Universidad Tecnológica de la Mixteca

"Algoritmo de Espacio Nulo Para Programación Cuadrática."

TESIS

Que para obtener el título de:

INGENIERO EN COMPUTACIÓN

Presenta:

Carlos Avendaño Pérez

Asesor:

M.C. Marcela Rivera Martínez

Huajuapan de León, Oax. Mayo del 2001

"He tenido éxito en la vida.

Ahora, intento hacer de mi vida un éxito".

Brigitte Bardot

DEDICATORIA

Dedico esta tesis con todo mi cariño a mis padres:

Mamá, Papá, gracias por todo su cariño, amor y compresión, por sus sabios consejos que han sabido llevarme por el buen camino de la vida, por su apoyo que en todo momento me brindaron, y por darme la más valiosa de las herencias, mi carrera profesional.

AGRADECIMIENTOS

A mis compañeros Sayde, Roberto, Erik e Ivor.
Por la amistad y apoyo que me brindaron durante el transcurso de la carrera profesional.

M.C. Marcela Rivera Martínez.
Por aceptar ser me asesora de tesis, por su apoyo, paciencia y orientación durante el desarrollo de la misma.

M.C. Luis Rene Marcial Castillo.
Por su valiosa contribución y apoyo en la realización de esta tesis.

A mis sinodales: M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín, M.C. Cuauhtémoc H. Castañeda Roldán, M.C. Graciela Castro González, M.C. Luis Rene Marcial Castillo, M.C. Marcela Rivera Martínez.

A la Sociedad Matemática Mexicana.
Por el apoyo brindado para que este trabajo se expusiera en la XI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico.

Pero por sobre todo, a Dios.
Por permitirme alcanzar una meta más en mi vida.

Contenido.

Capítulo 1

Introducción

La **optimización de una función objetivo** $f(x)$ con respecto a un vector x de dimensión n, en un espacio R^n, se considera como la búsqueda de la mejor solución (solución óptima) que satisface a dicha función, bien sea en un entorno local o en un entorno global. El término mejor, significa (en este caso) **minimización** de la función objetivo. Los procedimientos para la optimización son muy diversos y dependen de las condiciones en que se plantee el problema. Así pues, se puede distinguir entre las siguientes situaciones:

El presente trabajo se enfoca a la optimización de **funciones no lineales** con restricciones lineales de desigualdad, es decir:

$$\begin{aligned} \min.\ f(x)\ ,x &\in R^n \\ s.a. \quad Ax &\geq b. \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde:

$f(x)$, es la función objetivo no lineal.

A, denota la matriz de restricciones lineales de desigualdad.

Dado que la función objetivo es no lineal, la expresión (1.1) se conoce como un problema de **programación no lineal** con restricciones.

La **programación cuadrática** es una rama de la programación no lineal. La progamación cuadrática pasó de ser un tema relativamente nuevo y principalmente analítico a ser un importante instrumento de carácter general para la resolución de problemas. Entre las principales áreas donde la programación cuadrática tiene gran importancia se cuentan las siguientes: finanzas, impuestos, modelos de equilibrio y redes eléctricas [1]. La programación cuadrática trata con una clase especial de problemas matemáticos, en la cual una función cuadrática requiere ser optimizada[1], sujeta a restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad.

En este trabajo de tesis se describe e instrumenta un algoritmo para resover **problemas cuadráticos estrictamente convexos sujeto a restricciones lineales de desigualdad**, es decir:

$$\begin{aligned} \min.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ s.a. \quad Ax &\geq b, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde:

$f(x)$, es una función cuadrática estrictamente convexa.
$Q \in R^{n\times n}$, es la matriz hessiana.
$A \in R^{m\times n}$, es la matriz de restricciones.
$c \in R^n$, representa el vector de costos.
$b \in R^m$, representa el vector de términos independientes.

La dificultad de resolver problemas de programación cuadrática depende en gran parte de la naturaleza de la matriz Hessiana Q, para este caso se asume que Q es **definida positiva** (d.p.), por lo que $f(x)$ es estrictamente convexa.

[1] A partir de este momento, el término optimización de una función se refiere a minimizar dicha función.

Existen diferentes métodos para resolver problemas cuadráticos, entre ellos se tiene el método de Frank-Wolfe[2], el método de gradiente reducido, el **método de conjunto activo**, el método de punto interior y el método para programas cuadráticos no convexos, por mencionar algunos.

La mayor parte de los métodos que resuelven problemas cuadráticos, proponen obtener condiciones necesarias y suficientes que se satisfacen con un punto solución; esto incluye el estudio principalmente de la teoría de Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker (KKT), las cuales caracterizan las propiedades de un óptimo de un problema de programación no lineal. El algoritmo que se instrumenta en este trabajo está basado en la estrategia de conjunto activo donde se utiliza el **espacio nulo para la solución del sistema KKT**.

El **método de conjunto activo,** es un método iterativo, este método en cada iteración encuentra una dirección de búsqueda con la cual se calcula un nuevo punto. Esto puede conducir a que el conjunto activo sea modificado eliminando o agregando restricciones al mismo; en este caso sólo se eliminará o agregará una restricción al conjunto activo. El proceso se repite hasta que se satisfagan determinadas condiciones de paro; para este problema las condiciones de paro son las condiciones de KKT.

El **algoritmo de espacio nulo** propuesto en este trabajo para resolver (1.2) , calcula una matriz $Z \in R^{nx(n-m)}$ tal que Z contiene el espacio nulo de A. El algoritmo de espacio nulo calcula una dirección de búsqueda, cuyo movimiento sobre esa dirección hará que se encuentre la solución óptima del problema. Además, el algoritmo de espacio nulo calcula los multiplicadores de Lagrange asociados a cada una de las restricciones que se encuentran en el conjunto activo, estos multiplicadores servirán para comprobar si se cumple con la factibilidad dual del problema.

[2] M. Frank y P. Wolfe (1956). "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Research Logistics Quarterly, 3, 95-110.

Este trabajo se divide en 6 capítulos, en el Capítulo 2 se introducen los conceptos básicos necesarios para comprender los capítulos subsecuentes y se describe lo que es la programación cuadrática.

En el Capítulo 3, se presentan los métodos y algoritmos instrumentados para resolver el problema cuadrático.

