UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

TESIS:

"ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE CARTAN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES".

Para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta:

Daisy Ojeda Valencia

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. Gustavo Yáñez Navarro

Huajuapan de León, Oaxaca.
Julio de 2004.

A la memoria de mi abuelo
Natalio.

A mi mejor amiga, mi madre;
a mi hermano Carlitos,
a mi abuelita Mati,
y a Erik.

Agradecimientos

A mi asesor el M. en C. Gustavo Yañez Navarro, por todo lo que aprendí de él en la realización de esta tesis.

A mis sinodales, Juan Carlos Mendoza Santos, Luz del Carmen Álvarez Marín, Jose Luis Carrasco Pacheco, por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

A mis profesores, por todas sus enseñanzas.

Contenido

Introducción

El Cálculo de Formas Diferenciales, frecuentemente llamado Cálculo Diferencial Exterior, representa una herramienta del Análisis cuyo uso en Matemáticas Aplicadas se ha ido incrementando. Al igual que el Cálculo Tensorial, sus origenes se encuentran en la Geometría Diferencial, en gran parte debido a las investigaciones de E. Cartan en los comienzos del siglo pasado. Rápidamente se reconoció que las ramificaciones de este tema se extendían mucho mas allá de los terrenos de la Geometría Diferencial, por consiguiente puede considerarse que pertenece al Análisis por sí mismo.

En los libros de H. Cartan y de H. Flanders, el Cálculo Diferencial Exterior es introducido y tratado sin hacer referencia al Cálculo Tensorial. Se ha afirmado que el primero es superior al último, basándose en el hecho de que las Formas Diferenciales usan en menor grado las vecindades coordenadas que los Tensores.

Pero es, quizás, más realista reconocer que ambas disciplinas son indispensables, cada una por derecho propio. Existen situaciones en la que una es más efectiva que la otra.

Algunos de los éxitos más significativos se han logrado cuando ambas se usan conjuntamente, lo cual se puede ver en los trabajos de E. Cartan.

Es con los trabajos de E. Cartan que se estableció que la relación entre la Geometría y el Análisis es doble: por un lado el Análisis se encarga de fundamentar el estudio de la Geometría, pero por otro, el estudio de la Geometría lleva, de manera natural, al desarrollo de ciertas herramientas analíticas (tales como la derivada de Lie y el Cálculo de las Formas Diferenciales) y ciertos conceptos (tales como la Variedad diferenciable, los Haces Fibrados y la identificación de los vectores con derivadas) que tienen un gran poder en las aplicaciones del Análisis.

Debido al desarrollo que esta cercana relación entre las ideas geométricas y analíticas ha tenido, la Geomertía Diferencial Moderna ha resultado cada vez mas importante para la Física Teórica y para un entendimiento mas fundamental de la Física. Pero esta revolución no solo ha afectado a la Teoría Especial y General de la Relatividad, dos teorías cuyo contenido es mayormente geométrico, también otros campos donde la geometría involucrada no siempre es la del espacio físico, sino la de un espacio mas abstracto de variables: Electromagnetismo, Termodinámica, Teoría de Hamilton, Dinámica de Fluidos y Partículas Elementales.

En años recientes se ha puesto de manifiesto el papel fundamental que los Campos de Norma juegan en la Física, y la posibilidad de describir los Campos de Norma en términos de Conexiones sobre Haces Fibrados.

El término Transformaciones de Norma fué introducido por Hermann Weyl en 1918 en un intento, geométricamente difícil y alejado de la Física, de construir una Teoría Unificada del Campo Electromagnético y el Campo Gravitacional; los dos, campos de fuerza de largo alcance.

Actualmente, con un significado diferente dado a la palabra Norma, las Teorías de Norma permanecen como parte central de las Teorías de Unificación propuestas para las cuatro interacciones fundamentales: Gravitación, Electromagnetismo, Interacción Fuerte e Interacción Débil.

El modelo de Salam-Weinberg es una Teoría Unificada del Electromagnetismo con las Interacciones Débiles. Es basado en dos conceptos claves: Campos de Norma No-Abelianos y Rompimiento de Simetría.

Es por lo anterior, y debido a su uso cada vez más difundido, que este trabajo pretende mostrar, de manera somera, el uso de las Formas Diferenciales en el Cálculo de Curvaturas y Torsión de Superficies, así como en las Teorías Electromagnéticas y de Norma (Gauge) en general.

Estructura del trabajo.

En el capítulo 1 se define el producto exterior para formar el espacio de los p-vectores, y lo aplicamos a conceptos ya conocidos; como el determinante e integración en $\mathbb{R}^n$. En el espacio de los p-vectores se define un producto interno, utilizando el producto interno en un espacio vectorial. Posteriormente se define la operación Estrella de Hodge; concepto necesario para escribir las ecuaciones de Maxwell en este formalismo, así como para su aplicación en el capítulo 5.

En el capítulo 2 vemos la interpretación geométrica de algunas formas diferenciales. Además, definimos la derivada exterior y vemos la manera en que se escriben las formas diferenciales en distintos sistemas de coordenadas; esto en la sección referente a mapeos.

Mostramos el inverso del Lema de Poincaré, necesario en electromagnetismo para garantizar la existencia de la 1-forma de conexión A; a ser utilizada en el capítulo 5.

En el capítulo 3, aplicamos los conceptos vistos en los dos capítulos anteriores a la geometría en espacios euclideanos, para obtener las Ecuaciones de Estructura de Cartan. Recuperamos también los resultados conocidos en geometría, como: Curvatura Media, Curvatura Gaussiana de una superficie; así como el Laplaciano.

En ese mismo capítulo, reescribimos las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de formas diferenciales; de aquí resulta de manera natural, el teorema de Poynting.

En el capítulo 4, se dan algunos conceptos necesarios para demostrar el Teorema de Stokes en Variedades Diferenciables.

Finalmente, en el capítulo 5, utilizando conceptos definidos en el apéndice B, ilustramos el concepto Transporte Paralelo y Conexión; necesarios para interpretar las Transformaciones de Norma con una matriz de cambio de base, y a la 1-forma de conexión con la matriz Ω del capítulo 3.

Capítulo 1

Producto exterior; definición y propiedades.

1.1 El espacio de los p-vectores.

Definición 1.1 *Sea* $\mathbf{L}$ *un espacio vectorial de dimensión* n*. Para cada* $p = 0, 1, 2, ..., n$ *construiremos un nuevo espacio vectorial*

$$\bigwedge^p \mathbf{L}$$

sobre R, llamado el ***espacio de los p-vectores*** *sobre* $\mathbf{L}$.

Comenzaremos con

$$\bigwedge^0 \mathbf{L} = \mathbb{R}, \qquad \bigwedge^1 \mathbf{L} = \mathbf{L}.$$

Construyamos ahora el espacio $\bigwedge^2 \mathbf{L}$. Este espacio es el generado por todos los elementos de la forma

$$(\alpha \wedge \beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{L}.$$

Los elementos de este espacio están sujetos a las siguientes condiciones:

1) $\alpha \wedge \alpha = 0$
2) $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$
3) $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta = a_1(\alpha_1 \wedge \beta) + a_2(\alpha_2 \wedge \beta)$ linealidad por la izquierda,

donde α, β, etc., son vectores en $\mathbf{L}$ y a, b, etc., son números reales.
Nótese que las condiciones 2 y 3 implican la linealidad por la derecha de la operación $\wedge$.

Definición 1.2 *A la operación "$\wedge$" se le llamará el* ***producto exterior*** *de* α *y* β.

Definición 1.3 *Dos vectores* α *y* β *son dependientes si existe un número real c tal que* $\beta = c\alpha$.

Proposición 1.1 *Si* α, β *son dependientes entonces* $\alpha \wedge \beta = 0$.

Demostración.

Como $\beta = c\alpha$ para alguna constante real c, se tiene que

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (c\alpha) = c(\alpha \wedge \alpha) = c \cdot 0 = 0.$$

■

Supongamos que $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ es una base para $\mathbf{L}$. Entonces

$$\alpha = \sum a_i \sigma^i, \qquad \beta = \sum b_j \sigma^j,$$
$$\alpha \wedge \beta = (\sum a_i \sigma^i) \wedge (\sum b_j \sigma^j) = \sum a_i b_j (\sigma^i \wedge \sigma^j).$$

como $\sigma^i \wedge \sigma^i = 0$ y $\sigma^i \wedge \sigma^j = -\sigma^j \wedge \sigma^i$, la igualdad anterior es equivalente para $i < j$, a lo siguiente

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) \sigma^i \wedge \sigma^j.$$

Proposición 1.2 *Los elementos de* $\bigwedge^2 \mathbf{L}$ *de la forma*

$$\sigma^i \wedge \sigma^j, \qquad 1 \leq i < j \leq n,$$

forman una base para dicho espacio, y además

$$dim \bigwedge^2 \mathbf{L} = \frac{n(n-1)}{2} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.4 *El espacio* $\bigwedge^p \mathbf{L}$ $(2 \leq p \leq n)$ *consiste de todas las sumas de p-vectores, o vectores de grado p*

$$\sum a(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)$$

los cuales están sujetos a las siguientes condiciones:

(i) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge (a\alpha + b\beta) \wedge ... \wedge \alpha_p = a(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha \wedge ... \wedge \alpha_p) + b(\alpha_1 \wedge ... \wedge \beta \wedge ... \wedge \alpha_p)$, *es decir este producto es lineal en cada variable.*

(ii) $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p = 0$ *si para algún par de índices* $i \neq j$, $\alpha_i = \alpha_j$

(iii) $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$ *cambia de signo si dos* α_i *son intercambiados.*

De la definición anterior se deduce que si $p = n$ entonces $dim \bigwedge^n \mathbf{L} = 1$.

Proposición 1.3 *Si* π *es una permutación del conjunto de índices* $\{1, 2, ..., p\}$*, entonces*

$$\alpha_{\pi(1)} \wedge ... \wedge \alpha_{\pi(p)} = (sgn\pi)\alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_p,$$

donde $(sgn\pi)$ *indica el signo de la permutación* π*.*

. Si $\{\sigma^1, ..., \sigma^p\}$ es una base para $\mathbf{L}$ y si $H = \{h_1, ..., h_p\}$ es un conjunto de índices ordenados del conjunto $\{1, .., n\}$, denotaremos al p-vector $\sigma^{h_1} \wedge ... \wedge \sigma^{h_p}$ como σ^H, esto es

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge ... \wedge \sigma^{h_p}, \qquad 1 \leq p \leq n.$$

Proposición 1.4 *El conjunto de los σ^H forman una base para el espacio $\bigwedge^p \mathbf{L}$, y*

$$dim \bigwedge^p \mathbf{L} = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right).$$

De esta manera si λ está en $\bigwedge^p \mathbf{L}$, entonces

$$\lambda = \sum_H a_H \sigma^H.$$

Nótese que si $p > n$, entonces $\bigwedge^p \mathbf{L} = \{0\}$, ya que si λ es un elemento en $\bigwedge^p \mathbf{L}$ se puede expresar como arriba. Dado que cada término $\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge ... \wedge \sigma^{h_p}$ es un producto de $p > n$ vectores y $dim\mathbf{L} = n$, existen repeticiones en el conjunto de vectores $\{\sigma^{h_1}, ..., \sigma^{h_p}\}$, luego por la propiedad (ii) del producto exterior podemos afirmar que

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge ... \wedge \sigma^{h_p} = 0.$$

Por lo tanto

$$\lambda = \sum_H a_H \sigma^H = 0,$$

de lo anterior concluimos

$$\bigwedge^p \mathbf{L} = 0 \qquad \text{si } p > n.$$

1.2 Determinantes.

Sea A un operador de $\mathbf{L}$ en sí mismo. Definimos una función $g = g_A$ de n variables sobre $\mathbf{L}$ como sigue:

$$g_A : \prod^n \mathbf{L} \to \bigwedge^n \mathbf{L},$$

$$g_A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n,$$

donde $\prod^n \mathbf{L}$ denota el producto cartesiano. De las propiedades del producto exterior se sigue que g es una función multilineal y alternante. Usando g podemos construir una funcional lineal $f = f_A$,

$$f_A : \bigwedge^n \mathbf{L} \to \bigwedge^n \mathbf{L},$$

$$f_A(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) = g_A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n.$$

Como $dim \bigwedge^n \mathbf{L}$ es uno, entonces f_A actua sobre $\bigwedge^n \mathbf{L}$ como la multiplicación por un escalar. Denotaremos a este escalar por $|A|$, de aquí que

$$A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n = |A|\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n.$$

Teorema 1.1 *Sea A una matriz de $n \times n$, entonces $det(A) = |A|$, donde*

$$A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n = |A|\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n.$$

Demostración.

Sea $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ una base de $\mathbf{L}$. Supongamos que $\alpha_i = \sum a_{ij}\sigma^j, \{a_{ij}\}$ es una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n &= \sum a_{1j}\sigma^j \wedge .... \wedge \sum a_{nj}\sigma^j \\
&= (\epsilon_{i_1 i_2 ... i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n})\sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^n \\
&= |a_{ij}|\sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^n
\end{aligned}$$

donde $(\epsilon_{i_1 i_2 ... i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n})$ es el determinante de la matriz $\{a_{ij}\}$, y $\epsilon_{i_1 ... i_n}$ es el tensor de Levi-Civita de orden n [1].
Si tenemos la representación matricial A de una transformación lineal con respecto a una base $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$, se cumple

$$A\sigma^i = \sum a^i_j \sigma^j$$

y

$$A\sigma^1 \wedge ... \wedge A\sigma^n = |a^i_j|\sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^n, \qquad |A| = |a^i_j|.$$

■

1.3 Producto Exterior.

El espacio $\bigwedge^p \mathbf{L}$ de p-vectores ha sido construido mediante un proceso multiplicativo llamado "multiplicación exterior".

Definición 1.5 *Sean μ un $p-$vector y ν un $q-$vector, definimos el* ***producto exterior*** *de μ con ν mediante la siguiente transformación*

$$\begin{aligned}
\wedge \quad &: \quad (\bigwedge^p \mathbf{L}) \times (\bigwedge^q \mathbf{L}) \rightarrow \bigwedge^{p+q} \mathbf{L}, \\
\mu \wedge \nu = (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \quad &\wedge \quad (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2 *La operación $\wedge$ satisface las siguientes propiedades:*
1) $\wedge$ es distributiva.
2) $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$, Ley de la asociación.
3) $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$.

Demostración.

[1] Para más información ver [4], Pag 14

Sean λ en $\bigwedge^p \mathbf{L}$, μ en $\bigwedge^q \mathbf{L}$ y ν en $\bigwedge^s \mathbf{L}$, donde:

$$\lambda = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p, \qquad \mu = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q, \qquad \nu = \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_s.$$

1) La primer propiedad es consecuencia directa del producto exterior definido anteriormente.

$$2) \qquad \begin{aligned} \lambda \wedge (\mu \wedge \nu) &= (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge ((\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \wedge (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_s)) \\ &= (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q \wedge (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_s)) \\ &= \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_s \\ &= ((\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q)) \wedge (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_s) \\ &= (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu \end{aligned}$$

3) Por inducción sobre q.
Para $q = 1$,

$$\begin{aligned} \mu \wedge \lambda &= \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \\ &= (-1)^1 \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p \\ &= (-1)^2 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \\ &= (-1)^p \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \\ &= (-1)^p \lambda \wedge \mu. \end{aligned}$$

Supongamos que el resultado se cumple para $q = k$, y probémoslo para $q = k + 1$.

$$\begin{aligned} \mu \wedge \lambda &= (\beta_1 \wedge ...\beta_{k+1}) \wedge (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \\ &= (\beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{k+1})) \wedge (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \\ &= \beta_1 \wedge ((\beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{k+1}) \wedge (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)) \\ &= (-1)^{kp} \beta_1 \wedge ((\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{k+1})) \\ &= (-1)^{kp} \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_2 \wedge ... \wedge \beta_q) \\ &= (-1)^{kp} (-1)^p (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \\ &= (-1)^{p(k+1)} \lambda \wedge \mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$.

■

Ejemplo 1.1

Tomemos a $\mathbf{L}$ como el espacio de las diferenciales dx, dy, dz. Denotemos a $dx \wedge dy$ simplemente como $dxdy$. Entonces
$(Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Edx + Fdy + Gdz)$

$$\begin{aligned} &= Adx(Edx + Fdy + Gdz) + Bdy(Edx + Fdy + Gdz) + Cdz(Edx + Fdy + Gdz) \\ &= AFdxdy + AGdxdz + BEdydx + BGdydz + CEdzdx + CFdzdy \\ &= (BG - CF)dydz + (CE - AG)dzdx + (AF - BE)dxdy \end{aligned}$$

Lo último se asemeja con el producto cruz de vectores ordinarios.

Ejemplo 1.2

Supongamos que tenemos las siguientes funciones:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

Luego

$$\int\int_R A(x,y)dxdy = \int\int_{R'} A(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

donde

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Si $x = y$,

$$dxdx = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = 0,$$

pues el determinante tiene dos filas iguales.

También se cumple

$$dxdy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -dydx.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} dxdx &= 0 \\ dxdy &= -dydx \end{aligned}$$

en concordancia con las propiedades del producto exterior.

1.4 Transformaciones Lineales.

Sean M y N dos espacios vectoriales con

$$\dim M = m, \qquad \dim N = n.$$

Supongamos que $\{\sigma^1, ..., \sigma^m\}$ es una base para M y $\{\tau^1, ..., \tau^n\}$ es una base para N.

Sea A es una transformación lineal

$$A : M \to N.$$

El mapeo

$$(\alpha_1, ...\alpha_p) \rightarrowtail A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p, \qquad p \in \{1, ..., n\}$$

envía

$$\prod^p M \to \bigwedge^p N.$$

Este mapeo es una función multilineal alternante e induce una transformación lineal, $\bigwedge^p A$, llamada la ***p-ésima potencia exterior de*** A.

$$\bigwedge^p A : \bigwedge^p M \to \bigwedge^p N.$$

$$(\bigwedge^p A)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p.$$

Teorema 1.3 *Sean* $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ *tres espacios vectoriales y* A, B *dos transformaciones lineales tales que*

$$A : M \to N,$$
$$B : L \to M,$$
$$AB : L \to N.$$

Entonces

$$\bigwedge^p (AB) = (\bigwedge^p A)(\bigwedge^p B).$$

Demostración.

Si $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)$ está en $\bigwedge^p \mathbf{L}$, entonces

$$\begin{aligned} \bigwedge^p (AB)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) &= (AB\alpha_1) \wedge ... \wedge (AB\alpha_p) \\ &= A(B\alpha_1) \wedge ... \wedge A(B\alpha_p) \\ &= (\bigwedge^p A)[(B\alpha_1) \wedge ... \wedge (B\alpha_p)] \\ &= [(\bigwedge^p A)(\bigwedge^p B)](\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigwedge^p (AB) = (\bigwedge^p A)(\bigwedge^p B)$.

