UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

"Aproximación de funciones en 2D y 3D mediante splines cúbicos y bicúbicos y una aplicación"

Para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

p r e s e n t a :

Ivonne Lilian Martínez Cortés

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. Luz del Carmen Álvarez Marín

Huajuapan de León, Oax.

Junio de 2003.

Introducción

Consideremos el problema de diseñar un objeto, digamos una carrocería para autos. Para esto se nos dan una serie de datos (a_i, b_i, c_i), mediciones que se pueden obtener al realizar pruebas de velocidad, impacto, etc., o simplemente para satisfacer exigencias estéticas requeridas. Matemáticamente lo que se busca es una superficie suave $z = f(x, y)$, que represente razonablemente bien al conjunto de puntos (a_i, b_i, c_i). Problemas de este tipo se presentan en la mayoría de las ciencias donde se trabaja con datos obtenidos al medir determinados parámetros.

Estos problemas han sido atacados desde el siglo XIX. Uno de los primeros interesados en este tipo de problemas fué el matemático ruso P. L. Chebichev, *Referencia* [1, pág. 313]. Desde entonces este problema ha sido estudiado en matemáticas, en particular por la Teoría de Aproximación.

Uno de los primeros resultados importantes en esta teoría es el Teorema de Weierstrass, *Referencia* [1, pág. 339]. En él se afirma que toda función continua sobre un intervalo cerrado puede ser aproximada por un polinomio, de tal manera que la diferencia entre ambas funciones, en cualquiera de los puntos del intervalo, no sobrepase una cantidad positiva prefijada, sin importar qué tan pequeña sea. Otro resultado que ha probado su utilidad en múltiples aplicaciones de la matemática y la ingeniería es el Teorema de Taylor, el cual se refiere también a polinomios de aproximación. Este teorema provee el fundamento teórico de múltiples métodos de optimización.

Si bien el ajuste de datos puede hacerse usando polinomios que interpolen alguna colección de puntos, estos pueden presentar algunos problemas como son las oscilaciones exageradas entre dos puntos sucesivos de interpolación, de manera que el polinomio no refleja el comportamiento real del fenómeno. Por esta razón se han generado otros esquemas de aproximación. Uno que ha probado su eficacia como herramienta versátil desde 1946, es la aproximación por medio de splines, *Referencia* [5, pág. 108].

Los splines son funciones determinadas por segmentos de curvas que se acoplan suavemente para formar una sola curva diferenciable, por esta razón a este tipo de interpolación se le conoce con el nombre de *interpolación a trozos*. Una característica de los splines es que no presentan el problema de oscilaciones de los polinomios.

Las propiedades de los splines los hacen ideales para resolver problemas muy variados en diversas áreas como por ejemplo: diseño geométrico asistido por computadora para carrocerías y paneles de autos, diseño en aviación y náutica, resolución de ecuaciones diferenciales, meteorología, astrofísica, física atómica, geología (reconstrucción de objetos a partir de mediciones) y en medicina (representación digital de órganos). El desarrollo tan rápido de los splines se debe precisamente al gran número de aplicaciones que se les puede dar.

Veremos que los splines cúbicos y bicúbicos, en particular, poseen magníficas cualidades tales como que forman un espacio de dimensión finita para el cual existen bases convenientes, son funciones suaves, son fáciles de construir, manipular y evaluar computacionalmente, en el desarrorro de su teoría aparecen sistemas matriciales que determinan ciertas propiedades y finalmente por su bajo orden no sufren problemas de oscilaciones usualmente asociados con los polinomios.

Este trabajo de tesis se divide en cuatro capítulos y consta de dos ápendices.

En el primer capítulo enunciaremos y ampliaremos las demostraciones de algunos teoremas clásicos de la Teoría de Aproximación de Funciones, con el fin de situar a los splines dentro de este campo de la matemática; dando así un mayor soporte a este trabajo. Estudiaremos el concepto de operador de aproximación lo cual servirá de puente para conectarnos con el siguiente capítulo.

El capítulo 2 lo dedicaremos al estudio de los splines cúbicos. Veremos como se definen estos y desarrollaremos con mayor detalle la teoría matemática existente para probar la existencia y unicidad de los splines cúbicos. Mostraremos que los splines cúbicos son efectivamente un buen método de aproximación, en el sentido de que convergen a la función f que interpolan. Se dará el algoritmo para la contrucción de los splines cúbicos interpolantes a una función f en un número finito de puntos. Finalmente veremos que los splines cúbicos también pueden ser utilizados para interpolar puntos pertenecientes a una curva.

En el Capítulo 3 estudiaremos a los splines bicúbicos, como se definen, su existencia, unicidad y la manera en que se contruyen. Conceptos que estarán intimamente relacionados con el capítulo antecesor.

Un resultado importante de este trabajo se presenta en el Capítulo 4, ya que en él mostraremos una aplicación de los splines cúbicos dentro del área de prueba de superficies ópticas, esto nos permitirá palpar la aplicabilidad de esta teoría.

El Apéndice A, contiene teoría que complementa las definiciones, teoremas y demás conceptos matemáticos incluidos dentro de los cuatro capítulos de la tesis.

En el Apéndice B, se muestran algunas pruebas que se han hecho con el software creado para hacer diseño por computadora utilizando splines cúbicos.

Para probar los teoremas que veremos en los siguientes capítulos, se deben tener presentes conceptos tales como los de norma, pseudonorma, distancia, espacios normados, espacios métricos, conjuntos abiertos y cerrados, compacidad, espacios lineales y algunos teoremas que se desprenden de los conceptos anteriores.

CAPÍTULO 1

Existencia y unicidad del mejor aproximante en espacios métricos

Empecemos definiendo un *mejor aproximante.*

Definición 1.1. *Supongamos que V es un espacio métrico y K un subconjunto de él. Sea $p \in V$, entonces un punto $x^* \in K$ que cumpla que*

$$d(p, x^*) \leq d(p, x) \text{ para todo } x \in K$$

será llamado un mejor aproximante de p al conjunto K.

Por supuesto que este elemento de K no siempre existe. Es así que iniciaremos dando condiciones suficientes bajo las cuales se verifica la existencia de un mejor aproximante.

1.1 Teoremas de existencia

El primer teorema muestra que si el subconjunto K, al que hacíamos referencia anteriormente, resulta ser un subconjunto compacto del espacio métrico V, entonces existe un mejor aproximante. Más adelante se darán otras condiciones bajo las cuales también se dá la existencia, sólo que estas nuevas hipótesis resultarán ser más débiles que las del siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. *Sea $K \neq \phi$ un subconjunto compacto en un espacio métrico V. Para cada punto $p \in V$, existe un correspondiente punto en K, que es el mejor aproximante de p a K.*

Demostración. Definamos

$$\delta = ínf\left\{d(p, x) : x \in K\right\},$$

δ existe pues $K \neq \phi$ y $\{d(p, x) : x \in K\}$ es acotado inferiormente por 0. De la definición de ínfimo, existe una sucesión (x_n) en K, tal que $d(p, x_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$. Puesto que K es compacto, existe una subsucesión $(x_{\alpha(n)})$ de (x_n) que converge a un punto $x^* \in K$.

Por la desigualdad del triángulo,

$$d(p,x^*) \leq d(p,x_{\alpha(n)}) + d(x_{\alpha(n)},x^*) \leq (\delta + \frac{1}{\alpha(n)}) + d(x_{\alpha(n)},x^*),$$

haciendo tender n a ∞, tenemos

$$d(p,x^*) \leq \left(\delta + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(n)}\right) + \lim_{n\to\infty} d(x_{\alpha(n)},x^*) = (\delta + 0) + 0 = \delta,$$

de donde se infiere que

$$d(p,x^*) \leq \delta.$$

Por otro lado, como $x^* \in K$, entonces $\delta \leq d(p,x^*)$. Por lo tanto $\delta = d(p,x^*)$. Así x^* es un mejor aproximante de p a K ■

Lema 1.1.1. *En el espacio K de n-uplas $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ con norma $\|\lambda\| = máx\,|\lambda_i|$, cada cerrado y acotado es un compacto.*

Demostración. Probemos por inducción sobre n que el conjunto, $M_n = \{\lambda : \|\lambda\| \leq 1\}$ es compacto.

Para $n = 1$, $M_1 = [-1,1]$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, este conjunto es compacto.

Suponemos ahora que M_n es compacto y lo probaremos para M_{n+1}. Sea $\left(\lambda^{(k)}\right)$ una sucesión en M_{n+1}; cada elemento $\lambda^{(k)}$ de la sucesión es de la forma $\lambda^{(k)} = \left[\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, ..., \lambda_{n+1}^{(k)}\right]$, donde $\lambda_i^{(k)} \in [-1,1]$, en particular $\lambda_{n+1}^{(k)}$ esta ahí. Por lo tanto existe una subsucesión $\left(\lambda_{n+1}^{\alpha(k)}\right)$ que converge a un punto de $[-1,1]$.

Por otro lado, si quitamos la última componente de $\lambda^{(k)}$ podemos formar una *n-upla* $\lambda'^{(k)}$ en M_n, obteniendo así una subsucesión $\left(\lambda'^{\alpha(k)}\right)$ que converge a un punto de M_n.

Así, hemos garantizado que existe una subsucesión de $\left(\lambda^{(k)}\right)$, cuyas primeras n entradas son los elementos de la subsucesión $\left(\lambda'^{\alpha(k)}\right)$ y la última es la de $\left(\lambda_{n+1}^{\alpha(k)}\right)$, que converge en M_{n+1}, lo cual implica que M_{n+1} es compacto.

Sea ahora F un conjunto cerrado y acotado del espacio K, por ser acotado existe $c > 0$ tal que $\|\lambda\| \leq c$ para cada $\lambda \in F$. El mapeo $T : K \to K$ definido por $T\lambda = c\lambda$ es continuo ya que $\|c\lambda_1 - c\lambda_2\| \leq c\,\|\lambda_1 - \lambda_2\|$, de aquí cM_n es compacto pues $T(M_n) = cM_n$ y M_n es compacto.

Afirmamos que $F \subset cM_n$ debido a que $cM_n = \{\lambda : \|\lambda\| \leq c\}$. Luego F es un suconjunto cerrado de un compacto, entonces F es compacto; lo cual se quería probar ■

Definición 1.1.1. *Un subconjunto W de un espacio lineal normado V se define n-dimensional, si existe un subconjunto $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset W$ de vectores linealmente independientes tales que para cada $w \in W$:*

$$w = \lambda_i g_i, \textit{para algunos escalares } \lambda_i$$

Esto no significa que cualquier combinación lineal de los g_i*́s* sea un elemento de W.

Teorema 1.1.2. *Si F es un subconjunto cerrado, acotado, n-dimensional de un espacio lineal normado, entonces F es compacto.*

Demostración. Por ser F $n-dimensional$ existe un subconjunto $\{g_1, g_2, ...g_n\}$ linealmente independiente $(l.i.)$ de F tal que para todo $f \in F$, $f = \sum \lambda_i g_i$. Sea $T : R^n \to \langle g_1, g_2, ...g_n \rangle$ el mapeo tal que $T(\lambda) = f$. Dotemos a R^n de la norma del supremo, esto es, para $\lambda \in R^n$, $\|\lambda\| = máx\, |\lambda_i|$. Con esta norma T es continua. En efecto,

$$\begin{aligned} \|T\mu - T\lambda\| &= \left\|\sum \mu_i g_i - \sum \lambda_i g_i\right\| = \left\|\sum (\mu_i - \lambda_i) g_i\right\| \\ &\leq \sum |\mu_i - \lambda_i| \, \|g_i\| \leq \|\mu - \lambda\| \sum \|g_i\| . \end{aligned}$$

F es la imagen bajo el mapeo T del conjunto $M = \{\lambda : T\lambda \in F\}$, luego la compacidad de M implicará la compacidad del conjunto F. Probemos entonces que M es compacto.

Por el Lema 1.1.1, es suficiente probar que M es cerrado y acotado.

En este sentido, si $\left(\lambda^{(k)}\right)$ es una sucesión convergente de M con $\lambda^{(k)} \to \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} T\lambda &= T(lím\lambda^{(k)}) \\ &= límT(\lambda^{(k)}), \end{aligned}$$

esto último por ser T continua. Ahora, $T\lambda \in F$ por ser F cerrado, lo cual implica que $\lambda \in M$. Así, M es cerrado.

Probemos ahora que M es acotado.

Consideremos el conjunto

$$I = \{\lambda : \|\lambda\| = 1\},$$

el cual es compacto (pues es cerrado y acotado); como T es continua entonces el ínfimo α de $\|T\lambda\|$ se alcanza en I. De la independencia lineal de $\{g_1, g_2, ...g_n\}$ se tiene que $T\lambda \neq 0$ para cada $\lambda \in I$, pues si existiera un λ tal que $T\lambda = 0$ entonces $T\lambda = \sum \lambda_i g_i = 0$; esto implicaría que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, ...n$, pues los g_i*́s* son $l.i.$ Pero esto no puede ocurrir porque $\|\lambda\| = 1$, así $\|T\lambda\| > 0$. Puesto que α se alcanza en I y $\|T\lambda\| > 0$ entonces $\alpha > 0$.

Sea ahora $\lambda \in M$ con $\lambda \neq 0$, esto implica

$$\|T\lambda\| = \left\|T\left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}\right)\right\| \|\lambda\| \geqq \alpha \|\lambda\|$$

como $T\lambda \in F$ y F es acotado, entonces así lo es M ■

Ya estamos listos para probar el resultado que asegura la existencia de un mejor aproximante.

Teorema 1.1.3. *Cualquier subespacio lineal M de dimensión finita de un espacio lineal normado V, contiene al menos un mejor aproximante a un punto fijo de V.*

Demostración. Sean g un elemento fijo de V y f_0 un punto arbitrario de M. Si existe un punto de distancia mínima a g, este debe pertenecer al conjunto

$$A = \{f : f \in M, \|f - g\| \leq \|f_0 - g\|\}.$$

Tal conjunto A es cerrado, ya que si tomamos una sucesión convergente (f_n) en A, con $f_n \to f$ entonces:

$$\|f - g\| = \left\| \lim_{n\to\infty} f_n - g \right\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_0 - g\| = \|f_0 - g\|$$

de aquí que $f \in A$; esto prueba que A es cerrado.

A es acotado pues f_0 y g son elementos fijos de M y V respectivamente. Por el Teorema 1.1.2, este conjunto es compacto y por el Teorema 1.1.1 contiene un mejor aproximante g ■

¿Será necesaria la hipótesis de que el subespacio sea de dimensión finita?; con el siguiente ejemplo se muestra que para subespacios de dimensión infinita no necesariamente se cumple la existencia del mejor aproximante.

Ejemplo 1. *Consideremos el espacio C_0 de sucesiones en R, $f = (\xi_n)$, tales que $\xi_n \to 0$. Con la norma $\|f\| = \sup_{n\in N} |\xi_n|$ este es un espacio de Banach. Sea $M = \{f \in C_0 : 2^{-k}\xi_k = 0\}$, claramente este conjunto es un subespacio de C_0 de dimensión infinita. Mostraremos que C_0 no contiene un punto de distancia mínima a M.*

Tomemos $g \in C_0$, $g = (\eta_k)$ y $g \notin M$. Por el criterio de la comparación la serie $2^{-k}\eta_k$ converge, en efecto

$$\left|2^{-k}\eta_k\right| \leq \left|2^{-k}\eta_k\right| \leq c2^{-k},$$

en donde c es una cota para (η_k), que existe pues $\eta_k \to 0$. Sea $\lambda \in R$ tal que

$$2^{-k}\eta_k = \lambda \neq 0.$$

Tomemos $f = (\xi_n) \in M$, arbitrario y $n \in N$ tal que $|\eta_k - \xi_k| < \frac{1}{2}|\lambda|$ siempre que $k \geq n$. Lo podemos hacer porque $\eta_k, \xi_k \to 0$.

