



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

TESIS:

“TRANSFORMACIONES HOMOTÓPICAS Y RECONOCIMIENTO DE FORMAS”

Para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

Berenice Vásquez Martínez

DIRECTORES DE TESIS

M.C. Adolfo Maceda Méndez

Dr. Mario Aurelio Rodríguez Pineda

Huajuapán de León, Oaxaca.

Julio de 2004.

Agradecimientos

A mi asesor, el M.C. Adolfo Maceda Méndez, por toda la ayuda y tiempo dedicado en la realización de esta tesis, agradeciendo también sus valiosos consejos y el apoyo que me brindó en estos cinco años.

A mi coasesor, el Doctor Mario Aurelio Rodríguez Pineda, por sus orientaciones y sugerencias cuando necesité de su asesoramiento.

Al M. C. Juan Carlos Mendoza Santos, por su apoyo y consejos brindados durante toda la carrera.

A la Doctora Virginia Berrón Lara, por ser parte importante en la culminación de mi carrera, al contribuir con sus orientaciones en el desarrollo de mi tesis. Por su calidad humana y ser parte del jurado calificador.

Al M.C. José Luis Carrasco Pacheco, por haberme dado los elementos necesarios para la culminación de mi tesis y como miembro del jurado calificador.

A todos mis profesores, por compartirme sus conocimientos, por brindarme su amistad y por sus consejos a lo largo de la carrera.

A mis padres, Mauro y Mercedes, así como a mis hermanos: Eric, Cindy y Nallely, en virtud de que siempre estuvieron a mi lado, apoyándome cuando los necesité y por haberme dado la oportunidad de tener una gran familia.

A todos mis amigos y amigas, por haber estado conmigo en las diferentes etapas de mi vida.

A mis padres, Mauro y Mercedes
Por darme la vida y brindarme la oportunidad de
realizar esta primer gran meta, y por los valores
inculcados para ser una persona de bien.
Gracias por todo su amor.

A mis hermanos: Eric, Cindy y Nallely.
Por haber compartido conmigo sus experiencias,
por todo su apoyo y amor. Los quiero mucho.

A todos mis seres queridos.

Contenido

Agradecimientos	i
Dedicatorias	ii
Contenido	iii
INTRODUCCIÓN	
1. Antecedentes	1
2. Organización de la Tesis	4
CAPÍTULO I.	
Imágenes Bidimensionales	
1.1 Definiciones principales.	
1.1.1 Relación de conexidad en conjuntos de puntos lattice	5
1.1.2 Teorema de Jordan	7
1.1.3 Imágenes digitales binarias	8
1.2 Realización geométrica y poliédrica de imágenes digitales binarias.	
1.2.1 Complejos cúbicos como realización geométrica de imágenes.	10
1.2.2 Realización poliédrica como análogo continuo de imágenes.	12
CAPÍTULO II.	
Topología Combinatoria.	
2.1 Conceptos básicos de Topología Algebraica	15
2.2 Complejos Simpliciales	17
2.3 Subdivisión Baricéntrica	21
2.4 Aproximación Simplicial	22
2.5 Homología Simplicial (Ciclos y fronteras)	24
2.6 Mapeos Simpliciales	32
2.7 Subdivisión estelar	35
2.8 Homomorfismos inducidos por mapeos	38
2.9 Invarianza	42

CAPÍTULO III.

Criterios para el cálculo de ciertas características de una imagen digital

Resultados sobre el índice de un píxel y Teorema del retractor.46

CAPITULO IV

4.1. Algoritmos básicos

4.1.1 Algoritmo de contracción combinatoria (ACC)55

4.1.2 Algoritmo de expansión combinatoria (AEC)55

4.2. Cálculo de la característica de Euler

4.2.1 Eliminación de puntos negros, previo cálculo de sus índices.....56

4.2.2 Eliminación de puntos negros de índice 257

4.3. Cálculo de los números de Betti57

4.4. Algoritmo de esqueletización58

CONCLUSIONES60

APÉNDICE A.

Manual de usuario.....61

APÉNDICE B.

Visualización del resultado de los algoritmos.64

BIBLIOGRAFÍA66

INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes.

En la automatización y robotización de las técnicas de procesamiento automático de información, sistemas de traducción automática y otros problemas relacionados con la visión de robots, surge la necesidad de resolver una serie de cuestiones relacionadas con su realización. Estas se enmarcan en las siguientes áreas: Procesamiento de Imágenes, Reconocimiento de Patrones y Análisis de Escenas.

El procesamiento de imágenes, básicamente, se refiere a la obtención de nuevas imágenes a partir de las que ya se tienen. El resultado final del procesamiento de una imagen, por regla general sirve para su interpretación por una persona. Al resolver problemas de Procesamiento de imágenes surge la necesidad de suprimir ruidos, de eliminar la indefinición y de resaltar la frontera de una imagen. Entre los trabajos fundamentales en esta área, podemos mencionar [7, 11, 18, 20, 21, 24].

El objetivo principal del Reconocimiento de Patrones, cuando el patrón es una imagen, consiste en asignar el patrón a tal o cual clase, estando éste dado como una colección de números, que corresponden a las características medibles del objeto. Reconocer un objeto significa asignarlo a una de las clases que se conocen.

Aunque la bibliografía sobre reconocimiento y clasificación de patrones es muy amplia, entre los principales trabajos podemos citar los de Hall[11], Rosenfeld[25], Duda y Hart[9], entre otros.

En el análisis de escenas se estudia el problema relativo al paso de las descripciones simples, obtenidas directamente de las imágenes, a unas más complejas, dadas en una forma tal que resulte más adecuada para la realización de una tarea. Como ilustración clásica de esto sirve la interpretación de los contornos de las figuras. Entre los trabajos en esta área, podemos mencionar Duda y Hart[9].

La aplicación de los métodos topológicos a los problemas de procesamiento automático de información se hace necesaria, básicamente para resolver los siguientes problemas:

1. Obtención de un espectro amplio de invariantes topológicos de la forma de una imagen, formalizado para su uso en una computadora. Las herramientas fundamentales aquí con los de la topología digital.
2. Formalización del concepto de forma de una imagen por medio del análisis de sus correspondientes invariantes locales y globales en el proceso de discretización de imágenes analógicas (por ejemplo, binarias) en problemas de procesamiento de imágenes, así como al desarrollar los criterios necesarios para esta discretización.

Durante los últimos años, muchos resultados han sido obtenidos en el área de la topología digital; esto es, el estudio de las propiedades topológicas de imágenes binarias digitales, tales como conexidad, contracción o seguimiento de bordes de una imagen, el número de componentes conexas, el número de agujeros, el cálculo de la característica de Euler, etc.

La mayoría de los conceptos básicos de la topología digital bidimensional fueron identificados en los años 60's y 70's[25]. Entonces se consideraron diferentes enfoques y en la mayoría de los casos se estableció la relación existente entre ellos. Sin embargo no se puede decir que ha sido creada una teoría completa que permita construir un amplio espectro de algoritmos que formalicen el concepto de forma de una imagen en el proceso de la solución de los problemas de procesamiento, clasificación y reconocimiento de

imágenes. La causa principal de la ausencia de esta teoría, es la existencia de una gran cantidad de enfoques y métodos para formalizar el concepto de invarianza de la forma de la imagen, debiéndose fundamentalmente a que no se tiene una plataforma teórica única basada en la teoría de invariantes locales y globales de la forma de los objetos en estudio, desarrollada por la topología algebraica, por ejemplo, en el caso de los espacios topológicos.

El objeto de estudio de la topología digital es el análisis de las propiedades topológicas de imágenes, con el fin de desarrollar algoritmos y métodos que permitan resolver problemas de procesamiento automático: procesamiento de imágenes, reconocimiento de patrones y graficación automática. Los métodos fundamentales de la topología digital se han desarrollado básicamente para los arreglos binarios, cuyos elementos son exclusivamente ceros y unos.

El concepto principal de la topología digital y de sus aplicaciones a los problemas de reconocimiento y procesamiento de imágenes, es el de *invarianza de una transformación* aplicada a la imagen. Con mucha frecuencia se entiende por invarianza la conservación de la topología (invariantes de la forma) al pasar a la imagen resultante. Existen diferentes métodos para definir este concepto. Hilditch[13], por ejemplo, denomina invariante a una transformación si la imagen resultante es un retracto de deformación de la imagen original. En el caso bidimensional este criterio es equivalente al criterio Ronse[22], de Stefanelli-Rosenfeld[27]. Casi todos los algoritmos de adelgazamiento, contracción y algunos otros, se basan en este principio.

La *esqueletización de imágenes* es una operación típica de preprocesamiento en los problemas de reconocimiento de patrones. Su objetivo es el de reducir el conjunto de puntos de una imagen binaria a un “esqueleto” preservando su topología, por ejemplo, en el sentido de Stefanelli-Rosenfeld. El panorama más general de la literatura en adelgazamiento bidimensional se puede encontrar en los trabajos [8, 12, 19, 28].

Es bien sabido que a cada espacio simplexial (y en consecuencia a cada imagen análoga) se le puede hacer corresponder su *característica de Euler*. Se sabe también que este número es tanto un invariante topológico como homotópico de la imagen. En el caso de las imágenes digitales bidimensionales la característica de Euler es la diferencia entre los números cero y uno de Betti o , lo que es lo mismo, la diferencia entre el número de componentes de conexidad y de agujeros de la imagen. En el caso general, la característica de Euler es la suma algebraica de los números de Betti del espacio (de la imagen).

Varios métodos han sido propuestos para el cálculo de la característica de Euler de un objeto binario, interesándonos la forma en que lo hacen en [29], en donde la característica de Euler es calculada a partir de propiedades topológicas de los objetos en una imagen como conectividad, conexidad y concavidad. La característica de Euler se utiliza en diferentes problemas de aplicación. En el caso de imágenes biológicas, por ejemplo, se requiere saber el número de formas conteniendo cero hoyos. Este número puede ser fácilmente obtenido al calcular, a partir de cada objeto en la imagen, su número de Euler. La característica de Euler ha sido también usada en el reconocimiento de partes industriales [16]. Por tanto, el cómo formar un algoritmo rápido para la obtención de esta característica en tiempo real, es de gran importancia en muchas aplicaciones.

Al mismo tiempo, es indudable que es más informativo conocer los números de Betti que la característica de Euler, lo que en el caso de las imágenes digitales bidimensionales significa conocer el número de componentes de conexidad y el número de agujeros de la imagen. Sin embargo, en este caso, la bibliografía no es tan amplia. Para el caso de las imágenes

digitales bidimensionales, algunos de estos algoritmos fueron encontrados por Bykov-Zerkalov[1, 5, 6].

En este trabajo, se estudian las propiedades y las características de las imágenes binarias bidimensionales. A estas propiedades sería más correcto denominarlas homotópicas en lugar de topológicas (como se denominan con frecuencia en las publicaciones correspondientes) ya que son invariantes homotópicas y no simplemente topológicas de realizaciones poliédricas de imágenes consideradas. Entre estas propiedades se puede mencionar, por ejemplo, la conexidad, el número de agujeros o cavidades y, por supuesto, la característica de Euler.

El concepto fundamental que consideramos es el de índice de un punto lattice, que representa una característica local de un punto en una imagen binaria. Este concepto fue introducido por primera vez en 1990 en el trabajo de G. Nepomniaschii y E. Shchepin[26] como índice de un píxel solo para (8, 4) imágenes, es decir para las imágenes que se suponen 8-adyacentes para los puntos negros y 4-adyacentes para los puntos blancos. Posteriormente este concepto fue desarrollado en los trabajos de A. Bykov y L. Zerkalov [1, 2, 3, 4] quienes lograron dar de manera natural la definición de equivalencia homotópica de las (8,4) imágenes y crear una serie de algoritmos fundamentados en el concepto de índice. Entre estos algoritmos cabe mencionar varios algoritmos para el cálculo de los números de Betti de una imagen digital.

En el trabajo, se introduce el concepto de equivalencia homotópica entre imágenes para adyacencia (8,4). Esta definición permite hablar sobre la invarianza de una transformación en sentido homotópico aplicada a una imagen. Es importante mencionar que las imágenes homotópicamente equivalentes tienen realizaciones poliédricas que son homotópicamente equivalentes en el sentido usual. Por eso las propiedades y características de imágenes ya mencionadas (conexidad, la característica de Euler, los números de Betti, etc.) son invariantes de transformaciones en sentido homotópico.

El enfoque propuesto al concepto de equivalencia homotópica, facilita la fundamentación usando herramientas de Topología Algebraica y Topología Combinatoria, y la programación de muchos algoritmos orientados a la clasificación y reconocimiento de imágenes digitales. Los algoritmos que desarrollaremos en este trabajo son:

- de contracción y expansión.
- del cálculo de la característica de Euler y los números de Betti, para el caso de las (8, 4) imágenes bidimensionales.
- de esqueletización.

Una gran ventaja de estos algoritmos, es que son eficientes (puesto que se basan en análisis locales de la imagen); lo cual, como ya habíamos mencionado es muy importante en la aplicación a problemas reales. Este trabajo, nos permite ver claramente, una aplicación de los métodos de Topología, en este caso al procesamiento de imágenes; lo cual es muy interesante, pues se podría pensar que una rama tan abstracta de la matemática, no tiene aplicaciones reales.

2. Organización de la Tesis

La tesis consta de cuatro capítulos, los cuales se encuentran organizados de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se muestran los elementos básicos de la Topología Digital, que se necesitan para describir una imagen binaria haciendo uso de los llamados puntos lattice, a los cuales se les asocia su análogo continuo, para poder aplicar las herramientas de las Topologías Algebraica y Combinatoria, y finalmente poder demostrar que los algoritmos que se presentan dejan invariante el tipo homotópico.

El capítulo II, contiene algunos conceptos básicos de Topología Algebraica y se introduce la Topología Combinatoria, presentando algunas definiciones como la de simplejo, a partir de la cual se definen los Complejos Simpliciales. También, se definen los grupos de homología y se estudian los homomorfismos definidos entre estos grupos, inducidos por mapeos, así como su invarianza bajo ciertas transformaciones.

En el capítulo III, se realiza la conexión entre la teoría estudiada en los primeros dos capítulos con las imágenes digitales a las cuales se les aplicarán los algoritmos. En este capítulo, se da la definición de índice de un píxel (en términos de la característica de Euler), la cual va a ser de gran importancia, ya que esta es la base de nuestros algoritmos. También se introduce el concepto de pixel simple, mismo que se usará para enunciar un teorema muy importante, que nos asegura que el análogo continuo de la imagen inicial y de la imagen obtenida al quitar sucesivamente píxeles de este tipo, tienen el mismo tipo homotópico y, usando un Teorema, se muestra que sus grupos de homología son iguales.

Por último, en el capítulo IV, se presentan los algoritmos que se programaron: los algoritmos de contracción y expansión combinatoria, que preservan el tipo homotópico; los algoritmos que nos sirven para calcular la característica de Euler, los números de Betti; y el algoritmo de esqueletización, el cual conserva los rasgos y el tipo homotópico de la imagen original. Se da la justificación de su validez al aplicarlos en las imágenes digitales, haciendo referencia a los resultados teóricos que se presentan en los capítulos anteriores.

CAPÍTULO I. Imágenes bidimensionales.

Este capítulo contiene los elementos básicos de la Topología Digital, que se necesitan, para describir una imagen binaria haciendo uso de los llamados puntos lattice, a los cuales les asociaremos su análogo continuo, para poder aplicar las herramientas de las Topologías Algebraica y Combinatoria, para finalmente poder demostrar, que los algoritmos que se presentan dejan invariante el tipo homotópico.

1.1 Definiciones principales

1.1.1 Relación de conexidad en conjuntos de puntos lattice.

Sea \mathbb{Z} el conjunto de todos los números enteros, $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \{(z_1, \dots, z_k) : z_i \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto de todas las k-adas ordenadas de números enteros.

Definición 1.1. Los elementos $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ corresponden a los puntos con coordenadas enteras en el plano euclideo y se llaman *puntos lattice*.

Definición 1.2. Dos puntos lattice $p, q \in \mathbb{Z}^2$ se dicen ser *8-adyacentes* si son distintos, y cada coordenada de uno de ellos, difiere en a lo más uno, de la respectiva coordenada del otro, es decir, para $p = (x_1, x_2)$ y $q = (y_1, y_2)$, se tiene:

$$|x_i - y_i| = 0 \quad \text{o} \quad |x_i - y_i| = 1, \quad i = 1, 2$$

Dos puntos lattice $p, q \in \mathbb{Z}^2$ se llaman *4-adyacentes* si ellos son *8-adyacentes* y difieren en a lo más una de sus coordenadas en uno. Para $n = 4$ u 8 , un *n-vecino* del punto p , es un punto q que es *n-adyacente* a p (ver Fig. 1(a), (b)).

Definición 1.3. Si $p \in \mathbb{Z}^2$ es un punto lattice entonces la *n-vecindad* de p (Fig. 1(b)) es el conjunto:

$$N(p) = \{ q \in \mathbb{Z}^2 : q \text{ es } n\text{-adyacente con } p \} \cup \{ p \}$$

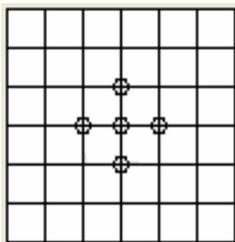
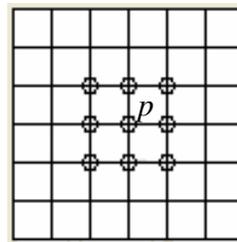


Fig. 1. (a) p y sus 4-vecinos



(b) $N(p)$, p y sus 8-vecinos

Definición 1.4. Un conjunto S de puntos lattice se dice m -adyacente a un conjunto T de puntos lattice si algún punto en S es m -adyacente a algún punto de T (Fig. 2).

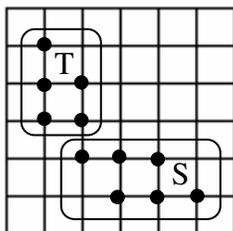


Fig. 2 El conjunto S es a la vez 4 y 8-adyacente al conjunto T

En particular, un punto p es *adyacente* a un conjunto de puntos S si p es adyacente a algún punto de S (Fig. 3)

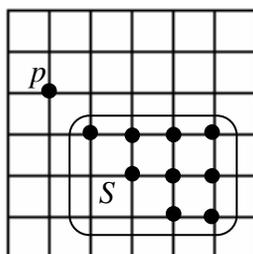


Fig. 3. p es 8-adyacente al conjunto S , pero no es 4-adyacente a S

Definición 1.5. Un conjunto de puntos lattice S , $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ es m -conexo si S no se puede ver como la unión de dos conjuntos disjuntos, A y B , donde A y B son no m -adyacentes el uno del otro (Fig. 4).

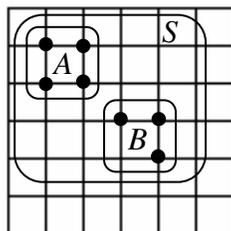


Fig. 4. S es 8-conexo, pero no 4-conexo

Definición 1.6. Una m -componente de un conjunto de puntos lattice S , es un subconjunto de S , no vacío, m -conexo, que no es m -adyacente a algún punto de S (Fig. 5).

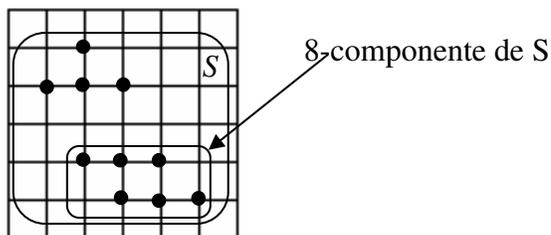


Fig. 5. Una 8-componente de S

Definición 1.7. Para cualquier conjunto de puntos lattice S , $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, un m -camino en S es una sucesión finita $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ de puntos en S tales que p_i es m -adyacente a p_{i+1} para $1 \leq i < n-1$. Un camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ es un m -camino de p_1 a p_n . Se dice que los puntos p_1 y p_n son unidos por el camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$.