∎

Teorema 1.4 *Sea $A : M \to N$ una transformación lineal. Supongamos que ω está en $\bigwedge^p \mathbf{M}$ y η está en $\bigwedge^q \mathbf{M}$. Entonces*

$$(\bigwedge^{p+q} A)(\omega \wedge \eta) = (\bigwedge^{p} A)(\omega) \wedge (\bigwedge^{q} A)(\eta).$$

Demostración.

Basta hacer la demostración para elementos monomiales. Sea $\omega = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$, $\eta = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q$. Luego

$$\begin{aligned}
\bigwedge^{p+q} A(\omega \wedge \eta) &= (\bigwedge^{p+q} A)(\alpha_1 \wedge ...\alpha_p \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \\
&= A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p \wedge A\beta_1 \wedge ... \wedge A\beta_q \\
&= (A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p) \wedge (A\beta_1 \wedge ... \wedge A\beta_q) \\
&= (\bigwedge^{p} A)(\omega) \wedge (\bigwedge^{q} A)(\eta).
\end{aligned}$$

■

1.5 Espacios con producto interno.

Definición 1.6 *Sea $\mathbf{L}$ un espacio vectorial, decimos que $\mathbf{L}$ tiene un **producto interno** si existe una función $(\ ) : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbb{R}$ la cual satisface lo siguiente*
(i) $(\cdot, \cdot)$ es bilineal.
(ii) Simetría $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.
(iii) No degeneración. Es decir, si α es tal que $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in \mathbf{L}$, entonces $\alpha = 0$.

Teorema 1.5 *La condición (i) de la definición anterior es equivalente a lo siguiente: Si $\sigma^1, ..., \sigma^n$ es una base de $\mathbf{L}$, entonces*

$$|(\sigma^i, \sigma^j)| \neq 0.$$

Demostración.

El determinante de arriba se hace cero solo si existe una solución no trivial $(a_1, ..., a_n)$ para el sistema homogéneo

$$\sum a_i(\sigma^i, \sigma^j) = 0$$

lo anterior es equivalente a:

$$(\sum a_i\sigma^i, \sigma^j) = 0.$$

Luego $\alpha = \sum a_i\sigma^i$ satisface que $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in \mathbf{L}$, puesto que si $\beta = c_1\sigma^1 + ... + c_n\sigma^n$, entonces

$$\begin{aligned}(\sum a_i\sigma^i, \beta) &= (\sum a_i\sigma^i, \sum c_j\sigma^j) \\ &= \sum c_j(\sum a_i\sigma^i, \sigma^j) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego, por la propiedad (iii) de la definición $\alpha = 0$, y como $\{\sigma^i\}$ es una base para $\mathbf{L}$, entonces

$$a_1 = ... = a_n = 0.$$

Por lo tanto $|(\sigma^i, \sigma^j)| \neq 0$.

■

Definición 1.7 *Una **base ortonormal** de* $\mathbf{L}$ *consiste de una base* $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ *tal que*

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij},$$

donde $\delta^{ij} = 0$ *si* $i \neq j$, $\delta^{ii} = 1$.

Si en la definición anterior hay r signos positivos y s signos negativos, entonces $r + s = n$, y $t = r - s$ es la signatura del producto interior.

Definición 1.8 *Sea* $\mathbf{M}$ *un subespacio de* $\mathbf{L}$, *decimos que el subespacio* $\mathbf{N}$ *de* $\mathbf{L}$ *es el **complemento ortogonal** de* $\mathbf{M}$ *si para todo elemento* β *de* $\mathbf{N}$, $(\alpha, \beta) = 0$ *para todo* α *en* $\mathbf{M}$.

Teorema 1.6 *Todo espacio vectorial* $\mathbf{L}$ *de dimensión* n *con producto interno tiene una base ortonormal.*

Demostración.

Si dim $\mathbf{L} > 0$, entoces existe un vector $\sigma \neq 0$ en $\mathbf{L}$ tal que $(\sigma, \sigma) \neq 0$, pues de lo contrario $(\alpha, \alpha) = 0$ para todo α, entonces

$$\begin{aligned}0 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &= 2(\alpha, \beta) \qquad (1.1)\end{aligned}$$

lo cual implica que $(\alpha, \beta) = 0$ para todo α, β en $\mathbf{L}$, y esto implica, por la propiedad de no degeneración, que $\alpha = \beta = 0$ para todo α, β, contradiciendo que dim $\mathbf{L} > 0$. Supongamos ahora que $\{\sigma^1, ..., \sigma^r\}$ es un conjunto maximal de vectores en $\mathbf{L}$ que satisfacen

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij}.$$

Los vectores $\{\sigma^1, ..., \sigma^r\}$ son linealmente independientes, pues si $\sum a_i\sigma^i = 0$ entonces

$$0 = (\sum a_i\sigma^i, \sigma^j) = \sum a_i(\sigma^i, \sigma^j) = \pm a_j\delta^{ij} = \pm a_j$$

luego $a_j = 0$ para $j = 1, ..., r$, por lo tanto el conjunto $\{\sigma^1, ..., \sigma^r\}$ es linealmente independiente.

Sea $\mathbf{M}$ el espacio generado por $\{\sigma^1, ..., \sigma^r\}$, entonces dim $M = r < n$. Si $\mathbf{N}$ es el complemento ortogonal de $\mathbf{M}$, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$, es decir

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{N},$$
$$\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{0\},$$

y dim $\mathbf{N} = n - r$.

Restringiendo el producto interno de $\mathbf{L}$ a $\mathbf{N}$, se tiene que $\mathbf{N}$ es un espacio vectorial con producto interno. En efecto, las propiedades de linealidad y simetría del producto interno de $\mathbf{N}$ se heredan del producto interno de $\mathbf{L}$. Probemos la no degeneración en $\mathbf{N}$.

Sea β un vector en $\mathbf{N}$ tal que

$$(\gamma, \beta) = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathbf{N}$. Como $\mathbf{N}$ es el complemento ortogonal de $\mathbf{M}$, $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{M}$, de aquí que $(\gamma, \beta) = 0$ para todo $\gamma \in \mathbf{L}$. Así $\beta = 0$, luego $\mathbf{N}$ es un espacio vectorial con producto interno.

Como dim $\mathbf{M} < n$, entonces dim $\mathbf{N} \geq 1$, luego existe un α en $\mathbf{N}$ tal que $(\alpha, \alpha) \neq 0$. Definimos el vector $\sigma^{r+1} = \alpha/|(\alpha, \alpha)|^{1/2}$. El conjunto $\{\sigma^1, ..., \sigma^{r+1}\}$ satisface

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij}.$$

En efecto, para $i, j = 1, ..., r$

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij}$$

$$(\sigma^i, \sigma^{r+1}) = (\sigma^i, \frac{\alpha}{|(\alpha, \alpha)|^{1/2}}) = \frac{1}{|(\alpha, \alpha)|^{1/2}}(\sigma^i, \alpha).$$

y como $\sigma^i \in \mathbf{M}$, $\alpha \in \mathbf{N}$

$$(\sigma^i, \sigma^{r+1}) = 0, \qquad i = 1, ..., r.$$

Falta probar que $(\sigma^{r+1}, \sigma^{r+1}) = \pm 1$.

$$(\sigma^{r+1}, \sigma^{r+1}) = \frac{1}{|(\alpha, \alpha)|}(\alpha, \alpha) = \pm 1.$$

Así $(\sigma^i, \sigma^j) = \pm 1$ para $i, j = 1, ..., r + 1$. Lo que contradice el supuesto de maximalidad del conjunto $\{\sigma^1, ..., \sigma^r\}$, luego dim $\mathbf{M} = n$.

Por lo tanto $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ es una base ortonormal para $\mathbf{L}$.

■

Teorema 1.7 *Sea f un funcional lineal sobre* $\mathbf{L}$, *entonces existe un único vector β en* $\mathbf{L}$ *tal que*

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta).$$

Demostración.

Sea $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ una base ortonomal de $\mathbf{L}$, y tomemos a $b_i = f(\sigma^i)$. Definamos a

$$\beta = \sum \pm b_j \sigma^j = \sum (\sigma^j, \sigma^j) b_j \sigma^j,$$

luego

$$(\sigma^i, \beta) = \sum_j (\sigma^j, \sigma^j) b_j (\sigma^i, \sigma^j) = b_i = f(\sigma^i),$$

de aquí se obtiene el resultado ya que f es un funcional lineal y $(\cdot, \cdot)$ es no degenerado.

■

1.5.1 Producto interno de p-vectores.

Definición 1.9 *El producto interno del espacio $\bigwedge^p \mathbf{L}$ se define mediante el siguiente determinante*

$$(\lambda, \mu) = |(\alpha_i, \beta_i)|, \tag{1.2}$$

donde $\lambda = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$, $\mu = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_p$.

Nótese que (1.2) define una función escalar sobre $\bigwedge^p \mathbf{L} \times \bigwedge^p \mathbf{L}$ la cual es lineal en cada variable. Además, $(\mu, \lambda) = (\lambda, \mu)$ ya que el determinante es invariante bajo transposición de matrices.

La no degeneración de (1.2) es mas fácil verla calculándola respecto a una base ortonormal $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ de $\mathbf{L}$, ya que σ^H, $\{h_1 < h_2 < ... < h_p\}$, forman una base de $\bigwedge^p \mathbf{L}$, y como

$$(\sigma^H, \sigma^K) = |(\sigma^{h_i}, \sigma^{k_j})|, \tag{1.3}$$

entonces si $H \neq K$, (1.3) es igual a cero debido a que el determinante tiene una fila (y también una columna) de ceros. En el caso de que $H = K$ todos los elementos se anulan, excepto los de la diagonal, los cuales son ± 1. Por lo cual (1.3) es igual a

$$(\sigma^H, \sigma^K) = \pm \delta^{H,K}.$$

Por lo tanto σ^H es una base ortonormal de $\bigwedge^p \mathbf{L}$.

Proposición 1.5 *Si $\{\sigma^1, ..., \sigma^n\}$ es base ortonormal de $\mathbf{L}$, entonces $\{\sigma^H\}$, $H = \{h_1 < ... < h_p\}$ es base ortonormal de $\bigwedge^p \mathbf{L}$.*

En el caso de que $\sigma = \sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^n$, σ es una base ortonormal de $\bigwedge^n \mathbf{L}$ y cumple que

$$(\sigma, \sigma) = (\sigma^1, \sigma^1) ... (\sigma^n, \sigma^n) = (-1)^{(n-t)/2} \tag{1.4}$$

donde t es la signatura de $\mathbf{L}$.

1.6 El operador estrella de Hodge.

Consideraremos solamente una orientación fija para el espacio $\mathbf{L}$; es decir, tomaremos una base de $\mathbf{L}$, y solo consideraremos otras bases que pueden ser expresadas en términos de esta por una matriz de cambio de base con determinante positivo.

Obsérvese que la orientación de $\mathbf{L}$ va a determinar y definir una base ortonormal σ de $\bigwedge^n \mathbf{L}$.

Construyamos el operador estrella de Hodge. Para ello fijemos λ en $\bigwedge^p \mathbf{L}$; definimos la funcional lineal

$$f_\lambda : \bigwedge^{n-p} \mathbf{L} \to \bigwedge^{n} \mathbf{L},$$
$$\mu \rightarrowtail \lambda \wedge \mu,$$

podemos escribir a $f_\lambda(\mu)\sigma = \lambda \wedge \mu$.

Por el teorema 1.7 existe un único vector ${}_*\lambda$ en $\bigwedge^{n-p}\mathbf{L}$ tal que $f_\lambda(\alpha) = (\alpha, {}_*\lambda)$, o bien

$$\lambda \wedge \mu = ({}_*\lambda, \mu)\sigma. \tag{1.5}$$

Definición 1.10 *Definimos el* ***operador estrella (*) de Hodge*** *de la siguiente manera*

$$* : \bigwedge^{p} \mathbf{L} \to \bigwedge^{n-p} \mathbf{L},$$
$$*(\lambda) = {}_* \lambda.$$

El operador de Hodge es lineal debido a la linealidad del producto interno.

Sea $\{\sigma^1, ...\sigma^n\}$ una base ortonormal de $\mathbf{L}$, $\lambda = \sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^p$ y K un conjunto de $n-p$ índices ordenados.

Por (1.5)

$$\lambda \wedge \sigma^K = ({}_*\lambda, \sigma^K)\sigma \tag{1.6}$$

el lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a cero excepto cuando $K = \{p+1, ..., n\}$. En caso de que esto ocurra se debe satisfacer

$${}_*\lambda = c[\sigma^{p+1} \wedge ... \wedge \sigma^n] = c\sigma^K \tag{1.7}$$

donde c es una constante, luego de (1.6) y (1.7)

$$\sigma = \sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^p \wedge \sigma^{p+1} \wedge ... \wedge \sigma^n = \lambda \wedge \sigma^K = c(\sigma^K, \sigma^K)\sigma,$$

así

$$1 = c(\sigma^K, \sigma^K),$$

de aquí que

$$c = (\sigma^K, \sigma^K) = \pm 1.$$

Por lo cual

$$_*\lambda = c\sigma^K = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K.$$

Ahora como $\lambda = \sigma^H$ donde $H = \{1, ..., p\}$ entonces

$$_*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K. \tag{1.8}$$

A partir de esto ya podemos obtener $_*\lambda$ para cualquier λ en $\bigwedge^p \mathbf{L}$, ya que λ es combinación lineal de $\sigma^1 \wedge ... \wedge \sigma^p$ y $*(,\cdot,)$ es una funcional lineal.
Por el teorema 1.2, $\sigma^K \wedge \sigma^H = (-1)^{p(n-p)}\sigma^H \wedge \sigma^K$, luego por (1.5) y el mismo razonamiento que se hizo en (1.7) se tiene que

$$(-1)^{p(n-p)}\sigma = \sigma^K \wedge \sigma^H = ({_*\sigma^K}, \sigma^H)\sigma = c'(\sigma^H, \sigma^H)\sigma, \qquad \text{con } {_*\sigma^K} = c'\sigma^H$$

luego

$$(-1)^{p(n-p)} = c'(\sigma^H, \sigma^H),$$

así

$$c' = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H),$$

por lo tanto

$$_*\sigma^K = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H.$$

Además como $*(\cdot)$ es lineal

$$\begin{aligned} {_*({_*\sigma^H})} &= {_*((\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K)} \\ &= (\sigma^K, \sigma^K){_*\sigma^K} \\ &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma^K, \sigma^K)(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H \\ &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma, \sigma)\sigma^H \qquad (1.9) \\ &= (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\sigma^H. \qquad (1.10) \end{aligned}$$

donde t es la signatura de $\mathbf{L}$. Las ecuaciones (1.9) y (1.10) se obtienen por (1.4).

Dado que esta construcción se hizo para cualquier elemento de la base de $\bigwedge^p \mathbf{L}$ y el mapeo $*(\cdot)$ es lineal, se sigue que, si α es un elemento de $\bigwedge^p \mathbf{L}$, entonces

$$_*({_*\alpha}) = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\alpha$$

A partir de estos resultados podemos obtener la siguiente

Proposición 1.6 *Si α, β son elementos de $\bigwedge^p \mathbf{L}$, entonces*

$$\alpha \wedge {_*\beta} = \beta \wedge {_*\alpha} = (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma.$$

Demostración

Sean $\alpha, \beta \in \bigwedge^p \mathbf{L}$

$$\begin{aligned} \alpha \wedge_* \beta &= ({}_*\alpha, {}_*\beta)\sigma \\ &= ({}_*\beta, {}_*\alpha)\sigma \\ &= \beta \wedge_* \alpha \\ &= (-1)^{p(n-p)} {}_*\alpha \wedge \beta \qquad (1.11) \\ &= (-1)^{p(n-p)}({}_{**}\alpha, \beta)\sigma \\ &= (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma, \end{aligned}$$

la igualdad (1.11) se obtiene por el teorema 1.2.

■

Ejemplo 1.3

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la métrica ordinaria. Si f y g son funciones continuas ó con primeras derivadas parciales, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Por otro lado si $\sigma^H = dx$, entonces $\sigma^K = dydz$ y por (1.8) se tiene

$$\begin{aligned} {}_*dx &= (dydz, dydz)dydz \\ &= \begin{vmatrix} (dy,dy) & (dy,dz) \\ (dz,dy) & (dz,dz) \end{vmatrix} dydz \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dydz \\ &= dydz, \end{aligned}$$

de manera análoga se demuestra que ${}_*dy = dzdx$ y ${}_*dz = dxdy$. Luego

$$\begin{aligned} {}_*df &= \frac{\partial f}{\partial x}{}_*dx + \frac{\partial f}{\partial y}{}_*dy + \frac{\partial f}{\partial z}{}_*dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dydz + \frac{\partial f}{\partial y}dzdx + \frac{\partial f}{\partial z}dxdy, \end{aligned}$$

de aquí que

$$df \wedge_* dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dydz.$$

Capítulo 2

La derivada exterior.

2.1 Formas Diferenciales.

Definición 2.1 *Las 1-formas en un elemento P de $\mathbb{R}^n$ son expresiones de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i, \qquad a_i \text{ constantes}$$

Geométricamente, la 1-forma dx en $\mathbb{R}^3$ y la 1-forma $3dx + 5dy$ en $\mathbb{R}^2$ se muestran en la figura 2.1 (a) y (b), repectivamente.

Las 1-formas forman un espacio vectorial de dimensión n. Éste espacio va a ser denotado por $\mathbf{L} = \mathbf{L}_P$

Definición 2.2 *Las p-formas en P son los elementos de*

$$\bigwedge^p \mathbf{L} = \bigwedge^p \mathbf{L}_P$$

es decir, expresiones de la forma

$$\sum a_H dx^{h_1} ... dx^{h_p}, \qquad a_H \text{ constantes}$$

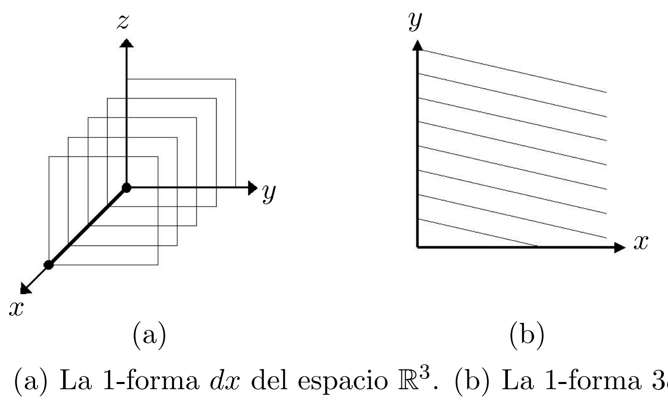


Figura 2.1: (a) La 1-forma dx del espacio $\mathbb{R}^3$. (b) La 1-forma $3dx + 5dy$.