Probaremos por contradicción que la distancia de f a g no puede ser menor o igual que $|\lambda|$. Supongamos entonces que $\|f-g\| \leq |\lambda|$, luego $|\eta_k - \xi_k| \leq |\lambda|$ para todo $k \in N$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
\left|2^{-k}\eta_k\right| &= \left|2^{-k}(\eta_k - \xi_k)\right| \\
&\leq 2^{-k}\left|\eta_k - \xi_k\right| \\
&= {}_{k<n}2^{-k}\left|\eta_k - \xi_k\right| +_{k\geq n} 2^{-k}\left|\eta_k - \xi_k\right| \\
&\leq |\lambda|_{k<n} 2^{-k} + \frac{1}{2}|\lambda|_{k\geq n} 2^{-k} \\
&= |\lambda|_{k<n} 2^{-k} + \frac{1}{2}|\lambda|_{k\geq n} 2^{-k} + \frac{1}{2}|\lambda|_{k\geq n} 2^{-k} - \frac{1}{2}|\lambda|_{k\geq n} 2^{-k} \\
&= |\lambda|_{k\in n} 2^{-k} - \frac{1}{2}|\lambda|_{k\geq n} 2^{-k} \\
&= |\lambda|\left\{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) - 1 - \frac{1}{2}{}_{k\geq n} 2^{-k}\right\} \\
&= |\lambda|\left(1 - \frac{1}{2}{}_{k\geq n} 2^{-k}\right) \\
&< |\lambda|,
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción ya que $\left|2^{-k}\eta_k\right| = |\lambda|$.

Sin embargo exhibiremos una sucesión en M cuya distancia a g tiende a $|\lambda|$, esto mostrará que la distacia de M a g igual a $|\lambda|$ a pesar de que no existe un punto en M con una distancia menor o igual a $|\lambda|$.

Sean

$$f_1 = -\frac{2}{1}(\lambda, 0, 0, ...,) + g$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= -\frac{4}{3}(\lambda, \lambda, 0, ...,) + g \\
&\vdots \\
f_k &= -\frac{2^k}{2^k - 1}\left(\underbrace{\lambda, \lambda, ..., \lambda}_{k-veces}, 0, 0...,\right) + g.
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
{}_{j\in N}2^{-j} f_{kj} &= -{}_{j\leq k}2^{-j}\left(\frac{2^k}{2^k-1}\right)\lambda +_{j\in N} 2^{-j}\eta_j \\
&= -\left(\frac{2^k}{2^k-1}\right)\lambda_{j\leq k}2^{-j} + \lambda.
\end{aligned}
$$

Pero

$$_{j\leq k}x^{j}=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}-1,\quad |x|<1$$

así que

$$_{j\in N}2^{-j}f_{kj}=-\lambda\left(\frac{2^{k}}{2^{k}-1}\right)\left(\frac{2^{k}-1}{2^{k}}\right)+\lambda=0.$$

Esto implica que $f_k\in M$.

Por otro lado,

$$\|f_k-g\|=\sup_{k\in N}\frac{2^{k}}{2^{k}-1}\left(|\lambda|,|\lambda|,...,|\lambda|,0,0...,\right)=\frac{2^{k}}{2^{k}-1}|\lambda|\rightarrow|\lambda|.$$

Con esto hemos construido la sucesión anunciada (f_k).

1.2 Condiciones para la unicidad del mejor aproximante

Hasta aquí solo hemos visto que bajo ciertas suposiciones la existencia de un mejor aproximante se verifica. Más adelante se da un ejemplo en donde un mejor aproximante existe pero no de manera única, esto se debe a que la unicidad del mejor aproximante requiere de conceptos e hipótesis más fuertes. Enunciaremos dos teoremas que bajo diferentes premisas aseguran su unicidad, pero antes de enunciarlos y probarlos demos la siguiente

Definición 1.2.1 *Un espacio lineal normado V es $uniformemente\ convexo$ si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $\|f\|=\|g\|=1$ y $\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|>1-\delta$, entonces $\|f-g\|<\varepsilon$ para $f,g\in V$.*

Ejemplo 2. *R^n con $\|\cdot\|_2$ es uniformemente convexo.*

Teorema 1.2.1. *Un subconjunto $K\neq\phi$ convexo y cerrado de un espacio de Banach V, uniformemente convexo, tiene un único mejor aproximante a un elemento dado del espacio.*

Demostración. Sean $g\in V$ y

$$D=\inf_{f\in K}\|f-g\|.$$

D existe pues $K\neq\phi$ y $\{\|f-g\|:f\in K\}$ está acotado inferiormente. Si $D=0$ entonces $g\in\overline{K}=K$ (K es cerrado) y la conclusión es trivial; en otro caso podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $D=1$ y además que $g=0$, pues V es un espacio vectorial. Así, lo que debemos demostrar es la existencia y unicidad de un vector unitario $f\in K$.

Por definición de ínfimo existe una sucesión $(f_n) \in K$ tal que $\|f_n\| \to 1$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser V uniformemente convexo, existe $\delta > 0$ y para este δ existe $n \in N$ tal que

$$\|f_k\| - 1 < \delta \quad \text{para } k \geq n.$$

Sean $m, k \geq n$ y $\lambda_k = \|f_k\|^{-1}$ ($\|f_k\| \neq 0$ pues estamos suponiendo que $0 \notin K$). Usando la desigualdad $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a + b\|$ y la convexidad de K tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\lambda_k f_k + \lambda_m f_m\| &= \frac{1}{2}\|\lambda_k f_k - f_k + f_k + \lambda_m f_m - f_m + f_m\| \\
&= \frac{1}{2}\|f_k + f_m - (1-\lambda_k)f_k - (1-\lambda_m)f_m\| \\
&\geq \frac{1}{2}\|f_k + f_m\| - \frac{1}{2}(1-\lambda_k)\|f_k\| - \frac{1}{2}(1-\lambda_m)\|f_m\| \\
&> \frac{1}{2}\|f_k + f_m\| - \frac{1}{2}(\|f_k\| - 1) - \frac{1}{2}(\|f_m\| - 1).
\end{aligned}$$

Por ser K convexo, $\frac{1}{2}(f_k + f_m) \in K$; además $\|k\| \geq 1$ para $k \in K$, así

$$\frac{1}{2}\|\lambda_k f_k + \lambda_m f_m\| > 1 - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta = 1 - \delta.$$

Ahora, $\|\lambda_k f_k\| = \|\lambda_m f_m\| = 1$, y por convexidad uniforme se implica que

$$\|\lambda_k f_k - \lambda_m f_m\| < \varepsilon,$$

de esta manera, la sucesión $(\lambda_n f_n)$ es de Cauchy. Como estamos suponiendo que V es de Banach, $\lambda_n f_n \to f$ para algún $f \in V$. Del hecho que $\|\lambda_n f_n\| = 1$ se tiene que $\|f\| = 1$. Veamos ahora que $f \in K$:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \|f_n - \lambda_n f_n + \lambda_n f_n - f\| \\
&\leq \|f_n - \lambda_n f_n\| + \|\lambda_n f_n - f\| \\
&\leq \|f_n\|(1-\lambda_n) + \|\lambda_n f_n - f\|
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| &\leq \lim_{n\to\infty}\|f_n\| \lim_{n\to\infty}(1-\lambda_n) + \lim_{n\to\infty}\|\lambda_n f_n - f\| \\
&= 1(1-1) + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De aquí $f_n \to f$, y por la cerradura de K, $f \in K$. Entonces f es un punto de K que minimiza la distancia al origen.

Mostremos ahora que este punto es único.

Supongamos que existen f y f' elementos de K que son minimizantes, entonces $\|f'\| = \|f\| = 1$, luego

$$\frac{1}{2}\|f + f'\| \leq \frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}\|f'\| = 1.$$

Por otro lado, dado que K es convexo $\frac{1}{2}(f + f') \in K$, es así que $\frac{1}{2}\|f + f'\| \geq 1$. Por lo tanto $\frac{1}{2}\|f + f'\| = 1$, esto implica que $\frac{1}{2}\|f + f'\| > 1 - \delta$ para todo $\delta > 0$; de donde $\|f - f'\| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y entonces $f = f'$ ■

Como ya se ha mencionado anteriormente, en algunos casos el punto garantizado por el teorema de existencia no es único; una prueba de esto es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Dotemos a* R^2 *con la norma del supremo y sean* M *el subespacio* $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = 0\}$ *y* $g = (0, 1)$. *Entonces* $d(g, M) = 1$ *y se verifica tomando* $(x_1, x_2) \in M$ *con* $|x_1| \leq 1$, *Figura* 1.2.1.

$itbpF204.0625pt135.25pt0inFigure$

Figura 1.2.1. El punto $p \in M$ es tal que $d(p, g) = 1$

Este ejemplo sugiere que la curvatura de la bola unitaria tiene influencia directa sobre la unicidad del mejor aproximante.

Definición 1.2.2. *Un espacio lineal normado* V *es estrictamente convexo, si dados* $x, y \in V$ *con* $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\frac{1}{2}\|x + y\| = 1$, *entonces* $x = y$.

Teorema 1.2.2 *Sea* W *un subespacio de dimensión* n *de un espacio lineal normado estrictamente convexo* V, *entonces* W *contiene un único mejor aproximante a cualquier punto dado del espacio.*

Demostración. La existencia ya fue probada en el Teorema 1.1.3. Para demostrar la unicidad, supongamos que f y f' son puntos de W de mínima distancia λ a un punto $g \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}(f + f') - g\right\| &\leq \frac{1}{2}\|f - g\| + \frac{1}{2}\|f' - g\| \\
&= \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Dado que W es un subespacio lineal, $\frac{1}{2}(f + f') \in W$ y por lo tanto

$$\lambda \leq \left\|\frac{1}{2}(f + f') - g\right\|.$$

Así, $\lambda = \left\| \frac{1}{2}(f + f') - g \right\|$. Ahora si $\lambda = 0$, entonces

$$\|f - g\| = \|f' - g\| = 0.$$

Esto implica que $f = f' = g$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{1}{\lambda}\|f - g\| = \frac{1}{\lambda}\|f' - g\| = 1$ y además:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2}\left[\frac{(f - g)}{\lambda} + \frac{(f' - g)}{\lambda} \right] \right\| &= \frac{1}{\lambda}\left\| \frac{1}{2}(f + f') - g \right\| \\
&= \frac{1}{\lambda}\lambda \\
&= 1
\end{aligned}$$

y puesto que V es estrictamente convexo, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}(f - g) &= \frac{1}{\lambda}(f' - g), \\
f &= f'.
\end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración ■

En este capítulo se han dado condiciones *suficientes* para que se de la existencia y unicidad del *mejor aproximante*. Sin embargo estas de ninguna manera son las únicas. Ahora bien cuando el mejor aproximante es único podemos establecer un mapeo del espacio métrico V al subespacio W, tal que a cada elemento $g \in V$ le asigne su mejor aproximante $X(g) \in W$.

1.3 El operador de aproximación

Generalizando la idea anterior, podemos dar la siguiente

Definición 1.3.1 *Dados un espacio normado V y W un subespacio de V. Definimos como operador de aproximación a cualquier operador $X : V \to W$.*

Definición 1.3.2 *Definimos la norma del operador de aproximación X, como el número real más pequeño tal que se cumple la desigualdad*

$$\|X(f)\| \leq \|X\| \|f\| \quad \textit{para todo} \quad f \in V$$

Al número $\|X\|$ se le conoce también como la *constante de Lebesgue.*

Teorema 1.3.1 *Sea W un subespacio de dimensión n de un espacio vectorial normado V y sea X un operador lineal $X : V \to W$ que satisface la* *condición de proyección, esto es, $X(w) = w$ para todo $w \in W$. Para $g \in V$ sea d^* la distancia mínima de $g \in V$ a W, es decir:*

$$d^* = \min_{f \in W} \|f - g\|$$

entonces el error de aproximación de $X(g)$ a g satisface la cota:

$$\|g - X(g)\| \leq [1 + \|X\|]\, d^*$$

Demostración. Sea p^* un mejor aproximante a g entonces:

$$d^* = \|g - p^*\|\,,$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\|g - X(g)\| &\leq \|g - p^*\| + \|p^* - X(g)\| \\
&= \|g - p^*\| + \|X(p^*) - X(g)\| \\
&= \|g - p^*\| + \|X(p^* - g)\| \\
&\leq \|g - p^*\| + \|X\|\,\|p^* - g\| \\
&= [1 + \|X\|]\,(\|p^* - g\|) \\
&= [1 + \|X\|]\, d^*
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar ■

La importancia de este capítulo, radica en que en el siguiente veremos que los splines cúbicos forman un subespacio de dimensión finita de $C^2[a,b]$ y de este hecho se derivará su existencia. El Teorema 1.3.1 nos permitirá notar que el error de aproximación esta acotado. Pese a los resultados obtenidos en este capítulo, la unicidad de los splines cúbicos se probará de manera distinta, por construcción.

CAPÍTULO 2

Aproximación en el plano por splines cúbicos

En este capítulo mostraremos algunas propiedades de los splines cúbicos y condiciones bajo las cuales estos son únicos. Analizaremos la aproximación uniforme por splines y por último mostraremos que el Teorema 1.1.3 puede aplicarse al caso particular de los splines. Estas son las bases para obtener el algoritmo que será descrito en la sección 2.7.

2.1 Aproximación polinomial a trozos

Pese a que se han encontrado muchas desventajas al aproximar una función $f \in C[a,b]$ por medio de polinomios, estos no han sido totalmente descartados como aproximantes a una función; más aún, existen métodos de interpolación y aproximación en los cuales los polinomios juegan un papel muy importante, un ejemplo de ello es la interpolación polinomial a trozos o por splines.

La naturaleza de los splines es bastante sencilla. Supongamos que deseamos obtener un aproximante, digamos $s \in C[a,b]$, para una función f de la cual sólo conocemos los valores

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, 2, ..., n.$$

En donde $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a,b]$.

Una solución sencilla a este problema sería graficar cada uno de los puntos $(x_i, f(x_i))$ y trazar una curva suave que pase por cada uno de ellos, *Figura* 2.1.1. Claro que ésta sería una solución gráfica, más no analítica del problema.

$$itbpF250.625pt147.3125pt0inFigure$$

Figura 2.1.1. Solución geométrica

Una manera analítica de resolverlo es unir cada par de puntos consecutivos utilizando gráficas de funciones continuas, por ejemplo rectas, *Figura* 2.1.2, que representan las funciones continuas más sencillas.

$itbpF276.25pt147.3125pt0inFigure$

Figura 2.1.2. Solución analítica por función lineal a trozos

En este caso la función aproximante s es una función definida a trozos, de tal forma que en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se tiene una línea recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, por lo tanto

$$s(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} (x - x_i) + f(x_i), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \; i = 0, ..., n-1.$$

En general podríamos definir s de manera tal que sea igual a un polinomio de grado a lo más k en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y tal que $s(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, ..., n$. Cuando s se define de esta manera se le conoce con el nombre de Spline. Formalizando esta idea damos la siguiente definición.

Definición 2.1.1 *Dada una partición* Δ de $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$$

definimos un spline de grado k *como una función* $s \in C^{k-1}[a, b]$ *tal que en cada intervalo* $[x_i, x_{i+1}]$, s *es un polinomio de grado a lo más* k.

A los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ *se les conoce como nodos.*

Denotamos por $S(X_n, k, x)$ al conjunto de todas las funciones

$$s(X_n, k) = s \in C^k[a, b],$$

tal que s es un spline de grado k, *Referencia* [5, pág. 108]. Por simplicidad, en este trabajo utilizaremos la notación $S(X_n)$ para denotar al conjunto de los splines de grado 3 para los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$, que son los que estudiaremos.