Un camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ es cerrado si $p_1 = p_n$.

Un camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ es simple si $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$ e $(i, j) \neq (1, n)$ (un camino simple puede ser cerrado).

Un camino $\langle p_1 \rangle$ es un caso especial de camino cerrado, que consiste del único punto p_1 .

Definición 1.8. Se dice que dos puntos p y q del conjunto S están en *relación de m -conexidad* R_m si, y sólo si p y q pueden ser unidos por un m -camino en S .

Es claro que:

1. R_m es una relación de equivalencia en S .
2. Un conjunto S es m -conexo si, y sólo si cualesquiera dos puntos de S están en relación R_m , es decir, pueden ser unidos mediante un camino en S .
3. Una m -componente de S es una clase de equivalencia de S respecto a R_m .

1.1.2. Teorema de Jordan

A cada punto lattice se le asigna un “color”; separando así los puntos, en conjuntos cuyos puntos tengan las mismas propiedades. En el presente trabajo vamos a considerar solo dos colores: blanco y negro.

En lo que sigue, en calidad de imagen digital vamos a suponer el conjunto \mathbb{Z}^2 con ciertos conjuntos fijos de puntos negros (que van a ser propiamente la imagen digital). Los demás puntos se consideran blancos (y forman el fondo). Estas imágenes digitales se denominan binarias.

En la realización computacional, estas imágenes por supuesto, se representan por medio de arreglos bidimensionales consistentes de *unos* (puntos negros) y *ceros* (puntos blancos).

Sin duda, una de las grandes ideas de la topología digital, es la de considerar un tipo de adyacencia para el conjunto de puntos negros, y otro tipo para el conjunto de puntos blancos (Duda, Hart, Munson [10]). La razón es evitar paradojas como la siguiente:

Considérese la figura 6, donde cuatro puntos negros forman el conjunto B y los demás puntos son blancos.

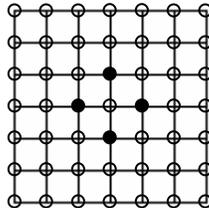


Fig. 6. Paradojas de la conexidad

En primer lugar, supongamos que vamos a utilizar *4-adyacencia* tanto para pares de puntos negros como para parejas de puntos blancos.

Entonces el conjunto B de puntos negros (figura 6) es totalmente desconexo. Pero B , separa al conjunto de puntos blancos en dos componentes no 4-adyacentes entre sí.

Esto último contradice al recíproco del análogo discreto del teorema de Jordan (Rosenfeld [23]), según el cual “*Cualquier camino simple cerrado negro que no está contenido en una celda unitaria, divide al plano en dos componentes blancas*”. El camino simple cerrado así considerado es el análogo discreto de una curva de Jordan.

Por lo tanto, si queremos evitar esta contradicción, no debemos asumir simultáneamente 4-adyacencia para pares de puntos negros y pares de puntos blancos.

Supongamos ahora que se va a utilizar *8-adyacencia* para ambos tipos de pares de puntos.

En nuestro caso, el conjunto B de puntos negros sería el análogo discreto de una curva de Jordan, por lo tanto, esperaríamos que separara al plano discreto en por lo menos dos componentes. Sin embargo, *no lo hace*, ya que cualquier par de puntos blancos q_1 y q_2 pueden ser conectados por un *camino* hecho todo de puntos blancos, y que no intersecta a la curva B . Esto significa que dicha curva no divide al plano discreto. Aquí el complemento de B es conexo. Por lo tanto llegamos a una contradicción.

El análisis anterior, sugiere que debemos considerar un tipo de adyacencia para los pares de puntos negros y otro para las parejas de puntos blancos.

Supongamos por ejemplo, 8-adyacencia para los pares de puntos negros y 4-adyacencia para los pares de puntos blancos.

En este caso, el conjunto B sigue siendo el análogo discreto de una curva de Jordan, sólo que ahora, sí separa al plano discreto en *dos* componentes: la formada por el punto central (blanco) y aquella constituida por los demás puntos blancos. Cualquier camino que conecte al punto p con cualquier otro punto blanco (como estamos asumiendo 4-adyacencia para los pares de puntos blancos), necesariamente va a intersectar a la curva B . Como puede notarse, en esta situación, no hay contradicción.

Un caso similar ocurre si consideramos 4-adyacencia para todos los pares de puntos negros y 8-adyacencia para todos los pares de puntos blancos.

Por esa razón, siempre se considera un tipo de adyacencia para los puntos blancos y otro tipo de adyacencia para los puntos negros.

Precisamente, para el caso 2D, se asume 8-adyacencia para negros y 4-adyacencia para blancos, o viceversa.

1.1.3. Imágenes digitales binarias

Definición 1.9. Una *imagen digital* P es una tetrada $P = (\mathbb{Z}^2, m, n, B)$, donde $B \subseteq \mathbb{Z}^2$, con $(m, n) = (8, 4)$. Los puntos de B se llaman *puntos negros*, mientras que los puntos de $\mathbb{Z}^2 \setminus B$ se llaman puntos blancos de la imagen, y constituyen el *fondo* de la misma. Cuando B es un conjunto finito la imagen P se denomina finita. Asumimos 8-adyacencia para los puntos de B y 4-adyacencia para los puntos de $\mathbb{Z}^2 \setminus B$.

Se puede dar una definición más de imagen digital.

En lugar de \mathbb{Z}^2 , vamos a considerar un subconjunto finito $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, el cual contiene a todas las imágenes. En la práctica, S puede considerarse como la colección de todos los puntos de la pantalla del monitor. De tal manera que, nos referiremos a la imagen $P = (S, m, n, B)$.

Definición 1.10. Dos puntos negros en una imagen digital $P = (S, m, n, B)$, se denominan *adyacentes* si ellos son m -adyacentes, y dos puntos blancos o bien un punto blanco y uno negro se dicen adyacentes si ellos son n -adyacentes. Una imagen digital (S, m, n, B) , también se llamará una (m, n) imagen digital (Fig. 7).

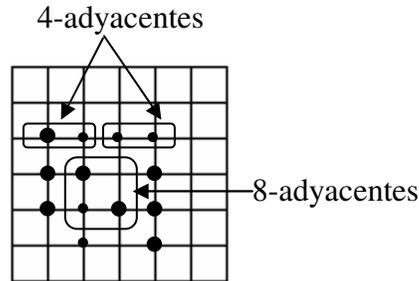


Fig. 7. Adyacencia entre puntos

Definición 1.11. Un conjunto S de puntos negros (blancos) en una imagen digital (m, n) es *conexo* si S es m -conexo (respectivamente n -conexo) (Fig. 8).

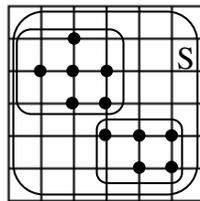


Fig. 8. El conjunto S de puntos negros es conexo

Definición 1.12. En una imagen digital (m, n) , una *componente* de un conjunto S de *puntos negros* es una m -componente, mientras que una *componente* de un conjunto de *puntos blancos* es una n -componente de este conjunto.

Definición 1.13. Una componente del conjunto de todos los puntos negros de una imagen digital se llama *componente negra*, y una componente del conjunto de puntos blancos se llama *componente blanca* (Fig.9).

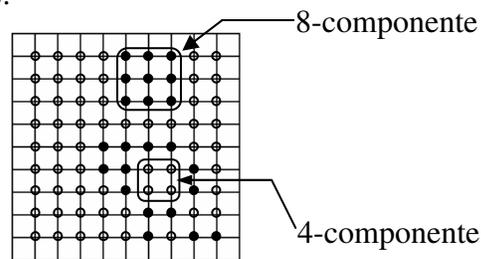


Fig. 9. Componentes de una imagen (8,4)

Definición 1.14. Sea $P = (\mathbb{Z}^2, m, n, B)$ una imagen digital. Las componentes blancas finitas de P se llaman *agujeros*. (Fig. 10)

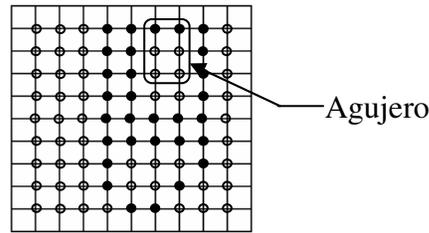


Fig. 10. Agujero en una imagen

Definición 1.15. Para una imagen digital $P = (\mathbb{Z}^2, m, n, B)$ la unión de todos los agujeros, es un subconjunto del fondo que se llama *fondo interno de P* , y se denota por $F_{\text{int}}(P)$. El conjunto $(\mathbb{Z}^2 \setminus B) \setminus F_{\text{int}}(P)$ se llama *fondo externo de P* y se denota por $F_{\text{ext}}(P)$.

En particular, si P es finita entonces $F_{\text{ext}}(P)$ es la única componente blanca infinita.

Observación 1.1. Para el caso más general, si $P = (\mathbb{Z}^2, m, n, B)$, los agujeros en P coinciden con los agujeros en $P' = (S^2, m, n, B)$ y también $F_{\text{int}}(P)$ es la unión de todos los agujeros, $F_{\text{ext}}(P) = (S \setminus B) \setminus F_{\text{int}}(P)$.

Definición 1.16. Un punto negro se llama *aislado* si no es adyacente a algún otro punto negro (Fig. 11).

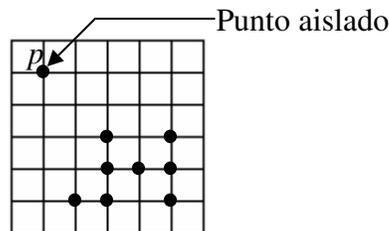


Fig. 11. Punto aislado p

1.2. Realización geométrica y poliédrica de imágenes digitales binarias.

1.2.1 Complejos cúbicos como realización geométrica de imágenes.

En primer lugar, indicaremos la forma de relacionar los conceptos de la topología digital en términos de puntos lattice, con sus análogos en términos de píxeles.

A cada punto lattice $p \in \mathbb{Z}^2$ le asociaremos un *complejo cúbico 2-dimensional* consistente de

1. La única 2-celda (cuadrado unitario centrado en el punto p , cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados);
2. cuatro 1-celdas a_1, a_2, a_3, a_4 llamadas aristas;

3. cuatro 0-celdas v_1, v_2, v_3, v_4 llamadas vértices.

Este complejo cúbico se llamará *pixel*.

Notación: $v = |p|$.

El pixel v será llamado la realización geométrica del punto lattice p (Fig. 12)

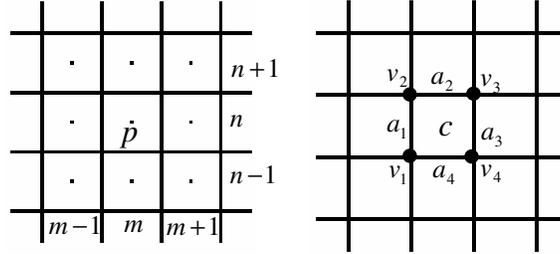


Fig.12. Punto lattice p y su pixel v asociado

Bajo esta suposición, dos pixeles que corresponden a puntos lattice 4-adyacentes tienen dos vértices comunes y una arista común. Dos pixeles que corresponden a puntos lattice 8-adyacentes tienen al menos un vértice común.

Sea $|\mathbb{Z}^2|$ la unión de todos los pixeles como complejos:

$$|\mathbb{Z}^2| = \bigcup \{ |p| : p \in \mathbb{Z}^2 \}$$

Entonces $|\mathbb{Z}^2|$ es un complejo cúbico 2-dimensional, del cual damos una definición más estricta a continuación.

Definición 1.17. Consideremos el conjunto \mathfrak{U} de todos los puntos $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}) \in \mathfrak{R}^2$, con $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Llamaremos a estos puntos, *vértices* del complejo cúbico $|\mathbb{Z}^2|$. Los elementos de $|\mathbb{Z}^2|$ se llamarán *celdas o cubos*.

Las celdas son ciertos subconjuntos de \mathfrak{U} que contienen 2^n elementos ($n = 0, 1, 2$).

Cada celda está totalmente determinada por sus 2^n vértices, y se llama *n-celda* o celda de dimensión n .

Así:

0-celdas son los vértices, o sea, subconjuntos de \mathfrak{U} que contienen 2^0 elementos.

1-celdas son celdas con 2^1 vértices, por ejemplo en los puntos $(x \pm \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ o $(x + \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2})$, con $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

2-celdas son celdas con 2^2 vértices, por ejemplo en los puntos $(x \pm \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2})$, con $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Definición 1.18. Cualquier conjunto $K \subset |\mathbb{Z}^2|$ lo llamaremos *complejo cúbico*. Si $L \subset K$, decimos que L es un *subcomplejo* de K . El complejo $\bar{K} = |\mathbb{Z}^2| \setminus K$ se llama *complejo cúbico complemento* de K .

Definición 1.19. La celda s será llamada una *cara* de la celda s' , si $s \subset s'$. Si además $s \neq s'$, diremos que s es una *cara propia*.

Por ejemplo, en la figura 12, las caras propias de la celda c son $v_1, v_2, v_3, v_4, a_1, a_2, a_3, a_4$; caras propias de la celda a_1 son v_1, v_2 , etc....

Definición 1.20. La celda s es *cara* (cara propia) del complejo K si es cara (cara propia) de alguna celda de K . La *frontera* δK del complejo K es el complejo que consiste de todas las celdas de K las cuales son caras de \bar{K} y de todas las celdas de \bar{K} las cuales son caras de K , es decir:

$$s \in \delta K \Leftrightarrow (s \in K \wedge s \text{ es cara de } \bar{K}) \text{ o } (s \in \bar{K} \wedge s \text{ es cara de } K)$$

Equivalentemente:

$$s \in \delta K \Leftrightarrow (s \text{ es cara de } K) \wedge (s \text{ es cara de } \bar{K})$$

El complejo K se llama cerrado si $\delta K \subset K$.

1.2.2 Realización poliédrica como análogo continuo de imágenes

A cada complejo $K \subset |\mathbb{Z}^2|$ podemos asociarle su natural realización “poliédrica” $|K|$, i.e. su realización como un subconjunto del espacio euclideo \mathfrak{R}^2 .

En el caso de celdas del complejo $K \subset |\mathbb{Z}^2|$, la realización poliédrica de cada 0-celda $s = \{v_0\} = (x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2})$ es naturalmente el mismo punto v_0 como punto de \mathfrak{R}^2 . 1-celda s con vértices v_1, v_2 es el interior del segmento de recta $\overline{v_1 v_2}$. Por ejemplo, si $v_1 = (x_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2}), v_2 = (x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2})$, entonces

$$|s| = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 : x_0 - \frac{1}{2} < x < x_0 + \frac{1}{2}, y = y_0 + \frac{1}{2} \right\}.$$

2-celda s con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 es el interior del cuadrado con vértices en los mismos puntos. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_0 - \frac{1}{2}, y_0 - \frac{1}{2}), v_2 = (x_0 + \frac{1}{2}, y_0 - \frac{1}{2}), \\ v_3 &= (x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2}), v_4 = (x_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

entonces:

$$|s| = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 : x_0 - \frac{1}{2} < x < x_0 + \frac{1}{2}, y_0 - \frac{1}{2} < y < y_0 + \frac{1}{2} \right\}.$$

Definición 1.21. La *realización poliédrica* de cualquier complejo K es el conjunto

$$|K| = \bigcup \{ |s| : s \in K \}.$$

Si el complejo K es cerrado entonces $|K|$ es cerrado en \mathfrak{R}^k , y por eso es compacto si K es finito.

Definición 1.22. La *Realización poliédrica* $\|P\|$ de la imagen $P = (\mathbb{Z}^2, 8, 4, B)$ se llama al espacio cerrado $\|B\|$, y *realización poliédrica* del fondo se llama al espacio abierto $\|F\|^\circ$, donde el círculo denota el interior del espacio.

Dualmente, para el caso de imágenes $P = (\mathbb{Z}^2, 8, 4, B)$ se tiene que la *realización poliédrica* $\|P\|$ de la imagen P es el espacio abierto $\|B\|^\circ$, y la del fondo es el espacio cerrado $\|F\|$.

No es difícil ver, que para la imagen $P = (\mathbb{Z}^2, m, n, B)$, donde $(m, n) = (8, 4)$ o $(4, 8)$, el subconjunto $\|P\| \subset \mathfrak{R}^2$ puede considerarse como un análogo continuo $C(P)$ de la imagen P .

A continuación, mencionamos tres propiedades importantes de $C(P)$:

1. El conjunto de puntos lattice correspondiente a cada componente de $C(P)$, es una componente negra de P .
2. El conjunto de puntos lattice correspondiente a cada componente del complemento de $C(P)$, es una componente blanca de P .
3. Una componente negra D de P será adyacente a una componente blanca E de P si, y sólo si las fronteras de las componentes de $C(P)$, que contienen D , y las componentes del complemento de $C(P)$ que contienen E , se tocan.

En la figura 13, se muestran diferentes análogos continuos de una $(8, 4)$ imagen digital, uno de los cuales (Fig. 13(a)) se asume en el contexto del presente trabajo. El otro (Fig. 13(b)) es usado por otros autores. En ambas figuras se trata del mismo conjunto de puntos negros.

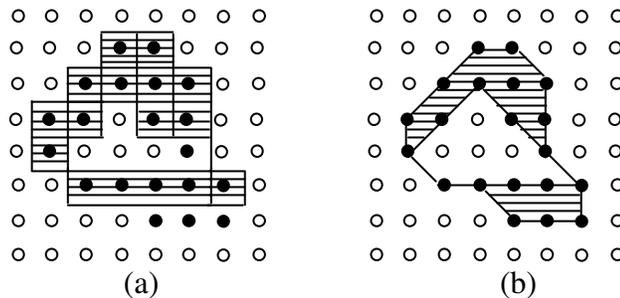


Fig. 13. Análogos continuos

Finalmente, una vez habiendo obtenido la realización poliédrica $\|P\| \subset \mathfrak{R}^k$ de la imagen, podemos aplicar la teoría correspondiente de transformaciones topológicas y homotópicas con el fin de poder calcular propiedades invariantes desde tal punto de vista, mismas que coadyuvan a la clasificación y reconocimiento automático de la imagen P .

En particular, consideramos la característica de Euler y los números de Betti de la realización poliédrica. Estas propiedades se calculan utilizando un retracto fuerte de deformación de ésta.

CAPÍTULO II. Topología Combinatoria

En este capítulo se introducen conceptos básicos de Topología Algebraica, como homotopía, retracts. Además nos adentramos en la Topología Combinatoria, y presentamos definiciones como la de simplejo, a partir de la cual, podemos definir los Complejos Simpliciales.

También, definimos un operador frontera, a partir de este y de las definiciones de los grupos de ciclos y fronteras, se definen los grupos de homología. Se estudian los homomorfismos definidos entre los grupos de homología (los cuales son muy importantes, pues nos permiten determinar algunas propiedades de los espacios, como el número de componentes conexas y el número de agujeros); inducidos por mapeos. Así como su invarianza bajo ciertas transformaciones.

Usaremos estos resultados para estudiar en el capítulo posterior las propiedades invariantes de los análogos continuos.

2.1. Conceptos básicos de Topología Algebraica.

Sean X, Y dos espacios topológicos, y sea $I = [0,1]$.

Definición 2.1. Si f y g son funciones continuas del espacio X en el espacio Y , decimos que f es homotópica a g , si existe una función continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que:

$$F(x,0) = f(x) \text{ y } F(x,1) = g(x), \text{ para todo } x \in X$$

La función F se conoce como **homotopía** de f a g .

Si f es homotópica a g , escribimos: $f \simeq g$.