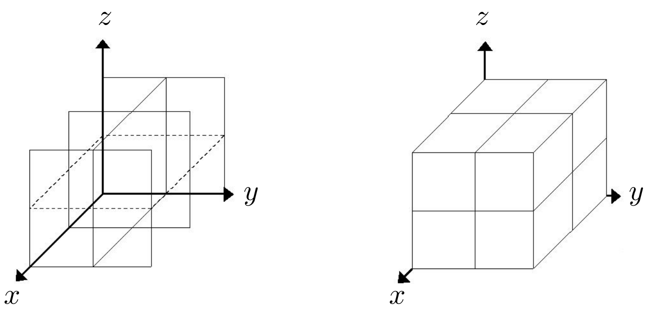


Figura 2.2: (a) La 2-forma dxdy en el espacio $\mathbb{R}^3$. (b) La 3-forma dxdydz en el espacio $\mathbb{R}^3$.

En la figura 2.2 (a) y (b) se muestran otros ejemplos de p-formas.

Nótese que en la ecuación anterior se omitió la notación $\wedge$, así que las diferenciales dx^i son multiplicadas por la multiplicación exterior.

Definición 2.3 *Sea* $\mathbf{U}$ *un dominio en* $\mathbb{R}^n$*. Una p-forma sobre* $\mathbf{U}$ *es obtenida escogiendo para cada punto* P *de* $\mathbf{U}$ *una p-forma en el punto, y haciendo esto de manera suave. Es decir, la p-forma* ω *tiene la representación*

$$\omega = \sum a_H(x^1, ..., x^n) dx^H,$$

donde las funciones $a_H(\mathbf{x})$ *son funciones suaves sobre* $\mathbf{U}$*.*

El algebra exterior se aplica en cada punto de $\mathbf{U}$, luego, si ω es una p-forma y η es una q-forma, definidas sobre $\mathbf{U}$, entonces $\omega \wedge \eta$ es una $(p+q)$-forma sobre $\mathbf{U}$ (Nótese que si $p + q > n$, entonces $\omega \wedge \eta = 0$).

Si

$$\omega = \sum a_H dx^H, \qquad \eta = \sum b_K dx^K,$$

entonces

$$\omega \wedge \eta = \sum a_H b_K dx^H dx^K;$$

de aquí que los coeficientes de $\omega \wedge \eta$ son nuevamente, funciones suaves.

Ejemplo 2.1

Sea la 1-forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

el cual podemos identificar con el vector $(P, Q, R) \in \mathbb{R}^3$.

2.2 Derivada Exterior.

Definición 2.4 *Denotaremos por* $\mathbf{F}^p(\mathbf{U})$ *a la totalidad de las p-formas en* $\mathbf{U}$.

Con esta notación, $\mathbf{F}^0(\mathbf{U})$ es el conjunto de todas las funciones suaves en $\mathbf{U}$.

Construyamos ahora una operación d que tome una p-forma ω y la lleve a una $(p+1)$-forma, a la cual llamaremos **derivada exterior** y será denotada por dw.

Teorema 2.1 *Existe un único operador* d *de* $\mathbf{F}^p(\mathbf{U})$ *a* $\mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{U})$ *que cumple que*

a). $d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta$.
b). $d(\lambda\wedge\mu) = d\lambda\wedge\mu + (-1)^{deg\lambda}\lambda\wedge d\mu$.
c). Para cada ω, $d(d\omega) = 0$.
d). Para cada función f

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

donde $deg\lambda = p$, *si* λ *es una* $p - forma$.

Demostración.

Para probar que existe el operador d, definamos a

$$d\omega = \sum \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H,$$

donde $\omega = \sum a_H dx^H$ y probemos que las propiedades pedidas se satisfacen.
(a). Si $\omega, \eta \in \mathbf{F}^p(\mathbf{U})$

$$\begin{aligned} d(\omega+\eta) &= d\left(\sum a_H dx^H + \sum a_K dx^K\right) \\ &= \left(\sum \frac{\partial}{\partial x^i} a_H dx^i dx^H + \sum \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i a_K dx^K\right) \\ &= d\omega + d\eta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

(b). Probemos el resultado para monomios, supongamos que $\lambda = adx^H$, $\mu = bdx^K$, entonces

$$\begin{aligned} d(\lambda\wedge\mu) &= d(ab\, dx^H dx^K) \\ &= \sum \frac{\partial(ab)}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} b dx^i dx^H dx^K + \sum a \frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right) \wedge (bdx^K) + (-1)^{(deg)\lambda} \sum (adx^H) \wedge \left(\frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^K\right) \qquad (2.2) \\ &= (d\lambda)\wedge\mu + (-1)^{(deg)\lambda)}\lambda\wedge d\mu. \end{aligned}$$

(2.2) se obtiene porque

$$dx^i dx^H = (-1)^{(deg\lambda)} dx^H dx^i,$$

Para el caso general se utiliza lo que se acaba de probar y (a).
(c). Nuevamente probemos el resultado solamente para un monomio, sea $\omega = adx^H$, luego

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_i \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} 2\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^j dx^i dx^H \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j dx^H - \sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^j dx^i dx^H\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j dx^H - \sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} dx^i dx^j dx^H\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j dx^i dx^H \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d). Es claro de la definición.

Si existiera otro operador d' que satisface las condiciones requeridas, entonces

$$d'(d'x^{h_1}...d'x^{h_p}) = 0.$$

En efecto, hagamos la demostración por inducción sobre p. El caso $p = 1$ se obtiene de (c), supongamos que se cumple para $p-1$, entonces por (b)

$$\begin{aligned}
d'[x^{h_1}(d'x^{h_2}...d'x^{h_p})] &= d'x^{h_1}...d'x^{h_p} + (-1)^{degx^{h_1}} x^{h_1} d'(d'x^{h_2}...d'x^{h_p}) \\
&= d'x^{h_1}...d'x^{h_p},
\end{aligned}$$

luego por (c)

$$d'(d'x^{h_1}...d'x^{h_p}) = d'\{d'[x^{h_1}(d'x^{h_2}...d'x^{h_p})]\} = 0.$$

Ahora si ω es una p-forma

$$\omega = \sum a_H(\mathbf{x})dx^H$$

entonces

$$\begin{aligned}
d'\omega &= \sum d'(a_H dx^H) \qquad (2.3) \\
&= \sum (d'a_H)dx^H \qquad (2.4) \\
&= \sum \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H,
\end{aligned}$$

(2.3) se obtiene de (a), (2.4) por (b) y de lo que se acaba de demostrar ya que $d'(d'x^H) = 0$. Por lo cual ((a)-(d)) determina completamente a $d'\omega$.
Por lo tanto $d = d'$.

■

La condición (c) del teorema anterior también se conoce como el ***lema de Poincaré***.

Ejemplo 2.2

En $\mathbb{R}^3$ para una 0-forma f se tiene que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

luego del ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
dw &= d(Pdx + Qdy + Rdz) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz) \wedge (Pdx + Qdy + Rdz) \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}dydx + \frac{\partial P}{\partial z}dzdx + \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy + \frac{\partial Q}{\partial z}dzdy + \frac{\partial R}{\partial x}dxdz + \frac{\partial R}{\partial y}dydz \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy
\end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz.$$

2.3 Mapeos

Sea $\mathbf{U}$ un dominio en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{V}$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ y ϕ un mapeo suave de $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$.

$$\phi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}.$$

Denotemos también por $(x^1, ..., x^m)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^m$, por $(y^1, ..., y^n)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y

$$y^i = y^i(x^1, ..., x^m)$$

entonces un punto con coordenadas $\mathbf{x}$ es transformado por ϕ a un punto con coordenadas $\mathbf{y}$. Las funciones $y^i(\mathbf{x})$ son suaves.

Definición 2.5 *Sean* $\mathbf{U}$ *un dominio en* $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{V}$ *un dominio en* $\mathbb{R}^n$ *y* g *una función con valores en los reales sobre* $\mathbf{V}$. *Se define la función*

$$\phi^* : \mathbf{F}^0(\mathbf{V}) \to \mathbf{F}^0(\mathbf{U}),$$

por

$$\phi^* g = g \circ \phi.$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi^* g = g\circ\phi"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ahora definamos el mapeo ϕ^* que lleva las p-formas sobre $\mathbf{V}$ a las p-formas de $\mathbf{U}$.

$$\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{V}) \to \mathbf{F}^p(\mathbf{U})$$

El caso $p = 0$ ya se trató arriba, para $p = 1$, la idea básica va a ser la substitución de dy^i por

$$\sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j,$$

es decir, si $\omega = \sum a_i(\mathbf{y})dy^i$ es una 1-forma sobre $\mathbf{V}$, entonces

$$\phi^*\omega = \sum a_i(\mathbf{y}(\mathbf{x}))\frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j,$$

así obtenemos el nuevo mapeo $\phi^* : \mathbf{F}^1(\mathbf{V}) \to \mathbf{F}^1(\mathbf{U})$.

Utilizando el mismo método de la sección de Transformaciones Lineales del capítulo anterior, podemos extender este mapeo a productos interiores y así obtener

$$\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{V}) \to \mathbf{F}^p(\mathbf{U}),$$

$$\phi^*(dy^1...dy^p) = \phi^*(dy^1)\phi^*(dy^2)...\phi^*(dy^p).$$

Teorema 2.2 *El mapeo ϕ^* cumple con las siguientes propiedades*

a) $\phi^*(\omega + \eta) = \phi^*\omega + \phi^*\eta$.
b) $\phi^*(\lambda \wedge \mu) = (\phi^*\lambda) \wedge (\phi^*\mu)$.
c) Si ω es una p-forma sobre V

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega).$$

d) Si $\phi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $\psi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, entonces

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

Demostración.

(a) Para $p = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \phi^*(dy^i + dy^j) &= \sum \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k \right) \\ &= \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k + \sum \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k \\ &= \phi^* dy^i + \phi^* dy^j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy^H + dy^K) &= \left(\sum \frac{\partial y^{h_1}}{\partial x^i} dx^i\right) ... \left(\sum \frac{\partial y^{h_p}}{\partial x^i} dx^i\right) + \left(\sum \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^i} dx^i\right) ... \left(\sum \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^i} dx^i\right) \\
&= \sum \frac{\partial y^{h_1}}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial y^{h_p}}{\partial x^{i_p}} dx^{i_1} ... dx^{i_p} + \sum \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}} dx^{i_1} ... dx^{i_p} \\
&= \phi^* dy^H + \phi^* dy^K.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\phi^*(\lambda \wedge \mu) &= \phi^*(dy^H \wedge dy^K) \\
&= \left(\sum \frac{\partial y^{h_1}}{\partial x^i} dx^i\right) ... \left(\sum \frac{\partial y^{h_p}}{\partial x^i} dx^i\right) \wedge \left(\sum \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^i} dx^i\right) ... \left(\sum \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^i} dx^i\right) \\
&= \phi^*(dy^H) \wedge \phi^*(dy^K) \\
&= (\phi * \lambda) \wedge (\phi^* \mu).
\end{aligned}$$

(c) Hagamos esta demostración por inducción, sea g una 0-forma, entonces

$$dg = \sum \frac{\partial g}{\partial y^j} dy^j, \qquad \phi^* g = g \circ \phi = g(\mathbf{y}(\mathbf{x})).$$

luego

$$\phi^*(dg) = \sum \frac{\partial g(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i = \sum \frac{\partial \phi^*(g)}{\partial x^i} dx^i = d\phi^* g.$$

Supongamos que el resultado es cierto para $(p-1)$-formas , y sea ω una p-forma, $\omega = g dy^H = g d\eta$, donde $\eta = y^{h_1} dy^{h_2} ... dy^{h_p}$ es una $(p-1)$-forma. Entonces por el teorema 2.1,

$$d\eta = dy^{h_1} \wedge (dy^{h_2} ... dy^{h_p}) + (-1)^{(deg\, y^{h_1})} y^{h_1} \wedge d(dy^{h_2} ... dy^{h_p}) = dy^{h_1} dy^{h_2} ... dy^{h_p}.$$

Por otro lado

$$\phi^* \omega = \phi^*(g d\eta) = (\phi^* g)(\phi^* d\eta) = (\phi^* g) \wedge (\phi^* d\eta) = (\phi^* g) \wedge (d\phi^* \eta).$$

luego

$$\begin{aligned}
d(\phi^* \omega) &= d(\phi^* g) \wedge d(\phi^* \eta) + (-1)^{deg\, \phi^* g} \phi^* g \wedge d(d\phi^* \eta) \\
&= d(\phi^* g) \wedge d(\phi^* \eta), \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

y

$$d\omega = dg \wedge d\eta + (-1)^{deg\, g} g \wedge d(d\eta) = dg \wedge d\eta, \qquad (2.6)$$

así de (2.6), (b), la hipótesis de inducción y (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi^* d\omega &= \phi^*(dg \wedge d\eta) \\
&= (\phi^* dg) \wedge (\phi^* d\eta) \\
&= (d\phi^* g) \wedge (d\phi^* \eta) \\
&= d\phi^* \omega.
\end{aligned}$$

(d). Hagamos esta demostración por inducción. Para una 0-forma h sobre $\mathbf{W}$

$$\begin{aligned}
[(\psi\circ\phi)^*(h)](x) &= [h\circ(\psi\circ\phi)](x)\\
&= h[\psi(\phi(x))]\\
&= [\psi^*(h)](\phi(x))\\
&= [\phi^*\{\psi^*(h)\}](x)\\
&= [(\phi^*\circ\psi^*)(h)](x).
\end{aligned}$$

luego $(\psi\circ\phi)^*=\phi^*\circ\psi^*$. Ahora supongamos el resultado cierto para $(p-1)$-formas, sea ω una p-forma, $\omega=dz^{h_1}...dz^{h_p}$

$$\begin{aligned}
[(\psi\circ\phi)^*\omega] &= [(\psi\circ\phi)^*dz^{h_1}...dz^{h_p}]\\
&= [(\psi\circ\phi)^*dz^{h_1}]\wedge[(\psi\circ\phi)^*dz^{h_2}...dz^{h_p}]\\
&= d[(\psi\circ\phi)^*z^{h_1}]\wedge[(\phi^*\circ\psi^*)dz^{h_2}...dz^{h_p}]\\
&= d[(\phi^*\circ\psi^*)z^{h_1}]\wedge[(\phi^*\circ\psi^*)dz^{h_2}...dz^{h_p}]\\
&= [(\phi^*\circ\psi^*)dz^{h_1}]\wedge[(\phi^*\circ\psi^*)dz^{h_2}...dz^{h_p}]\\
&= [(\phi^*\circ\psi^*)(dz^{h_1}...dz^{h_p})]\\
&= [(\phi^*\circ\psi^*)\omega].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\psi\circ\phi)^*=\phi^*\circ\psi^*$.

$\blacksquare$

Por la propiedad (c) del teorema 2.2 podemos afirmar que la derivada exterior de una forma diferencial es independiente del cambio de coordenadas.

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy^1dy^2) &= (\phi^*dy^1)(\phi^*dy^2)\\
&= \left(\sum\frac{\partial y^1}{\partial x^i}dx^i\right)\left(\sum\frac{\partial y^2}{\partial x^j}dx^j\right)\\
&= \sum\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}dx^idx^j\\
&= \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}-\frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)dx^idx^j\\
&= \frac{1}{2}\sum\frac{\partial(y^1,y^2)}{\partial(xi,x^j)}dx^idx^j.
\end{aligned}$$

Con el teorema 2.2 se tiene que uno puede substituir directamente las expresiones para las coordenadas z^k de $\mathbf{W}$ en términos de x^i de $\mathbf{U}$, o indirectamente, primero a través de las coordenadas y^i de $\mathbf{V}$, el resultado que se obtiene es el mismo; o lo que es lo mismo, los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi \circ \phi"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\psi"] \\
 & \mathbf{W}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}^p(\mathbf{U}) & \mathbf{F}^p(\mathbf{V}) \arrow[l, "\phi^*"'] \\
 & \mathbf{F}^p(\mathbf{W}) \arrow[u, "\psi^*"'] \arrow[ul, "(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*"]
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 2.4

Consideremos el mapeo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por $\phi(t) = (x, y)$ donde $x = t^2$, $y = t^3$. Si $\omega = xdy$ es una 1-forma sobre $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\phi^*\omega = (t^2)\frac{\partial y}{\partial t}dt = 3t^4 dt.$$

Ahora sea el mapeo $\psi : (x, y) \to t = x - y$, luego

$$\psi^*(dt) = \frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy = dx - dy,$$

Supongamos que $m < n$ y $\phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{V}) \to \mathbf{F}^p(\mathbf{U})$. Si ω es una p-forma con $p > m$, entonces $\phi^*(\omega) = 0$.

Proposición 2.1 *Sean* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *dominios en* $\mathbb{R}^n$ *y* ϕ *una función uno a uno de* $\mathbf{U}$ *sobre* $\mathbf{V}$ *tal que* ϕ *y* $\psi = \phi^{-1}$ *son suaves. Entonces* ϕ^* *es un mapeo uno a uno de* $\mathbf{F}^p(\mathbf{V})$ *sobre* $\mathbf{F}^p(\mathbf{U})$ *y su inverso es* ψ^**.*

Demostración.

Por el teorema 2.2 tenemos que

$$id_{\mathbf{F}^p(\mathbf{U})} = (id_{\mathbf{U}})^* = (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*,$$

y además

$$id_{\mathbf{F}^p(\mathbf{V})} = (id_{\mathbf{V}})^* = (\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*,$$

Por lo cual ϕ^* es uno a uno, sobre y $(\phi^*)^{-1} = \psi^*$.

■

2.4 El inverso del lema de Poincaré.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que si w es una p-forma ($p \geq 1$) y $dw = 0$, entonces, bajo ciertas condiciones, podemos asegurar la existencia de una $(p-1)$-forma α tal que $w = d\alpha$.

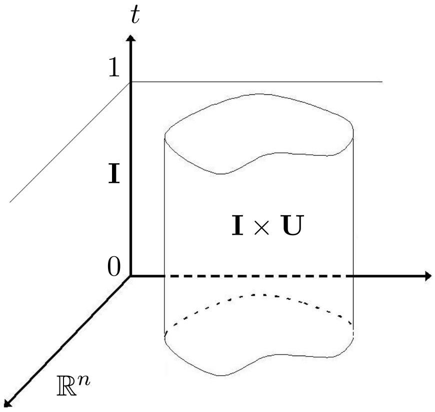


Figura 2.3:

El resultado es válido solamente en dominios que no son muy complicados topológicamente.