2.2 Splines cúbicos

Existen muchas formas de definir un spline de grado 3, *Referencia* [10, pág.216], he aquí una de ellas.

Definición 2.2.1 *Dada una partición* Δ *de un intervalo* $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Una función $s \in C^2[a,b]$ se denomina spline cúbico si satisface las siguientes condiciones:

i) *s es un polinomio de grado a lo más 3 en cada subintervalo*

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

ii) *s es continua así como su primera y segunda derivada sobre $[a,b]$, esto es,*

$$s^k(x_i - 0) = s^k(x_i + 0) \quad k = 0, 1, 2; \quad i = 1, 2..., n-1.$$

Además si son dados lo valores $y_i = f(x_i)$, para $f \in C^2[a,b]$, $i = 0, 1, ..., n$, y

iii) $s(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, ..., n.$

entonces s(x) es el spline cúbico interpolante de f en Δ.

Denotemos por $s(x_i) = y_i$, $s'(x_i) = m_i$, $s''(x_i) = M_i$ y $h_i = x_i - x_{i-1}$. Puesto que s'' es una función lineal en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y su gráfica pasa por los puntos (x_{i-1}, M_{i-1}) y (x_i, M_i), se tiene que,

$$s''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \tag{2.2.1}$$

Si integramos dos veces obtenemos:

$$s'(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + a_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \tag{2.2.2}$$

$$s(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \tag{2.2.3}$$

Ahora, dado que $s(x_i) = y_i$, y como por la ecuación anterior

$$s(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + a_i x_i + b_i,$$

tenemos que

$$y_i = M_i\frac{h_i^2}{6} + a_i x_i + b_i.$$

Análogamente para y_{i-1} tenemos

$$y_{i-1} = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + a_i x_{i-1} + b_i.$$

Resolviendo el sistema

$$\{.a_i x_i + b_i = y_i - M_i\frac{h_i^2}{6} a_i x_{i-1} + b_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

para a_i y b_i, obtenemos primero

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6},$$

sustituyendo esta expresión en (2.2.2)

$$\begin{aligned} s'(x) &= -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} 2.2.4 \qquad (1) \\ & -\frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6}, \quad x_{i-1} \le x \le x_i, \end{aligned}$$

también tenemos que

$$b_i = -a_i x_i - y_i - M_i\frac{h_i^2}{6}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_i x + b_i &= a_i(x - x_i) + y_i - M_i\frac{h_i^2}{6} \\ &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}(x - x_i) - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6}(x - x_i) + y_i - M_i\frac{h_i^2}{6} \\ &= \frac{y_i}{h_i}(x - x_i) - \frac{y_{i-1}}{h_i}(x - x_i) - \frac{h_i M_i}{6}(x - x_i) + \frac{h_i M_{i-1}}{6}(x - x_i) \\ & +y_i - M_i\frac{h_i^2}{6} \\ &= \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \frac{y_i}{h_i}(x - x_i + h_i) \\ & +\frac{h_i M_i}{6}(x - x_i - h_i) \\ &= \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \frac{y_i}{h_i}(x - x_i + (x_i - x_{i-1})) \\ & -\frac{h_i M_i}{6}(x - x_i + (x_i - x_{i-1})) \\ &= \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \frac{y_i}{h_i}(x - x_{i-1}) - \frac{h_i M_i}{6}(x - x_{i-1}) \\ &= \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6}\right)(x - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Luego, para $x_{i-1} \le x \le x_i$, se tiene que

$$\begin{aligned} s(x) &= M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} 2.2.5 \qquad (2) \\ & + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6}\right)(x - x_{i-1}) \ . \end{aligned}$$

De (2.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
s'(x_i - 0) &= M_i \frac{h_i^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6} \\
&= M_i \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} + \frac{h_i M_{i-1}}{6} \\
&= M_i \frac{h_i}{3} + M_{i-1} \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
s'(x_{i-1} + 0) &= -M_{i-1} \frac{(-h_i)^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6} \\
&= -M_{i-1} \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} + \frac{h_i M_{i-1}}{6} \\
&= -M_{i-1} \frac{h_i}{3} - M_i \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.
\end{aligned}$$

Si reemplazamos $i-1$ por i e i por $i+1$ en esta última ecuación, tenemos

$$s'(x_i + 0) = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}. \qquad (2.2.6)$$

Como estamos suponiendo que s' es continua debemos tener

$$s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0),$$

es decir,

$$M_i \frac{h_i}{3} + M_{i-1} \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}.$$

Reduciendo la anterior expresión, obtenemos

$$\frac{1}{6} h_i M_{i-1} + \frac{1}{3}\left(h_i + h_{i+1}\right) M_i + \frac{1}{6} h_{i+1} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \qquad (2.2.7)$$

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

o equivalentemente

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad (2.2.8)$$

en donde

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad \text{y} \quad d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right),$$

para $i = 1, 2, ..., n-1$.

Las ecuaciones (2.2.8) se conocen con el nombre de ecuaciones de $M - continuidad$ del spline cúbico interpolante s a f en Δ.

Estas ecuaciones son resultado de una interpolación de Lagrange para los puntos (x_{i-1}, M_{i-1}) y (x_i, M_i). Sin embargo podríamos utilizar los valores $s'(x_i) = m_i$ en lugar de M_i haciendo una interpolación de Hermite, *Teorema* A.2, lo cual también nos da un polinomio de grado 3 en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x_{i-1})\left(1 + \frac{2\,(x - x_{i-1})}{h_i}\right)\frac{(x - x_i)^2}{h_i^2} \\ &\quad + f(x_i)\left(1 + \frac{2\,(x - x_i)}{h_i}\right)\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} \\ &\quad + f'(x_{i-1})\,(x - x_{i-1})\,\frac{(x - x_i)^2}{h_i^2} + f'(x_i)\,(x - x_i)\,\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2}, \end{aligned}$$

o de igual forma

$$\begin{aligned} s(x) &= m_{i-1}\frac{(x - x_i)^2\,(x - x_{i-1})}{h_i^2} - m_i\,\frac{(x - x_{i-1})^2\,(x_i - x)}{h_i^2} 2.2.9 \qquad (3) \\ &\quad + y_{i-1}\frac{[h_i + 2\,(x - x_{i-1})]\,(x - x_i)^2}{h_i^3} + y_i\frac{[h_i + 2\,(x - x_i)]\,(x - x_{i-1})^2}{h_i^3}. \end{aligned}$$

Derivando dos veces obtenemos:

$$\begin{aligned} s'(x) &= m_{i-1}\frac{(x_i - x)\,(2x_{i-1} + x_i - 3x)}{h_i^2} - m_i\frac{(x - x_{i-1})\,(2x_i + x_{i-1} - 3x)}{h_i^2} \\ &\quad + 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3}\,(x - x_i)\,(x - x_{i-1})\,. \\ s''(x) &= 2m_{i-1}\frac{3x - 2x_i - x_{i-1}}{h_i^2} - 2m_i\frac{3x - x_i - 2x_{i-1}}{h_i^2} \\ &\quad + 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3}(x_i + x_{i-1} - 2x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s''(x_i - 0) &= 2m_{i-1}\frac{x_i - x_{i-1}}{h_i^2} + 2m_i\frac{2(x_i - x_{i-1})}{h_i^2} + 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3}(x_{i-1} - x_i) \\ &= \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}. \\ s''(x_{i-1} + 0) &= 2m_{i-1}\frac{2\,(x_{i-1} - x_i)}{h_i^2} + 2m_i\frac{2(x_{i-1} - x_i)}{h_i^2} \\ &\quad + 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3}(x_i - x_{i-1}) \\ &= -\frac{4m_{i-1}}{h_i} - \frac{2m_i}{h_i} + 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}. \end{aligned}$$

Si sustituimos $i-1$ por i e i por $i+1$ en la última ecuación obtenemos

$$s''(x_i+0) = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}, \tag{2.2.10}$$

por la condición de continuidad en la segunda derivada se debe tener que

$$s''(x_i-0) = s''(x_i+0),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - 6\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2} &= -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} \\
\frac{2}{h_i}m_{i-1} + \left(\frac{h_i+h_{i+1}}{h_ih_{i+1}}\right)4m_i + \frac{2}{h_{i+1}}m_{i+1} &= 6\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}\right) \\
\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}m_{i+1} &= 3\left(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} + \mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = C_i \qquad i = 1, 2, ...n-1 \tag{2.2.11}$$

donde los valores λ_i y μ_i han sido definidos anteriormente y

$$C_i = 3\left(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} + \mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right).$$

A las ecuaciones (2.2.11) se les llama ecuaciones de $m-continuidad$ del spline interpolante s de f en Δ.

2.3 Condiciones finales

Hasta ahora se han logrado establecer dos formas distintas de obtener el spline cúbico s, las cuales son descritas por las ecuaciones (2.2.5) y (2.2.9). Cuando logramos definir el valor apropiado para M_i o m_i, $i = 0, 1, ..., n$, el spline s queda perfectamente determinado. Para lograr esto, utilizaremos las $n-1$ ecuaciones lineales descritas por (2.2.8) y (2.2.11) para M_i y m_i, respectivamente. Puesto que para encontrar los $n+1$ valores desconocidos, sólo contamos con $n-1$ ecuaciones lineales, entonces es suficiente establecer dos nuevas relaciones, ya sea para M_i o m_i, logrando tener un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas en cada uno de los dos casos. Frecuentemente estas dos nuevas condiciones que se agregan se imponen en los nodos extremos, es decir, en $x = a$ y $x = b$, estas condiciones se denominan $condiciones\ finales$. Así podemos:

$i)$ Especificar el valor de la primera o segunda derivada de f en los puntos $x = a$ y $x = b$.

ii) Establecer alguna de las siguientes relaciones

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \;\text{ y }\; \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

o

$$2m_0 + \mu_0 m_1 = C_0 \; y \; \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = C_n,$$

donde d_0, C_0, d_n, $C_n \in R$ y $0 \leq \lambda_0, \mu_0, \mu_n, \lambda_n \leq 1$.

iii) Dar la condición final periódica

$$y_n = y_0, \quad m_n = m_0 \;\text{ y }\; M_n = M_0.$$

Para el caso *i*) supongamos que damos los valores

$$s'(x_0) = y'_0 \;\text{ y }\; s'(x_n) = y'_n,$$

entonces las ecuaciones faltantes para resolver el sistema lineal que tiene como incógnitas a las $M'_i s$ se pueden obtener de la siguiente manera.

De la ecuación (2.2.6) obtenemos

$$s'(x_0) = -M_0 \frac{h_1}{3} - M_1 \frac{h_1}{6} + \frac{y_1 - y_0}{h_1}.$$

Dado $s'(x_0) = y'_0$,

$$y'_0 = -M_0 \frac{h_1}{3} - M_1 \frac{h_1}{6} + \frac{y_1 - y_0}{h_1},$$

simplificando

$$\frac{1}{3} h_1 M_0 + \frac{1}{6} h_1 M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0, \tag{2.3.1}$$

o bien

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right). \tag{2.3.2}$$

De manera análoga encontramos las ecuaciones

$$\frac{1}{6} h_n M_{n-1} + \frac{1}{3} h_n M_n = -\frac{y_n - y_{n-1}}{h_1} + y'_n, \tag{2.3.3}$$

o equivalentemente,

$$2M_n + M_{n-1} = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right). \tag{2.3.4}$$

Con las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.4) completamos nuestro sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. A este spline en particular se le conoce con el nombre de *spline cúbico natural.*

Por otro lado, si lo que especificamos son los valores

$$s''(x_0) = y''_0 \;\; \text{y} \;\; s''(x_n) = y''_n$$

para $i = 0$ en la ecuación (2.2.10), tenemos la relación

$$y''_0 = -\frac{4m_0}{h_1} - \frac{2m_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2},$$

o bien,

$$2m_0 + m_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y''_0 h_1}{2}.$$

De forma similar se obtiene la ecuación

$$m_{n-1} + 2m_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{y''_n h_n}{2}.$$

De esta manera es posible completar el sistema que tiene como incógnitas a las $m_i's$.

En el caso *ii*), se pueden escoger $d_0, C_0, d_n,\ C_n$ de manera arbitraria y $\lambda_0, \mu_0, \mu_n, \lambda_n$ como constantes entre 0 y 1. Generalmente los valores que se escogen para estas variables son: $\lambda_0 = \mu_n = 1$ y $d_0 = d_1$, $d_n = d_{n-1}$ para las primeras dos ecuaciones y $C_0 = C_1$, $C_n = C_n$ para las segundas.

Si agregamos cualquier par de las condiciones finales descritas en *ii*) a las ecuaciones de continuidad, obtendremos un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas que puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & 0 & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & 0 & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

o en el caso de las $m_i's$

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & 0 & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & \\ & 0 & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}$$

El caso $i)$ podría verse como una particularidad de $iii)$.

Para el caso $iii)$ supongamos que nos dan la siguiente condición

$$y_n = y_0, \quad m_n = m_0, \quad M_n = M_0.$$

Puesto que $m_n = m_0$, entonces se puede eliminar la incógnita m_n del sistema; además de (2.2.10) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= -\frac{4m_0}{h_1} - \frac{2m_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2}, \\ s''(x_n) &= \frac{2m_{n-1}}{h_n} + \frac{4m_0}{h_n} - 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} \end{aligned}$$

y puesto que $M_n = M_0$, entonces

$$-\frac{4m_0}{h_1} - \frac{2m_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} = \frac{2m_{n-1}}{h_n} + \frac{4m_0}{h_n} - 6\frac{y_0 - y_{n-1}}{h_n^2}$$

o equivalentemente

$$2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_n}\right) m_0 + \frac{1}{h_1} m_1 + \frac{1}{h_n} m_{n-1} = 3\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} + \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_n^2}\right)$$

dividiendo entre $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_n}$

$$2m_0 + \frac{h_n}{h_1 + h_n} m_1 + \frac{h_1}{h_1 + h_n} m_{n-1} = 3\left(\frac{h_n}{h_1}\frac{y_1 - y_0}{h_n + h_1} + \frac{h_1}{h_n}\frac{y_0 - y_{n-1}}{h_n + h_1}\right).$$

Es así que el sistema de ecuaciones de $m-$*continuidad* tienen la forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & & \lambda_0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & 0 & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{h_n}{h_1 + h_n}, \quad \lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_n} \quad \text{y} \\ C_0 &= 3\left(\frac{h_n}{h_1}\frac{y_1 - y_0}{h_n + h_1} + \frac{h_1}{h_n}\frac{y_0 - y_{n-1}}{h_n + h_1}\right). \end{aligned}$$

Si hacemos este procedimiento pero ahora considerando primero que $M_n = M_0$ y después utilizando la relación (2.2.6), el sistema de *M-continuidad* puede ser representado con la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & 0 & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

donde μ_n y λ_n se definen como

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{h_n}{h_n + h_1}, \quad \lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1} \text{ y} \\ d_n &= \frac{6}{h_n + h_1}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_1 - y_n}{h_1}\right). \end{aligned}$$

Hasta ahora solo hemos mostrado que al imponer cualquiera de las condiciones finales al spline cúbico, podemos obtener un sistema lineal asociado a una matriz cuadrada de tamaño $n+1$ ó n, dependiendo de la condición que se imponga, de este hecho se desprende la existencia y unicidad del spline cúbico como lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 (Teorema de existencia y unicidad). *Supongamos que tenemos una partición* Δ *de* $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$$

$f \in C^2[a, b]$ *y* $f(x_i) = y_i$ *para* $i = 0, ..., n$. *Para cualquiera de las tres condiciones finales que se imponga, el spline cúbico interpolante a* f *existe y es único.*

Demostración. Basta observar que el sistema de ecuaciones resultante al imponer cualquier condición final, es equivalente a una matriz diagonalmente dominante, *Definición* A.1, debido a que

$$|\mu_i + \lambda_i| = \left|\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\right| = 1 < 2 \qquad i = 1...n-1$$

y

$$0 \leq \lambda_0, \mu_0, \mu_n, \lambda_n \leq 1.$$

Dado que toda matriz diagonalmente dominante es no singular, *Teorema* A.1, el sistema tiene una única solución.