Es decir, f es homotópica a g si, para $t \in I$, podemos encontrar alguna función $f_t : X \rightarrow Y$, dada por $f_t(x) = F(x,t)$; obteniendo así una colección de funciones con índices en I , $\{f_t\}_{t \in I}$, que inicia en f y termina en g mediante la cual, podemos ir continuamente de f a g .

Ejemplo:

Dadas dos funciones continuas cualesquiera f y g de un espacio X en \mathbb{R}^2 . Es fácil comprobar que f es homotópica a g , pues la función $F : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre ellas, la cual es conocida como homotopía por rectas, porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que las une.

Definición 2.2. Sean f y g funciones continuas del espacio X en el espacio Y . Supongamos que $A \subseteq X$ (no vacío) es tal que: $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$.

Una **homotopía de f a g relativa al conjunto A** , es una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ de f a g tal que:

$$F(a,t) = f(a) \quad \forall a \in A \quad \text{y} \quad \forall t \in I$$

La función F se conoce como **homotopía relativa a A** entre f y g .

Si f es homotópica a g relativa a A , escribimos: $f \simeq g \text{ rel. } A$.

Definición 2.3. Sea X un espacio topológico, y sea $A \subseteq X$. Supongamos que $r : X \rightarrow A$ es una función continua, tal que $r(a) = a \quad \forall a \in A$.

Una función de esta forma, se conoce como: **retracción r** de X en A .

En este caso decimos que A es un **retracto** de X .

Definición 2.4. Sea A un subespacio de X . Decimos que A es un retracto por deformación de X , si existe una retracción r de X en A , y una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ relativa a A entre 1_X e $i \circ r$; donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión.

La homotopía H se llama **retracto por deformación** de X en A .

Ejemplo:

Sea $B = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 - B$ tiene a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ como retracto de deformación.

La homotopía está dada por: $H(x,y,z,t) = (x,y,(1-t)z)$

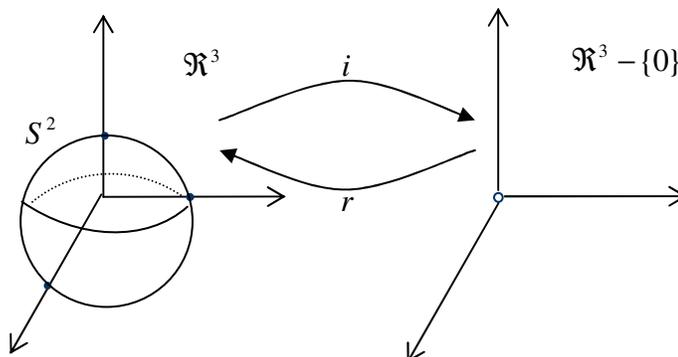
Definición 2.5. Un subespacio $A \subseteq X$ es un **retracto fuerte por deformación** de X , si existe una retracción r de X en A , tal que si: $i : A \rightarrow X$ es la inclusión, entonces:

$$1_X \simeq i \circ r \text{ rel. } A$$

Si F es la homotopía relativa a A , entre 1_X e $i \circ r$, entonces F es llamada una retracción fuerte por deformación.

Ejemplo:

$S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\|_2 = 1\}$, donde $\|\cdot\|_2$ indica la norma euclídea es un retracto fuerte por deformación de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.



Prueba.

La función $r: \mathfrak{R}^3 - \{0\} \rightarrow S^2$, definida por: $r(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ es una retracción de $\mathfrak{R}^3 - \{0\}$ en S^2 .

Además el mapeo $F: (\mathfrak{R}^3 - \{0\}) \times I \rightarrow \mathfrak{R}^3 - \{0\}$, definido por:

$$F(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|_2}, \quad x \in \mathfrak{R}^3 - \{0\}, \quad t \in I$$

es un retracto fuerte por deformación de $\mathfrak{R}^3 - \{0\}$ en S^2 :

$$F(x, 0) = (1-0)x + 0 \frac{x}{\|x\|_2} = x = 1_x(x), \quad \forall x \in \mathfrak{R}^3 - \{0\}$$

$$F(x, 1) = (1-1)x + 1 \frac{x}{\|x\|_2} = \frac{x}{\|x\|_2} = i \circ r(x), \quad \forall x \in \mathfrak{R}^3 - \{0\}$$

$$F(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|_2} = (1-t)x + tx = x, \quad \forall x \in S^2$$

■

2.2 Complejos simpliciales.

Definición 2.6. Sea $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset \mathfrak{R}^n$, decimos que los puntos v_0, v_1, \dots, v_k están en posición general si el conjunto $\{v_1 - v_0, v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} & v_2 \bullet & \\ & & \\ v_0 \bullet & & \bullet v_1 \end{array}$$

Definición 2.7. Dados $k+1$ puntos v_0, v_1, \dots, v_k en posición general, llamaremos al conjunto convexo más pequeño que los contiene, un *simplejo de dimensión k* , denotado por k -simplejo. Los puntos v_0, v_1, \dots, v_k son llamados los vértices del simplejo. Puede probarse que un punto x pertenece al simplejo, si y solo si se puede escribir como una combinación lineal de los vértices del simplejo:

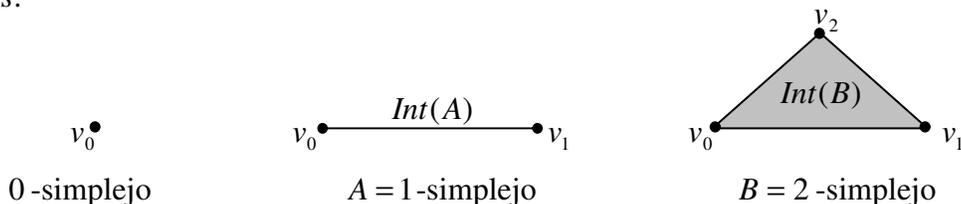
$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

Observación 2.1. Todo simplejo es convexo, cerrado y compacto.

Definición 2.8. Dado un simplejo A , decimos que x está en el interior de A , si se puede escribir de la forma:

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \text{ donde } \lambda_i > 0 \text{ y } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

Ejemplos:



Observación 2.2. Si una arista tiene vértices v, w , entonces el símbolo $[(v, w)]$ denota la arista orientada en la dirección de v en w . Análogamente, si u, v, w son los vértices de un triángulo de K , entonces $[(u, v, w)]$ denota este triángulo orientado por el ordenamiento u, v, w de sus vértices; así $[(u, v, w)] = [(v, w, u)] = [(w, u, v)]$.

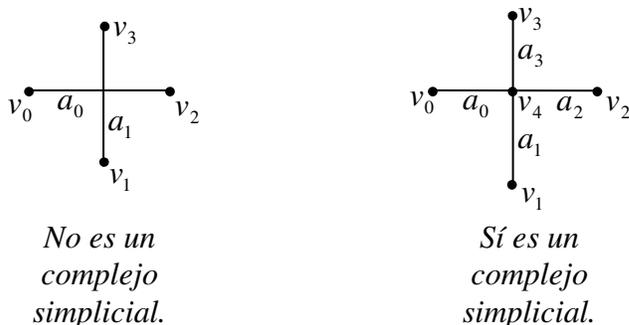
Definición 2.9. Si A y B son simplejos, y si los vértices de B forman un subconjunto de los vértices de A , entonces decimos que B es una *cara* de A , y lo denotaremos por $B < A$.

Definición 2.10. Un *complejo simplicial* es una colección finita K de simplejos, con las siguientes propiedades:

1. Si un simplejo pertenece a K , todas sus caras también pertenecen a K .
2. Si dos elementos de K se intersectan, lo hacen en una cara común.

La *dimensión* de un complejo K , es la máxima de las dimensiones de los simplejos que lo forman.

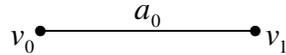
Ejemplos:



Definición 2.11. Un *subcomplejo* L de un complejo simplicial K , denotado por: $L \subset K$ es un subconjunto de K , que también es un complejo simplicial.

Definición 2.12. Un *poliedro o realización poliédrica* $|K|$ de un complejo simplicial K es la unión de los simplejos de K , tomado con la topología de subespacio de \mathfrak{R}^n .

Ejemplo:



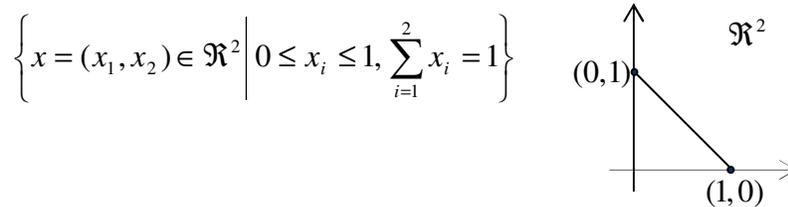
Teorema 2.1. Dado un q -simplejo s en un complejo simplicial K , existe un homeomorfismo entre s y el conjunto:

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathfrak{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=1}^{q+1} x_i = 1 \right\}$$

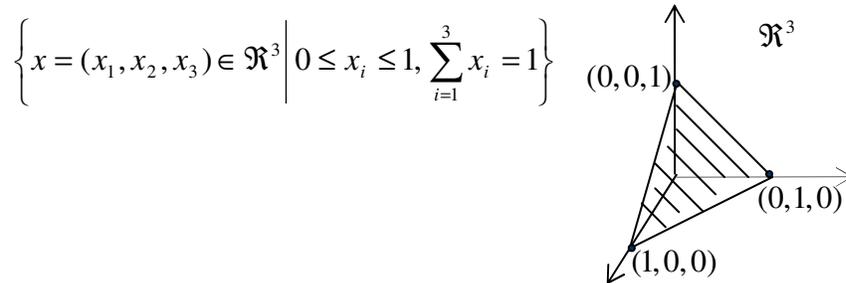
(Ver [14])

Ejemplos:

1) Si s es un 1-simplejo, existe un homeomorfismo entre s y el conjunto:



2) Si s es un 2-simplejo, existe un homeomorfismo entre s y el conjunto:

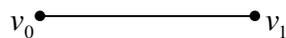


Definición 2.13. Dado un q -simplejo s en un complejo simplicial K , el conjunto de todas las *caras propias* de s , es un complejo simplicial, denotado por \dot{s} .

Ejemplos:

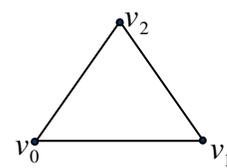
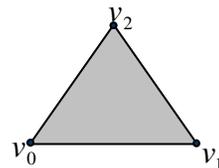
1) Si s es un 1-simplejo:

Entonces, \dot{s} es:



2) Si s es un 2-simplejo:

Entonces, \dot{s} es:



Definición 2.14. Sea X un espacio topológico.

X es *triangulable* si es homeomorfo a algún poliedro $|K|$.

Una condición necesaria para que un espacio X sea triangulable es que X sea compacto.

Ejemplos:

1. \mathfrak{R}^n : No es triangulable, pues no es compacto.
2. Un cubo es triangulable con la topología de subespacio de \mathfrak{R}^3 .

Por definición, un complejo simplicial siempre consiste de los simplejos que están en algún espacio euclideo \mathfrak{R}^n . Si deseamos enfatizar el papel jugado por el espacio euclideo, diremos que K es un complejo en \mathfrak{R}^n . (Enfatizamos que K es una colección de simplejos, no un conjunto de puntos).

Consideremos \mathfrak{R}^n como el subespacio de \mathfrak{R}^{n+1} consistente de esos puntos que tienen coordenada final cero. Podemos construir un complejo CK en \mathfrak{R}^{n+1} , el cual es llamado el *cono* sobre K , como sigue.

Sea $v = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathfrak{R}^{n+1}$. Si A es un k -simplejo en \mathfrak{R}^n con vértices v_0, v_1, \dots, v_k , entonces los puntos v_0, v_1, \dots, v_k están en posición general y por lo tanto, determinan un $(k+1)$ -simplejo en \mathfrak{R}^{n+1} . Este $(k+1)$ -simplejo es llamado el cono con base en A y vértice v .

Nuestro cono CK consiste de los simplejos de K , los conos con base en cada uno de estos simplejos y vértice v , y el 0-simplejo v . (Ver Fig. 1)

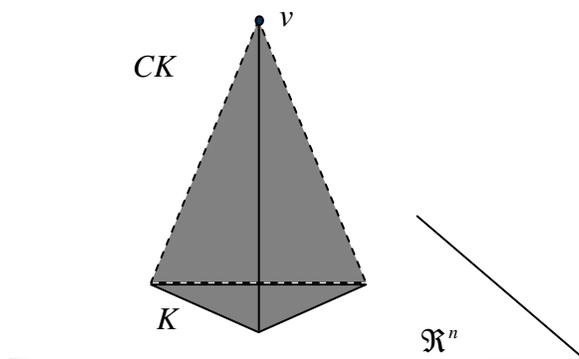


Fig. 1. Cono sobre K

2.3 Subdivisión Baricéntrica

Sea K un complejo simplicial en \mathfrak{R}^n . En esta sección, describiremos una construcción que nos permite dividir los simplejos de K y producir un nuevo complejo K^1 , el cual tiene el mismo poliedro de K , pero con simplejos de diámetro menor.

Este proceso, es llamado “subdivisión baricéntrica”. Si A es un simplejo de K con vértices v_0, v_1, \dots, v_k entonces cada punto x de A tiene una única expresión de la forma

$$x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \text{ donde } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ y todos los } \lambda_i \text{ son no negativos.}$$

Estos números λ_i son llamados las coordenadas baricéntricas del punto x , y el baricentro (o centro de gravedad) de A es el punto:

$$\hat{A} = \frac{1}{k+1} (v_0 + v_1 + \dots + v_k)$$

Para formar K^1 empezamos añadiendo vértices extra a K en los baricentros de sus simplejos. Entonces, trabajando en orden de dimensión creciente, dividimos cada simplejo de K como un cono con vértice en el vértice extra de su baricentro. La Fig. 2 ilustra este proceso.

Para definir K^1 más precisamente, necesitamos describir sus simplejos. Los vértices de K^1 son los baricentros de los simplejos de K . (Este incluye los vértices originales de K , pues un 0-simplejo es su propio baricentro.)



Fig. 2. Proceso de subdivisión baricéntrica

Una colección $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k$ de tales baricentros forman los vértices de un k -simplejo de K^1 si y solo si:

$$A_{\sigma(0)} < A_{\sigma(1)} < \dots < A_{\sigma(k)}$$

para alguna permutación σ de los enteros $0, 1, 2, \dots, k$. Por ejemplo, en la Fig. 2 los baricentros $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ determinan un 2-simplejo de K^1 , y observando en K , podemos ver que: $C < B < A$. Note que si $A_{\sigma(0)} < A_{\sigma(1)} < \dots < A_{\sigma(k)}$ entonces para cada i , el baricentro $\hat{A}_{\sigma(i)}$ cae fuera del hiperplano generado por $\hat{A}_{\sigma(0)}, \dots, \hat{A}_{\sigma(i-1)}$. En consecuencia, los puntos $\hat{A}_{\sigma(0)}, \dots, \hat{A}_{\sigma(k)}$ están en posición general.

Definimos inductivamente la m -ésima subdivisión baricéntrica K^m de K por:

$$K^m = (K^{m-1})^1$$

Mostramos un ejemplo en la Fig. 3.

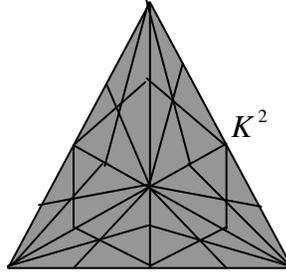


Fig 3. K^2 , cuando K consiste de un 2-simplejo junto con todas sus caras.

2.4 Aproximación Simplicial

Definición 2.15. Sean K y L complejos simpliciales. Una función $s: |K| \rightarrow |L|$ es llamada *simplicial* si manda linealmente simplejos de K en simplejos de L ; es decir, si dado un simplejo A en K con vértices v_0, v_1, \dots, v_k , y si $x \in A$ es el punto $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, donde los λ_i son no negativos y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, entonces cuando se expresa $s(x)$ en términos de los vértices de $s(A)$ es $s(x) = \lambda_0 s(v_0) + \lambda_1 s(v_1) + \dots + \lambda_k s(v_k)$.

Definición 2.16. Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ un mapeo entre poliedros. Dado un punto $x \in |K|$, el punto $f(x)$ cae en el interior de un único simplejo de L .

A este simplejo le llamaremos *carril* de $f(x)$.

Definición 2.17. Un mapeo simplicial $s: |K| \rightarrow |L|$ es una *aproximación simplicial* de un mapeo $f: |K| \rightarrow |L|$ si $s(x)$ pertenece al carril de $f(x)$ para cada $x \in |K|$.

Probaremos ahora un Teorema de gran importancia, (Teorema de Aproximación simplicial), que nos asegura que dado un mapeo entre poliedros, existe un mapeo simplicial que lo aproxima simplicialmente. Este resultado será de gran importancia, pues nos permitirá demostrar que los poliedros sobre los que esta definido tienen ciertos invariantes homotópicos. Pero antes demos unos resultados necesarios para la prueba.

Definición 2.18. Dado un complejo K , definimos $\mu(K)$ como el máximo de los diámetros de sus simplejos.

Definición 2.19. Sea K un complejo, y sea v un vértice de K .

La **estrella abierta** de v en K , es la unión de los interiores de los simplejos de K , que tienen a v como vértice.

Este es un subconjunto de $|K|$ y lo denotaremos por $star(v, K)$. En la Fig. 4, se muestra un ejemplo.

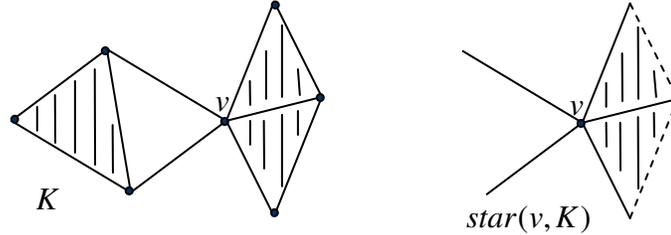


Fig. 4. Ejemplo de la construcción de una estrella abierta

Lema 2.1. Los vértices v_0, v_1, \dots, v_k de un complejo simplicial K , generan (es decir, son los vértices de) un simplejo de K si y solo si: $\bigcap_{i=0}^k star(v_i, K) \neq \emptyset$

Prueba.

Si v_0, v_1, \dots, v_k son los vértices de un simplejo A de K entonces el interior de A cae en $star(v_i, K)$, para $0 \leq i \leq k$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \bigcap_{i=0}^k star(v_i, K)$ y sea A el carril de x . Por la definición de estrella abierta, cada v_i debe ser un vértice de A , y por lo tanto v_0, v_1, \dots, v_k generan alguna cara de A . ■

Teorema de Aproximación simplicial.

Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ un mapeo entre poliedros.

Si m se escoge lo suficientemente grande, entonces existe una aproximación simplicial $s: |K^m| \rightarrow |L|$ para $f: |K^m| \rightarrow |L|$.

Para la prueba, necesitamos un lema, pero primero introduzcamos unos conceptos necesarios.

Prueba.

Primero se trata el caso especial, en que no es necesario dividir los simplejos de K .

Supongamos que para cada vértice u de K podemos encontrar un vértice v de L , tal que satisface la inclusión:

$$f(star(u, K)) \subseteq star(v, L) \quad (*)$$

Definimos una función s de los vértices de K en los vértices de L , escogiendo v que satisface (*) para cada u , y hacemos $s(u) = v$. Entonces, por el lema anterior y la inclusión (*) podemos concluir que si u_0, u_1, \dots, u_k generan un simplejo de K , entonces sus imágenes $s(u_0), s(u_1), \dots, s(u_k)$ generan un simplejo de L .

