

Índice

INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 1 Sistemas dinámicos	9
1.1 Sistemas dinámicos	9
1.1.1 Espacio Estado	10
1.1.2 Tiempo	10
1.1.3 Operador Evolución	10
1.1.4 Definición de un sistema dinámico	13
1.2 Órbitas y esquema fase	14
1.3 Conjuntos invariantes	15
1.3.1 Definición y tipos	16
1.3.2 Estabilidad de conjuntos invariantes	16
1.4 Ecuaciones diferenciales	17
1.5 Mapeos de Poincaré	20
1.5.1 Mapeos de Poincaré y estabilidad de ciclos	21
1.6 Equivalencia de sistemas dinámicos	25

1.7 Clasificación topológica de puntos de equilibrio genéricos y puntos fijos	29
1.7.1 Equilibrio hiperbólico en sistemas tiempo-continuo	29
1.7.2 Ciclos límite hiperbólicos	31
1.8 Bifurcación y diagramas de bifurcación	32
1.9 Forma normal topológica para bifurcaciones	34
CAPÍTULO 2 Bifurcaciones uni-paramétricas de equilibrios	
en sistemas dinámicos tiempo continuo	39
2.1 Condiciones de bifurcación mas simples	39
2.2 La forma normal de la bifurcación de deformación	41
2.3 Bifurcación de deformación genérica	43
2.4 Forma normal de la Bifurcación de Hopf	47
2.5 Bifurcación genérica de Hopf	53
CAPÍTULO 3 Aplicaciones	67
3.1 Un modelo de pesca	68
3.1.1 Una aproximación geométrica para el problema de pesca	68
3.2 Sistema de Volterra	72
3.3 Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa	76
CAPÍTULO 4 Enfoque Numérico: Para el modelo de pesca	85
CONCLUSIONES	91
Apéndice A	93
A.1 Sistema Hamiltoniano	93
A.2 Construcción de funciones Hamiltonianas	95
A.3 Estabilidad según Lyapunov	96

	3
A.4 Singularidades en el plano fase	97
Apéndice B	99
Bibliografía	101

Introducción

El mundo se encuentra rodeado de muchas cosas maravillosas que el hombre observa, tratando de obtener el mayor provecho de ellas y así, descubrir nuevas ciencias. Las Matemáticas son una de estas maravillosas ciencias que el ser humano ha creado, a través de curiosidad, observación de las cosas que nos rodean, y preguntándose el por que de lo que sucede a nuestro alrededor. Por esto y más, las Matemáticas son una herramienta indispensable para la respuesta a muchas interrogantes, aplicándola diariamente, en el movimiento de un auto, el vuelo de un avión, los avances médicos, el comportamiento de un ecosistema, etc.; al igual que sucede en las ciencias Físicas, Químicas, Económicas, Biológicas, Sociales, etc. por mencionar algunas de las tantas existentes.

Existe mucha teoría matemática para llevar a cabo ciertas aplicaciones, como la Optimización, Teoría de Aproximación, Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales, etc. En particular las Ecuaciones Diferenciales son una herramienta útil a la realización de ciertos comportamientos en las aplicaciones, ya que éstas llevan intrínseca la idea de movimiento de cambio instantáneo. Esto nos permite pasar en todo momento, de los conceptos estrictos, a su geometría, y de ésta a las aplicaciones. Involucrando así

a los Sistemas Dinámicos.

El uso que en la Biología, Ecología, Química, etc. hacen de los Sistemas Dinámicos de ecuaciones diferenciales, es fundamental para describir la dinámica de los sistemas que se analizan. La utilidad de Ecuaciones Diferenciales constituye una forma adecuada de describir la dinámica de un sistema, ya que éste puede ser considerado variante en el tiempo.

Uno de los precursores de las ecuaciones diferenciales, para crecimiento de poblaciones fue John Graunt. Durante el siglo XVIII, varios escritores discutieron sobre el comportamiento de la población humana y de muchas especies, sin embargo no poseían información suficiente para dar ciertos resultados.

Por otro lado el término dinámico se refiere a fenómenos que producen pautas tiempo-cambio, las características de la pauta en un tiempo son interrelacionadas con éstas en otros tiempos. El término es casi sinónimo con tiempo-evolución o pautas de cambio. Casi todos los fenómenos observados en nuestros días o en investigaciones científicas tienen importantes aspectos dinámicos. Uno de ellos es la modelación de poblaciones.

Por todo lo anterior, se tiene el siguiente objetivo.

Objetivo General

Estudiar algunos conceptos y resultados sobre bifurcación uni-paramétrica de Sistemas Dinámicos, aplicar éstos a algunos modelos de crecimiento de poblaciones gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias, haciendo énfasis en el comportamiento del Sistema debido al parámetro de bifurcación que interviene en el modelo.

Estructura del trabajo.

En el primer capítulo se da una introducción a lo que son los sistemas dinámicos, explicando los principales conceptos que intervienen en este tema. Se formulan ciertos criterios de estabilidad para los conjuntos invariantes simples (equilibrios y órbitas periódicas).

Más adelante se exponen definiciones que son necesarias tales como: equivalencias topológicas, y de bifurcaciones de un sistema dinámico, por mencionar algunas. También se da la definición de sistemas dinámicos topológicamente equivalentes. Esta idea es usada para definir sistemas estructuralmente estables y bifurcaciones. La clasificación topológica de puntos de equilibrio genéricos y puntos fijos de sistemas dinámicos, definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, es dada por mapeos iterados y la geometría del esquema fase es estudiada cerca de tales puntos. Un diagrama de bifurcación de un sistema parámetro-dependiente es introducido como una partición de éste espacio paramétrico inducido por la equivalencia topológica de esquemas fase correspondientes. También son definidas formas normales topológicas para bifurcaciones.

En el segundo capítulo se presentan resultados importantes de bifurcaciones uniparamétricas de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos tiempo continuo. Dos bifurcaciones genéricas de codimensión uno, de deformación y Andronov-Hopf, son estudiadas en detalle siguiendo la misma idea general. Formulación de la correspondiente forma normal topológica y análisis de bifurcaciones; reducción de un sistema genérico parámetro-dependiente a su forma normal para los términos anteriores de un cierto orden; y demostración de que los términos de orden-superior no afectan el

diagrama de bifurcación local.

En el tercer capítulo se presentan algunas aplicaciones de la teoría con algunos modelos de poblaciones, principalmente en una y dos dimensiones.

Por último, en el cuarto capítulo se realiza un enfoque numérico. Ya que en muchos casos la aplicación de métodos numéricos es una herramienta para atacar el comportamiento del problema real. Los métodos utilizados son: Euler, Euler modificado y Runge-Kutta.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos: Su Equivalencia

Topológica, Bifurcación y Estabilidad

1.1 Sistemas dinámicos

La idea de un sistema dinámico es la formalización matemática del concepto científico general de un proceso determinístico. El estado pasado y futuro de muchos estados Físicos, Químicos, Biológicos, Económicos, etc., pueden ser predecidos con una cierta aproximación conociendo su estado presente y las leyes que gobiernan su evolución. El material que se expone en este capítulo, puede encontrarse parcialmente en [Glendinning], [Hale], [Kuznetsov], [Perko],[Smale].

1.1.1 Espacio estado

Todos los posibles estados de un sistema son caracterizados por los puntos de algún conjunto X . Este conjunto es llamado el *espacio estado* del sistema. La especificación de un punto $x \in X$ no sólo debe ser suficiente para describir la posición "instantánea" del sistema, sino también para determinar su evolución. A menudo, el espacio estado es llamado un *espacio fase*, siguiendo una tradición de la Mecánica Clásica.

1.1.2 Tiempo

La evolución de un sistema dinámico significa un cambio en el estado del sistema en el tiempo $t \in T$, donde T es un conjunto de números. Se consideran dos tipos de sistemas dinámicos: tiempo continuo (real) $T = \mathbb{R}$, y tiempo discreto (enteros) $T = \mathbb{Z}$. Sistemas del primer tipo son llamados sistemas dinámicos *tiempo-continuo*, mientras que los otros son llamados sistemas dinámicos *tiempo-discreto*. Los sistemas de tiempo-discreto aparecen naturalmente en Ecología y Economía. En este trabajo se estudiarán principalmente los sistemas dinámicos tiempo-continuo.

1.1.3 Operadores evolución

La componente principal de un sistema dinámico es una ley de evolución que determina el estado x_t del sistema en el tiempo t , proporcionado el estado inicial x_0 . La manera general de especificar la evolución es suponer que para $t \in T$ está dado un mapeo φ^t definido en el espacio estado X :

$$\varphi^t : X \longrightarrow X, \quad (1.1)$$

el cual transforma un estado inicial $x_0 \in X$ en algún estado $x_t \in X$ en tiempo t :

$$x_t = \varphi^t x_0. \quad (1.2)$$

El mapeo φ^t es a veces llamado el *operador evolución* del sistema dinámico. Éste se puede conocer explícitamente; sin embargo, en algunos casos, está definido indirectamente y puede ser calculado sólo aproximadamente. En el caso de tiempo-continuo, la familia $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ de operadores evolución es llamada un *flujo*.

Note que $\varphi^t x$ puede no estar definido para todos los pares $(x, t) \in X \times T$. Sistemas dinámicos con operadores evolución φ^t definidos para ambos $t \geq 0$ y $t < 0$ son llamados *invertibles*. En tales sistemas el estado inicial x_0 no solo define completamente el estado *futuro* del sistema, sino también su comportamiento en el *pasado*. Sin embargo, es útil considerar sistemas dinámicos cuyo comportamiento futuro para $t > 0$ está completamente determinado por su estado inicial x_0 en $t = 0$, pero la historia para $t < 0$ puede no ser reconstruida claramente. Tales sistemas dinámicos (no invertibles) son descritos por operadores evolución definidos solo para $t \geq 0$ (i.e., para $t \in \mathbb{R}_+$ o \mathbb{Z}_+). En el caso de tiempo-continuo, son llamados *semiflujos*.

El operador evolución tiene dos propiedades naturales que reflejan el carácter determinístico del comportamiento del sistema dinámico. Primero

$$\varphi^0 = id \quad (1.3)$$

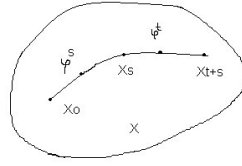


Figura 1.1: Operador evolución

donde id es el mapeo identidad en X , $id\ x = x$ para todo $x \in X$. La propiedad (1.3) implica que el sistema no cambia su estado "espontáneamente." La segunda propiedad del operador evolución dice

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \quad (1.4)$$

Esto significa que

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t(\varphi^s x) \quad (1.5)$$

para todo $x \in X$ y $t, s \in T$, tal que ambos miembros de la ecuación (1.5) son definidos. Esencialmente la propiedad del estado (1.4) que resulta de la evolución del sistema en el curso de $t + s$ unidades de tiempo, empezando en un punto $x \in X$, es lo mismo como si al sistema se le permite primero cambiar del estado x sobre únicamente s unidades de tiempo, y después evolucionar sobre las siguientes t unidades de tiempo resultando el estado $\varphi^{t+s}x$ (ver figura 1.1). Propiamente, si las leyes que gobiernan el comportamiento del sistema no hacen cambios en el tiempo, el sistema es "autónomo".

Para sistemas invertibles, el operador evolución φ^t satisface la propiedad (1.4) para t y s ambos negativos y no negativos. En tales sistemas, el operador φ^{-t} es la

inversa para φ^t , $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$, ya que

$$\varphi^{-t} \circ \varphi^t = id \quad (1.6)$$

Un sistema dinámico tiempo-discreto con t entero se especifica completamente con sólo un mapeo ($f = \varphi^1$), llamado "mapeo tiempo-uno". Usando (1.4), obtenemos

$$\varphi^2 = \varphi^1 \circ \varphi^1 = f \circ f = f^2 \quad (1.7)$$

donde f^2 es la segunda iteración del mapeo f . Similarmente

$$\varphi^k = f^k \quad (1.8)$$

para todo $k > 0$.

Finalmente, para muchos sistemas, $\varphi^t x$ es una función continua de $x \in X$, y $t \in \mathbb{R}$. Aquí, la continuidad está supuesta para ser definida con respecto a la norma o métrica correspondiente en X . Es más, muchos sistemas definidos en \mathbb{R}^n , o en variedades suaves en \mathbb{R}^n , son tales que $\varphi^t x$ es suave como una función de (x, t) . Tales sistemas son llamados *sistemas dinámicos suaves*.

1.1.4 Definición de un sistema dinámico

Ahora podemos dar una definición formal de un sistema dinámico.

Definición 1 Un *sistema dinámico* es una tripleta $\{T, X, \varphi^t\}$, donde T es un conjunto tiempo, X es un espacio estado y $\varphi^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores evolución parametrizados por $t \in T$ y cumpliendo las propiedades (1.3) y (1.4).

1.2 Órbitas y esquemas fase.

. La geometría básica asociada con sistemas dinámicos $\{T, X, \varphi^t\}$ son sus *órbitas* en el espacio estado y el *plano fase* compuesto de estas órbitas.

Definición 2 Una *órbita* que empieza en un punto fijo x_0 es un subconjunto ordenado del espacio estado X :

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0, \text{ para todo } t \in T \text{ tal que } \varphi^t x_0 \text{ esta definido}\}. \quad (1.9)$$

Las órbitas son a menudo llamadas trayectorias. Si $y_0 = \varphi^{t_0} x_0$ para algún t_0 , el conjunto $Or(x_0)$ y $Or(y_0)$ coinciden.

Definición 3 Un punto $x_0 \in X$ es llamado un *punto de equilibrio* (*punto fijo* para el caso discreto) si $\varphi^t x_0 = x_0$ para todo $t \in T$.

Reservaremos el nombre "punto de equilibrio" para sistemas dinámicos de tiempo-continuo, mientras que usaremos el término "punto fijo" para objetos correspondientes a sistemas de tiempo-discreto.

Definición 4 Un *ciclo* es una órbita periódica, es decir una órbita L_0 sin puntos de equilibrio, tal que cada punto $x_0 \in L_0$, satisface $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ con algún $T_0 > 0$, para todo $t \in T$.

El T mínimo con esta propiedad es llamado el *periodo* del ciclo L_0 . Si un sistema empieza su evolución en un punto x_0 en el ciclo, éste regresará al mismo punto después de cada T_0 unidades de tiempo. El sistema exhibe oscilaciones periódicas. En el

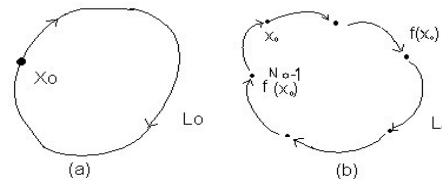


Figura 1.2: Órbitas periódicas en (a) tiempo-continuo y (b) tiempo-discreto

caso tiempo-continuo un ciclo L_0 es una curva cerrada en el plano (ver figura 1.2 (a)), mientras que en el caso discreto es una sucesión de puntos (ver figura 1.2 (b)).

Definición 5 *Un ciclo de un sistema dinámico tiempo-continuo, en una vecindad en la cual no hay otros ciclos, es llamado **un ciclo límite**.*

Definición 6 *El **diagrama de fase o esquema fase** de un sistema dinámico es una partición del espacio estado en órbitas.*

El esquema fase o diagrama de fase contiene mucha información sobre el comportamiento de un sistema dinámico.

1.3 Conjuntos invariantes

El concepto de *conjunto Invariante*, es usado para sistemas que no tienen puntos de equilibrio, excepto en que el vector estado tienda a seguir una pauta fija cuando aumenta el tiempo.

1.3.1 Definición y tipos

Para seguir clasificando elementos de un diagrama de fase en particular, posiblemente estados asintóticos del sistema, se usa la siguiente definición.