En el Capítulo 4, se muestran las pruebas realizadas con el sistema implementado **NSAQP** (Null Space Algorithm for Quadratic Programming), y se presentan los resultados obtenidos. Para realizar estas pruebas se utilizó el generador de problemas prueba para programación cuadrática [2].

En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones de este trabajo.

El Capítulo 6, es un manual de usuario del programa **NSAQP**, en el cual se explica su funcionamiento y su utilización.

En el apéndice A, se especifican las características que debe tener el archivo de entrada, este archivo contiene los datos del problema a resolver.

El apéndice B, muestra el archivo de salida, este archivo contiene los resultados del problema resuelto.

En el apéndice C, se ilustra gráficamente el proceso que se desarrolla para poder encontrar la solución óptima de un problema dado.

Por último, se muestra la bibliografía utilizada para la realización de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Generalidades.

En este capítulo se introducen los conceptos básicos de **optimización no lineal**. Se discuten los elementos del análisis convexo el cual es muy importante en el estudio de problemas de optimización, se presentan los fundamentos de **conjunto convexo y funciones convexas**. Así mismo se describen las **condiciones de primer y segundo orden**, finalmente se presenta lo que es la **programación cuadrática**.

Definiciones básicas

Definición 1. (Segmento de línea cerrada).

Sean los vectores $x_1, x_2 \in R^n$, el segmento de línea cerrada a través de x_1 y x_2 está definida como el conjunto:

$$\{x \mid x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Definición 2. (Conjunto convexo).

Son conjuntos convexos aquellos que tienen la propiedad de que al unir con un segmento de línea cerrada dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de un conjunto S, el segmento queda completamente contenido en el propio conjunto. Este concepto se denota como:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 &\in S \; y \; 0 \leq \lambda \leq 1 \\ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 &\in S. \end{aligned}$$

Definición 3. (Función convexa).

Sea S un conjunto convexo de R^n, y $f(x)$ una función de valores reales definida en S. Se dice que la función $f(x)$ es convexa si para cualesquiera x_1 y $x_2 \in S$, y $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que:

$$f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Definición 4. (Función estrictamente convexa).

Sea S un subconjunto convexo de R^n, y $f(x)$ una función de valores reales definida en S. Se dice que la función $f(x)$ es estrictamente convexa si para cualesquiera x_1,$x_2 \in S$, y $0 < \lambda < 1$, se tiene que:

$$f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Definición 5. (Vector gradiente).

El vector gradiente es un vector cuya i-ésima componente es la derivada parcial de $f(x)$ con respecto a x_i, es decir:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right],$$

el vector gradiente tiene dos propiedades muy importantes, que a continuación se mencionan:

Propiedad 1:- El vector gradiente en cada punto indica la dirección de crecimiento de la función $f(x)$.

Propiedad 2:- El vector gradiente en cada punto es ortogonal a las curvas de nivel[3].

[3] Las curvas de nivel de la función $f(x) : R^2 \to R$, se obtienen al cortar la superfice mediante planos horizontales a distinta alturas.

Definición 6. (Matriz hessiana).

La matriz hessiana de $f(x)$ es la matriz de nxn cuya componente i,j es:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j},$$

es decir, la derivada parcial de segundo orden de $f(x)$. Si la matriz hessiana es definida positiva[4] para cualquier x, entonces $f(x)$ es estrictamente convexa.

Definición 7. (Soluciones óptimas).

Punto óptimo: Si $f(x)$ es estrictamente convexa, x^* es el óptimo de $f(x)$ si en ese punto el problema alcanza el mínimo. Por el teorema de unicidad de solución para problemas estrictamente convexos, el punto x^* es único y es ese punto la matriz hessiana de $f(x)$ es definida positiva.

Valor óptimo: Es el valor que tiene la función objetivo en el punto óptimo.

Definición 8. (Mínimo local).

x^* es un mínimo local de $f(x)$ si para todos los puntos x suficientemente cercanos a x^*, el valor de $f(x)$ es más pequeño que en cualquier otro punto. Matemáticamente, supóngase que $x^* \in S$ y que existe una $\varepsilon > 0$ tal que:

$$f(x) \geq f(x^*) \ \forall x \in S : \| x - x^* \| < \varepsilon.$$

entonces x^* es un mínimo local.

[4] Una matriz cuadrada simétrica A es definida positiva si y solo si sus valores propios son todos estrictamente positivos.

Definición 9. (Mínimo local estricto).

x^* es un mínimo local estricto de $f(x)$ si para todos los puntos x suficientemente cercanos a x^*, el valor de $f(x)$ es estrictamente más pequeño que en cualquier otro punto, es decir:

$$f(x) > f(x^*) \ \forall x \in S : \| x - x^* \| < \varepsilon.$$

Definición 10. (Mínimo global).

x^* es un mínimo global de $f(x)$ si para todo el dominio de definición de $f(x)$, el valor de $f(x)$ es más pequeño que en cualquier otro punto. Matemáticamente, supóngase que $x^* \in S$ y

$$f(x) \geq f(x^*) \ \forall x \in S,$$

entonces x^* es un mínimo global.

Definición 11. (Mínimo global estricto).

x^* es un mínimo global estricto de $f(x)$ si para todo el dominio de definición de $f(x)$, el valor de $f(x)$ es estrictamente más pequeño que en cualquier otro punto, es decir:

$$f(x) > f(x^*) \ \forall x \in S.$$

Definición 12. (Punto factible, espacio factible).

Un punto $x \in X$ que satisface las restricciones de desigualdad se conoce como punto factible. Así, el conjunto de todos los puntos factibles de $f(x)$ define un espacio factible, esto se denota como:

$$F = \{ x \in X \subseteq R^n : Ax \geq b \}.$$

Definición 13. (Restricciones activas e inactivas).

Una restricción de desigualdad $a_i^T x$ es llamada activa en un punto factible $\bar{x} \in X$ si $a_i^T \bar{x} = b$. Una restricción de desigualdad $a_i^T x$ es llamada inactiva en el punto factible $\bar{x} \in X$ si $a_i^T \bar{x} > b$.

Condiciones necesarias y suficientes para la minimización.