Hagamos la demostración basándonos en una construcción cilíndrica. Sea $\mathbf{U}$ un dominio abierto en $\mathbb{R}^n$ y $[0,1]$ el intervalo cerrado unitario en el eje t, como se muestra en la figura 2.3. El espacio

$$\mathbf{I}\times\mathbf{U}$$

es llamado el Espacio Cilindro y consiste de todos los pares (t,x), donde $0\leq t\leq 1$ y $x\in U$.

Definamos dos mapeos con los cuales podamos identificar al dominio $\mathbf{U}$ con la tapa y la base del cilindro, llamémosles

$$j_1:\mathbf{U}\to\mathbf{I}\times\mathbf{U}\qquad j_1(\mathbf{x})=(1,\mathbf{x}),$$

$$j_0:\mathbf{U}\to\mathbf{I}\times\mathbf{U}\qquad j_0(\mathbf{x})=(0,\mathbf{x}),$$

de esta forma

$$j_i^*:\mathbf{F}^p(\mathbf{I}\times\mathbf{U})\to\mathbf{F}^p(\mathbf{U})\qquad i=0,1.$$

Por ejemplo, para formar j_1^*w con w una forma en $\mathbf{I}\times\mathbf{U}$, simplemente sustituimos t por 1 en w, y dt por cero.

La operación

$$\mathbf{K}:\mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{I}\times\mathbf{U})\to\mathbf{F}^p(\mathbf{U});$$

es definida sobre las $(p+1)$-formas de un solo término por las fórmulas

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(a(t,\mathbf{x})dx^H) &= 0,\\ \mathbf{K}(a(t,\mathbf{x})dtdx^J) &= \left(\int_0^1 a(t,\mathbf{x})dt\right)dx^J,\end{aligned}$$

y para una $(p+1)$-forma w en general, se suman los resultados de los términos evaluados en $\mathbf{K}$.

Proposición 2.2 *Si w es una $(p+1)$-forma en $(\mathbf{I}\times\mathbf{U})$, entonces*

$$\mathbf{K}(dw)+d(\mathbf{K}w)=j_1^*w-j_0^*w. \tag{2.7}$$

Demostración.

Es suficiente probar esto para monomios.
Caso 1. $w = a(t, \mathbf{x})dx^H$.
Por definición $\mathbf{K}w = 0$, luego $d\mathbf{K}w = 0$, además

$$dw = \frac{\partial a}{\partial t} dt dx^H + [\text{terminos libres de t}],$$

$$\mathbf{K}dw = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx^H = (a(1,x) - a(0,x))dx^H.$$

Por otro lado $j_1^* w = a(1, \mathbf{x})dx^H$, $j_0^* w = a(0, \mathbf{x})dx^H$, luego

$$\mathbf{K}dw = (j_1^* w - j_0^* w).$$

Caso 2. $w = a(t, \mathbf{x})dt dx^J$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}dw &= \mathbf{K}\left[\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dt dx^J \right] \\
&= \mathbf{K}\left[-\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dt dx^i dx^J \right] \\
&= -\sum \mathbf{K}\left[\frac{\partial a}{\partial x^i} dt dx dx^J \right] \\
&= -\sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \right) dx^i dx^J,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{K}w &= d\left[\left(\int_0^1 a(t,x)dt \right) dx^J \right] \\
&= \sum \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\int_0^1 a(t,x)dt \right] dx^i dx^J \\
&= \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \right) dx^i dx^J.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{K}(dw) + d(\mathbf{K}w) = j_1^* w - j_0^* w = 0.$$

■

Definición 2.6 *Un dominio* $\mathbf{U}$ *es deformable a un punto* P *(Homotópico al punto* P*) si existe un mapeo*

$$\phi : \mathbf{I} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U},$$

tal que

$$\begin{aligned}
\phi(1, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}, \\
\phi(0, \mathbf{x}) &= P.
\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera pueden ser interpretadas en términos de los j_i

$$\phi \circ j_1 = i, \qquad\qquad \phi \circ j_0 = P.$$

Ejemplo 2.5

El espacio $\mathbb{R}^n$ puede ser deformado al origen, ya que la función $\phi : I \times \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(t,x) = tx$ cumple que $\phi(1,x) = x$ y $\phi(0,x) = 0$.

Para una $(p+1)$-forma w sobre un dominio deformable a un punto $\mathbf{U}$ se tiene que

$$j_1^*[\phi^* w] = w, \qquad\qquad j_0^*[\phi^* w] = 0.$$

Ahora estamos en condiciones de probar el Inverso del Lema de Poincaré.

Teorema 2.3 *Sea* $\mathbf{U}$ *un dominio en* $\mathbb{R}^n$ *el cual puede ser deformado a un punto* P*. Sea* w *una* $(p+1)-forma$ *sobre* $\mathbf{U}$ *tal que* $dw = 0$*. Entonces existe una* $p-forma$ α *sobre* $\mathbf{U}$ *tal que*

$$w = d\alpha.$$

Demostración.

Sustituyendo $\phi^* w$ en (2.7) ya que $\phi^* w \in \mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{I} \times \mathbf{U})$

$$\mathbf{K}[d(\phi^* w)] + d[\mathbf{K}(\phi^* w)] = j_1^*(\phi^* w) - j_0^*(\phi^* w) = w,$$

pero $d(\phi^* w) = \phi^*(dw) = 0$, entonces

$$w = \mathbf{K}[d(\phi^* w)] + d[\mathbf{K}(\phi^* w)] = 0 + d[\mathbf{K}(\phi^* w)] = d[\mathbf{K}(\phi^* w)].$$

Tomando a $\alpha = \mathbf{K}(\phi^* w)$ se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

Nótese que si β es cualquier otra solución, entonces $d\beta = w = d\alpha$. Si $p \geq 1$, entonces por el inverso del Lema de Poincaré, existe una $(p-1)$-forma λ tal que $\alpha - \beta = d\lambda$. En otras palabras, dada una solución α, la solución general esta expresada como $\alpha - d\lambda$ donde λ es arbitrario. En el caso $p = 0$, α y β son funciones y como $d(\alpha - \beta) = 0$, entonces $\alpha - \beta$ es constante.

Ejemplo 2.6

Ilustremos el método en el caso de que $p = 2$, $n = 3$. Para ello tomemos una 2-forma

$$\omega = Adydz + Bdzdx + Cdxdy,$$

en $\mathbb{R}^3$ tal que $d\omega = 0$, es decir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Como $\mathbb{R}^3$ puede ser deformado al origen, por el teorema 2.3 existe una 1-forma α tal que $\omega = d\alpha$, donde $\alpha = \mathbf{K}\phi^*\omega$. Ahora

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega &= \phi^*(Adydz) + \phi^*(Bdzdx) + \phi^*(Cdxdy) \\
&= A(tx, ty, tz)d(ty)d(tz) + ... \\
&= A(tx, ty, tz)(tdy + ydt)(tdz + zdt) + ... \\
&= A(tx, ty, tz)(ytdtdz - ztdtdz) + ... + \text{términos libres de } dt.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbf{K}(\phi^*\omega) \\
&= \left(\int_0^1 A(tx, ty, tz)tdt\right)(ydz - zdy) \\
&\quad + \left(\int_0^1 B(tx, ty, tz)tdt\right)(zdx - xdz) \\
&\quad + \left(\int_0^1 C(tx, ty, tz)tdt\right)(xdy - ydx).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Aplicaciones a la geometría y electromagnetismo.

3.1 Sistemas móviles en $\mathbb{R}^3$

En esta sección consideraremos en cada punto de $\mathbf{R}^3$ un sistema ortonormal con orientación positiva, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, como se muestra en la figura 3.1, y supondremos que los campos vectoriales $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ son funciones suaves.

Sea $\mathbf{x}$ un punto de $\mathbb{R}^3$, $d\mathbf{x}$ es un vector con 1-formas como coeficientes, por ejemplo, $d\mathbf{x} = (dx, dy, dz) = dx\ \hat{\imath} + dy\ \hat{\jmath} + dz\ \hat{\mathrm{k}}$. Expresaremos a $d\mathbf{x}$ en términos de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, y $\mathbf{e}_3$ en el punto $\mathbf{x}$, el cual podemos escribir como

$$d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3,$$

donde σ_i son 1-formas, $i = 1, 2, 3$. En particular se puede escribir

$$d\mathbf{e}_i = w_{i1}\mathbf{e}_1 + w_{i2}\mathbf{e}_2 + w_{i3}\mathbf{e}_3, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

donde w_{ij} son 1-formas.

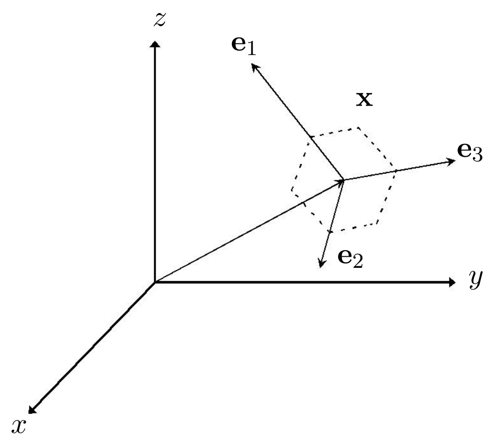


Figura 3.1:

Proposición 3.1 *Las 1-formas w_{ij} cumplen que*

$$w_{ik} + w_{ki} = 0$$

Demostración.

Dado que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik}$. Por el teorema 2.1

$$0 = d(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k) = (d\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i(d\mathbf{e}_k).$$

ya que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ es una constante.

Pero

$$\begin{aligned} (d\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i(d\mathbf{e}_k) &= (w_{i1}\mathbf{e}_1 + w_{i2}\mathbf{e}_2 + w_{i3}\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_k \\ &\quad +\mathbf{e}_i(w_{k1}\mathbf{e}_1 + w_{k2}\mathbf{e}_2 + w_{k3}\mathbf{e}_3) \\ &= w_{ik} + w_{ki} \end{aligned}$$

así

$$0 = w_{ik} + w_{ki}.$$

■

De la proposición anterior se tiene que en particular $w_{ii} = 0$.

Definición 3.1 *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz, entonces aplicar d a A es aplicar el operador d a cada uno de los elementos de A, es decir $d(A) = d(\{a_{i,j}\}) = \{d(a_{ij})\}$.*

Sean

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \qquad \Omega = [w_{ij}].$$

luego con esta notación obtenemos las siguientes ecuaciones

$$d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e}, \qquad d\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e}, \qquad \Omega + \Omega^t = 0. \tag{3.2}$$

que son conocidas como **ecuaciones de estructura de Cartan**. La última igualdad se obtiene por la proposición 3.1.

Proposición 3.2 $d\sigma = \sigma\Omega, \qquad d\Omega = \Omega^2.$

Demostración.

Por el teorema 2.1, $d(d\mathbf{x}) = 0$ y como $d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e}$

$$0 = d(d\mathbf{x}) = d(\sigma\mathbf{e}) = (d\sigma)\mathbf{e} - \sigma(d\mathbf{e}),$$

así

$$0 = (d\sigma)\mathbf{e} - \sigma(\Omega\mathbf{e}) = (d\sigma - \sigma\Omega)\mathbf{e},$$

ya que $d\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e}$. Dado que los $\mathbf{e}_i$ son linealmente independientes

$$d\sigma - \sigma\Omega = 0,$$

o bien $d\sigma = \sigma\Omega$. Por otro lado $d(d\mathbf{e}) = 0$, así

$$0 = d(\Omega\mathbf{e}) = (d\Omega)\mathbf{e} - \Omega(d\mathbf{e}) = (d\Omega - \Omega^2)\mathbf{e},$$

por lo cual $d\Omega = \Omega^2$.

$\blacksquare$

Las ecuaciones de la proposición 3.2 son llamadas **condiciones de integrabilidad**.

Observación. La 3-forma $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$ es el elemento volúmen $dx\,dy\,dz$ en $\mathbb{R}^3$, es decir

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = dx\,dy\,dz$$

Esto se probará mas adelante.

Ejemplo 3.1

Coordenadas esféricas. Tomemos los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en la dirección r, θ, ϕ respectivamente. Dado que

$$\mathbf{x} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta),$$

entonces

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)dr \\ &\quad +(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta)d\theta \\ &\quad +(-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0)d\phi \\ &= (dr)\mathbf{e}_1 + (rd\theta)\mathbf{e}_2 + (r\sin\theta d\phi)\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos\alpha\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \\ \mathbf{e}_3 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0). \end{aligned}$$

Y como debe ocurir que $d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e}$, entonces

$$\sigma_1 = dr, \qquad \sigma_2 = rd\theta, \qquad \sigma_3 = r\sin\theta d\phi.$$

Ahora si derivamos las $\mathbf{e}_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)d\theta + (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)d\phi \\ &= \mathbf{e}_2 d\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_2 &= (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)d\theta + (-\cos\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0)d\phi \\ &= (-d\theta)\mathbf{e}_1 + (\cos\theta d\phi)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Y dado que $\Omega = \{w_{ij}\}$ debe de cumplir que $\Omega + \Omega^t = 0$, donde las w_{ij} cumplen (3.1), entonces

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\theta & \sin\theta d\phi \\ -d\theta & 0 & \cos\theta d\phi \\ -\sin\theta d\phi & -\cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

El elemento de volúmen es

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi.$$

3.2 Relación entre ortogonalidad y matrices antisimétricas.

Definición 3.2 *Una matriz B es ortogonal si su transpuesta es igual a su inversa, $B^t = B^{-1}$ o bien $B^t B = BB^t = I$.*

Sean $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ los vectores unitarios en las direcciones x, y, z respectivamente y $\mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)^t$. Entonces

$$\mathbf{e}_i = \sum b_{ij}\mathbf{i}_j, \qquad \mathbf{e} = B\mathbf{i}, \qquad B = [b_{ij}], \tag{3.3}$$

además

$$I = \mathbf{e}\mathbf{e}^t = B\mathbf{i}(\mathbf{i}^t B^t) = BI^t B^t = BB^t$$

por lo cual B es ortogonal.

Proposición 3.3 *$dx\, dy\, dz = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$.*

Demostración.

Se tiene por (3.2) y (3.3)

$$d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)\mathbf{i} = \sigma\mathbf{e} = \sigma B\mathbf{i},$$

así

$$(dx, dy, dz) = \sigma B,$$

dentro de la demostración del teorema 1.1 se observó

$$dx \wedge dy \wedge dz = |B|\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3.$$

Y dado que $B^t B = I$, $|B^2| = 1$, o bien $|B| = \pm 1$, y como estamos con sistemas con orientación positiva, $|B| = 1$. Luego

$$dx \wedge dy \wedge dz = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3.$$

■

Ahora como $\mathbf{e} = B\mathbf{i}$, entonces $d\mathbf{e} = d(B\mathbf{i}) = (dB)\mathbf{i} + B(d\mathbf{i}) = (dB)B^{-1}\mathbf{e}$ ya que $B(d\mathbf{i}) = 0$. Pero $d\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e}$ entonces

$$\Omega = (dB)B^{-1}.$$

Teorema 3.1 *Si A es una matriz ortogonal con entradas que son funciones de algún número de variables, entonces*

$$(dA)A^{-1},$$

es una matriz antisimétrica de uno-formas.

Demostración.

Como A es ortogonal se tiene que

$$A^tA = I = AA^t,$$

derivando la igualdad anterior

$$(dA)^tA + A^tdA = 0 = (dA)A^t + A(dA)^t,$$

y como $A^t = A^{-1}$ se tiene por el lado derecho de la igualdad anterior que

$$((dA)A^{-1})^t + dAA^{-1} = A(dA)^t + dAA^t = 0,$$

por lo cual

$$dA(A^{-1}) = -((dA)A^{-1})^t.$$

así $(dA)A^{-1}$ es antisimétrica con entradas que son 1-formas.

■

Teorema 3.2 *Sea A una matriz de funciones definida sobre un dominio $\mathbf{U}$. Supongamos que A es ortogonal en un punto de $\mathbf{U}$ y que*

$$dA = \Lambda A,$$

donde Λ es una matriz antisimétrica de 1-formas. Entonces A es ortogonal sobre todo $\mathbf{U}$.

Demostración.

Sea $C = A^tA$, luego

$$\begin{aligned} dC &= (dA)^tA + A^t(dA) = (\Lambda A)^tA + A^t(\Lambda A) \\ &= (A^t\Lambda^t)A + A^t(\Lambda A) = (-A^t\Lambda)A + A^t(\Lambda A) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de aquí que C es una matriz constante sobre $\mathbf{U}$. Como A es ortogonal en un punto entonces $C = I$ en ese punto, de aquí que $C = I$ en todo $\mathbf{U}$. Por lo tanto A es ortogonal.

■

3.3 El espacio móvil de seis dimensiones.

Consideremos un sistema móvil ortonormal, como ya fué descrito en la sección 3.1 del Capítulo 3, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ en todos los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, la dimensión de este espacio es 6, pues tenemos 3 grados de libertad al elegir al punto $\mathbf{x}$, dos grados de libertad al elegir al vector $\mathbf{E}_1$, un grado de libertad para el vector $\mathbf{E}_2$ y el vector $\mathbf{E}_3$ queda determinado. Escribamos

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{pmatrix},$$

y por (3.3) sabemos que

$$\mathbf{E} = A\mathbf{e},$$

donde A es una matriz ortogonal variable y $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x})$ es un sistema movil definido.

Entonces por las ecuaciones de estructura de Cartan (3.2)

$$d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e} = \sigma A^{-1}\mathbf{E},$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= (dA)\mathbf{e} + Ad\mathbf{e} \\ &= (dA)\mathbf{e} + A\mathbf{\Omega}\mathbf{e} \\ &= [dA + A\mathbf{\Omega}]\mathbf{e} \\ &= [dA + A\mathbf{\Omega}]A^{-1}\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de notación

$$\tilde{\sigma} = \sigma A^{-1}, \qquad \tilde{\mathbf{\Omega}} = (dA)A^{-1} + A\mathbf{\Omega}A^{-1}. \tag{3.4}$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 = d(d\mathbf{x}) &= d(\sigma A^{-1})\mathbf{E} - \sigma A^{-1}[dA + A\mathbf{\Omega}]A^{-1}\mathbf{E} \\ &= [d(\sigma A^{-1}) - \sigma A^{-1}[dA + A\mathbf{\Omega}]A^{-1}]\mathbf{E} \\ &= [d\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}[dA + A\mathbf{\Omega}]A^{-1}]\mathbf{E} = [d\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\mathbf{\Omega}]\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Entonces

$$d\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{\Omega}}.$$

donde $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ es una matriz que tiene como entradas 1-formas.
De manera análoga

$$0 = d(d\mathbf{E}) = d(\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{E}) = (d\tilde{\mathbf{\Omega}})\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{\Omega}}d\mathbf{E} = (d\tilde{\mathbf{\Omega}})\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{E} = [d\tilde{\mathbf{\Omega}} - d\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{2}}]\mathbf{E}.$$

Lo anterior implica

$$d\tilde{\mathbf{\Omega}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}^2.$$

Además

$$d\mathbf{E}_i = \omega_{i1}\mathbf{E}_1 + \omega_{i2}\mathbf{E}_2 + \omega_{i3}\mathbf{E}_3,$$

y como $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k = \delta^{ik}$ entonces, $0 = d(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k) = d\mathbf{E}_i\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_i d\mathbf{E}_k = \omega_{ik} + \omega ki$.