Definición 7 *Un conjunto invariante de un sistema dinámico $\{T, X, \varphi^t\}$ es un subconjunto $S \subset X$ tal que $x_0 \in S$ implique $\varphi^t x_0 \in S$ para todo $t \in T$.*

Mediante esta definición $\varphi^t S \subseteq S$ para todo $t \in T$. Siempre podemos restringir el operador evolución φ^t del sistema a su conjunto invariante S y considerar un sistema dinámico $\{T, X, \psi^t\}$, donde $\psi^t : S \rightarrow S$ es el mapeo inducido por φ^t en S . Usaremos el símbolo φ^t para la restricción, en lugar de ψ^t .

Si el espacio estado X está acotado con una métrica ρ , podemos considerar conjuntos invariantes cerrados en X .

1.3.2 Estabilidad de conjuntos invariantes

Para representar un estado asintóticamente estable de un sistema dinámico, un conjunto invariante S_0 puede ser estable; en otras palabras, éste debe "atraer" órbitas cercanas. Supongamos que tenemos un sistema dinámico $\{T, X, \varphi^t\}$ con un espacio estado métrico completo X . Sea S_0 un conjunto invariante cerrado.

Definición 8 *Un conjunto invariante S_0 es llamado **estable** si*

(i) *para cualquier vecindad suficientemente pequeña $U \supset S_0$ existe una vecindad $V \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \in U$ para todo $x \in V$ y todo $t > 0$;*

(ii) *existe una vecindad $U_0 \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \rightarrow S_0$ para todo $x \in U_0$, cuando $t \rightarrow +\infty$.*

La propiedad (i) de la definición es llamada *estabilidad según Lyapunov*. La propiedad (ii) es a veces llamada estabilidad asintótica. Hay conjuntos invariantes que son estables según Lyapunov pero no asintóticamente estables.

Si x^0 es un punto fijo de un sistema dinámico tiempo-discreto suave, de dimensión finita, entonces condiciones suficientes para su estabilidad pueden ser formuladas en términos de la matriz Jacobiana evaluada en x_0 .

Teorema 9 *Consideremos un sistema dinámico tiempo-discreto*

$$x \longrightarrow f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.10)$$

donde f es un mapeo suave. Supongamos que éste tiene un punto fijo x^0 , es decir $f(x^0) = x^0$, y denotando por A la matriz Jacobiana de $f(x)$ evaluada en x^0 , $A = f_x(x^0)$. Entonces el punto fijo es estable si todos los eigenvalores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de A satisfacen $|\mu_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Los eigenvalores de un punto fijo son usualmente llamados *multiplicadores*.

1.4 Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

La forma más común de definir un sistema dinámico tiempo-continuo es por medio de *ecuaciones diferenciales*. Supongamos que el espacio estado de un sistema es $X = \mathbb{R}^n$ con coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) . Si el sistema está definido sobre una variedad, pueden considerarse como coordenadas locales sobre éste. Muy a menudo las leyes de evolución del sistema están dadas explícitamente, en términos de la

velocidad \dot{x} , como función de las coordenadas:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

o en el vector de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.12)$$

donde la función vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es supuesto ser suficientemente diferenciable (suave). La ecuación (1.12) representa un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, (ODEs).

Pocos tipos de ecuaciones diferenciales pueden resolverse analíticamente (en términos de funciones elementales). No obstante, por suavidades del segundo miembro, las soluciones son garantizadas a existir de acuerdo con el siguiente teorema [Perko], [Smale].

Teorema 10 (*Existencia, unicidad y dependencia suave*). *Consideraremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es suave en una región abierta $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces hay una función única $x = x(t, x_0)$, $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es suave en (t, x) , y satisface, para cada $x_0 \in U$, las siguientes condiciones :

i) $x(0, x_0) = x_0$;

ii) Existe un intervalo $J = (-\delta_1, \delta_2)$, donde $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$, tal que, para todo $t \in J$,

$$y(t) = x(t, x_0) \in U. \quad (1.14)$$

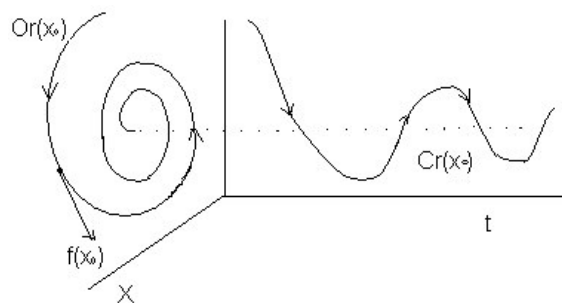


Figura 1.3: Órbita y curva solución

y

$$\dot{y} = f(y(t)). \quad (1.15)$$

El grado de suavidad de $x(t, x_0)$ con respecto a x_0 en el Teorema 10 es el mismo que de f en función de x . La función $x = x(t, x_0)$, considerada como una función de tiempo t , es llamada una *solución* que empieza en x_0 . Están definidos, para cada $x_0 \in U$, dos objetivos: *una curva solución*

$$Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

y *una órbita*, la cual es la proyección de $Cr(x_0)$ dentro del espacio estado,

$$Or(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^n \quad (1.17)$$

(ver la figura 1.3).

Ahora podemos definir el operador evolución $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$\varphi^t x_0 = x(t, x_0), \quad (1.18)$$

el cual asigna a x_0 un punto sobre la órbita a través de x_0 que es pasado t unidades de tiempo después. Obviamente, $\{\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es un sistema dinámico tiempo-continuo.

Este sistema es invertible. Cada operador evolución φ^t está definido para $x \in U$ y $t \in J$, donde J depende de x_0 y es suave en x . En la práctica, el operador evolución φ^t correspondiente a un sistema suave de ODEs pueden ser encontradas numéricamente sobre intervalos de tiempo fijos con una precisión deseada.

Los puntos de equilibrio de un sistema definido por (1.12) son ceros del campo vectorial dado por su término del lado derecho:

$$f(x) = 0 \tag{1.19}$$

Claramente, si $f(x^0) = 0$, entonces $\varphi^t x_0 = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para notación más corta, cuando nos referimos a puntos de equilibrio, en algunas ocasiones escribiremos simplemente equilibrios. La estabilidad de un punto de equilibrio puede detectarse sin solucionar el sistema, como puede ser aplicando funciones de Lyapunov. (Apéndice A)

En la siguiente sección veremos algunos métodos eficientes para probar la presencia de ciclos bajo perturbaciones pequeñas del sistema (por ejemplo, por variación de parámetros del cual depende el sistema).

1.5 Mapeos de Poincaré

Hay muchos casos en donde los sistemas dinámicos tiempo-discreto (mapeos) operan naturalmente en el estudio de sistemas dinámicos tiempo-continuo definidos por ecuaciones diferenciales. Llamaremos *mapeos de Poincaré* a los mapeos que surgen de las

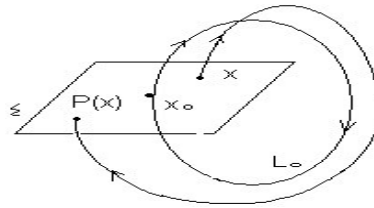


Figura 1.4: Mapeo de Poincaré asociado con un ciclo.

EDOs.

1.5.1 Mapeos de Poincaré y estabilidad de ciclos

Consideremos un sistema dinámico tiempo-continuo definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.20)$$

con f suave. Supongamos que (1.20) tiene una órbita periódica L_0 . Tomemos un punto $x_0 \in L_0$ e introduzcamos una sección transversal Σ para el ciclo en este punto (ver la figura 1.4). La sección transversal Σ es una hipersuperficie suave de dimensión $n - 1$, interceptando L_0 en un ángulo no cero. Ya que la dimensión de Σ es uno menos que la dimensión del espacio estado, diremos que la hipersuperficie Σ es de "codimensión" uno, simbolizado con, $\text{codim } \Sigma = 1$. Supongamos que Σ está definida cerca del punto x_0 por el conjunto de nivel-cero de una función escalar $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_0) = 0$,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \quad (1.21)$$

Un ángulo de intersección no cero ("transversalmente"), es decir, por medio del

gradiente

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)^T \quad (1.22)$$

no es ortogonal a L_0 en x_0 esto es,

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0 \quad (1.23)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar estándar en \mathbb{R}^n . La elección más simple de Σ es un hiperplano ortogonal al ciclo L_0 en x_0 . Una sección transversal es obviamente dada por un conjunto de nivel-cero de la función lineal

$$g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle. \quad (1.24)$$

Consideremos ahora órbitas de (1.20) cerca del ciclo L_0 . El mismo ciclo es una órbita que empieza en un punto en Σ y regresa a Σ en el mismo punto ($x_0 \in \Sigma$). Ya que la solución de (1.20) depende suavemente de su punto inicial (Teorema 10), una órbita que empieza en un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca a x_0 también regresa a Σ en algún punto $\tilde{x} \in \Sigma$ cerca de x_0 . Además, órbitas cercanas también interceptan Σ transversalmente. Así, un mapeo $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$,

$$x \rightarrow \tilde{x} = P(x), \quad (1.25)$$

es construido.

Definición 11 *El mapeo P es llamado un **mapeo de Poincaré** asociado con el ciclo L_0 .*

El mapeo de Poincaré P está localmente definido, tan suave como el miembro de la derecha de (1.20), y es invertible cerca de x_0 . La invertibilidad se

sigue de la invertibilidad del sistema dinámico definido por (1.20). El mapeo inverso $P^{-1} : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ puede ser construido extendiendo la órbita Σ transversalmente hacia atrás en el tiempo, después alcanzando su intersección previa con la sección transversal. El punto de intersección x_0 es un punto fijo del mapeo de Poincaré: $P(x_0) = x_0$.

Se permite introducir coordenadas locales $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ en Σ tal que $\xi = 0$ corresponde a x_0 . Entonces el mapeo de Poincaré será caracterizado por un mapeo localmente definido $P : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, el cual transforma ξ correspondiente a x en $\tilde{\xi}$ correspondiente a \tilde{x} ,

$$P(\xi) = \tilde{\xi}. \quad (1.26)$$

El origen $\xi = 0$ de \mathbb{R}^{n-1} es un punto fijo del mapeo $P : P(0) = 0$. La estabilidad del ciclo L_0 es equivalente a la estabilidad del punto fijo $\xi_0 = 0$ del mapeo de Poincaré. Así, el ciclo es estable si todos los eigenvalores (multiplicadores) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ de la matriz Jacobiana $(n-1) \times (n-1)$ de P ,

$$A = \left. \frac{dP}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad (1.27)$$

son localizadas dentro del círculo unitario $|\mu| = 1$ (ver Teorema 9).

Para los multiplicadores se tiene el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [Kuznetsov], [Perko], [Smale].

Lema 12 *Los multiplicadores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ de la matriz Jacobiana A del mapeo de Poincaré P asociado con un ciclo L_0 son independientes del punto x_0 en L_0 , la sección transversal Σ y las coordenadas locales sobre éste.*

De acuerdo al Lema 12 podemos usar cualquier sección transversal Σ para calcular los multiplicadores del ciclo: el resultado será el mismo.

Denotemos $x^0(t)$ una solución periódica de (1.20), $x^0(t + T_0) = x^0(t)$, correspondiente a un ciclo L_0 . Representaremos una solución de (1.20) en la forma

$$x(t) = x^0(t) + u(t), \quad (1.28)$$

donde $u(t)$ es una desviación de la solución periódica. Entonces,

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t) = f(x^0(t) + u(t)) - f(x^0(t)) = A(t)u(t) + O(\|u(t)\|^2). \quad (1.29)$$

Truncando el término $O(\|u(t)\|^2)$ resultan en el sistema lineal T_0 -periódico

$$\dot{u}(t) = A(t)u, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (1.30)$$

donde $A(t) = f_x(x^0(t))$, $A(t + T_0) = A(t)$.

Definición 13 *El sistema (1.30) es llamado **la ecuación variacional** alrededor del ciclo L_0 .*

Naturalmente, la estabilidad del ciclo depende de las propiedades de la ecuación variacional.

Definición 14 *La matriz $M(t)$ tiempo-dependiente es llamada la matriz fundamental solución de (1.20) si ésta satisface*

$$\dot{M} = A(t)M, \quad (1.31)$$

con la condición inicial $M(0) = I$, la matriz identidad $n \times n$.

Cualquier solución $u(t)$ para (1.30) satisface

$$u(T_0) = M(T_0)u(0) \quad (1.32)$$

La matriz $M(T_0)$ es llamada una matriz de *monodromía* del ciclo L_0 . La siguiente formula de Liouville expresa el determinante de la matriz de monodromía en términos de la matriz $A(t)$:

$$\det M(T_0) = \exp \left\{ \int_0^{T_0} \operatorname{tr} A(t) dt \right\} \quad (1.33)$$

Teorema 15 *La matriz de monodromía $M(T_0)$ tiene valores propios*

$$1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \quad (1.34)$$

donde μ_i son los multiplicadores del mapeo de Poincaré asociado con el ciclo L_0 .

La demostración de este teorema se puede encontrar en [Kuznetsov], [Perko], [Smale].

1.6 Equivalencia de Sistemas Dinámicos

En esta sección se introducen y discuten las ideas fundamentales que se utilizarán en el siguiente capítulo: equivalencia topológica de sistemas dinámicos y sus clasificaciones, bifurcación, diagramas de bifurcación, y formas normales topológicas para bifurcaciones. Aquí se tratará sólo con sistemas dinámicos en el espacio estado $X = \mathbb{R}^n$.

La comparación de cualquier objeto está basada en una *relación de equivalencia*, nos permite definir clases de objetos equivalentes y para el estudio de transiciones entre estas clases. Así, tenemos que especificar cuando definimos que dos sistemas

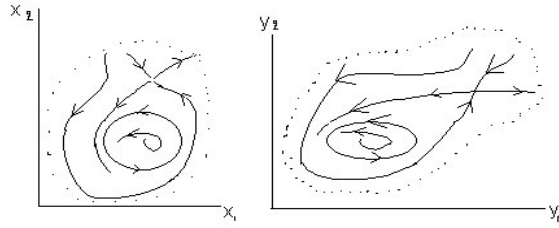


Figura 1.5: Equivalencia topologica.

dinámicos son "cualitativamente similares" o equivalentes. Consideremos dos sistemas dinámicos como equivalentes si sus esquemas fase son "cualitativamente similares", es decir, si un esquema puede ser obtenido de otro por una transformación continua (ver la figura 1.5)

Definición 16 Un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es **topológicamente equivalente** a $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeando órbitas del primer sistema a órbitas del segundo sistema, preservando la dirección en el tiempo.

Consideremos dos sistemas tiempo-continuo topológicamente equivalentes:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.35)$$

y

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (1.36)$$

con el miembro de la derecha suave. Sean φ^t y ψ^t los flujos correspondientes.

Supongamos que $y = h(x)$ es un mapeo invertible $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el cual es suave junto con su inversa (h es un difeomorfismo) y tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x)), \quad (1.37)$$

donde

$$M(x) = \frac{dh(x)}{dx} \quad (1.38)$$

es la matriz Jacobiana de $h(x)$ evaluada en el punto x . Entonces, el sistema (1.35) es topológicamente equivalente al sistema (1.36). Efectivamente, el sistema (1.36) es obtenido del sistema (1.35) por el cambio suave de coordenadas $y = h(x)$. Así, h mapea soluciones de (1.35) en soluciones de (1.36),

$$h(\varphi^t x) = \psi^t h(x), \quad (1.39)$$

y puede hacer el papel de la regla del homeomorfismo en la definición 16.

Definición 17 *Dos sistemas (1.35) y (1.36) satisfaciendo (1.37) para algún difeomorfismo h son llamados **suavemente equivalentes (o difeomórficos)**.*

Dos sistemas difeomórficos son prácticamente idénticos y puede verse como el mismo sistema escrito usando diferentes coordenadas. Ciclos límite difeomórficos tienen los mismos multiplicadores y periodos.