La mayoría de los métodos que resuelven problemas cuadráticos, proponen obtener condiciones necesarias y suficientes que se deben satisfacer en un punto solución; esto incluye el estudio principalmente de la teoría de Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker [3], que caracterizan las propiedades de un óptimo de un problema de programación no lineal. A continuación se explican estas condiciones para las restricciones de desigualdad.

Se considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ s.a. \quad Ax &\geq b. \end{aligned} \tag{2.1}$$

inicialmente, se toman las restricciones de desigualdad que al evaluarlas en el punto inicial se satisfagan como igualdad, este conjunto de restricciones se denominan restricciones activas. El problema ahora se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \min.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ s.a. \quad \hat{A}x &= b \quad \text{restricciones activas,} \\ Ax &\geq b \quad \text{restricciones inactivas.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Las restricciones activas en un punto factible x restringen el dominio de factibilidad en las proximidades de x, mientras que las otras restricciones, las inactivas, no ejercen influencia en las proximidades de x. Por tanto, al analizar las propiedades de un mínimo local, se puede centrar la atención en las restricciones activas.

Definición 14.- (Punto regular)

Sea x^* un punto que satisface las restricciones,

$$\begin{aligned} \hat{A}x^* &= b \\ Ax^* &\geq b. \end{aligned} \tag{2.3}$$

y sea J el conjunto de índices j para el cual $a_j^T x^* = b$. Entonces, se dice que x^* es un punto regular de las restricciones (2.3) si los vectores gradientes

$$\nabla \hat{a}_i^T x^*, \nabla a_j^T x^*, \ 1 \leq i \leq m, \ j \in J,$$

son linealmente independientes.

Condiciones de primer orden

Ahora se mostrarán las condiciones necesarias de primer orden para que un punto sea un mínimo local. Estas condiciones se llaman condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Condiciones de KKT.

Sea x^* un punto regular y un mínimo local para el problema (2.2), entonces existe un $\lambda^* \in R^m$ y $\mu^* \in R^m$ tal que:

$$\nabla f(x^*) + \lambda^{*T} \nabla \hat{A}x^* + \mu^{*T} \nabla Ax^* = 0 \tag{2.4}$$

$$\mu^{*T}(Ax^* - b) = 0 \tag{2.5}$$

$$\mu^* \geq 0 \tag{2.6}$$

donde λ^* se refiere a el vector de los multiplicadores de Lagrange, y μ^* como el vector de los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Demostración [4]: Dado que $\mu^* \geq 0$ y $Ax^* - b \geq 0$, se observa que (2.5) es equivalente a la formulación de que una componente de μ^* puede ser distinta de cero sólo si la restricción correspondiente es activa.

Como x^* es un punto mínimo en el conjunto de restriciones, también es un mínimo en el subconjunto de ese conjunto definido igualando las restricciones activas a cero. Así, para el problema resultante con restricciones de igualdad, definido en un entorno de x^*, hay multiplicadores de Lagrange. Por tanto se concluye que (2.4) se cumple con $\mu_j^* = 0$ si $a_j^T x^* - b \neq 0$ y por tanto, también se cumple (2.5).

Falta mostrar que $\mu^* \geq 0$. Supóngase que $\mu_k^* < 0$ para algún $k \in J$. Sean S y M la superfice y el plano tangente, respectivamente definido por las restantes restricciones activas en x^*. Especificamente

$$\begin{aligned} S &= \{x : \hat{a}_i^T x > b, \, a_j^T x = b, j \in J, i \neq j\} \\ M &= \{y : (\nabla \hat{a}_i^T x^*) y = 0, (\nabla a_j^T x^*) y = 0, j \in J, i \neq j\}. \end{aligned}$$

Por la regularidad de x^*, hay una y tal que $y \in M$ y $(\nabla a_k^T x^*) y < 0$. Sea $x(t)$ una curva en S que pasa por x^* (en $t = 0$) con $x(0) = y$, entonces para $t \geq 0$ pequeña, $x(t)$ es factible y,

$$\frac{df}{dt}(x(t))]_{t=0} = \nabla f(x^*) y < 0$$

por (2.4), lo cual contradice la minimalidad de x^*. □

Condiciones de segundo orden

Un punto factible que satisface las condiciones de KKT es únicamente un candidato para ser un mínimo. Sin embargo, no garantiza que el punto sea de hecho un mínimo, puesto que las condiciones de KKT son en general únicamente necesarias. Las condiciones necesarias y suficientes de segundo orden para que un punto sea un mínimo se dan a continuación.

Condiciones necesarias de segundo orden.

Supóngase que f, $\hat{A}x$ y $Ax \in C^2$ y que x^* es un punto regular de las restricciones (2.3). Si x^* es un mínimo local para el problema (2.2), entonces existe $\lambda^* \in R^m$, $\mu^* \in R^m$, $\mu^* \geq 0$ tales que se cumplen (2.4) y (2.5), y tales que,

$$L(x^*) = f(x^*) + \lambda^{*T}\hat{A}x^* + \mu^{*T}Ax^*,$$

es semidefinida positiva en el subespacio tangente de las restricciones activas en x^*.

Demostración [4]: Si x^* es un mínimo local en las restricciones (2.3), también es un mínimo local para el problema con las restricciones activas tomadas como restricciones de igualdad. □

Se puede formular una inversa del teorema de la condición necesaria de segundo orden para obtener un teorema de la condición suficiente de segundo orden. Se puede esperar que la hipótesis requerida sea que $L(x^*)$ sea definida positiva en el plano tangente M. De hecho, esto es suficiente en la mayoría de las situaciones. Sin embargo, si hay restricciones de desigualdad degeneradas(esto es, restricciones de desigualdad activas que tengan cero como multiplicador de Lagrange asociado), se debe exigir que $L(x^*)$ sea definida positiva en un subespacio mayor que M.

Condiciones suficientes de segundo orden.