Por lo tanto el spline cúbico interpolante a f existe y se determina de manera única ■

2.4 El subespacio lineal S(X$_n$)

$S(X_n)$ es un subespacio lineal de $C^2[a,b]$. En efecto, dados s_1, $s_2 \in S(X_n)$ y $\alpha \in R$ tenemos que:

i) $s_1 + \alpha s_2$ es cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pues así lo son s_1 y s_2.

ii) $s_1 + \alpha s_2$ es continua así como su primera y segunda derivada sobre $[a,b]$ pues $s_1, s_2 \in C^2[a,b]$.

Por otro lado de la condición *i)* de la Definición 2.2.1 se tiene que

$$s(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, ..., n-1,$$

de esto podemos concluir que $s(x)$ tiene $4n$ grados de libertad, sin embargo por la condición *ii)*, éste está sujeto a $3(n-1)$ restricciones por lo que en realidad $s(x)$ tiene $4n - 3(n-1) = n+3$ grados de libertad. Por lo tanto $S(X_n)$ es un subespacio lineal de dimensión $n+3$. A continuación mostrarémos una base para $S(X_n)$.

$itbpF254.8125pt133.6875pt0inFigure$

Figura 2.4.1. Gráfica de una función c_i

Continuando con la partición Δ de $[a,b]$, por el Teorema 2.3.1, existen splines cúbicos únicos tales que

$$\begin{aligned} c_i(x_j) &= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \\ c_i'(x_0) &= c_i'(x_n) = 0, \quad i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

Al conjunto de estos splines se les conoce como *splines fundamentales, Figura* 2.4.1. Ahora afirmamos que $\{x, x^2, c_0(x), ..., c_n(x)\}$ forma una base para $S(X_n)$. Para ver esto notemos lo siguiente

$$t(x) = ax + bx^2 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c_i(x) \in S, \quad a, b \in R, \quad \alpha_i \in R, \quad i = 0, ..., n$$

También observemos que si $s \in S(X_n)$ y escribimos $s(x_i) = s_i$, $i = 0, ..., n$, $s'(x_0) = s_0'$, $s'(x_n) = s_n'$ y consideramos

$$q(x) = \frac{1}{2} \frac{s_0' - s_n'}{x_0 - x_n} x^2 + \frac{s_0' x_n - s_n' x_0}{x_n - x_0} x,$$

entonces $q \in P_2$ y $s-q \in S(X_n)$, también se tiene que $q'(x_0) = s'_0$ y $q'(x_n) = s'_n$. Por otro lado

$$\sum_{i=0}^{n} (s_i - q_i)\, c_i(x)$$

es un spline cúbico que interpola a la función $s - q$ y por la unicidad asegurada por el Teorema 2.3.1 esto implica que

$$s(x) - q(x) = \sum_{i=0}^{n} (s_i - q_i)\, c_i(x)$$

o bien

$$s(x) = q(x) + \sum_{i=0}^{n} (s_i - q_i)\, c_i(x).$$

Por lo tanto $x, x^2, c_0(x), ..., c_n(x)$ generan a $S(X_n)$; veamos ahora que son linealmente independientes. Supongamos que

$$t(x) = ax + bx^2 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c_i(x) = 0,$$

entonces $t'(x_0) = t'(x_n) = 0$, pero

$$\begin{aligned} t'(x_0) &= a + 2bx_0 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c'_i(x_0) \\ &= a + 2bx_0, \end{aligned}$$

y análogamente

$$t'(x_n) = a + 2bx_n,$$

de aquí obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2bx_0 = 0 \\ a + 2bx_n = 0 \end{array} \right.$$

del cual concluimos que $a = b = 0$, luego

$$t(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c_i(x).$$

Evaluando en x_j

$$t(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c_i(x_j) = \alpha_j,$$

lo cual implica que $\alpha_j = 0$, $j = 0, ..., n$, de aquí que $x, x^2, c_0(x), ..., c_n(x)$ son $l.i.$ y por lo tanto forma una base para $S(X_n)$.

A continuación daremos otra base para $S(X_n)$, misma que más tarde nos permitirá dar una demostración más sencilla de la existencia y unicidad de los splines en tres dimensiones.

Ya hemos visto que para definir de manera única un spline cúbico, dada una partición $\Delta : \{x_0, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, es suficiente con establecer los valores que el spline debe satisfacer en cada nodo x_i, así como dar alguna condición final de uno de los tres tipos antes mencionados. Considerando esto, podemos escoger $n+3$ splines cúbicos $\phi_0, ..., \phi_{n+2}$ que satisfacen las siguientes condiciones de interpolación:

$$\begin{aligned}
\phi_i(x_j) &= \delta_{ij}, & i, j = 0, 1, ..., n;\\
\phi_i'(x_0) &= \phi_i'(x_n) = 0, & i = 0, 1, ..., n;\\
\phi_{n+1}(x_i) &= 0, & i = 0, 1, ..., n;\\
\phi_{n+1}'(x_0) &= \phi_{n+2}'(x_0) = 1, &\\
\phi_{n+1}'(x_n) &= 0, &\\
\phi_{n+2}(x_i) &= \phi_{n+2}'(x_0) = 0, & i = 0, 1, ..., n;
\end{aligned}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Para demostrar que este conjunto de splines forman una base para $S(X_n)$, sólo basta con ver que son linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$t(x) = \sum_{i=0}^{n+2} a_i \phi_i(x) \equiv 0;$$

si evaluamos t en x_j, $j = 0, ..., n$, tenemos

$$\begin{aligned}
t(x_j) &= \sum_{i=0}^{n+2} a_i \phi_i(x_j)\\
&= a_j = 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$a_{n+1}\phi_{n+1}(x) + a_{n+2}\phi_{n+2}(x) \equiv 0;$$

si derivamos la ultima expresión obtenemos que

$$a_{n+1}\phi_{n+1}'(x) + a_{n+2}\phi_{n+2}'(x) \equiv 0;$$

evaluando en x_0 y x_n llegamos a lo siguiente

$$a_{n+1} = 0 \quad \text{y } a_{n+1} = 0.$$

Por lo tanto $\{\phi_i : i = 0, ..., n+2\}$ es una base para $S(X_n)$. Esta base recibe el nombre de *base cardinal*.

Con esto hemos probado que $S(X_n)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita del espacio vectorial normado $C^2[a,b]$. Este es un resultado interesante pues podemos aplicarle el Teorema 1.1.3, de lo cual obtendríamos la existencia del spline cúbico que mejor aproxima a una función dada en $C^2[a,b]$. Sin embargo, probar la unicidad de los mismos por este camino resultaría una labor muy tediosa, las alternativas serían probar que $C^2[a,b]$ es estrictamente convexo o probar que $C^2[a,b]$ es cerrado; en cambio la demostración ofrecida en esta sección adémas de ser muy ilustrativa, permite elaborar un algoritmo para calcular s, mismo que será descrito más adelante.

2.5 Propiedades del spline cúbico natural

En esta sección mostraremos algunas de las propiedades que presentan los splines, estas muestran el buen comportamiento matemático de los splines cúbicos naturales y a su vez justifican su uso frecuente en muchos campos.

Teorema 2.5.1 (Propiedad de norma mínima). *Sean $\Delta = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $f \in C^2[a,b]$. Si tomamos $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ y consideramos el spline cúbico que satisface las condiciones*

$$\begin{aligned} s(x_i) &= f_i, \qquad i = 0, 1, ..., n, \\ s'(a) &= f'(a), \qquad s'(b) = f'(b), \end{aligned}$$

entonces

$$\int_b^a [s''(x)]^2 \, dx \leq \int_b^a [f''(x)]^2 \, dx.$$

La igualdad se da si y sólo si $s(x) = f(x)$.

Demostración. Consideremos la integral

$$\begin{aligned} \int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2 \, dx &= \int_b^a [f''(x)]^2 \, dx - 2 \int_b^a f''(x)s''(x) \, dx \\ &\quad + \int_b^a [s''(x)]^2 \, dx \\ &= \int_b^a [f''(x)]^2 \, dx - \int_b^a [s''(x)]^2 \, dx \\ &\quad -2 \int_b^a f''(x)s''(x) \, dx + 2 \int_b^a [s''(x)]^2 \, dx \\ &= \int_b^a [f''(x)]^2 \, dx - \int_b^a [s''(x)]^2 \, dx \\ &\quad +2 \int_b^a [f''(x) - s''(x)] \, s''(x) \, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes el último sumando tenemos

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]\, s''(x)\ dx = [f'(x) - s'(x)]\, s''(x) \Big|_a^b - \int_b^a [f'(x) - s'(x)]\, s'''(x)\ dx$$

pero

$$[f'(x) - s'(x)]\, s''(x) \Big|_a^b = 0,$$

pues $s'(a) = f'(a)$ y $s'(b) = f'(b)$.

Puesto que s''' es constante en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, digamos $s'''(x) = \alpha_i$, para algunos $\alpha_i \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\int_b^a [f'(x) - s'(x)]\, s'''(x)dx &= {}_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha_i\, [f'(x) - s'(x)]\, dx \\ &= {}_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, [f(x) - s(x)] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0.\end{aligned}$$

Así

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]\, s''(x)\ dx = 0$$

y

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2\, dx = \int_b^a [f''(x)]^2\, dx - \int_b^a [s''(x)]^2\, dx \tag{2.5.1}$$

puesto que

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2\, dx \geq 0.$$

Entonces

$$\int_b^a [f''(x)]^2\, dx \geq \int_b^a [s''(x)]^2\, dx \quad \blacksquare$$

Teorema 2.5.2 (Propiedad de mejor aproximante). *Con las mismas hipótesis del Teorema 2.5.1 se tiene que*

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2\, dx \leq \int_b^a [f''(x) - v''(x)]^2\, dx$$

para todo $v \in S(X_n)$*. La igualdad se da si y sólo si* $v = s + ax + b$*.*

Demostración. Dado $v \in S(X_n)$ tomemos la función $f - v$ en lugar de f en el Teorema 2.5.1, entonces la función s es reemplazada por $s - v$. Sustituyendo en (2.5.1)

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2\, dx = \int_b^a [f''(x) - v''(x)]^2\, dx - \int_b^a [s''(x) - v''(x)]^2\, dx$$

y de aquí

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2 \, dx \leq \int_b^a [f''(x) - v''(x)]^2 \, dx.$$

Ahora,

$$\int_b^a [f''(x) - s''(x)]^2 \, dx = \int_b^a [f''(x) - v''(x)]^2 \, dx$$

si y sólo si

$$\int_b^a [s''(x) - v''(x)]^2 \, dx = 0$$

pero esto se verifica solo cuando

$$s''(x) = v''(x)$$

es decir,

$$v(x) = s(x) + ax + b \blacksquare$$

El último teorema hace ver que en términos de la pseudonorma

$$\|g\|_2 = \int_b^a [g''(x)]^2 \, dx,$$

el spline descrito por las hipótesis del Teorema 2.5.1 es el mejor aproximante a f. Sin embargo, analizaremos el comportamiento de los splines como aproximación uniforme a la función f.

2.6 Error de aproximación con norma uniforme

Como el nombre de esta sección sugiere, a continuación calcularemos el error de aproximación existente entre una función $f \in C^2[a, b]$ y el spline s que lo interpola, utilizando la norma infinito o uniforme.

Dada una partición $\Delta : \{x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ y la función $f \in C^2[a, b]$, se desea encontrar $s \in S(X_n)$ tal que minimice el error de aproximación entre f y s, es decir, que minimice $\|f - s\|$; más aún, lo que deseamos saber es si aumentando el número de nodos en la partición Δ el spline s se acerca a f; esta pregunta es la que trataremos de responder con el teorema principal de esta sección, pero antes tendremos que probar el siguiente lema.

Lema 2.6.1. *Sea $\Delta : \{x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y supongamos que f es una función cuya n-ésima derivada satisface*

$$\left\| f^{(n)} \right\| = M$$

sobre $[a,b]$. *Entonces para cada* x *en el intervalo* $[a,b]$,

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

para algún $\xi \in [a,b]$ *que depende de* x*; por lo tanto*

$$\|f - L_{n-1}\| \leq \|(x-x_1)\cdots(x-x_n)\| \frac{M}{n!},$$

en donde $L_{n-1}(x)$ *es el polinomio de Lagrange que interpola a* f *en* Δ.

Demostración. Sean

$$h(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$$

y

$$g(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Tomemos $x \in [a,b]$ tal que $x \neq x_i$, $i = 1,...,n$; entonces la función $H(t) = h(x)g(t) - g(x)h(t)$ tiene $n+1$ ceros distintos sobre $[a,b]$. En efecto, es claro que $t = x$ es cero; por otro lado tomemos $t = x_i$ para $i = 1,..,n$, entonces

$$\begin{aligned} H(x_i) &= h(x)g(x_i) - g(x)h(x_i) \\ &= h(x)(x-x_1)\cdots(x_i-x_i)\cdots(x-x_n) - g(x)\left[f(x_i) - L_{n-1}(x_i)\right] \\ &= h(x)\cdot 0 + g(x)\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Rolle, *Teorema* A.3, a $H(t)$, $n+1$ veces obtenemos que:

$$H^{(n)}(\xi) = h(x)g^{(n)}(\xi) - g(x)h^{(n)}(\xi) = 0 \text{ para algún } \xi \in (a,b)\,; \tag{2.6.1}$$

notemos ahora lo siguiente, $g(t)$ es un polinomio mónico de grado n, de lo cual

$$g^{(n)}(t) = n!;$$

también observemos que $L_{n-1}(t)$ es un polinomio de grado $n-1$, luego $L^{(n)}(t) = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} h^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) - L^{(n)}_{n-1}(t) \\ &= f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.6.1) es equivalente a

$$h(x)n! - g(x)f^{(n)}(\xi) = 0.$$

Despejando y sustituyendo $h(x)$ en esta última ecuación obtenemos

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

para algún $\xi \in [a,b]$ que depende de x, que es lo que se quería mostrar ■

Teorema 2.6.1. *Sean $f \in C^2[a,b]$ y $s \in S(X_n)$ que satisfacen*

$$s(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

y

$$s'(a) = f'(a), \qquad s'(b) = f'(b),$$

entonces para cada $x \in [a,b]$

$$\left| f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x) \right| \leq 5\delta^{2-r} w\left(f''; [a,b]; \delta\right), \quad r = 0, 1, 2.$$

Donde $\delta = \delta(X_n) = \max_{i=1,...,n} h_i$ y $w\left(f''; [a,b]; \delta\right)$ es el módulo de continuidad de f'' sobre $[a,b]$ para δ, Definición A.2.

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $[a,b] = [0,1]$. Considerando las ecuaciones (2.3.1), (2.2.7) y (2.3.3) tenemos:

$$\frac{1}{3}h_1 M_0 + \frac{1}{6}h_1 M_1 = \frac{\Delta y_1}{h_1} - y_0',$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{6}h_i M_{i-1} + \tfrac{1}{3}\left(h_i + h_{i+1}\right) M_i + \tfrac{1}{6}h_{i+1} M_{i+1} \\ &\quad = \frac{h_i y_{i+1} - y_i\left(h_i + h_{i+1}\right) + h_{i+1} y_{i-1}}{h_i h_{i+1}}, \qquad i = 1, ..., n-1 \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

$$\frac{1}{6}h_n M_{n-1} + \frac{1}{3}h_n M_n = -\frac{\Delta y_n}{h_1} + y_n',$$

donde $\Delta y_1 = y_1 - y_0$ y $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$.