Así, extendiendo s linealmente sobre cada simplejo de K , obtenemos un mapeo simplicial $s: |K| \rightarrow |L|$; el cual aproxima simplicialmente f , pues:

Para cada punto x de $|K|$ sean u_0, u_1, \dots, u_k los vértices de su carril. Entonces $x \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(u_i, K)$ y por lo tanto, por la inclusión (*), se tiene que $f(x) \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(s(u_i), L)$. Esto significa que el carril de $f(x)$ en L tiene al simplejo generado por $s(u_0), s(u_1), \dots, s(u_k)$ como una cara, y en consecuencia, debe contener al punto $s(x)$.

Ahora bien, para tratar con el Teorema en general, solo necesitamos mostrar que podemos convenir que la inclusión (*) se satisface a expensas de reemplazar K por una subdivisión baricéntrica K^m adecuada.

Se tiene que $\{\text{star}(v, L) : v \in L\}$ forma una cubierta abierta de $|L|$. Como $f: |K| \rightarrow |L|$ es continua, entonces: $\{f^{-1}(\text{star}(v, L)) : v \in L\}$ forma una cubierta abierta de $|K|$. Sea δ un número de Lebesgue de esta cubierta abierta ($|K|$ es un espacio métrico compacto, luego podemos aplicar el Lema de Lebesgue [17]) y escoger m lo suficientemente grande tal que $\mu(K^m) < \delta/2$; para esto, observemos que el diámetro de un simplejo es la longitud de su arista más larga; sea σ una arista de K^1 con vértices \hat{A} y \hat{B} , donde $B < A$, entonces σ está contenido en A , y si la dimensión de A es k , tenemos:

$$\text{longitud de } \sigma \leq \frac{k}{k+1} (\text{diámetro de } A) \leq \frac{n}{n+1} (\text{diámetro de } A) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K);$$

donde n es la dimensión de K ; por lo tanto $\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$; y como K^m está construida inductivamente a partir de K , por $K^m = (K^{m-1})^1$, tenemos que $\mu(K^m) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$. Por otro lado, dado un vértice u de K^m , el diámetro de sus estrellas abiertas en K^m es menor que δ , así $\text{star}(u, K^m) \subset f^{-1}(\text{star}(v, L))$ para algún vértice v de L , como requeríamos. Lo cual completa la prueba. ■

2.5 Homología simplicial (Ciclos y fronteras)

Dados un simplejo con vértices v_0, v_1, \dots, v_k , junto con una ordenación específica de sus vértices (v_0, v_1, \dots, v_k) y σ una permutación de los números $0, 1, \dots, k$.

Los conjuntos:

$$\begin{aligned} [(v_0, v_1, \dots, v_k)] &= \{(v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) : \sigma \text{ es par}\} \text{ y} \\ -[(v_0, v_1, \dots, v_k)] &= \{(v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) : \sigma \text{ es impar}\} \end{aligned}$$

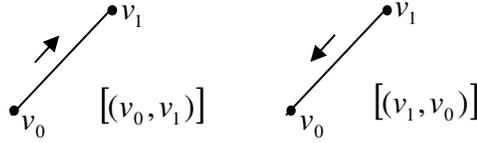
, forman una partición de las ordenaciones posibles de los vértices de un simplejo.

Un *simplejo orientado* es una de las clases de equivalencia inducida por esta partición.

Observación 2.3.

Un 0-simplejo no tiene orientación.

A un 1-simplejo se le pueden dar dos orientaciones posibles:

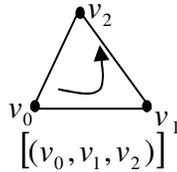


Un simplejo obtenido al quitarle el vértice v_i a algún k -simplejo orientado, tiene una orientación inducida por la del k -simplejo, y está dada por:

$$(-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)]$$

Ejemplo:

Si se tiene el 2-simplejo orientado:



Entonces:

$$\begin{aligned} [(v_0, v_1)] &= (-1)^2 [(v_0, v_1)] \\ -[(v_0, v_2)] &= (-1)^1 [(v_0, v_2)] \end{aligned}$$

Definición 2.20. $C_q(K)$ (q -ésimo grupo cadena de K) es el grupo abeliano libre generado por los q -simplejos orientados de K , sujeto a la relación $\sigma + \tau = 0$, siempre que σ y τ sean el mismo simplejo, pero con orientaciones opuestas; este grupo es isomorfo a Z^m , donde m es el número de q -simplejos de K .

Sus elementos son llamados cadenas q -dimensionales; las cuales se pueden representar como combinación lineal $\lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_s \sigma_s$ de q -simplejos orientados de K con coeficientes enteros $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Definición 2.21. Dado $[(v_0, v_1, \dots, v_k)]$ un k -simplejo orientado definimos su frontera como:

$$\partial[(v_0, \dots, v_k)] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)]$$

Es decir, la frontera de un q -simplejo orientado se define como la $(q-1)$ -cadena determinada por la suma de sus caras $(q-1)$ dimensionales, tomadas con la orientación inducida por el q -simplejo.

Es claro que

$$\partial[(v_0, v_1, \dots, v_k)] + \partial[-[(v_0, v_1, \dots, v_k)]] = 0$$

Pues

$$\begin{aligned} & \partial[(v_0, v_1, \dots, v_k)] + \partial[-[(v_0, v_1, \dots, v_k)]] \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)] + \sum_{i=0}^k (-1)^i [-[(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)]] \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)] - [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto nos permite definir el *operador frontera*: $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$,

dado por:

$$\partial_q [(v_0, \dots, v_k)] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)]$$

ya que preserva la relación en los generadores de $C_q(K)$: $\sigma + (-\sigma) = 0$. En el caso $q = 0$, se define la frontera de un solo vértice, la cual es cero, y se tiene: $C_{-1}(0) = 0$.

El operador frontera es un homomorfismo de grupos,

Definición 2.22. El núcleo del homomorfismo $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ se llama grupo abeliano libre de q -ciclos de K , y se denota por $Z_q(K)$.

Definición 2.23. La imagen del homomorfismo $\partial_{q+1} : C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)$ se llama grupo de q -fronteras; y lo denotamos por $B_q(K)$.

Lema 2.2. La composición $C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{(q+1)}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K)$ es el homomorfismo cero.

Prueba. Solo necesitamos verificar que $\partial^2 = \partial \circ \partial$ da cero, cuando se aplica a cualquier $(q+1)$ -simplejo de K .

$$\begin{aligned} \partial^2 [(v_0, \dots, v_q)] &= \partial \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{q+1})] = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \partial [(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{q+1})] \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{q+1} (-1)^{j-i} \partial [(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{q+1})] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i [(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{q+1})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Todos los términos se cancelan por parejas en esta última expresión, pues cada $(q-1)$ -simplejo orientado $(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{q+1})$ aparece dos veces, la primera vez con signo $(-1)^{i+j-1}$ y la segunda con el signo opuesto $(-1)^{i+j}$.

■

Corolario 2.1. $B_q(K)$ es un subgrupo de $Z_q(K)$ es decir, toda q -frontera es un q -ciclo.

Prueba.

Sea $\sigma \in B_q(K) = \text{Im}(\partial_{q+1})$, entonces

$$\sigma = \partial_{q+1}(\tau), \quad \tau \in C_{q+1}(K)$$

Luego

$$\partial_q(\sigma) = \partial_q(\partial_{q+1}(\tau)) = 0$$

Por lo tanto

$$\sigma \in \text{Ker}(\partial_q(K)) = Z_q$$

Así

$$B_q(K) \text{ es un subgrupo de } Z_q(K)$$

■

Así, como $Z_q(K)$ y $B_q(K)$ son grupos abelianos, $B_q(K)$ es un subgrupo normal de $Z_q(K)$, podemos hacer su cociente; denotado por:

$$H_q(K) = Z_q(K) / B_q(K)$$

, el cual es conocido como el **q -ésimo grupo de homología.**

El elemento de $H_q(K)$ determinado por un q -ciclo z será llamado la *clase de homología* de z . Dos q -ciclos cuya diferencia es un q -ciclo frontera tienen la misma clase de homología y serán llamados ciclos homólogos.

$H_q(K)$ es un grupo abeliano finitamente generado. Entonces por el Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados [15], se puede ver como:

$$H_q(K) = F \oplus T$$

, donde F es un grupo abeliano libre finitamente generado (es decir, es la suma directa de un número finito de copias de Z) y T es un grupo abeliano finito.

Los elementos de T , son llamados elementos de torsión, y son aquellos que tienen orden finito.

El *rango* de F es el número de sumandos que aparecen, al expresar F como una suma de grupos cíclicos infinitos; el cual es llamado el q -ésimo número de Betti y se denota por β_q .

Es decir:

β_0 : Número de componentes conexas

β_1 : Número de agujeros

(Ver [17]).

Definición 2.24. La característica de Euler de un complejo simplicial finito K se define como:

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q R_q(K),$$

donde $R_q(K)$ es el rango de $H_q(K)$.

Teorema 2.2. Si K es un complejo simplicial finito y α_q es el número de q -simplejos de K entonces:

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q \alpha_q$$

Prueba.

Sea $\rho_q = \text{ran}(Z_q)$. Es claro que $\alpha_q = \text{ran}(C_q)$.

B_{q-1} es un grupo abeliano libre, pues es subgrupo del grupo abeliano libre C_{q-1} .

Para cada $\sigma \in B_{q-1}$ existe $r(\sigma) \in C_q$ tal que $\partial_q r(\sigma) = \sigma$. Esto nos permite definir un homomorfismo $r: B_{q-1} \rightarrow C_q$ tal que $\partial_q r = 1_{B_{q-1}}$.

Dado $\sigma \in C_q$, $\tau = \partial_q \sigma \in B_{q-1}$ y $r\tau \in r(B_{q-1})$. Además

$$\partial_q(\sigma - r\tau) = \partial_q \sigma - \partial_q r\tau = \tau - \tau = 0$$

es decir, $\sigma - r\tau \in Z_q$.

Ahora, dado $\sigma \in Z_q \cap D_q$ arbitrario, se tiene

$$\partial_q(\sigma) = 0 \quad \text{y} \quad \sigma = r(\tau), \quad \tau \in B_{q-1}$$

luego

$$\tau = 1_{B_{q-1}}(\tau) = \partial_q r(\tau) = \partial_q(\sigma) = 0$$

Por lo tanto $\sigma = r(\tau) = 0$

Esto prueba que $C_q = Z_q \oplus D_q$, con $D_q = r(B_{q-1})$.

Puesto que $D_q \approx B_{q-1}$, se tiene

$$\text{ran}(B_{q-1}) = \text{ran}(D_q) = \alpha_q - \rho_q.$$

Además, $H_q(K) = Z_q(K) / B_q(K)$, por lo que $R_q(K) = \rho_q - (\alpha_{q+1} - \rho_{q+1})$.

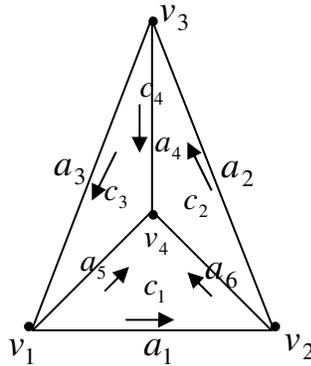
Luego:

$$\begin{aligned} \sum (-1)^q R_q(K) &= (\rho_0 + \rho_1 - \alpha_1) - (\rho_1 + \rho_2 - \alpha_2) + \\ &\quad \cdots + (-1)(\rho_{n-1} + \rho_n - \alpha_n) + (-1)^n \rho_n, \quad n = \dim K \\ &= \rho_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n \end{aligned}$$

Al ser $\rho_0 = \alpha_0$, la prueba es completa. ■

Ejemplo 1:

Calculemos los grupos de homología y la característica de Euler de un tetraedro hueco.



$$C_0(K) = \mathbb{Z}^4, \quad C_1(K) = \mathbb{Z}^6, \quad C_2(K) = \mathbb{Z}^4, \quad C_3(K) = \{0\}$$

Definimos: $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow C_{-1}(K) = \{0\}$, entonces:

$$\text{Ker}(\partial_0) = C_0(K) = Z_0(K)$$

Por definición, $\partial_1 : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$, está dada por:

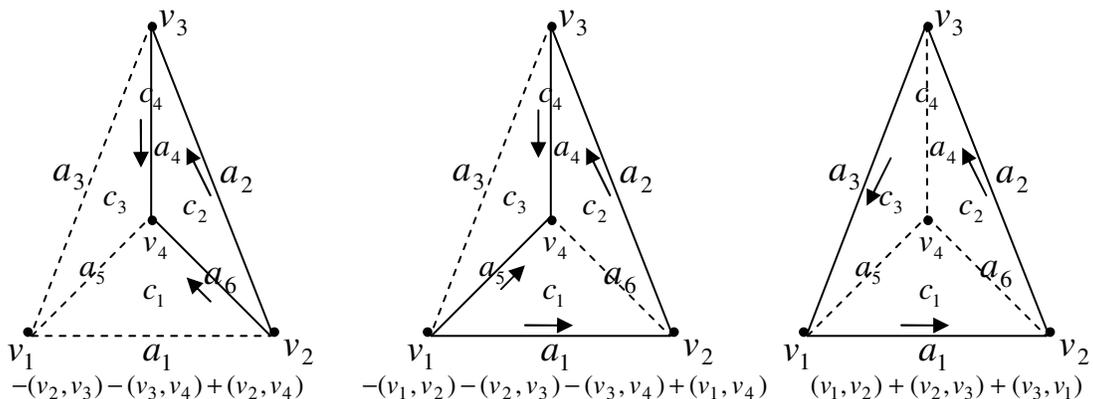
$$\begin{aligned} \partial_1(a_1) &= v_2 - v_1 & \partial_1(a_4) &= v_4 - v_3 \\ \partial_1(a_2) &= v_3 - v_2 & \partial_1(a_5) &= v_4 - v_1 \\ \partial_1(a_3) &= v_1 - v_3 & \partial_1(a_6) &= v_4 - v_2 \end{aligned}$$

Se puede ver que:

$$B_0(K) = \text{Im}(\partial_1) = \text{gen}\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_4 - v_3\}, \quad \text{ran}(B_0(K)) = 3$$

$$Z_1(K) = \text{Ker}(\partial_1) = \text{gen} \left\{ \begin{array}{l} -(v_2, v_3) - (v_3, v_4) + (v_2, v_4), \\ -(v_1, v_2) - (v_2, v_3) - (v_3, v_4) + (v_1, v_4), \\ (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1) \end{array} \right\}, \quad \text{ran}(Z_1(K)) = 3$$

Veamos, qué significan geoméricamente estos generadores:



En seguida, definamos: $\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$, dada por:

$$\begin{aligned}\partial_2(c_1) &= (v_1, v_2) + (v_2, v_4) - (v_1, v_4) & \partial_2(c_3) &= (v_3, v_1) + (v_1, v_4) - (v_3, v_4) \\ \partial_2(c_2) &= (v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4) & \partial_2(c_4) &= (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}B_1(K) = \text{Im}(\partial_2) &= \text{gen} \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2) + (v_2, v_4) - (v_1, v_4), \\ (v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4), \\ (v_3, v_1) + (v_1, v_4) - (v_3, v_4) \end{array} \right\}, \quad \text{ran}(B_1(K)) = 3 \\ Z_2(K) = \text{Ker}(\partial_2) &= \text{gen} \{ -(v_1, v_2, v_4) - (v_2, v_3, v_4) - (v_3, v_1, v_4) + (v_1, v_2, v_3) \}, \quad \text{ran}(Z_2(K)) = 1\end{aligned}$$

Y por último, definamos $\partial_3 : C_3(K) \rightarrow C_2(K)$, dada por:

$$\partial_3(1) = 0$$

Entonces

$$\text{ran}(B_2(K)) = 0$$

Luego

$$\begin{aligned}H_0(K) &= Z_0(K) / B_0(K) \approx \mathbb{Z} \\ H_1(K) &= Z_1(K) / B_1(K) \approx \{0\} \\ H_2(K) &= Z_2(K) / B_2(K) \approx \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Así,

$$\chi(K) = 1 - 0 + 1 = 2$$

Ahora, comprobemos que $H_1(K) = Z_1(K) / B_1(K) \approx \{0\}$. Para esto, veamos que cada uno de los generadores de $Z_1(K)$ se puede ver como combinación lineal de los generadores de $B_1(K)$:

Observemos que

$$\begin{aligned}-(v_2, v_3) - (v_3, v_4) + (v_2, v_4) &= \alpha_1 [(v_1, v_2) + (v_2, v_4) - (v_1, v_4)] \\ &\quad + \alpha_2 [(v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4)], \\ &\quad + \alpha_3 [(v_3, v_1) + (v_1, v_4) - (v_3, v_4)]\end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$.

también

$$\begin{aligned}-(v_1, v_2) - (v_2, v_3) - (v_3, v_4) + (v_1, v_4) &= \alpha_1 [(v_1, v_2) + (v_2, v_4) - (v_1, v_4)] \\ &\quad + \alpha_2 [(v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4)] \\ &\quad + \alpha_3 [(v_3, v_1) + (v_1, v_4) - (v_3, v_4)]\end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$.

y por último,

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1) &= \alpha_1 [(v_1, v_2) + (v_2, v_4) - (v_1, v_4)] \\ &\quad + \alpha_2 [(v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4)] \\ &\quad + \alpha_3 [(v_3, v_1) + (v_1, v_4) - (v_3, v_4)] \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$.

Ahora, calculemos la característica de Euler usando el teorema 2.2.

Tenemos que

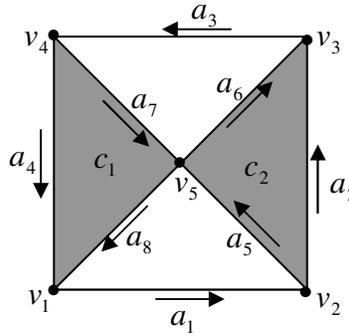
$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 4.$$

Entonces

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^2 (-1)^q \alpha_q = 4 - 6 + 4 = 2$$

Ejemplo 2:

Calculemos los grupos de homología y la característica de la siguiente imagen:



$$C_0(K) = \mathbb{Z}^5, \quad C_1(K) = \mathbb{Z}^8, \quad C_2(K) = \mathbb{Z}^2, \quad C_3(K) = \{0\}$$

Nuevamente, definimos los homomorfismos frontera y encontramos que:

$$Z_0(K) = \text{Ker}(\partial_0) = C_0(K) = \mathbb{Z}^5,$$

$$B_0(K) = \text{Im}(\partial_1) = \text{gen}\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_4 - v_3, v_5 - v_2\}, \quad \text{ran}(B_0(K)) = 4$$

$$Z_1(K) = \text{Ker}(\partial_1) = \text{gen} \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_1), \\ -(v_2, v_3) + (v_2, v_5) + (v_5, v_3), \\ (v_2, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_5) + (v_4, v_5), \\ (v_1, v_2) + (v_2, v_5) + (v_5, v_1) \end{array} \right\}, \quad \text{ran}(Z_1(K)) = 4$$

$$B_1(K) = \text{Im}(\partial_2) = \text{gen} \left\{ \begin{array}{l} (v_4, v_5) + (v_5, v_1) - (v_4, v_1), \\ (v_2, v_5) + (v_5, v_3) - (v_2, v_3) \end{array} \right\}, \quad \text{ran}(B_1(K)) = 2$$

Por tanto:

$$H_0(K) = Z_0(K) / B_0(K) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_1(K) = Z_1(K) / B_1(K) \approx \mathbb{Z}^2$$

Efectivamente, se observa que la imagen tiene una componente conexa y dos agujeros.

2.6 Mapeos simpliciales

Sean K, L complejos y $s: |K| \rightarrow |L|$ un mapeo simplicial. Dado un q -simplejo orientado $\sigma = [(v_0, \dots, v_q)]$ de K , definimos $s_q(\sigma)$ como el q -simplejo orientado $[(s(v_0), \dots, s(v_q))]$ de L , si todos los vértices $s(v_0), \dots, s(v_q)$ son distintos y $s_q(\sigma) = 0$ de otro modo.