Sean f. $\hat{A}x$ y $Ax \in C^2$. Las condiciones suficientes para que un punto x^* que satisfaga (2.3) sea un punto mínimo estricto del problema (2.2), es que existan $\lambda^* \in R^m$ y $\mu^* \in R^m$, tal que:

$$\begin{aligned} \mu^* &\geq 0. \\ \mu^{*T}(Ax^* - b) &= 0. \\ \nabla f(x^*) + \lambda^{*T}\nabla\hat{A}x^* + \mu^{*T}\nabla Ax^* &= 0, \end{aligned}$$

y la matriz hessiana de lagragiano

$$L(x^*) = f(x^*) + \lambda^{*T}\hat{A}x^* + \mu^{*T}Ax^*,$$

sea definida positiva en el subespacio

$$M' = \{y : (\nabla\hat{a}_i^T x^*)y = 0, (\nabla a_j^T x^*)y = 0 \text{ para toda j} \in \text{J}\},$$

donde

$$J = \{j : a_j^T x^* = b, \ \ \mu_j^* > 0\}.$$

Demostración [4]: Supóngase que x^* no es un mínimo local estricto; sea $\{y_k\}$ una sucesión de puntos factibles que converge a x^* tal que $f(y_k) \leq f(x^*)$, y escríbase cada y_k en la forma $y_k = x^* + \delta_k s_k$ con $| s_k | = 1$, $\delta_k > 0$. Se puede suponer que $\delta_k \to 0$ y $s_k \to s^*$. Se tiene $0 \geq \nabla f(x^*)s^*$, y para cada $i = 1, \dots, m$. resulta:

$$(\nabla\hat{a}_i^T x^*)s^* = 0.$$

además, para cada restricción activa a_j^T se tiene $a_j^T(y_k) - a_j^T(x^*) \leq 0$. y por tanto,

$$(\nabla a_j^T x^*)s^* \leq 0.$$

si $\nabla(a_j^T x^*)s^* = 0 \ \forall \ j \in J$, entonces por el teorema de Taylor, para cada j se tiene

$$0 \ = \ a_j^T(y_k) = a_j^T x^* + \delta_k \nabla a_j^T x^* s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T \nabla^2 a_j^T(\eta_j) s_k \qquad (2.7)$$

$$y \qquad 0 \ \geq \ f(y_k) - f(x^*) = \delta_k \nabla f(x^*) s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T \nabla^2 a_j^T(\eta_o) s_k. \qquad (2.8)$$

donde cada η_j es un punto en el segmento de recta que une x^* e y_k. Al multiplicar (2.7) por μ_i^* y sumar esto a (2.8), y teniendo en cuenta que,

$$\nabla f(x^*) + \mu^{*T} \nabla A x^* = 0,$$

se obtiene,

$$0 \geq \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T \left\{ \nabla^2 f(\eta_o) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla^2 a_i^T(\eta_i) \right\} s_k,$$

lo cual produce una contradicción cuando $k \to \infty$.

Si $\nabla(a_j^T x^*)s^* < 0$ para al menos una $j \in J$, entonces,

$$0 \geq \nabla f(x^*) s^* = -\lambda^{*T}(\nabla \hat{A} x^*) s^* - \mu^{*T}(\nabla A x^*) s^* > 0,$$

lo cual es una contradicción. □

Se observa, que si todas las restricciones de desigualdad tienen multiplicadores de Lagrange correspondientes estrictamente positivos, entonces el conjunto J incluye todas las desigualdades activas. En este caso, la condición suficiente es que el lagragiano sea definido positivo en M, es decir, en el plano tangente de las restricciones activas.

Programación cuadrática.

La programación cuadrática trata con problemas cuadráticos en los cuales una función cuadrática de las variables de decisión requiere ser optimizada, sujeta a restricciones lineales de desigualdad.

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, el vector columna de variables de decisión. Una función cuadrática de las variables de decisión x es una función de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x.$$

Una función cuadrática es la función más simple de funciones no lineales. La matriz cuadrada Q de orden n, es definida positiva si $x^T Qx > 0$ para toda $x \in R^n$ diferente de cero. Este concepto teórico es muy importante en el estudio de problemas cuadráticos porque la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ es una función estrictamente convexa en R^n, si la matriz Q es definida positiva.

Los problemas cuadráticos pueden ser clasificados como problemas de minimización sin restricciones, problemas de minimización con restricciones de igualdad, problemas de minimización con restricciones de desigualdad, problemas cuadráticos de optimización de redes, problemas cuadráticos convexos, problemas cuadráticos no convexos, entre otros.

Existen diversos métodos que resuelven problemas de programación cuadrática, entre los principales se tienen a: el método de Frank-Wolfe, métodos de gradiente reducido, métodos de punto interior y métodos de conjunto activo[5], este último es uno de los más populares; en el capítulo siguiente se explicará con más detalle en qué consiste.

Capítulo 3

Métodos y algoritmos.

En el presente capítulo se describe la importancia de los métodos primales, se presenta el método de conjunto activo y el método de espacio nulo para la optimización de funciones objetivo cuadráticas sujetas a restricciones lineales de desigualdad. Además se detallan los algoritmos propuestos de cada uno de estos métodos.

La forma general de nuestro problema se puede plantear de la forma siguiente:

$$\begin{array}{llcl} \text{min.} & f(x),\ x & \in & R^n \\ s.a. & Ax & \geq & b, \end{array} \tag{3.1}$$

donde x es un vector columna de orden n, donde n representa el número de variables del problema; A es una matriz (mxn) que representa los coeficientes de las variables en el conjunto de las restricciones, por tanto se considera un conjunto de m restricciones; por último, b es el vector columna de orden m que recoge los llamados coeficientes del lado derecho de las restricciones.

Métodos primales

Los métodos primales buscan directamente la solución óptima dentro de la región factible [4]. Cada punto encontrado durante el proceso de búsqueda es factible, además el valor de la función objetivo decrece constantemente.

Las principales ventajas de los métodos primales son:

1.- Cada punto generado en el proceso de búsqueda es factible.

2.- La convergencia global de estos métodos suele ser satisfactoria.

Entre las principales desventajas de estos métodos se tienen:

1.- Requieren de un proceso externo para obtener un punto inical factible.
2.- Presentan graves dificultades computacionales originadas por la necesidad de permanecer dentro de la región factible según progresa el método.

Los métodos primales, dada sus tasas de convergencia se encuentran entre los mejores para resolver problemas de programación no lineal con restricciones lineales, y su aplicabilidad general y sencillez, sitúa a estos métodos en una posición de gran importancia entre los algoritmos de programación no lineal.