Para $i = 1, ..., n-1$ consideremos

$$\begin{aligned} L(x) &= y_{i+1}\frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + y_{i-1}\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_{i-1}} \\ &= \frac{1}{h_{i+1} + h_i}\left[y_{i+1}\left(x - x_{i-1}\right) + y_{i-1}\left(x_{i+1} - x\right)\right] \end{aligned}$$

que es el polinomio lineal interpolante a $f(x)$ en x_{i-1} y x_{i+1}, entonces

$$\begin{aligned} f(x_i) - L(x_i) &= \frac{1}{h_{i+1} + h_i}\left[y_i\left(h_{i+1} + h_i\right) - y_{i+1}\left(x_i - x_{i-1}\right) - y_{i-1}\left(x_{i+1} - x_i\right)\right] \\ &= \frac{y_i\left(h_{i+1} + h_i\right) - y_{i+1} h_i - y_{i-1} h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}, \end{aligned}$$

pero por el lema anterior, existe $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ tal que

$$f(x_i) - L(x_i) = -h_i h_{i+1} \frac{f''(\xi_i)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{-y_{i+1}h_i + y_i(h_{i+1} + h_i) - y_{i-1}h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} = -h_i h_{i+1} \frac{f''(\xi_i)}{2}. \qquad (2.6.3)$$

Supongamos que $A_i = M_i - y_i''$ y reescribamos las ecuaciones (2.6.2) utilizando A_i y la relación (2.6.3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}h_1 A_0 + \frac{1}{6}h_1 A_1 &= \frac{\Delta y_1}{h_1} - y_0' - \frac{1}{3}h_1 y_0'' - \frac{1}{6}h_1 y_1'' \\
&= \frac{1}{2}h_1 f''(\xi_0) - \frac{1}{3}h_1 y_0'' - \frac{1}{6}h_1 y_1'' \\
&= \frac{1}{3}h_1(f''(\xi_0) - y_0'') + \frac{1}{6}h_1(f''(\xi_0) - y_1'').2.6.4 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Para $i = 1, ..., n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6}h_i A_{i-1} + \tfrac{1}{3}(h_i + h_{i+1}) A_i + \tfrac{1}{6}h_{i+1}A_{i+1} \\
&= -\frac{1}{6}h_i y_{i-1}'' - \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}) y_i'' - \frac{1}{6}h_{i+1}y_{i+1}'' \\
&\quad + \frac{h_i y_{i+1} - y_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}y_{i-1}}{h_i h_{i+1}} \\
&= -\frac{1}{6}h_i y_{i-1}'' - \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}) y_i'' - \frac{1}{6}h_{i+1}y_{i+1}'' + (h_{i+1} + h_i)\frac{f''(\xi_i)}{2} \\
&= \frac{1}{6}h_i\left[f''(\xi_i) - y_{i-1}''\right] + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})\left[f''(\xi_i) - y_i''\right] \\
&\quad + \frac{1}{6}h_{i+1}\left[f''(\xi_i) - y_{i+1}''\right].2.6.5 \qquad (5)
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}h_n A_{n-1} + \frac{1}{3}h_n A_n &= -\frac{\Delta y_n}{h_1} + y_n' - \frac{1}{6}h_n y_{n-1}'' - \frac{1}{3}h_n y_n'' \\
&= \frac{1}{6}h_n\left[f''(\xi_n) - y_{n-1}''\right] + \frac{1}{3}h_n\left[f''(\xi_n) - y_n''\right] 2.6.6 (6)
\end{aligned}$$

en donde $x_0 \leq \xi_0 \leq x_1$ y $x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n$.

Para $i = 1, ..., n-1$ tenemos:

$$\left|f''(\xi_i) - y_{i-1}''\right| \leq w(f''; [0,1]; 2\delta),$$

debido que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$; de la misma forma

$$\left|f''(\xi_i) - y''_{i+1}\right| \leq w(f''; [0,1]; 2\delta)$$

y

$$|f''(\xi_i) - y''_i| \leq w(f''; [0,1]; \delta).$$

Utilizando las últimas desigualdades tenemos que el valor absoluto del lado derecho de la ecuación (2.6.5) no es mayor que

$$\frac{1}{6}(h_i + h_{i+1})\, w(f''; [0,1]; 2\delta) + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})\, w(f''; [0,1]; \delta)$$
$$\leq \frac{2}{3}(h_i + h_{i+1})\, w(f''; [0,1]; \delta)$$

por el *Lema* A.2. Notemos que (2.6.4) y (2.6.6) también satisfacen esta desigualdad si convenimos que $h_0 = h_{n+1} = 0$.

Supongamos ahora que

$$|A_k| = \max_{i=0,\ldots,n} |A_i|$$

y consideremos la $k - \acute{e}sima$ ecuación de (2.6.5), entonces obtenemos

$$\left|\frac{1}{6}h_k A_{k-1} + \frac{1}{3}(h_k + h_{k+1})\, A_k + \frac{1}{6}h_{k+1}A_{k+1}\right| \leq \frac{2}{3}(h_k + h_{k+1})\, w(f''; [0,1]; \delta),$$

aplicando $||a| - |b|| \leq |a - b|$ a la desigualdad anterior

$$-\frac{1}{6}h_k\, |A_{k-1}| + \frac{1}{3}(h_k + h_{k+1})\, |A_k| - \frac{1}{6}h_{k+1}\, |A_{k+1}| \leq \frac{2}{3}(h_k + h_{k+1})\, w(f''; [0,1]; \delta).$$

De aquí se tiene

$$\frac{1}{3}(h_k + h_{k+1})\, |A_k| \leq \frac{2}{3}(h_k + h_{k+1})\, w(f''; [0,1]; \delta) + \frac{1}{6}h_k\, |A_{k-1}| + \frac{1}{6}h_{k+1}\, |A_{k+1}|\,;$$

luego

$$\frac{1}{3}(h_k + h_{k+1})\, |A_k| \leq \frac{2}{3}(h_k + h_{k+1})\, w(f''; [0,1]; \delta) + \frac{1}{6}(h_k + h_{k+1})\, |A_k|$$

o bien

$$\frac{1}{6}(h_k + h_{k+1})\, |A_k| \leq \frac{2}{3}(h_k + h_{k+1})\, w(f''; [0,1]; \delta)$$

de lo que concluimos que para $i = 1, ..., n-1$,

$$|M_i - y''_i| \leq |A_k| \leq 4w(f''; [0,1]; \delta).$$

Ahora, $s''(x)$ es lineal en cada $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$, por lo tanto en cada subintervalo se debe tener alguna de las siguientes desigualdades

$$M_i \leq s''(x) \leq M_{i+1}$$

o bien

$$M_{i+1} \leq s''(x) \leq M_i,$$

y esto implica que

$$M_i - y_i'' + y_i'' - f''(x) \leq s''(x) - f''(x) \leq M_{i+1} - y_{i+1}'' + y_{i+1}'' - f''(x)$$

o

$$M_{i+1} - y_{i+1}'' + y_{i+1}'' - f''(x) \leq s''(x) - f''(x) \leq M_i - y_i'' + y_i'' - f''(x),$$

de lo cual podemos concluir que

$$\begin{aligned} |s''(x) - f''(x)| &\leq 4w(f''; [0,1]; \delta) + w(f''; [0,1]; \delta) \\ &= 5w(f''; [0,1]; \delta), \end{aligned}$$

esto último para cada $x \in [0,1]$.

Finalmente, para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ se tiene que $y_i = s_i$ y $y_{i+1} = s_{i+1}$; por el Teorema de Rolle, *Teorema* A.3, existe $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$, $i = 0, ..., n-1$, que satisface $f'(\eta_i) - s'(\eta_i) = 0$, luego

$$\begin{aligned} |f'(x) - s'(x)| &= \left| \int_{\eta_i}^{x} [f''(t) - s''(t)]\, dt \right| \\ &\leq 5w(f''; [0,1]; \delta)\, |x - \eta_i| \\ &\leq 5w(f''; [0,1]; \delta)\delta, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &= \left| \int_{x_i}^{x} [f'(t) - s'(t)]\, dt \right| \\ &\leq 5w(f''; [0,1]; \delta)\delta^2. \end{aligned}$$

Este resultado es válido para $i = 0, ..., n-1$, por lo que el teorema queda demostrado ■

El Teorema 2.6.1 muestra que si $\delta(X_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, el spline interpolante a una función $f \in C^2[a,b]$ dada, así como su primera y segunda derivada, convergen uniformemente a f, f' y f'' respectivamente.

También podemos concluir del teorema que

$$\min_{s \in S(X_n)} \|f - s\| \leq 5\delta^2 w(f''; [0,1]; \delta).$$

2.7 Algoritmo

El algoritmo que nos va a permitir calcular el spline cúbico interpolante dada una partición $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, así como un conjunto $\{y_i : i = 0, ..., n\}$ que satisface que $s(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$, se resume en las secciones 2.2 y 2.3 de este capítulo y basicamente consiste en formar un sistema matricial tridiagonal y resolverlo.

Paso 1: Especificar las condiciones de interpolación, así como el tipo de condiciones finales que se va a imponer.

Paso 2: Calcular los coeficientes de cada sistema, especificamente los valores, λ_i, μ_i y d_i, según sea el caso.

Paso 3: Resolver el sistema lineal tridiagonal que corresponda al tipo de condición final.

Paso 4: Para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ calcular el valor de $s(x)$.

Para el paso 4 en algunas ocasiones es necesario tener una representación matricial para $s(x)$, pues esto simplifica su cálculo por computadora y una manera de lograrlo es considerar que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $s(x)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s(x) &= a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \\ &= [(x - x_{i-1})][A]_i, \end{aligned}$$

donde

$$[(x - x_{i-1})] = [(x - x_{i-1})^3, (x - x_{i-1})^2, (x - x_{i-1}), 1] \text{ y } [A]_i = [d_i, c_i, b_i, a_i]^T.$$

Ahora, si evaluamos s en x_{i-1} y x_i tenemos que

$$y_{i-1} = s(x_{i-1}) = a_i,$$

derivando dos veces $s(x)$ y evaluando en x_{i-1} obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} m_{i-1} &= s'(x_{i-1}) = b_i, \\ M_{i-1} &= s''(x_{i-1}) = 2c_i. \end{aligned}$$

Por último, para calcular el valor de d_i evaluamos s en x_i y sustituimos los valores de a_i, b_i y c_i para finalmente despejar

$$d_i = \frac{y_i}{h_i^3} - \frac{y_{i-1}}{h_i^3} - \frac{m_{i-1}}{h_i^2} - \frac{M_{i-1}}{2h_i}.$$

Es así que $s(x)$ se puede escribir en forma matricial como

$$s(x) = [(x - x_{i-1})] \begin{bmatrix} \frac{1}{h_i^3} & -\frac{1}{h_i^3} & -\frac{1}{h_i^2} & -\frac{1}{2h_i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ m_{i-1} \\ M_{i-1} \end{bmatrix}.$$

2.7.1 Pseudocódigo

Un Pseudocódigo que puede ser implementado en Matlab, Mathematica o C es el siguiente:

Entrada: Vectores $x = [x_0, ..., x_n]$, $y = [y_0, ..., y_n]$, donde $f(x_i) = y_i$
Salida: Gráfica de la función s o vector M

Paso 1: para $i = 0, ..., n$ tomar $h_i = x_{i+1} - x_i$

Paso 2: desde $i = 1, ..., n-1$ hacer
$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$
$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}$
$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$

Paso 3: sean $\mu_1 = \lambda_1 = 1$ y $d_1 = d_2$, $d_n = d_{n-1}$

Paso 4: $l_1 = 2$ y $u_1 = \frac{\lambda_1}{l_1}$

Paso 5: para $i = 1, ..., n-1$ sea
$l_i = 2 - \mu_i u_{i-1}$
$u_i = \frac{\lambda_1}{l_i}$

Paso 6: $l_n = 2 - \mu_n u_{n-1}$ y $z_1 = \frac{d_1}{l_1}$

Paso 7: para $i = 1, ..., n$
$z_i = \frac{d_i - \mu_i z_{i-1}}{l_i}$

Paso 8: $M_n = z_n$

Paso 9: desde $i = n-1, ..., 1$ hacer $M_i = z_i - u_i M_{i+1}$

Paso 10: imprimir el vector $M = (M_1, ..., M_n)$ ó gráficar

$$s(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6} \right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \right)(x - x_{i-1})$$

2.7.2 Diagrama de flujo

$itbpF177.0625pt491.3125pt0inFigure$

2.7.2. Diagrama de flujo para calcular splines cúbicos

2.8 Splines cúbicos paramétricos.

Cuando queremos aproximar una colección de puntos, con frecuencia estos estan dispuestos en el plano de tal manera que una abscisa puede tener más de una ordenada, como se ve en la *Figura* 2.8.1.

$itbpF218.5pt149.5625pt0inFigure$

Figura. 2.8.1. Datos en donde una misma abscisa tiene más de una ordenada

En este caso es claro que lo que hay que aproximar no es una función, ya que estas no pueden tomar valores diferentes en un mismo punto, es por eso que consideraremos que los puntos corresponden a una curva plana y por lo tanto correspondera aproximarlos por una curva.

Consideremos el conjunto de puntos en R^2, $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, ..., n\}$; supongamos que cada uno de estos puntos pasa por una curva que paramétricamente se describe por medio de dos funciones desconocidas:

$$\begin{aligned} x &= g(t), \\ y &= h(t), \qquad t \in [a, b], \end{aligned}$$

de tal manera que para $n + 1$ valores de t tales que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n, \tag{2.8.1}$$

se tenga

$$\begin{aligned} x_i &= g(t_i) \\ y_i &= h(t_i) \quad i = 0, 1, ..., n. \end{aligned}$$

Cuando logramos definir valores apropiados para t_i que cumplan la condición (2.8.1) podremos construir el spline cúbico, $s_1(t)$, que interpola las abscisas de la curva original, así como también el spline cúbico, $s_2(t)$, que interpola las ordenadas y_i.

Es así que las funciones $s_1(t)$ y $s_2(t)$ aproximan a las funciones $g(t)$ y $h(t)$ respectivamente, por lo tanto estas definen la curva que interpola los datos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$, y esta es la curva que se conoce como *spline cúbico paramétrico,* pues depende de la selección del parámetro t.

Para evitar rugosidades en el spline cúbico paramétrico es necesario hacer una buena seleción de la parametrización. Para este fin algo muy conveniente es elegir una parametrización que aproxime la longitud de arco, un ejemplo sería tomar

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_{i+1} &= t_i + d_i, \quad i = 0, 1, ..., n-1, \end{aligned}$$

donde d_i es una aproximación para la longitud de arco que va de (x_i, y_i) a (x_{i+1}, y_{i+1}). El cálculo de d_i puede hacerse de una de las siguientes maneras

$$\begin{aligned} d_i &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \\ d_i &= (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2, \\ d_i &= \left| x_{i+1} - x_i \right| + \left| y_{i+1} - y_i \right|, \\ d_i &= max(\left| x_{i+1} - x_i \right|, \left| y_{i+1} - y_i \right|). \end{aligned}$$

Cuando selecionamos algún método para calcular a t_i, entonces el problema se reduce solo a encontrar los splines cúbicos interpolantes $s_1(t)$ y $s_2(t)$ bajo alguna de las condiciones finales que ya se estudiaron.

Si existe algo que haga suponer al experto que la curva que describe al conjunto de puntos es una curva cerrada, entonces para que el spline paramétrico también sea una curva cerrada y además ésta sea suave, es suficiente resolver los sistemas de continuidad con la condición final periódica o de tercer tipo.

También es importante mencionar que si se tienen m ordenadas para una abscisa, entonces el spline paramétrico se calcula resolviendo m sistemas lineales, *Referencia* [2, pág. 105].