Esto determina un homomorfismo que va de $C_q(K)$ en $C_q(L)$, pues $s_q(-\sigma) = -s_q(\sigma)$.

Este homomorfismo a su vez, induce un homomorfismo $(s_q)_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ definido por $(s_q)_*(z + B_q(Z)) = s_q(z) + B_q(L)$. A continuación, mencionamos y probamos un lema que permite justificar la definición de este homomorfismo.

Lema 2.3. $\partial s_q = s_{q-1} \partial: C_q(K) \rightarrow C_q(L)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 C_q(K) & \xrightarrow{s_q} & C_q(L) \\
 \downarrow \partial & \searrow & \downarrow \partial \\
 C_{q-1}(K) & \xrightarrow{s_{q-1}} & C_{q-1}(L)
 \end{array}$$

Prueba.

Debemos mostrar que $\partial s_q(\sigma) = s_{q-1} \partial(\sigma)$, para cualquier q -simplejo orientado $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_q)$ de K .

Esto es claro si todos los vértices $s(v_0, \dots, s(v_q))$ son distintos, pues se tendría:

$$\begin{aligned}
s_{q-1}\partial(\sigma) &= s_{q-1}\partial(v_0, \dots, v_q) = s_{q-1}\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)\right) \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^i (s(v_0), \dots, s(\hat{v}_i), \dots, s(v_q)) \\
&= \partial(s(v_0), \dots, s(v_q)) \\
&= \partial(s_q(v_0, \dots, v_q)) \\
&= \partial s_q(\sigma)
\end{aligned}$$

En otro caso, supongamos que $s(v_j) = s(v_k)$, donde $j < k$. Por definición tenemos $s_q(\sigma) = 0$, luego $\partial s_q(\sigma) = 0$.

Ahora bien, $s_{q-1}\partial(\sigma) = \sum (-1)^i s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$.

Examinando los términos en esta suma, si i no es j o k , entonces:

$$s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q) = 0.$$

Los dos términos restantes son:

$$(-1)^j s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q) \text{ y } (-1)^k s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_q).$$

Los cuales son distintos de cero, solo si v_j y v_k son los únicos vértices de σ identificados por s , y en este caso ambos términos se cancelan, pues:

$$\begin{aligned}
s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q) &= (s(v_0), \dots, \hat{s}(v_j), \dots, v_q) \\
&= (-1)^{k-j-1} (s(v_0), \dots, \hat{s}(v_k), \dots, v_q) \\
&= (-1)^{k-j-1} s_{q-1}(v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_q)
\end{aligned}$$

■

Ahora, para probar que s_{q^*} es un homomorfismo, debemos ver que s_q manda ciclos de K en ciclos de L y ciclos frontera en ciclos frontera.

Sea z un q -ciclo de K , entonces $\partial(z) = 0$. Luego, por el lema:

$$\partial s_q(z) = s_{q-1}\partial(z) = s_{q-1}(0) = 0$$

Es decir, $s_q(z)$ es un ciclo de L .

Sea ahora $b \in B_q(K)$, entonces $b = \partial(c)$, para algún $c \in C_{q+1}(K)$.

Luego, nuevamente por el lema, se tiene

$$\partial s_{q+1}(c) = s_q\partial(c) = s_q(b)$$

Así, $s_q(b) \in B_q(L)$.

Por lo tanto $s_q(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$ y $s_q(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$.

Ahora, introduciremos un poco de terminología, que nos ayudará a simplificar nuestra notación.

Definición 2.25. Dado un complejo simplicial K , definimos un *complejo cadena* de K como la colección de grupos y homomorfismos

$$\dots \rightarrow C_q(K) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

y lo denotaremos por $C(K)$.

Siempre que tengamos un homomorfismo $\phi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ para cada q , satisfaciendo $\partial\phi_q = \phi_{q-1}\partial$; abreviaremos la colección completa por $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ y llamaremos a ϕ un *mapeo cadena*. La propiedad importante de un mapeo cadena es que induce homomorfismos $(\phi_q)_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ entre sus grupos de homología, definidos por $(\phi_q)_*(z + B_q(K)) = \phi_q(z) + B_q(L)$; la prueba es análoga a la que se hizo para mapeos simpliciales.

Así, un mapeo simplicial de K en L induce, por el teorema anterior, un mapeo cadena de el complejo cadena de K en el de L . Por tanto, estos homomorfismos están bien definidos.

Abreviaremos nuestra notación y simplificaremos nuestros homomorfismos como:

$$\phi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L) \text{ y } (\phi_q)_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L).$$

en caso de que no haya confusión.

Lema 2.4 Si $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$ es un segundo mapeo cadena, entonces:

$$\psi \circ \phi : C(K) \rightarrow C(M)$$

es un mapeo cadena y

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(M).$$

Prueba.

Tenemos dos colecciones de grupos y homomorfismos:

$$\dots \rightarrow C_q(K) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

$$\dots \rightarrow C_q(L) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(L) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow C_0(L) \xrightarrow{\partial} 0$$

$$\phi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L), \quad \psi_q : C_q(L) \rightarrow C_q(M), \quad \text{para cada } q.$$

tales que

$$\partial\phi_q = \phi_{q-1}\partial$$

$$\partial\psi_q = \psi_{q-1}\partial$$

Luego, podemos definir

$$(\psi \circ \phi)_q = \psi_q \circ \phi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(M), \quad \text{para cada } q$$

Además

$$\begin{aligned}
 \partial(\psi \circ \phi)_q &= \partial(\psi_q \circ \phi_q) \\
 &= \partial\psi_q(\phi_q) \\
 &= \psi_{q-1}\partial\phi_q \\
 &= \psi_{q-1}\phi_{q-1}\partial \\
 &= (\psi \circ \phi)_{q-1}\partial
 \end{aligned}$$

Así:

$$\psi \circ \phi : C(K) \rightarrow C(M) \text{ es un mapeo cadena y } (\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(M)$$

■

2.7 Subdivisión estelar.

En esta sección, mostraremos que la subdivisión baricéntrica no cambia los grupos de homología de un complejo, es decir, si K^m es una subdivisión baricéntrica de K , entonces: $H_q(K) \approx H_q(K^m)$, para cada q . Para esto, explicaremos cómo subdividir baricéntricamente un complejo, por aplicaciones repetidas de una operación muy simple llamada subdivisión estelar.

Sea K un complejo, sea A un simplejo de K , y denotemos por v al baricentro de A . Dividiremos los simplejos de K como sigue:

Aquellos simplejos que no tienen A como cara, no se tocan.

Si $A < B$, denotemos con L al subcomplejo de la frontera de B , consistente de esos simplejos que no tienen A como cara, y reemplacemos B por el cono con base L y vértice v , como se muestra en la fig. 5

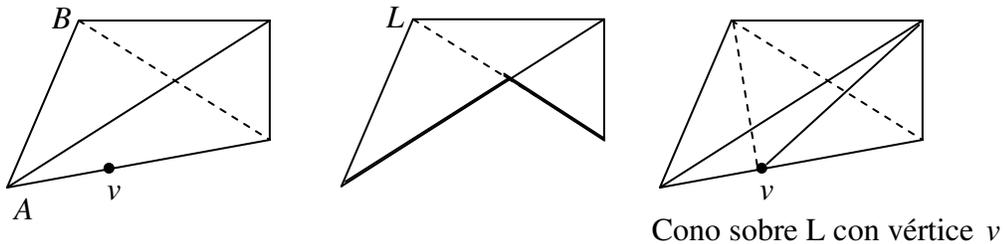


Fig. 5. Construcción de un cono sobre L con vértice v .

Esto tiene sentido, porque añadir v al conjunto de vértices de cualquier simplejo de L , da una colección de puntos que están en posición general. Denotamos el complejo obtenido por K' , y decimos que K' está formado de K por subdivisión estelar del simplejo A .

Supongamos ahora que empezamos con un complejo K y subdividimos estelarmente cada uno de sus simplejos, tomando los simplejos en orden de dimensión decreciente (realmente el orden en las dimensiones no es importante). Entonces obtenemos la primera subdivisión

baricéntrica como se muestra en la Fig. 6. Y por supuesto, podemos repetir el proceso, hasta producir cualquier K^m .

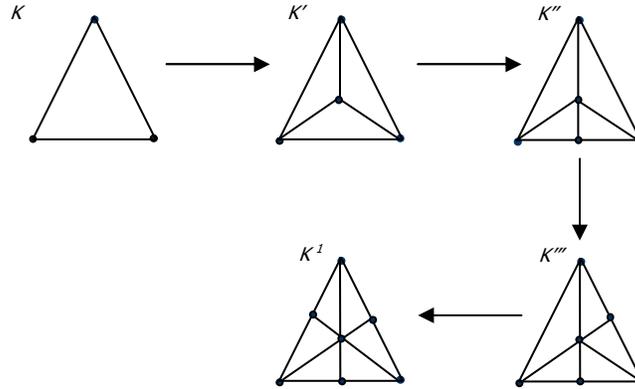


Fig 6. Ejemplo de subdivisión baricéntrica

Ahora, construiremos un mapeo cadena $\chi: C(K) \rightarrow C(K')$ y mostraremos que induce isomorfismos de grupos de homología. Para esto, sólo especificaremos el efecto de χ sobre un q -simplejo σ orientado de K , cuidando que $\chi(-\sigma) = -\chi(\sigma)$.

Supongamos que K' se obtiene de K por una sola subdivisión estelar del simplejo A .

Si A es una cara de σ , entonces σ se divide en pequeños q -simplejos cuando formamos K' .

Definimos $\chi(\sigma)$ como la q -cadena de K' , que es la suma de los q -simplejos de K' que forman σ , cada uno tomado con la orientación inducida por la orientación de σ .

Puesto en forma más general, si $\sigma = (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q)$ y si v_0, \dots, v_k son los vértices de A , entonces:

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q)$$

Si A no es cara de σ , hacemos $\chi(\sigma) = \sigma$.

Lema 2.5. χ es un mapeo cadena.

Prueba.

Para la prueba, veamos el efecto de $\partial\chi_q$ y $\chi_{q-1}\partial$ sobre un q -simplejo orientado de K , y mostrar que éste es el mismo en ambos casos:

Sea $\sigma = (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q)$ un q -simplejo orientado de K y supongamos que v_0, \dots, v_k son los vértices de A .

Entonces:

$$\begin{aligned}
\chi_{q-1}\partial(\sigma) &= \chi_{q-1}((\hat{v}_0, v_1, \dots, v_q) - (v_0, \hat{v}_1, v_2, \dots, v_q) + \dots + (-1)^q (v_0, v_1, \dots, v_{q-1}, \hat{v}_q)) \\
&= \chi_{q-1} \left(\left[(\hat{v}_0, v_1, \dots, v_q) - (v_0, \hat{v}_1, v_2, \dots, v_q) + \dots + (-1)^k (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, \hat{v}_k, v_{k+1}, \dots, v_q) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(-1)^{k+1} (v_0, \dots, v_k, \hat{v}_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_q) + \dots + (-1)^q (v_0, \dots, v_{q-1}, \hat{v}_q) \right] \right) \\
&= \chi_{q-1} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, \dots, v_q) + \sum_{i=k+1}^q (-1)^i (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q) \right) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, \dots, v_q) + \sum_{i=k+1}^q (-1)^i (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q) \\
&= \partial \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i (v, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q) \right) \\
&= \partial \chi_q (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q) \\
&= \partial \chi_q (\sigma)
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que χ es un mapeo cadena, al cual le llamaremos *mapeo de subdivisión de cadena*. ■

Ahora, tenemos homomorfismos $\chi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(K')$ y mostraremos que estos son isomorfismos, con lo cual, habremos probado el Teorema 2.3

Teorema 2.3. Si K' se obtiene de K por una sola subdivisión estelar, entonces K' y K tienen grupos de homología isomorfos.

Prueba.

Supongamos que K' se obtiene de K por una sola subdivisión estelar de el simplejo A . Sean v_0, \dots, v_k los vértices de A y sea v el baricentro de A .

Sea $\theta : K' \rightarrow K$, el mapeo simplicial que manda v en v_0 y deja fijos todos los demás vértices de K' . Usemos el mismo símbolo θ para el mapeo cadena inducido de $C(K')$ en $C(K)$. Ahora $\theta\chi$ es el homomorfismo identidad de $C_q(K)$, para cada q . Por el Lema 2.4,

podemos concluir que $H_q(K) \xrightarrow{\chi_*} H_q(K') \xrightarrow{\theta_*} H_q(K)$ es la identidad.

Veamos que θ_* es una inversa para χ_* :

Sea z un q -ciclo de K' y consideremos $z - \chi\theta(z)$. Si L denota el conjunto de todos los simplejos de K' que tienen a v como vértice, junto con todas sus caras, entonces L es un subsimplejo de K' y es un cono con vértice v . Además, $z - \chi\theta(z)$ es un q -ciclo de L , pues χ y θ son la identidad fuera de L y $\partial(z - \chi\theta(z)) = \partial(z) - \chi\theta\partial(z) = 0$. Pero sabemos que si $q > 0$ entonces $H_q(L) = 0$ y $H_0(L) \cong Z$ (Ver [17]). Así, para $q > 0$, el ciclo $z - \chi\theta(z)$ debe ser la frontera de una $(q+1)$ -cadena de L , y por lo tanto automáticamente la frontera de una $(q+1)$ -cadena de K' . En otras palabras, z y $\chi\theta(z)$ representan la misma clase de homología en $H_q(K')$.

Por otro lado, si $q = 0$, el ciclo $z - \chi\theta(z) \in H_0(L)$, entonces $z, \chi\theta(z) \in H_0(L)$, luego z y $\chi\theta(z)$ representan la misma clase de homología en $H_0(K')$, pues $H_0(L) \cong Z$.

Esto prueba que $H_q(K') \xrightarrow{\theta_*} H_q(K) \xrightarrow{\chi_*} H_q(K')$ es la identidad, completando así la verificación de que χ_* es un isomorfismo. ■

Corolario 2.2. La subdivisión baricéntrica no cambia los grupos de homología de un complejo.

Prueba.

Basta observar que mediante aplicaciones sucesivas de subdivisión estelar, podemos producir cualquier K^m . Obteniendo así una sucesión de isomorfismos entre los grupos de homología y al hacer la composición, concluimos que K y K^m tienen grupos de homología isomorfos. ■

Si K^m es una subdivisión baricéntrica de K , entonces podemos obtenerla de K por una sucesión finita de subdivisiones estelares. La composición de todos los mapeos de subdivisión de cadena da un mapeo cadena $\chi: C(K) \rightarrow C(K^m)$, al cual nos referiremos como mapeo de subdivisión de cadena. Por otro lado, tenemos un mapeo simplicial θ correspondiente a cada subdivisión estelar, el cual no es único, pero se hará una elección particular en cada etapa. Denotaremos la composición de todos estos, por el mismo símbolo y escribiremos $\theta: |K^m| \rightarrow |K|$. Un mapeo construido de esta forma, será llamado un *mapeo simplicial estándar*.

2.8 Homomorfismos inducidos por mapeos

Ahora, probaremos otro resultado muy importante, el cual nos afirma, que dado cualquier mapeo simplicial, éste nos induce un homomorfismo f_* en cada dimensión; pero antes de enunciarlo formalmente, probemos unos resultados necesarios para la prueba.

Hemos visto cómo un mapeo simplicial induce homomorfismos de grupos de homología (Este es el Teorema de Aproximación Simplicial), el cual nos permite pasar al caso general de un mapeo arbitrario. Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ continua y escojamos una aproximación simplicial $s: |K^m| \rightarrow |L|$. Sea $\chi: C(K) \rightarrow C(K^m)$ el mapeo de subdivisión de cadena y definamos el homomorfismo $f_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ inducido por f para ser la composición:

$$H_q(K) \xrightarrow{\chi_*} H_q(K^m) \xrightarrow{s_*} H_q(L)$$

Como podemos ver, en esta definición se podrían elegir aproximaciones simpliciales distintas, pero debemos asegurarnos de que sin importar la aproximación que se escoja, el homomorfismo inducido por ambas es el mismo. Para mostrar que esta elección realmente no importa, necesitamos los siguientes resultados:

Lema 2.6. Si $s, t : |K^m| \rightarrow |L|$ aproximan simplicialmente $f : |K^m| \rightarrow |L|$, se tiene que: s y t son mapeos simpliciales cercanos.

Prueba.

Sea A un simplejo de K^m y sean v_0, v_1, \dots, v_k los vértices de A .

Sea $x = \frac{1}{k+1}(v_0 + \dots + v_k)$ el baricentro de A , entonces:

$$s(x) = \frac{1}{k+1}(s(v_0) + \dots + s(v_k)), \quad t(x) = \frac{1}{k+1}(t(v_0) + \dots + t(v_k))$$

Como s, t aproximan simplicialmente f entonces:

$s(x)$ y $t(x)$ caen en el interior del carril de $f(x)$ para cada $x \in |K^m|$.

Luego, $f(x) \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(s(v_i), L)$. Sea B el carril de $f(x)$. Entonces, por definición de estrella abierta, cada $s(v_i)$ debe ser un vértice de B , y por lo tanto, $s(v_0), s(v_1), \dots, s(v_k)$ generan alguna cara de B . Análogamente para $t(v_i)$. ■

Lema 2.7. Suponga que $s, t : |K| \rightarrow |L|$ son mapeos simpliciales y asumamos que tenemos un homomorfismo $d_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$, para cada q , tal que:

$$d_{q-1}\partial + \partial d_q = t - s : C_q(K) \rightarrow C_q(L).$$

Entonces s y t inducen los mismos homomorfismos de grupos de homología. La colección de homomorfismos $\{d_q\}$ es llamada una *homotopía cadena* entre s y t .

Prueba.

$s_q, t_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ inducen los homomorfismos: $s_{q*}, t_{q*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ definidos por:

$$s_{q*}(z + B_q(K)) = s_q(z) + B_q(L) \quad t_{q*}(z + B_q(K)) = t_q(z) + B_q(L)$$

Sea $x \in H_q(K)$, entonces: $x = z + B_q(K)$. Ahora bien

$$\begin{aligned} (t_* - s_*)(x) &= (t_* - s_*)(z + B_q(K)) = t_*(z + B_q(K)) - s_*(z + B_q(K)) \\ &= (t_q(z) + B_q(L)) - (s_q(z) + B_q(L)) \\ &= (t_q - s_q)(z) \\ &= (d_{q-1}\partial + \partial d_q)(z) \\ &= d_{q-1}\partial(z) + \partial d_q(z) \\ &= \partial d_q(z) + \partial d_q(z) \\ &= \partial(2\partial d_q(z)) \end{aligned}$$

y tenemos que existe una $(q+1)$ -cadena α , tal que: $\partial(\alpha) = (t_* - s_*)(x)$. Es decir, $t_*(x) - s_*(x) \in B_q(L)$, con lo cual termina la prueba. ■

En los siguientes tres lemas, construiremos una homotopía cadena entre dos mapeos simpliciales cercanos $s, t : |K| \rightarrow |L|$.

Definición 2.26. Si σ es un simplejo orientado de K , llamaremos al simplejo mas pequeño de L que tiene a $s(\sigma)$ y $t(\sigma)$ como caras, *carril* de σ .

Lema 2.8. Dado $\sigma = v \in C_0(K)$, definamos $d_0(\sigma) = 0$ si $s(v) = t(v)$, y $d_0(\sigma) = (s(v), t(v))$ si $s(v) \neq t(v)$ entonces $\partial d_0 = t - s : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$ y $d_0(\sigma)$ es una cadena, que cae en el carril de σ .

Prueba.