Método de conjunto activo

El método de conjunto activo divide las restriciones de desigualdad en restricciones activas y restricciones inactivas. Las restricciones tratadas como inactivas son temporalmente ignoradas.

Dado el problema (3.1) se plantean las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) para que un x^* determinado sea considerado como un óptimo. Las condiciones necesarias para este problema son:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \lambda^{*T} \nabla A x^* &= 0, \\ A x^* &\geq b, \\ \lambda^{*T}(A x^* - b) &= 0, \\ \lambda^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones se pueden expresar de forma más sencilla en función del conjunto de restricciones activas. Sea I el conjunto de índices para las restricciones activas. Las condiciones necesarias pueden expresarse ahora como:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^*)+\sum_{i\in I}\lambda_i^*\nabla a_i^T x^* &= 0, \\
a_i^T x^* &= b, i \in I \\
a_i^T x^* &> b, i \notin I \\
\lambda_i^* &\geq 0, i \in I \\
\lambda_i^* &= 0, i \notin I.
\end{aligned}$$

Esto es, las restricciones que son activas en x^*, tienen un multiplicador de Lagrange asociado que es mayor o igual a cero, mientras que las restricciones que no son activas en x^*, tienen un multplicador de Lagrange asociado igual a cero. Por tanto, la clave a la hora de considerar la optimalidad de la solución propuesta (x^*) viene dada por los valores de los multiplicadores de Lagrange asociados (λ^*); si existiera algún valor menor que cero, esto supondría que existiría una posible dirección de búsqueda descendente, y que por lo tanto x^* no sería un óptimo.

La idea básica del método del conjunto activo es la siguiente: si se conociera el conjunto de restricciones activas, la solución del problema sería la de un problema de optimización con restricciones de igualdad [5], por lo que se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned}
\min.\quad f(x),\ x &\in R^n \\
s.a. \quad \hat{A}x &= \hat{b}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Como se desconocen las restricciones activas, se elige un grupo de las restricciones del problema y se trabaja con ellas, estas restricciones se denominan conjunto de trabajo. Dado que la elección del conjunto de trabajo podría ser mala, el método de conjunto activo necesita incluir procedimientos para probar si la actual elección es correcta y modificar el conjunto de trabajo sí no lo es [6]. Una característica fundamental del método de conjunto activo considerada aquí, es que todas las iteraciones son factibles. El conjunto de trabajo incluye sólo la restricciones que se satisfacen en el punto actual, esto no obliga a que todas las restricciones que se satisfacen estén necesariamente contenidas en el conjunto de trabajo.

Método de espacio nulo.

Se tiene el problema de programación cuadrática con sólo restricciones de desigualdad,

$$\begin{aligned} \min.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ s.a. \quad Ax &\geq b. \end{aligned} \tag{3.3}$$

El método de espacio nulo para resolver (3.3), determina $\hat{A}_k$ como el conjunto de trabajo en la iteración x_k, y calcula Z_k la cual denota una base para el espacio nulo de $\hat{A}_k$.

Calcular una base para el espacio nulo.

Existen varias formas de calcular una base para el espacio nulo de una matriz [7], entre ellas se tiene a:

Factorización QR. Este tipo de factorización hace ceros los elementos abajo de la diagonal principal, por columnas, de la forma siguiente:

$$\hat{A} = Q\begin{bmatrix} R \\ \hline O \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

donde:

Q, es una matriz ortogonal de nxn.
R, es una matriz triangular superior de orden mxm.
O, es una matriz nula de orden $(n-m)xm$.

Se divide Q en dos submatrices Q_1 y Q_2, donde Q_1 es de orden nxm y representa el espacio de las columnas de $\hat{A}$, y Q_2 es de orden $nx(n-m)$ y forma el espacio nulo de las columnas de $\hat{A}$. Por tanto Z puede ser tomada como Q_2, es decir:

$$Z = Q_2.$$

Factorización LQ. En esta factorización se tiene una matriz ortonormal Q de orden nxn tal que:

$$\hat{A}Q = (L \quad O). \tag{3.5}$$

donde:

L, es una matriz triangular inferior no singular de orden mxm.

Como se puede observar de (3.5), las últimas $n - m$ columnas de Q pueden ser tomadas como las columnas de Z.

Dividir la matriz de restricciones. Otra forma surge al dividir la matriz de restricciones $\hat{A}$ como:

$$\hat{A} = (V \quad U).$$

donde:

V, es una matriz no singular de orden mxm.
U, es cualquier matriz de orden $(n - m)$xm.

Si el rango de $\hat{A}$ es igual a m, entonces Z se puede calcular de la forma siguiente:

$$Z = \begin{pmatrix} -V^{-1}U \\ I \end{pmatrix}.$$

El sistema **NSAQP** ocupa esta última técnica, pues es la que tiene implementada MATLAB, software que se ocupó para desarrollar el sistema.

Cálculo de la dirección de búsqueda.

Para proceder al cálculo de la dirección de búsqueda, es necesario obtener un vector p_z que será de orden $(n - t_k)$, donde n es el número de variables del problema y t_k es el número de restricciones activas en la k-ésima iteración. Para obtener este vector existen varios métodos disponibles [5], en este caso se utilizará el método de espacio nulo.

Un problema cuadrático definido-positivo es uno en el cual la matriz hessiana proyectada $Z_k^T Q Z_k$ es definida positiva en cada iteración. En general, esto se cumple sólo si Q es propiamente definida positiva. Una matriz hessiana proyectada definida positiva implica que la dirección de búsqueda es siempre bien definida, y que la función cuadrática tiene un sólo mínimo en el subespacio definido por Z_k.

La dirección de búsqueda en x_k se obtiene resolviendo la ecuación de Newton.

$$Z_k^T Q Z_k p_z = -Z_k^T \nabla f(x_k), \tag{3.6}$$

despejando p_z de (3.6) se tiene que:

$$p_z = -Z_k^T \nabla f(x_k)(Z_k^T Q Z_k)^{-1}, \tag{3.7}$$

y se establece a

$$p_k = Z_k p_z, \tag{3.8}$$

subtituyendo (3.7) en (3.8) se obtiene la dirección de búsqueda como:

$$p_k = -Z_k (Z_k^T Q Z_k)^{-1} Z_k^T \nabla f(x_k).$$

Cálculo de los multiplicadores de Lagrange.