En particular $\omega_{ii} = 0$. Luego

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = [\omega_{ik}],$$

y

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = -\tilde{\mathbf{\Omega}}^t.$$

Por lo tanto las ecuaciones de estructura para el sitema móvil de 6 dimensiones son

$$\left\{ \begin{array}{c} d\mathbf{x} = \tilde{\sigma}\mathbf{E} \\ d\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{\Omega}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}^t = 0 \end{array} \right\},$$

y las condiciones de integrabilidad son

$$\left\{ \begin{array}{c} d\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{\Omega}} \\ d\tilde{\mathbf{\Omega}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \end{array} \right\}.$$

3.4 El Laplaciano, coordenadas ortogonales.

Como

$$\mathbf{e} = B\mathbf{i}, \qquad d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e} = (dx, dy, dz)\mathbf{i},$$

se tiene que $\sigma B\mathbf{i} = \sigma\mathbf{e} = (dx, dy, dz)\mathbf{i}$, luego $\sigma B = (dx, dy, dz)$. Dado que B es ortonormal, $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base ortonormal de 1-formas en cada punto.

Sea f una función sobre $\mathbb{R}^3$, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

aplicando el operador estrella de Hodge

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x}dydz + \frac{\partial f}{\partial y}dzdx + \frac{\partial f}{\partial z}dxdy,$$

luego

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz = (\Delta f)dxdydz$$

El laplaciano Δf de f es conocido tan pronto como la 3-forma $d*df$ es conocida, para esto el laplaciano ha sido multiplicado por el elemento de volúmen $dxdydz$.

Expresando a df en términos de σ

$$df = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

luego

$$*df = a_1\sigma_2\sigma_3 + a_2\sigma_3\sigma_1 + a_3\sigma_1\sigma_2$$

$$d*df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Definición 3.3 *Un sistema de coordenadas u, v, w es un dominio de $\mathbb{R}^3$ es llamado **ortogonal** si los vectores*

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \quad , \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

son mutuamente perpendiculares. Es decir, que para algunas funciones apropiadas λ, μ, ν los vectores

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

forman un sistema móvil ortonormal, es decir, forman un sistema móvil que tiene una base ortonormal.

El sistema de la definición de arriba se puede suponer que tiene orientación derecha.

Proposición 3.4 *Sea u, v, w un sistema ortonormal de coordenadas en un dominio de $\mathbb{R}^3$, entonces*

$$\sigma_1 = \lambda du, \quad \sigma_2 = \mu dv \quad \sigma_3 = \nu dw$$

Demostración.

Se tiene que

$$d\mathbf{x} = du\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + dv\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} + dw\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = (\lambda du)\mathbf{e}_1 + (\mu dv)\mathbf{e}_2 + (\nu dw)\mathbf{e}_3$$

tomando a

$$\sigma_1 = \lambda du, \quad \sigma_2 = \mu dv \quad \sigma_3 = \nu dw$$

se construye un sistema móvil ortonormal de 1-formas.

■

Teorema 3.3 *Sea u, v, w un sistema ortonormal de coordenadas en un dominio de $\mathbb{R}^3$ entonces para cualquier función f sobre $\mathbb{R}^3$*

$$\Delta f = \frac{1}{\mu\nu\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}f_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}f_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}f_w\right)\right]$$

Demostración.

Sea f una función sobre $\mathbb{R}^3$, entonces

$$df = f_u du + f_v dv + f_w dw = (f_u/\lambda)\sigma_1 + (f_v/\mu)\sigma_2 + (f_w/\nu)\sigma_3$$

luego

$$\begin{aligned} *df &= (f_u/\lambda)\sigma_2\sigma_3 + (f_v/\mu)\sigma_3\sigma_1 + (f_w/\nu)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\mu\nu f_u/\lambda)dvdw + (\lambda\nu f_v/\mu)dwdu + (\lambda\mu f_w/\nu)dudv \end{aligned} \tag{3.5}$$

así

$$\begin{aligned} d*df &= \frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu f_u/\lambda)dudvdw + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu f_v/\mu)dudvdw + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu f_w/\nu)dudvdw \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}f_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}f_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}f_w\right)\right] dudvdw \end{aligned} \tag{3.6}$$

y como

$$d*df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \lambda\mu\nu\Delta f dudvdw \tag{3.7}$$

entonces de (3.6) y (3.7) se tiene que el laplaciano es

$$\Delta f = \frac{1}{\mu\nu\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}f_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}f_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}f_w\right)\right]$$

■

Ejemplo 3.2

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Recordemos que un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se expresa en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Del ejemplo 3.1, tenemos que

$$\sigma_1 = dr, \qquad \sigma_2 = rd\theta, \qquad \sigma_3 = r\sin\theta d\phi$$

Luego por el teorema 3.3, tomando a $\lambda = 1$, $\mu = r$, $\nu = r\sin\theta$, se tiene que

$$\Delta f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right]$$

3.5 Superficies.

En esta sección nos enfocaremos al estudio de una superficie suave Σ en el espacio $\mathbb{R}^3$. Para lograr este propósito elegiremos un sistema móvil $\mathbf{e}$ en cada punto $\mathbf{x}$ de Σ, de tal manera que el vector $\mathbf{e}_3$ sea normal a la superficie. Así, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_1$ pertenecen al espacio tangente a la superficie en cada punto.

Si $\mathbf{x}$ pertenece a Σ, entonces $d\mathbf{x}$ existe y pertenece al plano tangente a la superficie en $\mathbf{x}$. Como $\mathbf{e}_3$ es normal a la superficie en $\mathbf{x}$, entonces si $d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3$, entonces $\sigma_3 = 0$, luego

$$d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2.$$

La matriz Ω de (3.2), puede ser expresada como

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \varpi & -\omega_1 \\ -\varpi & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de estructura e integrabilidad se reducen a

$$d\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \varpi & -\omega_1 \\ -\varpi & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi\mathbf{e}_2 - \omega_1\mathbf{e}_3 \\ -\varpi\mathbf{e}_1 - \omega_2\mathbf{e}_3 \\ \omega_1\mathbf{e}_1 - \omega_2\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

$$d\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varpi & -\omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \varpi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varpi\sigma_2 & \varpi\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sigma_1 & d\sigma_2 & d\sigma_3 \end{pmatrix}.$$

La 2-forma $\sigma_1\sigma_2$ representa el elemento de área sobre Σ.

Como $\mathbf{e}$ es un sistema ortonormal en el punto $\mathbf{x}$ de Σ, entonces

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1,$$

de aquí que

$$0 = d(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \cdot d(\mathbf{e}_3) + d(\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = 2(\mathbf{e}_3 \cdot d(\mathbf{e}_3)).$$

Por lo anterior concluimos que $\mathbf{e}_3 \cdot d(\mathbf{e}_3) = 0$, luego $d(\mathbf{e}_3)$ es ortogonal a $\mathbf{e}_3$, y puede ser escrito como una combinación lineal de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$$d(\mathbf{e}_3) = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2,$$

donde ω_1, ω_2 son 1-formas.

Por la proposición 1.2 sabemos que existe solamente una 2-forma linealmente independiente en el espacio $\bigwedge^2\mathbb{R}$, entonces

$$0 = \omega_1\omega_2 = K\sigma_1\sigma_2. \tag{3.8}$$

además $\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1$ es una 2-forma sobre Σ, luego

$$\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1 = 2H\sigma_1\sigma_2. \tag{3.9}$$

Definición 3.4 *Los números K y H mencionados en (3.8) y (3.9) se definen como la* ***Curvatura Gaussiana*** *y la* ***Curvatura Media*** *del punto x en Σ.*

Por las condiciones de integrabilidad, sabemos que se cumple la relación

$$\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2 = 0,$$

como ω_1 y ω_2 pueden ser vistas como combinaciones lineales de σ_1 y σ_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = p\sigma_1 + q\sigma_2 \\ \omega_1 = s\sigma_1 + r\sigma_2 \end{array} \right\}, \tag{3.10}$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2 \\ &= p{\sigma_1}^2 + q\sigma_1\sigma_2 - r\sigma_1\sigma_2 + r{\sigma_2}^2 \\ &= (p-r)\sigma_1\sigma_2, \end{aligned}$$

de lo anterior se deduce que $q = r$.

Teorema 3.4 *La curvatura Gaussiana y la Curvatura media pueden ser calculadas mediante las siguientes expresiones.*

$$H = (p+r)/2, \qquad K = pr - q^2,$$

donde p,q y r son los coeficientes obtenidos en (3.10)

Demostración.

A partir de (3.10) facilmente podemos ver

$$\begin{aligned} \sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1 &= q\sigma_1\sigma_1 + r\sigma_1\sigma_2 + p\sigma_1\sigma_2 - q\sigma_2\sigma_2 \\ &= (p+r)\sigma_1\sigma_2 \\ &= 2H\sigma_1\sigma_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_2 &= pq\sigma_1\sigma_1 - q^2\sigma_1\sigma_2 + pr\sigma_1\sigma_2 + qr\sigma_2\sigma_2 \\ &= (pr - q^2)\sigma_1\sigma_2 \\ &= K\sigma_1\sigma_2, \end{aligned}$$

Luego

$$2H = p + r, \qquad K = pr - q^2.$$

■

Definición 3.5 *Las* ***curvaturas principales*** k_1, k_2 *de* Σ *son los valores característicos de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.5 *Sea A la matriz definida arriba, entonces*

$$2H = p + r, \qquad K = pr - q^2.$$

Demostración.

Por resultados de Algebra Lineal sabemos que

$$det(A) = pr - q^2 = k_1k_2,$$
$$tr(A) = p + r = k_1 + k_2.$$

Luego

$$2H = k_1 + k_2 = p + r, \qquad K = pr - q^2,$$

donde $tr(A)$ indica la traza de la matriz A.

■

De las condiciones de integrabilidad, $d\varpi + \omega_1\omega_2 = 0$, entonces haciendo uso de la definición 3.4 tenemos

$$d\varpi + K\omega_1\omega_2 = 0.$$

La última relación nos permite determinar K una vez que se conocen σ_1, σ_2 y ϖ. A su vez, las relaciones

$$d\sigma_1 = \varpi\sigma_2, \qquad d\sigma_2 = -\varpi\sigma_1$$

son suficientes para determinar el valor de ϖ cuando σ_1 y σ_2 son conocidos.

Cuando efectuemos operaciones vectoriales entre vectores, que tienen como coeficientes 1-formas, debemos de tener cuidado con el orden en que se multiplican las 1-formas, pues sabemos que el producto exterior no conmuta.

Hagamos, para observar lo anterior, el producto cruz de dos vectores, con diferenciales como coeficientes.

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} &= (\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2) \times (\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2) \\ &= {\sigma_1}^2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + {\sigma_2}^2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + \sigma_1\sigma_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + \sigma_2\sigma_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pero ${\sigma_i}^2 = 0$ y $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = 0$ para $i = 1, 2$ y también

$$\sigma_2\sigma_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = (-\sigma_1\sigma_2)(-\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \sigma_1\sigma_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Entonces

$$d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} = 2(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3.$$

Luego el elemento vectorial del área es $(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3$.

Si $d\mathbf{x} = (dx, xy, dz)$ entonces

$$d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} = (dx, dy, dz) \times (dx, dy, dz) = 2(dydz, dzdx, dxdy),$$

entonces

$$(dydz, dzdx, dxdy) = (\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3.$$

3.6 Las ecuaciones de campo de Maxwell.

En esta sección trabajaremos la Teoría del Campo Electromagnético, usando las siguientes magnitudes:

$\mathbf{E}$	$=$	Campo Eléctrico.	$\mathbf{H}$	$=$	Campo Magnético.
$\mathbf{B}$	$=$	Inducción Magnética.	$\mathbf{J}$	$=$	Densidad de Corriente Eléctrica
$\mathbf{D}$	$=$	Desplazamiento Dieléctrico.	ρ	$=$	Densidad de carga.

Definición 3.6 *Las ecuaciones básicas de Maxwell, en forma diferencial son*

1. $curl\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. *(Ley de Inducción de Faraday).*
2. $curl\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ *(Ley de Ampere).*
3. $div\mathbf{D} = 4\pi\rho$ *(Ley de Gauss).*
4. $div\mathbf{B} = 0$ *(No existencia del Monopolo Magnético ó Ley de Gauss del Magnetismo).*

donde c es la velocidad de la luz, curl es el rotacional y div la divergencia de un campo vectorial.

Pongamos estas ecuaciones en el lenguaje de Formas Diferenciales. Para ello, sea

$$\begin{aligned}
\alpha &= (E_1dx^1 + E_2dx^2 + E_3dx^3)(cdt) + (B_1dx^2dx^3 + B_2dx^3dx^1 + B_3dx^1dx^2)\\
\beta &= -(H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3)(cdt) + (D_1dx^2dx^3 + D_2dx^3dx^1 + D_3dx^1dx^2)\\
\gamma &= (J_1dx^2dx^3 + J_2dx^3dx^1 + J_3dx^1dx^2)dt - \rho dx^1dx^2dx^3
\end{aligned}$$

Teorema 3.5 *Sean α, β, γ definidas como arriba, entonces las siguientes relaciones son equivalentes*

a)

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta + 4\pi\gamma = 0,$$

b) Las ecuaciones de Maxwell.

Demostración.

Primeramente tenemos que si

$$curl\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.12}$$

entonces

$$\hat{\imath}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\hat{\imath} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\hat{\jmath} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\hat{k},\right)$$

de aquí que

$$\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t}, \tag{3.15}$$

de manera inversa si se cumplen (3.13), (3.14) y (3.15) entonces se puede mostrar (3.12).

Demostremos ahora que (b) implica (a).

$$\begin{aligned} d\alpha &= c\left[\frac{\partial E_1}{\partial x^2}dx^2dx^1dt + \frac{\partial E_1}{\partial x^3}dx^3dx^1dt + \frac{\partial E_2}{\partial x^1}dx^1dx^2dt + \frac{\partial E_2}{\partial x^3}dx^3dx^2dt\right. \\ &\left. + \frac{\partial E_3}{\partial x^1}dx^1dx^3dt + \frac{\partial E_3}{\partial x^2}dx^2dx^3dt\right] + \left[\frac{\partial B_1}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3 + \frac{\partial B_1}{\partial t}dtdx^2dx^3 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial B_2}{\partial x^2}dx^2dx^3dx^1 + \frac{\partial B_2}{\partial t}dtdx^3dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^3}dx^3dx^1dx^2 + \frac{\partial B_3}{\partial t}dtdx^1dx^2\right] \\ &= \left(\frac{\partial B_3}{\partial t} - c\frac{\partial E_1}{\partial x^2} + c\frac{\partial E_2}{\partial x^1}\right)dx^1dx^2dt + \left(-c\frac{\partial E_1}{\partial x^3} + c\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial B_2}{\partial t}\right)dx^1dx^3dt + \\ &+ \left(-c\frac{\partial E_2}{\partial x^3} + c\frac{\partial E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial B_1}{\partial t}\right)dx^2dx^3dt + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3}\right)dx^1dx^2dx^3, \end{aligned} \tag{3.16}$$

luego como estamos suponiendo (b) entonces se cumple (3.12) y que $div\mathbf{B} = 0$, así por lo demostrado arriba $d\alpha = 0$.

De manera análoga, de la definición 3.6 (2. y 3.) se puede demostrar que

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0.$$

Supongamos ahora que se cumple (a), luego como $d\alpha = 0$ por (3.16) se tiene (3.13), (3.14), (3.15) y

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0.$$

de aquí que se cumple (3.12) y que $div\mathbf{B} = 0$.

De manera análoga si se cumple que $d\beta + 4\pi\gamma = 0$ entonces se tiene 2. y 3. de la definición 3.6.

■

Corolario 3.1 *De las ecuaciones de Maxwell se obtiene la* ***Ecuación de Continuidad***

$$div\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Demostración.

Del teorema anterior se tiene que

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0$$

aplicando d a la ecuación anterior se tiene que $d\gamma = 0$ ya que $d(d\beta) = 0$. Así

$$0 = d\gamma = \frac{\partial J_1}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3dt + \frac{\partial J_2}{\partial x^2}dx^2dx^3dx^1dt + \frac{\partial J_3}{\partial x^3}dx^3dx^1dx^2dt - \frac{\partial \rho}{\partial t}dtdx^1dx^2dx^3,$$

luego

$$\left(\frac{\partial J_1}{\partial x^1} + \frac{\partial J_2}{\partial x^2} + \frac{\partial J_3}{\partial x^3} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dx^1dx^2dx^3dt = 0.$$

por lo cual

$$div\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

■

Del teorema 3.5, $d\alpha = 0$, luego por el Lema de Poincaré, aplicado a una region del Espacio-Tiempo Homotópica a un punto, existe una 1-forma λ tal que $d\lambda = \alpha$.

Introduciendo un vector potencial $\mathbf{A}$ y un escalar A_0, se pude escribir

$$\lambda = A_1dx^1 + A_2dx^2 + A_3dx^3 + A_0cdt$$

Proposición 3.6 *De la ecuación $d\lambda = \alpha$ se tiene que*

$$curl\mathbf{A} = \mathbf{B}, \qquad gradA_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}.$$

Demostración.