Supongamos que $\mu = \mu(x) > 0$ es una función escalar positiva suave y que el miembro de la derecha de (1.35) y (1.36) están relacionadas por

$$f(x) = \mu(x)g(x). \quad (1.40)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 18 *Dos sistemas (1.35) y (1.36) satisfaciendo (1.40) para una función positiva suave μ son llamados **órbitalmente equivalentes**.*

Claramente, dos sistemas orbitalmente equivalentes pueden ser no-difeomorfos, teniendo ciclos que parezcan la misma curva cerrada en el espacio fase pero tienen períodos diferentes.

Muy a menudo estudiamos sistemas dinámicos localmente, es decir, no en todo el espacio estado \mathbb{R}^n si no en algunas regiones $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 19 Un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es llamado **localmente topológicamente equivalente** cerca de un punto de equilibrio x_0 a un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ cerca de un equilibrio y_0 si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

(i) Es definido en una vecindad pequeña $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 ;

(ii) Satisface $y_0 = h(x_0)$;

(iii) Mapea órbitas del primer sistema en U dentro de órbitas del segundo sistema en $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$, preservando la dirección en el tiempo.

Una combinación de suavidades y orbitas equivalentes dan una relación de equivalencia útil, la cual usaremos frecuentemente mas adelante.

Definición 20 Dos sistemas (1.35) y (1.36) son llamados **suave orbitalmente equivalentes** si (1.36) es suavemente equivalente a un sistema que es orbitalmente equivalente a (1.35).

1.7 Clasificación topológica de puntos de equilibrio genéricos y puntos fijos

En esta sección estudiaremos la geometría del plano fase cerca de puntos genéricos, es decir, puntos de equilibrio hiperbólicos en sistemas dinámicos tiempo-continuo y se presenta su clasificación topológica.

1.7.1 Equilibrio hiperbólico en sistemas tiempo-continuo

Consideremos un sistema dinámico tiempo-continuo definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.41)$$

donde f es suave. Sea $x_0 = 0$ un punto de equilibrio del sistema y A denota la matriz Jacobiana $\frac{df}{dx}$ evaluado en x_0 . Sean n_- , n_0 , y n_+ el número de valores propios de A (contando multiplicidades) con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.

Definición 21 *Un punto de equilibrio es llamado **hiperbólico** si $n_0 = 0$, esto es, si no hay eigenvalores sobre el eje imaginario. Un punto de equilibrio hiperbólico es llamado **punto silla hiperbólico** si $n_- n_+ \neq 0$.*

Ya que una matriz genérica no tiene eigenvalores sobre el eje imaginario ($n_0 = 0$), la hiperbolicidad es una propiedad típica y un punto de equilibrio en un sistema genérico es hiperbólico. Estudiamos la geometría del esquema fase cerca de un punto de equilibrio hiperbólico en detalle. Para un punto de equilibrio, introduciremos dos

conjuntos invariantes:

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi^t x \longrightarrow x_0, t \longrightarrow +\infty\}, \quad W^u(x_0) = \{x : \varphi^t x \longrightarrow x_0, t \longrightarrow -\infty\}, \quad (1.42)$$

donde φ^t es el flujo asociado con (1.41).

Definición 22 $W^s(x_0)$ es llamado el **conjunto estable** de x_0 , mientras $W^u(x_0)$ es llamado el **conjunto inestable** de x_0 .

Los siguientes teoremas se pueden encontrar en [Kuznetsov].

Teorema 23 (Variedad estable local) Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico (i.e., $n_0 = 0$, $n_- + n_+ = n$). Entonces la intersección de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ con una vecindad suficientemente pequeña de x_0 contiene sub-variedades suaves $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ de dimensión n_- y n_+ , respectivamente.

Además, $W_{loc}^s(x_0)$ (respectivamente $W_{loc}^u(x_0)$) es tangente en x_0 a T^s (respectivamente T^u), donde T^s (respectivamente T^u) es el correspondiente eigen-espacio generalizado para la unión de todos los eigenvalores de A con $\text{Re } \lambda < 0$ ($\text{Re } \lambda > 0$).

El siguiente teorema da la clasificación topológica del punto de equilibrio hiperbólico.

Teorema 24 El esquema fase del sistema (1.41) cerca de dos puntos de equilibrio hiperbólicos, x_0 y y_0 , son localmente topológicamente equivalentes, si y sólo si, estos puntos de equilibrios tienen el mismo número n_- y n_+ de eigenvalores con $\text{Re } \lambda < 0$ y con $\text{Re } \lambda > 0$, respectivamente.

A menudo, los puntos de equilibrio x_0 y y_0 son también llamados topológicamente equivalentes.

Definición 25 *Nodos y focos son ambos llamados **antisillas**.*

Los puntos estables en dos dimensiones tienen variedades estables bidimensionales y no tienen variedades inestables. Para equilibrios inestables la situación es la contraria. Los puntos silla tienen variedades uni-dimensionales estables e inestables, algunas veces llamadas separatrices.

1.7.2 Ciclos límite hiperbólicos

Con apoyo de los mapeos de Poincaré, podemos definir los ciclos límite hiperbólicos en sistemas tiempo-continuo y describir la topología de órbitas fase cerca de tales ciclos. Considérese un sistema dinámico tiempo-continuo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.43)$$

con f suave y supongamos que existe una órbita periódica aislada (ciclo límite) L_0 de (1.43). Sea Σ una sección transversal local al ciclo de dimensión $(n - 1)$ ($\text{co dim } \Sigma = 1$) con coordenadas $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})^T$. El sistema (1.43) define localmente un mapeo P suave invertible (un mapeo de Poincaré) de Σ en Σ a lo largo de las órbitas de (1.43). El punto ξ_0 de intersección de L_0 con Σ es un punto fijo del mapeo P , $P(\xi_0) = \xi_0$.

Generalmente, los puntos fijos ξ_0 son hiperbólicos, entonces existen variedades invariantes

$$W^s(\xi_0) = \left\{ \xi \in \Sigma : P^k(\xi) \rightarrow \xi_0, \quad k \rightarrow -\infty \right\} \quad (1.44)$$

y

$$W^u(\xi_0) = \left\{ \xi \in \Sigma : P^{-k}(\xi) \longrightarrow \xi_0, \quad k \longrightarrow +\infty \right\} \quad (1.45)$$

de dimensiones n_- y n_+ respectivamente, donde n_{\mp} son el número de eigenvalores de la matriz Jacobiana de P en ξ_0 localizada dentro y fuera del círculo unitario. Recordando que $n_- + n_+ = n - 1$ y que los eigenvalores son llamados multiplicadores del ciclo. Las variedades invariantes $W^{s,u}(\xi_0)$ son la intersección con Σ de las variedades estables e inestables del ciclo:

$$\begin{aligned} W^s(L_0) &= \{x : \varphi^t x \longrightarrow L_0, \quad t \longrightarrow +\infty\}, \\ W^u(L_0) &= \{x : \varphi^t x \longrightarrow L_0, \quad t \longrightarrow -\infty\}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde φ^t es el flujo correspondiente a (1.43).

Un ciclo límite es llamado *hiperbólico* si ξ_0 es un punto hiperbólico del mapeo de Poincaré. Similarmente, un ciclo hiperbólico es llamado *un ciclo silla* si este tiene ambos multiplicadores dentro y fuera del círculo unitario (i.e., $n_- n_+ \neq 0$). Recordando que el producto de los multiplicadores es siempre positivo; por lo tanto el mapeo de Poincaré preserva orientaciones en Σ . Esto impone algunas restricciones sobre la localización de los multiplicadores en el plano complejo.

1.8 Bifurcación y diagramas de bifurcación

Ahora consideremos un sistema dinámico que depende de parámetros. En el caso tiempo-continuo se escribirá como

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (1.47)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representan las variables fase y parámetros respectivamente. Considere el esquema fase del sistema. Como los parámetros varían, el esquema fase también varía. Existen dos posibilidades: El sistema permanece topológicamente equivalente al original o su topología cambia.

Definición 26 *La presencia de una topología no equivalente al esquema fase bajo la variación de parámetros será **una bifurcación**.*

Así, una bifurcación es un cambio del tipo topológico del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor de bifurcación (crítico).

Las bifurcaciones de ciclos límite que corresponden a bifurcaciones locales de mapeos de Poincaré asociados, son llamadas *bifurcaciones locales de ciclos*.

También existen bifurcaciones que no pueden ser detectadas buscando en vecindades pequeñas de puntos de equilibrio (puntos fijos) o ciclos. Estas bifurcaciones son llamadas globales.

El esquema paramétrico junto con su esquema fase característico constituyen un diagrama de bifurcación.

Definición 27 *Un **diagrama de bifurcación** del sistema dinámico es una estratificación de su espacio paramétrico inducido por la equivalencia topológica, junto con su esquema fase representativo para cada estado.*

La bifurcación de Andronov-Hopf de un punto de equilibrio es caracterizada por una condición de bifurcación, es decir, la presencia de un par de eigenvalores imaginarios puros de la matriz Jacobiana evaluada en su equilibrio.

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0 \tag{1.48}$$

Cuando una frontera es cruzada, la bifurcación ocurre.

Definición 28 La *codimensión* de una bifurcación en el sistema (1.47) es la diferencia entre la dimensión del espacio paramétrico y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.

1.9 Forma normal topológica para bifurcaciones

Afortunadamente, los diagramas de bifurcación no son enteramente "caóticos". Consideremos dos sistemas dinámicos.

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (1.49)$$

y

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m \quad (1.50)$$

con f y g suaves con el mismo número de variables y parámetros. La siguiente definición es parecida a la Definición 16, con modificaciones necesarias debido a la dependencia de parámetros.

Definición 29 El sistema dinámico (1.49) es *topológicamente equivalente* a (1.50) si

- (i) Existe un homeomorfismo del espacio paramétrico $P: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \beta = p(\alpha)$;
- (ii) Existe un homeomorfismo paramétrico dependiente del espacio fase $h_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, y = h_\alpha(x)$, mapeando órbitas del primer sistema con valores paramétricos α dentro de órbitas del segundo sistema con valores paramétricos $\beta = p(\alpha)$ preservando la dirección en el tiempo.

Otra definición que surge en relación a (1.47) para comportamientos locales del sistema, por ejemplo, en vecindades pequeñas del origen del espacio estado, para valores de parámetros pequeños es:

Definición 30 *Dos sistemas (1.49) y (1.50) son llamados **locales topológicamente equivalentes cerca del origen** si existe un mapeo $(x, \alpha) \longrightarrow (h_\alpha(x), p(\alpha))$ definido en una vecindad pequeña de $(x, \alpha) = (0, 0)$ en el producto directo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y tal que*

i) $p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo definido en una vecindad pequeña de $\alpha = 0$, $p(0) = 0$.

ii) $h_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo parámetro dependiente definido en una vecindad pequeña U_α de $x = 0$, $h_0(0) = 0$ y mapeando órbitas de (1.49) en U_α dentro de órbitas de (1.50) en $h_\alpha(U_\alpha)$, preservando la dirección del tiempo.

Sea el sistema

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}^l \quad (1.51)$$

el cual tiene en $\beta = 0$ un equilibrio $\xi = 0$ satisfaciendo k condiciones de bifurcación determinando una $codim\ k$ de bifurcación de este punto de equilibrio. Aquí σ es un vector de los coeficientes $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$ del polinomio involucrado en (1.51). En todos los casos consideraremos que hay un número infinito de regiones en el espacio de coeficientes correspondiente a los diagramas de bifurcación topológicamente no equivalentes de (1.51). En la situación más simple, los coeficientes $\sigma_i = 1$ excepto un simple $\sigma_{i_0} = \pm 1$. En situaciones más complejas, algunas componentes de σ pueden tomar valores reales (modulados).

Junto con el sistema (1.51), consideremos un sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k \quad (1.52)$$

teniendo en $\alpha = 0$ un equilibrio $x = 0$.

Definición 31 (*Forma normal topológica*) *El sistema (1.51) es llamado una forma normal topológica para la bifurcación, si cualquier sistema genérico (1.52) con el punto de equilibrio $x = 0$ satisfaciendo las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$, es localmente topológicamente equivalente cerca del origen de (1.51) para algún valor del coeficiente σ_i .*

Naturalmente, tenemos que explicar que significa un sistema genérico. En todos los casos consideraremos, "genérico" aquel sistema que satisface un número finito de condiciones genéricas. Estas condiciones tendrán la forma de no igualdad:

$$N_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.53)$$

donde cada N_i es alguna función (algebraica) de ciertas derivadas parciales de $f(x, \alpha)$ con respecto a x y α evaluada en $(x, \alpha) = (0, 0)$. Así, un sistema "típico" parámetro-dependiente satisface estas condiciones. Actualmente, el valor de σ está determinado por valores de $N_i, i = 1, 2, \dots, s$.

Esto es útil para distinguir estas condiciones genéricas, las cuales son determinadas por el sistema en el valor de parámetro crítico $\alpha = 0$. Estas condiciones pueden ser expresadas en términos de derivadas parciales de $f(x, 0)$ con respecto a x evaluada en $x = 0$, y son llamadas *condiciones no degenerativas*. Todas las otras condiciones, en la cual las derivadas de $f(x, \alpha)$ con respecto al parámetro α están involucradas, son

llamadas *condiciones de transversalidad*. El papel de estos dos tipos de condiciones es diferente. Las condiciones no degenerativas garantizan que los equilibrios críticos (singularidades) no son también degenerados (i.e., típicamente en una clase de equilibrios satisfacen las condiciones de bifurcación dadas), mientras que las condiciones de transversalidad aseguran que los parámetros "desarrollan" estas singularidades en una forma genérica.

Definición 32 (*Sistema inducido*) *El sistema*

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m \quad (1.54)$$

se dice ser inducido por el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (1.55)$$

si $g(y, \beta) = f(y, p(\beta))$, donde $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un mapeo continuo.

Note que el mapeo p no es necesariamente un homeomorfismo, entonces este puede no ser invertible.

Definición 33 (*Deformación Versal*) *El sistema (1.51) es una deformación versal para la correspondiente bifurcación local si cualquier sistema (1.52), con el equilibrio $x = 0$ satisfaciendo las mismas condiciones de bifurcación y condiciones no degenerativas en $\alpha = 0$, es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a un sistema inducido por (1.51) para algunos valores de los coeficientes σ_i .*

Con ésta definición se concluye el capítulo.

Capítulo 2

Bifurcaciones uni-paramétricas de equilibrios en sistemas dinámicos tiempo-continuo

En este capítulo formularemos condiciones definiendo las bifurcaciones más simples de equilibrios en sistemas tiempo-continuo n -dimensionales: la bifurcación de deformación y la de Hopf, misma que se presentará en un ejemplo concreto en el siguiente capítulo, [Hale], [Kuznetsov], [Perko].

2.1 Condiciones de bifurcación más simples.

Considere un sistema tiempo-continuo dependiendo de un parámetro uni-dimensional:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

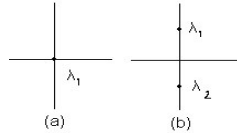


Figura 2.1: Codimension 1 casos críticos

donde f es suave con respecto a x y α . Sea $x = x_0$ un punto de equilibrio hiperbólico en el sistema para $\alpha = \alpha_0$. Se puede variar el parámetro y controlar el equilibrio. Es claro que existen, genéricamente, sólo dos formas en las cuales las condiciones de hiperbolicidad pueden violarse. Cualquier eigenvalor simple tiende a cero y tenemos $\lambda_1 = 0$ (ver figura 2.1 (a)), o un par de eigenvalores simples complejos alcanzan el eje imaginario y tenemos $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$, $w_0 > 0$ (ver figura 2.1 (b)) para algún valor del parámetro.

El resto del capítulo esencialmente será desarrollado para la prueba de que un punto de equilibrio no hiperbólico satisfaciendo una de las condiciones anteriores es estructuralmente inestable y para el análisis de las bifurcaciones correspondientes del esquema fase local bajo la variación de parámetros. Veamos las siguientes definiciones.