CAPÍTULO 3

Aproximación en 3D por splines bicúbicos

Como ya se ha mencionado, la interpolación por medio de splines es utilizada principalmente para el diseño por computadora de carrocerías para autos, órganos, caricaturas, etc. Hay modelos que para una mejor aplicación requieren de una representación tridimensional. Sin embargo, hasta ahora sólo hemos estudiado los splines cúbicos, una técnica de interpolación y aproximación en dos dimensiones; es así que una idea que surge de inmediato es tratar de extender este concepto al caso tridimensional.

Existen diferentes técnicas por medio de las cuales se puede hacer una interpolación por medio de splines en tres dimensiones, por ejemplo: Curvas de Bézier, B-Splines, *Referencia* [12, pág. 164], y splines bicúbicos, que son los que estudiaremos en este capítulo.

3.1 Definición

En el capítulo anterior estudiamos las funciones spline cúbicos o de una sola variable, vimos que dada una partición, $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, de un intervalo cerrado $[a, b]$, el conjunto de splines cúbicos con repecto a la partición Δ_x forman el espacio lineal $S(X_n)$ de dimensión $n + 3$.

Extendamos el concepto de splines de una variable al caso bivariable. Para esto consideremos la región rectangular

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

en el plano xy. Una partición Δ de R es la malla

$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y,$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \Delta_x & : & a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \qquad \text{y} \\ \Delta_y & : & c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d. \end{array}$$

La partición Δ divide a R en mn subrectángulos, *Figura* 3.1.1,

$$\begin{array}{rcl} R_{ij} & = & \{(x, y) \in R^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ i & = & 1, 2, ..., n \quad \text{y} \quad j = 1, 2, ..., m. \end{array}$$

Los puntos (x_i, y_j), $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., m$, que forman la malla son llamados nodos. Para $i = 1, ..., n-1$ y $j = 1, ..., m-1$, (x_i, y_j) son los nodos interiores de Δ.

Los puntos $(x_i, y_0), (x_i, y_m)$; $i = 1, ..., n-1$ y $(x_0, y_j), (x_n, y_j)$; $j = 1, ..., m-1$, son los nodos frontera.

Finalmente, los puntos (x_0, y_0), $(x_0, y_m), (x_n, y_0)$ y (x_n, y_m) son los nodos esquina.

$itbpF262.4375pt163.25pt0inFigure$

Figura 3.1.1 Partición Δ de la región rectangular R

Una vez dada la definición de partición de una región rectangular en R^2 estamos listos para definir la función spline bicúbico.

Definición 3.1.1. *Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ una región rectangular del plano xy. Sea $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ una partición de R con*

$$\begin{aligned} \Delta_x &: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad y \\ \Delta_y &: \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d. \end{aligned}$$

La función $s(x, y)$ es llamada spline bicúbico con respecto a la partición Δ de R si satisface las siguientes condiciones:

i) *$s(x, y)$ es un polinomio de grado a lo más 3 con respecto a las variables* x y y *en cada subrectángulo $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$, esto es:*

$$s(x, y) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} \alpha_{kl}^{ij} (x - x_{i-1})^k (y - y_{j-1})^l, con\ (x, y) \in R_{ij}. \tag{3.1.1}$$

ii) *$s(x, y) \in C_2^2(R)$, es decir:*

$$\frac{\partial^{(\alpha+\beta)} s(x, y)}{\partial^\alpha x \partial^\beta y}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2;$$

son continuas en la región R.

iii)Además, si para un conjunto de puntos $\{z_{ij} :\ i = 0, ..., n;\ \ j = 0, ..., m\}$ se tiene que

$$s(x_i, y_j) = z_{ij},\ i = 0, 1, 2, ..., n;\ \ j = 0, 1, 2, ..., m \tag{3.1.2}$$

entonces la función $s(x, y)$ es llamada spline bicúbico interpolante de los puntos (x_i, y_j, z_{ij}).

Dada esta definición, consideremos ahora el conjunto $S(x, y; \Delta)$ de todas las funciones spline bicúbico con respecto a la partición Δ de R. Es claro que $S(x, y; \Delta)$ es un espacio lineal; más aún, puesto que el spline bicúbico es el producto tensorial de dos splines cúbicos, es decir,

$$S(x, y; \Delta) = S(X_n) \times S(Y_m),$$

entonces $S(x, y; \Delta)$ es un espacio lineal de dimensión $(n+3)(m+3)$ y para obtener una base de este espacio es suficiente con tener bases para los espacios $S(X_n)$, $S(Y_m)$ y multiplicar entre sí a cada uno de sus elementos, por ejemplo, del capítulo anterior sabemos que existe una base $\{\phi_s\}_{s=0}^{n+2}$ para $S(X_n)$ llamada base cardinal la cual satisface lo siguiente

$$\begin{aligned}
\phi_s(x_i) &= \delta_{si}, \quad \phi_s'(x_0) = \phi_s'(x_n) = 0, \qquad i, s = 0, 1, ..., n; 3.1.3 \qquad (7)\\
\phi_{n+1}(x_i) &= \phi_{n+2}(x_0) = 0 \qquad\qquad\qquad i = 0, 1, ..., n;\\
\phi_{n+1}'(x_0) &= \phi_{n+2}'(x_n) = 1,\\
\phi_{n+1}'(x_n) &= \phi_{n+2}'(x_0) = 0,
\end{aligned}$$

De la misma manera existe una base cardinal $\{\varphi_t\}_{t=0}^{m+2}$ para $S(Y_m)$ con

$$\begin{aligned}
\varphi_t(y_j) &= \delta_{tj}, \quad \varphi_t'(y_0) = \varphi_t'(y_n) = 0, \qquad j, t = 0, 1, ..., m; 3.1.4 \qquad (8)\\
\varphi_{m+1}(y_j) &= \varphi_{m+2}(y_j) = 0 \qquad\qquad\qquad j = 0, 1, ..., m;\\
\varphi_{m+1}'(y_0) &= \varphi_{m+2}'(y_m) = 1,\\
\varphi_{m+1}'(y_m) &= \varphi_{m+2}'(y_0) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo que la base para $S(x, y; \Delta)$ es entonces

$$\{\phi_s \varphi_t : s = 0, 1, ..., n+2; \ t = 0, 1, ..., m+2\}.$$

A los elementos de ésta se les conoce con el nombre de *splines bicúbicos cardinales*. Es así que cualquier elemento de $S(x, y; \Delta)$ tiene la siguiente representación cardinal

$$s(x, y) = \sum_{s=0}^{n+2} \sum_{t=0}^{m+2} a_{st} \phi_s(x) \varphi_t(y), \qquad (x, y) \in R. \tag{3.1.5}$$

De esto último podemos ver que la función spline bicúbico interpolante está determinada por los coeficientes a_{st}, $s = 0, 1, ..., n+2$; $t = 0, 1, ..., m+2$.

3.2 Tipos de condiciones frontera

Puesto que existen $(n+1)(m+1)$ datos de interpolación entonces aún se tienen $(n+3)(m+3) - (n+1)(m+1) = 2(m+n+4)$ grados de libertad que se pueden especificar imponiendo condiciones en los nodos frontera y esquina de R, por esta razón éstas condiciones reciben el nombre de *condiciones frontera.* A continuación mencionaremos las tres condiciones frontera más usadas.

a) Condiciones frontera de primer tipo.

i) Derivadas parciales de primer orden en los nodos frontera de R:

$$\begin{aligned} p_{\alpha j} &= s'_x(x_\alpha, y_j), \qquad j = 0, 1, ..., m, \quad \alpha = 0, n; 3.2.1 \\ q_{i\beta} &= s'_y(x_i, y_\beta), \qquad i = 0, 1, ..., n, \quad \beta = 0, m. \end{aligned} \tag{9}$$

ii) Derivadas parciales cruzadas de segundo orden en los nodos esquina:

$$s_{\alpha\beta} = s''_{xy}(x_\alpha, y_\beta), \qquad \alpha = 0, n, \ \beta = 0, m. \tag{3.2.2}$$

b) Condiciones frontera de segundo tipo.

i) Derivadas parciales de segundo orden en los nodos frontera de R:

$$\begin{aligned} p_{\alpha j} &= s''_{xx}(x_\alpha, y_j), \qquad j = 0, 1, ..., m, \quad \alpha = 0, n; \\ q_{i\beta} &= s''_{yy}(x_i, y_\beta), \qquad i = 0, 1, ..., n, \quad \beta = 0, m. \end{aligned}$$

ii) Derivadas parciales cruzadas de cuarto orden en los nodos esquina:

$$s_{\alpha\beta} = s^{(4)}_{x^2y^2}(x_\alpha, y_\beta), \qquad \alpha = 0, n, \ \beta = 0, m.$$

c) Condiciones frontera de tercer tipo.

Estas también se conocen con el nombre de condiciones periódicas, *Referencia* [11, pág. 53], y estas son:

$$\begin{aligned} s(x_0, y_j) &= s(x_n, y_j) & j &= 0, 1, ..., m; \\ s(x_i, y_0) &= s(x_i, y_m) & i &= 0, 1, ..., n; \\ s^{(\alpha)}_{x^\alpha}(x_0, y_j) &= s^{(\alpha)}_{x^\alpha}(x_n, y_j) & j &= 0, 1, ..., m; \ \alpha = 1, 2; \\ s^{(\beta)}_{x^\beta}(x_i, y_0) &= s^{(\beta)}_{x^\beta}(x_i, y_m) & i &= 0, 1, ..., n; \ \beta = 1, 2; \\ s^{(2k)}_{x^ky^k}(x_0, y_j) &= s^{(2k)}_{x^ky^k}(x_n, y_j) & j &= 0, 1, ..., m; \ k = 1, 2; \\ s^{(2k)}_{x^ky^k}(x_i, y_0) &= s^{(2k)}_{x^ky^k}(x_i, y_m) & i &= 0, 1, ..., n; \ k = 1, 2; \end{aligned}$$

Cada uno de los tipos de condiciones frontera tiene exactamente $2(n+m+4)$ restricciones, las cuales permitirán definir de manera única la función spline bicúbico interpolante, como lo veremos acontinuación.

3.3 Teorema de existencia y unicidad

Para la demostración del siguiente teorema así como para la construcción del algoritmo para calcular $s(x,y)$, se tomarán las condiciones frontera de primer tipo, ya que como se verá en la demostración, para los otros tipos de condiciones se puede aplicar una técnica similar, debido a que utilizaremos la teoría de splines cúbicos vista en el capítulo anterior.

Teorema 3.3.1 *Sea Δ una partición de la región rectangular R en el plano xy. Dados $(n+3)(m+3)$ escalares arbitrarios*

$$z_{ij},\ p_{\alpha j},\ q_{i\beta},\ s_{\alpha\beta}, \qquad i=0,1,...,n;\ j=0,1,...,m;\ \alpha=0,n;\ \beta=0,m,$$

existe una única función spline bicúbico interpolante, s(x,y), que satisface las condiciones de interpolación (3.1.2) así como las condiciones de frontera (3.2.1) y (3.2.2).

Demostración. Toda función spline bicúbico interpolante *s(x,y)* respecto a la partición Δ puede ser expresado de la forma (3.1.5):

$$s(x,y)=\sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\phi_s(x)\varphi_t(y),$$

donde $\{\phi_s\}_{s=0}^{n+2}$ y $\{\varphi_t\}_{t=0}^{m+2}$ son bases cardinales para $S(X_n)$ y $S(Y_m)$ respectivamente y ambas satisfacen (3.1.3) y (3.1.4).

Ahora bien, si obtemos las primeras derivadas parciales de *s(x,y)*, así como la segunda derivada cruzada tenemos que

$$s'_x(x,y)=\sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\phi'_s(x)\varphi_t(y),$$

$$s'_y(x,y)=\sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\phi_s(x)\varphi'_t(y),$$

$$s''_{xy}(x,y)=\sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\phi'_s(x)\varphi'_t(y).$$

Por la condición de interpolación se tiene que

$$\begin{aligned} z_{ij} &= s(x_i,y_j)\\ &= \sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\phi_s(x_i)\varphi_t(y_j)\\ &= \sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\delta_{si}\delta_{tj}=a_{ij}, \qquad i=0,1,...,n;\ j=0,1,...,m. \end{aligned}$$

Por las condiciones a la frontera debemos tener

$$\begin{aligned}
p_{\alpha j} &= s'_x(x_\alpha, y_j) \\
&= \sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2} a_{st}\phi'_s(x_\alpha)\varphi_t(y_j) \\
&= \sum_{s=n+1}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2} a_{st}\phi'_s(x_\alpha)\varphi_t(y_j) \\
&= \begin{cases} a_{n+1,j} & \alpha = 0;\quad j = 0,1,...,m, \\ a_{n+2,j} & \alpha = n;\quad j = 0,1,...,m. \end{cases}
\end{aligned}$$

De manera análoga

$$q_{i\beta} = \begin{cases} a_{i,m+1} & \beta = 0;\quad i = 0,1,...,n, \\ a_{i,m+2} & \beta = m;\; i = 0,1,...,n. \end{cases}$$

Por último

$$\begin{aligned}
s_{\alpha\beta} &= s''_{xy}(x_\alpha, y_\beta) \\
&= \sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2} a_{st}\phi'_s(x_\alpha)\varphi'_t(y_\beta) \\
&= \begin{cases} a_{n+1,m+1}, & \alpha = 0,\ \beta = 0, \\ a_{n+1,m+2}, & \alpha = 0,\ \beta = m, \\ a_{n+2,m+1}, & \alpha = n,\ \beta = 0, \\ a_{n+2,m+2}, & \alpha = n,\ \beta = m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es así que cada uno de los coeficientes a_{st}, $s = 0, 1, ..., n+2$; $t = 0, 1, ..., m+2$, queda perfectamente determinado por los valores z_{ij}, $p_{\alpha j}$, $q_{i\beta}$, $s_{\alpha\beta}$, que han sido dados. Claramente $s(x, y) \in C^2_2(R)$ pues cada spline cúbico cardinal es de clase C^2 ■

Si aplicamos este teorema a cada subrectángulo R_{ij}, dando los valores de la función $s(x, y)$ en cada uno de los extremos de R_{ij}, así como los valores de las primeras derivadas en cada dirección y las derivadas parciales cruzadas, lo cual da un total de 16 datos que colocaremos en la siguiente matriz

$$[C]_{ij} = \begin{bmatrix} z_{i-1,j-1} & z_{i-1,j} & q_{i-1,j-1} & q_{i-1,j} \\ z_{i,j-1} & z_{i,j} & q_{i,j-1} & q_{i,j} \\ p_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} & s_{i-1,j-1} & s_{i-1,j} \\ p_{i,j-1} & p_{i,j} & s_{i,j-1} & s_{i,j} \end{bmatrix}. \tag{3.3.1}$$

Esta matriz determina de manera única el spline bicúbico interpolante $s(x, y)$ sobre R_{ij}.