Ahora bien, en el punto factible x_k, se tiene que hay t_k ($t_k << n$) restricciones linealmente independientes que se satisfacen exactamente, con la correspondiente matriz $\hat{A}_k$. Si existe una dirección de búsqueda p_k, tal que $x_k + p_k$ permanece factible con respecto a $\hat{A}_k$ y minimiza la función objetivo en el subespacio apropiado, entonces p_k es la solución al subproblema de programación cuadrática:

$$\min . \nabla f(x_k)p + \frac{1}{2}p^T Qp \tag{3.9}$$

$$s.a \quad \hat{A}_k p = 0.$$

Sea p_k la solución de (3.9) y λ_k sus multiplicadores de Lagrange. Las condiciones óptimas para (3.9) implican que p_k y λ_k satisfacen las $n + t_k$ ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} Q & -\hat{A}_k \\ \hat{A}_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x_k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad sistema \quad KKT\ , \tag{3.10}$$

usando la primera ecuación de (3.10), se tiene que:

$$Qp_k - \hat{A}_k \lambda_k - \nabla f(x_k) = 0. \tag{3.11}$$

despejando λ_k de (3.11) se obtienen los multiplicadores de Lagrange como:

$$\lambda_k = (\hat{A}_k \hat{A}{}_k^T)^{-1} \hat{A}_k (Qp_k + \nabla f(x_k)).$$

Cálculo de la longitud de paso.

Puesto que las restricciones del problema original son desigualdades, a la hora de desplazarse es necesario tener en cuenta que se puede situar fuera de la región factible; es necesario determinar una longitud máxima de paso que no suponga la violación de ninguna de las restricciones, y que pueda afectar el carácter activo o no de las mismas, por eso, el paso a lo largo de p_k a la restricción más cercana se vuelve el límite superior de α_k.

Debido a la naturaleza cuadrática de la función objetivo, sólo hay dos elecciones para la longitud de paso. Tomar una longitud de paso de uno a lo largo de p_k, lo cual es el paso exacto a el mínimo de la función restringida al espacio nulo de $\hat{A}_k$. Si se toma la longitud de paso igual a uno, la siguiente iteración será un punto mínimo constante con respecto a la restricción de igualdad definido por $\hat{A}_k$, y los multiplicadores de Lagrange pueden ser calculados para determinar si una restricción debe ser eliminada. En otro caso, el paso a lo largo de p_k a la restricción más cercana es menor que la unidad, y una nueva restricción puede ser incluida en el conjunto de trabajo en la siguiente iteración.

Sea i el indice de una restricción que no está en el conjunto de trabajo en x, es decir, $i \notin I_k$. Si $a_i^T p_k \geq 0$ entonces el movimiento a lo largo de p_k con una longiud de paso igual a uno, no violará la restricción. Si se cumple para todo $i \notin I$, entonces no existen restricciones fuera del conjunto activo que limiten la longitud de paso. Por el contrario si $a_i^T p_k < 0$, entonces existe una longitud de paso crítico γ_i donde la restricción i, no activa, pasa a convertirse en una restricción activa, esto es:

$$a_i^T\,(x_k+\gamma_i p_k) = b_i,$$

el valor de γ_i esta dado por :

$$\gamma_i=\left\{\frac{b_i-a_i^T x_k}{a_i^T p_k} \mid i \notin I \;\; y \;\; a_i^T p_k< 0\right\}.$$

Si existen varios γ_i entonces se considera un valor :

$$\bar{\alpha}=\begin{cases} \min\{\gamma_i\} & si \;\; a_i^T p_k< 0, \; para\ todo \;\; i \notin I, \\ 1 & si \;\; a_i^T p_k\geq 0, \; para\ todo \;\; i \notin I. \end{cases}$$

El valor de $\bar{\alpha}$ es el máximo paso factible no negativo que se puede tomar a lo largo de p, y es tomado como un límite superior de la longitud de paso final α. El procedimiento usado en un método de conjunto activo necesita además intentar encontrar un paso α_F que produzca un decremento suficiente en f, de acuerdo con el criterio del principio de Goldstein-Armijo[5]:

$$0 < -\mu_1 \alpha_k \nabla f(x) p_k \leq f_k - f_{k+1} \leq -\mu_2 \alpha_k \nabla f(x) p_k. \tag{3.12}$$

donde μ_1 y μ_2 son escalares que satisfacen: $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$. Los límites superior e inferior de (3.12) aseguran que α_k no es ni demasiado grande ni demasiado pequeño.

Algoritmos instrumentados

Sea k el número de iteración actual. En cualquier iteración x_k, existe un conjunto de igualdades asociadas con el conjunto de trabajo actual. En particular, t_k denotará el número de restricciones en el conjunto de trabajo, I_k denota el conjunto de índices de estas restricciones, $\hat{A}$ denotará el conjunto de coeficientes de estas restricciones en x_k (con $\hat{b}$ el vector correspondiente de coeficientes del lado derecho de $\hat{A}$), y Z_k denotará una base del espacio de vectores ortogonal a las filas de $\hat{A}$.

Algoritmo de conjunto activo (CA).

El algoritmo propuesto para la resolución de este tipo de problemas es un método iterativo de búsqueda de una solución factible a partir de la consideración de un cierto número de restricciones activas (el conjunto de trabajo).

[5] Goldstein. A. and Price. J. (1967). An effective algorithm for minimization. Number. Math. 10, pp. 184-189.

Paso 1: Inicialización.

Se asume que se tiene un punto inicial factible x_0 . Se establece $k \leftarrow 0$, se determina $t_0, I_0, \hat{A}_0, \hat{b}_0, Z_0, Q$.

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda factible.