Como

$$\begin{aligned}
d\lambda \;=\; & \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\right)dx^1dx^3 - \frac{\partial A_1}{\partial t}dx^1dt \\
& + c\frac{\partial A_0}{\partial x^1}dx^1dt + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right)dx^2dx^3 - \frac{\partial A_2}{\partial t}dx^2dt - \frac{\partial A_3}{\partial t}dx^3dt \\
& + c\frac{\partial A_0}{\partial x^2}dx^2dt + c\frac{\partial A_0}{\partial x^3}dx^3dt.
\end{aligned}$$

entonces por la definición de α y la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
curl\mathbf{A} &= \hat{\imath}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) \\
&= \hat{\imath}B_1 + \hat{\jmath}B_2 + \hat{k}B_3 \\
&= \mathbf{B}.
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
gradA_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \hat{\jmath}\frac{\partial A_0}{\partial x^2} + \hat{k}\frac{\partial A_0}{\partial x^3}\right) - \frac{1}{c}\left(\hat{\imath}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \hat{\jmath}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \hat{k}\frac{\partial A_3}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{c}\left\{\left(c\frac{\partial A_0}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\hat{\imath} + \left(c\frac{\partial A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\right)\hat{\jmath} + \left(c\frac{\partial A_0}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial t}\right)\hat{k}\right\} \\
&= \hat{\imath}E_1 + \hat{\jmath}E_2 + \hat{k}E_2 \\
&= \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

■

Definición 3.7 *En un espacio libre de fuentes $\mathbf{J} = 0$ y $\rho = 0$, luego $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$.*

En un espacio libre las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$curl\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad div\mathbf{E} = div\mathbf{D} = 4\pi\rho = 0,$$
$$curl\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad div\mathbf{H} = div\mathbf{B} = 0.$$

Definición 3.8 *El producto interno de Lorentz en* $\mathbb{R}^4$ *es definido como*

$$(\alpha, \beta) = ((a_1, ..., a_4), (b_1, ..., b_4)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - c^2a_4b_4,$$

donde c *es la velocidad de la luz.*

Teorema 3.6 *Las ecuaciones de Maxwell en un espacio libre son*

$$d\alpha = 0 \qquad d * \alpha = 0$$

Demostración.

Introduzcamos la métrica Lorentz en el 4-espacio, donde

$$dx^1, dx^2, dx^3, cdt$$

es una base ortonormal ($(dx^i, dx^j) = \delta^{ij}$, $(dx^i, cdt) = 0$, $(cdt, cdt) = -1$).

Recordando el operador estrella tenemos que

$$\begin{aligned} *(dx^1dx^2) &= (dx^3cdt, dx^3cdt)dx^3(cdt) \\ &= \begin{vmatrix} (dx^3, dx^3) & (dx^3, cdt) \\ (cdt, dx^3) & (cdt, cdt) \end{vmatrix} dx^3cdt \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} dx^3(cdt) \\ &= -dx^3(cdt) \end{aligned}$$

de manera análoga se demuestra que $*(dx^3dx^1) = -dx^2(cdt)$, $*(dx^2dx^3) = -dx^1(cdt)$, $*(dx^1cdt) = dx^2dx^3$, $*(dx^2cdt) = dx^3dx^1$, $*(dx^3cdt) = dx^1dx^2$. Luego

$$\alpha = (E_1dx^1 + E_2dx^2 + E_3dx^3)(cdt) + (H_1dx^2dx^3 + H_2dx^3dx^1 + H_3dx^1dx^2).$$

$$\beta = -(H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3)(cdt) + (E_1dx^2dx^3 + E_2dx^3dx^1 + E_3dx^1dx^2) = *\alpha$$

$$\gamma = 0$$

Por lo tanto del teorema 3.5 se tiene que las ecuaciones de Maxwell es el espacio libre son

$$d\alpha = 0, \qquad d * \alpha = 0.$$

■

Regresemos a la situación general y refinando el análisis por la introducción de las 1-formas:

$$\begin{aligned}
w_1 &= E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \\
w_2 &= B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2 \\
w_3 &= H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3 \\
w_4 &= D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2 \\
w_5 &= J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2
\end{aligned}$$

Estas uno-formas contienen, únicamente, las diferenciales de variables espaciales.

Definición 3.9 *Sea d' la derivada exterior con respecto a las variables espaciales.*

Proposición 3.7 *Las ecuaciones de Maxwell, para las variables espaciales, son*

$$\begin{aligned}
d'w_1 &= -\frac{1}{c}\dot{w}_2 \\
d'w_3 &= \frac{4\pi}{c} w_5 + \frac{1}{c}\dot{w}_4 \\
d'w_2 &= 0 \\
d'w_4 &= 4\pi\rho dx^1 dx^2 dx^3
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_1) = \dot{w}_1 = \dot{E}_1 dx^1 + ...$$

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
d'w_1 &= \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right) dx^3 dx^1 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right) dx^2 dx^3 \\
&= curl\mathbf{E}.
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que

$$d'w_3 = curl\mathbf{H}.$$

además

$$\begin{aligned}
\dot{w}_2 &= \frac{\partial B_1}{\partial t} dx^2 dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial t} dx^3 dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial t} dx^1 dx^2 \\
&= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$\dot{w}_4 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

también

$$\begin{aligned} d'w_2 &= \frac{\partial B_1}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^2}dx^2dx^3dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^3}dx^3dx^1dx^2 \\ &= div\mathbf{B}\ \ dx^1dx^2dx^3. \end{aligned}$$

así por el mismo procedimiento se obtiene que $d'w_4 = div\mathbf{D}\ \ dx^1dx^2dx^3$. Por lo tanto, sustituyendo las igualdades obtenidas en las ecuaciones de Maxwell tenemos lo buscado.

■

Ahora, introducimos el vector de Flujo de Energía de Poynting $\mathbf{S}$ definido por

$$\mathbf{S} = \left(\frac{c}{4\pi}\right)\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\times\mathbf{H} &= (E_1dx^1 + E_2dx^2 + E_3dx^3)\times(H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ E_1dx_1 & E_2dx^2 & E_3dx^3 \\ H_1dx^1 & H_2dx^2 & H_3dx^3 \end{vmatrix} \\ &= (E_2H_3 + E_3H_2)dx^2dx^3 - (E_1H_3 + E_3H_1)dx^1dx^3 + (E_1H_2 + E_2H_1)dx^1dx^2 \\ &= w_1 \wedge w_3. \end{aligned}$$

De aquí que, usando la proposición 3.7, podemos escribir

$$\left(\frac{c}{4\pi}\right) w_1 \wedge w_3 = S_1dx^2dx^3 + S_2dx^3dx^1 + S_3dx^1dx^2. \tag{3.17}$$

Aplicando d' a la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi}d'(w_1\wedge w_3) &= \frac{\partial S_1}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3 + \frac{\partial S_2}{\partial x^2}dx^1dx^2dx^3 + \frac{\partial S_3}{\partial x^3}dx^1dx^2dx^3 \\ &= div\mathbf{S}\, dx^1dx^2dx^3 \end{aligned} \tag{3.18}$$

pero

$$\frac{c}{4\pi}d'(w_1\wedge w_3) = \frac{c}{4\pi}\left(d'w_1\wedge w_3 - w_1\wedge d'w_3\right)$$

sustituyendo el resultado de la proposición 3.7 en la ecuación anterior, tenemos que

$$\frac{c}{4\pi}d'(w_1\wedge w_3) = \left(-\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}\right)dx^1dx^2x^3 \tag{3.19}$$

sustituyendo (3.19) en (3.18) obtenemos el teorema de Poynting

$$\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} + div\mathbf{S} = 0,$$

Si suponemos ahora que $\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, donde κ , la constante dieléctrica y μ, la permeabilidad magnética son constantes en el tiempo. Entonces por el teorema de Poynting

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} + div\mathbf{S} \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \frac{\kappa}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{E}} + div\mathbf{S} \\
&= \frac{2\mu}{8\pi}\left(H_1\frac{\partial H_1}{\partial t} + H_2\frac{\partial H_2}{\partial t} + H_3\frac{\partial H_3}{\partial t}\right) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \\
&\quad + \frac{2\kappa}{8\pi}\left(E_1\frac{\partial E_1}{\partial t} + E_2\frac{\partial E_2}{\partial t} + E_3\frac{\partial E_3}{\partial t}\right) + div\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + div\mathbf{S}
\end{aligned}$$

de aquí que

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = div\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi}(\kappa\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)$$

la cual es la Densidad de Energía del Campo Electromagnético. La cantidad $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ es llamada la actividad termodinámica.

Capítulo 4

Formas en Variedades y el teorema de Stokes.

4.1 Formas diferenciales.

Definición 4.1 *Sea M una variedad* [1]. *Las funciones suaves sobre* $\mathbf{M}$ *también son llamadas 0-formas. El espacio* $\mathbf{F}^0(\mathbf{M})$ *es llamado el espacio de las 0-formas sobre* $\mathbf{M}$.

Definamos ahora la 1-forma en un punto P de $\mathbf{M}$. Debemos tener una expresión

$$\sum a_i dx^i, \qquad a_i \ \textit{constantes}.$$

Para cada sistema de coordenadas locales (x^i) válido en una vecindad $\mathbf{U}$ de P tal que las expresiones

$$\sum a_i dx^i, \qquad \sum b_i dx^i,$$

en P estan relacionadas por

$$\sum b_i \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_P = a_j,$$

la cual es la regla de transformación usual de vectores covariantes del cálculo tensorial. Se puede ver que esto es consistente con el estudio local de la derivada exterior.

A partir de esto se pueden formar sumas de productos exteriores de 1-formas de P, para así poder construir p-formas en P.

Definición 4.2 *Una p-forma sobre* $\mathbf{M}$ *es una asignación suave de una p-forma en cada punto P de* $\mathbf{M}$.

Si $P \in \mathbf{U} \bigcap \mathbf{V}$, donde $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tienen las coordenadas locales (x^i) y (y^i), respectivamente. Si w es una 1-forma definida en P, entonces sobre la vecindad $\mathbf{U}$, w tiene la representación

$$w = \sum a_H(\mathbf{x}) dx^H,$$

[1] Ver apéndice A

donde a_H son funciones suaves sobre $\mathbf{U}$ y $H = \{h_1, ..., h_p\}$.

Sobre $\mathbf{V}$, w se expresa como

$$w = \sum b_K(\mathbf{y}) dy^K,$$

entonces, la relación que hay entre los $b's$ y las $a's$ esta dada por la substitución de $y^i = y^i(\mathbf{x})$ y

$$\sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j,$$

por dy^i.

La multiplicación de dos formas sobre $\mathbf{M}$, $\omega \wedge \eta$ se realiza evaluando un punto en un punto a la vez.

Definición 4.3 *La derivada exterior de una forma sobre* $\mathbf{M}$ *es definida en cada sistema de coordenadas locales.*

Todas las propiedades que satisface la derivada exterior (ver teorema 2.1) en el caso general se siguen cumpliendo ahora.

Proposición 4.1 *Si* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *son dos variedades y* $\phi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *es un mapeo suave, entonces existe un mapeo natural inducido* ϕ^*

$$\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{N}) \to \mathbf{F}^p(\mathbf{M}),$$

el cual cumple

a) $\phi^*(\omega + \eta) = \phi^*\omega + \phi^*\eta$,
b) $\phi^*(\lambda \wedge \mu) = (\phi^*\lambda) \wedge (\phi^*\mu)$,
c) $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Demostración.

La función ϕ^* es definida aplicando la construcción local en un sistema local de coordenadas.

■

La proposición 4.1 se puede expresar por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}^p(\mathbf{M}) \arrow[d, "d"'] & \mathbf{F}^p(\mathbf{N}) \arrow[l, "\phi^*"'] \arrow[d, "d"] \\
\mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{M}) & \mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{N}) \arrow[l, "\phi^*"']
\end{tikzcd}$$

así podemos llegar por dos caminos de $\mathbf{F}^p(\mathbf{N})$ a $\mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{M})$ dandonos el mismo resultado.

Ejemplo 4.1

Sobre la esfera $\mathbf{S}^2$. las funciones x, y, z son 0-formas suaves. Luego dx, dy, dz son 1-formas y $dxdy, dxdz, dydz, ...$ son 2-formas. Sobre la vecindad $\{x > 0\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - y^2 - z^2, \\ dx &= \frac{-ydy - zdz}{x}, \\ dxdy &= \frac{-ydy - zdz}{x} dy = \frac{z}{x} dydz, ... \end{aligned}$$

4.2 Simplejo Euclideano.

Definición 4.4 ***0-simplejo***. *Es un solo punto* (P_0).

1-simplejo. *Es un segmento cerrado de línea recta. Esta determinado por un par de vértices* (P_0, P_1).

2-simplejo. *Es un triángulo cerrado con vértices tomado con algún orden definido. Está completamente determinado por el ordenamiento de los vértices* (P_0, P_1, P_2).

n-simplejo. *Es el casco cerrado convexo* $(P_0, P_1, ..., P_n)$ *de* $(n+1)$ *puntos independientes tomados en un orden definido.*

En el caso de un n-simplejo, el conjunto, geométricamente expandido, consiste de todos los puntos de la forma

$$P = t_0 P_0 + ... + t_n P_n, \qquad t_i \geq 0, \qquad \sum t_i = 1.$$

Definición 4.5 *La frontera* $\partial\mathbf{s}$ *de un simplejo* $\mathbf{s}$ *es la suma formal de simplejos de una dimensión menor con coeficientes enteros*

$$\partial(P_0, P_1, ..., P_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (P_0, P_1, ..., P_{i-1}, P_{i+1}, ..., P_n). \tag{4.1}$$

Con esta definición tenemos que

$$\begin{aligned} \partial(P_0, P_1) &= (P_1) - (P_0), \\ \partial(P_0, P_1, P_2) &= (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1), \\ \partial(P_0, P_1, P_2, P_3) &= (P_1, P_2, P_3) - (P_0, P_2, P_3) + (P_0, P_1, P_3) - (P_0, P_1, P_2). \end{aligned}$$

Definición 4.6 *Una* ***n-cadena*** *es la suma formal*

$$\mathbf{c} = \sum a^i \mathbf{s}_i,$$

donde las a^i *son constantes y las* $\mathbf{s}_i$ *son* n*-simplejos. Su frontera está definida por*

$$\partial\mathbf{c} = \sum a^i (\partial\mathbf{s}_i).$$

Teorema 4.1 *La frontera de la frontera de una n-cadena es cero, es decir* $\partial[\partial\mathbf{c}] = 0$*, donde* $\mathbf{c}$ *es una n-cadena.*

Demostración.

Probemos ésto para simplejos

$$\begin{aligned}
\partial[\partial(P_0, P_1, P_2)] &= \partial(P_1, P_2) - \partial(P_0, P_2) + \partial(P_0, P_1) \\
&= [(P_2) - (P_1)] - [(P_2) - (P_0)] + [(P_1) - (P_0)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial[\partial(P_0, ..., P_3)] &= [(P_2, P_3) - (P_1, P_3) + (P_1, P_2)] - [(P_2, P_3) - (P_0, P_3) + (P_0, P_2)] \\
&\quad + [(P_1, P_3) - (P_0, P_3) + (P_0, P_1)] - [(P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De manera análoga, utilizando (4.1), se demuestra que $\partial[\partial(P_0, ..., P_n)] = 0$.

■

Teorema 4.2 *Dado dos n-simplejos* $(P_0, ..., P_n)$*,* $(Q_0, ..., Q_n)$ *existe una única correspondencia lineal entre los dos simplejos, la cual preserva el orden de los vértices.*

Demostración.

Sea $\Phi : (P_0, ..., P_n) \to (Q_0, ..., Q_n)$ definido por

$$\Phi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k P_k\right) = \sum_{k=0}^{n} t_k Q_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} t_k = 1, \qquad t_k \geq 0$$

Φ es la función lineal que cumple con lo pedido.

■

Definición 4.7 *El* ***n-simplejo estándar***

$$\bar{\mathbf{s}}^n = (R_0, ..., R_n),$$

es un n-simplejo en $\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$R_0 = (0...0), \qquad R_1 = (010...0), \qquad ... \qquad R_n = (00...01).$$

Definición 4.8 *Sea* ω *una n-forma sobre un dominio* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *que incluye al n-simplejo estándar* $\bar{\mathbf{s}}^n$*. Se define*

$$\int_{\bar{\mathbf{s}}^n} \omega = \int_{\bar{\mathbf{s}}^n} A(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 ... dx^n, \tag{4.2}$$

donde

$$\omega = A(x^1, ..., x^n) dx^1 ... dx^n. \tag{4.3}$$

El lado derecho de (4.2) es la integración ordinaria. Además como ω es una n-forma, la representación (4.3) es única.

4.3 Cadenas y Fronteras.

Definición 4.9 *Sea* $\mathbf{M}$ *una variedad, un* ***n-simplejo*** *en* $\mathbf{M}$*, es una triada* $(\mathbf{s}^n, \mathbf{U}, \phi)$*, donde* $\mathbf{s}^n$ *es un simplejo Euclideano,* $\mathbf{U}$ *es una vecindad n-dimensional de* $\mathbf{s}^n$ *en el espacio Euclideano, y* ϕ *es un mapeo suave inyectivo,* $\phi : \mathbf{U} \to \mathbf{M}$.

Definición 4.10 *Sean* $(\mathbf{s}^n, \mathbf{U}, \phi)$, $(\mathbf{t}^n, \mathbf{V}, \psi)$ *dos n-simplejos en* $\mathbf{M}$. *Estos dos simplejos son iguales si*

$$\phi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k P_k\right) = \psi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k Q_k\right), \qquad t_k \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} t_k = 1,$$

donde

$$\mathbf{s}^n = (P_0, ..., P_n), \qquad \mathbf{t}^n = (Q_0, ..., Q_n).$$

Por notación σ^n va a denotar al n-simplejo $(\mathbf{s}^n, \mathbf{U}, \phi)$ en $\mathbf{M}$.

Definición 4.11 *Sea* σ^n *es un simplejo representado por* $(\mathbf{s}^n, \mathbf{U}, \phi)$*, entonces las* ***caras de*** σ^n, $\mathbf{t}_0, ..., \mathbf{t}_n$*, son* $(n-1)$*-simplejos Euclideanos , que cumplen*

$$\partial \mathbf{s}^n = \sum \pm \mathbf{t}_i.$$

Por (4.1) se puede decir cuales son esas caras.

Definición 4.12 *Las caras de un simplejo* σ^n *de* $\mathbf{M}$ *son*

$$\tau^i = (\mathbf{t}_i, \mathbf{V}^i, \phi)$$

donde $\mathbf{t}_0, ..., \mathbf{t}_n$ *son las caras de* $\mathbf{s}^n$. *y* $\mathbf{V}_i$ *son vecindades de* $\mathbf{t}_i$.

La frontera de σ^n *es*

$$\partial \sigma^n = \sum \pm \tau_i.$$

Definición 4.13 *Una* ***n-cadena*** $\mathbf{c}$ *de* $\mathbf{M}$ *es la suma formal*

$$\mathbf{c} = \sum_i a_i \sigma_i^n,$$

donde a_i *son constantes y* σ_i^n *son n-simplejos en* $\mathbf{M}$. *Además*

$$\partial \mathbf{c} = \sum a_i \partial \sigma_i^n.$$

Denotemos $\mathbf{C}_n(\mathbf{M})$ *al conjunto de todas las n-cadenas sobre* $\mathbf{M}$.