Definición 34 *La bifurcación asociada con la presencia de un $\lambda_1 = 0$ es llamada una **bifurcación de deformación** (o *tangente*).*

Esta bifurcación tiene muchos otros nombres, incluyendo punto límite, bifurcación nodo-silla y punto de Turing.

Definición 35 *La bifurcación correspondiente a la presencia de $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$, $w_0 > 0$, es llamada una **bifurcación de Hopf**.*

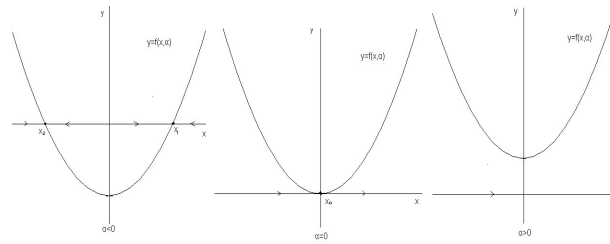


Figura 2.2: Bifurcación de deformación.

2.2 La forma normal de la bifurcación de deformación

Consideremos el siguiente sistema dinámico uni-dimensional dependiendo de un parámetro:

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha) \quad (2.2)$$

En $\alpha = 0$, este sistema tiene un equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. El comportamiento del sistema para todos los otros valores de α también es claro (ver figura 2.2). Para $\alpha < 0$ existen dos equilibrios en el sistema $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$, el de la izquierda es estable, mientras que el de la derecha es inestable. Para $\alpha > 0$ no hay equilibrios en el sistema. Mientras que α cruza el cero de valores negativos a positivos, los dos equilibrios (estable e inestable) "chocan" formando en $\alpha = 0$ un equilibrio con $\lambda = 0$, y desaparece. Esta es una bifurcación de deformación. El término "colisión" es apropiado ya que la velocidad de llegada $\left(\frac{d}{d\alpha} x_{1,2}(\alpha)\right)$ del equilibrio tiende a ∞ cuando

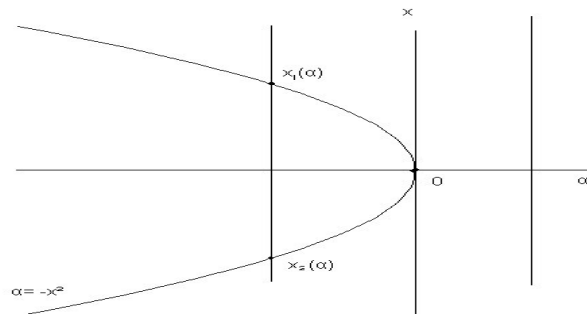


Figura 2.3: Bifurcación de deformación en el espacio fase paramétrico.

$\alpha \rightarrow 0$.

Existen otras formas de presentar esta bifurcación: trazando un diagrama de bifurcación en el producto directo del espacio fase y espacio paramétrico (simplemente, el plano (x, α)). La ecuación

$$f(x, \alpha) = 0 \quad (2.3)$$

define una variedad de equilibrio, la cual es simplemente la parábola $\alpha = -x^2$ (ver figura 2.3). Fijando algún α , podemos fácilmente determinar el número de puntos de equilibrio en el sistema para este valor del parámetro. La proyección del punto de equilibrio variando dentro del eje paramétrico tiene una singularidad del tipo de deformación en $(x, \alpha) = (0, 0)$.

El sistema $\dot{x} = \alpha - x^2$ puede ser considerado en el mismo camino. El análisis revela dos puntos de equilibrio operando para $\alpha > 0$.

Ahora adicionemos al sistema (2.2) términos de orden-mayor que pueden depender suavemente del parámetro. Sucede que estos términos no cambian cualitativamente el

comportamiento del sistema cerca del origen $x = 0$ para valores paramétricos cercanos a $\alpha = 0$. Consideraremos el siguiente lema.

Lema 36 *El sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3) \quad (2.4)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema $\dot{x} = \alpha + x^2$.

La prueba se hace en dos pasos. Basada sobre el hecho de que para sistemas escalares, un homeomorfismo que mapea equilibrios también mapeará su conexión de órbitas. Para detalles de la demostración ver [Kuznetsov]

2.3 Bifurcación de deformación genérica

Mostraremos en dos pasos que el sistema (2.2) (con un posible cambio de signo en el término x^2) es una forma normal topológica de un sistema genérico uní-dimensional teniendo una bifurcación de deformación.

Supongamos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

con f suave teniendo en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. Expandiendo $f(x, \alpha)$ como serie de Taylor con respecto a x en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3). \quad (2.6)$$

Satisface dos condiciones: $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ (**condición de equilibrio**) y $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ (**condición de bifurcación de deformación**).

La idea principal de los siguientes cálculos simples es: por cambios invertibles suaves de las coordenadas y el parámetro, transformando el sistema (2.5) en la forma (2.2) anterior e incluyendo los términos de segundo orden. Entonces el Lema 36 puede aplicarse, haciendo posible dibujar el término de orden mayor. Estas condiciones especificarán cuales sistemas uni-paramétricos tienen una bifurcación de deformación que puede ser considerada como genérica. Procederemos exactamente en esta forma analizando la bifurcación de Hopf después aquí mismo.

Paso 1 (Cambio de coordenadas). Realizar un cambio lineal de coordenadas introduciendo una nueva variable ξ :

$$\xi = x + \delta, \quad (2.7)$$

donde $\delta = \delta(\alpha)$ es una función a priori desconocida que será definida después. La transformación de coordenadas inversa es

$$x = \xi - \delta, \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.5) obtenemos

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + \dots \quad (2.9)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ &+ [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Supongamos que

$$f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0 \quad (2.11)$$

Entonces existe una función suave $\delta(\alpha)$ que elimina el término lineal en la ecuación de arriba para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Esto es justificado con el teorema de la función implícita (Apéndice B). En verdad, la condición para que el término lineal desaparezca es escrito como.

$$F(\alpha, \delta) \equiv f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta) = 0 \quad (2.12)$$

con alguna función suave ψ . Tenemos

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta} \Big|_{(0,0)} = -2f_2(0) + 2(0)\psi(0, 0) = -2f_2(0) \neq 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = f_1'(\alpha) - 2f_2'(\alpha)\delta + \delta^2\psi'(\alpha, \delta) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{(0,0)} = f_1'(0) - 2f_2'(0)0 + (0)^2\psi'(0, 0) = f_1'(0) \quad (2.15)$$

lo cual implica (localmente) la existencia y unicidad de una función suave $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$. Se sigue que expandiendo $\delta(\alpha)$ en serie de Taylor

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2) \quad (2.16)$$

La ecuación para ξ ahora contiene términos no lineales:

$$\dot{\xi} = [f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3) \quad (2.17)$$

Paso 2 (Introducción de un nuevo parámetro). Considerar como un nuevo parámetro $\mu = \mu(\alpha)$ al término constante de (2.17) (ξ -independiente):

$$\mu = f_0'(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha) \quad (2.18)$$

donde ϕ es alguna función suave. Tenemos:

$$\begin{aligned} a) \mu(0) &= 0 \\ b) \mu'(0) &= f_0'(0) = f_\alpha(0, 0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si suponemos que

$$f_\alpha(0,0) \neq 0 \quad (2.20)$$

entonces el Teorema de la Función Inversa (Apéndice B) implica la existencia y unicidad local de una función inversa suave $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$. Por lo tanto la ecuación (2.17) ahora es

$$\dot{\xi} = \mu + a(\mu)\xi^2 + O(\xi^3), \quad (2.21)$$

donde $a(\mu)$ es una función suave con $a(0) = f_2(0) \neq 0$ debido a la primera suposición (2.11).

Paso 3 (Escalamiento lineal). Sea $\eta = |a(\mu)|\xi$ y $\beta = |a(\mu)|\mu$ entonces obtenemos

$$\dot{\eta} = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3) \quad (2.22)$$

donde $s = \text{sig } a(0) = \pm 1$.

Por lo tanto, el siguiente Teorema está probado.

Teorema 37 *Supongamos que un sistema uni-dimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R, \quad (2.23)$$

con f suave, tenemos en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$, y sea $\lambda = f_x(0,0) = 0$. Asumamos que las siguientes condiciones son satisfechas:

$$f_{xx}(0,0) \neq 0 \quad (2.24)$$

$$f_\alpha(0,0) \neq 0 \quad (2.25)$$

Entonces existen condiciones invertibles y cambios paramétricos transformando el sistema en

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3). \quad (2.26)$$

Usando el Lema 36, podemos eliminar $O(\eta^3)$ y finalmente llegar a que el resultado general se sigue.

Teorema 38 (*Forma normal topológica para la Bifurcación de deformación*). *Cualquier sistema genérico escalar uní-paramétrico*

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (2.27)$$

teniendo en $\alpha = 0$, un equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$, es local topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2. \quad (2.28)$$

2.4 Forma normal de la Bifurcación de Hopf

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales dependiendo de un parámetro:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (2.29)$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio en $x_1 = x_2 = 0$ para todo α . Tomando sólo el término lineal y la matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

el sistema tiene eigenvalores $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Introduciendo la variable compleja $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$. Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2) \quad (2.31)$$

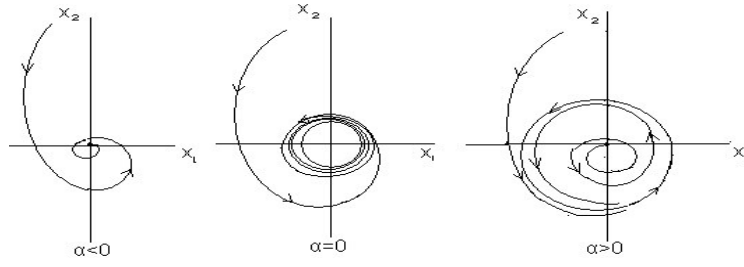


Figura 2.4: Bifurcación supercrítica de Hopf.

y podemos por lo tanto reescribir el sistema (2.29) en la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad (2.32)$$

Finalmente, usando la representación $z = \rho e^{i\varphi}$, obtenemos

$$\dot{z} = \dot{\rho} e^{i\varphi} + \rho i \dot{\varphi} e^{i\varphi} \quad (2.33)$$

o

$$\dot{\rho} e^{i\varphi} + i \rho \dot{\varphi} e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} (\alpha + i - \rho^2) \quad (2.34)$$

el cual da la forma polar del sistema (2.29)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Bifurcaciones del esquema fase del sistema cuando α pasa a través del cero puede analizarse fácilmente usando la forma polar, ya que la ecuación para ρ y φ en (2.35) son impares. La primera ecuación (la cual puede obviamente ser considerada solo para $\rho \geq 0$) tiene el punto de equilibrio $\rho = 0$ para todos los valores de α . El equilibrio es linealmente estable si $\alpha < 0$, éste queda estable en $\alpha = 0$ pero no linealmente (entonces

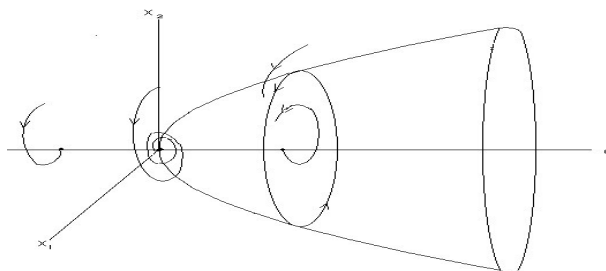


Figura 2.5: Bifurcación supercrítica de Hopf en el espacio fase paramétrico.

el índice de soluciones convergente a cero no es exponencialmente más grande); para $\alpha > 0$ el equilibrio llega a ser linealmente inestable. Además, existe un punto de equilibrio estable adicional $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ para $\alpha > 0$. La segunda ecuación describe una rotación con velocidad constante. Así, por superposición de la idea definida por las dos ecuaciones de (2.35), obtenemos el siguiente diagrama de bifurcación para el sistema original en 2-dimensiones (2.29) (ver figura 2.4). El sistema siempre tiene un equilibrio en el origen. Este equilibrio es un foco estable para $\alpha < 0$ y un foco inestable para $\alpha > 0$. En el valor del parámetro crítico $\alpha = 0$ el equilibrio no es linealmente estable y topológicamente equivalente al foco. Algunas veces, éste es llamado un foco de atracción débil. Este equilibrio es rodeado para $\alpha > 0$ por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), éste es único y estable. El ciclo es un círculo de radio $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo excepto en el origen, tienden al ciclo cuando $t \rightarrow \infty$. Esta es una bifurcación de **Andronov Hopf**.

Esta bifurcación puede también representarse en el espacio (x, y, α) que es un

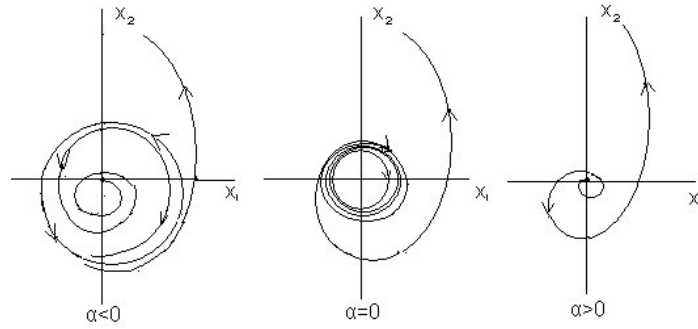


Figura 2.6: Bifurcación subcrítica de Hopf.

espacio de bifurcación (ver figura 2.5). Presentando la α -familia de ciclos límite, forman una *superficie paraboloides*.

Un sistema que tiene términos no lineales con el signo opuesto

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (2.36)$$

el cual tiene la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2 \quad (2.37)$$

se analiza de la misma forma (ver figura 2.6 y 2.7).

Conclusiones y Observaciones:

(1) Vimos que existen dos tipos de bifurcaciones de Andronov-Hopf. La bifurcación en el sistema (2.29) es a menudo llamada supercrítica por que el ciclo límite existe para valores positivos del parámetro α ("después" de la bifurcación). La bifurcación en el sistema (2.36) es llamada subcrítica ya que el ciclo está presente "antes" de la bifurcación.

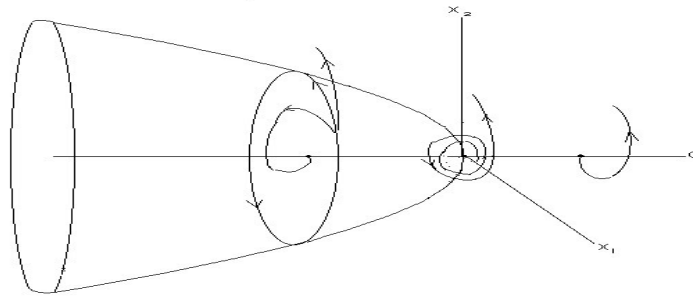


Figura 2.7: Bifurcación subcrítica de Hopf en el espacio fase paramétrico.

(2) En ambos casos tenemos una *pérdida de estabilidad* del equilibrio en $\alpha = 0$ bajo incremento del parámetro.

(3) Acerca de la interpretación de bifurcaciones de Hopf *super y sub-crítica* deben considerarse con cuidado. Si consideramos α como una variable lenta y le agregamos al sistema (2.29) la tercera ecuación

$$\dot{\alpha} = \varepsilon \quad (2.38)$$

con ε pequeño pero positivo, entonces la serie de tiempo resultante $(x(t), y(t), \alpha(t))$ demostrará algunos grados de "intensidad".