Usando el método de espacio nulo, se calcula un vector p_z de orden $(n-t_k)$ cuyas componentes sean distintas de cero; y se obtiene de esta forma la dirección de búsqueda como:

$$p_k \leftarrow Z_k p_z.$$

A continuación se elige en función de:

Si $p_k = 0$ ir al paso 3
Si $p_k \neq 0$ ir al paso 5

Paso 3: Cálculo de los multiplicadores de Lagrange

Se calculan los multiplicadores de Lagrange λ_k correspondientes a cada una de la restricciones que forman el conjunto de trabajo.

$$\lambda_k \leftarrow (\hat{A}_k \hat{A}_k^T)^{-1} \hat{A}_k (Qp_k + \nabla f(x_k)).$$

Si $\lambda_k \geq 0$ se considera que el valor obtenido en la k-ésima iteración se aproxima lo suficiente al valor óptimo, es decir, las condiciones para la convergencia se satisfacen en x_k, por lo que el algoritmo termina con x_k como la solución.

Si $\lambda_k < 0$ ir al paso 4.

Paso 4 : Eliminar una restricción del conjunto de trabajo.

Se elige la restricción que tenga asociado el multiplicador de Lagrange más negativo y se elimina del conjunto de trabajo, se actualiza el conjunto de índices y las variables afectadas. Regresar al paso 2.

Paso 5: Determinar la longitud de paso.

Se calcula $\bar{\alpha}$, el paso máximo factible no negativo a lo largo de la dirección de búsqueda p_k. Se determina una longitud de paso positiva α_k, para el cual se espera que,

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k).$$

Paso 6: Actualizar la solución estimada.

Se actualizan los valores de la solución estimada en la k-ésima iteración y el número de estimación.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\leftarrow x_k + \alpha_k p_k \\ k &\leftarrow k+1 \end{aligned}$$

Paso 7: Elección de la medida a seguir.

Se plantean dos opciones posibles:

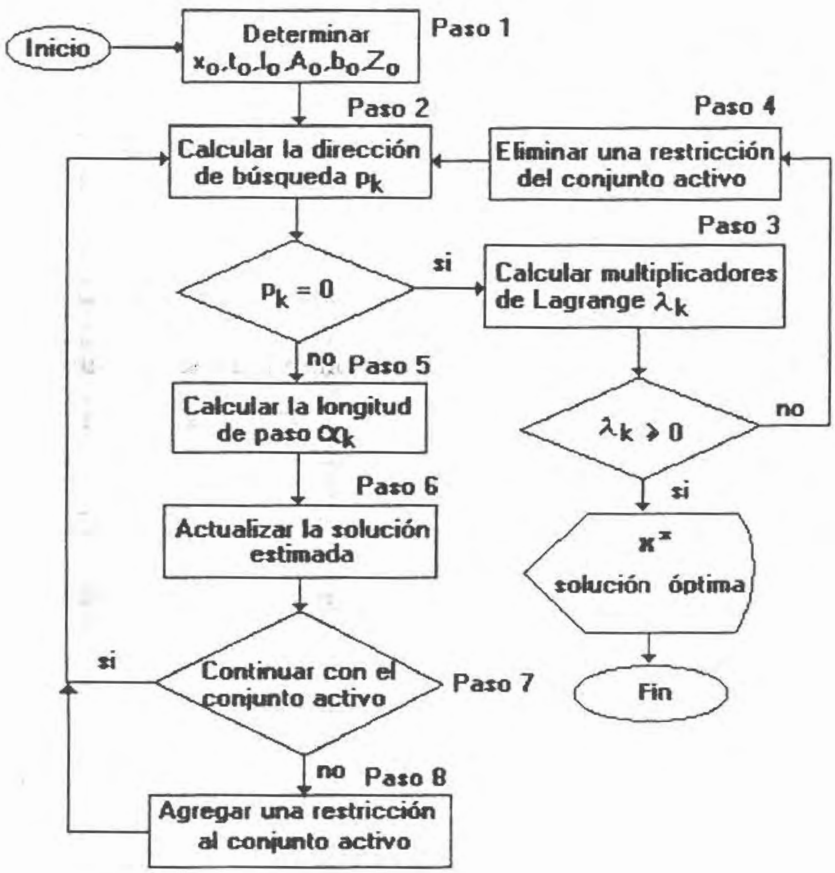
a) Continuar minimizando en el subespacio actual (esto es, mantener el conjunto de trabajo); ir al paso 2.

b) Añadir una restricción al conjunto de trabajo (cambiar el subespacio de búsqueda); ir al paso 8.

Paso 8 : Agregar una restricción al conjunto de trabajo.

Si α_k es el paso que activa la restricción con índice r, se añade r al conjunto de índices I_k. En caso de que α_k active más de una restricción, se añade la restricción que esta más próxima a ser activa. Se modifica el resto de las cantidades de forma oportuna y se continúa en el paso 2.

Diagrama de flujo.



Algoritmo de espacio nulo.

Para calcula un vector p_z de orden $(n-t_k)$ cuyas componentes sean distintas de cero; y obtener de esta forma la dirección de búsqueda, y además calcular los multiplicadores de Lagrange λ_k correspondientes a cada una de la restricciones que forman el conjunto de trabajo, se siguen los pasos siguientes:

Paso 1: Determinar el conjunto activo.

Sea k el número de iteración actual, se asume que se tiene un punto inicial factible x_k y que se conoce la matriz hessiana Q. Se determina el número de restricciones en el conjunto de trabajo t_k, y el conjunto de índices de estas restricciones I_k, el conjunto de coeficientes de las restricciones de conjunto activo $\hat{A}_k$, con $\hat{b}_k$ como el vector correspondiente de coeficientes del lado derecho de $\hat{A}_k$.

Paso 2: Calcular una base para el espacio nulo de $\hat{A}_k$.

Se calcula Z_k la cual denotará una base del espacio de vectores ortogonal a las filas de $\hat{A}_k$.

Paso 3: Cálculo del vector p_z.

Se calcula un vector p_z cuyas componentes sean distintas de cero, tal que:

$$p_z \leftarrow -Z_k^T \nabla f(x_k)(Z_k^T Q Z_k)^{-1}.$$

Paso 4: Cálculo de la dirección de búsqueda.

Se obtiene la dirección de busqueda como:

$$p_k \leftarrow Z_k p_z.$$

Paso 5: Cálculo de los multiplicadores de Lagrange

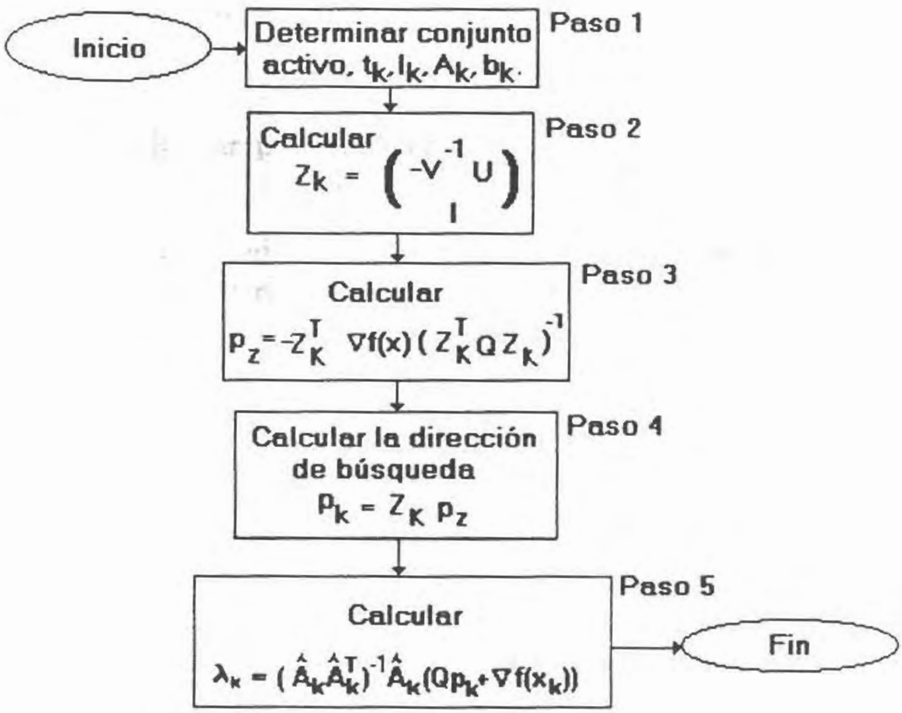
Se calculan los multiplicadores de Lagrange λ_k correspondientes a cada una de la restricciones que forman el conjunto de trabajo. De la primera ecuación del sistema de KKT se tiene que:

$$Qp_k - \hat{A}_k\lambda_k - \nabla f(x_k) = 0.$$

entonces,

$$\lambda_k \leftarrow (\hat{A}_k\hat{A}_k^T)^{-1}\hat{A}_k(Qp_k + \nabla f(x_k)).$$

Diagrama de flujo.



Algoritmo para calcular la longitud de paso.

Para calcular el paso máximo factible no negativo a lo largo de la dirección de búsqueda p_k, se siguen los pasos siguientes:

Paso 1: Determinar el conjunto no activo (CNA).

Sea k el número de iteración actual, se asume que se tiene un punto inicial factible x_k y que se conoce la matriz hessiana Q. Se determina el número de restricciones que no pertenecen al conjunto de trabajo t'_k , y el conjunto de índices de estas restricciones I', se determina el conjunto de coeficientes de las restricciones que no pertenenecen al conjunto activo a'_k, con a'_kcomo el vector correspondiente de coeficientes del lado derecho de a'_k.

Paso 2: Calcular paso crítico.

Calcular una longitud de paso crítico γ_i donde la restricción i, no activa, pasa a convertirse en una restricción activa, esto es:

$$a_i'^T\,(x_k+\gamma_i p_k) = b'_i.$$

donde γ_i esta dado por :

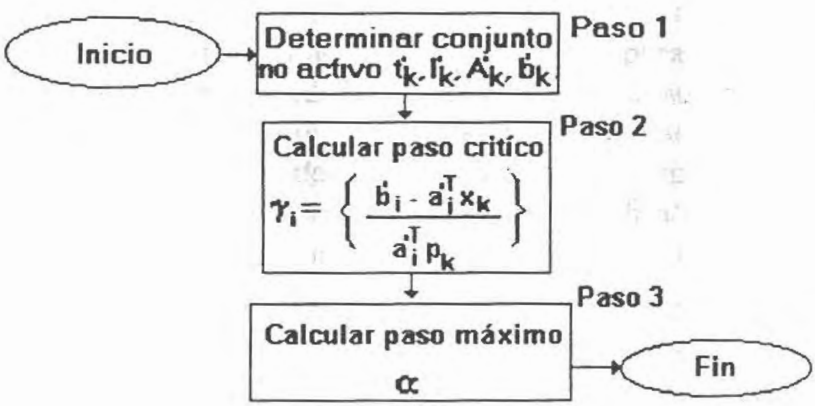
$$\gamma_i = \left\{ \frac{b'_i - a_i'^T x_k}{a_i'^T p_k} \right\}$$

Paso 3: Calcular el máximo paso factible.

El valor de α es el máximo paso factible no negativo que se puede tomar a lo largo de p, y esta dado por:

$$\alpha = \begin{cases} \min\{\gamma_i\}, & si \;\; a_i'^T p_k < 0 \\ 1, & si \;\; a_i'^T p_k \geq 0 \end{cases}$$

Diagrama de flujo



Capítulo 4

Pruebas.

El funcionamiento de **NSAQP** fue probado con un gran número de problemas, estos problemas se obtuvieron del generador de problemas prueba para programación cuadrática [2]. Este generador proporciona dos archivos, en el primer archivo se encuentran los datos del problema que contiene: número de variables, número de restricciones, matriz hessiana, vector de costos, matriz de restricciones, vector de términos independientes y un punto inicial factible. En el segundo archivo se encuentra la solución de este problema, este servirá para comparar los resultados obtenidos del sistema **NSAQP** y saber cuál es el rango de error que presentan.

NSAQP fue implementado en MATLAB ver. 5.1, se eligió este software ya que es un programa orientado para computación numérica, posee una extraordinaria capacidad para resolver problemas de cálculo matricial [8]. Está basado en un sofisticado software de matrices para el análisis de sistemas de ecuaciones, además permite resolver complicados problemas numéricos sin necesidad de escribir un programa, e integra visualización gráfica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirían tradicionalmente, sin necesidad de hacer uso de la programación tradicional.

Resultados computacionales.

Las pruebas computacionales fueron realizadas en una PC celeron a 300 MHz sobre un sistema operativo windows 98. Los resultados obtenidos en las pruebas realizadas a **NSAQP**, se muestran en las tablas siguientes. