\mathbb{R}^n$  se define como:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle = \alpha\} \text{ con } \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

es decir, es un plano de dimensión  $n - 1$  con normal  $\eta$  que acota a los **semiespacios cerrados**

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle \leq \alpha\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle \geq \alpha\}.$$

Definimos para  $M, K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $M + K = \{m + k \mid m \in M, k \in K\}$ . Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la **distancia** entre  $x$  e  $y$  se define  $d(x, y) = \|x - y\|$ , y para  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $d(M, x) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$ . Si  $M \neq \emptyset$  podemos definir el **diámetro** de  $M$  como  $\text{diam } M = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in M\}$ ; en virtud de lo anterior, diremos que un conjunto es **acotado** si su diámetro es finito y **no-acotado** en caso contrario. El espacio  $\mathbb{R}^n$  dotado de la distancia definida anteriormente es un espacio métrico.

## 1.2. Conjuntos convexos

Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $[x, y]$  denotará el segmento de línea con puntos extremos  $x$  y  $y$ ; esto es,

$$[x, y] = \{z \mid z = \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

**Definición 1.1** Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es **convexo** si dados  $x, y \in M$ , el segmento  $[x, y]$  está totalmente contenido en  $M$ . (Ver figura 1.1).

**Ejemplo 1.1** Son conjuntos convexos:

1.  $\emptyset, \mathbb{R}^n$ .
2.  $H, H^-, H^+$ .
3. La bola abierta  $B(x, r)$  y la bola cerrada  $\overline{B}(x, r)$ .
4. Poligonos regulares, círculos, líneas.

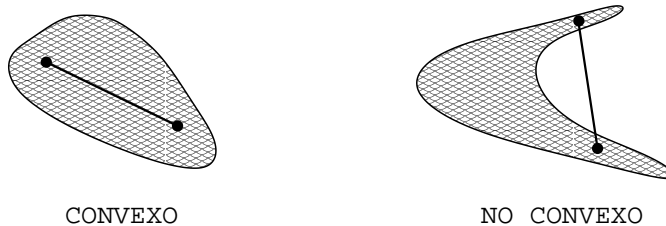


Figura 1.1:

Es claro que dentro de los conjuntos convexos los hay acotados y no acotados; dentro de los primeros podemos mencionar a los segmentos de línea, al círculo, a los polígonos, a las bolas abiertas y cerradas y en el otro caso encontramos a los semiplanos, a los rayos, a los semiespacios abiertos y cerrados, etc. Además, observemos que un conjunto convexo no tiene porque ser abierto o cerrado, pues por ejemplo  $[x, y)$  a pesar de que no es abierto ni cerrado es un conjunto convexo.

El siguiente teorema da una forma de construir mas conjuntos convexos.

**Teorema 1.1** *Consideremos una familia de conjuntos convexos  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $I$  es un conjunto de índices. Entonces  $M = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$  es un conjunto convexo (posiblemente vacío).*

**Demostración.**

Dados  $x, y \in M$  se tiene que  $x, y$  están en  $M_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ . Como cada  $M_\alpha$  es convexo, el segmento  $[x, y]$  está totalmente contenido en él. Por tanto  $[x, y] \subset \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = M$ , luego  $M$  es convexo. ■

Así, si tenemos un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  arbitrario y consideramos la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen obtendremos lo que se llama **casco convexo de  $M$** , denotado por  $\text{conv } M$ ; en virtud del teorema anterior, es claro que éste conjunto es convexo. Es cierto también que  $\text{conv } M$  es el mínimo conjunto convexo que contiene a  $M$ . (Ver figura 1.2).

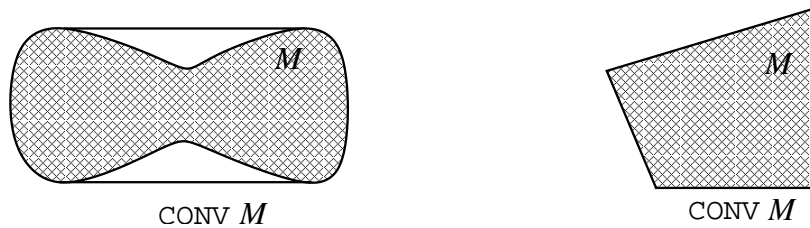


Figura 1.2:

Hemos visto que un semiespacio cerrado es un conjunto convexo; por el teorema anterior la intersección de una familia arbitraria de semiespacios cerrados es un conjunto convexo y cerrado. Si intersectamos una familia finita de semiespacios cerrados y el conjunto resultante es acotado y no vacío,

entonces será llamado **Politopo convexo**; por el teorema de Heine-Borel, este conjunto es compacto. En general se llamará Politopo al casco convexo de un conjunto finito de puntos; i.e.,  $\text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es un Politopo. (Ver figura 1.3).

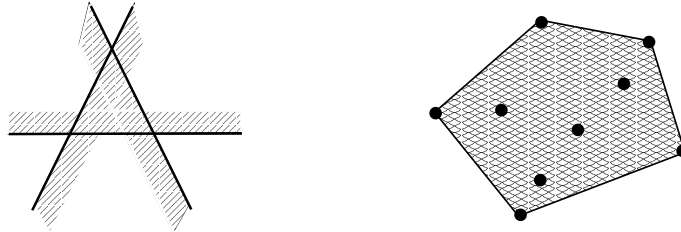


Figura 1.3:

**Definición 1.2** Diremos que  $M \subset \mathbb{R}^n$  es un **cuerpo convexo** si es un conjunto convexo cerrado con puntos interiores. En particular si un politopo es un cuerpo convexo, entonces será llamado **politopo convexo sólido**.

**Definición 1.3** Sea  $\lambda \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ; se dice que la función  $h_{\lambda,a}(x) = a + \lambda(x - a)$  es la **Homotecia** centrada en  $a$  y con coeficiente  $\lambda$ .

En otras palabras la Homotecia manda el punto  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $a + \lambda(x - a) \in \mathbb{R}^n$ . Por otro lado si  $M$  es convexo y tomamos  $a \in M$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se sigue que  $h_{\lambda,a}(x) = a + \lambda(x - a) = \lambda x + (1 - \lambda)a \in M$  para toda  $x \in M$ ; es decir  $h_{\lambda,a}(M) \subseteq M$ .

**Teorema 1.2** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo y  $a \in \text{int } M$ . Entonces para cada  $b \in \text{int } M$ ,  $[a, b]$  está formado por puntos interiores de  $M$ .

### Demostración.

Como  $a$  es un punto interior de  $M$  existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset M$ . Sea  $x_0 \in [a, b]$ ,  $x_0 = \lambda a + (1 - \lambda)b$  para alguna  $0 < \lambda \leq 1$ ; tomando la homotecia centrada en  $b$  y coeficiente  $\lambda$  se tiene  $h_{\lambda,b}(a) = b + \lambda(a - b) = \lambda a + (1 - \lambda)b = x_0$ , luego  $x_0 \in h_{\lambda,b}(B(a, r))$ . (Ver figura 1.4).

Sea  $x \in B(a, r)$ , se cumple que  $h_{\lambda,b}(x) - h_{\lambda,b}(a) = h_{\lambda,b}(x) - x_0 = \lambda(x - a)$ , mas aún,  $\|h_{\lambda,b}(x) - x_0\| = \|\lambda(x - a)\| = \lambda\|x - a\| < \lambda r$ , en consecuencia

$h_{\lambda,b}(x) \in B(x_0, \lambda r)$ ; i.e.,  $h_{\lambda,b}(B(a, r)) \subseteq B(x_0, \lambda r)$ . Por otro lado, sea  $x \in B(x_0, \lambda r)$ , luego  $\|x - x_0\| < \lambda r$  y  $\|\frac{x-x_0}{\lambda}\| < r$ ; sustituyendo  $x_0$  y reduciendo términos obtenemos  $\|(\frac{x-b}{\lambda} + b) - a\| < r$ ;  $y = \frac{x-b}{\lambda} + b$  está en  $B(a, r)$  y  $h_{\lambda,b}(y) = x$ . Así  $x \in h_{\lambda,b}(B(a, r))$  y en consecuencia  $B(x_0, \lambda r) \subseteq h_{\lambda,b}(B(a, r))$ . Por tanto  $h_{\lambda,b}(B(a, r)) = B(x_0, \lambda r)$ ; esto es,  $h_{\lambda,b}(B(a, r))$  es una bola con centro en  $x_0$  y radio  $\lambda r$ .

Además, dado  $y \in h_{b,\lambda}(B(a, r))$ ,  $y = b + \lambda(x - b) = \lambda x + (1 - \lambda)b$ , entonces  $y \in M$  pues  $x, b \in M$  y en consecuencia  $h_{b,\lambda}(B(a, r)) \subset M$ . Luego  $x_0$  es un punto interior de  $M$ . ■

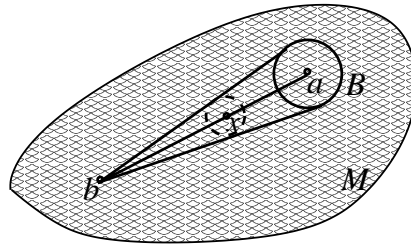


Figura 1.4:

**Proposición 1.1** *Un punto  $c \in \mathbb{R}^n$  pertenece al casco convexo de un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  si y sólo si existen puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m \in F$  (no necesariamente distintos) y números reales no negativos  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  que cumplen  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  y satisfacen  $c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Definamos  $M = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i \text{ con } \lambda_i \geq 0, a_i \in F \text{ y } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}$ .

Dados  $x, y \in M$ ,

$$x = \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \quad y = \sum_{i=0}^r \alpha_i b_i \text{ con } \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$$

veamos que  $[x, y] \subset M$ . Sea  $z \in [x, y]$ ,  $z = \beta x + (1 - \beta)y$  para algún  $0 \leq \beta \leq 1$ ; esto es,

$$z = \beta(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m) + (1 - \beta)(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_r b_r)$$

mas aún,

$$z = (\beta\lambda_1)a_1 + \cdots + (\beta\lambda_m)a_m + ((1 - \beta)\alpha_1)b_1 + \cdots + ((1 - \beta)\alpha_r)b_r \in M$$

pues es claro que todos los escalares son no negativos y  $\beta\lambda_1 + \cdots + \beta\lambda_m + (1 - \beta)\alpha_1 + \cdots + (1 - \beta)\alpha_r = 1$ . Por tanto  $M$  es convexo.

Claramente  $F \subset M$  y como  $M$  es convexo se tiene  $\text{conv } F \subset \text{conv } M = M$  (por teorema 1.3). Por tanto, si  $x \in \text{conv } F$  entonces  $x \in M$ ; luego la conclusión se cumple.

$\Leftrightarrow$  Ahora existen puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m \in F$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m > 0$  tales que  $c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$  y  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Supongamos que  $c \notin \text{conv } F$ , entonces por definición de casco convexo existe  $G$  conjunto convexo tal que  $F \subset G$  y  $c \notin G$ . Como  $a_1, a_2, \dots, a_m \in G$  pues  $F \subset G$  y  $G$  es convexo, se cumple que

$$b_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2 = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \in G,$$

también como  $b_1, a_3 \in G$ ,

$$b_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} b_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} a_3 = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \in G$$

de esta forma encontramos que

$$b_{m-1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m} \in G$$

lo cual es una contradicción pues  $b_{m-1} = c$ . Luego  $c \in \text{conv } F$ . ■

En base a el teorema anterior, podremos decir entonces que el *casco convexo de  $M$*  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $M$ .

**Teorema 1.3** Para  $M, K \subset \mathbb{R}^n$  se cumple:

1. Si  $M, K$  son convexos, entonces  $M + K$  es convexo.
2. Si  $M$  es convexo y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cM$  es convexo.

3. Si  $M$  es convexo y  $c \in \mathbb{R}^n$ , entonces la traslación  $M + c$  es convexo.
4.  $M \subset \text{conv } M$ .
5.  $\text{conv } M = M$  siempre que  $M$  sea convexo.
6.  $\text{conv}(M + K) = \text{conv } M + \text{conv } K$ .
7. Si  $M \subset K$ , entonces se cumple que  $\text{conv } M \subset \text{conv } K$ .

### Demostración.

1. Sean  $x, y \in M + K$ , luego  $x = a_1 + b_1, y = a_2 + b_2$  para algunos  $a_1, a_2 \in M$  y  $b_1, b_2 \in K$ . Por ser  $M, K$  convexos se tiene que los puntos  $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in M, \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in K$  para cada  $\lambda \in [0, 1]$ . Ahora tenemos que  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) = (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in M + K$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Por lo tanto  $M + K$  es convexo.
2. Sean  $x, y \in cM$ , luego  $x = ca, y = cb$  para algunos  $a, b \in M$ . Como  $M$  es convexo, se tiene  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in M$  para cada  $\lambda \in [0, 1]$ . Ahora,  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda ca + (1 - \lambda)cb = c(\lambda a + (1 - \lambda)b) \in cM$ . Por tanto  $cM$  es convexo.
3. Tomemos  $x, y \in M + c$ , de aquí  $x = a + c, y = b + c$  para algunos  $a, b \in M$ . Por la convexidad de  $M$  se tiene  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in M$  para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ ; mas aún,  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(a + c) + (1 - \lambda)(b + c) = (\lambda a + (1 - \lambda)b) + c \in M + c$ . En consecuencia  $M + c$  es convexo.
4. Por definición.
5. Es claro, pues  $\text{conv } M$  es el mínimo conjunto convexo que contiene a  $M$  y en este caso  $M$  es convexo, así  $\text{conv } M \subset M$ , por (4) se sigue  $M = \text{conv } M$ .
6. Sea  $x \in \text{conv}(M + K)$ , por (Proposición 1.1)  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i(a_i + b_i)$ ,  $a_i \in M$ ,  $b_i \in K$  y  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , luego  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$ , de aquí  $x \in \text{conv } M + \text{conv } K$ .



Ahora, sea  $x \in \text{conv } M + \text{conv } K$ , por (proposición 1.1),  $x = \sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \beta_j b_j$ , donde  $a_i \in M$ ,  $b_j \in K$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$  y  $\sum_j \beta_j = 1$ , luego  $x = \sum_i \sum_j \beta_j \lambda_i a_i + \sum_j \sum_i \lambda_i \beta_j b_j$ , asociando se obtiene  $x = \sum_i \sum_j \lambda_i \beta_j (a_i + b_j)$  con  $\sum_i \sum_j \lambda_i \beta_j = 1$ . Por lo tanto  $x \in \text{conv}(M + K)$ .

7. Primero consideremos el caso en que  $K$  es un conjunto convexo. Por definición  $\text{conv } M = \bigcap K_\alpha$ , donde  $K_\alpha$  es un conjunto convexo y  $M \subset K_\alpha$  para todo  $\alpha$ . Es claro que  $\bigcap K_\alpha \subset K$  porque  $K$  es un conjunto convexo que contiene a  $M$ . Por (5) se tiene que  $K = \text{conv } K$ , luego  $\text{conv } M \subset \text{conv } K$ .

Si  $K$  no es un conjunto convexo,  $K \subset \text{conv } K$ . En particular  $M \subset \text{conv } K$  y como sabemos  $\text{conv } K$  es un conjunto convexo, entonces procediendo como el anterior caso se obtiene que  $\text{conv } M \subset \text{conv } K$ .

■

Ya hemos visto que no todos los conjuntos convexos son cuerpos convexos y es por esta razón que si consideramos un conjunto convexo  $M \subset \mathbb{R}^n$  que no es un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ , entonces podemos determinar su **envolvente afín**, denotada por  $L = \text{aff } M$ ; es decir, podremos encontrar el plano de menor dimensión que contiene al conjunto  $M$ , lo cual significa que  $M$  es un cuerpo convexo respecto a  $L$  y la dimensión de  $M$  es igual a la dimensión de  $\text{aff } M$ . Por convención  $\dim \emptyset = -1$ . De manera equivalente se tiene que  $L = \text{aff } M = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}$ . (Ver figura 1.5).

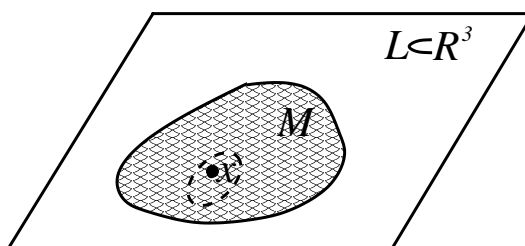


Figura 1.5:

**Definición 1.4** Un punto  $x \in M$  es un punto en el **interior relativo** del conjunto  $M$  con respecto a  $L = \text{aff } M$  si existe una bola abierta en  $L$  centrada en  $x$  que esté totalmente contenida en  $M$ . El conjunto de puntos interiores o interior relativo de  $M$  se denotará por  $\text{rint } M$ . (Ver figura 1.5).

**Teorema 1.4** Para  $M \subset \mathbb{R}^n$  convexo los conjuntos  $\text{int } M$ ,  $\text{cl } M$  y  $\text{rint } M$  son convexos.

**Demostración.**

Si  $\text{int } M = \emptyset$ , entonces la afirmación se tiene. En caso contrario, para  $a, b \in \text{int } M$  se tiene que  $[a, b] \subset \text{int } M$  como lo dicta el teorema 1.2.

Para nuestra segunda afirmación tomemos  $a, b \in \text{cl } M$ ; luego existen sucesiones  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ ,  $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$  en  $M$  las cuales convergen a  $a$  y  $b$  respectivamente. Para  $0 \leq \lambda \leq 1$  tomemos  $c_i = \lambda a_i + (1 - \lambda)b_i$  para  $i = 1, 2, \dots, \infty$ ; es claro que  $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$  está en  $M$  pues  $M$  es convexo. Tomando límites obtenemos  $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ , luego  $c$  está en  $\text{cl } M$ , pues es límite de puntos de  $M$ . Por tanto la afirmación se tiene.

En el caso de la tercera afirmación se tiene que proceder como en la primera afirmación pero trabajando no en  $\mathbb{R}^n$  sino en  $L = \text{aff } M$  y cambiando interior por interior relativo en el teorema 1.2. ■

Es evidente que si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\text{rint } M = \text{int } M$ ; mas aún, si  $\text{aff } M = \mathbb{R}^n$  se sigue también que  $\text{rint } M = \text{int } M$ .

## 1.3. Hiperplanos

Recordemos que un hiperplano se define como  $H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, \eta \rangle = \alpha\}$ , donde  $\eta$  es un vector normal. Observamos que  $H = L + y_0$ , donde  $L$  es un subespacio vectorial y  $y_0$  es un vector constante por donde pasa  $H$ . En efecto sea  $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle = 0\}$  y tomemos  $y, z \in L$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , luego se tiene  $y + \beta z$  y  $(-y) \in L$ , entonces  $L$  es un subespacio vectorial. Sea ahora  $y \in H$ , luego  $\langle y, \eta \rangle = \alpha$  y como supusimos que  $y_0 \in H$  se tiene  $\langle y_0, \eta \rangle = \alpha$ , así  $\langle y - y_0, \eta \rangle = 0$  y por esto se tiene que  $y - y_0 = x \in L$ , luego  $y = x + y_0 \in L + y_0$ ; por otro lado tomemos  $x \in L$ , luego  $\langle x, \eta \rangle = 0$  y además  $\langle y_0, \eta \rangle = \alpha$ , así  $\langle x + y_0, \eta \rangle = \alpha$ , luego  $x + y_0 \in H$ . Por tanto  $H = L + y_0$ . Cabe notar que solo existe un hiperplano que pasa por  $y_0$  y que es perpendicular a  $\eta$ .

**Lema 1.1** Sea  $M$  un conjunto convexo no vacío y cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  existe un único  $x' \in M$  tal que  $\|x - x'\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ .

**Demostración.**

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , luego existe algún número real positivo  $r$  de manera que  $\overline{B}(x, r) \cap M \neq \emptyset$  es un conjunto no vacío. Este último conjunto es compacto, mas aún, la función continua  $y \mapsto \|x - y\|$  alcanza su mínimo en dicho conjunto. Por tanto el punto  $x'$  existe.

Supóngase que existe  $x'' \in M$  tal que  $x'' \neq x'$  y  $\|x - x''\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ , de esto tenemos que  $\|x - x'\| = \|x - x''\|$ , luego se tiene que el triángulo con vértices en  $x, x'$  y  $x''$  es isósceles. Como  $M$  es convexo y los puntos  $x'$  y  $x''$  están en  $M$ , entonces el punto medio  $m = \frac{1}{2}(x' + x'')$  de  $x'$  y  $x''$  está en  $M$ ; pues es parte de el segmento de línea que une a  $x'$  con  $x''$ . Se sabe que la longitud de la hipotenusa del triángulo con vértices en  $x, x'$  y  $m$  es mayor que cualquiera de sus catetos, así

$$\|x - m\| < \inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - x'\|,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto  $x'' = x'$ . (Ver figura 1.6). ■

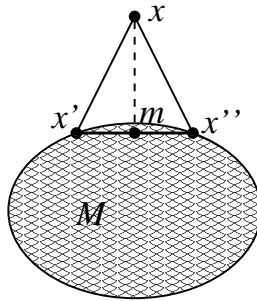


Figura 1.6:

Por el lema anterior la siguiente función está bien definida.

**Definición 1.5** La función  $P_M : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  definida como  $P_M(x) = x'$  es llamada la **función del punto mas cercano** relativo a  $M$ .

La función  $P_M$  tiene las siguientes propiedades:

**Lema 1.2 .**

1.  $P_M(x) = x$  si y sólo si  $x \in M$ .
2.  $P_M$  es suprayectiva.

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , si  $P_M(x) = x$ , entonces  $0 = \|x - x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ ; esto es,  $0 = d(x, M)$ . Como la distancia de un conjunto compacto a un conjunto cerrado es siempre positiva, entonces  $x \in M$ , pues  $M$  es cerrado y  $\{x\}$  es compacto.

$\Leftarrow$ ) Como  $x \in M$  se tiene que  $\inf_{y \in M} \|x - y\| = 0$ , luego del hecho que  $\|x - x'\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| = 0$  tenemos  $x = x'$ .

La segunda parte se tiene por el lema 1.1. ■

**Definición 1.6** Un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  se dirá que es un **hiperplano soporte** de un conjunto convexo cerrado  $M \subset \mathbb{R}^n$  en un punto  $x \in \text{bd } M$  si  $x \in H$  y  $M$  está contenido en uno de los semiespacios cerrados con respecto a  $H$ . A el semiespacio  $P$  en el que se encuentra contenido el conjunto  $M$  se le llama **semiespacio soporte** (respecto de  $H$ ). Diremos que  $\eta$  es la **normal exterior** en el punto  $x$  de  $P$  y de  $H$ . (Ver figura 1.7).

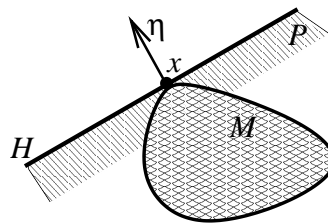


Figura 1.7:

**Lema 1.3** Sea  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y convexo. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$  el hiperplano  $H$  que contiene a  $x' := P_M(x)$  y es perpendicular al segmento de línea que une a  $x$  con  $x'$  es un hiperplano soporte de  $M$ , descrito por  $H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, \eta \rangle = 1\}$  con  $\eta := \frac{x-x'}{\langle x', x-x' \rangle}$ .

**Demostración.**

Se cumple  $\eta := \frac{x-x'}{\langle x', x-x' \rangle}$  es el vector normal del hiperplano definido como  $H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, \eta \rangle = 1\}$ ; entonces cualquier múltiplo de  $\eta$  es perpendicular al mismo, en particular  $x - x'$ . Además, tenemos  $\langle x', \eta \rangle = \langle x', \frac{x-x'}{\langle x', x-x' \rangle} \rangle = \frac{1}{\langle x', x-x' \rangle} \langle x', x-x' \rangle = 1$ , se sigue  $x' \in H$ . También se tiene  $\langle x-x', x-x' \rangle = \langle x, x-x' \rangle - \langle x', x-x' \rangle > 0$  y  $\langle x, x-x' \rangle > \langle x', x-x' \rangle$ , equivalentemente  $\frac{1}{\langle x', x-x' \rangle} \langle x, x-x' \rangle > \frac{1}{\langle x', x-x' \rangle} \langle x', x-x' \rangle$ , de lo cual se obtiene  $\langle x, \eta \rangle > \langle x', \eta \rangle = 1$ , así  $x \in H^+$ .

Ahora, supóngase que  $H$  no es un hiperplano soporte de  $M$ . Supongamos que existe  $y \in M \cap (H^+ \setminus H)$  con  $x \neq y$  y tomemos el plano  $E$  generado por  $x, x'$  y  $y$ ; el segmento de línea  $[y, x']$  en el plano contiene un punto  $z \in M$  (por convexidad) en el interior de  $E$  de modo que  $\|x-z\| < \|x-x'\|$ , (contradicción)!. Por tanto  $H$  es un hiperplano soporte en  $x'$ . (Ver figura 1.8). ■

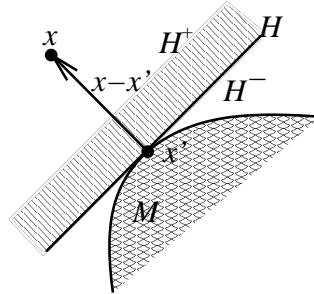


Figura 1.8:

**Lema 1.4** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y sea  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Si  $y$  está en el rayo que sale de  $x'$  y pasa por  $x$  entonces  $x' = y'$ .

**Demostración.**

Supongamos primero el caso en que  $y \in [x', x]$  y  $x' \neq y'$ . Luego

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - x'\| = \|y - x'\| + \|x - y\| > \|x - y\| + \|y - y'\| \geq \|x - y'\|$$

lo cual no puede suceder porque  $y' \in M$ , esto implica una contradicción (ver lado izquierdo de la figura 1.9).

El otro caso que se puede dar es cuando  $x \in [x', y]$ . Si  $x' \neq y'$  tomemos el segmento de recta paralelo a  $[y, y']$  que pasa por  $x$  y que intersecta al segmento  $[x', y']$  en un punto  $x_0 \neq x'$  (como muestra el lado derecho de la figura 1.9), de esta manera los triángulos formados están en un mismo plano, tienen un vértice en común en  $x'$  y son semejantes; por tanto se sigue

$$\|x - x_0\| = \|x - x'\| \frac{\|y - y'\|}{\|y - x'\|}.$$

Como  $\|y - y'\| < \|y - x'\|$ ; por ser  $y'$  el punto más cercano a  $y$  y  $x' \in M$ , entonces  $1 > \frac{\|y - y'\|}{\|y - x'\|}$ ; mas aún,  $\|x - x'\| > \frac{\|y - y'\|}{\|y - x'\|} \|x - x'\| = \|x - x_0\|$ . Por tanto  $\|x - x_0\| < \|x - x'\|$ , (contradicción); pues  $x'$  es el punto más cercano a  $x$ . ■

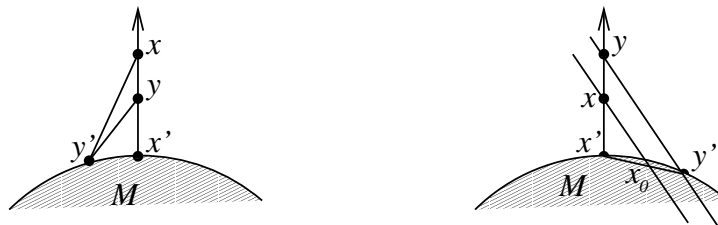


Figura 1.9:

**Proposición 1.2** Sean  $M \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo y  $a \in \text{bd } M$ , entonces  $\eta$  es una normal exterior de  $M$  en  $a$  si y sólo si  $\langle \eta, x - a \rangle \leq 0$  para todo  $x \in M$ .

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\eta$  es una normal exterior de  $M$  en  $a$ , luego existe un hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle = \alpha\}$  a través de  $a$ . Como  $M \subset H^-$  se

cumple que  $\langle x, \eta \rangle \leq \alpha$  para todo  $x$  en  $M$ ; además como  $a \in H$  se tiene que  $\langle a, \eta \rangle = \alpha$ ; mas aún, de la expresión  $\langle x, \eta \rangle \leq \alpha$  obtenemos  $\langle x, \eta \rangle - \alpha \leq 0$ , en consecuencia  $\langle x, \eta \rangle - \langle a, \eta \rangle \leq 0$ . Luego  $\langle \eta, x - a \rangle \leq 0$ .

$\Leftrightarrow$ ) Por otro lado, para  $a \in \text{bd } M$  supongamos que  $\langle \eta, x - a \rangle \leq 0$  para todo  $x \in M$ . Entonces  $\langle \eta, x \rangle \leq \langle \eta, a \rangle$  para todo  $x \in M$ . Definiendo  $\alpha = \langle \eta, a \rangle$  se tiene que  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle = \alpha\}$  es un hiperplano a través de  $a$  con normal exterior  $\eta$ . Es claro que  $M \subset H^-$  y  $H \cap M \neq \emptyset$ , pues  $a \in H$  y  $a \in M$  porque  $M$  es cerrado. Luego  $\eta$  es una normal exterior de  $M$  en  $a$ . ■

**Teorema 1.5** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo, entonces a través de cada punto de la frontera de  $M$  hay un hiperplano soporte de  $M$ .*

### Demostración.

Sean  $a \in \text{bd } M$  y  $c \in \text{int } M$ . Sea  $\eta$  el rayo con punto extremo en  $a$  y que cumple que  $c \notin \eta$ . Sea  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$  una sucesión de puntos de  $\eta$  que converge a  $a$ . Para  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $q_k$  al punto en  $M$  que está mas cerca de  $a_k$  (se asegura que  $q_k$  existe por el lema 1.1). Por el lema 1.3 existe un hiperplano  $H_k$  a través de  $q_k$  que tiene como normal exterior al segmento  $[a_k, q_k]$ , entonces existe el semiespacio soporte  $P_k$  con normal exterior  $a_k - q_k$ ; luego, por la proposición anterior,  $\langle a_k - q_k, x - q_k \rangle \leq 0$  para cada  $x \in M$ . Si renombramos a  $\frac{1}{\|a_k - q_k\|}(a_k - q_k) = \eta_k$ , tenemos que  $\langle \eta_k, x - q_k \rangle \leq 0$ .

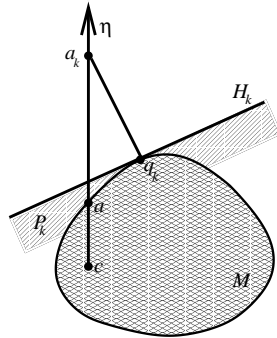


Figura 1.10:

Suponiendo que la sucesión  $\{\eta_i\}_{i=0}^\infty$  converge a un vector unitario  $p = \frac{\eta}{\|\eta\|}$  y tomando  $x \in M$  arbitrario se tiene

$$\langle p, x - a \rangle = \langle \eta_k, x - q_k \rangle + \langle p - \eta_k, x - q_k \rangle - \langle p, a - q_k \rangle;$$

observamos que el primer término es no-positivo, y si hacemos a  $k$  tender a infinito los demás términos son despreciables pues  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = a$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = p$ . Entonces  $\langle \eta, x - a \rangle \leq 0$  para cada  $x \in M$ , pues  $p = \frac{\eta}{\|\eta\|}$ . Así, por la proposición anterior se tiene que  $\eta$  es una normal exterior en el punto  $a$ . Por tanto el hiperplano en  $a$  que es ortogonal a  $\eta$  es un hiperplano soporte de  $M$ . ■

En los siguientes resultados se observa que los conjuntos convexos se pueden caracterizar mediante los semiespacios y los hiperplanos; en particular estos objetos geométricos ayudarán a decidir si un conjunto es convexo.

**Teorema 1.6** *Un conjunto convexo cerrado  $M \subset \mathbb{R}^n$  es la intersección de sus semiespacios soporte.*

#### Demostración.

Como el conjunto es convexo y cerrado, se tiene por el Teorema anterior que en cada punto frontera hay un hiperplano soporte y por ende existe un semiespacio soporte. Claramente  $M \subset \bigcap H_\alpha = F$ , donde  $H_\alpha$  es un semiespacio soporte.

Ahora sea  $x \in F \setminus M$ , entonces  $x' = p_M(x) \neq x$  pues  $p_M(x) \in M$ , en particular  $p_M(x) \in \text{bd } M$  porque  $M$  es cerrado. Por el lema 1.3 se tiene que existe un hiperplano soporte  $P$  en  $p_M(x)$  el cual es perpendicular al segmento  $[x, p_M(x)]$ ; luego, el semiespacio soporte  $P^-$  no contiene a  $x$ . Pero se cumple que  $F \subset P^-$ , así  $x \notin P^-$  implica que  $x \notin F$ , (contradicción). Luego  $F = M$ . (Ver figura 1.11). ■

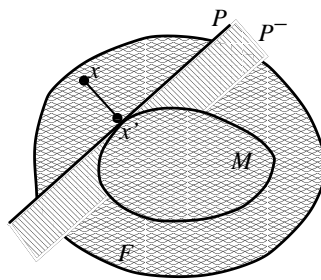


Figura 1.11:



Pensemos en un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$ , este es un conjunto convexo que tiene una cantidad infinita de semiplanos soporte pero 4 de estos son suficientes para describirlo como su intersección. También es fácil convencerse de que cualquier politopo se puede representar como la intersección de un número finito de semiespacios soporte.

**Teorema 1.7** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado con interior no vacío y tal que a través de cada punto de la frontera de  $M$  hay un hiperplano soporte  $H$ , entonces  $M$  es convexo.*

**Demostración.**

Supongamos que  $M$  no es convexo, entonces para algunos  $x, y \in M$  existe  $z \in [x, y]$  tal que  $z \notin M$ . Como  $\text{int } M \neq \emptyset$  tomemos  $w \in \text{int } M$  de manera que  $\{x, y, w\}$  sean afinmente independientes, es claro que existe  $a \in \text{bd } M \cap [z, w]$ . Luego por hipótesis existe un hiperplano soporte  $H$  en  $a$  de  $M$  y claramente  $w \notin H$  pues  $w \in \text{int } M$ . De aquí se observa que  $x, y, w$  no están del mismo lado, lo cual es una contradicción pues  $H$  es un hiperplano soporte. Luego, la conclusión se cumple. (Ver figura 1.12). ■

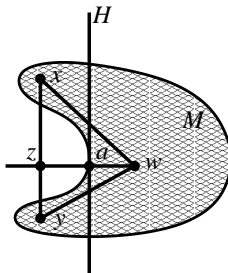


Figura 1.12:

## 1.4. Simplejos

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_r$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ , diremos que estos puntos están en **posición general** si el conjunto de vectores  $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_r - x_0\}$  es linealmente independiente.

Notemos que si  $n = 1$ , entonces  $\{x_0, x_1\}$  están en posición general en  $\mathbb{R}$  siempre que  $x_0 \neq x_1$ . Si  $n = 2$  entonces,  $\{x_0, x_1, x_2\}$  están en posición general si no son colineales en  $\mathbb{R}^2$  y cuatro vectores  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  se dice que están en posición general si no son coplanares.

Dados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  puntos de  $\mathbb{R}^n$  en posición general; los vectores  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$  son linealmente independientes y por lo tanto podemos considerarlos como una base para  $\mathbb{R}^n$ ; de aquí que todo  $x \in \mathbb{R}^n$  puede ser escrito de manera única como

$$x = x_0 + y = x_0 + \lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_n(x_n - x_0),$$

para algunos escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Haciendo  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n$  tendremos que

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \text{ con } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

**Definición 1.7** A los números  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  se les llama **coordenadas baricéntricas** del punto  $x$  con respecto a los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Definición 1.8** El conjunto  $T$  formado por los puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  con coordenadas baricéntricas no negativas con respecto a los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  se llama  **$n$ -simplejo** con vértices  $x_0, \dots, x_n$  y se denota por  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ .

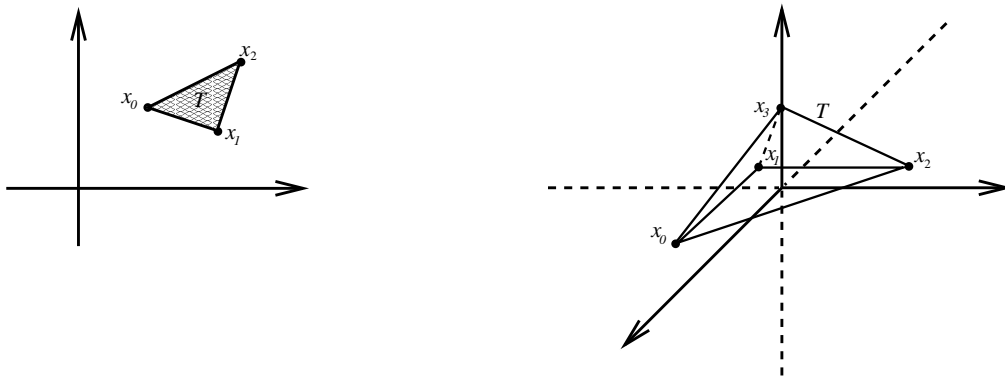


Figura 1.13:

**Teorema 1.8**  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  es un conjunto convexo.

**Demostración.**

Sean  $x, y \in T$ , luego  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$  y  $y = \sum_{i=0}^n \mu_i x_i$ ; donde  $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ ,  $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ .

Tenemos que demostrar que  $[x, y] \subset T$ . Sea  $z \in [x, y]$ ,

$$z = \alpha x + \beta y \text{ con } \alpha, \beta \geq 0 \text{ y } \alpha + \beta = 1.$$

Sustituyendo obtenemos:

$$z = \alpha(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + \beta(\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n)$$

$$= (\alpha \lambda_0 + \beta \mu_0) x_0 + (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1) x_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n) x_n,$$

donde

$$\sum_{i=0}^n (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) = \alpha \sum_{i=0}^n \lambda_i + \beta \sum_{i=0}^n \mu_i = \alpha * 1 + \beta * 1 = 1.$$

Luego  $z \in T$ ; por tanto  $T$  es convexo. ■

Para  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , sea  $e_i$  el punto en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que tiene cero en todas sus componentes excepto en su  $i$ -ésima componente que tiene 1. Es claro que  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  son afinmente independientes, entonces el ***n-simplejo estándar*** es definido como

$$[e_1, \dots, e_{n+1}] = \left\{ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

y lo denotamos por  $\Delta^n$ .

**Lema 1.5**  $\Delta^n$  es un conjunto compacto.

**Demostración.** Sea  $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$  una sucesión de puntos en  $\Delta^n$  que converge a  $\lambda^*$ . Pongamos  $\lambda_m = (\lambda_1(m), \lambda_2(m), \dots, \lambda_{n+1}(m))$ , con  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(m) = 1$  y  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n+1}^*)$ ; así, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\lambda_m - \lambda^*\| < \frac{\epsilon}{n+1}$

para cada  $m \geq N$ , luego  $|\lambda_i(m) - \lambda_i^*| \leq \|\lambda_m - \lambda^*\| < \frac{\epsilon}{n+1}$ , lo que significa que la sucesión  $\{\lambda_i(m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\lambda_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Así para  $m \geq N$  tenemos que  $|1 - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^*| = |\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(m) - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^*| = |\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i(m) - \lambda_i^*)| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i(m) - \lambda_i^*| < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{n+1} = \epsilon$ . Por tanto  $\lambda^* \in \Delta^n$ ; mas aún,  $\Delta^n$  es cerrado.

Sea ahora  $\lambda \in \Delta^n$ ,  $\|\lambda\|^2 = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2$ , del hecho que  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  se tiene  $\lambda_i^2 \leq \lambda_i$ , luego  $\sum_{i=0}^n \lambda_i^2 \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . Por tanto  $\Delta^n$  es acotado.

Así  $\Delta^n$  es compacto; por el teorema de Heine-Borel. ■

Observemos en la figura 1.14 que  $\Delta^1$  es la línea que une a  $e_1$  con  $e_2$ , mientras que  $\Delta^2$  es el triángulo cuyos vértices son  $e_1, e_2, e_3$ .

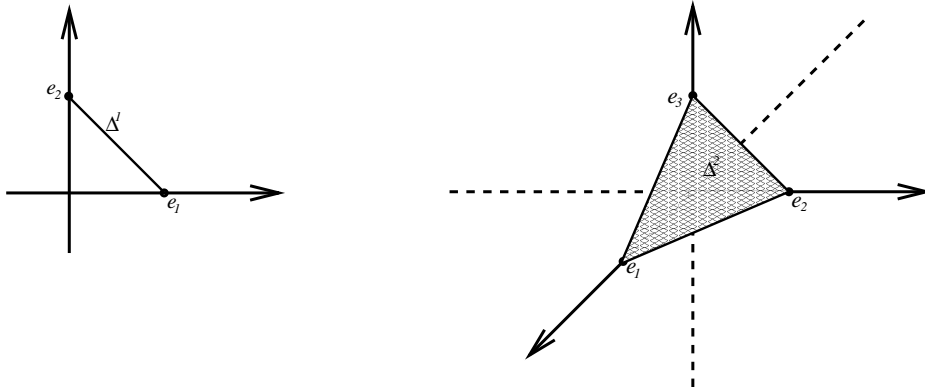


Figura 1.14:

**Definición 1.9** El **baricentro** de  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ , se define como

$$b = \frac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \dots + x_n).$$

**Teorema 1.9** El baricentro es un punto interior de  $T$ .

**Demostración.**

Sea  $r > 0$  de manera que la bola  $B(0, r)$  esté totalmente contenida en el paralelepípedo  $P$  definido por  $|a_1| \leq \frac{1}{n(n+1)}, |a_2| \leq \frac{1}{n(n+1)}, \dots, |a_n| \leq \frac{1}{n(n+1)}$ , así  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B(0, r)$  si sus coordenadas satisfacen las desigualdades anteriores.

El conjunto  $b + B(0, r) = \{b + a | a \in B(0, r)\}$  es una bola con centro en  $b$  y radio  $r$ . En efecto sea  $y \in b + B(0, r)$ , entonces  $y = b + a$  y  $\|y - b\| = \|a\| < r$ , luego  $y \in B(b, r)$ . Por otro lado para  $y \in B(b, r)$ ,  $\|y - b\| < r$ , lo que significa que  $a = y - b \in B(0, r)$ ; mas aún,  $y = b + a \in b + B(0, r)$ .

Como sabemos que  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$  son una base, entonces cada punto  $y \in B(b, r)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} y &= b + (x_1 - x_0)a_1 + (x_2 - x_0)a_2 + \dots + (x_n - x_0)a_n \\ &= \frac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \dots + x_n) + (x_1 - x_0)a_1 + (x_2 - x_0)a_2 + \dots + (x_n - x_0)a_n. \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - a_1 - a_2 - \dots - a_n\right)x_0 + \left(\frac{1}{n+1} + a_1\right)x_1 + \left(\frac{1}{n+1} + a_2\right)x_2 + \dots + \\ &\quad \left(\frac{1}{n+1} + a_n\right)x_n \end{aligned}$$

para algún  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B(0, r)$ .

Se cumple que  $|a_i| \leq \frac{1}{n(n+1)}$ , entonces  $-\frac{1}{n(n+1)} \leq a_i \leq \frac{1}{n(n+1)}$  y equivalentemente  $\frac{1}{n(n+1)} \geq -a_i \geq -\frac{1}{n(n+1)}$ ; mas aún,  $\frac{1}{n(n+1)} - a_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\frac{1}{(n+1)} - \sum_{i=1}^n a_i \geq 0$ . Además la suma de las coordenadas de  $y$  es igual a uno. Por tanto  $y \in T$ , en consecuencia tenemos que  $B(b, r) \subset T$ ; esto es,  $b$  es un punto interior de  $T$ . ■

Para  $x \in T$ ,  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$  con  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x - b\| &= \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i - \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} x_i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \left| \lambda_i - \frac{1}{n+1} \right| \|x_i\| \leq K \sum_{i=0}^n \left| \lambda_i - \frac{1}{n+1} \right| \leq \\ &K \left( \sum_{i=0}^n \lambda_i + \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \right) = K(1 + 1) = 2K, \text{ con } K \geq \max\{\|x_i\| \mid i = 0, 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

por tanto

$$T \subseteq \overline{B}(b, 2K)$$

lo cual significa que el  $n$ -simplejo es un conjunto acotado.

**Teorema 1.10**  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  es el menor conjunto convexo que contiene a  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Demostración.**

Supongamos que existe un conjunto convexo  $M$  que contiene a  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Sea  $x \in T$ ,  $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ , donde  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  y  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n = 0$ . Luego

$$b_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} x_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} x_1 = \frac{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1}{\lambda_0 + \lambda_1}$$

pertenece a  $M$  pues  $b_1$  es una combinación convexa de  $x_0, x_1 \in M$ . También

$$b_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} x_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} x_2 = \frac{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$$

está en  $M$  por la misma razón. De manera inductiva encontramos que

$$b_k = \frac{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$

pertenece a  $M$ .

Como  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , se cumple que

$$b_k = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \dots + \lambda_n x_n = x$$

y por tanto  $x \in M$ ; luego  $T \subset M$ . Como la prueba se hizo para un conjunto convexo  $M$  arbitrario, entonces concluimos que  $T$  es el menor de todos aquellos que contienen a  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . ■

**Teorema 1.11**  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  es homeomorfo a  $\Delta^n$ .

**Demostración.**

Sea  $f : \Delta^n \mapsto T$  definida por  $f(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ , para  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Probemos que  $f$  es una función biyectiva y continua.

Sean  $\lambda \neq \alpha \in \Delta^n$ . Supongamos que  $f(\lambda) = f(\alpha)$ , luego  $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ , despejando  $\lambda_0$  y  $\alpha_0$  tenemos  $-(\sum_{i=1}^n \lambda_i) x_0 + \dots + \lambda_n x_n = -(\sum_{i=1}^n \alpha_i) x_0 + \dots + \alpha_n x_n$ , así  $\lambda_1(x_1 - x_0) + \dots + \lambda_n(x_n - x_0) = \alpha_1(x_1 - x_0) + \dots + \alpha_n(x_n - x_0)$ , mas

aún  $(\lambda_1 - \alpha_1)(x_1 - x_0) + (\lambda_2 - \alpha_2)(x_2 - x_0) + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n)(x_n - x_0) = 0$ . Como  $\lambda_i - \alpha_i \neq 0$  para algunos  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , entonces los vectores  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$  son linealmente dependientes, lo cual es una contradicción. Por tanto  $f(\lambda) \neq f(\alpha)$ , así  $f$  es inyectiva. Es evidente que  $f$  es suprayectiva porque cada  $x \in T$  es una combinación convexa, por tanto a cada  $x \in T$  le corresponden escalares no negativos cuya suma es igual a 1. Luego  $f$  es biyectiva.

Claramente la función  $f$  es la restricción de una transformación lineal, y es por esto que  $f$  es una función continua. Como  $\Delta^n$  es un conjunto compacto,  $T$  es Hausdorff (por ser subconjunto de un espacio métrico) y  $f$  es continua y biyectiva, entonces  $f$  es un homeomorfismo. ■

El baricentro  $b$  es un punto interior del  $n$ -simplejo  $T$  y  $T$  es un conjunto convexo cerrado; pues  $\Delta^n$  lo es; luego  $T$  es un cuerpo convexo.

## 1.5. Caras

Sea  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  un  $n$ -simplejo, el conjunto  $T_k = \{x \in T \mid \lambda_k = 0\}$  es llamado la cara opuesta del vértice  $x_k$ .

Lo que estamos haciendo para determinar las caras es eliminar un vértice del  $n$ -simplejo y considerar todas las combinaciones convexas de los puntos restantes; los vectores que quedan al quitar el  $k$ -ésimo vértice están en  $\mathbb{R}^{n-1}$  y siguen estando en posición general porque  $x_0, x_1, \dots, x_n$  lo están. Luego, por definición  $T_k = [x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n]$  es un  $(n-1)$ -simplejo.

El proceso anterior se debe seguir haciendo de la misma forma si se quieren encontrar las caras de dimensión  $0, 1, \dots, n-2$ ; donde los vértices son las caras de dimensión 0. En la figura 1.15 se muestra un 2-simplejo, donde  $T_0, T_1, T_2$  son las caras de dimensión 1 y  $x_0, x_1, x_2$  son las caras de dimensión 0. Cabe señalar que cada cara de  $T$  está contenida en  $T$ , pues  $T$  es cerrado.

**Teorema 1.12** Sea  $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  un  $n$ -simplejo,  $T$  tiene  $2^{n+1} - 2$  caras de las dimensiones  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

### Demostración.

Para esta demostración sólo basta observar que  $T$  tiene tantas caras como subconjuntos tiene el conjunto potencia de  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  a excepción del

conjunto total y del conjunto vacío; i.e., las caras de dimensión 0 son todos los conjuntos con un punto, las caras de dimensión 2 son todos los conjuntos con dos puntos y así sucesivamente. Como sabemos, el conjunto potencia de un conjunto con  $n + 1$  puntos tiene  $2^{n+1}$  subconjuntos; pero, si a este número le quitamos el conjunto vacío y el total; los cuales no son caras, obtenemos el número  $2^{n+1} - 2$ , siendo éste último número la cantidad de caras de un  $n$ -simplejo. ■

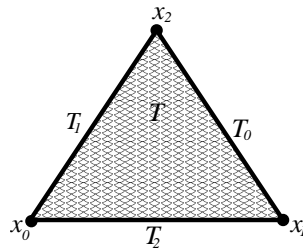


Figura 1.15:

Sean  $S_1, S_2, \dots, S_k$ ,  $k$  semiespacios cerrados y  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  sus fronteras correspondientes. Sea  $M = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$  un politopo convexo con puntos interiores, el conjunto  $C_i = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1} \cap \Gamma_i \cap S_{i+1} \cap \dots \cap S_k$  es llamado **cara principal** de  $M$ ; de aquí tenemos que  $M$  tiene  $k$  caras principales. En la figura 1.16 se ilustra para el caso en que se tengan 4 semiespacios cerrados en  $\mathbb{R}^2$ , en este caso una cara principal de  $M$  es el segmento que une los puntos  $x_1$  y  $x_4$ , y las otras caras son los intervalos  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $[x_3, x_4]$ . También observamos que la frontera de  $M$  es la unión de las caras principales; como se verá en el siguiente teorema.

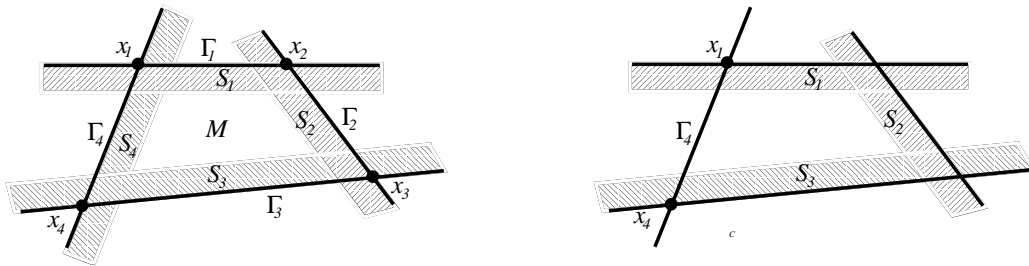


Figura 1.16:



**Teorema 1.13** *Para cada politopo convexo sólido  $M = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k$ , su frontera es la unión de sus caras principales; i.e.,  $\text{bd } M = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Del hecho que  $M$  es cerrado se tiene que cada cara principal está contenida en la frontera de  $M$ , luego  $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k \subset \text{bd } M$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $x \in \text{bd } M$ , como  $x \notin \text{int } M = \text{int } S_1 \cap \text{int } S_2 \cap \cdots \cap \text{int } S_k$  se cumple que existe  $S_i$  tal que  $x \notin \text{int } S_i$ ; sin pérdida de generalidad pongamos que  $x \notin \text{int } S_1$ , entonces  $x \in \text{bd } S_1$ , luego  $x \in \text{bd } S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k = C_1$ ; es decir,  $x$  pertenece a una cara principal. Así,  $\text{bd } M \subset C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ . ■

En la resolución de un problema de programación lineal nos encontramos que la región en donde está la posible solución es un conjunto convexo. Cuando la región es acotada el conjunto convexo es un politopo convexo. La solución a dicho problema se encuentra buscándola en las caras del politopo, mas aún, se obtiene en los vértices (caras de dimensión cero).

Ya hemos definido el concepto de cara para el  $n$ -simplejo y para politopos convexos con puntos interiores; por tanto, toca el turno considerar ahora a  $M \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo arbitrario. Sea  $a$  un punto frontera de  $M$ , por el teorema 1.5 existe un hiperplano soporte  $H$  en ese punto, al conjunto  $F_a = M \cap H$  se le llama *cara* de  $M$ . Por ejemplo si consideramos al conjunto  $M$  de la figura 1.17, observamos que la cara de  $M$  en el punto  $a$  es  $F_a = [x, y]$ , mientras que en el punto  $b$  se tiene  $F_b = \{b\}$ . Algunas propiedades de las caras se mencionan a continuación.

1. Si  $F_1$  y  $F_2$  son dos caras del cuerpo convexo  $M$ , entonces  $F_1 \cap F_2$  (si no es vacío) también es una cara del cuerpo  $M$ .

Sean  $H_1 = \{x \mid \langle x, a_1 \rangle = 0\}, H_2 = \{x \mid \langle x, a_2 \rangle = 0\}$  hiperplanos soporte de  $M$  en  $a_1, a_2$  respectivamente,  $F_1 = M \cap H_1$  y  $F_2 = M \cap H_2$ ; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $M \subset H_1^-$ ,  $M \subset H_2^-$ . Sea  $a = a_1 + a_2$ ;  $H = H_1 \cap H_2 = \{x \mid \langle x, a \rangle = 0\}$  es un hiperplano soporte de  $M$  en  $a$  y además  $M \subset H_1^- \cap H_2^-$ . Por tanto  $F = F_1 \cap F_2 = M \cap H$  es una cara de  $M$ .

2. Si  $F_1, F_2$  son caras del cuerpo convexo  $M$  con  $F_1 \subset F_2$ , entonces  $F_1$  es una cara de  $F_2$ .

Sea  $H$  un hiperplano soporte de  $M$  tal que  $F_1 = M \cap H$ , claramente  $H$  también es hiperplano soporte de  $F_2$ . Como se cumple que  $F_1 \subset F_2$

entonces  $F_1 \cap H \subset F_2 \cap H$ ; pero  $F_1 \cap H = F_1$ , luego  $F_1 \subset F_2 \cap H$ ; por otro lado  $F_2 \subset M$  por ser  $F_2$  cara de  $M$ , así  $F_2 \cap H \subset M \cap H = F_1$ ; de donde  $F_2 = F_1 \cap H$ . Así la conclusión se cumple.

3. Sea  $F_a$  una cara del cuerpo convexo  $M$  en  $a$ , entonces  $F_a$  es convexo.

Existe un hiperplano soporte  $H$  de  $M$  en  $a$  tal que  $F_a = M \cap H$ , lo cual evidentemente es un conjunto convexo pues  $H$  y  $M$  lo son.

Si la cara  $F_a = \{a\}$ , entonces el punto  $a$  se llama **punto extremo** del cuerpo convexo  $M$ . Al conjunto de todos los puntos extremos de  $M$  lo denotaremos por  $\text{ext } M$ . En la figura 1.17, el punto  $b$  es un ejemplo de punto extremo.

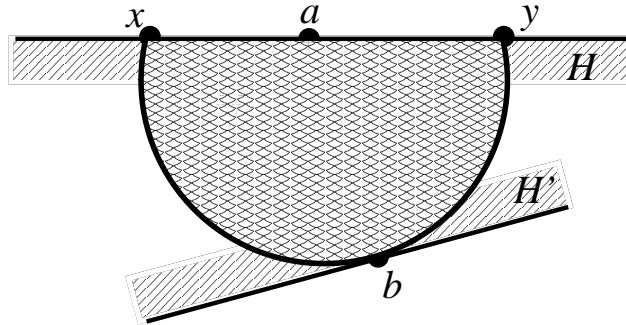


Figura 1.17:

Sean  $M, K \subset \mathbb{R}^n$  cuerpos convexos tales que  $K \subset M$ , evidentemente se tiene  $\text{ext } K \subset \text{ext } M$  y por ende  $\text{conv ext } K \subset \text{conv ext } M$ .

**Teorema 1.14** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo compacto;  $M$  coincide con el casco convexo de sus puntos extremos; esto es,  $M = \text{conv ext } M$ .

**Demostración.**

Para  $\dim M = 1$  el teorema es claro, pues en  $\mathbb{R}$  los únicos conjuntos convexos compactos son los intervalos cerrados y los únicos puntos extremos de los intervalos cerrados son los extremos de estos intervalos y el casco convexo de los extremos de los intervalos es el intervalo mismo.

Supongamos que la hipótesis es válida para  $M$  con  $\dim M < n$ , probemos para  $\dim M = n$ .

$\Rightarrow$ ) Sea  $x \in M$ , si  $x \in \text{bd } M$  entonces en vista del teorema 1.5 existe un hiperplano soporte en ese punto y por tanto podemos encontrar una cara  $F_x \subset M$  en ese punto; esta cara es un conjunto convexo y  $\dim F_x < n$ , por la hipótesis de inducción se tiene que  $x \in F_x = \text{conv ext } F_x \subset \text{conv ext } M$ . En otro caso, tomemos  $y \in \text{ext } M$  y considerando la línea recta que pasa por  $x$  y  $y$ , encontramos un punto  $z \in \text{bd } M$ ; por el mismo argumento anterior, tenemos que  $z \in \text{conv ext } M$  (ver figura 1.18). Por ser  $M$  convexo,  $[y, z] \subset M$ , luego  $\text{conv ext}[y, z] = [y, z] \subset \text{conv ext } M$ . Como  $x \in [y, z]$  y  $[y, z] \subset \text{conv ext } M$  entonces  $x \in \text{conv ext } M$ . Por todo lo anterior,  $M \subset \text{conv ext } M$ .  
 $\Leftarrow$ ) La contención contraria se cumple pues  $\text{ext } M \subset M$ , lo cual implica que  $\text{conv ext } M \subset \text{conv } M = M$ .

Por tanto, la conclusión del teorema es cierta. ■

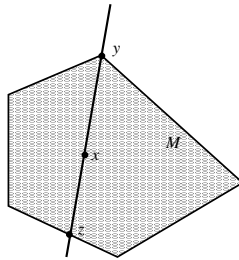


Figura 1.18:

# Capítulo 2

## Teoremas importantes en Geometría Combinatoria

En el capítulo presente lo que haremos es presentar algunos de los teoremas mas ilustrativos e interesantes de la Geometría Combinatoria. Veremos con detalle las demostraciones de estos y cómo se relacionan entre si. Hasta este capítulo demostraremos que el casco convexo de un conjunto compacto es también compacto; pregunta que tal vez hacía rato que nos estabamos haciendo. En este capítulo presentaremos el Teorema de Jung, el cual es el motivo de este trabajo.

### 2.1. Los Teoremas de Carathéodory, Helly y Radon

**Teorema 2.1** (*Carathéodory*). Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ , el casco convexo de  $M$  es la unión de todos los cascos convexos de subconjuntos de  $M$  que contienen a lo mas  $n + 1$  elementos.

**Demostración.**

Sea  $x \in \text{conv } M$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \text{ con } x_i \in M, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

para algún  $k \in \mathbb{N}$ , asumimos que  $k$  es el mínimo entero para el cual se cumple lo anterior. Supongamos ahora que  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son afínmente dependientes; luego, existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos cero tales que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Por hipótesis todas las  $\lambda_i$  son positivas; además al menos una  $\alpha_i$  es positiva, por esto es que podemos escoger  $m \leq k$  de tal forma que  $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}$  sea positivo y el mas pequeño. Así

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i) x_i,$$

donde todos los coeficientes son no negativos; pues en el caso de que  $\alpha_i \leq 0$ ,  $(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i) \geq 0$  y si  $\alpha_i > 0$  tenemos que  $\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \geq \frac{\lambda_m}{\alpha_m}$ , pues  $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}$  es mínimo. Despejando  $\lambda_i$  obtenemos que  $\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \geq 0$ . Es claro que para  $i = m$ ,  $\lambda_m - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_m = 0$ , esto contradice que  $k$  es mínimo. Así  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son afínmente independientes, lo cual implica que  $k \leq n + 1$ . ■

El siguiente es un resultado importante que se obtiene fácilmente aplicando el teorema de Caratheodory.

**Teorema 2.2** *Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto , entonces  $\text{conv } M$  es compacto.*

**Demostración.**

Sea  $\Delta^n$  el conjunto de todos los puntos  $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tales que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$  con  $\alpha_i \geq 0$ . A este conjunto  $\Delta^n$  como sabemos se le llama el *n-simplejo estándar*, el cual es un conjunto compacto (por el lema 1.5).

Para cada punto  $x \in M^{n+1}$  definimos:

$$(\alpha, x) = ((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), (x_0, x_1, \dots, x_n)) \in \Delta^n \times M^{n+1}$$

Sea  $f(\alpha, x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ ; la cual es una combinación convexa de  $x_0, \dots, x_n$ .

Como  $f$  es continua y  $\Delta^n \times M^{n+1}$  es compacto, entonces  $f(\Delta^n \times M^{n+1})$  es compacto; el cual no es otra cosa que el conjunto de todas las combinaciones convexas con a lo mas  $n + 1$  puntos de  $M$ . En virtud de el teorema de Caratheodory tenemos que  $f(\Delta^n \times M^{n+1}) = \text{conv } M$ . ■

**Teorema 2.3 (Radon).** *Sea  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ , y sean  $M_1, M_2$  una partición disjunta de  $M$ ; esto es,  $M = M_1 \cup M_2$  con  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  y  $M_1 \neq \emptyset$ ,  $M_2 \neq \emptyset$ . Si  $k \geq n+2$  entonces la partición puede ser escogida de tal forma que:  $\text{conv}M_1 \cap \text{conv}M_2 \neq \emptyset$ .*

**Demostración.**

Si  $k \geq n + 2$ , se tiene que  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son afínmente dependientes, de aquí que existan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  tales que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \text{ con } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \text{ y } \lambda_i \text{ no todas cero.}$$

Asumimos que reenumerando y fijando  $j$  de tal forma que  $1 \leq j < k$ , se obtiene  $\lambda_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, j$  y  $\lambda_i \leq 0$  para  $i = j + 1, j + 2, \dots, k$ . Con  $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j = -(\lambda_{j+1} + \lambda_{j+2} + \dots + \lambda_k) > 0$  obtenemos que

$$x := \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i=j+1}^k \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x_i.$$

Definamos  $M_1 = \{x_1, \dots, x_j\}$ ,  $M_2 = \{x_{j+1}, \dots, x_k\}$ , así la conclusión se tiene. ■

**Ejemplo 2.1** *Si tomamos el conjunto  $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{R}^2$ , observamos que hay varias formas de cómo escoger a  $M_1$  y a  $M_2$ ; en la izquierda  $M_1 = \{x_1, x_2\}$  y  $M_2 = \{x_3, x_4\}$ , en el centro  $M_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  y  $M_2 = \{x_4\}$  y por último en la derecha  $M_1 = \{x_1, x_2\}$  y  $M_2 = \{x_3, x_4\}$ . (Ver figura 2.1).*

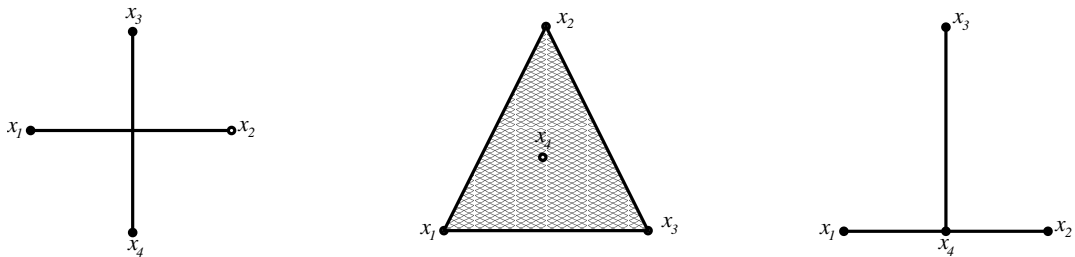


Figura 2.1:

**Teorema 2.4 (Helly).** Sean  $M_1, M_2, \dots, M_k$  conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$ . Si cada  $n + 1$  de los conjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_k$  tienen intersección no vacía entonces  $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$ .

**Demostración.**

Para  $k < n + 1$  no hay nada que probar y para  $k = n + 1$  la afirmación es trivial. Supongamos que  $k > n + 1$  y que la afirmación es probada para  $k - 1$  conjuntos convexos. Entonces para  $i \in \{1, \dots, k\}$  existe un punto  $x_i \in M_1 \cap \dots \cap \hat{M}_i \cap \dots \cap M_k$ , donde  $\hat{M}_i$  indica que  $M_i$  ha sido eliminado. Los  $k \geq n + 2$  puntos  $x_1, \dots, x_k$  son afinmente dependientes; del Teorema de Radon podemos inferir que, enumerando, existe un punto

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_j\} \cap \text{conv}\{x_{j+1}, \dots, x_k\},$$

para algún  $j \in \{1, \dots, k - 1\}$ . Como  $x_1, \dots, x_j \in M_{j+1}, \dots, M_k$  tenemos

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_j\} \subset M_{j+1} \cap \dots \cap M_k,$$

de la misma manera para  $x_{j+1}, \dots, x_k \in M_1, \dots, M_j$  se tiene

$$x \in \text{conv}\{x_{j+1}, \dots, x_k\} \subset M_1 \cap \dots \cap M_j.$$

Luego  $x \in \bigcap_{i=1}^k M_i$  ■

Sea  $T$  un  $n$ -simplejo y sean  $C_0, C_1, \dots, C_n$  sus caras principales. Las caras son conjuntos convexos y en este caso la intersección de cada  $n$  caras es no vacía, pero la intersección de todas las caras es el conjunto vacío. Esto ilustra que en el teorema de Helly no se puede disminuir el número  $n + 1$ .

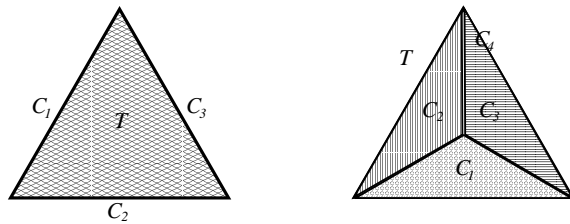


Figura 2.2:

Es preciso señalar que las demostraciones que se han dado no son ni por menos únicas, pues entre los tres teoremas anteriores (Carathéodory, Radon, Helly) las demostraciones se pueden hacer independientes unas de otras o usando un teorema de los dos restantes para demostrar un tercero.

El siguiente teorema se ocupará para demostrar una versión mas débil del teorema de Helly, pero no se dará la demostración en vista de que no ilustra nada referente a nuestro tema tratado. Ver [10].

**Teorema 2.5** *Dada  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una familia infinita de conjuntos compactos en  $\mathbb{R}^n$ . Si cada subfamilia finita tiene intersección no vacía entonces la intersección de todos los conjuntos de la familia  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es no vacía.*

En el siguiente teorema se muestra que para cambiar el Teorema de Helly en un contexto más general se tiene que añadir una nueva hipótesis a este teorema para que se cumpla ahora con familias infinitas de conjuntos convexos.

**Teorema 2.6** *Sea  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una familia infinita de conjuntos convexos compactos en  $\mathbb{R}^n$ . Si cada  $n+1$  de los conjuntos  $M_\alpha$  tienen intersección no vacía entonces la intersección de todos los conjuntos de esta familia es no vacía; esto es,  $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \neq \emptyset$ .*

### Demostración.

Tomemos una familia finita, entonces tenemos dos casos posibles:

1. Si dicha familia tiene  $q > n + 1$  elementos, entonces por el teorema de Helly deducimos que su intersección es distinta del conjunto vacío.
2. Por el contrario, si la familia solo tiene  $q \leq n + 1$  elementos, entonces le añadimos  $n+2-q$  elementos. En virtud del teorema de Helly concluimos que la intersección de esta nueva familia es no vacía.

Ahora tenemos que cualquier familia finita tiene intersección no vacía, como los conjuntos son compactos entonces se concluye que la intersección de todos los conjuntos de la familia infinita es no vacía (por teorema anterior). ■



**Ejemplo 2.2** Sea  $e \in \mathbb{R}^n$  un vector unitario. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos  $M_k = \{x \mid \langle e, x \rangle \geq k\}$ . Sabemos que cada conjunto  $M_k$  es un conjunto convexo y cerrado porque este conjunto define un semiespacio cerrado. Observemos que  $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq$ , entonces si tomamos una familia finita sabemos de antemano que la intersección de ésta es el conjunto con subíndice más grande; sin embargo la intersección de toda la familia es vacía porque los números naturales no tienen un máximo. En este ejemplo nos damos cuenta de que en el teorema anterior no es posible quitar la hipótesis de que los conjuntos deben ser compactos.

## 2.2. Teorema de Jung

Ahora presentaremos el teorema de Jung en su forma original; esto es, en su versión para conjuntos acotados en un espacio métrico. Lo estudiaremos muy a detalle porque las demostraciones que se presentan aquí son muy ilustrativas para poder demostrar (cuando llegue el momento) la forma más general de dicho teorema; pues en parte es la finalidad de este trabajo.

**Teorema 2.7** Sean  $M \subset \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Si para cada  $n + 1$  puntos de  $M$  existe una bola cerrada de radio  $r$  la cual los contiene, entonces existe una bola cerrada de radio  $r$  que contiene al conjunto  $M$ .

### Demostración.

Consideremos la familia  $\mathbf{B}$  de todas las bolas cerradas de radio  $r$  centradas en un punto  $x \in M$ . Dados  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  puntos arbitrarios en  $M$ ,  $B(c, r)$  es la bola que los contiene; entonces  $d(c, x_i) \leq r$  para  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ . De aquí obtenemos  $c \in B(x_i, r)$  para todo  $i$ . Así, cada  $n + 1$  de las bolas de la familia  $\mathbf{B}$  tienen un punto en común. Sabemos que las bolas cerradas son conjuntos compactos convexos, por un teorema anterior se tiene que todas las bolas de la familia  $\mathbf{B}$  tienen un punto  $a$  en común; i.e,  $d(x, a) \leq r$  para cada  $x \in M$ . (Ver figura 2.3). ■

**Teorema 2.8** Sea  $T \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -simplejo de diámetro  $d$ , entonces existe una bola cerrada de radio no mayor a  $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$  que contiene a  $T$ .

### Demostración.

Consideremos que el  $n$ -simplejo es regular; esto es, todas las caras de dimensión 1 tienen la misma longitud  $d$  y el ángulo entre dos vértices cualesquiera es la constante  $\theta$ . Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$  los vértices de  $T$  y supongamos que la bola que circunscribe a  $T$  tiene radio  $r$  y que está centrada en el origen; de esto,  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0$  y  $\|x_i\| = r$  para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ . Sabemos que para cualesquiera  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = \|x_i\| \|x_j\| \cos \theta = r^2 \cos \theta$ . Luego  $0 = \langle x_0 + x_1 + \dots + x_n, x_0 + x_1 + \dots + x_n \rangle = (n+1)r^2 + n(n+1)r^2 \cos \theta$ , de lo cual obtenemos  $\cos \theta = -\frac{1}{n}$ . Formemos un triángulo isósceles con vértices en  $x_i, x_j, 0$  y lados de longitud  $r$  y  $d$ ; por la ley de los cosenos se tiene que  $d^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \theta$ . Sustituyendo se obtiene  $d^2 = 2r^2(1 + \frac{1}{n}) = 2r^2 \frac{n+1}{n}$  y despejando tenemos  $r = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$ .

En caso que el simplejo  $T$  no sea regular no se presenta la demostración debido a la complejidad de ésta. Ver [1] ■

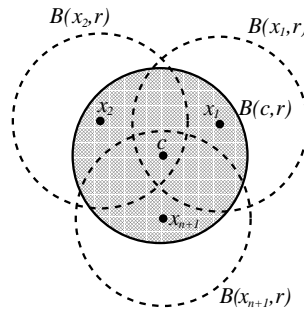


Figura 2.3:

**Teorema 2.9 (Jung).** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de diámetro  $d$ , entonces existe una bola cerrada de radio  $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$  que contiene a  $M$ .

**Demostración.**

Por teorema 2.8, cada  $n + 1$  puntos de  $M \subset \mathbb{R}^n$  están contenidos en una bola cerrada de radio  $r = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$ ; pues si los  $n + 1$  puntos no son vértices de un  $n$ -simplejo, entonces podemos considerar otro  $n$ -simplejo en donde los puntos estén contenidos. De aquí, si aplicamos el teorema 2.7, tenemos que existe una bola cerrada de radio  $r$  que contiene al conjunto  $M$ . ■

# Capítulo 3

## H-Convexidad

En este capítulo vamos a introducir la noción de vectores mínimamente dependientes, para así definir el funcional  $md$  que será de vital importancia en el desarrollo de la teoría de la  $H$ -convexidad. Análogo a la teoría de Convexidad, definiremos a los conjuntos  $H$ -convexos y trataremos de encontrar algunas de sus propiedades. Incluiremos varios ejemplos de cómo determinar el funcional  $md$  de algunos conjuntos especiales que ya conocemos.

### 3.1. Conjuntos unilaterales

**Definición 3.1** *Los vectores no-cero  $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  se llaman **mínimamente dependientes** si son vértices de un  $m$ -simplejo que contiene al origen en su interior relativo.*

En la figura 3.1 observamos que  $x_0, x_1, x_2$  son mínimamente dependientes. En particular  $x_1, x_2$  son mínimamente dependientes si y sólo si tienen direcciones opuestas; i.e., si  $0$  está en el interior relativo de el segmento que une a  $x_1$  con  $x_2$ .

**Definición 3.2** *Los vectores no-cero  $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  son **positivamente dependientes** si existen escalares positivos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ .*

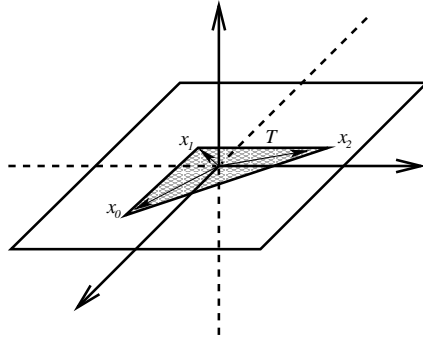


Figura 3.1:

**Teorema 3.1** Decimos que los vectores  $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  son mínimamente dependientes si y sólo si son positivamente dependientes y  $x_1, \dots, x_m$  son linealmente independientes.

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Como  $x_0, x_1, \dots, x_m$  son mínimamente dependientes, entonces son vértices de un m-simplejo  $T$  para el cual se cumple que  $0 \in \text{rint } T$ . Como  $0 \in \text{rint } T$ ,

$$0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$$

con  $\lambda_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . Luego  $x_0, x_1, \dots, x_m$  son positivamente dependientes.

Supongamos ahora que  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son linealmente dependientes, entonces existe un subespacio  $L$  de dimensión  $m - 1$  que contiene a estos  $m$  vectores. Como  $\lambda_0 > 0$ , tenemos

$$x_0 = -\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m)$$

y de esta relación se obtiene que  $x_0 \in L$  porque  $L$  es un subespacio. Luego  $x_0, x_1, \dots, x_m \in L$ , lo que contradice que  $T$  sea un m-simplejo. Por tanto  $x_0, x_1, \dots, x_m$  son linealmente independientes.

$\Leftarrow$ ) Para el recíproco, tenemos que  $x_0, x_1, \dots, x_m$  son positivamente dependientes; esto es, existen escalares positivos con suma igual a 1 tales que:

$$0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \quad (*).$$

Supongamos que  $x_0, x_1, \dots, x_m$  no están en posición general, luego existe un plano  $L$  de dimensión  $r < m$  que contiene a  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . De esta forma existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$  y :

$$x_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m.$$

Sustituyendo en (\*) tenemos:

$$0 = \lambda_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m) + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$$

y agrupando se obtiene

$$0 = (\lambda_0 \alpha_1 + \lambda_1) x_1 + (\lambda_0 \alpha_2 + \lambda_2) x_2 + \cdots + (\lambda_0 \alpha_m + \lambda_m) x_m.$$

Esta última expresión es una combinación lineal no trivial igualada a cero de vectores linealmente independientes; pues la suma de los escalares es positiva (contradicción)!. Por tanto  $x_0, x_1, \dots, x_m$  están en posición general; esto es, son vértices de un  $m$ -simplejo  $T$ . Además de la expresión (\*) se tiene  $0 \in \text{rint } T$ . Por tanto  $x_0, x_1, \dots, x_m$  son mínimamente dependientes. ■

**Definición 3.3** Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Se dice que  $H$  es un conjunto **unilateral** si existe un semiespacio cerrado  $P$  con frontera  $\Gamma$  a través del origen tal que  $H \subset P$ . (Ver figura 3.2).

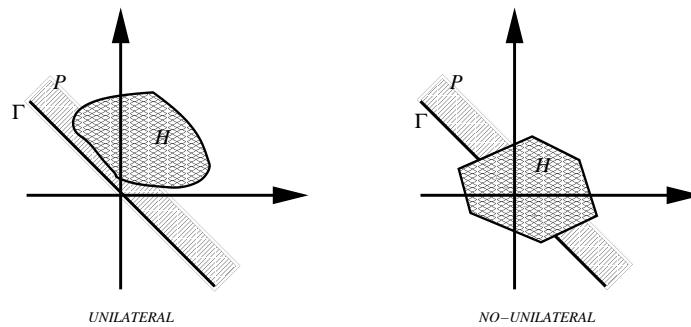


Figura 3.2:

**Teorema 3.2** *Un conjunto  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es unilateral si y sólo si el origen no pertenece al interior del casco convexo de  $H$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $H$  es un conjunto unilateral, entonces existe un semiespacio cerrado  $P$  con frontera  $\Gamma$  a través del origen y  $H \subset P$ , luego  $\text{conv } H \subset \text{conv } P = P$ ; mas aún,  $\text{int conv } H \subset \text{int } P$ . Como  $0 \notin \text{int } P$ , se concluye  $0 \notin \text{int conv } H$ .

$\Leftarrow$ ) Por otro lado, como  $0 \notin \text{int conv } H$ , entonces es claro que los conjuntos  $\{0\}$  y  $\text{conv } H$  pueden ser separados por un hiperplano  $\Gamma$  que pasa por el origen. Ahora consideremos el semiespacio cerrado  $P$  que tiene por frontera a  $\Gamma$  y es tal que  $H \subset P$ . Así  $H$  es unilateral. (Ver figura 3.3). ■

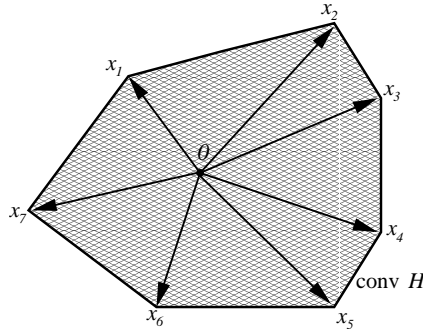


Figura 3.3:

De forma equivalente,  $H$  es **unilateral** si y sólo si existe un vector  $r \neq 0$  tal que  $\langle r, h \rangle \leq 0$  para cada  $h \in H$ . Si un conjunto  $H$  no es unilateral, diremos que es un conjunto **no-unilateral**.

**Definición 3.4**  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i, \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}$  es el interior del casco convexo del conjunto  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ .

Sea  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Claramente el conjunto  $H$  formado por estos vectores es unilateral, pues no podemos encontrar una combinación convexa (con escalares positivos) de elementos de  $H$  cuyo resultado sea cero; es decir,  $0 \notin \text{int conv } H$ .

En cambio el conjunto  $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n\}$  si es no-unilateral; pues  $0 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}(-e_1) + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}(-e_2)$ , lo cual quiere decir que  $0 \in \text{int conv } H$ .

**Proposición 3.1** *Si el conjunto  $H = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es no-unilateral, entonces los vectores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son mínimamente dependientes.*

**Demostración.**

Observemos que  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i, \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$  es el interior del casco convexo de  $H$ . Como  $H$  es no unilateral se tiene que  $0 \in \text{int conv } H = F$ , luego  $0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  para algunos escalares positivos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Por tanto  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son positivamente dependientes.

Ahora supongamos que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son linealmente dependientes, luego se tiene que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están contenidos en un subespacio de dimensión  $n - 1$ ; esto es, están contenidos en un hiperplano  $P$  que pasa por el origen. Ahora tomemos el semiespacio  $S$  con frontera  $P$ , pero de manera tal que contenga al vector  $x_0$ . Claramente  $H \subset S$  y  $0 \in \text{bd } S = P$ , esto implica una contradicción porque  $H$  es no-unilateral. Por tanto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son linealmente independientes.

En resumen se tiene que  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son positivamente dependientes y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son linealmente independientes, así  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son mínimamente dependientes por teorema 3.1. ■

**Proposición 3.2**  *$H \subset \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  es un conjunto unilateral si y sólo si  $H$  está contenido en una semiesfera cerrada de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Primero supongamos que  $H$  es unilateral, luego existe un semiespacio cerrado  $P$  con frontera a través del origen y es tal que  $H \subset P$ . Definamos  $S_c = P \cap \mathbb{S}^{n-1}$ , este conjunto es una semiesfera cerrada y es tal que  $H \subset S_c$  pues  $H = H \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset P \cap \mathbb{S}^{n-1} = S_c$ .

$\Leftarrow$ ) Ahora, supongamos que  $H$  está contenido en una semiesfera cerrada de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $P$  un semiespacio cerrado con frontera a través del origen y  $S_c = \mathbb{S}^{n-1} \cap P$  una semiesfera cerrada de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Como  $H \subset S_c$  y  $S_c \subset P$ , entonces  $H \subset P$ . De esto último y del hecho que  $0 \in \text{bd } P$ , se concluye que  $H$  es unilateral. ■

**Proposición 3.3** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un politopo convexo sólido con el origen en su interior y  $H = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  el conjunto de sus vértices. Entonces  $H$  es no-unilateral.*

**Demostración.**

Sabemos que antemano que el conjunto  $M$  es igual al casco convexo de sus vértices; esto es,  $M = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Por hipótesis  $0 \in \text{int } M$ , luego  $0 \in \text{int conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Por tanto  $H$  es no-unilateral. ■

**Proposición 3.4** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un politopo convexo sólido y  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  el conjunto de sus normales unitarias exteriores a sus caras principales. Entonces  $H$  es no-unilateral.*

**Demostración.**

Consideremos para cada normal  $h \in H$  el semiespacio soporte  $P_h$ . Por teorema 1.6 se tiene que

$$M = \bigcap_{h \in H} P_h = \bigcap_{h \in H} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - \alpha_h, h \rangle \leq 0\}.$$

Supongamos que  $H$  es unilateral; esto es, existe  $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle a, h \rangle \leq 0$  para cada  $h \in H$ . Ahora tenemos que

$$\langle ca - \alpha_h, h \rangle = c\langle a, h \rangle - \langle \alpha_h, h \rangle \leq 0 \text{ para cada } h \in H \text{ y } c > 0;$$

pues si existe  $h \in H$  tal que  $c\langle a, h \rangle - \langle \alpha_h, h \rangle > 0$ , entonces  $c\langle a, h \rangle > \langle \alpha_h, h \rangle$  y si hacemos tender a  $c$  hacia infinito se tiene que  $-\infty > \langle \alpha_h, h \rangle$ , lo cual es imposible. Así,  $ca \in M$  para cada  $c > 0$ . Por tanto  $M$  es no acotado, lo cual es una contradicción. Luego  $H$  es no-unilateral. ■

**Teorema 3.3** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un conjunto no-unilateral, entonces existen un entero  $m \geq 1$  y vectores  $x_0, x_1, \dots, x_m \in H$  los cuales son mínimamente dependientes.*

**Demostración.**

Como  $H$  es no-unilateral entonces por el teorema 3.2 se tiene que  $0 \in \text{int conv } H$ . Luego se tiene que existen puntos  $x_0, x_1, \dots, x_m \in H$  tales que  $0$



está en el  $m$ -simplejo  $T = [x_0, x_1 \cdots, x_m]$  con vértices  $x_0, x_1 \cdots, x_m$ . Podemos suponer que  $0 \in \text{rint } T$ , pues en caso contrario solo bastaría considerar a una cara de  $T$ . Como  $0 \notin H$ ,  $m \geq 1$ . Así, de la definición 3.1 se deriva que  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  son mínimamente dependientes. ■

**Teorema 3.4** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un conjunto arbitrario no-unilateral, entonces existe un subconjunto finito  $H' \subset H$  el cual también es no-unilateral.*

**Demostración.**

Como  $H$  es no-unilateral,  $0 \in \text{int conv } H$ . Sea  $T$  un  $n$ -simplejo con vértices  $x_0, x_1 \cdots, x_n$  tal que  $0 \in \text{int } T$  y  $T \subset \text{conv } H$ . Como  $x_i \in \text{conv } H$  entonces existe un conjunto finito  $H_i \subset H$  tal que  $x_i \in \text{conv } H_i$  para  $i = 0, 1, \cdots, n$ . Haciendo  $H' = H_0 \cup H_1 \cdots \cup H_n$  obtenemos un conjunto finito tal que  $x_i \in \text{conv } H'$  para cada  $i = 0, \cdots, n$ ; de aquí que  $T \subset \text{conv } H'$ . Como  $0 \in \text{int } T$  se tiene que  $0 \in \text{int conv } H'$  y así  $H'$  es no unilateral. ■

## 3.2. El funcional md

Ahora definiremos el funcional md, este funcional es uno de las herramientas mas importantes en la teoría que se está desarrollando. Con la ayuda de este funcional abordaremos el teorema de Jung dentro de el contexto de la teoría de  $H$ -convexidad.