Veamos primero que $\partial d_0 = t - s : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$

Si $s(v) = t(v)$,

$$(t - s)(\sigma) = t(\sigma) - s(\sigma) = t(v) - s(v) = 0 = \partial d_0(\sigma)$$

Si $s(v) \neq t(v)$,

$$(t - s)(\sigma) = t(\sigma) - s(\sigma) = t(v) - s(v) = \partial(s(v), t(v)) = \partial d_0(\sigma)$$

Por lo tanto: $\partial d_0 = t - s$. Además, es claro que $d_0(\sigma)$ es una cadena; probemos que cae en el carril de σ .

σ es un punto, luego es un simplejo de K , entonces podemos encontrar un simplejo B en L , tal que $s(\sigma)$ y $t(\sigma)$ son caras de B , por ser s, t son cercanos.

Así, basta escoger el simplejo más pequeño en L que tiene como caras a $s(\sigma)$ y $t(\sigma)$, para poder concluir que $d_0(\sigma)$ cae en el carril de σ .

■

Lema 2.9. Suponga que hemos definido los homomorfismos $d_i : C_i(K) \rightarrow C_{i+1}(L)$ para $0 \leq i \leq q-1$ tales que:

a) $d_{i-1}\partial + \partial d_i = t - s : C_i(K) \rightarrow C_i(L)$;

b) $d_i(\sigma)$ es siempre una cadena en el carril de σ .

Si σ es un q -simplejo orientado de K , se tiene que:

$$\partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma)) = 0$$

y de aquí, se puede deducir que:

$$t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma) = \partial(c)$$

para alguna cadena $c \in C_{q+1}(L)$.

Prueba.

Sea σ un q -simplejo orientado de K , entonces:

$$\begin{aligned} \partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma)) &= \partial(t(\sigma) - s(\sigma)) - \partial(d_{q-1}\partial(\sigma)) \\ &= \partial((t - s)(\sigma)) - \partial(d_{q-1}\partial(\sigma)) \\ &= \partial d_{q-1}\partial(\sigma) + \partial\partial d_q(\sigma) - \partial d_{q-1}\partial(\sigma) \\ &= \partial\partial d_q(\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otra parte

Sea A el carril de σ , como $d_i(\sigma)$ es una cadena en A y éste es un cono, entonces:

$$H_i(A) = Z_i(A) / B_i(A) = 0$$

Como $\partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma)) = 0$, entonces: $t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma) \in Z_q(A)$, lo cual implica que $t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma) \in B_q(A)$, es decir

$$t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}\partial(\sigma) = \partial(c)$$

para alguna cadena $c \in C_{q+1}(L)$. ■

Ahora, usemos estos Lemas, para probar el siguiente Teorema.

Teorema 2.4. Si $s, t : |K| \rightarrow |L|$ son mapeos simpliciales *cercanos* en el sentido de que para cada simplejo A de K , podemos encontrar un simplejo B en L tal que ambos $s(A)$ y $t(A)$ son caras de B , entonces $s_* = t_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$, para toda q .

Prueba.

Usando los lemas anteriores, tenemos una colección de homomorfismos $d_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$, para cada q , tal que:

$$d_{q-1}\partial + \partial d_q = t - s : C_q(K) \rightarrow C_q(L).$$

Lo cual implica, que inducen los mismos homomorfismos de grupos de homología. ■

Teorema 2.5. Sean $s : |K^m| \rightarrow |L|$ y $t : |K^n| \rightarrow |L|$, donde $n \geq m$, aproximaciones simpliciales de un mapeo dado $f : |K| \rightarrow |L|$, y sean $\chi_1 : C(K) \rightarrow C(K^m)$, $\chi_2 : C(K^m) \rightarrow C(K^n)$ los respectivos mapeos de subdivisión de cadena. Entonces, $s_*\chi_{1*} = t_*\chi_{2*}\chi_{1*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$.

Prueba.

Sea $\theta : |K^n| \rightarrow |K^m|$ un mapeo simplicial estándar. Si deseamos mostrar que podemos usar o bien s ó t para definir f_* debemos verificar que:

$$s_*\chi_{1*} = t_*\chi_{2*}\chi_{1*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$$

Se tiene que $s\theta : |K^n| \rightarrow |L|$ aproxima simplicialmente $f : |K^n| \rightarrow |L|$, también t aproxima simplicialmente $f : |K^n| \rightarrow |L|$. Por lo tanto, $s\theta$ y t deben ser mapeos simpliciales cercanos y $s_*\theta_* = t_* : H_q(K^n) \rightarrow |L|$. Además, sabemos que θ_* y χ_{2*} son inversos, luego: $t_*\chi_{2*}\chi_{1*} = s_*\chi_{2*}\chi_{1*} = s_*\chi_{1*}$.

A partir de esto, podemos afirmar, que se tiene un homomorfismo bien definido $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$. ■

2.9 Invarianza

Los grupos de homología de un complejo, definidos usando la estructura simplicial del complejo, son invariantes del tipo de homotopía de su poliedro subyacente. Explicaremos por qué sucede esto.

Notación. Escribiremos $d(f, g) < \delta$ si para cualquier $x \in |K|$, la distancia entre $f(x)$ y $g(x)$ es menor que δ .

Lema 2.10. Sean $f, g : |K| \rightarrow |L|$. Si δ es un número de Lebesgue para la cubierta abierta de $|L|$ formada por las estrellas abiertas de sus vértices, y si $d(f, g) < \delta/3$, se tiene que los conjuntos

$$f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L)), \quad v \text{ un vértice de } L,$$

forman una cubierta abierta de $|K|$.

Prueba.

Sea $x \in |K|$, entonces $f(x), g(x) \in |L|$.

Además, $\text{diam}(f(x) \cup g(x)) = d(f(x), g(x)) < \delta/3 < \delta$,

luego $f(x) \cup g(x) \in \text{star}(v, L)$, para alguna $v \in L$,

es decir $f(x) \in \text{star}(v, L), \quad g(x) \in \text{star}(v, L)$

entonces $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)), \quad x \in g^{-1}(\text{star}(v, L))$

de donde $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$

Así

$$x \in \bigcup_{v \in L} (f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L)))$$

Con lo cual, termina la prueba. ■

Lema 2.11. Con las hipótesis del lema anterior, existe un entero m y un mapeo simplicial $s : |K^m| \rightarrow |L|$, que aproxima simplicialmente a $f : |K^m| \rightarrow |L|$ y a $g : |K^m| \rightarrow |L|$.

Prueba.

La prueba es análoga a la que se realizó en el Teorema de Aproximación simplicial, observando solamente que en la inclusión (*), ahora se sustituye por:

$$f(\text{star}(u, K)) \subseteq \text{star}(v, L), \quad g(\text{star}(u, K)) \subseteq \text{star}(v, L) \quad (*)$$

y considerando la cubierta abierta para $|K|$ del Lema 2.10. ■

Lema 2.12. Suponga que $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son mapeos homotópicos, que $F : |K| \times I \rightarrow |L|$ es una homotopía específica entre ellos, y escribamos $f_t(x) = F(x, t)$. Dado $\delta > 0$, existe un entero positivo n , tal que:

$$d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) < \delta, \quad 0 \leq r < n.$$

Prueba.

Como F es uniformemente continua entonces existe δ' , tal que para todo x, y :

$$d(f(x, t_1), f(y, t_2)) < \delta' \text{ implica } d(F(x, t_1), F(y, t_2)) < \delta$$

Escojamos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \delta'$,

$$\begin{aligned} d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) &= \sup_{x \in |K|} (f_{r/n}(x), f_{(r+1)/n}(x)) \\ &= \sup_{x \in |K|} (F(x, \frac{r}{n}), F(x, \frac{r+1}{n})) \\ &\leq d(F(x, \frac{r}{n}), F(x, \frac{r+1}{n})) \\ &< \delta \end{aligned}$$

Pues

$$\begin{aligned} d((x, \frac{r}{n}), (x, \frac{r+1}{n})) &= d((x, \frac{r+1}{n}), (x, \frac{r}{n})) \\ &= \frac{1}{n} \\ &< \delta' \end{aligned}$$

Así

$$d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) < \delta, \quad 0 \leq r < n. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.6. Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son mapeos homotópicos podemos encontrar una subdivisión baricéntrica K^m y una sucesión de mapeos simpliciales $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$ tal que s_1 aproxima simplicialmente f , s_n aproxima simplicialmente g y cada par s_i, s_{i+1} son cercanos en el sentido del Teorema 2.4

Prueba.

Sea δ el número de Lebesgue dado en el Lema 2.10. Como f y g son homotópicas, podemos encontrar n , suficientemente grande, tal que:

$$d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) < \delta/3, \quad 0 \leq r < n$$

Luego, existe s_r que aproxima simplicialmente $f_{r/n}, f_{(r+1)/n}$, para cada r . En particular

$$d(f_{(r-1)/n}, f_{r/n}) < \delta/3$$

de donde, existe s_{r-1} que aproxima simplicialmente $f_{(r-1)/n}, f_{r/n}$, para cada r .

Obteniendo así, una sucesión $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$, tal que: s_i, s_{i+1} son cercanos y s_1 aproxima simplicialmente f y s_n aproxima simplicialmente g . \blacksquare

Teorema 2.7. Si f es el mapeo identidad de $|K|$ entonces cada $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(K)$ es el homomorfismo identidad, y si tenemos dos mapeos $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$ entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(M)$ para toda q .

Prueba.

Por la construcción de f_* , es claro que si f es el mapeo identidad de $|K|$, entonces f_* es el homomorfismo identidad.

Supongamos ahora que tenemos los mapeos $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$. Escojamos una aproximación simplicial $t : |L^n| \rightarrow |M|$ para $g : |L| \rightarrow |M|$, y una aproximación simplicial $s : |K^m| \rightarrow |L^n|$ para $f : |K| \rightarrow |L|$. Sean $\chi_1 : C(K) \rightarrow C(K^m)$, $\chi_2 : C(L) \rightarrow C(L^n)$ mapeos de subdivisión de cadena; y sea $\theta : |L^n| \rightarrow |L|$ un mapeo simplicial estándar.

Entonces, tenemos el siguiente diagrama de grupos de homología y homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(K^m) & \xrightarrow{s_*} & H_q(L^n) & & \\
 \uparrow \chi_{1*} & & \uparrow \chi_{2*} & \searrow t_* & \\
 H_q(K) & \xrightarrow{f_*} & H_q(L) & \xrightarrow{g_*} & H_q(M)
 \end{array}$$

Además, se tiene que $\theta \circ s$ aproxima simplicialmente $f : |K^m| \rightarrow |L|$, y que $t \circ s$ aproxima simplicialmente $g \circ f : |K^m| \rightarrow |M|$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 g_* \circ f_* &= t_* \chi_{2*} \theta_* s_* \chi_{1*} \\
 &= t_* s_* \chi_{1*} \\
 &= (ts)_* \chi_{1*} \\
 &= (g \circ f)_*
 \end{aligned}$$

con lo cual, concluye la prueba. ■

Teorema 2.8. Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son mapeos homotópicos, entonces $f_* = g_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ para toda q .

Prueba.

Usando la notación establecida en la prueba de los Teoremas 2.4 y 2.6, tenemos una sucesión de mapeos simpliciales $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$ tal que s_1 aproxima simplicialmente

f , s_n aproxima simplicialmente g , y cada par s_i, s_{i+1} son cercanos en el sentido del resultado a).

Entonces

$$f_* = s_{1*} \mathcal{X}_* f \text{ y } g_* = s_{n*} \mathcal{X}_*$$

además $s_{i*} = s_{i+1*}$.

Así

$$f_* = s_{1*} \mathcal{X}_* = s_{2*} \mathcal{X}_* = \dots = s_{n*} \mathcal{X}_* = g_*$$

Con lo cual termina la prueba. ■

De aquí, se sigue que si los poliedros $|K|$ y $|L|$ tienen el mismo tipo de homotopía, entonces K y L tienen grupos de homología isomorfos. Para esto, si $f: |K| \rightarrow |L|$ es una equivalencia homotópica, con homotopía inversa g , entonces los homomorfismos composición:

$$\begin{aligned} H_q(K) &\xrightarrow{f_*} H_q(L) \xrightarrow{g_*} H_q(K) \\ H_q(L) &\xrightarrow{g_*} H_q(K) \xrightarrow{f_*} H_q(L) \end{aligned}$$

son ambos homomorfismos identidad. Por lo tanto, $f_*: H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ es un isomorfismo para cada q .

Por esto, si X es un espacio triangulable compacto, podemos escoger una triangulación $t: |K| \rightarrow X$ y usarla para definir los grupos de homología $H_q(X)$ de X por $H_q(X) = H_q(K)$. No importa que triangulación escojamos, obtendremos siempre el mismo grupo (salvo isomorfismos).

CAPÍTULO III. Criterios para el cálculo de ciertas características de una imagen digital.

En este capítulo, aplicaremos los resultados del capítulo anterior a las nociones sobre imágenes digitales, expuestas en el capítulo I, analizando las propiedades que se preservan al aplicar ciertas transformaciones en las imágenes digitales.

Dada una imagen, su análogo continuo es triangulable, por tanto podemos aplicar a este análogo toda la herramienta que se tiene para dichos espacios topológicos.

Iniciaremos este capítulo, dando la definición de índice de un píxel, la cual va a ser de gran importancia, ya que permite dar criterios simples para calcular ciertas características de una imagen digital. Este índice, está definido en términos de la característica de Euler; por lo cual, esta va a ser relevante para el cálculo de la misma. trabajo.

También introducimos el concepto de píxel simple, mismo que usamos para enunciar un teorema muy importante, que nos asegura que el análogo continuo de la imagen inicial y de la imagen obtenida al quitar sucesivamente píxeles de este tipo, tienen el mismo tipo homotópico. Luego, usando el Teorema 2.8, se mostrara que sus grupos de homología son iguales.

Este capítulo es de particular importancia, pues se dan las bases teóricas de los algoritmos, que es precisamente la finalidad de este trabajo.

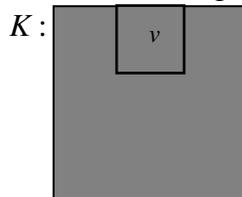
Definición 3.1. Sea K un subcomplejo cerrado de $|Z^k|$ y $p \in Z^k$. El índice del píxel $|p| = v$ con respecto al complejo K , es el número

$$\begin{aligned} \text{Ind}_K(v) &= \chi(\delta v \cap K) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i R_i(\delta v \cap K), \text{ donde } R_i \text{ es el rango de } H_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \alpha_i \end{aligned}$$

donde α_i es el número de i -celdas ($0 \leq i \leq k$) de δv que pertenecen a K . La última igualdad se obtiene a partir del Teorema 2.2.

En nuestro caso, $k = 2$.

Ejemplo: Supongamos que K es el análogo continuo de la siguiente imagen :



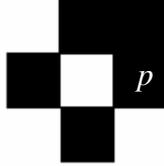
Entonces

$$\text{Ind}_K(v) = \chi(\delta v \cap K) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i \alpha_i = 4 - 3 = 1$$

Definición 3.1. Sea $P = (Z^2, 8, 4, B)$. El índice de un punto lattice p con respecto al subconjunto $C \subset B$ de puntos negros es el índice del pixel $|p| = v$ con respecto al complejo cerrado $|C \setminus \{p\}|$:

$$Ind_C(p) = Ind_{|C \setminus \{p\}|} |p|$$

Ejemplo:



$$Ind_C(p) = Ind_{|C \setminus \{p\}|} |p| = 3 - 1 = 2$$

Definición 3.3. Un *pixel simple* p es un pixel de la imagen P con $Ind_B(p) = 1$.

Proposición 3.1. $Ind_C p = \chi(|p| \cap |C \setminus \{p\}|)$, con $C \subset B$.

Prueba. Observemos que:

$$\begin{aligned} |p| \cap |C \setminus \{p\}| &= (|p|^\circ \cup \delta|p|) \cap |C \setminus \{p\}| \\ &= (|p|^\circ \cap |C \setminus \{p\}|) \cup (\delta|p| \cap |C \setminus \{p\}|) \\ &= \delta|p| \cap (C \setminus \{p\}) \end{aligned}$$

pues: $|p|^\circ \cap |C \setminus \{p\}| = \emptyset$.

Teorema 3.2. Sea $P = (Z^2, 8, 4, B)$, $p \in B$, $B' = B \setminus \{p\}$, $P' = (Z^2, 8, 4, B')$, entonces

$$\chi(P') = \chi(P) - 1 + Ind_B(p)$$

Prueba.

Se tiene que para complejos arbitrarios K y L :

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \chi(P) &= \chi(|B|) = \chi(|B' \cup \{p\}|) = \chi(|B'| \cup |p|) \\ &= \chi(|B'|) + \chi(|p|) - \chi(|B'| \cap |p|) \\ &= \chi(P') + 1 - Ind_B(p) \end{aligned}$$

Corolario 3.1. Sea $P = (Z^2, 8, 4, B)$ y sea p un píxel simple, $B' = B \setminus \{p\}$, $P' = (Z^2, 8, 4, B')$, entonces

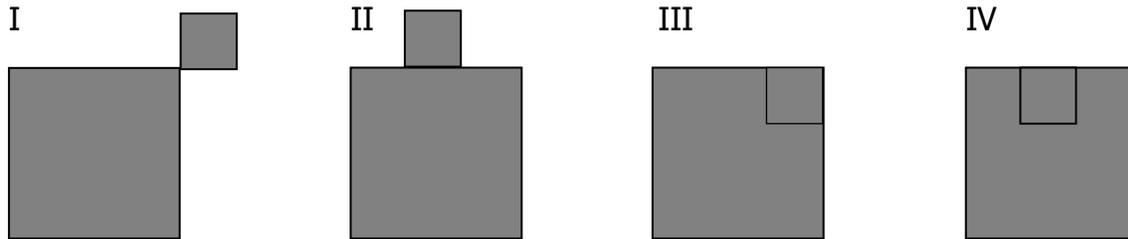
$$\chi(P') = \chi(P)$$

Prueba.

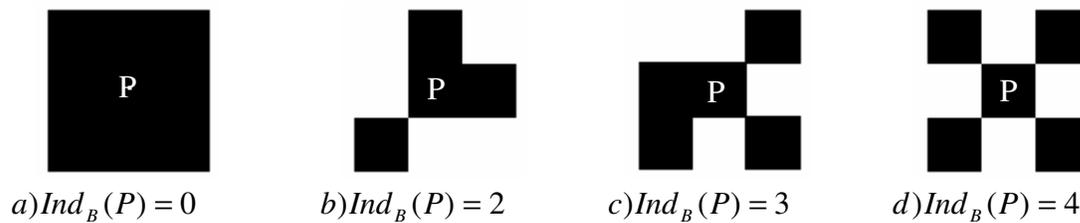
La prueba se sigue directamente del Teorema 3.2 y de la definición de pixel simple.

El teorema anterior y su corolario son la base de los algoritmos que permiten calcular la característica de Euler.

Para que un píxel tenga índice 1 hay cuatro casos posibles, cualquier otra ubicación del píxel dentro de la imagen, dará un índice distinto de 1.



En la figura siguiente, se muestran los otros casos posibles para el índice de un píxel, y se puede observar que no se puede hacer la retracción sin romper la imagen, o perder propiedades de conexidad, cosa que no ocurría en los otros cuatro casos, cuando el píxel tenía índice 1; permitiéndonos afirmar que los análogos continuos tienen las mismas propiedades homotópicas.