De la definición de frontera de un simplejo se puede observar que la frontera de una n-cadena σ_n es una $(n-1)$-cadena, así

$$\partial : \mathbf{C}_n(\mathbf{M}) \to \mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{M}), \qquad n = 1, 2, ...$$

Proposición 4.2 *Sea* $\mathbf{c}$ *una* n*-cadena entonces*

$$\partial(\partial \mathbf{c}) = 0$$

4.4 Integración de formas.

Definición 4.14 *Sea* σ *un* p*-simplejo, representado en la forma* $(\bar{\mathbf{s}}^p, \mathbf{U}, \phi)$*, y* ω *una* p*-forma sobre una variedad* $\mathbf{M}$*, entonces*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\bar{\mathbf{s}}^p} \phi^* \omega. \tag{4.4}$$

Como en (4.4) $\phi^*\omega$ es una p-forma podemos usar (4.2) para calcular su integral.

Definición 4.15 *Sea* $\mathbf{M}$ *una variedad de cualquier dimensión,* ω *una* p*-forma sobre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{c}$ *una* $p-$ *cadena sobre* $\mathbf{M}$*. Si*

$$\mathbf{c} = \sum a_i \sigma_i,$$

donde a_i *son constantes y* σ_i *son* p*-simplejos, entonces*

$$\int_\mathbf{c} \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega. \tag{4.5}$$

Nótese que el lado derecho de (4.5) se puede calcular por (4.4).

Teorema 4.3 (Teorema de Stokes) *Sea* ω *una* p*-forma sobre una variedad* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{c}$ *una* $(p+1)$*-cadena. Entonces*

$$\int_{\partial \mathbf{c}} \omega = \int_\mathbf{c} d\omega.$$

Demostración.

Como $\mathbf{c}$ es una $(p+1)$-cadena, entonces $\mathbf{c}$ es la suma de $(p+1)$-simplejos con coeficientes constantes. Por lo cual es suficiente probar

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \int_\sigma d\omega.$$

donde σ es un $(p+1)$-simplejo. Sea σ un $(p+1)$-simplejo con representación $(\overline{\mathbf{s}}^{p+1}, \mathbf{U}, \phi)$, luego por la definición de integral

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} \phi^*(d\omega) = \int_{\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} d(\phi^*\omega),$$

de aquí que el problema se reduce a un problema del tipo Euclideano.

Sea η una p-forma sobre una vecindad $\mathbf{U}$ de $\overline{\mathbf{s}}^{p+1}$ en $\mathbb{R}^{p+1}$. Demostremos que

$$\int_{\partial\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} \eta = \int_{\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} d\eta. \tag{4.6}$$

Dado que η es una p-forma, tiene una representación de la forma

$$\eta = \sum A_i(\mathbf{x}) dx^1 ... dx^{i-1} dx^{i+1} ... dx^{p+1}.$$

de aquí es suficiente probar (4.6) para el caso monomial.

Sea $\eta = A dx^1 ... dx^p$, entonces

$$d\eta = (-1)^p \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} dx^1 ... dx^{p+1}.$$

Recordemos que $\overline{\mathbf{s}}^{p+1}$ consiste de todos los puntos $(x^1, ..., x^{p+1})$ que satisfacen

$$x^i \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{p+1} x^i \leq 1,$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} d\eta &= (-1)^p \int_{\overline{\mathbf{s}}^{p+1}} \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} dx^1 ... dx^{p+1} \\
&= (-1)^p \int_{\{x^i \geq 0,\ \sum_1^p x^i \leq 1\}} dx^1 ... dx^p \left(\int_0^{(1-\sum_1^p x^i)} \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} dx^{p+1} \right) \\
&= (-1)^p \int_{x^i \geq 0, \sum x^i \leq 1} [A(x^1, ..., x^p, (1 - \sum_1^p x^i)) - A(x^1, ..., x^p, 0))] dx^1 ... dx^p. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

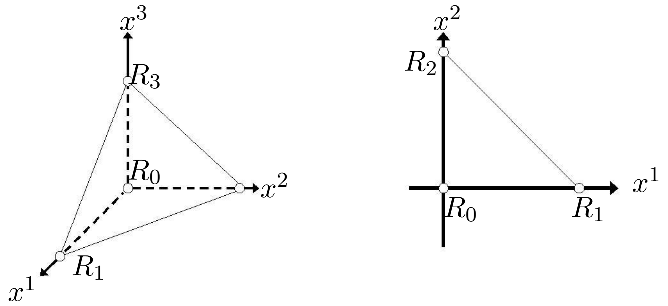
Analicemos el elemento $\partial\overline{s}^{p+1}$.

$$\partial\overline{s}^{p+1} = (R_0, ..., R_p) + ...$$

donde $\eta = 0$ sobre cada una de las otras caras con alguno de los $x^1, ..., x^p$ constante ahí.

De esta forma

$$\int_{\partial\overline{s}^{p+1}} \eta = \int_{(R_1, ..., R_{p+1})} \eta + (-1)^{p+1} \int_{(R_1, ..., R_p)} \eta$$



La cara $(R_0, ..., R_p)$ es el simplejo estándar $\partial \overline{s}^p$, sobre el cual $x^{p+1} = 0$, y por esta razón

$$-1^p + 1 \int_{(R-0,...,R_p)} \eta = -1^p + 1 \int_{\partial \overline{s}^p} A(x^1, ..., x^p, 0) dx^1 ... dx^p,$$

el cual es el segundo término de (4.7).
Luego, haciendo una proyección en la dirección de x^{p+1},

$$\begin{aligned}
\int_{(R_1,...,R_{p+1})} &= \int_{(R_1,...,R_p,R_0)} A\left(x^1, ..., x^p, 1 - \sum_1^p x^i\right) dx^1 ... dx^p \\
&= (-1)^p \int_{(R_0,...,R_p)} A\left(x^1, ..., x^p, 1 - \sum_1^p x^i\right) dx^i ... dx^p \\
&= \int_{\partial \overline{s}^p} A\left(x^1, ..., x^p, 1 - \sum_1^p x^i\right) dx^i ... dx^p, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

el cual es el primer término de (4.7). Por lo tanto la prueba está terminada.

■

Capítulo 5

Teorías de Norma (Gauge).

5.1 Conexiones.

Sea $\mathbf{G}$ un grupo de Lie, $\mathbf{g}$ su álgebra de Lie y $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión r, en el cual actúan la representación del grupo ρ, y $\mathbf{g}$.[1]
Por cuestiones de simplicidad, solo trabajaremos con campos de matrices escalares.

Consideremos al campo escalar Φ como una 0-forma con valores en $\mathbf{V}$.

$$\Phi : \mathbf{U} \to \mathbf{V},$$

donde $\mathbf{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.1 *Una transformación de Gauge (o de Norma) es una función del subconjunto* $\boldsymbol{U}$ *en el grupo* $\boldsymbol{G}$.

$$\gamma : \mathbf{U} \to \mathbf{G}$$

Transformemos el mapeo Φ en Φ', mediante la relación

$$\Phi'(x) = \rho(\gamma(x))\Phi(x), \tag{5.1}$$

donde

$$\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL(V)}$$

es la representación de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{V}$, y $\mathbf{GL(V)}$ es el grupo de Transformaciones Lineales sobre el espacio vectorial $\mathbf{V}$. En lo que resta de este trabajo escribiremos (5.1) simplemente como

$$\Phi'(x) = \gamma(x)\Phi(x),$$

e implícitamente supondremos que una representación adecuada ha sido elegida.

Nuestro objetivo es estudiar la geometría de la Invariancia de Gauge; es decir, la invariancia ante transformaciones del tipo (5.1). Donde γ será tomada como una función

[1] Ver apéndice B

arbitraria suave, $\Phi(x)$ una transformación independiente de $\Phi(y)$, $(y \neq x)$. Este hecho puede ser interpretado de la siguiente manera.

Supongamos que tenemos una familia de espacios vectoriales $\mathbf{V}_x$ (para cada x en $\mathbf{U}$), los cuales son isomorfos, pero no idénticos a $\mathbf{V}$, tal que los valores de Φ en x pertencen a V_x.

$$x \mapsto \Phi(x)$$

Indentificamos a un vector $\mathbf{V}_x$ con un vector en $\mathbf{V}$, si tienen la misma expansión de coeficientes con respecto a sus bases. De esta manera, si cambiamos las bases de $\mathbf{V}_x$ cambiará $\Phi(x) \in \mathbf{V}$, y por tanto $\Phi'(x)$ también cambiará.

Definición 5.2 *Sea x_0 en $\mathbf{U}$ y C una curva partiendo de x_0, y sea*

$$Q : [0,1] \to U,$$

$$\tau \mapsto Q(\tau),$$

una parametrización de C. El transporte paralelo de un vector tangente $v_0 \in T_{x_0}\mathbf{U}$ a lo largo de C es la familia uniparamétrica de vectores tangentes

$$v_\tau \in T_{Q(\tau)\mathbf{U}},$$

cuyas ecuaciones diferenciales determinaremos mas adelante.

Definición 5.3 *Sean x, y en $\mathbf{U}$ y C una curva que empieza en x y termina en y. El transportador paralelo $\Gamma[C]$, es un elemento de $\mathbf{G}$ tal que para todo elemento $v \in \mathbf{V}$, que puede considerarse como un elemento de $\mathbf{V}_x$, $\Gamma[C]v$ es identificado como un elemento de $\mathbf{V}_y$.*

Dado que bajo una transformación de Norma

$$v(x) \mapsto \gamma(x)v(x) = v'(x),$$

y

$$\Gamma[C] \mapsto \Gamma'[C],$$

entonces como

$$v'(y) = \Gamma'[C]v'(x) = \gamma(y)v(y),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} v'(y) = \Gamma'[C]v'(x) &= \gamma(y)v(y) \\ &= \gamma(y)\Gamma[C]v(x) \\ &= \gamma(y)\Gamma[C]\gamma^{-1}(x)\gamma(x)v(x) \\ &= \gamma(y)\Gamma[C]\gamma^{-1}v'(x). \end{aligned}$$

Luego

$$\Gamma'[C] = \gamma(y)\Gamma[C]\gamma^{-1}(x). \tag{5.2}$$

Denotaremos al vector tangente a la curva C en el punto $Q(\tau)$ por $\dot{Q}(\tau)$. Definamos en $Q(\tau)$ el vector $\Phi(\tau) \in \mathbf{V}$, que es el resultado de la traslación paralela de $\Phi(0)$ a lo largo de C, entre 0 y τ. Luego, por supuesto, $\Phi(\tau+\varepsilon)$ es el resultado de la traslación paralela de C entre τ y $\tau+\varepsilon$, y cuando $\varepsilon \to 0$, podemos considerar el transportador paralelo como

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau+\varepsilon) &= \Phi(\tau) - \varepsilon A(\dot{Q}(\tau))\Phi(\tau) + O(\varepsilon^2) \\
&= [I - \varepsilon A(\dot{Q}(\tau))]\Phi(\tau) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Aquí $A(\dot{Q}(\tau))$ es la 1-forma A en $Q(\tau)$ evaluada en la dirección del vector tangente $\dot{Q}(\tau)$ y podría escribirse como $A\mid_{Q(\tau)} (\dot{Q}(\tau))$. De la ecuación (5.3) obtenemos una ecuación diferencial que describe el transporte paralelo a lo largo de C:

$$\frac{d}{d\tau}\Phi(\tau) = -A(\dot{Q}(\tau))\Phi(\tau). \tag{5.4}$$

Los teoremas estándares de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias garantizan la existencia de una única solución para (5.4), una vez que el valor inicial $\Phi(0)$ es escogido.

De la ecuación (5.3) podemos ver que el transportador paralelo para porciones infinitesimales de C es $I - \varepsilon A(\dot{Q}(\tau))$. De esta manera, al sustituir en (5.2) tenemos

$$I - \varepsilon A'(\dot{Q}(\tau)) = \gamma(Q(\tau+\varepsilon))[I - \varepsilon A(\dot{Q}(\tau))]\gamma^{-1}(Q(\tau)). \tag{5.5}$$

Si desarrollamos en potencias de ε se tiene

$$\begin{aligned}
\gamma(Q(\tau+\varepsilon)) &= \gamma(Q(\tau)) + \varepsilon\frac{d}{d\tau}\gamma(Q(\tau)) + O(\varepsilon^2) \\
&= \gamma(Q(\tau)) + \varepsilon d\gamma\mid_{Q(\tau)} (\dot{Q}(\tau)) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
A'(\dot{Q}(\tau)) &= \gamma(Q(\tau))A((\dot{Q})(\tau))\gamma^{-1}(Q(\tau)) - (d\gamma((\dot{Q})(\tau)))\gamma^{-1}(Q(\tau)) \\
&= \gamma(Q(\tau))A((\dot{Q})(\tau))\gamma^{-1}(Q(\tau)) + \gamma(Q(\tau))d\gamma^{-1}(\dot{Q}(\tau)).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Debemos tener cuidado con expresiones como $(d\gamma(\dot{Q}(\tau)))\gamma^{-1}(Q(\tau))$, que significa tomar la derivada exterior de la matriz de funciones γ (componente a componente), después evaluar en $Q(\tau)$ y en la dirección de $\dot{Q}(\tau)$, y multiplicar la matriz resultante por $\gamma^{-1}(Q(\tau))$.
Eligiendo distintas curvas C, puede elegirse que los vectores tangentes $\dot{Q}(\tau)$ en (5.6) coincidan con la totalidad del espacio tangente $T_{Q(\tau)}\mathbf{U}$. De aquí que podamos concluir que la transformación de Norma descrita por γ actua sobre la conexión A de la siguiente manera

$$A \rightarrow A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1}.$$

Si consideramos la porción de la curva entre $\tau = 0$ y $\tau = 1$, la fraccionamos en N partes, posteriormente hacemos $N \rightarrow \infty$; considerando además que esto significa la aplicación sucesiva de la ecuación (5.3), tenemos la expresión para $\Gamma[C]$

$$\begin{aligned} \Phi(1) = lim_{N\rightarrow\infty} \left[I - \frac{1}{N} A \left(\dot{Q} \left(\frac{N-1}{N} \right) \right) \right] ... \\ \left[I - \frac{1}{N} A \left((\dot{Q}) \left(\frac{1}{N} \right) \right) \right] \left[I - \frac{1}{N} A(\dot{Q}(0)) \right] \Phi(0) \\ =: Pexp \left\{ - \int_C A \right\} \Phi(0). \end{aligned} \tag{5.7}$$

así que,

$$\Gamma[C] = Pexp \left\{ - \int_C A \right\}. \tag{5.8}$$

La exponencial de camino-ordenado $Pexp$ está definida por (5.7) y puede escribirse también como

$$\begin{aligned} Pexp \left\{ - \int_C A \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_0^1 d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1} ... \\ \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A((\dot{Q})(\tau_j)) ... A((\dot{Q})(\tau_2)) A((\dot{Q})(\tau_1)). \end{aligned} \tag{5.9}$$

La P significa que se debe tomar en cuenta el orden de las multiplicaciones matriciales $A(Q(\tau_i))A(Q(\tau_j))$, pues en general esta multiplicación no es conmutativa.

Si G es un grupo abeliano, el orden de los factores en (5.7) y en (5.9) no importa y $Pexp$ coincide con la función exponencial ordinaria.

De (5.5) es fácil ver que, bajo transformaciones de Norma, $\Gamma[C]$ se transforma como:

$$Pexp \left\{ - \int_C A' \right\} = \gamma(Q(1)) Pexp \left\{ - \int_C A \right\} \gamma^{-1}(\Phi(0)).$$

5.2 Curvatura=Intensidad de campo.

Examinemos la dependencia de $\Gamma[C]$, cuando C cambia, con mas detalle.

Sea C una curva cerrada y $S(C)$ una superficie limitada por C. Usando el teorema de Stokes podemos escribir, en el caso de la electrodinámica (G=U(1), donde U(1)=$\{l \in \mathbb{C} | \lambda = e^{i\phi}$ con $\phi \in \mathbb{R}\}$)

$$\Gamma[C] := exp\left\{-\int_C A\right\} = exp\left\{-\int_{S(C)} dA\right\} = exp\left\{-\int_S (C)F\right\}. \tag{5.10}$$

Esta ecuación significa que la desviación de $\Gamma[C]$ de la identidad es determinada por la integral de la 2-forma, intensidad de campo, F, sobre $S(C)$. Esta integral no depende de la superficie $S(C)$ elegida, lo cual se sigue del teorema de Stokes y usando el hecho de que $dF = 0$.

Si el grupo G es no-abeliano, el problema es mas complicado debido al camino-ordenado empleado en la ecuación (5.8). Nos bastará con la generalización no-abeliana para curvas infinitesimales.

Supongamos que tenemos una curva cerrada C, descrita por la representación paramétrica $Q : [0,1] \to \mathbf{U}$, y que es de longitud infinitesimal L. Sea $S(C)$ una superficie infinitesimal (con área de orden L^2) limitada por C. Calculemos $\Gamma[C]$ hasta términos de orden L^3

$$\begin{aligned} Pexp\left\{-\int_C A\right\} &= I - \int_0^1 d\tau A((\dot{Q})(\tau)) \\ &+ \int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\dot{Q}(\tau_2))A(\dot{Q}(\tau_1)) + O(L^3). \end{aligned}$$

Empleando el teorema de Stokes

$$\int_0^1 d\tau A(\dot{Q}(\tau)) = \int_C A = \int_{S(C)} dA.$$

El cual se observa que es un término de orden L^2. El siguiente término lo descomponemos en dos integrales

$$\int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\dot{Q}(\tau_2))A(\dot{Q}(\tau_1)) = I_a + I_s,$$

siendo el integrando de I_s simétrico y el de I_a antisimétrico, bajo intercambio de τ_1 y τ_2.

$$I_{s,a} = \frac{1}{2}\int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 [A(\dot{Q}(\tau_2))A(\dot{Q}(\tau_1)) \pm A(\dot{Q}(\tau_1))A(\dot{Q}(\tau_1))].$$

La integral I_s es simple, debido a que, en el integrando, no importa el que las matrices no conmuten.