**Definición 3.5** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un conjunto no-unilateral. El **máximo entero**  $m$  tal que existen  $m + 1$  vectores mínimamente dependientes en  $H$  es denotado por  $\text{md } H$ . Observemos que  $\text{md } H \geq 1$  en consecuencia del teorema 3.3.*

**Proposición 3.5** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un conjunto no-unilateral. Si  $H_1 \subset H$ , entonces  $\text{md } H_1 \leq \text{md } H$ .*

**Demostración.**

Supongamos que  $m' = \text{md } H_1 > \text{md } H = m$ . Luego existen algunos vectores  $a_0, a_1, \cdots, a_{m'} \in H_1$  los cuales son mínimamente dependientes; mas aún,  $a_0, a_1, \cdots, a_{m'}$  son mínimamente dependientes en  $H$ , lo cual es una contradicción pues  $m$  era el máximo. Por tanto  $\text{md } H_1 \leq \text{md } H$ . ■

**Proposición 3.6** *Si  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  es no-unilateral, entonces  $\text{md } H \leq n$ .*

**Demostración.**

Como  $H$  es no unilateral existen  $a_0, a_1, \dots, a_m$  vectores mínimamente dependientes, donde  $m = \text{md } H$ . Por el teorema 3.1 sabemos que  $a_1, a_2, \dots, a_m$  son linealmente independientes. Supongamos que  $m = \text{md } H > n$ , esto significa que se tienen al menos  $(n+1)+1$  vectores mínimamente dependientes y por ende  $n+1$  de estos son linealmente independientes (contradicción)!. Por tanto  $\text{md } H \leq n$ . ■

**Proposición 3.7** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un conjunto infinito no-unilateral, entonces existe un subconjunto finito  $H' \subset H$  el cual es también no-unilateral y satisface que  $\text{md } H' = \text{md } H$ .*

**Demostración.**

Tenemos que  $H$  es un conjunto no-unilateral con  $m = \text{md } H$ , luego se tiene que existen  $a_0, a_1, \dots, a_m$  vectores mínimamente dependientes en  $H$ . Por teorema 3.4 tenemos que existe un conjunto finito  $H_1 \subset H$  el cual es no-unilateral. Definamos  $H' = H_1 \cup \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ . Es claro que  $H'$  es no unilateral y finito, pues  $H_1$  lo es. Por un lado tenemos que  $H' \subset H$  implica  $\text{md } H' \leq \text{md } H = m$ , mientras que por otro lado se tiene que  $\text{md } H' \geq m$ . Por tanto,  $\text{md } H' = \text{md } H$ . ■

**Proposición 3.8** *Si  $H = \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $\text{md } H = n$ .*

**Demostración.**

Consideremos un  $n$ -simplejo  $T = [a_0, a_1, \dots, a_n] \subset \text{conv } H$  de manera que  $0 \in \text{int conv } T$  y  $a_0, a_1, \dots, a_n \in H$ . Como  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son los vértices de un  $n$ -simplejo  $T$  que contiene a el 0 en su interior, entonces  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son mínimamente dependientes y  $H' = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  es un conjunto no-unilateral. Así, por definición se tiene que  $\text{md } H' = n$ . De la condición  $H' \subset H$  tenemos que  $\text{md } H' \leq \text{md } H$  y por la proposición 3.6,  $\text{md } H \leq n$ . Luego  $n \leq \text{md } H \leq n$  implica  $\text{md } H = n$ . ■

**Proposición 3.9** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un  $n$ -simplejo y  $H$  el conjunto de las normales unitarias exteriores de sus caras principales. Entonces  $\text{md } H = n$ .*

**Demostración.**

Como  $M$  tiene  $n+1$  caras principales, denotemos por  $H = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  al conjunto de las normales unitarias a estas caras principales. Como un  $n$ -simplejo es un caso muy particular de un politopo convexo sólido, entonces por la proposición 3.4 se tiene que  $H$  es no-unilateral. Así, por la proposición 3.1 se tiene que  $p_0, p_1, \dots, p_n$  son  $n+1$  vectores mínimamente dependientes. Por tanto  $\text{md } H = n$ . ■

Hemos visto que el conjunto  $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n\}$  es no-unilateral, y es por ésta razón que podemos calcular  $\text{md } H$  en la siguiente.

**Proposición 3.10** *Sea  $H = \{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$ , con  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\text{md } H = 1$ .*

**Demostración.**

Para  $n = 2$  tenemos que  $H = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ , luego  $H \subset \mathbb{R}^2$  implica que  $\text{md } H \leq 2$ . Supongamos que  $\text{md } H = 2$ ; i.e., a lo mas 3 vectores de  $H$  son mínimamente dependientes, por el teorema 3.1 estos vectores son positivamente dependientes, pongamos sin pérdida de generalidad a  $e_1, e_2, -e_1$ . Luego,

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_1, \text{ con } \alpha_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, 3;$$

mas aún,

$$0 = \langle e_2, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_1 \rangle = \alpha_2 \|e_2\|^2 = \alpha_2.$$

Así  $\alpha_2 = 0$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $\text{md } H = 1$ .

Ahora de forma general supongamos que  $m = \text{md } H \geq 2$ . Luego existen a lo mas  $m+1$  vectores de  $H$  los cuales son mínimamente dependientes. Por teorema 3.1, estos  $m+1$  vectores son positivamente dependientes y  $m$  de ellos son linealmente independientes; de la segunda condición se deduce que a lo mas podemos considerar un vector  $e_k$  con su simétrico dentro de los  $m+1$  escogidos, pues de lo contrario se tendrían menos de  $m$  vectores linealmente independientes.; mientras que de la primera condición se tiene que:

$$0 = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \text{ con } \alpha_i > 0 \text{ para cada } i \in I \text{ y } |I| = m+1,$$

de aquí,

$$0 = \langle e_j, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \rangle = \alpha_j \|e_j\|^2 = \alpha_j, j \neq k.$$

Así  $\alpha_k = 0$ , lo cual implica una contradicción. Por tanto  $\text{md } H = 1$ . ■

La proposición anterior dice que si consideramos un **paralelotopo**  $P \subset \mathbb{R}^n$  que no es más que la intersección de  $2n$  semiespacios con normales unitarias  $e_1, e_2, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n$  respectivamente, entonces se tiene  $\text{md } H = 1$  para  $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n\}$ .

**Teorema 3.5** Si  $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es un conjunto estrictamente unilateral, entonces  $\text{md } H = 0$ .

**Demostración.**

Como  $H$  es estrictamente unilateral, existe  $0 \neq r \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle r, h \rangle < 0$  para cada  $h \in H$ . Luego, para cualquier combinación positiva  $h = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k$  de algunos vectores  $h_0, h_1, \dots, h_k \in H$  se tiene  $\langle r, h \rangle < 0$ . De aquí se tiene  $h = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k \neq 0$  para cualquier combinación positiva. Así  $h_0, h_1, \dots, h_k$  no son positivamente dependientes, esto implica que no son mínimamente dependientes (por el teorema 3.1). En consecuencia, no se pueden encontrar vectores mínimamente dependientes en  $H$ . Por tanto  $\text{md } H = 0$ . ■

### 3.3. Conjuntos $H$ -convexos

**Definición 3.6** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral. Decimos que un semiespacio cerrado  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  **$H$ -convexo** si su normal exterior unitaria  $\eta$  pertenece a  $H$ . (Ver figura 3.4).

Sabemos que si tenemos un semiespacio con normal  $\eta$ , entonces cualquier traslación de este semiespacio tiene la misma normal. En base a lo anterior se observa que si el semiespacio cerrado  $P$  con normal  $\eta$  es un conjunto  $H$ -convexo, entonces cualquier traslación de  $P$  también es un conjunto  $H$ -convexo.

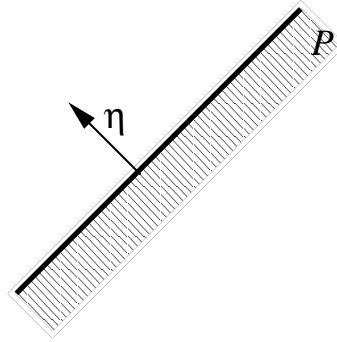


Figura 3.4:

**Definición 3.7** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral. Decimos que  $M \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  $H$ -convexo si puede ser representado como la intersección de una familia de semiespacios  $H$ -convexos. Particularmente, si  $M$  es un conjunto  $H$ -convexo sólido diremos que  $M$  es un cuerpo  $H$ -convexo. (Ver figura 3.5)..

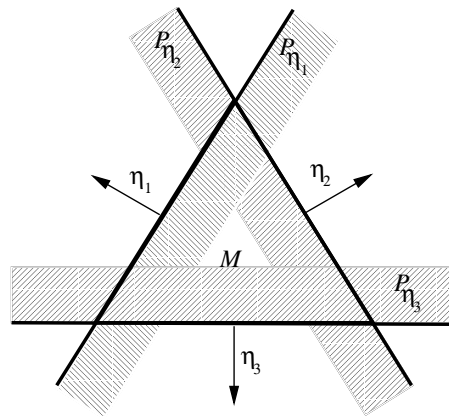


Figura 3.5:

**Proposición 3.11** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no vacío y no-unilateral. Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es  $H$ -convexo, entonces cada traslación de  $M$  es  $H$ -convexo también.

**Demostración.**

Tenemos que  $M = \bigcap_{\eta \in H} P_\eta$ , donde  $P_\eta$  es un semiespacio cerrado  $H$ -convexo. Sabemos que la traslación  $S_\eta = P_\eta + c$  es un semiespacio cerrado  $H$ -convexo para cada  $\eta \in H$ , así  $M + c = \bigcap_{\eta \in H} S_\eta$ . Por tanto  $M + c$  es un conjunto  $H$ -convexo. ■

Si  $M$  es un conjunto  $H$ -convexo, entonces  $M$  es convexo; pues en particular es intersección de conjuntos convexos. La afirmación contraria no es cierta pues si  $\eta \notin H \subset \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces el semiespacio  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \eta \rangle \leq \lambda\}$  no es  $H$ -convexo; por tanto la equivalencia se da cuando  $H = \mathbb{S}^{n-1}$ . También podemos decir que cada conjunto  $H$ -convexo  $M$  es cerrado porque cada semiespacio  $H$ -convexo es cerrado; mas aún, si  $M$  es un conjunto acotado entonces éste será un conjunto compacto.

**Ejemplo 3.1** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un politopo convexo sólido y  $H$  el conjunto de todas las normales exteriores unitarias de sus caras principales. El conjunto  $H$  es no-unilateral por la proposición 3.4 y  $M$  es un cuerpo  $H$ -convexo; pues para cada  $\eta \in H$  tenemos a  $P_\eta$  un semiespacio cerrado soporte de  $M$  con normal exterior unitaria  $\eta$ . Así  $P_\eta$  es un semiespacio  $H$ -convexo. De aquí,  $M$  es la intersección de todos los semiespacios  $P_\eta$ , lo cual por definición determina a un conjunto  $H$ -convexo. En este caso particular podemos observar que  $M$  es la intersección de una familia finita de semiespacios  $H$ -convexos.

**Teorema 3.6** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral y  $\{M_\alpha\}$  una familia de conjuntos  $H$ -convexos. La intersección de dicha familia es un conjunto  $H$ -convexo.

**Demostración.**

Por la definición sabemos que cada conjunto  $M_\alpha$  puede ser representado como la intersección de una familia de semiespacios  $H$ -convexos; esto es,  $M_\alpha = \bigcap_\beta P_{\alpha\beta}$ . Luego  $\bigcap_\alpha M_\alpha = \bigcap_\alpha (\bigcap_\beta P_{\alpha\beta})$ . Así  $\bigcap_\alpha M_\alpha$  es un conjunto  $H$ -convexo pues es intersección de semiespacios  $H$ -convexos. ■

**Proposición 3.12** Si  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  es no-unilateral, entonces la intersección de todos los semiespacios cerrados  $H$ -convexos es un conjunto compacto  $H$ -convexo.

**Demostración.**

Sea  $M = \bigcap_{h \in H} P_h$  la intersección de todos los semiespacios  $H$ -convexos, donde  $P_h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - \alpha_h, h \rangle \leq 0\}$ . Como los semiespacios son cerrados, entonces la intersección es cerrada, luego  $M$  es cerrado.

Supongamos que  $M$  es no-acotado. Luego existe  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $ca \in M$  para cada  $c > 0$ ; esto es,

$$\langle ca - \alpha_h, h \rangle \leq 0 \text{ para cada } h \in H \text{ y } c > 0.$$

Si suponemos que  $\langle a, h' \rangle > 0$  para algún  $h' \in H$ , entonces existe  $c_0 > 0$  tal que  $c_0 \langle a, h' \rangle - \langle \alpha_{h'}, h' \rangle > 0$ , lo cual contradice a la condición anterior. Por tanto  $\langle a, h \rangle \leq 0$  para cada  $h \in H$ , lo cual es una contradicción pues  $H$  es no-unilateral. Así,  $M$  es acotado.

Por teorema de Heine-Borel,  $M$  es compacto. ■

**Proposición 3.13** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral, entonces  $\{0\}$  es un conjunto  $H$ -convexo .*

**Demostración.**

Consideremos un conjunto no-unilateral  $H$  y traslademos todos los semiespacios cerrados  $H$ -convexos de forma tal que su frontera pase por el origen (las traslaciones son conjuntos  $H$ -convexos también). Veamos que  $\{0\} = \bigcap_{\eta \in H} P_\eta$ ; claramente  $0 \in \bigcap_{\eta \in H} P_\eta$  porque todos los semiespacios pasan por el origen; ahora tomamos  $0 \neq x \in \bigcap_{\eta \in H} P_\eta$ , luego  $\langle x, \eta \rangle \leq 0$  para cada  $\eta \in H$  (contradicción) pues  $H$  es no-unilateral. Así  $\{0\} = \bigcap_{\eta \in H} P_\eta$ . Por tanto  $\{0\}$  es un conjunto  $H$ -convexo. ■

# Capítulo 4

## Teoremas en H-Convexidad

En este capítulo presentaremos varias versiones  $H$ -convexas de nuestro ya conocido teorema de Jung. Para realizar nuestra meta tenemos que aprender a construir las llamadas  $H$ -bolas y a calcular  $H$ -distancias con la nueva métrica que introduciremos. Recordemos que el teorema de Jung para espacios métricos involucraba básicamente tres parámetros: bolas, diámetro, radio; y ahora lo que tenemos que hacer es determinar algo análogo a esos parámetros pero desde el punto de vista de la teoría de  $H$ -convexidad.

### 4.1. H-distancia y H-diámetro

Presentamos el siguiente teorema el cual es la versión  $H$ -convexa de el teorema de Helly que ha sido estudiado anteriormente. Este teorema nos será de gran ayuda para la demostración de el teorema de Jung, lo cual es nuestra meta. No presentamos una demostración por la complejidad de esta. Ver [1].

**Teorema 4.1** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral. Sean  $M_1, \dots, M_p \in \mathbb{R}^n$  conjuntos  $H$ -convexos, con  $p \geq \text{md } H + 2$ . Si cada  $\text{md } H + 1$  de estos conjuntos tienen intersección no vacía, entonces  $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_p \neq \emptyset$ .*

Sean  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral y  $B(q, r) \subset \mathbb{R}^n$  una bola Euclideana con radio  $r$  y centro en  $q$ . Consideremos todos los semiespacios  $H$ -convexos que contienen a  $B(q, r)$  y denotemos por  $B_H(q, r)$  su intersección.



Es claro que  $B_H(q, r)$  es un conjunto  $H$ -convexo y será llamado  $H$ -bola con radio  $r$  y centro en  $q$ . Como  $H$  es un conjunto no-unilateral; entonces por la proposición 3.12, la  $H$ -bola es un conjunto compacto. Sea ahora  $M \subset \mathbb{R}^n$ ; la mínima  $H$ -bola que contiene a  $M$  se llama la  $H$ -bola circunscrita a  $M$ . En la figura de abajo tenemos  $H = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$  el cual es un conjunto no-unilateral, y la  $H$ -bola correspondiente a  $B(q, r)$  es un cuadrado.

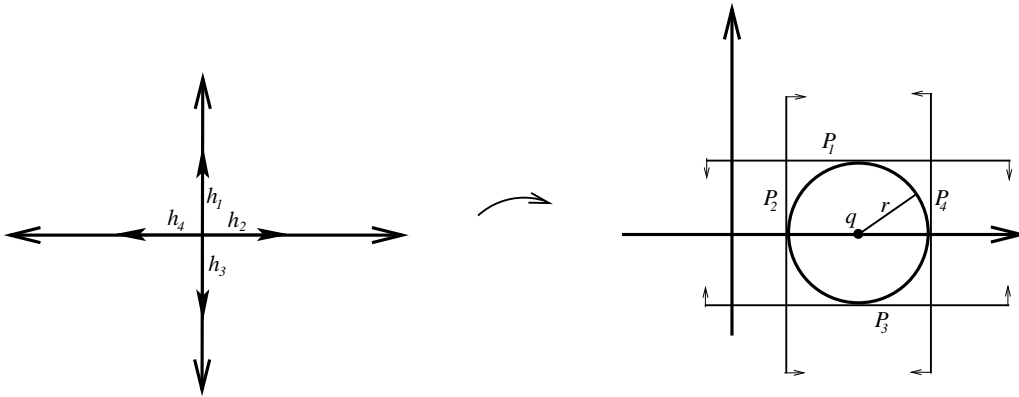


Figura 4.1:

**Definición 4.1** Sean  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral y  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . La  $H$ -distancia del punto  $a$  al punto  $b$  es el mínimo número positivo  $r$  tal que la  $H$ -bola con radio  $r$  y centro en el punto  $a$  contiene a  $b$ , y denotada por  $d_H(a, b)$ .

La forma en que se calcula la  $H$ -distancia de  $a$  a  $b$  puede ser la siguiente:

1. Dibujar la bola Euclideana centrada en  $a$  y de radio  $r > 0$ .
2. Dibujar todos los semiespacios  $H$ -convexos, pero de manera que la frontera de cada uno de ellos sea tangente a la anterior bola Euclidena.
3.
  - Si  $b$  está en el interior de la intersección de los semiespacios dibujados en (2), entonces aumentar  $r$  e ir a (1).
  - Si  $b$  está en el exterior de la intersección, reducir  $r$  e ir a (1)
4. La  $H$ -distancia de  $a$  a  $b$  es  $r$ .

Si  $H$  no es simétrico con respecto al origen, entonces  $d_H(a, b) \neq d_H(b, a)$ ; es decir,  $H$  define un espacio con una métrica no simétrica. En la figura 4.2 se observa este hecho; pues en la figura de la izquierda cada normal tiene su simétrico y por esto la distancia del punto  $a$  al punto  $b$  es la misma; mientras que en la derecha no.

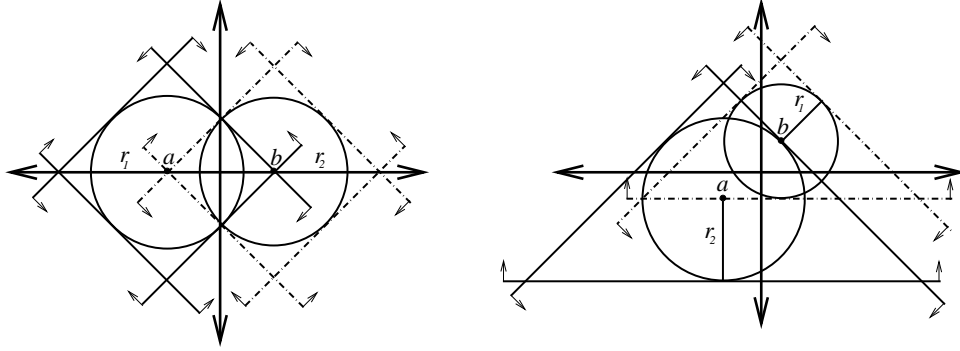


Figura 4.2:

**Definición 4.2** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral y  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto. El **H-diámetro**  $d$  de  $M$  es el supremo de el conjunto  $\{d_H(a, b) | a, b \in M\}$  y será denotado por  $\text{diam}_H(M)$ .

En el caso que  $H = \mathbb{S}^{n-1}$  se tiene que la  $H$ -bola, la  $H$ -distancia y el  $H$ -diámetro coinciden con la bola Euclídeana, la distancia Euclídeana y el diámetro en el sentido normal, respectivamente.

Cabe señalar que la proposición que se presenta a continuación es un resultado muy importante; ya que será la principal herramienta para demostrar los teoremas importantes de este capítulo.

**Proposición 4.1** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral. Si  $a \in B_H(b, r)$  entonces  $b \in B_{-H}(a, r)$ .

**Demostración.**

Tenemos que  $B_H(b, r) = \bigcap_{h \in H} P_{h, \alpha_h}$ , donde  $P_{h, \alpha_h}$  es un semiespacio  $H$ -convexo; mas aún,  $P_{h, \alpha_h}$  es un semiespacio soporte de  $B(b, r)$  en el punto  $\alpha_h$ ,

así,  $P_{h,\alpha_h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - \alpha_h, h \rangle \leq 0\}$  y  $\|\alpha_h - b\| = r$ , pues  $\alpha_h \in \text{bd } B(b, r)$ . Tenemos que  $a \in B_H(b, r)$ , entonces  $\langle a - \alpha_h, h \rangle \leq 0$  para cada  $h \in H$ . Ahora  $0 \geq \langle a - \alpha_h, h \rangle = \langle \alpha_h - a, -h \rangle = \langle b - (b - \alpha_h + a), -h \rangle = \langle b - \beta_h, -h \rangle$ , y  $\|\beta_h - a\| = \|b - \alpha_h\| = r$ . Por lo tanto  $b \in P_{-h,\beta_h}$  para cada  $h \in H$  y  $\|\beta_h - a\| = r$ ; es decir,  $P_{-h,\beta_h}$  es un semiespacio  $(-H)$ -convexo y semiespacio soporte de  $B(a, r)$  en el punto  $\beta_h$ . Luego  $b \in B_{-H}(a, r)$ . (Ver figura 4.3) ■

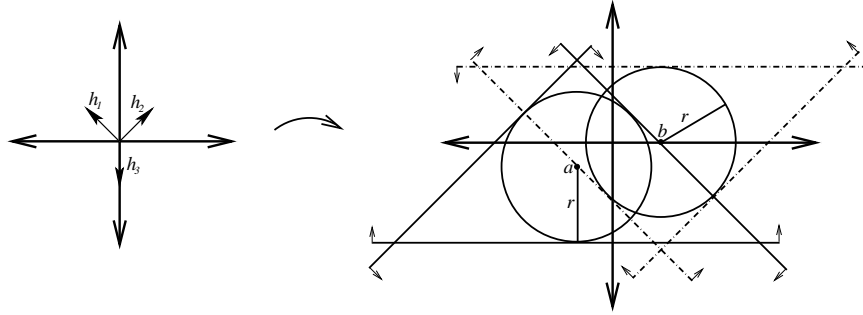


Figura 4.3:

## 4.2. El $H$ -Teorema de Jung

Recordemos el teorema de Jung (teorema 2.9), en este teorema podemos considerar dos parámetros que son el diámetro del conjunto y el radio de la bola Euclídeana en la cual está contenido. Ahora que ya hemos estudiado un poco acerca de  $H$ -convexidad, haremos la generalización de dicho teorema. Para esto tenemos que considerar los siguientes casos:

- Caso: Diámetro Euclídeano y Bola Euclídeana.
- Caso: Diámetro Euclídeano y  $H$ -Bola.
- Caso:  $H$ -diámetro y Bola Euclídeana.
- Caso:  $H$ -diámetro y  $H$ -bola.

Observemos que el primer caso ya fue presentado en el teorema 2.9. Veamos los otros.

**Teorema 4.2** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no unilateral. Cada conjunto de diámetro Euclideo  $d$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $r \leq \sqrt{\frac{\text{md } H}{2(\text{md } H + 1)}}d$ . (Caso: Diámetro Euclideo,  $H$ -bola)*

**Demostración.**

Sea  $m = \text{md } H$ . Tomemos  $x_0, x_1, \dots, x_m, m+1$  puntos de  $M$ ; estos puntos pueden ser localizados en un plano Euclideo de dimensión  $m$ , luego como su diámetro es menor o igual a  $d$ , por teorema clásico de Jung los  $m+1$  puntos están contenidos en una bola Euclidea de radio  $r_m = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}d$ ; mas aún, estos puntos están contenidos en una  $H$ -bola de radio  $r_m$ , pues la  $H$ -bola contiene a la bola Euclidea. Supongamos que la  $H$ -bola encontrada anteriormente tiene centro en algún punto  $c$ , luego por la proposición 4.1 como  $x_i \in B_H(c, r_m)$  entonces  $c \in B_{-H}(x_i, r_m)$  para cada  $x_i$ , con  $i = 0, 1, \dots, m$ . Por tanto se tiene que la intersección de estas  $m+1$  ( $-H$ )-bolas es no vacía. Ahora consideremos a  $\mathcal{B}$  como la familia de todas las ( $-H$ )-bolas centradas en puntos de  $M$  y de radio  $r_m$ , luego como hemos visto ya, cada  $m+1$  ( $-H$ )-bolas de  $\mathcal{B}$  tiene intersección no vacía, luego por teorema de Helly versión  $H$ -convexa tenemos que todas las ( $-H$ )-bolas de radio  $r_m$  y centradas en puntos de  $M$  tienen un punto en común  $q$ ; esto es,  $q \in \bigcap_{x \in M} B_{-H}(x, r_m)$ . Otra vez utilizando la proposición 4.1 se tiene que  $x \in B_H(q, r_m)$  para cada  $x \in M$ . Luego  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $r_m = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}d$ . ■

**Ejemplo 4.1**

1. Tomemos  $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n\}$ , donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal. Claramente todos los conjuntos  $H$ -convexos coinciden con un paralelepípedo cuyas aristas son paralelas a los vectores  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . En vista de la proposición 3.10 se tiene que  $\text{md } H = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, por Teorema anterior, si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es de diámetro  $d$ , entonces  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $d/2$ ; esto es, en un cubo de dimensión  $n$  con aristas de longitud  $d$  pues la  $H$ -bola es intersección de  $2n$  semiespacios  $H$ -convexos los cuales vienen en pares, y es por esto que la figura correspondiente es un cubo. (Ver figura 4.4).

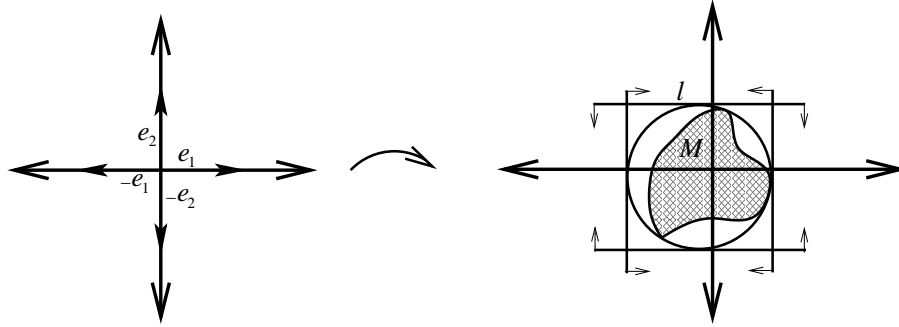


Figura 4.4:

2. Sea  $H = \{-e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)\}$  donde  $e_1, e_2$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ . Claramente  $\text{md } H = 2$ , pues estos tres puntos son vértices de un 2-simplejo el cual contiene al 0 en su interior. Ahora, si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto de diámetro  $d$ , entonces por el teorema anterior  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Veamos que este número no es exacto. Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un círculo de radio  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}d$  centrado en  $q$  y  $U_H$  la correspondiente  $H$ -bola de radio  $r$ ; esto es, el triángulo que circunscribe a  $U$  y que tiene como normales exteriores unitarias a los elementos de  $H$ . En la figura de abajo se puede observar que los puntos  $a = q - re_1$ ,  $b = q + \frac{r}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ ,  $c = q + \frac{r}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$  están en la frontera de  $U_H$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \|a - b\| &= \left\| -re_1 - \frac{r}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \right\| = \frac{r}{\sqrt{2}} \left\| -e_1(1 + \sqrt{2}) - e_2 \right\| \\ &= \frac{r}{\sqrt{2}} \left\| (-(1 + \sqrt{2}), -1) \right\| = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} \\ &= \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = r\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ &= d + 2h, \text{ donde } h \approx 0,058r; \end{aligned}$$

y esta última igualdad se tiene aplicando el método de Newton con punto inicial  $x^{(0)} = \sqrt{3}$  al polinomio  $x^2 - (2 + \sqrt{2}) = 0$ .

Del hecho que el conjunto  $M$  tenga diámetro  $d$  y que la distancia entre  $a$  y  $b$  sea mayor que  $d$ , se tiene que existe una bola euclidea centrada en  $a$  o  $b$  y de radio  $h$ , y es tal que no contiene puntos de  $M$ . Por tanto,

si tomamos en cuenta que  $b$  satisface lo anterior, podemos desplazar el semiespacio con normal  $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$  en dirección opuesta a esta normal en una cantidad positiva, y en consecuencia tenemos que el conjunto  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio menor que  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ . Por tanto para cada  $M \subset \mathbb{R}^2$  el estimado en el teorema anterior puede ser disminuido; esto es, el estimado en el teorema anterior no es exacto. (Ver figura 4.5).

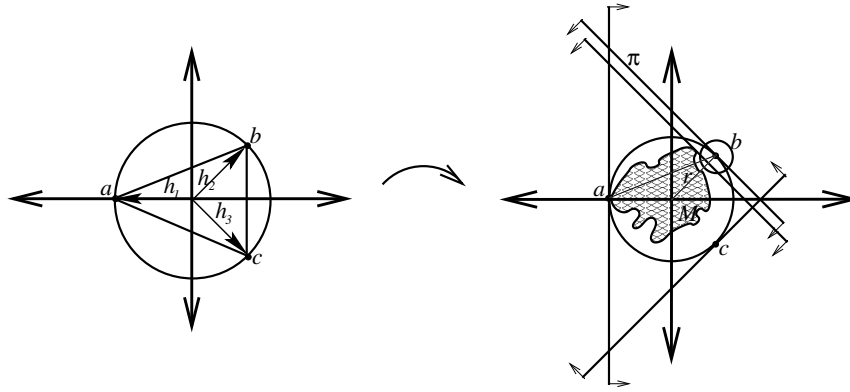


Figura 4.5:

**Proposición 4.2** Para cada  $a, b \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $d_H(a, b) \leq d(a, b)$ . Mas aún, se tiene  $d_H(a, b) = d(a, b) \Leftrightarrow \frac{b-a}{\|b-a\|} \in H$ .

### Demostración.

Sean  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Tomemos  $\delta = d_H(a, b)$ , por definición  $\delta$  es el radio mínimo de la  $H$ -bola  $U_H$  centrada en  $a$  que contiene a  $b$ . Sabemos que  $b$  está localizado en la frontera de la  $H$ -bola  $U_H$  y que  $U \subset U_H$  como observamos anteriormente; es decir,  $b \in \text{bd} U_H$  y  $b$  está fuera de  $U$  (posiblemente en su frontera). De esta manera se tiene,  $d_H(a, b) \leq d(a, b)$ .

Veamos ahora que  $d_H(a, b) = d(a, b) \Leftrightarrow \frac{b-a}{\|b-a\|} \in H$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $d_H(a, b) = d(a, b) = r$ . Luego se tiene que  $b$  está en la frontera de la  $H$ -bola centrada en  $a$  y de radio  $r$  y del hecho que  $d(a, b) = r$  se observa que  $b$  también está en la frontera de la bola Euclidiana centrada en  $a$  y de radio  $r$ . En base a resultados geométricos tenemos que el hiperplano

que pasa por  $b$  es únicamente perpendicular al vector radio; es decir, el vector  $b-a$  es la normal del semiespacio que tiene como frontera a dicho hiperplano. Como el semiespacio que pasa por  $b$  es  $H$ -convexo por ser parte de la  $H$ -bola, tenemos que  $\frac{b-a}{\|b-a\|} \in H$ .

$\Leftrightarrow$  Dados  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , supongamos que  $\frac{b-a}{\|b-a\|} \in H$ . Sea  $r = d_H(a, b)$ , entonces  $b \in \text{bd } B_H(a, r)$ . Como  $\frac{b-a}{\|b-a\|} \in H$ , tenemos que  $\frac{b-a}{\|b-a\|}$  es normal al semiespacio  $H$ -convexo que pasa por  $b$ . Ahora, tracemos la bola euclidea de radio  $s = \|b-a\|$  centrada en  $a$ ; luego, esta bola tiene como tangente al semiespacio  $H$ -convexo en el punto  $b$ , así  $b \in \text{bd } B_H(a, s)$ ; es decir,  $d_H(a, b) = d(a, b)$ . ■

**Teorema 4.3** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no-unilateral. Sea  $\mathbb{U}_H$  la  $H$ -bola con centro en  $0$  y radio  $1$ , denotemos por  $m_H$  la distancia máxima  $d(0, x)$  sobre todos los puntos  $x \in \mathbb{U}_H$ . Cada  $M \subset \mathbb{R}^n$  acotado con  $H$ -diámetro  $d$  está contenido en una bola Euclidea de radio  $r \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} m_H d$ .*

(Caso:  $H$ -diámetro, bola Euclidea)

#### Demostración.

Sean  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . De la relación  $\delta = d_H(a, b)$ , tenemos la  $H$ -bola  $U_H$  centrada en  $a$  y de radio  $\delta$ . Sea  $s(x) = \frac{1}{\delta}(x-a)$  la homotecia con coeficiente  $\frac{1}{\delta}$  que manda el punto  $a$  al  $0$ . Si aplicamos la homotecia  $s$  al conjunto  $U_H$ , obtenemos precisamente  $\mathbb{U}_H$ , pues  $s$  solo es una traslación hacia el  $0$  multiplicada por una constante. Del hecho que  $b \in \text{bd } U_H$  se tiene que  $s(b) \in \text{bd } \mathbb{U}_H$ . Luego, de la hipótesis se tiene que  $d(0, s(b)) \leq m_H$ ; mas aún,  $d(0, \frac{1}{\delta}(b-a)) \leq m_H$  y por tanto  $\frac{1}{\delta}d(a, b) \leq m_H$ . Luego,  $\frac{d(a, b)}{m_H} \leq \delta = d_H(a, b)$ . Se tiene  $\text{diam}_H M = \sup\{d_H(a, b) | a, b \in \mathbb{R}^n\} = d$ , entonces  $d(a, b) \leq m_H d_H(a, b) \leq m_H d$  para cada  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , mas aún,  $\text{diam } M \leq m_H d$ . Como  $M \subset \mathbb{R}^n$ , se tiene por Teorema clásico de Jung que  $M$  está contenido en una bola euclidea de radio menor o igual a  $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} m_H d$ . ■

**Ejemplo 4.2** *Tomemos  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = m_H\}$ . Supongamos que  $S \cap \mathbb{U}_H$  contiene  $n+1$  puntos; los cuales son vértices de un  $n$ -simplejo regular  $M$ . Si  $\text{diam}_H M = d$ , entonces  $\text{diam } M \leq m_H d$ ; mas aún, como  $M$  es un  $n$ -simplejo de diámetro menor o igual que  $m_H d$ , entonces  $M$  está contenido en una bola de radio menor o igual que  $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} m_H d$  (por Teorema 2.9).*

Consideremos un triángulo equilátero  $P \subset \mathbb{R}^2$ . Tomemos  $H$  como el conjunto de las normales unitarias a los lados de  $P$ . En este caso  $\mathbb{U}_H$  es un

triángulo equilátero y mediante cálculos geométricos obtenemos que  $m_H = 2$ . Ahora tenemos que  $M = \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{U}_H$  es un 2-simplejo regular y coincide con  $\mathbb{U}_H$ . El  $H$ -diámetro de  $M$  coincide con la altura de el triángulo  $M$ , que es igual a 3; pues sin pérdida de generalidad tomemos los vértices  $a$  y  $b$  y tracemos la bola euclidea centrada en  $a$  y radio igual a 3, observamos que esta bola es tangente a el semiespacio  $H$ -convexo  $\Pi$  en el punto medio de este (pues el triángulo es equilátero) y además  $\Pi$  contiene al punto  $b$  lo cual significa que la  $H$ -distancia del punto  $a$  a  $b$  es 3. Por el teorema anterior se tiene que  $M$  está contenido en una bola euclidea de radio menor o igual a  $(\frac{1}{\sqrt{3}})(2)(3) = 2\sqrt{3}$ . Aunque geoméricamente se observa que  $M$  está contenido en una bola euclidea de radio 2, el cual es mas exacto que la cota que da el teorema. (Ver figura 4.6).

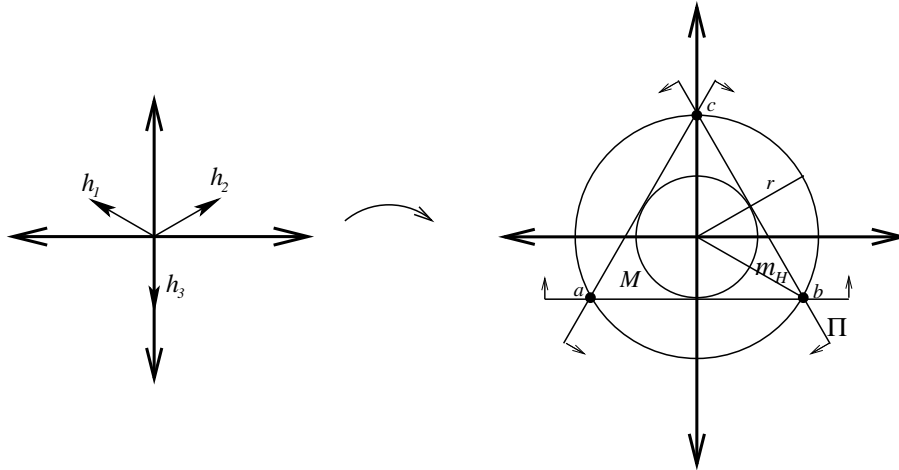


Figura 4.6:

**Teorema 4.4** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto no unilateral. Cada conjunto acotado  $M \subset \mathbb{R}^n$  con  $H$ -diámetro  $d$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $r \leq \frac{\text{md } H}{\text{md } H+1} d$ . (Caso:  $H$ -diámetro,  $H$ -bola)

**Demostración.**

Sea  $m = \text{md } H$ . Tomemos  $a_0, a_1, \dots, a_m \in M$ . Del hecho que  $M$  tiene  $H$ -diámetro  $d$ , tenemos que  $d_H(a_k, a_0) \leq d$ ; mas aún,  $a_0$  está contenido en la



$H$ -bola centrada en  $a_k$  y radio  $d$ , para cada  $k = 1, \dots, m$ . Por la proposición 4.1, tenemos que  $a_0, a_1, \dots, a_m$  está en la  $(-H)$ -bola con centro en  $a_0$  y radio  $d$ . Sabemos que todo conjunto  $H$ -convexo es convexo; en particular, la  $(-H)$ -bola es un conjunto convexo, y en consecuencia la combinación convexa  $p = \frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$  está contenida en la  $(-H)$ -bola centrada en  $a_0$  y radio  $d$ . Haciendo  $c = \frac{1}{m+1}a_0 + \frac{m}{m+1} \frac{a_1 + \dots + a_m}{m} = \frac{1}{m+1}(a_0 + \dots + a_m)$ , tenemos que  $c$  está en la  $(-H)$ -bola centrada en  $a_0$  y de radio  $\frac{m}{m+1}d$ ; pues sólo estamos disminuyendo la longitud del vector  $p$  al multiplicarlo por  $\frac{m}{m+1}$ , lo que significa que el radio de la  $(-H)$ -bola también lo estamos multiplicando por la misma cantidad.

De la forma anterior, obtenemos que  $c$  está en la  $(-H)$ -bola centrada en  $a_k$  y de radio  $\frac{m}{m+1}d$ , para cada  $k = 1, \dots, m$ . Por tanto, cada  $m + 1$   $(-H)$ -bolas tienen un punto en común. Ahora, si consideramos a  $\mathfrak{B}$  como la familia de las  $(-H)$ -bolas centradas en puntos de  $M$  y radio  $\frac{m}{m+1}d$ , se tiene que cada  $m + 1$  conjuntos de ésta familia tienen intersección no vacía; mas aún, por Teorema de Helly versión  $H$ -convexa, la familia  $\mathfrak{B}$  tiene un punto en común  $q$ ; esto es,  $q \in \bigcap_{x \in M} B_{-H}(x, \frac{m}{m+1}d)$ . Por tanto, por la proposición 4.1 se tiene que  $x \in B_H(q, \frac{m}{m+1}d)$  para cada  $x \in M$ . Por tanto  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $\frac{m}{m+1}d$ . ■

**Ejemplo 4.3** Sea  $T \subset \mathbb{R}^2$  el 2-simplejo que inscribe la bola euclidea centrada en 0 y radio 1. Tomemos a  $H$  como el conjunto de las normales exteriores unitarias a sus caras principales; por la proposición 3.9,  $\text{md } H = 2$ . Claramente  $T$  es la  $H$ -bola de radio 1 y centro 0. Ahora, tomemos a  $M$  como el 2-simplejo simétrico de  $T$  con respecto al origen. Mediante cálculos geométricos se tiene que  $M$  tiene  $H$ -diámetro igual a 3; pues las aristas de  $M$  tiene  $H$ -distancia igual a 3. (Ver figura 4.7).

Para calcular la  $H$ -distancia se empieza trazando la bola euclidea centrada en un extremo de una arista de  $M$  y radio igual a la altura de  $M$ , luego se observa que esta bola es tangente al semiespacio  $H$ -convexo que contiene al otro extremo de la misma arista, y por eso la  $H$ -distancia entre los extremos de los vértices es igual a la altura de  $M$  que es igual a 3. Luego por el teorema anterior  $M$  está contenido en una  $H$ -bola de radio 2. Éste estimado es exacto, pues geoméricamente se tiene que  $M$  está contenido en una bola euclidea de radio 2 y la bola euclidea hereda el radio a la  $H$ -bola.

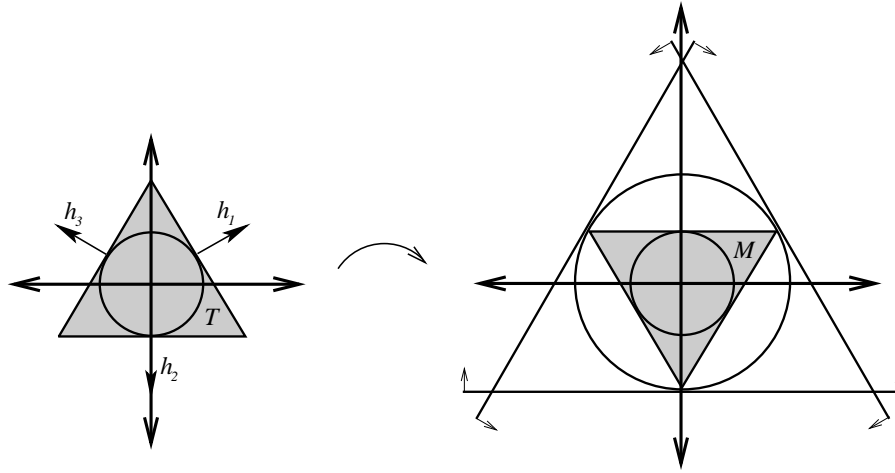


Figura 4.7:

**Ejemplo 4.4** Sea  $P^2 \subset \mathbb{R}^2$  un hexágono regular, el cual circunscribe a la bola euclídeana unitaria centrada en cero. Consideremos a  $H \subset S^1$  como el conjunto de normales unitarias a sus caras principales. Tracemos el triángulo regular  $T$  que se forma al unir los puntos medios de los lados no adyacentes de  $P^2$ . Mediante calculos geométricos sabemos que la altura de dicho triángulo es igual a  $\frac{3}{2}$ .

Para calcular el  $H$ -diámetro de  $T$  solo tenemos que fijarnos en la  $H$ -distancia que hay entre dos vértices cualesquiera; pues es la mayor distancia euclídeana que hay entre dos puntos cualesquiera de  $T$ . Para calcular la  $H$ -distancia entre los dos vértices tomamos una bola euclídeana centrada en el punto  $a$  y hacemos crecer su radio, luego observaremos que cuando la bola alcanza un radio igual a la altura del triángulo entonces esta bola euclídeana es tangente en el punto  $t$  al semiespacio  $H$ -convexo que contiene a  $b$ ; es decir la  $H$ -bola centrada en  $a$  y de radio  $\frac{3}{2}$  contiene a  $b$ , lo que por definición quiere decir que la  $H$ -distancia entre dos vértices es igual a  $\frac{3}{2}$ . Si tomamos a  $h_1, h_3, h_5 \in H$  observamos que son vértices de un 2-simplejo, luego por la proposición 3.9 se tiene que  $\text{md } H = 2$ . De la figura 4.7 tenemos que el triángulo  $T$  esta contenido en la  $H$ -bola centrada en  $0$  y de radio 1; pues así fue construido  $T$ . El teorema anterior nos dice que  $T$  esta contenido en una  $H$ -bola de radio  $\frac{\text{md } H}{\text{md } H + 1} \text{diam}_H = \left(\frac{2}{2+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ . Por tanto el estimado de

el teorema es exacto. (Ver figura 4.8).

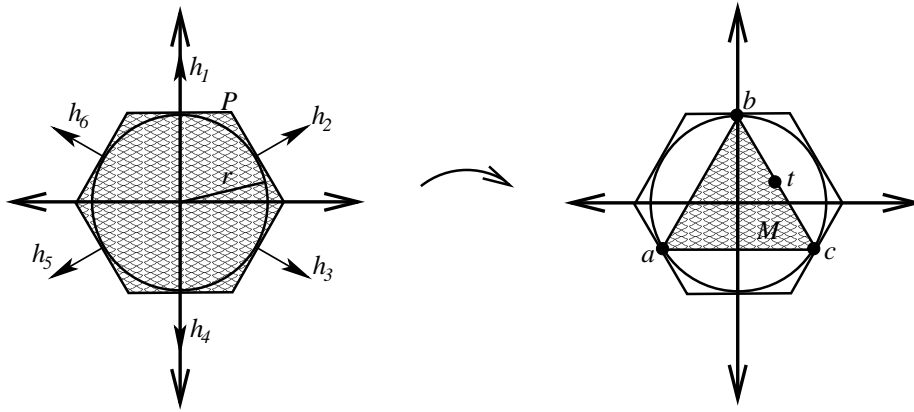


Figura 4.8:

# Conclusiones

Análogo a la teoría de la Convexidad, para este trabajo tuvimos que definir los conjuntos  $H$ -convexos y de alguna manera equiparlos con una métrica ( $H$ -distancia), lo que trajo consigo definir el  $H$ -diámetro. También se tuvo que ver la forma de construir objetos análogos a las ya conocidas bolas Euclidianas; en este caso resultaron las llamadas  $H$ -bolas, que curiosamente no se construyen a partir de la métrica. Una cosa que fue muy importante para este trabajo fue el funcional  $md$ . Este funcional en cierta forma nos da una "medida" del conjunto  $H$ , luego si queremos encontrar la  $H$ -bola que circunscribe un conjunto  $M$  o encontrar el  $H$ -diámetro de  $M$ , debemos de considerar a este funcional de alguna manera.

Realmente el tema tratado en este trabajo es muy bonito, pero para entenderlo se tiene que entrenar mucho el pensamiento para que nos permita imaginar estos conjuntos porque algunos pueden ser un poco raros. Algunos de los conjuntos vistos ya son conocidos, pero lo que no conocíamos era esta nueva forma de definirlos y las propiedades que ellos presentan al ser atacados desde un punto de vista diferente. Esta teoría depende mucho del conjunto  $H$  definido a priori; es por esto que para cada conjunto  $H$ , las  $H$ -bolas pueden ser muy variadas y es esta la razón por la que a veces resulta complicado calcular la  $H$ -distancia. El hecho de que la métrica no sea simétrica complica su cálculo y todavía mas complicado es calcular el  $H$ -diámetro de un conjunto, mas con un poco de paciencia e imaginación se llega a buen término.

Por último quisiera agregar que esto que presentamos no es todo, hay demasiadas cosas que se han hecho en  $H$ -convexidad, pero todo está inspirado en la fabulosa teoría de la Convexidad. Cabe hacer notar que ahora ya hay una rama de las matemáticas llamada Análisis Convexo, y creo que esto nos da una idea de que tan importante es el concepto de convexidad.

# Bibliografía

- [1] Vladimir Boltyanski, Horst Martini and Petru Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer Verlag, Berlín. 1934.
- [2] H. Hadwiger, *Lo antiguo y lo nuevo acerca de los conjuntos convexos*, Traducción: L. Montejano, Aportaciones Matemáticas No. 10, SMM. México. 1998.
- [3] Branko Grünbaum, *Convex Polytopes*, London: Interscience. 1967.
- [4] Rolf Schneider, *Convex Bodies*, Cambridge University Press. 1993.
- [5] L. Montejano Peimbert, *La cara oculta de las esferas*, colección "La Ciencia desde México", No. 75. FCE, México. 1989.
- [6] L. Montejano Peimbert, *Cuerpos de ancho constante*, Ediciones Científicas Universitarias, FCE. México. 1998.
- [7] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Aportaciones Matemáticas No. 1, SMM. México. 1997.
- [8] I.M Yaglom and V.G. Boltyanskii, *Figuras Convexas*, Holt, Rinehart and Wiston, New York. 1961.
- [9] Jonathan M Borwein, *Convex analysis and nonlinear optimization*, New York : Springer. 2000.
- [10] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, New York : McGraw-Hill, 1976.