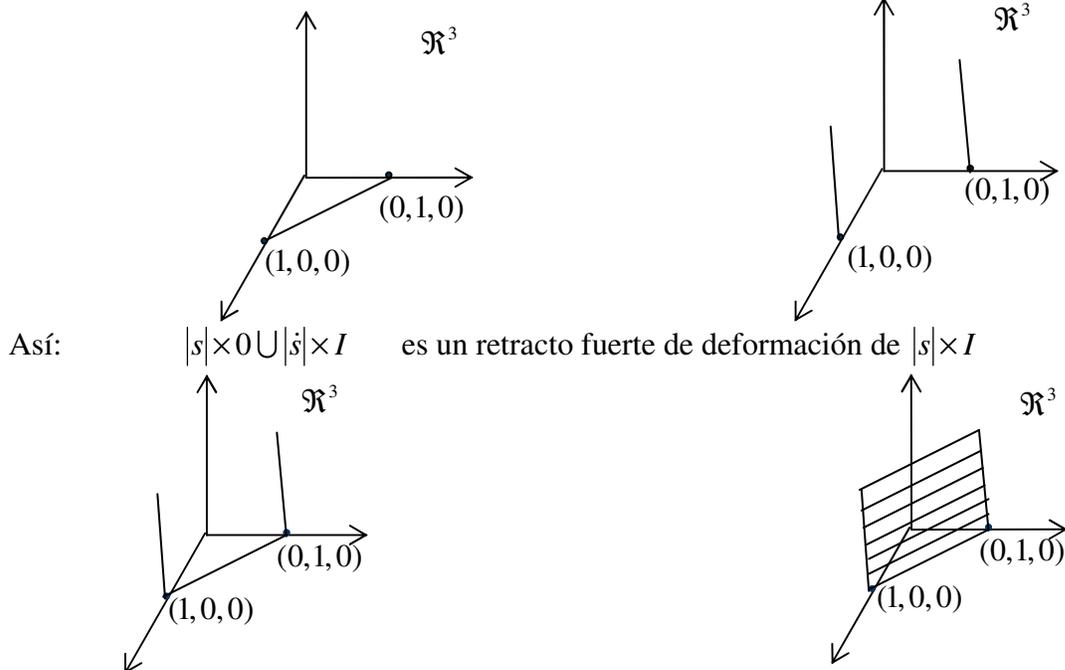
Observación 3.1.

Si s es un 1-simplejo:

Entonces: $|s| \times 0$ es

y

$|\dot{s}| \times I$ es



Lema 3.1.

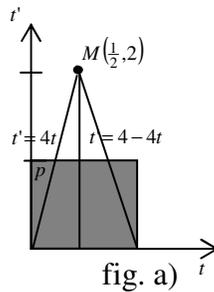
Para cualquier 1-simplejo s , $|s| \times 0 \cup |s| \times I$ es un retracto fuerte de deformación de $|s| \times I$.

Prueba.

Sea s un 1-simplejo, y consideremos $p = I \times I$, pues $I \times I \approx |s| \times I$; y definamos un sistema de coordenadas sobre p ; es decir, ubiquémoslo en el origen de nuestro sistema de coordenadas. Entonces los puntos p estarán unívocamente definidos por dos coordenadas (t, t') , $t, t' \in I$.

Consideremos: $A = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$

Debemos encontrar una fórmula de retracción $r_p : p \rightarrow A$ de la proyección de p sobre tres aristas, la cual puede surgir, por ejemplo, del punto $M(\frac{1}{2}, 2)$. (fig. a)

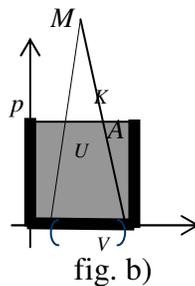


Entonces, la formula de retracción, esta dada por la fórmula:

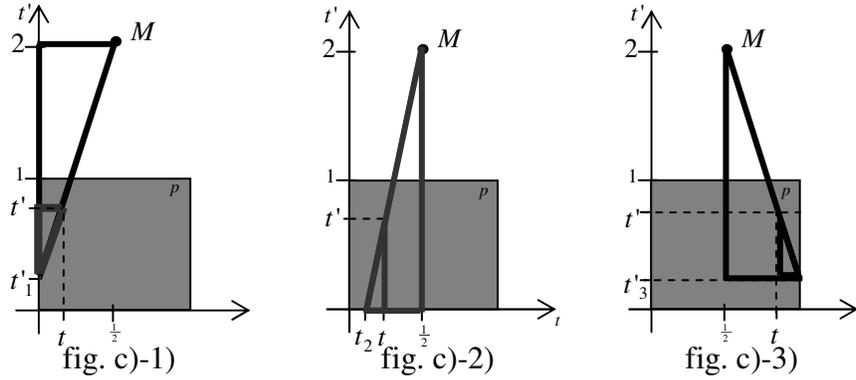
$$r_p(t, t') = \begin{cases} (0, t'_1) & , si \quad t' \geq 4t \\ (t_2, 0) & , si \quad t' \leq 4t \leq 4 - t' \\ (1, t'_3) & , si \quad t' \geq 4 - 4t \end{cases}$$

Para demostrar la continuidad de la retracción r_p , iniciemos introduciendo la topología de subespacio de \mathfrak{R}^2 ; para la prueba de la continuidad, debemos ver que dado un conjunto abierto en A , su imagen inversa es abierta en p .

Sea V un conjunto abierto arbitrario en A (fig. b)), unamos los extremos del intervalo V con el punto M y obtendremos algún subconjunto $U \subset p$. Es claro, que existe un triángulo abierto (el interior del triángulo formado) $K \subset \mathfrak{R}^2$, tal que: $K \cap p = U$. Así, U es un conjunto abierto en p . Por lo tanto, r_p es continua.



Ahora, usando relaciones de semejanza entre triángulos, encontremos los valores de: t'_1, t'_2, t'_3 .



Si $t' \geq 4t$: Analizando la fig. c-1), encontramos que:

$$\frac{2-t'_1}{t'-t'_1} = \frac{1/2}{t} \Rightarrow t'_1 = \frac{t'-4t}{1-2t}$$

Si $t' \leq 4t \leq 4-t'$: Analizando la fig. c-2), encontramos que:

$$\frac{2}{t'} = \frac{1/2-t_2}{t-t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{t'-4t}{2(t'-2)}$$

Si $t' \geq 4-4t$: Analizando la fig. c-3), encontramos que:

$$\frac{1/2}{1-t} = \frac{2-t'_3}{t'-t'_3} \Rightarrow t'_3 = \frac{t'+4t-4}{2t-1}$$

De donde, tenemos que la retracción esta definida como sigue:

$$r_p(t, t') = \begin{cases} \left(0, \frac{t'-4t}{1-2t} \right) & , \quad t' \geq 4t \\ \left(\frac{t'-4t}{2(t'-2)}, 0 \right) & , \quad 4-4t \leq t' \leq 4t \\ \left(1, \frac{t'+4t-4}{2t-1} \right) & , \quad t' \leq 4-4t \end{cases}$$

Entonces, la fuerte retracción por deformación se determina por la fórmula:

$$D(t, t', t'') = \begin{cases} \left((1-t'')t, (1-t'')t' + \frac{t''(t'-4t)}{1-2t} \right) & , \quad t' \geq 4t \\ \left((1-t'')t + \frac{t''(t'-4t)}{2(t'-2)}, (1-t'')t' \right) & , \quad 4-4t \leq t' \leq 4t \\ \left((1-t'')t + t'', (1-t'')t' + \frac{t''(t'+4t-4)}{2t-1} \right) & , \quad t' \leq 4-4t \end{cases}$$

Veamos que efectivamente se tiene:

$$id_p \stackrel{\sim}{=} i_{Ap} \circ r_p \text{ rel. } A$$

Para esto, verifiquemos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} a) D(t, t', 0) &= \begin{cases} (t, t') & , \quad t' \geq 4t \\ (t, t') & , \quad 4-4t \leq t' \leq 4t \\ (t, t') & , \quad t' \leq 4-4t \end{cases} = id_p \\ b) D(t, t', 0) &= \begin{cases} \left(0, \frac{t'-4t}{1-2t} \right) & , \quad t' \geq 4t \\ \left(\frac{t'-4t}{2(t'-2)}, 0 \right) & , \quad 4-4t \leq t' \leq 4t \\ \left(1, \frac{t'+4t-4}{2t-1} \right) & , \quad t' \leq 4-4t \end{cases} = r_p \\ c) D(0, t', t'') &= (0, t') \\ D(t, 0, t'') &= (t, 0) \\ D(1, t', t'') &= (1, t') \end{aligned}$$

Con esto, hemos probado, que:

$$id_p \stackrel{\sim}{=} i_{Ap} \circ r_p \text{ rel. } A$$

Además, es claro que: $r_p \circ i_{Ap} = id_A$.

De donde, podemos concluir que p y A son equivalentemente homotópicos. Pero además $A \approx |s| \times 0 \cup |s| \times I$, con lo cual hemos probado el Lema. ■

Proposición 3.5. Sea $B \subset A \subset X$. Si para la retracción $r_X : X \rightarrow A$ y $r_A : A \rightarrow B$ se tiene una retracción fuerte por deformación $id_X \simeq i_{AX} \circ r_X \text{ rel.} A$ y $id_A \simeq i_{BA} \circ r_A \text{ rel.} B$, entonces para la retracción $r_A \circ r_X : X \rightarrow B$ se tiene una retracción fuerte por deformación:

$$id_X \simeq i_{BX} \circ (r_A \circ r_X) \text{ rel.} B$$

Prueba.

Supongamos que $D_1 : X \times I \rightarrow X$ y $D_2 : A \times I \rightarrow A$ son las retracciones fuertes por deformación, entonces D_1, D_2 satisfacen

- | | |
|---|---|
| 1) $D_1(x,0) = id_X(x) \quad \forall x \in X$ | 1) $D_2(x,0) = id_A(x) \quad \forall x \in A$ |
| 2) $D_1(x,1) = i_{AX} \circ r_X(x) \quad \forall x \in X$ | 2) $D_2(x,1) = i_{BA} \circ r_A(x) \quad \forall x \in A$ |
| 3) $D_1(x,t) = x \quad \forall x \in A$ | 3) $D_2(x,t) = x \quad \forall x \in B$ |

Observando D_1, D_2 , deducimos que podemos definir una retracción fuerte de deformación $D : X \times I \rightarrow X$ para la retracción $r_A \circ r_X$ como sigue:

$$D(x,t) = D_2(D_1(x,t),t)$$

Veamos que efectivamente D satisfaces las tres propiedades anteriores.

- 1) $D(x,0) = D_2(D_1(x,0),0) = D_2(id_X(x),0)$
 $= D_2(i_{AX} \circ r_X(x),0)$
 $= id_A(i_{AX} \circ r_X(x))$
 $= i_{AX} \circ r_X(x)$
 $= id_X(x) \quad \forall x \in X$
- 2) $D(x,1) = D_2(D_1(x,1),1) = D_2(i_{AX} \circ r_X(x),1)$
 $= i_{BA} \circ r_A(i_{AX} \circ r_X(x))$
 $= i_{BX} \circ (r_A \circ r_X)(x) \quad \forall x \in X$
- 3) $D(x,t) = D_2(D_1(x,t),t) = D_2(x,t) = x \quad \forall x \in B$

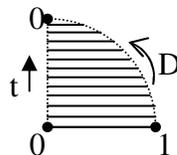
Con lo cual, concluimos la prueba de la proposición. ■

Teorema 3.2. Sea $P = (Z^2, 8, 4, B)$ una imagen dada y sea P' la imagen obtenida como resultado de la eliminación de un píxel de índice 1; sean X y X' sus análogos continuos, respectivamente. Entonces X y X' tienen el mismo tipo homotópico.

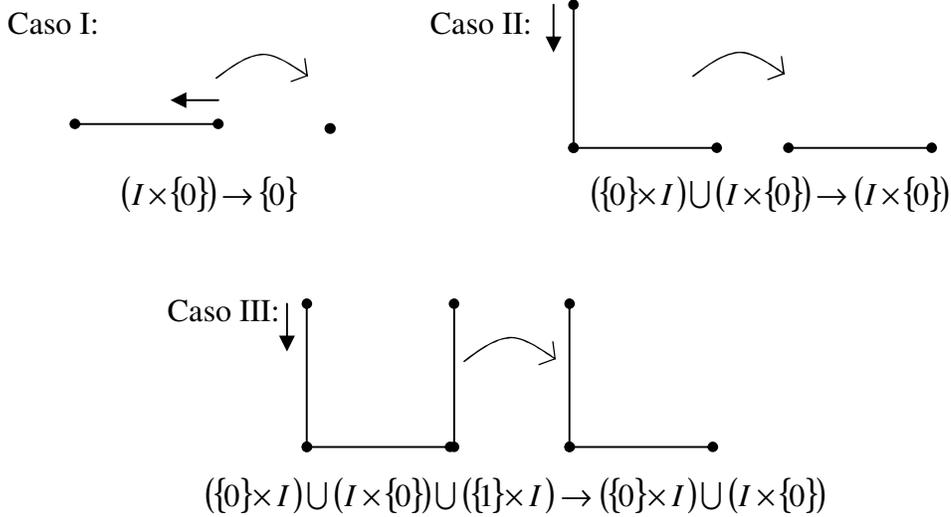
Prueba.

Como habíamos dicho, se tienen cuatro casos en los que un píxel tiene índice 1, además observemos que el caso IV, queda probado con el lema anterior; y haciendo uso de la proposición anterior, se prueban los casos I, II y III.

Tenemos una retracción fuerte por deformación de I en $\{0\}$, la cual esta representada por la fórmula: $D(t,t') = t(1-t')$, $D : I \times I \rightarrow I$; esquematicemos su significado.



Y podemos usar esta retracción, para construir las retracciones y retracciones fuertes por deformación entre los siguientes conjuntos:



Hagamos:

$$D = \{0\}, \quad C = I \times \{0\}, \quad B = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}), \quad A = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$$

Construyamos la siguiente retracción $r_A : A \rightarrow B$ con la regla de correspondencia

$$r_A(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in B \\ (0,0) & , \quad x \notin B \end{cases}$$

para la cual, se tiene una retracción fuerte por deformación $D_3 : A \times I \rightarrow A$, dada por:

$$D_3(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & , \quad x \notin B \\ x & , \quad x \in B \end{cases}$$

Con lo que se satisface $id_A \underset{D_3}{\simeq} i_{BA} \circ r_A \text{ rel. } B$

Usando esta retracción y el Lema anterior, queda probado el caso III.

Ahora, construyamos una retracción $r_B : B \rightarrow C$ definida por la regla

$$r_B(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in C \\ (0,0) & , \quad x \notin C \end{cases}$$

para la cual, se tiene una retracción fuerte por deformación $D_2 : A \times I \rightarrow A$, dada por la regla

$$D_2(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & , \quad x \notin C \\ x & , \quad x \in C \end{cases}$$

Con lo que se satisface $id_B \underset{D_2}{\simeq} i_{CB} \circ r_B \text{ rel. } C$

Nuevamente, usando las dos retracciones anteriores, hemos probado el caso II.

Finalmente, construyamos una retracción $r_C : C \rightarrow D : r_C(d) = d \quad \forall d \in D$,

$$r_C(x) = 0;$$

para la cual, se tiene una retracción fuerte por deformación $D_1 : C \times I \rightarrow C$, dada por

$$D_1(x, t) = x(1-t)$$

luego $id_C \stackrel{\sim}{=} i_{DC} \circ r_C \text{ rel. } D$

Así, usando las dos últimas retracciones, se prueba el caso I. ■

CAPITULO IV. Algoritmos

En este capítulo presentamos los algoritmos que permiten calcular algunas propiedades homotópicas de una imagen digital: los algoritmos de contracción y expansión combinatoria, que preservan el tipo homotópico; los algoritmos que nos sirven para calcular la característica de Euler y los números de Betti, y el algoritmo de esqueletización, el cual conserva los rasgos y el tipo homotópico de la imagen original. Damos la justificación de su validez al aplicarlos en las imágenes digitales haciendo referencia a los resultados teóricos que se presentan en los capítulos anteriores.

4.1. Algoritmos básicos.

En esta sección, describimos dos algoritmos básicos, los cuales realizan transformaciones invariantes de imágenes digitales desde el punto de vista homotópico. Empezamos definiendo algunos conceptos básicos en el desarrollo de los algoritmos:

Definición. Sea $P = (S, m, n, B)$ una imagen digital.

B es *discreto* si todos sus puntos son aislados.

4.1.1 Algoritmo de contracción combinatoria (ACC)

Sea $P = (S, m, n, B)$ una imagen digital.

Paso 1. Busquemos un pixel simple negro p . Si no se encuentra, entonces termina el algoritmo.

Paso 2. Hagamos $B = B \setminus \{p\}$ y vayamos al paso 1.

4.1.2 Algoritmo de expansión combinatoria (AEC)

Sea $P = (S, m, n, B)$ una imagen digital.

Paso 1. Busquemos un pixel p del fondo de P , el cual es simple de la imagen $(S, m, n, B \cup \{p\})$. Si no se encuentra, entonces termina el algoritmo.

Paso 2. Hagamos $B := B \cup \{p\}$ y vayamos al paso 1.

Justificación de los algoritmos ACC y AEC.

Al aplicar los algoritmos ACC ó AEC a una imagen digital, la imagen obtenida tiene la propiedad de que conserva las mismas propiedades homotópicas (como la característica de Euler, los números de Betti) que la imagen original; puesto que solo estamos eliminando o agregando píxeles de índice 1 (Teorema 3.2)

La principal ventaja es que la imagen resultante es mucho más fácil de analizar que la imagen inicial; pues en el caso del algoritmo ACC, contrae la imagen lo mas que se pueda, permitiéndonos identificar más fácilmente su número de componentes, agujeros. El algoritmo AEC por el contrario, expande la imagen, pero de igual forma, esto nos facilita la distinción de sus componentes y agujeros.

4.2 Cálculo de la característica de Euler

4.2.1 Eliminación de pixeles negros, previo cálculo de sus índices

Sea $P = (\mathbf{Z}^2, 8, 4, B)$ una imagen digital.

Hagamos al principio $N:=0$.

Paso 1. Buscamos un pixel $p \in B$ no aislado. Si este no existe, entonces vamos al paso 5.

Paso 2. Calculamos $Ind_B(p)$.

Paso 3. Hacemos $N:=N + Ind_B(p) - 1$.

Paso 4. Eliminamos el pixel p de la imagen, i.e. hacemos $B:=B \setminus \{p\}$ y vamos al paso 1.

Paso 5. Contamos el número N_0 de pixeles en B (pixeles aislados) y hacemos $\chi(P) := N_0 - N$.

Fin del algoritmo.

Justificación del Algoritmo.

Sea $P_0 = P$, y sea P_i después de la i -ésima realización de los pasos 2, 3, 4.

Supongamos que ha sido necesario aplicar los pasos n veces.

Entonces la imagen P_n ya no tiene puntos no aislados, es decir P_n es discreta.

Según el teorema 3.2,

$$\chi(P_1) = \chi(P_0) + Ind_{B_0} p - 1$$

$$\chi(P_2) = \chi(P_1) + Ind_{B_1} p - 1$$

⋮

$$\chi(P_n) = \chi(P_{n-1}) + Ind_{B_{n-1}} p - 1$$

Por lo tanto:

$$\chi(P_n) = \chi(P_0) + \sum_{i=0}^n (Ind_{B_i} p - 1)$$

Claramente $\chi(P_n) = N_0$ (ese número se calcula en el paso 5), $\chi(P_0) = \chi(P)$ y

$$\sum_{i=0}^{n-1} (Ind_{B_i} - 1) = N.$$

De donde, obtenemos:

$$\chi(P) = N_0 - N.$$

4.2.2 Eliminación de pixeles negros de índice 2

Sea $P = (\mathbf{Z}^2, 8, 4, B)$ una imagen digital bidimensional.

Pongamos $N := 0$

Paso 1. Si B es discreto, trasladémonos al paso 5. En caso contrario nos vamos al paso 2.

Paso 2. Aplicamos ACC a P .

Paso 3. Busquemos el pixel $p \in B$, con $Ind_B(p) = 2$. Si no hay tal, vayamos al paso 5.

Paso 4. Eliminamos el pixel p , es decir, pongamos $B := B \setminus \{p\}$; hacemos $N := N + 1$ y vayamos al paso 1.

Paso 5. Contemos el número N_0 de pixeles de B . Hacemos $\chi(P) := N_0 - N$.

Justificación del algoritmo.

Este algoritmo puede ser considerado como un caso particular del algoritmo 2.1.

Se usa el hecho de que las imágenes bidimensionales sin puntos simples, no discretas, tienen puntos de índice 2. Los pasos 2, 3, 4 del algoritmo 2.1 se cambian por los pasos 3, 4, 2.

En lugar de $N := N + Ind_B p - 1$, tenemos $N := N + 1$ porque $Ind_B p = 2$.

Observación: Ciertamente la eliminación de un punto de índice 2 o bien aumenta o disminuye el número de agujeros.

4.3. Cálculo de los números de Betti de una imagen digital

Sea $P = (\mathbf{Z}^2, 8, 4, B)$ una imagen digital bidimensional.

Supongamos primero que $N := 0$ (el número de componentes negras), $L := 0$ (el número de agujeros).

Paso 1. Aplicamos ACC a P .

Paso 2. Calculamos el número M de pixeles aislados de B , suponemos $N := N + M$. Eliminamos tales pixeles de B (i.e. los marcamos con la etiqueta 0).

Paso 3. Aplicamos AEC a P.

Paso 4. Calculamos el número K de pixeles del fondo, los cuales tienen el índice 0 con respecto a B (blancos aislados), hacemos $L := L + K$. Eliminamos tales pixeles blancos (i.e. los marcamos por la etiqueta 1).

Paso 5. Si $M + K = 0$, entonces termina el algoritmo, en otro caso nos vamos al paso 1.

Fin del algoritmo.

Justificación del algoritmo.

Si P no es vacía, entonces se garantiza la existencia de al menos una componente negra contraíble.

La aplicación del ACC preserva los números N y L. Entonces al aplicarlos, en caso de existir componentes negras contraíbles obtendremos un conjunto de puntos negros aislados. Cada uno de estos corresponde a una sola componente negra contraíble.

Por lo tanto, eliminando tales puntos negros aislados en B, el número de componentes negras disminuye en M.

Por lo que, hacemos $N := N + M$ (respectivamente $L := L + K$).

Como P es finita, entonces en algún paso el número $M + K$ será igual a cero, con lo cual termina el algoritmo.

4.4. Algoritmo de esqueletización

Sea $P = (\mathbf{Z}^2, 8, 4, B)$ una imagen digital bidimensional.

Paso 1. Elegimos la dirección inicial (\rightarrow), buscamos el punto $p \in B$, que ya no tenga vecinos en la dirección elegida, con $Ind_B(p) = 1$ y que tenga mas de 1 vecino, y lo marcamos con 2, en caso de que no exista nos vamos al paso 2, de lo contrario, repetimos el procedimiento hasta haber recorrido todos los puntos de B.

Paso 2. Eliminamos todos los puntos de P marcados con 2.

Paso 3. Elegimos la siguiente dirección (\downarrow), buscamos el punto $p \in B$, que ya no tenga vecinos en la dirección elegida, con $Ind_B(p) = 1$ y que tenga mas de 1 vecino, y lo marcamos con 2, en caso de que no exista nos vamos al paso 4, de lo contrario, repetimos el procedimiento hasta haber recorrido todos los puntos de B.

Paso 4. Eliminamos todos los puntos de P marcados con 2.

Paso 5. Elegimos la siguiente dirección (\leftarrow), buscamos el punto $p \in B$, que ya no tenga vecinos en la dirección elegida, con $Ind_B(p) = 1$ y que tenga mas de 1 vecino, y lo marcamos con 2, en caso de que no exista nos vamos al paso 6, de lo contrario, repetimos el procedimiento hasta haber recorrido todos los puntos de B.

Paso 6. Eliminamos todos los puntos de P marcados con 2.

Paso 7. Elegimos la siguiente dirección (\uparrow), buscamos el punto $p \in B$, que ya no tenga vecinos en la dirección elegida, con $Ind_B(p)=1$ y que tenga mas de 1 vecino, y lo marcamos con 2, en caso de que no exista nos vamos al paso 8, de lo contrario, repetimos el procedimiento hasta haber recorrido todos los puntos de B .

Paso 8. Eliminamos todos los puntos de P marcados con 2.

Repetimos los pasos anteriores hasta que ya no se encuentren puntos que los satisfagan en ninguna dirección.

Justificación del algoritmo.

En el algoritmo lo que hacemos es ir recorriendo la imagen tomando direcciones, y quitando píxeles de índice 1, pero que tengan más de un vecino, por lo cual este algoritmo preserva el tipo homotópico de la imagen inicial (Teorema 3.2). Al igual que el algoritmo ACC, contrae la imagen lo más que se pueda, pero la diferencia, es que este algoritmo solo adelgaza la figura.

CONCLUSIONES

Para la realización de este trabajo, se introdujo el concepto de equivalencia homotópica entre imágenes para adyacencia (8, 4), lo cual ha permitido hablar sobre la invarianza de una transformación en sentido homotópico aplicada a una imagen. Se observa que las realizaciones poliédricas de imágenes homotópicamente equivalentes también lo son; por lo cual, ciertas características de las imágenes como la conexidad, la característica de Euler y los números de Betti, son invariantes de transformaciones en un sentido homotópico.

En este trabajo, se utilizaron herramientas de las Topologías Algebraica, Combinatoria y Digital en la construcción de la teoría que se necesitaba para la fundamentación de los algoritmos, lo cual es el objetivo de la tesis.

Los algoritmos que se analizaron e implementaron en este trabajo son: los algoritmos de contracción y expansión combinatoria; para el cálculo de la característica de Euler y los números de Betti; así como el algoritmo de esqueletización.

Una gran ventaja de estos algoritmos es que son eficientes en tiempo y espacio, lo cual hace óptima su aplicación en algunos campos, como la medicina, ya que se basan en análisis locales de la imagen.

Para poder ejemplificar el funcionamiento de los algoritmos, se desarrolló un software para procesar imágenes simples que permite observar el resultado de aplicar estos algoritmos a la imagen. Quedando como trabajo futuro la realización de un software que admita imágenes reales para su procesamiento.

APÉNDICE A.
Manual de usuario.

El presente programa '*IMBIN2D*' se realizó en el lenguaje Visual Basic; al ejecutar el archivo IMBIN2D, se despliega una pantalla como la que se muestra en la Fig. I.

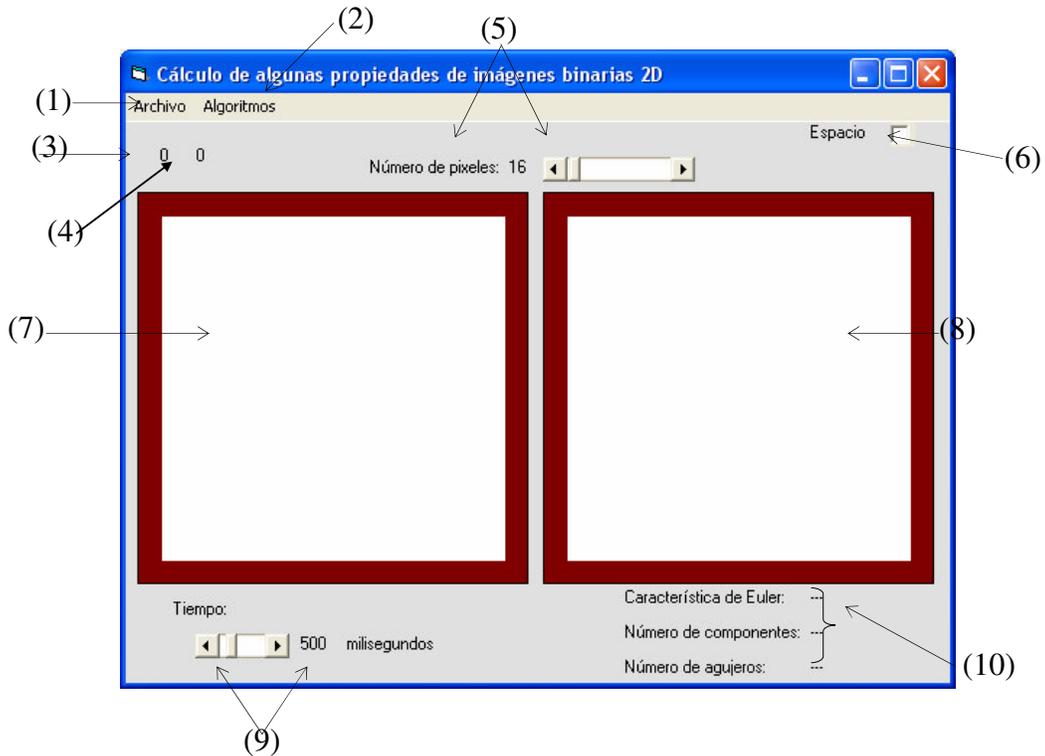


Fig. I. Ventana desplegada al ejecutar el programa

A continuación damos una descripción de los elementos que la conforman:

- (1) Al dar clic en esta opción, se despliega un menú de opciones (Fig. I.1)



Fig. I.1 Opciones del Menú Archivo

este a su vez, tiene 3 opciones:

- a) Nueva Imagen: Al dar clic en esta opción, es desplegado el menú que se muestra en la Fig. I.1.1



Fig. I.1.1 Opciones del Submenú Nueva imagen

Este menú presenta dos opciones:

-“Abrir desde archivo”: Nos abre un cuadro de diálogo en el cual podemos elegir el archivo en el que se encuentra la matriz correspondiente de la imagen que deseamos trabajar. Los archivos deben tener extensión (.dig)

-“Dibujar con el mouse”: Nos habilita para dibujar una imagen con el mouse en el área de trabajo(7).

b) Guardar imagen: Esta opción, nos despliega un cuadro de diálogo, en el cual podemos elegir la ruta donde deseamos guardar el archivo. La extensión del archivo debe ser (.dig)

c) Salir: Al dar clic en esta opción termina la ejecución del programa.

(2) Al dar clic en la opción “Algoritmos”, se despliegan las opciones presentadas en la Fig.II.1, las cuales describimos a continuación. Cabe hacer notar, que al estar ejecutando cualquiera de las 6 opciones, se inactivan las demás opciones, y se activan nuevamente al terminar la ejecución del proceso.

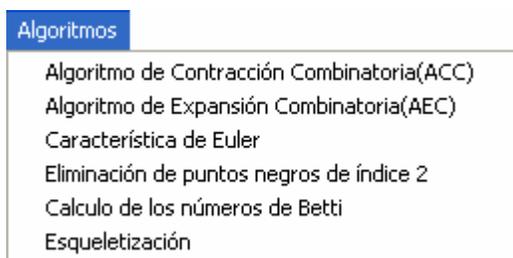


Fig. II.1 Opciones del Menú Algoritmos

Al elegir las opciones de: “Algoritmo de Contracción Combinatoria(ACC)” y “Algoritmo de Expansión Combinatoria(AEC)”, se comienza a aplicar el algoritmo respectivo a la imagen actual, desplegando la imagen obtenida en cada iteración en el área de resultados (8), los procesos intermedios se despliegan en color azul marino, mientras que la imagen final es color negro; y sobre el área de trabajo, se muestra una etiqueta de la instrucción que se esta aplicando.

Al elegir la opción “Característica de Euler”, sólo se despliega su valor al terminar el proceso en la parte inferior derecha (10) de la pantalla mostrada en la Fig.I, puesto que no se hace ninguna modificación en la imagen actual. Este valor se limpiará al activar cualquier otra opción.

Al elegir “Eliminación de puntos negros de índice 2”, se van mostrando los pasos que se van aplicando en el desarrollo del algoritmo en el área de resultados (8), y al finalizar, se muestra el valor de la característica de Euler en la parte inferior derecha (10).

Cuando se elige “Cálculo de los números de Betti”, nuevamente se van mostrando los pasos intermedios en el área de resultados (8), y al finalizar nos devuelve: *la característica de Euler, el número de componentes y el número de agujeros* en la parte inferior derecha (10).

Por último, la opción de esqueletización, nos devuelve el esqueleto de la imagen actual, en el área de resultados (8), previa muestra de los pasos intermedios.

Cuando estamos ejecutando cualquiera de estos algoritmos, se muestra el nombre del algoritmo actual en la parte superior, sobre (5).

(3) y (4) Estos dos números que aparecen en la esquina superior derecha, nos indican la posición actual del puntero, si es que está posicionado sobre el área de trabajo, en caso contrario, sólo muestran “-”. (3) indica el valor en X, mientras (4) el valor en Y.

(5) Se tiene un HScrollBar, el cual nos permite elegir el número de píxeles deseados en la imagen, con un rango entre 2 y 1000. El valor por default es 16. Al usar esta opción, el área de trabajo se limpia.

(6) La opción (“Espacio”), nos permite activar la opción de espaciado entre los puntos de la imagen. Por ejemplo:



(7) Área de trabajo. En esta se dibuja la imagen con la que se desea trabajar. Para dibujar una imagen, basta dar clic con el botón izquierdo y arrastrar manteniendo presionado el botón, y soltarlo para dejar de dibujar. Si desea borrar un píxel, puede hacerlo, dando clic con el botón derecho sobre el píxel deseado.

(8) Área de resultados. Aquí, desplegamos las imágenes obtenidas en los procesos, así como ciertas imágenes intermedias.

(9) Aquí contamos con otro HscrollBar, en el cual podemos modificar el tamaño de la pausa deseada entre una imagen y otra en el área de resultados, el tamaño por default es 0.

(10) Se cuenta con tres etiquetas, en las cuales dependiendo del algoritmo elegido, se despliegan los valores de: “Característica de Euler”, “Número de componentes” y “Número de agujeros”. Estos valores se limpian al elegir otro algoritmo.

APÉNDICE B.

Visualización del resultado de los algoritmos.

Supongamos que nuestra imagen inicial es la que aparece en la Fig. 1.

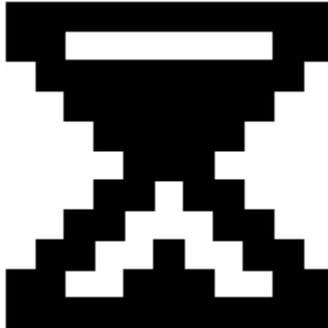


Fig. 1 Imagen inicial

Veamos la imagen resultante al aplicar cada uno de los algoritmos.

Después de aplicar el Algoritmo de Contracción Combinatoria (ACC), obtenemos la imagen mostrada en la Fig. 2.

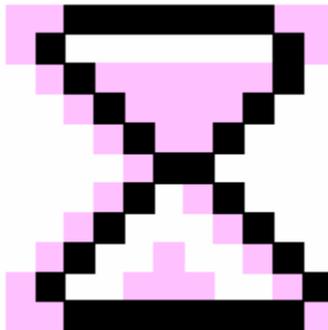


Fig. 2 Imagen después de aplicar ACC

Aplicando el Algoritmo de expansión combinatoria (AEC), se obtiene la imagen que mostramos en la Fig. 3.

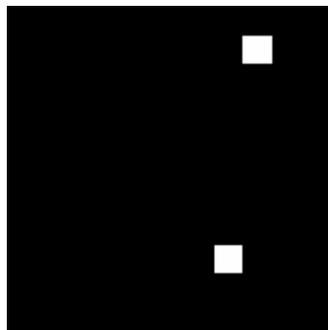


Fig. 3 Imagen después de aplicar AEC

Cuando aplicamos los algoritmos para calcular los números de Betti y la Característica de Euler, obtenemos:

Número de componentes: 1
Número de agujeros: 2
Característica de Euler: -1

Por último, al aplicar al Algoritmo de esqueletización a la imagen, obtenemos la imagen mostrada en la Fig. 4

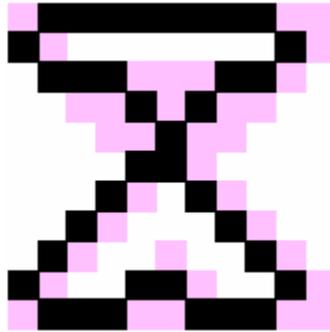


Fig. 4 Imagen después de aplicar el algoritmo de esqueletización

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bykov A., Zerkalov L., Algorithms for homotopy classification of binary images, Pattern Recognition, Vol. 29, N. 4, 1996.
- [2] Bykov , A. , Zerkalov, L., *Algorithms for the calculation of the number of components and the number of holes in an image*, Memories of the XXVIII Int. Conference on Natural Sciences Moscow, May 1993.
- [3] Bykov , A., Zerkalov, L., *Characterization of the number of components and their position in a binary image*, I International Conference on General Topology and its Applications, Computacional Topology, Castellon Spain, March 28-30, 1995.
- [4] Bykov A., Zerkalov L., Combinatoric Algorithms for Image Processing, Lumumba University Publishing House, 1995.
- [5] Bykov, A. , Rodríguez P., M., Zerkalov, L., *Algoritmos para el análisis de la conexidad de imágenes binarias*, primer congreso Iberoamericano de Reconocimiento de Patrones, La Habana Cuba, 1995.
- [6] Bykov, A. Zerkalov L., F. J. Albores, Rodríguez P.M., New connected components algorithms and invariants transformations of digital images, Submitted to Pattern Recognition, 1996.
- [7] Castleman K. R., Digital Image Processing, Englewood Cliffs, New Jersey Prentice may, 1979.
- [8] Davies E. R., A. P. N. Plumier, thinning algorithms, a critique and new methodology, Pattern Recognition.1981.
- [9] Duda R. O., P. Hart, Pattern Classification and Scene Analysis, Jhon Wiley and Jons Publications, 1973.
- [10] Duda R.O., P.E. Hart, and J. H. Munson, Graphical Data Processing Research Study and Experimental Investigation, AD650926, March 1967.
- [11] Hall E. L., Computer Image Processing and Recognition, New York, Academia Press, 1979.
- [12] Hilditch C. J., Comparison of thinning algorithms on a parallel processor, Vision Comput, 1983.
- [13] Hilditch C. J., Linear skeletons from square cupboards, Machine Intelligence, 4, 403-420,1969.
- [14] H. Spanier Edwin. Algebraic Topology

- [15] John B. Fraleigh. Álgebra Abstracta
- [16] Lunscher W. H. J., Beodez M. P., Fast binary image boundary extraction, Comp. Vision Graph. Image Process. 1987.
- [17] M. A. Armstrong. Basic Topology
- [18] Pavlidis T., Algorithms for Graphics and Image Processing, Computer Science Press, Inc. 1982.
- [19] Pavlidis T., Filling algorithms for raster graphics, Comput. Graphics Image Process. 1979.
- [20] Pavlidis T., Structural Pattern Recognition, Berlin-Heindelner New York Springer Verlag, 1977.
- [21] Pratt W. K., Digital Image Processing, New York, J. Wiley, 1979.
- [22] Ronse C., A topological characterization of thinning, Theoret. Comput. Sci., 1986.
- [23] Rosenfeld A., Connectivity in digital pictures, J. Assoc. Comput. Mach., 1970.
- [24] Rosenfeld A., Kak A:C., Digital Pictures Processing, New York, Academia Press, 1976.
- [25] Rosenfeld A., Digital Topology, AMER Math. Monthly, 86, 621-630, 1979.
- [26] Shchepin E. V., Nepomnyashchii G. M., On Topology Analysis of Images, Mezvuzovskii Abornik nauchinh trudo, Moscú, MIR, 1990.
- [27] Stefanelli R., Rosenfeld A., Some parallel thinning algorithms for digital pictures. J. Assoc. Comput. Mach., 1971.
- [28] Tamura H., A comparison of line-thinning algorithms from a digital geometry viewpoint, in Proceedings, 4th Int. Conf. on Patt. Recognition, 1978.
- [29] Wilson P. R., Euler Formulas and Geometric Modeling, IEEE Comp. Graph. Appl-, 1985.