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{1}{4}\int_0^1 d\tau_1 d\tau_2 [A(\dot{Q}(\tau_1))(\dot{Q}(\tau_2)) + A(\dot{Q}(\tau_2))(\dot{Q}(\tau_1))] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_C A\right\}^2 = O(L^4). \end{aligned}$$

De esta manera podemos despreciar I_s; pues es de orden L^4. Para calcular I_a, introduzcamos las coordenadas x^μ, y escribamos

$$A = A_\mu dx^\mu,$$

$$\dot{Q}(\tau) = \dot{Q}^\mu(\tau)\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{Q(\tau)}$$

Donde A_μ son matrices cuyas entradas son funciones y $\dot{Q}^\mu = \frac{dQ^\mu}{d\tau}$. Despreciando términos de orden L^4 y superiores, tenemos

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{2}\int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 [A_\mu(Q(\tau_2))\dot{Q}^\mu(\tau_2)A_v(Q(\tau_1))\dot{Q}^v(\tau_1) \\ &\quad - A_\mu(Q(\tau_1))\dot{Q}^\mu(\tau_1)A_v(Q(\tau_2))\dot{Q}^v(\tau_2)] \\ &= \frac{1}{2}A_\mu(Q(0))A_v(Q(0))\int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \times [\dot{Q}^\mu(\tau_2)\dot{Q}^v(\tau_1) - \dot{Q}^\mu(\tau_1)\dot{Q}^v(\tau_2)] + O(L^3) \\ &= \frac{1}{2}A_\mu(Q(0))A_v(Q(0))\int_0^1 d\tau[\frac{dQ^\mu}{d\tau}Q^v(\tau) - \frac{dQ^v}{d\tau}Q^\mu(\tau)] + O(L^3) \\ &= \frac{1}{2}A_\mu(Q(0))A_v(Q(0))\int_C (x^v dx^\mu - x^\mu dx^v) + O(L^3) \end{aligned}$$

Después de aplicar el teorema de Stokes, se encuentra que

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{2}A_\mu(Q(0))\int_{S(C)} d(x^v dx^\mu - x^\mu dx^v) + O(L^3) \\ &= -\int_{S(C)} A_\mu(Q(0))dx^\mu \wedge A_v(Q(0))dx^v + O(L^3) \\ &= -\int_{S(C)} A \wedge A + O(L^3) \end{aligned}$$

para obtener finalmente

$$Pexp\left\{-\int_C A\right\} = I - \int_{S(C)} (dA + A \wedge A) + O(L^3$$

comparando esta última con (5.10), se define la 2-forma, intensidad de campo (o curvatura) F como

$$F := dA + A \wedge A$$

al igual que A, F es $\mathbf{g}$-valuada, como lo ilustra la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} A \wedge A &= A_\mu A_v dx^\mu \wedge dx^v = \frac{1}{2}(A_\mu A_v dx^\mu \wedge dx^v - A_v A_\mu dx^\mu \wedge dx^v) \\ &= \frac{1}{2}[A_\mu, A_v] dx^\mu \wedge dx^v \\ &= \frac{1}{2}[A, A]. \end{aligned}$$

Así que podemos escribir

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu,v} dx^\mu \wedge dx^v$$

ó usando el tensor intensidad de campo ordinario

$$F_{\mu v} = \partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu + [A_\mu, A_v].$$

Finalmente, bajo una transformación de Norma, F se transforma de acuerdo a la representación adjunta; es decir, si

$$A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1} \tag{5.11}$$

entonces

$$F' = dA' + A' \wedge A' = \gamma F \gamma^{-1}$$

Notemos el parecido que presenta la ecuación (5.11) con la ecuación (3.4), de lo cual podemos concluir que la transformación de norma se puede interpretar como un cambio de base, y Ω corresponde a la conexión (también conocida en electromagnetismo como el potencial ó campo de norma).

Conclusiones

Hemos visto que a partir de conceptos del Algebra Lineal como Espacio Vectorial, Combinación Lineal, Bases, Dimensión, Transformación Lineal y Funcionales Lineales; así como del manejo de Cálculo de varias variables y además del conocimiento de conceptos de Topología, se puede construir la Teoría de las Formas Diferenciales sobre Variedades.

El empleo de Formas Diferenciales en la Integración en Varias Variables es sencillo y surge de manera natural, al cambiar de coordenadas un dominio de integración, el Jacobiano de la transformación.

El manejo de índices, cuando se usan los tensores, es demasiado difícil y se pierde la interpretación de éstos; con Formas Diferenciales no ocurre esto.

Las Formas Diferenciales se pueden aplicar a Variedades Diferenciales, en las cuales no está definida de manera necesaria una Métrica. La única operación que requiere del uso de Métrica es la operación Estrella de Hodge.

Las ecuaciones de Maxwell y el Teorema de Stokes en Variedades Diferenciales adoptan una forma sencilla cuando se les escribe en términos de Formas Diferenciales.

Su uso, en el Cálculo de Curvaturas Media y Gaussiana es sencillo, pero la ventaja de su uso, sobre métodos tradicionales, se manifiesta más claramente cuando se usa para Calcular el Tensor de Curvatura en Variedades más complicadas.

De su aplicación a las Teorías de Norma y a los Sistemas Móviles concluimos que una transformación de Norma en realidad significa una elección de una base de vectores distinta. Como en el Álgebra Lineal, no cambia el contenido Físico de una Teoría; se describe la misma Teoría, solo que visualizada por distintos observadores, cada uno con su propio sistema de referencia.

Si bien, el manejo del Algebra de Formas Diferenciales es difícil, al principio, esta dificultad es compensada al percatarnos de la amplitud de aplicaciones que ésta tiene.

Apéndice A

A.1 Variedades.

Definición A.1 *Sea* $\mathbf{V}$ *un conjunto y* n *un número natural. Un sistema coordenado* F *sobre* $\mathbf{V}$ *es un regla que asigna a a cada punto* x *de* $\mathbf{V}$*,* n *números reales* $x^1, x^2, ..., x^n$ *, las* x^j *son llamadas las coordenadas de* x *en el sistema* F*.*

Se podría decir que F es una función entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{V}$. Supongamos que F es inyectiva y que $dom(F)$ es abierto.

Si F, G son dos sistemas de coordenadas, entonces $F \circ G^{-1}$ es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Definición A.2 *Se dice que dos sistemas de coordenadas* F*,* G *son compatibles si* $F \circ G^{-1}$ *y su inversa* $G \circ F^{-1}$ *son diferenciables.*

Definición A.3 *Sea* $\boldsymbol{M}$ *un espacio topológico. Una* ***carta*** *para* $\boldsymbol{M}$ *es un par (*$\boldsymbol{V}$*,*F*), donde* $\boldsymbol{V}$ *es un subconjunto abierto de* $\boldsymbol{M}$ *y* F *como se definió anteriormente. En este sentido al conjunto* $\boldsymbol{V}$ *se le conoce como vecindad coordenada.*

Definición A.4 *Un* ***atlas*** *es una colección de cartas* $\{(\mathbf{V}_r, F_r)\}$*, tales que las vecindades coordenadas correspondientes cubren a* $\boldsymbol{V}$*.*

Definición A.5 *Una* ***variedad*** n*-dimensional* $\boldsymbol{M}$ *es un espacio topológico para el cual existe un atlas, tal que sus vecindades coordenadas cubren a* $\boldsymbol{M}$ *y son homeomorfas a un dominio de* $\mathbb{R}^n$*.*

A.2 Vectores tangentes.

Definición A.6 *Sea* $\mathbf{M}$ *una variedad, denotaremos por* $\mathbf{F}^0(\mathbf{M})$ *al espacio de todas las funciones suaves con valores reales sobre* $\mathbf{M}$*.*

Definición A.7 *Sea P un punto en una variedad $\mathbf{M}$. Un vector tangente $\mathbf{v}$ en P es un operador*

$$\mathbf{v} : \mathbf{F}^0(\mathbf{M}) \to \mathbb{R}$$

el cual satisface

a) $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g)$, *a,b constantes*
b) $\mathbf{v}(f \cdot g) = g(P) \cdot \mathbf{v}(f) + f(P) \cdot \mathbf{v}(g)$.

El operador $\mathbf{v}$ asigna a cada función suave f sobre $\mathbf{M}$ un número real $\mathbf{v}(f)$.

Proposición A.1 *Sea P un punto en una variedad $\mathbf{M}$ y sea $\mathbf{v}$ un vector tangente, entonces para cualquier número real c y función f se tiene*

$\mathbf{v}(c) = 0$,
$\mathbf{v}(cf) = cv(f)$.

Demostración.

Como

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{v}(0).$$

se tiene que $\mathbf{v}(0) = 0$. Además por el inciso (b) de la definición A.7, tomando a $f = g = 1$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(1 \cdot 1) = g(P)v(1) + f(P)\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(1),$$

así $\mathbf{v}(1) = 0$, de manera análoga se demuestra que $\mathbf{v}(c) = 0$ para cualquier número real c. Ahora

$$\mathbf{v}(cf) = \mathbf{v}(cf + 0 \cdot g) = c\mathbf{v}(f) + 0\mathbf{v}(g) = c\mathbf{v}(f).$$

■

Proposición A.2 *Sea $(x^1, x^2, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas locales, válido en alguna vecindad de P. Entonces cada uno de los operadores*

$$\mathbf{v}_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$$

son vectores tangentes.

Demostración.

Veamos que se cumplen (a), (b) de la definición A.7

(a) $\mathbf{v}_i(af + bg) = \left.\dfrac{\partial(af + bg)}{\partial x^i}\right|_P = a \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P + b \left.\dfrac{\partial g}{\partial x^i}\right|_P = a\mathbf{v}_i(f) + b\mathbf{v}_i(g).$

(b) $\mathbf{v}_i(f \cdot g) = \left.\dfrac{\partial f \cdot g}{\partial x^i}\right|_P = g\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P + f \left.\dfrac{\partial g}{\partial x^i}\right|_P = g(P)\mathbf{v}_i(f) + f(P)\mathbf{v}_i(g).$

■

Teorema A.1 *El conjunto de todos los vectores tangentes en P forma un espacio vectorial, $\mathbf{T}_P$, llamado el espacio tangente de $\mathbf{M}$ en P. Además los vectores $\mathbf{v}_i$ forman una base de este espacio.*

Demostración.

Sea
$$(x^1, ..., x^n)|_P = (c^1, ...c^n).$$

Si $\mathbf{v}$ es algún vector tangente de P, entonces $\mathbf{v}(x^i) = \mathbf{v}(x^i - c^i) = a^i$. Si f es alguna función suave sobre $\mathbf{M}$, podemos expandir a f en su serie de Taylor en términos de primer orden

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}) + \sum (x^i - c^i) g_i(\mathbf{c}), \qquad g_i(\mathbf{c}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P ,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(f) &= \mathbf{v}(f(\mathbf{c})) + \mathbf{v}\left(\sum (x^i - c^i) g_i(\mathbf{c})\right) \\
&= \mathbf{v}(f(\mathbf{c})) + \sum (x^i - c^i)\Big|_P \mathbf{v}(g_i(\mathbf{c})) + g_i(\mathbf{c})|_P\, \mathbf{v}\left(\sum (x^i - c^i)\right) \\
&= \mathbf{v}(f(\mathbf{c})) + \sum (c^i - c^i)\mathbf{v}(g_i(\mathbf{c})) + \sum g_i(\mathbf{c})\Big|_P a^i \\
&= \sum a^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P . \qquad (A.1)
\end{aligned}$$

ya que $f(\mathbf{c})$ es una constante, por la proposición A.1 $\mathbf{v}(f(\mathbf{c})) = 0$. Luego

$$\mathbf{v} = \sum a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$$

con lo cual queda demostrado que $\{\mathbf{v}_i\}$ forma una base para el espacio tangente.

■

Sean $(a^1, a^2, ..., a^n)$ las componentes de $\mathbf{v}$ respecto a las coordenadas del sistema $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{y}$ es otro sistema de coordenadas en P y

$$\mathbf{v} = \sum b^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_P ,$$

entonces por la regla de la cadena $b^i = \mathbf{v}(y^i) = \mathbf{v}(y^i(x^1, ..., x^n)) = \sum a^j \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_P$, la cual es llamada la regla de transformación de componentes de un vector contravariante del cálculo tensorial.

Definición A.8 *Un **campo vectorial** sobre $\mathbf{M}$ consiste de una asignación suave de un vector tangente en cada punto de $\mathbf{M}$. En coordenadas locales*

$$\mathbf{v} = \sum a^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad a^i(\mathbf{x}) \ \textit{suaves}.$$

Si P pertenece a la interseccón de dos vecindades coordenadas

$$\mathbf{v} = \sum b^i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y^i}$$
$$b^i(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \sum a^j(\mathbf{x}) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

Definición A.9 *Sean* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *dos variedades. Dado un mapeo suave*

$$F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$$

definimos el ***mapeo tangente*** *correspondiente*

$$T_x F : T_x \mathbf{M} \to T_{F(x)} \mathbf{N}$$

utilizando las coordenadas $x^1, x^2, ..., x^n$ *en una vecindad de* $x \in \mathbf{M}$ *y las coordenadas* $y^1, y^2, ..., y^p$ *en una vecindad de* $F(x)$*. Con estas coordenadas el mapeo* F *es representado por*

$$y^j = F^j(x^1, x^2, ..., x^n), \qquad j = 1, 2, ..., p.$$

y v *es representada por*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \in T_x \mathbf{M}$$

$$T_x F(v) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \bigg|_{F(x)} .$$

Apéndice B

Para poder entender la teoría que se ha desarrollado en el capítulo 5, es necesario estar familiarizado con la teoría de grupos de Lie. Es por esta razón que en este apéndice damos los conceptos necesarios para entender las Teorías de Norma.

B.1 Grupos de Lie

Definición B.1 (Grupo de Lie) *Un grupo de Lie (real, de dimensión finita) es un conjunto G el cual es, al mismo tiempo, una variedad diferenciable y un grupo, tal que su estructura de grupo es diferenciable. Esto significa que los mapeos*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G, \\ (g, g') &\mapsto gg', \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G &\to G, \\ g &\mapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

son diferenciables.

Definición B.2 *Sea G un grupo de Lie, $\mathbf{M}$ una variedad. Una representación de G sobre $\mathbf{M}$ es un mapeo diferenciable*

$$G \times M \to M$$

$$(g, x) \mapsto \rho_g x$$

tal que para cada elemento g

$$\rho_g : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

es un difeomorfismo de $\mathbf{M}$ que satisface

$$\begin{aligned} \rho_e &= id_{\mathbf{M}}, \\ \rho_g \circ \rho_{g'} &= \rho_{gg'} \end{aligned}$$

Es decir, una representación es un grupo de homomorfismos de G en Diff($\mathbf{M}$). Frecuentemente la representación del grupo G es denotada simplemente por ρ.

Entre las representaciones mas utilizadas para grupos de Lie tenemos las siguientes:

Definición B.3 *Definimos las traslaciones izquierdas L_g*

$$\begin{aligned} L_g : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto L_g h := gh \end{aligned}$$

Definición B.4 *Definimos las traslaciones derechas R_g*

$$\begin{aligned} R_g : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto R_g h := hg \end{aligned}$$

Definición B.5 *La representación adjunta de un grupo de Lie G, es una representación de G en sí mismo, y es definida mediante el automorfismo*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Definición B.6 *Una representación ρ es llamada* ***lineal*** *si la variedad sobre la que ésta opera es un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *y si todos los difeomorfismos ρ_g son transformaciones lineales.*

B.2 Algebras de Lie.

Sea vect($\mathbf{U}$) el espacio vectorial de dimensión infinita de todos los campos vectoriales definidos sobre $\mathbf{U}$. Como elementos infinitesimales del grupo continuo de difeomorfismos de $\mathbf{U}$ sobre sí mismo Diff($\mathbf{U}$), vect($\mathbf{U}$) forma un álgebra de Lie. En efecto, podemos definir la operación $[\cdot,\cdot]$, de dos campos vectoriales v y w, que en coordenadas se expresan

$$v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad w = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

definimos las componentes de $[v,w]$ por

$$[v,w] := \sum_{i,j} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} w^j - w^j \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

A esta operación $[\cdot,\cdot]$ se le denomina **bracket de Lie.** Esta definición es independiente de las coordenadas y tiene las siguientes propiedades:
a) $[\cdot,\cdot]$ es bilineal
b) $[\cdot,\cdot]$ es antisimétrico

$$[v,w] = -[w,v]$$

c) Satisface la identidad de Jacobi

$$[v,[u,w]] = [[v,u],w] + [u,[v,w]]$$

Definición B.7 *Un espacio vectorial (de dimensión finita o infinita) dotado con un producto* $[,]$ *que satisface las propiedades anteriores se denomina un* ***Algebra de Lie.***

Definición B.8 *Sea* $\mathbf{V}$ *un álgebra de Lie, y sea* $\mathbf{W}$ *subespacio vectorial de* $\boldsymbol{V}$*. Si el bracket de Lie es una operación cerrada en* $\boldsymbol{W}$*, entonces decimos que* $\boldsymbol{W}$ *es una* ***sub-álgebra de Lie.***

Definición B.9 *Un campo vectorial* A *definido sobre un grupo de Lie* G *es llamado* ***izquierdo-invariante*** *(ó simplemente invariante) si éste es invariante bajo toda traslación izquierda:*

$$(T_h L_g)(A(h)) = A(gh) \qquad \forall g \in G.$$

La combinación lineal de campos vectoriales invariantes es un campo invariante, debido a que $T_h L_g$ es un mapeo lineal. También, el bracket de Lie de dos campos vectoriales invariantes es un campo vectorial invariante. De aquí que los campos vectoriales invariantes forman una sub-álgebra de Lie de vect(G). Denotamos esta sub-álgebra por $\mathbf{g}$.

En efecto, cada campo vectorial invariante es determinado de manera única por su valor $A(e) \in T_e(G)$; es decir,

$$A(g) = T_e L_g A(e).$$

si $d = dim(G)$ y $\{A_1(e), ..., A_d(e)\}$ forman una base de T_eG, entonces los correspondientes campos vectoriales invariantes $A_1, ..., A_d$ son una base de $\mathbf{g}$. Mas aún, estos campos vectoriales son linealmente independientes en cada $g \in G$.

Bibliografía

[1] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Ed. Academic Press. New York. 1963.

[2] M. Göckeler y T. Schücker. *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity.* Ed. Cambridge University. New York. 1987.

[3] Spivak Michael. *Cálculo en variedades*. Ed. Reverté. Barcelona. 1987.

[4] Souriau J.M. *Structure of Dynamical Systems*. Ed. Birkhäuser. Boston. 1997.

[5] Lovelock and Rund. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*. Ed. Dover Publications. New York. 1989.

[6] Kobayashi and Nomizu, Vol 1. *Foundations of differential Geometry.* Ed. Interscience Publishers. New York. 1963.

[7] Bautista Tomás, Oetiker Tobias, Partl Humbert, Hyna Irene y Schlegl Elisabeth. *Una descripción de LaTeX2ε*. 1996.

[8] Leslie Lamport. *LATEX. A document Preparation System, User's Guide and Reference Manual.* Ed. Addison-Wesley. Estados Unidos de América. 1994.