Ahora, por definición tenemos que en cada R_{ij}, $i = 0, ..., n$, $j = 0, ..., m$,

$$s(x,y) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} \alpha_{kl}^{ij}(x - x_{i-1})^k (y - y_{j-1})^l,$$

por lo que al obtener las derivadas parciales respecto a x y y así como la segunda derivada cruzada y evaluar en cada uno de los nodos esquina de R_{ij}, tal como lo hicimos en la sección 2.7 del capítulo anterior, tenemos que:

$$s(x,y) = [(x - x_{i-1})][A(h_i)][C]_{ij}[(y - y_{j-1})]^T [A(g_j)]^T, \quad (x,y) \in R_{ij}, \quad (3.3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} [(x - x_{i-1})] &= [(x - x_{i-1})^3, \ (x - x_{i-1})^2, \ (x - x_{i-1}), \ 1], \\ [(y - y_{i-1})] &= [(y - y_{i-1})^3, \ (y - y_{i-1})^2, \ (y - y_{i-1}), \ 1], \end{aligned}$$

$$[A(h_i)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{h_i^3} & -\frac{2}{h_i^3} & \frac{1}{h_i^2} & \frac{1}{h_i^2} \\ -\frac{3}{h_i^2} & \frac{3}{h_i^2} & -\frac{2}{h_i} & -\frac{1}{h_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [A(g_i)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{g_i^3} & -\frac{2}{g_i^3} & \frac{1}{g_i^2} & \frac{1}{g_i^2} \\ -\frac{3}{g_i^2} & \frac{3}{g_i^2} & -\frac{2}{g_i} & -\frac{1}{g_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3.3)$$

con

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad g_i = y_i - y_{i-1}.$$

Escribir $s(x,y)$ como en (3.3.2) nos permitirá obtener computacionalmente el valor numérico de s en cualquier punto de R, aunque primero debemos diseñar un algoritmo que nos lo permita hacer.

Una pregunta que surge naturalmente después de haber probado la existencia y unicidad del spline bicúbico interpolante, $s(x,y)$, es ¿qué tan buena es esta aproximación a la función original $f(x,y)$?. Existen resultados que garantizan la convergencia de $s(x,y)$ a $f(x,y)$ cuando la partición Δ es más fina, por ejemplo tenemos que si $f(x,y) \in C_2^2(R)$, entonces

$$\|f - s\| = O(h^{3/2} + g^{3/2}),$$

en donde

$$h = \max_{i=0,\dots,n} h_i, \qquad g = \max_{i=0,\dots,m} g_i.$$

Probar este resultado no es tarea fácil, de hecho si recordamos la demostración del teorema de convergencia de los splines cúbicos, fué una demostración constructiva. Sin embargo revisando bibliografía, encontramos un resultado más general que este teorema, *Referencia* [5], el cual nos muestra que un estudio más profundo de los splines pero requiere de una teoría matemática mucho más elevada, que involucra aparte de producto tensorial conceptos como módulos de suavidad y K-funcionales.

Para tener una idea de la complejidad que involucra este resultado enunciaremos este teorema pero omitiremos su demostración.

Antes, consideremos el espacio de Lebesge

$$L_p(H) = \left\{ f : f \text{ es medible sobre } H \text{ y } \|f\|_p < \infty \right\},$$

donde $H =_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$, para $a_i, b_i \in R$, $i = 1, ..., d$.

$S(x, y; \Delta)$ es el producto tensorial de los espacios vectoriales $S(X_n)$ y $S(Y_m)$. Generalizemos esta idea tomando d espacios vectoriales $S(X_{i,k_i})$, $i = 1, ..., d$, es decir sea

$$S(x_1, ..., x_d; \Delta) = \bigotimes_{i=1}^{d} S(X_{i,k_i});$$

donde

$$\Delta = \bigotimes_{i=1}^{d} \Delta_i, \qquad \Delta_i : a_i = x_{i,0} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i.$$

Teorema 3.3.2. *Dado $1 \leq p \leq \infty$, existe una constante C tal que para toda $f \in L_p(H)$*

$$\|f - s\| \leq C w_m(f, \delta)_p;$$

donde

$$m \in N^d, \ \Delta_i^+ = \max_{0 \leq j \leq k_i} \{x_{i,j+1} - x_{i,j}\}, \quad \delta = (\Delta_1^+, ..., \Delta_d^+)$$

y $w_m(f, \delta)_p$ es el módulo de suavidad de orden m de la función f en la norma L_p, Referencia [5, pág. 516].

3.4 Cálculo de la función spline bicúbico interpolante

La función spline bicúbico está perfectamente determinada por los valores de la matriz $[C]_{ij}$. Los cuatro elementos de la parte superior derecha de dicha matriz son ya conocidos pues se obtienen directamente de la condición de interpolación, así que nos concentraremos en el cálculo de los doce elementos restantes, los cuales provienen de las condiciones de frontera (3.2.1) y (3.2.2).

Veamos que si fijamos el valor $y = y_j$, entonces $s(x, y_j) \in S(X_n)$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} s_j'(x_i) &= s_x'(x_i, y_j) \\ &= p_{ij}. \end{aligned}$$

De la teoría vista en el capítulo anterior tenemos que los $p'_{ij}s$ satisfacen las siguientes condiciones de $m - continuidad$ para $i = 1, 2, ..., n-1$,

$$\lambda_i p_{i-1,j} + 2p_{ij} + \mu_i p_{i+1,j} = 3\left(\lambda_i \frac{z_{ij} - z_{i-1,j}}{h_i} + \mu_i \frac{z_{i+1,j} - z_{ij}}{h_{i+1}}\right), \qquad (3.4.1)$$

donde

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}.$$

Las condiciones finales p_{oj} y p_{nj} para (3.4.1) se obtienen de (3.2.1). Por lo tanto el valor de p_{ij}, $i = 0, 1, ..., n$ y $j = 0, 1, ..., m$, puede conocerse perfectamente resolviendo este sistema de ecuaciones.

De forma muy similar tenemos que $s(x_i, y) \in S(Y_m)$ para un valor fijo x_i. Las ecuaciones de $m - continuidad$ correspondientes son, para $j = 1, ..., m-1$

$$\lambda_j^* q_{i,j-1} + 2q_{i,j}^* + \mu_j^* q_{i,j+1} = 3\left(\lambda_j^* \frac{z_{ij} - z_{i,j-1}}{g_j} + \mu_j^* \frac{z_{i,j+1} - z_{ij}}{g_{j+1}}\right), \qquad (3.4.2)$$

donde

$$\mu_j^* = \frac{g_j}{g_j + g_{j+1}}, \quad \lambda_j^* = \frac{g_{j+1}}{g_j + g_{j+1}}.$$

El valor impuesto a las condiciones finales q_{i0} y q_{im} esta dado por (3.2.1), por lo que podemos obtener el valor de q_{ij}, $i = 0, 1, ..., n$ y $j = 0, 1, ..., m$. Por lo tanto el valor de la primera derivada parcial de $s(x, y)$ con respecto a y en (x_i, y_j) es conocido.

Solo nos resta calcular los valores s_{ij}, para esto recordemos primero que $s_{ij} = s''_{xy}(x_i, y_j)$ y notemos que $s'_x(x_i, y) \in S(Y_m)$. Ahora bien, $s'_x(x_i, y_j) = p_{ij}$, por lo tanto en este caso también se satisfacen las siguientes condiciones de continuidad:

$$\lambda_j^* s_{i,j-1} + 2s_{ij}^* + \mu_j^* s_{i,j+1} = 3\left(\lambda_j^* \frac{p_{ij} - p_{i,j-1}}{g_j} + \mu_j^* \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{g_{j+1}}\right), \qquad (3.4.3)$$

para $j = 1, ..., m-1$. Si tuvieramos las condiciones finales s_{i0} y s_{im} para este sistema de ecuaciones entonces nos sería posible calcular a los s_{ij}.

Aún cuando no contamos directamente con estos datos podemos obtenerlos si consideramos lo siguiente: para los valores específicos $y = y_0$ y $y = y_m$, $s'_y(x, y_0)$ y $s'_y(x, y_m) \in S(X_n)$. Los valores de estas funciones en x_i son $s'_y(x_i, y_0) = q_{i0}$ y $s'_y(x_i, y_m) = q_{im}$, respectivamente; valores que se obtienen de (3.2.1). Entonces podemos establecer el siguiente sistema

$$\lambda_i s_{i-1,\beta} + 2s_{i\beta} + \mu_i s_{i+1,\beta} = 3\left(\lambda_i \frac{q_{i\beta} - q_{i-1,\beta}}{h_i} + \mu_i \frac{q_{i+1,\beta} - q_{i\beta}}{h_{i+1}}\right), \qquad (3.4.4)$$

con $i = 1, 2, ..., n-1$ y $\beta = 0, m$. Las condiciones finales para este sistema son $s_{\alpha\beta}$ con $\alpha = 0, n$ valores que se pueden obtener de (3.2.2). Con esto podemos conocer s_{i0} y s_{im} para $i = 0, 1, ..., n$ y determinar los s_{ij} restantes por medio de (3.4.3).

Por lo que la matriz $[C]_{ij}$ es ahora totalmente conocida. Es así que lo antes realizado nos provee de un algoritmo para calcular el spline bicúbico interpolante.

3.4.1 Algoritmo

El algoritmo para calcular computacionalmente el spline bicúbico interpolante, $s(x, y)$, sujeto a las condiciones (3.1.2), (3.2.1) y (3.2.2) se reduce básicamente a resolver los $2n + m + 5$ sistemas antes descritos, esto es:

Paso 1: Especificar las condiciones de interpolación (3.1.2), así como las condiciones de frontera (3.2.1) y (3.2.2).

Paso 2: Calcular los coeficientes de cada sistema, especificamente los valores, λ_i, μ_i, $(i = 1, ..., n-1)$ y λ_j^*, μ_j^* $(j = 1, ..., m-1)$.

Paso 3: Resolver en el siguiente orden los sistemas lineales tridiagonales (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4) y (3.4.3), para determinar los valores de p_{ij}, q_{ij} y s_{ij}.

Paso 4: Para cada i y j calcular $s(x, y)$ en cada subintervalo R_{ij}.

3.4.2 Pseudocódigo

El siguiente pseudocódigo puede ser implementado en lenguajes como C, C++, Matlab o Mathematica.

Entrada: Vectores $x = [x_0, ..., x_n]$ y $y = [y_0, ..., y_m]$
matriz z de tamaño $n \times m$, donde $f(x_i, y_j) = z_{ij}$
Condiciones a la frontera $p_0' = [p_{00}', ..., p_{0m}']$, $p_n' = [p_{n0}', ..., p_{nm}']$
$q_0' = [q_{00}', ..., q_{n0}']$, $q_m' = [q_{0m}', ..., q_{nm}']$, s_{00}', s_{n0}', s_{0m} y s_{nm}'
Salida: Gráfica de la función $s(x, y)$ o matrices p, q y s.

Paso 1: para $j = 0, ..., m$ sea $p^j = Spline(x, z^j, p_{0j}, p_{nj})$

Paso 2: desde $i = 0, ..., n$ tomar $q_i = Spline(y, z_i, q_{i0}, q_{in})$

Paso 3: $s^0 = Spline(x, q^0, s_{00}, s_{n0})$

Paso 4: $s^m = Spline(x, q^m, s_{0m}, s_{nm})$

Paso 5: para $i = 0, ..., n$ hacer $s_i = Spline(y, p_i, s_{i0}, s_{im})$

Paso 6: para $i = 1, ..., n$ sea $h_i = x_i - x_{i-1}$

Paso 7: para $j = 1, ..., m$ definir $g_j = y_j - y_{j-1}$

Paso 8: desde $i = 1, ..., n$; para $j = 1, ..., m$ formar las matrices de (3.3.1) y (3.3.3).

Paso 9: calcular $s(x, y)$ utilizando la forma (3.3.2).

La función $Spline(a, b, c, d)$ devuelve el vector que representa el spline cúbico que interpola al vector b en la partición a, con condiciones finales c y d.

3.4.3 Diagrama de flujo

$itbpF187.8125pt490pt0inFigure$

2.7.2. Diagrama de flujo para calcular splines bicúbicos

CAPÍTULO 4

Aplicación de los splines cúbicos

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es mostrar que un resultado de la matemática pueden ser utilizado para resolver problemas que surgen en la ciencia y tecnología. En esta sección se presenta una aplicación de los splines cúbicos en el área de pruebas de superfices ópticas.

4.1 Aplicación de los splines cúbicos.

En el área de prueba de superficies ópticas, se utiliza el fenómeno de la inferencia para comparar dos superficies, donde una de ellas es conocida (superficie de referencia) y la otra es la que se desea conocer. Para caracterizar a la superficie bajo prueba (conocer los parámetros de forma) se realiza lo siguiente:

1.- Elegir e implementar un arreglo interferométrico.
2.- Obtener y capturar el patrón de inferencia.
3.- Procesar y analizar el interferograma.

La elección e implementación del arreglo interferométrico, depende directamente del tipo de superficie a evaluar, tamaño, forma y material; así como el equipo con el que se cuente y el trabajo que implique realizar para conocer la superficie.

La obtención y la captura del patrón de inferencia suele realizarse con una cámara fotográfica, una cámara de CCD, o colocando una pantalla de papel y dibujando los patrones, lo cual suele introducir errores en las mediciones.

El procesado y análisis del interferograma consiste en conocer la forma, la separación y posición de las franjas de interferencia. En muchas ocaciones esta es una labor difícil de realizar debido a que el patrón no tiene el contraste apropiado, los contornos de las franjas no estan bien definidos y el interferograma contiene ruido.

Por todo esto, es necesario realizar un procesado a la imagen que permita suavizar y definir los contornos de las franjas, mejorar el contraste, eliminar el ruido introducido y conocer la separación de las franjas.

Para medir la separación de las franjas de interferencia, se implementó un algoritmo de computo, el cual, a partir de una línea de un patrón digitalizado, elige una línea de barrido que pase por el centro del patrón, en la cual se realizará la lectura de intensidades de cada uno de los pixeles según su posición. Esto permite conocer el ancho y la separación de las franjas en esta línea de barrido.

$itbpF155.6875pt148.875pt0inFigure$

Figura 4.1.1. Patrón de inferencia capturado

Para ilustrar este proceso presentamos un interferograma de una superficie bajo prueba, *Figura* 4.1.1, en el que se debe medir la separación de las franjas respecto al centro del patrón. Los problemas que se presentan al realizar esta tarea es ubicar el centro del patrón de interferencia y ubicar los bordes de las franjas, esto debido a la forma irregular que presentan las franjas. Para resolver estos problemas, primero se digitaliza el patrón de interferncia con una cámara de CCD de 512×486 pixeles.

Dspués se busca conocer la posición del centro del patrón de interferencia y se realizan lecturas de intensidades en direcciones vertical y horizontal pasando por este punto, para definir el tamaño de la franja central y la posible ubicación del centro del patrón de interferencia (ubicar las coordenadas del pixel central). En este proceso se buscaron los pixeles que formaban parte de la franja central, delimitándolos en una región rectangular; el pixel central queda definido como el centro geométrico del rectángulo.

Una vez conocida la ubicación del centro y de la franja central se toma una línea de barrido horizontal que pasa por este punto y se mide la intensidad de cada uno de los pixeles de acuerdo con su posición, *Figura* 4.1.2. Como se puede ver, los bordes de las franjas no están bien delimitados, es decir, el nivel de gris varia de pixel a pixel, lo que dificulta definir donde termina una franja y donde comienza la otra.

$itbpF199.5625pt139.75pt0inFigure$

Figura 4.1.2. Distribución de intensidades para Y=243

Consideremos la línea de barrido Y=243. Una de las maneras para encontrar las distancias entre los centros de las franjas es observar la distribución de intensidades de la imagen original, *Figura* 4.1.2. Al tomar los puntos más bajos y hacer un acercamiento a cada uno de ellos, se puede ir conociendo el ancho de cada franja, incluyendo la franja central, restando el dato mayor de pixeles al menor y el resultado dividirlo entre 2, así encontramos el centro de la franja principal. Los centros de las otras franjas se encuentra de la misma manera como se encontró el de la franja central. Una vez obtenidos todos los centros de las franjas se puede obtener la separación de las franjas (en ordenes de pixeles) con respecto al centro del patrón. La Tabla 4.1.1 muestra los resultados obtenidos utilizando este procedimiento manual.

$itbpF271.4375pt132.1875pt0inFigure$

Tabla 4.1.1. Valores de la imagen original

Este método resulta poco viable porque además de ser manual es muy tedioso, por tales razones se propusieron métodos automatizados para obtener los mismos resultados como la binarización y binarización por histograma.

4.1.1 Método de binarización.

En este método, se elige un valor de umbral (nivel de gris) con ayuda de la *Figura* 4.1.2. Este permite establecer qué pixeles pertenecen o no a cada franja de interferencia, esto se logra cuando pixeles con intensidad mayor al umbral son enviados al nivel de gris máximo y pixeles con intensidades menores al umbral son enviados al nivel de gris mínimo. Es así que al elegir un valor de umbral el patrón de interferencia se convertirá en un patrón de franjas brillantes y oscuras, *Figura* 4.1.3 a).

$itbpF344.9375pt146.625pt0inFigure$

Figura 4.1.3 a) Patrón de inferencia binario

Figura 4.1.3 b) Distribución de intensidades binaria

Cuando se mide nuevamente la distribución de intensidades de los pixeles en la misma línea de barrido del patrón de interferencia binario, se obtiene la *Figura* 4.1.3 b), que es en donde finalmente se mide la separación de franjas obteniendose los siguientes valores.

$itbpF271.4375pt132.1875pt0inFigure$

Tabla 4.1.2. Valores de la imagen binarizada

4.1.2 Método de binarización por histograma.

A diferencia del método anterior en este el valor del umbral es determinado por el sistema y lo hace escogiendo el tono de gris que más ocurrencias tiene en la imagen, en este caso fué el tono 23 con 4170 repeticiones. Finalmente se aplica el proceso anterior, es decir se binariza con este valor de umbral, con lo que se obtiene el patrón y la distribución de intensidades de la *Figura* 4.1.4 a) y b), respectivamente.

$itbpF344.125pt151.875pt0inFigure$

Figura 4.1.4 a) Patrón de inferencia binarizado por histograma

Figura 4.1.4 b) Distribución de intensidades binarizado por histograma

Con este método la separación de las tres primeras franjas con respecto al centro del patrón se muestran en la Tabla 4.1.3.

$itbpF270.6875pt139.75pt0inFigure$

Tabla 4.1.3. Valores de la imagen binarizada por histograma

4.1.3 Método por splines cúbicos.

En esta tesis se propone aplicar splines cúbicos a este problema, como posible solución, ya que lo que tenemos es una serie de datos, *(pixel, intensidad).* Estos finalmente se desean aproximar por medio de una función continua con la cual sea posible determinar claramente cada franja de la imagen, por esta razón es necesario introducir un parámetro, a, que nos indique que datos del renglón Y van a ser interpolados por un spline cúbico, esto es, los datos a interpolar son (x_1, y_1), $(x_{a+1}, y_{a+1}), (x_{2a+1}, y_{2a+1}), ...$, donde x_i indica el pixel y y_i la intensidad de dicho pixel. Utilizando este método se obtiene la siguiente distribución de intensidades, *Figura* 4.1.4.

$itbpF320.6875pt135.5625pt0inFigure$

Figura 4.1.4. Distribución de intensidades con splines cúbicos

La *Figura* 4.1.4 muestra claramente que la pérdida de información es muy poca, el error con respecto a los datos originales es de 25.56 medido con norma uniforme. La ubicación de los mínimos originales no sufren cambios considerables por lo que cabe esperar que los resultados sean buenos. Los resultados que se obtuvieron con $a = 6$ se muestran en la Tabla 4.1.4.

$itbpF269.1875pt134.5pt0inFigure$

Tabla 4.1.4. Valores de la imagen obtenida por splines cúbicos

Cuando se suavizan los datos de esta manera; se prosigue a buscar intervalos candidatos a contener los puntos de intensidad mínima, es decir, los extremos de nuestras franjas. Finalmente, al eliminar la posibidad de encontrar más de un punto con esta cualidad, debido a la interpolación con splines cúbicos que se hizo, se sabe con certeza que el punto que se encuentre en cada intervalo es único, por lo que solo resta tomar dos de estos puntos consecutivos y hacer algunas cuentas para encontrar la ubicación del centro de cada franja así como el ancho de la misma, como en el procedimiento manual.

Finalmente comparamos los resultados que se obtuvieron con cada uno de los tres métodos presentados y calculamos las direncias que cada uno presentó con respecto a los datos reales del problema, mismos que se exhiben en la Tabla 4.1.5.

$itbpF313.875pt157.125pt0inFigure$

Tabla 4.1.5. Diferencias con respecto a los datos reales

Como se puede observar en la tabla anterior el método de splines cúbicos para resolver este problema fué el que obtuvo mejores resultados.

Conclusiones

Los splines cúbicos y bicúbicos son métodos de aproximación e interpolación que fueron desarrollados principalmente para hacer diseños por computadora. La herramienta matemática con la que contamos ha mostrado que estos pueden ser aplicados de manera confiable debido a las propiedades que presentan y que fueron exhibidas en este trabajo.

Con este trabajo de tesis damos una introducción a la teoría los splines, la cual es muy basta y requiere para su estudio de conocimientos más fuertes de matemáticas. El desarrollo de esta línea de investigación promete ser todavía muy largo, aún quedan cosas por descubrir y proponer. Por otro lado, gran parte de la teoría que existe acerca de estas funciones aún no es muy conocida, debido a que es un área relativamente nueva, pues como lo hemos mencionado antes se inicio a mediados del siglo pasado.

La importancia de los splines radica en el buen comportamiento que estos presentan y en que las propiedades de los splines cúbicos y bicúbicos se pueden extender a las funciones splines en general, haciendo consideraciones pertinentes según sea cada caso. De hecho si se desea hacer una aplicación en el diseño por computadora de carrocería de autos, geología o medicina, por mencionar algunas, se necesita adentrar más en esta teoría y estudiar curvas de Bézier, *Referencia* [12, pág. 158], que son las más utilizados en estas áreas.

En este trabajo se presentan los splines cúbicos y bicúbicos vistos desde la Teoría de Aproximación. Se presentan como operadores de aproximación, cualidad que permite aplicarles teoremas existentes dentro de esta área y que fueron enunciados y demostrados con detalle, dentro del primer capítulo.

La existencia y unicidad de los splines cúbicos y bicúbicos se muestra utilizando otras herramientas de la matemática. La prueba es muy constructiva y se desprende básicamente de la definición de estas funciones. Esto resulta ser muy conveniente porque nos permite conocer como se construyen estos splines. Cabe mencionar que pese a que todos los resultados aquí presentados se pueden encontrar en libros, sus demostraciones, en ocasiones son muy compactas, por lo en esta tesis se hizo una explicación más amplia de ellas.

En este trabajo mostramos una aplicación de las funciones splines cúbicos en el área de prueba de superficies ópticas. Por las característica del problema, que para su solución requería basicamente de un suavizamiento de datos que además redujera la pérdida de información, fué ideal para aplicar la teoría de los splines a él para su solución.

Los splines son ideales para aplicarlos en problemas en donde lo que se requiere es un diseño por computadora de ciertas figuras o modelos. También pueden ser aplicados en problemas en donde se requiera un suavizamiento de datos y en donde la expresión matemática que lo realize no sea requerida; pues por la manera de definir a los splines cúbicos y bicúbicos esta puede resultar poco práctica. Quizás esto último sea la mayor desventaja que presente sobre otros métodos de aproximación, pues limita su campo de aplicabilidad a problemas como los antes descritos. Sin embargo, dentro del área de diseño por computadora, difícilmente se puede encontrar otro método con cualidades tan buenas como la de los splines; una de ellas, es que los algoritmos para construirlos se basan en la solución de sistemas lineales, lo cual permite implementarlos en muchos lenguajes de programación tanto de alto como bajo nivel.

Referencias

Apéndice A

Definición A.1. *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante si*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

para cada $i = 1, ..., n$.

Teorema A.1. *Toda matriz A diagonalmente dominante es no singular.*

Demostración. Consideremos el sistema lineal $Ax = 0$ y supongamos que este tiene una solución $x = (x_1, ..., x_n)^T$ diferente de cero. Sea k tal que

$$|x_k| = \underset{1 \leq i \leq n}{max} |x_i|,$$

claramente $|x_k| > 0$.

Dado que $Ax = 0$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

en particular para $i = k$

$$a_{kk} x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j,$$

de aquí que

$$|a_{kk}| |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| |x_j|,$$

luego

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}| |x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|.$$

Lo cual contradice el hecho de que A es una matriz diagonalmente dominante, por lo que la única solución al sistema $Ax = 0$ es la solución trivial, y esta es una condición necesaria y suficiente para la no singularidad de A ■

Teorema A.2. *Si $f \in C[a,b]$ y $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, el polinomio único de menor grado que concuerda con f y f' en $x_0, ..., x_n$ es el polinomio de Hermite de grado a lo más $2n+1$ que está dado por*

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n.j}(x),$$

donde

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L^2_{n,j}(x_j),$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x_j)$$

y

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Demostración. Ver *Referencia* [13] ■

Teorema A.3. (Teorema de Rolle). *Si f es continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre (a,b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.*

Demostración. Puesto que f es continua sobre $[a,b]$ entonces f alcanza su valor máximo y mínimo en $[a,b]$. Si el máximo o mínimo de f se alcanzan en (a,b) entonces terminamos pues $f'(x) = 0$ cuando x es mínimo o máximo.

Supongamos ahora que tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en los extremos, entonces puesto que $f(a) = f(b)$ estos deben ser iguales lo que implica que f es constante, por lo que $f'(x) = 0$ para cualquier valor de x que se tome en (a,b) ■

Definición A.2. *Sea f una función definida sobre $[a,b]$, el módulo de continuidad de $f(x)$ sobre $[a,b]$, $w(\delta)$, para $\delta > 0$, es definido por*

$$w(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in [a,b], \ \ |x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

El módulo de continuidad depende de δ, la función f y el intervalo $[a,b]$, es decir $w(\delta) = w(f; [a,b]; \delta)$.

Lema A.1. *Si $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$, entonces $w(\delta_1) \leq w(\delta_2)$.*

Demostración. Se desprende del hecho que si $A \subseteq B$ entonces $supA \leq supB$ ■

Lema A.2. *Si* $\lambda > 0$ *entonces* $w(\lambda\delta) \leq (1+\lambda)w(\delta)$.

Demostración. Sea n un entero tal que $n \leq \lambda < n+1$, por el lema anterior $w(\lambda\delta) \leq w((n+1)\delta)$. Supongamos ahora que $|x_1 - x_2| \leq (n+1)\delta$ y que $x_1 < x_2$. Dividamos el intervalo $[x_1, x_2]$ en $n+1$ partes iguales, cada una con longitud $(x_2 - x_1)/(n+1)$, los nodos de esta partición son los puntos

$$z_j = x_1 + j(x_2 - x_1)/(n+1), \quad j = 0, 1, ..., n+1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \sum_{j=0}^{n} [f(z_{j+1}) - f(z_j)] \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} |f(z_{j+1}) - f(z_j)| \\ &\leq (n+1)w(\delta). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $w((n+1)\,\delta) \leq (n+1)w(\delta)$, pero $n+1 \leq \lambda+1$, entonces $(n+1)w(\delta) \leq (\lambda+1)w(\delta)$, es así que $w(\lambda\delta) \leq (1+\lambda)w(\delta)$ ■

Nota: En particular, de la demostración de este lema concluimos que si $k \in Z^+$ entonces $w(k\delta) \leq kw(\delta)$.

Apéndice B

En esta sección mostramos algunas pruebas que se hicieron con los algoritmos *Spline2D* y *Spline3D* implementados en Matlab, para calcular splines cúbicos y bicúbicos respectivamente.

Ejemplo 1. En primer lugar mostramos la aproximación de la función seno dando la partición $\Delta_x = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi, 7\pi/2, 4\pi]$ y los respectivos valores de la función seno en ella, que son $y = [0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1]$, con esto se obtiene la siguiente figura:

$$itbpF353.1875pt100.375pt0inFigure$$

La gráfica de esta función que proporciona Matlab, utilizando la instrucción *plot(x,y)*, con x la partición que divide a $[0, \pi/4]$ en 126 subintervalos de ancho 0.1 y y el valor de cada nodo en la función *sin* de Matlab.

$$itbpF359.25pt98.875pt0inFigure$$

El error entre una y otra medido con norma uniforme es de 0.0657. Por lo que podemos decir que con 9 valores de la función $senx$ pudimos encontrar una buena aproximación de dicha función.

Si corremos *Spline2D* con la misma partición pero ahora utilizando la función $sen2x$ obtenemos lo siguiente

$$itbpF309.25pt123.0625pt0inFigure$$

La gráfica muestra que se hizo una muy mala aproximación de esta función, de hecho si medimos el error que existe a la aproximación hecha por Matlab, bajo la instrucción *plot*, como en lo hicimos con la función $senx$, obtenemos que es de 0.9996, que es muy grande si recordamos que la función $sen(tx)$ toma valores entre 0 y 1, para cualquier valor de $t \in R$.

Esto no quiere decir que la teoría de los splines cúbicos falle en este caso, más bien nos indica que la partición elegida no es la conveniente y que debemos de dar otra en donde se manden a interpolar puntos caracteristicos de la función, como pueden ser máximos, mínimos, ceros, puntos de inflexión, etc. Para este caso elegimos la partición que divide a $[0, 4\pi]$ en subintervalos de ancho $\pi/4$, así obtenemos la gráfica

$$itbpF314.625pt124.5625pt0inFigure$$

cuya diferencia con respecto a la aproximación hecha por Matlab es de 0.0323.

En general para la función $sen(2^n x)$, una partición conveniente para interpolar y obtener buenos resultados, es aquella que divide al intervalo en subintervalos de ancho $\pi/2^{n+1}$.

Ejemplo 2. Ahora mostraremos como funciona el programa *SplineParamet* implementado en Matlab, para calcular splines cúbicos paramétricos, para esto hacemos uso de la curva

$$\varrho^2 = a^2 cos\ 2\theta$$

conocida como *lemniscata de Bernoulli* con $a^2 = 2$ y utilizando la siguiente parametrización $x = \varrho cos\theta$ y $y = \varrho sen\theta$; de donde obtenemos los puntos

$$x = [\sqrt{2}, \sqrt{3/2}, 0, -\sqrt{3/2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3/2}, 0, \sqrt{3/2}, \sqrt{2}]$$

y

$$y = [0, 1/2, 0, -1/2, 0, 1/2, 0, -1/2, 0],$$

para $\theta = [0, 30, 45, 210, 180, 150, 135, 330, 0]$.

El resultado de correr *SplineParamet* utilizando los datos anteriores es:

$$itbpF327.5pt162.5pt0inFigure$$

La diferencia con respecto al resultado por Matlab utilizando la función *polar* y utilizando una partición con ancho 0.1, es de 0.0532.

Como se puede ver a aproximación hecha por los splines cúbicos paramétricos es bastante buena.

Ejemplo 3. En el siguiente ejemplo se implemento un programa, *Perico,* que hace una combinación de los algoritmos que calculan splines cúbicos y paramétricos para hacer un dibujo por computadora, primero mostramos el dibujo original.

En la siguiente figura se muestran los puntos que se introdujeron al programa para recuperar la imagen del perico. Cabe mencionar que para hacerlo se hizo uso de 21 splines entre paramétricos y cúbicos.

El resultado final que arroja el programa *Perico* es la siguiente figura.

Ejemplo 4. *Spline3D* es un programa implementado en Matlab para calcular splines bicúbicos. A continuación mostramos una ejecución del programa con los siguientes datos

$$\begin{aligned}\Delta_x &= [-10, -5, 0, 5, 10];\\ \Delta_y &= [-20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20];\\ f(x, y) &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

El resultado final es la siguiente gráfica

La diferencia que existe entre el resultado arrojado por *Spline3D* y la gráfica proporcionada por Matlab utilizando las instrucciones *meshgrid* y *mesh* con una partición uniforme de $0.2x0.3$ es de 0.0633.