(4) Finalmente, consideremos un sistema sin términos lineales:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z \quad (2.39)$$

Este sistema también tiene una familia de órbitas periódicas incrementando la amplitud, pero todas ellas son presentadas en $\alpha = 0$ cuando el sistema tiene un *centro* en el origen (ver figura 2.8). Esto dice que el ciclo límite del paraboloide "degenera" en

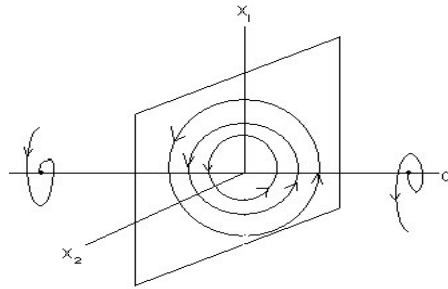


Figura 2.8: "Bifurcación de Hopf" en un sistema lineal.

el plano $\alpha = 0$ en el espacio- (x, y, α) en este caso. Estas observaciones hacen natural la presencia de ciclos límites pequeños en el caso no lineal.

Ahora agregaremos algunos términos de orden mayor al sistema (2.29), y escribamos éste en forma del vector

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4) \quad (2.40)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, y $O(\|x\|^4)$ pueden depender suavemente de α .

Lema 39 *El sistema (2.40) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema (2.29)*

Por lo tanto, los términos de orden mayor no afectan el comportamiento del sistema.

2.5 Bifurcación genérica de Hopf

Ahora podemos decir que cualquier sistema genérico de 2-dimensiones sufriendo una bifurcación de Hopf puede ser transformado a la forma (2.40) con una posible diferencia en el signo del término cúbico.

Consideramos un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.41)$$

con una función f suave, que tiene en $\alpha = 0$ el punto de equilibrio $x = 0$ con eigenvalores $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$, $w_0 > 0$. Por el teorema de la función implícita, (Apéndice B) el sistema tiene un único equilibrio $x_0(\alpha)$ en algunas vecindades del origen para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que $\lambda = 0$ no es un eigenvalor de la matriz Jacobiana. Podemos realizar un cambio de coordenadas, situando este equilibrio en el origen. Por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = 0$ es el punto de equilibrio del sistema para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Así, el sistema puede escribirse como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \quad (2.42)$$

donde F es una función vectorial suave con componentes $F_{1,2}$ teniendo expansiones de Taylor en x comenzando con al menos términos cuadráticos, $F = O(\|x\|^2)$. La matriz Jacobiana $A(\alpha)$ se escribe como:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

con funciones suaves de α como sus elementos. Sus eigenvalores son las raíces de la ecuación característica, la que se reduce a:

$$\det(A(\alpha) - \lambda I) = (a(\alpha) - \lambda)(d(\alpha) - \lambda) - (c(\alpha)b(\alpha)) \quad (2.44)$$

$$ad - a\lambda - \lambda d + \lambda^2 - cd = 0$$

o simplemente:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (2.45)$$

donde $\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr } A(\alpha)$, y $\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det A(\alpha)$. Entonces,

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right) \quad (2.46)$$

La condición de bifurcación de Hopf implica

$$\sigma(0) = 0, \Delta(0) = w_0^2 > 0 \quad (2.47)$$

Para $|\alpha|$ pequeño, introduciendo

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad w(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)} \quad (2.48)$$

y por lo tanto obtenemos la siguiente representación para los eigenvalores :

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)} \quad (2.49)$$

donde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha), \quad \mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0 \quad (2.50)$$

Lema 40 *Introduciendo una variable compleja z , el sistema (2.42) puede escribirse para $|\alpha|$ suficientemente pequeño como una simple ecuación:*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha) \quad (2.51)$$

donde $g = O(|z|^2)$ es una función suave de (z, \bar{z}, α) .

Prueba:

Sea $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un eigenvector de $A(\alpha)$ correspondiente a el eigenvalor $\lambda(\alpha)$:

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha) \quad (2.52)$$

Siempre es posible normalizar p con respecto a q :

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1, \quad (2.53)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significa el producto escalar estándar en \mathbb{C}^2 : $\langle p, q \rangle := \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$.

Cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede representarse exclusivamente para cualquier α pequeño como

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \quad (2.54)$$

para algún z complejo, siempre que los eigenvectores son especificados. Realmente, tenemos una fórmula explícita para determinar z :

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle \quad (2.55)$$

Para verificar esta fórmula (que resulta de tomar el producto escalar con p de ambos lados de (2.54)), tenemos que probar que $\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle = 0$. Este es el caso, ya que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \quad (2.56)$$

y por lo tanto

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0 \quad (2.57)$$

Pero $\lambda \neq \bar{\lambda}$ ya que para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño tenemos $w(\alpha) > 0$. Así, la única posibilidad es $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$.

La variable compleja z obviamente satisface la ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle, \quad (2.58)$$

teniendo la forma requerida (2.51) con

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle. \quad (2.59)$$

con esto finaliza la demostración del Lema 40.

No hay razón para esperar que g sea una función analítica de z (i.e., \bar{z} -independiente).

Escrita g como una serie formal de Taylor en dos variables complejas (z y \bar{z}):

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l, \quad (2.60)$$

donde

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0}, \quad (2.61)$$

para $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$

Afirmaciones:

(1) La ecuación (2.54) impone una relación lineal entre (x_1, x_2) y la parte real e imaginaria de z . De este modo, la introducción de z puede verse como un cambio invertible de variables, $y = T(\alpha)x$, y tomando $z = y_1 + iy_2$. Como es visto de (2.54), las componentes (y_1, y_2) son las coordenadas de x en la eigenbase real de $A(\alpha)$

compuesta por $\{2\operatorname{Re} q, -2\operatorname{Im} q\}$. En esta base, la matriz $A(\alpha)$ tiene su forma real canónica (Jordan):

$$J(\alpha) = T(\alpha)A(\alpha)T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & -w(\alpha) \\ w(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

(2) Supongamos que en $\alpha = 0$ la función $F(x, \alpha)$ de (2.54) está representada como

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (2.63)$$

donde $B(x, y)$ y $C(x, y, u)$ son funciones vector multilineales simétricas de $x, y, u \in \mathbb{R}^2$. En coordenadas, tenemos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2 \quad (2.64)$$

y

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2. \quad (2.65)$$

Entonces,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \quad (2.66)$$

donde $q = q(0), p = p(0)$, entonces los coeficientes de Taylor $g_{kl}, k + l = 2$, de los términos cuadráticos en $g(z, \bar{z}, 0)$ pueden ser expresados por las fórmulas

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad (2.67)$$

y de la misma forma calculando C da

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \quad (2.68)$$

(3) La normalización de q es relevante en lo siguiente. Supongamos que q es normalizado por $\langle q, q \rangle = 1$. Un vector $\tilde{q} = \gamma q$ es también el eigenvector de cualquier $\gamma \in \mathbb{C}$ no cero pero con la normalización $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle = |\gamma|^2$. Tomando $\tilde{p} = \frac{1}{\gamma} p$ guardando la normalización relativa intacta: $\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle = 1$. Es claro que los coeficientes de Taylor \tilde{g}_{kl} calculados usando \tilde{q}, \tilde{p} serán diferentes del g_{kl} original. Una representación multilineal es

$$\tilde{g}_{20} = \gamma g_{20}, \quad \tilde{g}_{11} = \bar{\gamma} g_{11}, \quad \tilde{g}_{02} = \frac{\bar{\gamma}^2}{\gamma} g_{02}, \quad \tilde{g}_{21} = |\gamma|^2 g_{21} \quad (2.69)$$

Sin embargo, este cambio puede neutralizarse fácilmente por un cambio lineal de la variable $z = \frac{1}{\gamma} w$, que resulta en la misma ecuación para w como antes.

Conjuntamente $\langle q, q \rangle = \frac{1}{2}$ corresponde a la relación estándar $z = \langle p, x \rangle = x_1 + ix_2$ para un sistema que ya tiene la forma real canónica $\dot{x} = J(\alpha)x$, donde J está dada como antes. En este caso,

$$q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Empezaremos por hacer un cambio de coordenadas (complejas) que simplificarán (2.51). Primero que todo, removeremos todos los términos cuadráticos.

Lema 41 *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (2.71)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada por un cambio inverso que depende del parámetro de coordenadas complejas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \quad (2.72)$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en una ecuación sin términos cuadráticos:

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3).$$

La demostración se puede ver en [Kuznetsov].

Afirmaciones:

(1) La transformación de coordenadas resultante es polinomial con coeficientes que son suavemente dependientes en α .

(2) Nótese que las transformaciones cambian los coeficientes de los términos cúbicos de (2.71) (también como los de orden mayor).

Asumamos que tenemos cambiados todos los términos cuadráticos, permitámonos intentar eliminar los términos cúbicos también. Esto es, "casi" posible: Existe sólo un término "resistente" como lo muestra el siguiente lema.

Lema 42 *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (2.73)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformado por un cambio invertible que depende del parámetro de coordenadas complejas

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3, \quad (2.74)$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño con sólo un término cúbico:

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (2.75)$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demostración:

La transformación inversa es

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4) \quad (2.76)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{21}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2}\right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\lambda h_{21}}{2}\right) z^2 \bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \lambda h_{12}\right) z \bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2}\right) \bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda - \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Así, haciendo

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda}, h_{03} = \frac{g_{03}}{3\lambda - \lambda}, \quad (2.78)$$

podemos anular todos los términos cúbicos en la ecuación resultante excepto el término, $w^2 \bar{w}$, el que trataremos separadamente, las substituciones son válidas ya que todos los denominadores involucrados son no cero para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Uno puede también tratar de eliminar el término $w^2 \bar{w}$ formalmente poniendo

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}. \quad (2.79)$$

Esto es posible para $\alpha \neq 0$ pequeño, pero el denominador se elimina en $\alpha = 0$: $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = iw_0 - iw_0 = 0$. Para obtener una transformación que es suavemente dependiente en α , da $h_{21} = 0$, que resulta en

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.80)$$

Con lo que termina la demostración.

Comentario:

El término cúbico restante $w^2\bar{w}$ es llamado un *término resonante*. Nótese que este coeficiente es el mismo que el coeficiente del término cúbico $z^2\bar{z}$ en la ecuación original en el Lema 42.

Ahora combinaremos los Lemas 41 y 42

Lema 43 (*Forma normal de Poincaré para la Bifurcación de Hopf*) La ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4) \quad (2.81)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada por un cambio invertible que depende del parámetro de coordenadas complejas, dependiendo suavemente del parámetro,

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3, \quad (2.82)$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en una ecuación con sólo el término cúbico resonante:

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2\bar{w} + O(|w|^4) \quad (2.83)$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demostración:

Obviamente, una superposición de las transformaciones definidas en los Lema 41 y 42 hacen el trabajo. Primero la transformación

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.84)$$

con

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda} \quad (2.85)$$

definida en el Lema 41. Esto elimina todos los términos cuadráticos pero también cambia los coeficientes del término cúbico. Los coeficientes de $w^2\bar{w}$ serán $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$, es decir, en lugar de $\frac{1}{2}g_{21}$. Entonces hacemos la transformación del Lema 42 que elimina todos los términos cúbicos excepto el resonante. El coeficiente $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ de este término sobra. Ya que aparecen términos de orden cuatro y más, la superposición sólo afecta a términos $O(|w|^4)$ en (2.83) y pueden ser truncados. Con esto termina la prueba.

Por otra parte, necesitamos unos cálculos para obtener el coeficiente c_1 en términos de la ecuación dada (2.81) un nuevo coeficiente $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ del término es $w^2\bar{w}$ después de la transformación cuadrática (2.84). Podemos hacer esto calculando de la misma manera como en el Lema 41 y 42, es decir, invirtiendo (2.84). Desafortunadamente, ahora tenemos que conocer el mapeo inverso anterior e incluyendo los términos cúbicos. Actualmente, sólo el término cúbico "resonante" de la inversa es requerido:

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(3h_{11}h_{20} + 2|h_{11}|^2 + |h_{02}|^2)z^2\bar{z} + \dots \quad (2.86)$$

Sin embargo, existe una posibilidad para evitar la inversa explícitamente de (2.85).

Efectivamente, podemos expresar \dot{z} en términos de w, \bar{w} en dos formas. Una forma es sustituir (2.84) en la ecuación original (2.81). Alternativamente, ya que conocemos la forma resultante (2.83) para que (2.81) pueda ser transformada, \dot{z} puede ser calculada diferenciando (2.84)

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\dot{\bar{w}} \quad (2.87)$$

y entonces substituyendo \dot{w} y su conjugado complejo, usando (2.83). Comparando los coeficientes del término cuadrático en la expresión obtenida por \dot{z} dadas las fórmulas para h_{20} , h_{11} , y h_{02} , mientras equiparando los coeficientes en frente del término $w|w|^2$ nos dice que:

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda + \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.88)$$

Esta fórmula nos da la dependencia de c_1 sobre α si recordamos que λ y g_{ij} son funciones suaves del parámetro. En el valor de bifurcación paramétrico $\alpha = 0$, la ecuación previa se reduce a

$$c_1 = \frac{i}{2w_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \quad (2.89)$$

Ahora queremos transformar la forma normal de Poincaré dentro de la forma normal estudiada en la sección previa.

Lema 44 *Considere la ecuación*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + iw(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (2.90)$$

donde $\mu(0) = 0$, y $w(0) = w_0 > 0$.

Supongamos $\mu'(0) \neq 0$ y $\text{Re } c_1(0) \neq 0$. Entonces, la ecuación puede transformarse por una transformación lineal de coordenadas parámetro-dependiente, un cambio de variable en el tiempo, y una reparametrización de tiempo no lineal dentro de una ecuación de la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4) \quad (2.91)$$

donde u es una nueva coordenada compleja y θ, β son el nuevo tiempo y parámetros, respectivamente, y $s = \text{sign } \text{Re } c_1(0) = \pm 1$.

Demostración:

Paso (1) (cambio de variable lineal en el tiempo). Introduciendo el nuevo tiempo $\tau = w(\alpha)t$. La dirección del tiempo es preservada ya que $w(\alpha) > 0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Entonces,

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (2.92)$$

donde

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{w(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{w(\alpha(\beta))} \quad (2.93)$$

Podemos considerar β como un nuevo parámetro porque

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{w(0)} \neq 0 \quad (2.94)$$

y por lo tanto el Teorema de la Función Inversa garantiza la existencia local y suavidades de α como una función de β . Nótese que d_1 es complejo.

Paso (2) (Reparametrización de tiempo no lineal) Cambiemos el tiempo parametrizando a lo largo de las órbitas introduciendo un nuevo tiempo $\theta = \theta(\tau, \beta)$, donde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau \quad (2.95)$$

con $e_1(\beta) = \text{Im } d_1(\beta)$. El cambio del tiempo es una transformación casi idéntica, en una vecindad pequeña del origen. Usando la nueva definición del tiempo obtenemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \quad (2.96)$$

donde $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ es real y

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{w(0)} \quad (2.97)$$

Paso (3) (Cambio de coordenada lineal). Finalmente, introduciendo una nueva variable compleja u :

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}, \quad (2.98)$$

lo que es posible debido a que $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$ y, así, $l_1(0) \neq 0$. La ecuación entonces toma la forma requerida:

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u |u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su |u|^2 + O(|u|^4), \quad (2.99)$$

con $s = \operatorname{sign} l_1(0) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_1(0)$. Con lo que termina la demostración.

Definición 45 *La función real $l_1(\beta)$ es llamada el primer coeficiente de Lyapunov.*

Se sigue de (2.97) que el primer coeficiente de Lyapunov en $\beta = 0$ puede calcularse por la fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + w_0g_{21}) \quad (2.100)$$

Así, necesitamos solo ciertas derivadas de segundo y tercer orden del miembro derecho en el punto de bifurcación para calcular $l_1(0)$. Recordemos que los valores de $l_1(0)$ no depende de la normalización de los eigenvectores p y q , mientras su signo es invariante bajo el cambio de p, q , obedeciendo la normalización relativa $\langle p, q \rangle = 1$. Note que la ecuación de u con $s = -1$ escrita en forma real coincide con el sistema (2.40) de la sección anterior. Ahora, agreguemos el resultado obtenido en el siguiente teorema.

Teorema 46 *Supóngase un sistema bi-dimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.101)$$

con f suave, tiene para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $x = 0$ con eigenvalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm iw(\alpha), \quad (2.102)$$

donde $\mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$. Sean las siguientes condiciones satisfechas:

(i) $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov;

(ii) $\mu'(0) \neq 0$.

Entonces, existe un cambio invertible de coordenadas y parámetro, y una reparametrización del tiempo transformando (3.101) en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \quad (2.103)$$

Usando el Lema 39, llegamos finalmente al siguiente resultado general.

Teorema 47 (Forma normal topológica para la bifurcación de Hopf) *Cualquier sistema genérico bidimensional uní paramétrico*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (2.104)$$

teniendo en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con eigenvalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm iw_0, w_0 > 0, \quad (2.105)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo se estudian algunos ejemplos de modelos de poblaciones, los cuales se analizan por medio de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores.

Un parámetro puede ser definido como una "constante que varía", en donde, el comportamiento de lo que se está analizando puede cambiar dramáticamente. Algunos ejemplos clásicos de una ecuación diferencial con un parámetro, son en primer lugar la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ky, \text{ donde } k \text{ es una constante.} \quad (3.1)$$

Y en segundo, un modelo de una ecuación diferencial que se puede encontrar en varios textos ([Blanchard], [Murray], [Perko], [Smale]), es el modelo de población logística

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{N}\right) \quad (3.2)$$

donde P es la población, t es el tiempo, k es el índice de crecimiento intrínseco para poblaciones pequeñas y N es la capacidad de cupo. Un sistema similar se trabaja en la siguiente sección.

3.1 Un modelo de pesca

Este modelo aparece en [Campbell].

Supongamos el modelo poblacional de una especie de "peces" en particular, en un lago con una ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P \left(1 - \frac{P}{4} \right) \quad (3.3)$$

donde $P(t)$ representa la población de peces al tiempo t en un periodo de diez mil años, $k = 0.25$ es el parámetro que indica el crecimiento intrínseco y $N = 4$ (esto es 40,000 peces) es la capacidad de cupo del lago. Supongamos que este será reabierto para controlar a los pescadores y ver cuantas licencias se pueden poner en circulación sin riesgo alguno. Cada licencia permitida en tiempo de un año. Una modificación del modelo el cual toma en cuenta a los pescadores es

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P \left(1 - \frac{P}{4} \right) - 0.002L \quad (3.4)$$

donde L es el número de licencias puestas en circulación para los pescadores y tenemos así una ecuación uni-paramétrica. La pregunta ahora es ¿Cuántas licencias pueden ser permitidas sin riesgo de dejar el lago vacío?. Para responder a esta pregunta, hacemos primero un análisis geométrico, como se muestra a continuación.

3.1.1 Una aproximación geométrica para el problema de pesca

El problema se resuelve fácilmente mediante un análisis geométrico, basándose sobre el estudio del argumento dP/dt como una función de P para varios valores de

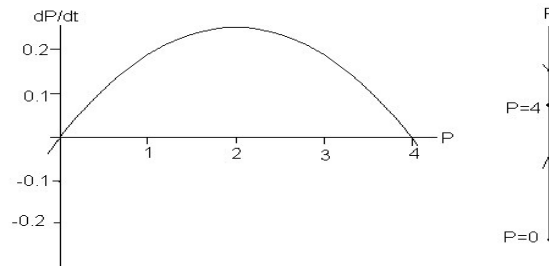


Figura 3.1: Gráfica de dP/dt contra P y su línea fase asociada.

L . El poder de este análisis cualitativo es que podemos entender el modelo y predecir el comportamiento de mayor nivel sin tener la solución a la ecuación diferencial explícitamente.

Para $L = 0$, de (3.4) tenemos dos raíces, una en $P = 0$ y la otra en $P = 4$ (ver figura 3.1). Estas dos raíces representan las soluciones de equilibrio para la ecuación diferencial original. En $P = 0$ no tenemos peces y así no sucede nada. En $P = 4$ tenemos estática la capacidad de cupo; el índice de muerte y el de crecimiento son el mismo. Para poblaciones entre 0 y 4, dP/dt es positivo como se puede verificar rápidamente en (3.4), lo que indica que la población se está incrementando. Para poblaciones más grandes que 4, dP/dt es negativo y entonces la población está disminuyendo. Así esto se puede ver en la línea fase. (figura 3.1).

La gráfica de la figura 3.2 muestra la solución para varios valores de L . De la cual el comportamiento cualitativo de la solución es claro. El miembro derecho de (3.4) tiene un máximo en $1/4 - 0.002L$ cuando $P = 2$. Cuando el término $0.002L$ es más grande que $1/4$, esto es, cuando L es más grande que 125, la parábola está completamente

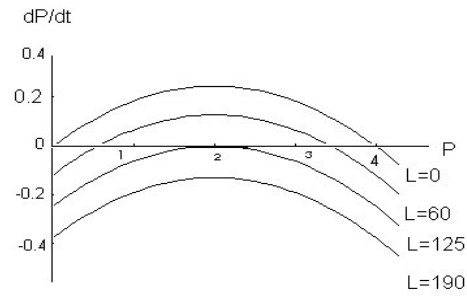


Figura 3.2: Gráfica para varios valores de L del cual el comportamiento cualitativo de la solución es deducido.

debajo del eje- P entonces dP/dt es siempre negativo. Esto significa que no importa la población inicial. Si más de 125 licencias son permitidas la población de peces morirá.

En este párrafo introducimos la idea de una **población de umbral** a estudiar que sucede en el equilibrio para valores de L entre 0 y 125 (ver figura 3.2). De la figura 3.2 vemos que para L entre 0 y 125 hay dos poblaciones en equilibrio $P_1 < P_2$. Intersecciones de las gráficas con el eje p . El mayor es un sumidero o pozo y el más pequeño una fuente. Si $P(0)$ es más grande que P_2 la población aumenta con un límite P_2 . Sin embargo, si $P(0) < P_1$ la población disminuye alcanzando el cero en un tiempo finito. Ésto se muestra en la figura 3.3 para el caso $L = 60$. Así P_1 es un nivel de umbral bajo el cual la población de peces no puede caer si la población no está desapareciendo.

Cuando $L = 125$ las dos poblaciones en equilibrio se colapsan para formar un simple equilibrio "semi-estado" en $P = 2$ que es también una población de umbral. Cuándo la condición inicial $P(0) > 2$ entonces la población decrece con límite 2,

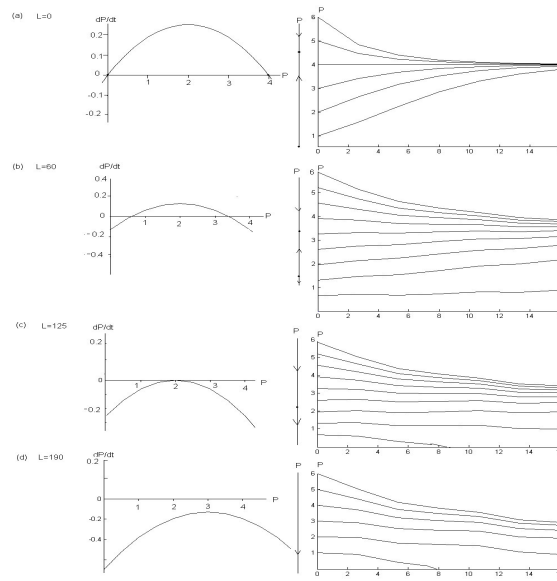


Figura 3.3: Esquematación de la solución para varios valores de L y su línea fase.

mientras la población inicial bajo 2 se extingue.

Si $L > 125$ por ejemplo en el caso $L = 190$ en la figura 3.3 todas las soluciones tienden a cero a pesar de cualquier condición inicial $P(0)$. El valor de $L = 125$ es un valor de bifurcación para el parámetro L en este modelo. Ya que como se observa inmediatamente, se satisface la definición 26 del capítulo I y la figura 3.3 se puede tomar como un esquema fase según la definición 27 del mismo capítulo.

3.2 Sistema de Volterra

Volterra primero propuso un simple modelo para la depredación de una especie hacia otra para explicar los niveles de oscilación de una cierta cantidad de peces en el Adriático. Representando a $N_1(t)$ como la población de presas y $N_2(t)$ como la del depredador en un tiempo t , entonces el modelo de Volterra es

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde α, β, γ y δ son parámetros positivos.

Las suposiciones para el modelo son: (i) La presa en ausencia del depredador crece desacomodadamente en una forma Malthusiana; esto es el término αN_1 . (ii) El efecto del depredador es reducir el índice de crecimiento por unidad de la presa por un término proporcional a la presa y la población del depredador, esto es el término $-\beta N_1 N_2$. (iii) En la ausencia de la presa el depredador presenta un índice de muerte en un decaimiento exponencial, esto es, $-\gamma N_2$. (iv) La contribución de la presa para el índice de crecimiento del depredador es $\delta N_1 N_2$, esto es, proporcional a la disponibilidad de presas también como el tamaño de la población de depredadores. El modelo (3.5) es conocido como modelo de Lotka-Volterra, ya que estas mismas ecuaciones fueron derivadas por Lotka al exhibir un comportamiento periódico de una concentración química.

A continuación se desarrollan las siguientes tareas para el sistema (3.5).

(a) Reducir el sistema (3.5) a un sistema con un sólo parámetro, (b) determinar sus puntos de equilibrio y la región en la que se encuentran, (c) verificar que las órbitas del sistema reescalado en el primer cuadrante coinciden con las del sistema

Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{y} - 1 \\ \dot{y} &= \gamma \left(1 - \frac{1}{x}\right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

y encontrar la función Hamiltoniana H (Apéndice A). (d) analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

.(a) Se reduce el sistema mediante un cambio lineal de variables y tiempo.

Sean $x(\tau) = \frac{\gamma}{\delta}N_1$, $y(\tau) = \frac{\beta}{\alpha}N_2$, $\tau = \alpha t$ y $\gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$ los cambios de variables y tiempo respectivamente, entonces derivando tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= \frac{\gamma}{\delta} \frac{dN_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{\gamma}{\delta} (\alpha N_1 - \beta N_1 N_2) \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\gamma}{\delta} (\alpha \frac{\delta}{\gamma} x - \beta \frac{\delta}{\gamma} x \frac{\alpha}{\beta} y) \frac{1}{\alpha} \\ &= x - xy\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\dot{y}(\tau) &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{dN_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} (-\gamma N_2 + \delta N_1 N_2) \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} (-\gamma \frac{\alpha}{\beta} y + \delta \frac{\gamma}{\delta} x \frac{\alpha}{\beta} y) \frac{1}{\alpha} \\ &= \gamma y (x - 1).\end{aligned}\quad (3.8)$$

por lo tanto se llega a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= \gamma y (x - 1).\end{aligned}\quad (3.9)$$

El sistema (3.9) tiene un sólo parámetro como se deseaba.

(b) Encontrar los puntos de equilibrio del sistema (3.9).

Los puntos de equilibrio del sistema (3.9) son obviamente $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (1, 0)$, obtenidos al igualar cada ecuación a cero y no es difícil dar una región en el plano dónde localizarlos.

(c) Primero la función Hamiltoniana (Apéndice A) del sistema (3.6) es:

$$H = \gamma x + y - \ln x^\gamma y \quad (3.10)$$

como se puede verificar tomando las parciales de la función para llegar al sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{y} - 1 \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\gamma \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \end{aligned}$$

el cual es efectivamente el sistema (3.6). Ahora, las trayectorias del sistema (3.9) y las del sistema Hamiltoniano (3.6) coinciden en el primer cuadrante porque estos producen campos que están relacionados por el factor xy lo que se puede verificar multiplicando los segundos miembros de (3.6) obteniéndose los segundos miembros de (3.9). Como el producto xy es positivo en este cuadrante, estos campos coinciden en este cuadrante.

(d) Regresando al sistema (3.9), una linealización alrededor de los puntos singulares determinan el tipo de singularidad y estabilidad. Consideraremos primero el estado $(x, y) = (0, 0)$. Sea x y y perturbaciones pequeñas alrededor de $(0, 0)$. Tomando sólo los términos lineales de (3.9) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

los eigenvalores λ están dados por el polinomio característico de la matriz A que son: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\gamma$. Ya que uno de los eigenvalores es $\lambda_1 > 0$, $x(\tau)$ y $y(\tau)$ crecen exponencialmente y entonces $x = y = 0$ es linealmente inestable. Por otro lado como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ esto es un punto silla.

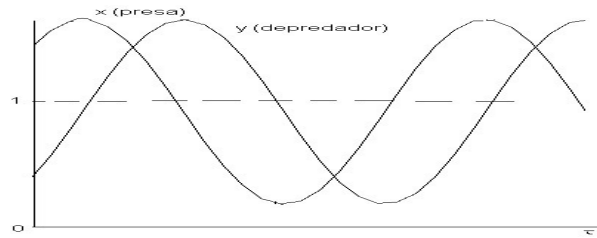


Figura 3.4: Solución periódica para la presa y el depredador bajo la condición inicial $x(0)=1.25$ y $y(0)=0.66$, con $\lambda = 1$.

Linealizando alrededor del estado $x = y = 1$ y conjuntando $u = 1 + x$, $v = 1 + y$ con $|x|$ y $|y|$ pequeños, de (3.9) tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{\gamma}$. Así $u = v = 1$ es un centro con una bifurcación de Hopf ya que los eigenvalores son imaginarios.

Entonces las soluciones en las cercanías de los puntos singulares $u = v = 1$ son periódicas en τ con periodo $2\pi/\sqrt{\gamma}$. En este contexto ecológico la matriz A de las ecuaciones lineales (3.11) y (3.12) es llamada *matriz comunidad*, y sus eigenvalores λ determinan la estabilidad del estado. Su solución se puede ver en la figura 3.4.

3.3 Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1(1-x_1) - \frac{cx_1x_2}{\alpha+x_1} \\ \dot{x}_2 &= -dx_2 + \frac{cx_1x_2}{\alpha+x_1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

El sistema describe la dinámica de un simple ecosistema depredador-presa [Murray], [Fuznetsov]. Las variables x_1 y x_2 son cantidades poblacionales presa y depredador respectivamente, r, c, d y α son parámetros caracterizando el comportamiento de la población aislada y sus interacciones. Consideramos α como un parámetro de control y supondremos $c > d$. El sistema (3.13) nos muestra el comportamiento de dos especies, que van a depender de la situación en que se encuentren cada una originalmente, entonces suponiendo, similarmente como se hizo en la sección (3.2), tenemos que: (i) En ausencia del depredador se tiene un modelo poblacional logístico, esto es el término de \dot{x}_1 , $rx_1(1-x_1)$ donde r es un índice de crecimiento intrínseco. (ii) Cuando la presa se ausenta, se presenta un índice de muerte del depredador en el término de \dot{x}_2 , $-dx_2$ con $d > 0$. (iii) El efecto del depredador es reducir la presa y a la vez mantener su existencia para que no sufra un descenso esto es el término $-\frac{cx_1x_2}{\alpha+x_1}$, que va a depender del valor que tenga α . (iv) Y el de la presa es mantener al depredador pero sin extinguirse ella, que es lo que indica el término $\frac{cx_1x_2}{\alpha+x_1}$ al igual que en (iii) va a depender del valor de α para ver que tan rápido o lento se extinguirá cada especie en cierto periodo de tiempo.

Para simplificar el análisis, consideremos un sistema polinomial teniendo para

$x_1 > -\alpha$ las mismas órbitas que el sistema original, representado por las ecuaciones $\dot{x}_1 = rx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$, $\dot{x}_2 = x_1 + rx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$.

Entonces, multiplicando el sistema (3.13) en ambos lados por el término $(\alpha + x_1)$ e introduciendo una nueva variable de tiempo τ por $dt = (\alpha + x_1)d\tau$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(\alpha + x_1)\dot{x}_1 &= (\alpha + x_1) \left(rx_1(1 - x_1) - \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1} \right) \\(\alpha + x_1)\dot{x}_2 &= (\alpha + x_1) \left(-dx_2 + \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1} \right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

simplificando y quedando \dot{x}_1 y \dot{x}_2 dependiendo de τ obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2\end{aligned}\quad (3.15)$$

Sus equilibrios se encuentran de la siguiente forma

$$\begin{aligned}rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_1x_2 &= 0 \\ -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2 &= 0\end{aligned}\quad (3.16)$$

dividiendo la segunda ecuación por x_2 y la primera por x_1 en (3.16) obtenemos

$$\begin{aligned}r(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_2 &= 0 \\ -\alpha d + (c - d)x_1 &= 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

Así, se encuentra

$$x_1 = \frac{\alpha d}{(c - d)}\quad (3.18)$$

sustituyendo el valor de x_1 en la primera ecuación se tiene:

$$r \left(\alpha + \frac{\alpha d}{(c - d)} \right) \left(1 - \frac{\alpha d}{(c - d)} \right) - cx_2 = 0\quad (3.19)$$

simplificando obtenemos el valor de x_2 que es:

$$x_2 = \frac{r\alpha}{(c - d)} \left(1 - \frac{\alpha d}{(c - d)} \right)\quad (3.20)$$

Entonces el equilibrio no trivial es:

$$E_0 = \left(\frac{\alpha d}{(c-d)}, \frac{r\alpha}{(c-d)} \left(1 - \frac{\alpha d}{(c-d)} \right) \right) \quad (3.21)$$

La matriz Jacobiana correspondiente al equilibrio (3.21) esta dada por:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r(\alpha + x_1)(1 - x_1) + rx_1((1 - x_1) + (\alpha + x_1)) - cx_2 & -cx_1 \\ -\alpha d + (c-d)x_2 & -\alpha d + (c-d)x_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

evaluada en su equilibrio es:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) & \frac{-\alpha cd}{c-d} \\ \frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

y así podemos obtener los eigenvalores, para la ecuación que se tenía anteriormente:

$$\lambda_{1,2} = \det(A - \lambda I) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right) \quad (3.24)$$

luego si se hace

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\text{tr } A}{2} = \frac{\alpha rd(c+d)}{2(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) \quad (3.25)$$

Se tiene que $\mu(\alpha_0) = 0$ para

$$\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d} \quad (3.26)$$

Además, si hacemos $w^2(\alpha) = \frac{1}{4}(4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha))$ hay que ver que este término en $w(\alpha_0) = \frac{1}{4}(4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha))$ es positivo:

$$\begin{aligned} w^2(\alpha) &= \frac{1}{4}(4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)) = (\det A) - \frac{1}{4}\sigma^2(\alpha) \\ &= \left(\frac{\alpha cd}{c-d} \frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d} \right) - \frac{1}{4}\sigma^2(\alpha) \\ &= \frac{\alpha^2 cdr(c-d(1+\alpha))}{(c-d)^2} - \frac{1}{4}\mu^2(\alpha) \end{aligned} \quad (3.27)$$

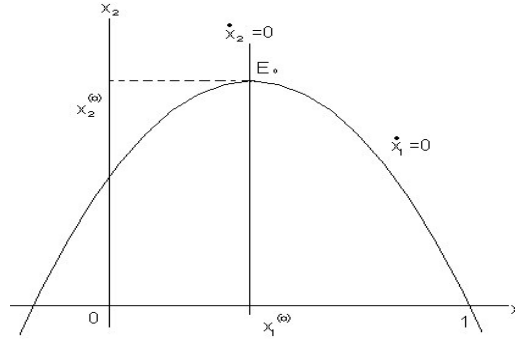


Figura 3.5: Isoclinas-nulas en la bifurcación de Hopf

ahora

$$\begin{aligned}
 w^2(\alpha_0) &= \frac{\left(\frac{c-d}{c+d}\right)^2 c d r (c-d(1+\frac{c-d}{c+d}))}{(c-d)^2} - \frac{1}{4} \mu^2(\alpha_0) \\
 &= \frac{r c d (c-d-d(\frac{c-d}{c+d}))}{(c+d)^2} \\
 &= \frac{r c d (c-d)(c+d) + r c d^2 (c-d)}{(c+d)^3} \\
 &= \frac{r c^2 d (c-d)}{(c+d)^3}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

así, $w^2(\alpha_0) = \frac{r c^2 d (c-d)}{(c+d)^3}$ es positivo, pues desde el inicio supusimos $c > d$. Por lo tanto, en $\alpha = \alpha_0$ el equilibrio E_0 tiene eigenvalores $\lambda_{1,2} = \pm i w(\alpha_0)$ y toma la forma de una bifurcación de Hopf ya que (3.15) es orbitalmente equivalente a (3.13) por la definición 18. El equilibrio es estable para $\alpha > \alpha_0$ pues se tienen raíces reales positivas, e inestable para $\alpha < \alpha_0$ pues ahora las raíces son reales pero negativas.

Notamos que el valor crítico de α corresponde al que pasa de la línea definida por $\dot{x}_2 = 0$ a través del máximo de las curvas definidas por $\dot{x}_1 = 0$ (ver figura 3.5).

Así, si la línea $\dot{x}_2 = 0$ está a la derecha del máximo, el punto es estable, mientras si esta línea está a la izquierda el punto es inestable. Aplicando la forma normal del

teorema para el análisis de esta bifurcación de Hopf, se checa que las condiciones de generacidad del Teorema 46 se satisfacen. La condición de transversalidad es fácil de ver:

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\alpha r d(c+d)}{2(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) \quad (3.29)$$

derivando esta ecuación con respecto a α tenemos:

$$\mu_0'(\alpha) = \frac{rd(c+d)}{2(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) - \frac{\alpha r d(c+d)}{2(c-d)^2} \quad (3.30)$$

evaluando en α_0 nos queda:

$$\mu_0'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 r d(c+d)}{2(c-d)^2} < 0. \quad (3.31)$$

Ahora para calcular el primer coeficiente de Liapunov fijemos el parámetro α en su valor crítico $\alpha = \alpha_0$. En $\alpha = \alpha_0$, el punto de equilibrio no trivial E_0 en $\alpha = \alpha_0$ tiene las coordenadas:

$$x_1^{(0)} = \frac{\alpha_0 d}{(c-d)}, \quad x_2^{(0)} = \frac{r\alpha_0}{c-d} \left(1 - \frac{\alpha_0 d}{c-d} \right) \quad (3.32)$$

simplificando se tiene

$$x_1^{(0)} = \frac{d}{c+d}, \quad x_2^{(0)} = \frac{rc}{(c+d)^2} \quad (3.33)$$

trasladando al origen de coordenadas a este equilibrio por el cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + \xi_1 \\ x_2 &= x_2^{(0)} + \xi_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Este sistema transforma (3.15) en :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\frac{cd}{c+d}\xi_2 - \frac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^3 \equiv F_1(\xi_1, \xi_2), \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{cr(c-d)}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2 \equiv F_2(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (3.35)$$

Este sistema se representa como

$$\dot{\xi} = A\xi + \frac{1}{2}B(\xi, \xi) + \frac{1}{6}C(\xi, \xi, \xi), \quad (3.36)$$

donde $A = A(\alpha_0)$, y las funciones multilineales B y C toman sobre los vectores planares $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$, y $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T$ los valores

$$B(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{-2rd}{(c+d)}\xi_1\eta_1 - c(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \\ (c-d)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

y

$$C(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} -6r\xi_1\eta_1\zeta_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Escrita la matriz $A(\alpha_0)$ en la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{w^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

donde w^2 esta dada por la fórmula (3.28). Ahora chequemos que los vectores complejos q y p son eigenvectores propios

$$q \sim \begin{pmatrix} cd \\ -iw(c+d) \end{pmatrix}, p \sim \begin{pmatrix} w(c+d) \\ -icd \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} Aq &= \lambda_1 q \\ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{w^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{cd}{c+d}q_1 \\ \frac{w^2(c+d)}{cd}q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} iwq_1 \\ iwq_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda q \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
q_1 i w &= -\frac{cd}{c+d} q_2, & q_2 i w &= \frac{w^2(c+d)}{cd} q_1 \\
q_2 &= -\frac{c+d}{cd} q_1, & q_2 &= -\frac{iw(c+d)}{cd} q_1
\end{aligned} \tag{3.42}$$

entonces, haciendo $q_1 = -cd$ tenemos que $q_2 = iw(c+d)$. Ahora para p tenemos:

$$\begin{aligned}
A^T p &= \lambda_2 p \\
\begin{pmatrix} 0 & \frac{w^2(c+d)}{cd} \\ -\frac{cd}{c+d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{w^2(c+d)}{cd} p_1 \\ -\frac{cd}{c+d} p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -i w p_1 \\ -i w p_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda p
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
-p_1 i w &= \frac{w^2(c+d)}{cd} p_2, & -p_2 i w &= -\frac{cd}{c+d} p_1 \\
p_2 &= \frac{cd}{(c+d)iw} p_1, & p_2 &= \frac{cd}{(c+d)iw} p_1
\end{aligned} \tag{3.44}$$

haciendo $p_1 = w(c+d)$ tenemos que $p_2 = \frac{cd}{i} = -icd$. Estos son los vectores complejos o eigenvectores propios $Aq = iwq$, $A^T p = -iwp$.

$$q \sim \begin{pmatrix} cd \\ -iw(c+d) \end{pmatrix}, p \sim \begin{pmatrix} w(c+d) \\ -icd \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Para activar la normalización necesaria $\langle p, q \rangle = 1$, hacemos por ejemplo:

$$q = \begin{pmatrix} cd \\ -iw(c+d) \end{pmatrix}, p = \frac{1}{2wcd(c+d)} \begin{pmatrix} w(c+d) \\ -icd \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

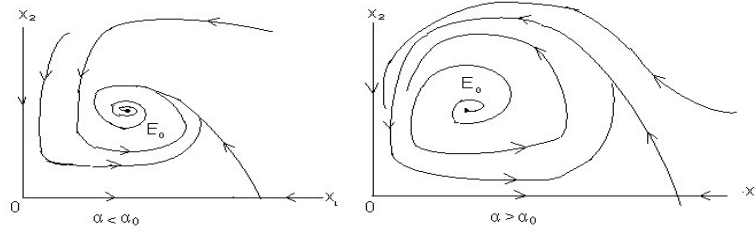


Figura 3.6: Bifurcación de Hopf en el modelo depredador-presa.

La parte mas dura del trabajo está hecha, ahora simplemente calculemos

$$\begin{aligned}
 g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{1}{2cd}, \frac{-2rd}{(c+d)q_1^2 - 2cq_1q_2} \right), \left(\frac{-i}{2w(c+d)}, 2(c-d)q_1q_2 \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2cd} \left[\frac{-2rd}{c+d} (c^2d^2) - 2c(cd)(-iw(c+d)) \right] + \frac{i}{2w(c+d)} [2cd(-iw(c+d))(c-d)] \\
 &= -\frac{rdcd}{c+d} + iwc(c+d) + cd(c-d) \\
 &= \frac{-rcd^2 + cd(c-d)(c+d) + iwc(c+d)^2}{(c+d)} \\
 &= \frac{-rcd^2 + cdcc + c^2d^2 - c^2d^2 - cd^3 + iwc(c+d)^2}{(c+d)} \\
 g_{20} &= \frac{cd(c^2 - d^2 - rd) + iwc(c+d)^2}{(c+d)}
 \end{aligned}$$

y de la misma forma para

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = -\frac{rcd^2}{(c+d)}, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = -3rc^2d^2, \quad (3.47)$$

y calculando el primer coeficiente de Liapunov mediante la fórmula (3.100),

$$\begin{aligned}
 l_1(\alpha_0) &= \frac{1}{2w^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + wg_{21}) \\
 &= -\frac{rcd^2}{w}.
 \end{aligned}$$

Es claro que $l_1(\alpha_0) < 0$ para todas las combinaciones de los parámetros fijos. Así, las condiciones de no degeneración del Teorema 46 se satisfacen. Por lo tanto, un único ciclo límite y estable bifurca desde el equilibrio mediante la bifurcación de Hopf para $\alpha < \alpha_0$ (ver figura 3.6)

Capítulo 4

Enfoque Numérico Para el modelo de Pesca

Los métodos numéricos se han venido aplicando desde capítulos anteriores en la tesis con el fin de esquematizar algunos sistemas, tales como (3.4), (3.11) y (2.12) mostrados en las figuras (3.1), (3.2) y (3.3), los que fueron realizados con el software MATLAB ver. 6.5 para windows.

En este capítulo se hace un enfoque numérico del modelo de pesca por razones que se explican a continuación.

Suponemos que la cantidad de peces es periódica sobre el curso de un año. Esto nos lleva a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P \left(1 - \frac{P}{4} \right) - 0.002L(1 + \text{sen}2\pi t). \quad (4.1)$$

Esta ecuación es no lineal, en consecuencia se trata numéricamente, bajo los métodos numéricos de Euler, Euler modificado y Runge-Kutta de orden cuatro, para ver como

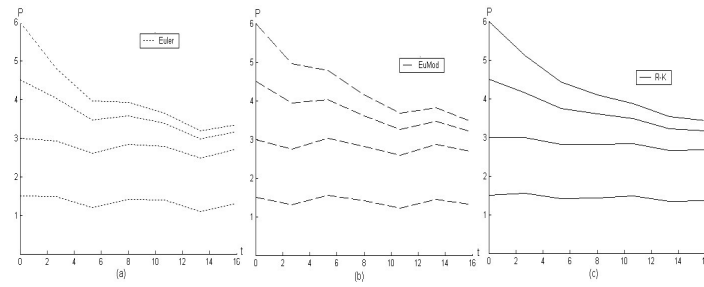


Figura 4.1: (a) Método de Euler, (b) Método de Euler modificado y (c) Método de Runge-Kutta, para $L=125$

cada uno de estos métodos nos aproxima a la solución con diferente precisión. Ya que la ecuación es no-autónoma, uno de los algoritmos más exactos y fáciles de programar es el de Runge-Kutta de cuarto orden [Burden][Hubbard], el enfoque se realiza en un tiempo t de 0 a 16 años; con diferentes condiciones iniciales, como se puede observar en la figura 4.1. Comparando las soluciones mostradas en la figura 4.1, vemos que el método que mejor se aproxima a la solución es el método de Runge-Kutta, (ver figura 4.2), [Campbell]. No es fácil sin embargo ajustarlo "manualmente" de forma que estemos seguros de que los resultados que obtenemos sean correctos. Así se llegó a lo siguiente: Para valores paramétricos pequeños el valor de bifurcación de $L = 125$, se observó, no dos soluciones de equilibrio, sino que parecieron ser dos soluciones periódicas. Se ven dos soluciones que oscilan alrededor del valor de equilibrio anterior, con periodo de un año, como se esperaba de la ecuación diferencial. Entre las dos soluciones periódicas, existen soluciones que permiten la solución periódica baja y llegan a una superior, salvo que ellas también oscilan arriba y abajo (ver figura 4.3).

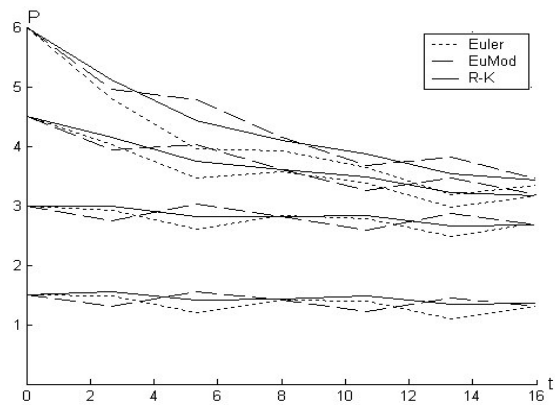


Figura 4.2: Solución a la ecuación, comparando los tres métodos mencionados, con $L=125$.

Fuera de la solución periódica, justo como en las soluciones de la situación autónoma, "disminuyen". Y la situación fue muy parecida a la anterior, cualquier población inicial alrededor de un cierto umbral es atraída a un pozo estable y poblaciones iniciales bajo el umbral eventualmente mueren. Sin embargo todas las soluciones incluyendo el pozo (o atractor) y la fuente fueron ahora oscilatorias (comparar soluciones en la figura 4.3).

Conforme el valor de L aumenta, las dos soluciones periódicas se van cerrando y cerrando juntas y eventualmente colapsándose, dando un resultado muy parecido al comportamiento de la bifurcación anterior de (3.48); es decir una solución periódica, poblaciones capaces de llegar a la solución periódica y poblaciones pequeñas que desaparecen. Aumentando L más lejos, la solución periódica desaparece y todas las soluciones disminuyen en una manera oscilatoria. Situación que permitió que sucediera en el caso autónomo, pero ocurrió un comportamiento oscilatorio como

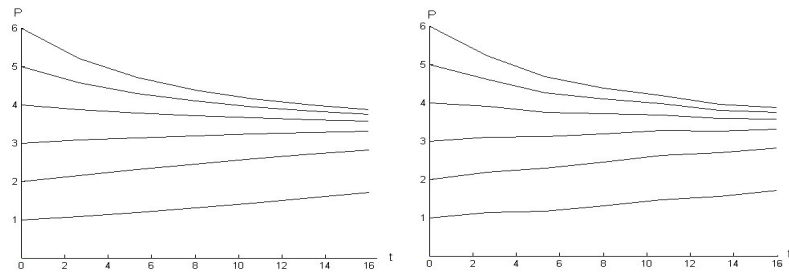


Figura 4.3: Solución de (3.4) y (4.1) (izquierda, y derecha respectivamente) para $L=60$.

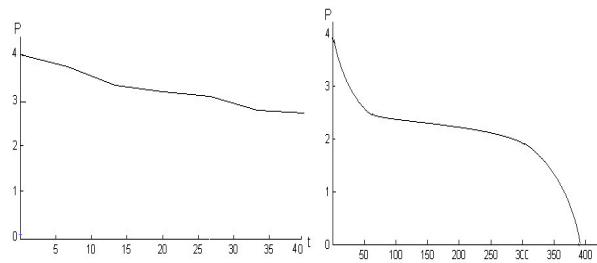


Figura 4.4: Soluciones en $L=125$ con tiempos a escala

faceta adicional.

Se presentan preguntas acerca de esta bifurcación: ¿Cuándo desaparece la solución periódica? ¿Se encuentra otra vez en el valor de bifurcación anterior de $L = 125$ o tiene la pesca cambios periódicos?.

Para poder responder a estas preguntas se tuvo que analizar valores de tiempo más grandes como el de la figura 4.4. Estos resultados sugieren que el valor de bifurcación ocurra en un valor más pequeño que $L = 125$, ya que no tenemos métodos analíticos

disponibles de acuerdo con esta situación.

Se observó que el valor de bifurcación para (4.1) es todavía $L = 125$, como muestra la figura 4.4, derecha, pues la curva solución para valores meores que $L = 125$ se mantendrá positiva, y para valores más grandes que $L = 125$ la población tenderá a desaparecer. Es por esto que, $L = 125$, es el valor de bifircación, como se venia sospechando desde antes.

Esta situación es paralela al mundo real: si la pesca es permitida en exactamente el valor de bifurcación la población vive al borde de la catástrofe. Si una fluctuación repentina en la población provoca un incremento pequeño a la población, éste será aniquilado salvo la tendencia hacia abajo de todas las soluciones cerca de la única solución. Pero cualquier fluctuación (pesca ilegal, una epidemia, reproducción pobre, etc.) que empuja la población por debajo de la solución periódica dá como resultado una extinción.

Conclusiones

–Muchas de las ciencias aplicadas en particular las Matemáticas Aplicadas, son una potente herramienta para modelar de una forma más aproximada situaciones de la vida real. Es claro que en estas situaciones no interviene un área única, más bien existe una interrelación de varias de éstas. Además las distintas disciplinas no actúan totalmente, sino sólo algunos temas inherentes a ellas.

En el presente trabajo intervienen principalmente las Ecuaciones Diferenciales, los Sistemas Dinámicos y en menor medida, pero no menos importante, la Biología con el tema de Crecimiento de Poblaciones.

Las conclusiones son las siguientes:

– Se comprendieron algunos aspectos topológicos de los sistemas dinámicos entre los cuales se encuentra la equivalencia topológica, la forma normal topológica y condiciones de bifurcación. Además, se entendieron resultados y conceptos de formas de bifurcación uni-paramétricas, principalmente en una y dos dimensiones, tales como la bifurcación de deformación y la bifurcación de Hopf en sus formas topológicas.

–Con base en la teoría estudiada, se resolvieron ejemplos concretos de sistemas de crecimiento de poblaciones, lo que permitió conocer el comportamiento de dichos

sistemas por medio de un análisis de bifurcación con respecto al parámetro que interviene en el modelo, y en el caso del tercer ejemplo se puede obtener una forma más simple (forma normal topológica) para su análisis.

– La aplicación de los métodos numéricos es muy importante en la solución aproximada de sistemas cuyas ecuaciones diferenciales no pueden tratarse por métodos convencionales. Por ello su intervención en el capítulo 4, pues en la ecuación ahí presentada interviene un término intratable por métodos de solución comunes.

La solución aproximada que nos proporcionan los métodos numéricos, nos ayudan a comprender y analizar el comportamiento de lo que está pasando con este tipo de ecuaciones, graficando su solución.

–El objetivo general se cumplió satisfactoriamente, aunque queda claro que existe mucho por hacer en este tema, sobre todo su aplicación a sistemas de la vida real.

Apéndice A Algunos resultados de

ecuaciones diferenciales

A.1 Sistema Hamiltoniano

Definición *Un sistema de ecuaciones diferenciales es llamado un **sistema Hamiltoniano** si existe una función de valor real $H(x, y)$ tal que*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

*para todo x, y . La función H es llamada la **función Hamiltoniana** para el sistema.*

Notese que H es siempre una cantidad conservada para un sistema. Esto se verifica siendo $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

La primera igualdad es la regla de la cadena, y en la segunda se usa el hecho de que

el sistema es Hamiltoniano y $(x(t), y(t))$ es una solución para reemplazar dx/dt con $\partial H/\partial y$ y dy/dt con $-\partial H/\partial x$.

Entonces, curvas solución del sistema permanecen a lo largo de las curva de nivel de H . Exhibir el plano fase para un sistema Hamiltoniano es la mismo que exhibir el conjunto de nivel de la función Hamiltoniana.

Los sistemas Hamiltonianos son tipos especiales de sistemas de ecuaciones diferenciales en varios sentidos. Como podemos ver, podemos solucionar un sistema Hamiltoniano en el plano fase en un sentido cualitativo conociendo como es la función Hamiltoniana. Se necesitan graficar las curvas de nivel de H y mostrar las direcciones para determinar el esquema fase. Desafortunadamente los sistemas Hamiltonianos son raros. Dado un sistema, podemos ser capaces de determinar si es o no un sistema Hamiltoniano y, si lo es, determinar la función Hamiltoniana.

Supongamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

y verificamos si este es Hamiltoniano. Ahora existe una función $H(x, y)$ tal que para todo (x, y) ,

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\end{aligned}$$

Si una función H existe (y tiene segundas derivadas parciales), entonces

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$$

Por lo tanto si el sistema es Hamiltoniano, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

Esto es, para checar que un sistema pueda ser Hamiltoniano, calculamos $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ y checamos si $\partial f/\partial x = -\partial g/\partial y$ si esta condición no se cumple para todo (x, y) , entonces no es un sistema Hamiltoniano.

A.2 Construcción de funciones Hamiltonianas.

Para el sistema, si se satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

entonces el sistema es Hamiltoniano. Esto se verifica construyendo la función Hamiltoniana como sigue: Si tenemos la primera ecuación del segundo sistema de la página anterior, integrando en ambos lados con respecto a y , tenemos H :

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy$$

con una constante de integración que puede depender de x . Así, se escribe

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es una función de x que será determinada. Para encontrar ϕ , simplemente diferenciamos $H(x, y)$ con respecto a x e igualando el resultado con $-g(x, y)$.

Encontramos que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy + \phi'(x) = -g(x, y)$$

Esto es,

$$\phi'(x) = -g(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy$$

integrando el lado derecho con respecto a x entonces se determina $\phi(x)$ y consecuentemente el Hamiltoniano H [Blanchard].

A.3 Estabilidad según Lyapunov

Teorema (Lyapunov) Sea $x^0 \in X$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $L : U \rightarrow R$ una función continua definida en una vecindad

$U \subset X$ de x^0 , suave en $U - x^0$, tal que

a) $L(x^0) = 0$ y $L(x) > 0$ si $x \neq x^0$;

b) $\dot{L} \leq 0$ en $U - x^0$

entonces x^0 es estable. Si además

c) $\dot{L} < 0$ en $U - x^0$

entonces x^0 es asintóticamente estable.

Definición Sea $x^0 \in X$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $L : U \rightarrow R$ una función continua definida en una vecindad $U \subset X$ de x^0 ,

suave en $U - x^0$, tal que satisface a) y b) del teorema anterior, entonces L es una **función de Lyapunov** para x^0 .

Por otro lado, un teorema más práctico que el anterior, el que determina condiciones suficientes para que un punto de equilibrio x^0 sea estable es el siguiente teorema clásico.

Teorema (Lyapunov) Considere un sistema dinámico definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde f es suave. Supóngase que éste tiene un punto de equilibrio x^0 (i.e., $f(x^0) = 0$), y denotamos por A la matriz Jacobiana de $f(x)$ evaluada en el punto de equilibrio $A = f_x(x^0)$. Entonces x^0 es estable si todos los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, de A satisfacen $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Recordemos que los eigenvalores son raíces de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad $n \times n$.

A.4 Singularidades en el plano fase

En \mathbb{R}^2 la ecuación característica que proporciona $\det(A - \lambda I) = 0$ puede tener como raíces los siguientes casos:

Caso I Para λ_1, λ_2 reales y distintos tenemos que:

(a) Si son del mismo signo y $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, éste es llamado un **nodo**.

Con $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$, éste es un **nodo estable** ya que todas las trayectorias tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, éste es un **nodo inestable**.

(b) Si λ_1, λ_2 tienen signos diferentes. Supongamos $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ es un punto **silla**. Este es siempre **inestable**

Caso II Para λ_1, λ_2 complejos; $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$.

(a) Si $\alpha \neq 0$ se tiene un **espiral**, el cual es **estable** si $\alpha < 0$, e **inestable** si $\alpha > 0$.

(b) Si $\alpha = 0$, se tiene un **centro**.

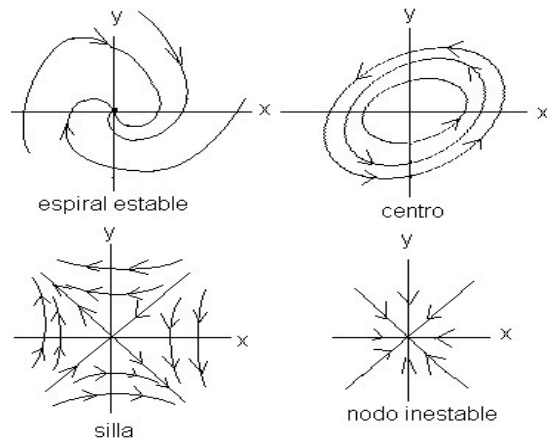


Figura 4.5: singularidades en el plano fase.

Caso III Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ los eigenvalores no son distintos se tiene un **foco**.

Ver la figura 4.5 para algunos comportamientos en el plano fase.

Apéndice B Algunos resultados de análisis

funcional

Considere un mapeo

$$(x, y) \longrightarrow F(x, y)$$

donde

$$f = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un mapeo suave definido en una vecindad de $(x, y) = (0, 0)$ y tal que $F(0, 0) = 0$.

Sea $F_x(0, 0)$ que denota a la matriz con primeras derivadas parciales de F con respecto a x evaluadas en $(0, 0)$:

$$F_x(0, 0) = \left(\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j} \right) \Big|_{(x, y) = (0, 0)}$$

Teorema (Teorema de la función implícita) Si la matriz $F_x(0, 0)$ es no singular, entonces existe una función suave definida localmente $y = f(x)$,

$$f = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$F(x, f(x)) = 0$$

para toda x en alguna vecindad del origen de \mathbb{R}^n . Además,

$$F(x, f(x)) = 0$$

Teorema (Teorema de la función inversa) Si la matriz $g_x(0)$ es no singular, entonces existe una función suave definida localmente $x = f(y)$,

$$f_x(0) = -[F_x(0, 0)]^{-1} F_y(0, 0).$$

tal que

$$g(f(y)) = y$$

para toda y en alguna vecindad del origen de \mathbb{R}^n .

Otros casos importantes donde podemos establecer la estabilidad de un punto fijo de un sistema dinámico tiempo-discreto es proporcionado por el siguiente teorema.

Teorema (Mapeo principal de contracción) Sea X un espacio métrico con distancia definida por ρ . Supongamos que existe un mapeo $f : X \rightarrow X$ que es continuo y que satisface, para todo $x, y \in X$,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \in X,$$

con algún $0 < \lambda < 1$. Entonces el sistema dinámico tiempo-discreto $\{Z_+, X, f^k\}$ tiene un punto fijo estable $x^0 \in X$. Además, $f^k(x) \rightarrow x^0$ cuando $k \rightarrow \infty$, empezando de cualquier punto $x \in X$.

La prueba de este teorema fundamental puede encontrarse en cualquier texto de análisis matemático o ecuaciones diferenciales [Rudin].

Bibliografía

- [Arnol'd] Arnol'd, Vladimir Igorevich; "*Ordinary Differential Equations*"; Springer-Verlag, 1992.
- [Blanchard] Paul Blanchard, Robert L. Devaney, Glen R. Hall; "*Differential Equations*"; An International Thomson Publishing Company.
- [Burden] Richard Burden; "*Análisis Numérico*", Iberoamericana, 1993.
- [Campbell] Duff Campbell, Samuel R. Kaplan, "*A Bifurcation Problem in Differential Equations*", Mathematics Magazine; Vol. 73, No. 3, June 2000.
- [Glendinning] Paul Glendinning; "*Stability, Inestability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*"; Cambridge University Press, 1994.
- [Hale] Jack K. Hale, Huseyin Koçak; "*Dynamics and Bifurcations*"; Springer-Verlag, 1991.
- [Hubbard] John H. Hubbard, Beverly H. West; "*Differential Equations: A Dynamical Systems Approach Part I: Ordinary Differential Equations*"; Springer-Verlag, 1990

- [Kuznetsov] Yuri A. Kuznetsov; "*Elements of Applied Bifurcation Theory*"; Springer-Verlag. 1998
- [Luenberger] David G. Luenberger; *Introduction to Dynamics Systems Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, 1979.
- [Murray] J. D. Murray; "*Mathematical Biology I. An Introduction*"; Springer-Verlag, 2002.
- [Perko] Perko Lawrence; "*Differential Equations and Dynamical Systems*"; Springer-Verlag, 2001.
- [Rudin] Walter Rudin; "*Principios de Análisis Matemático*"; McGraw-Hill.
- [Smale] Hirsh M, Smale S.; *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*; Academic Press, 1994.
- [Wiggins] Stephen Wiggins; "*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*"; Springer-Verlag, 1990.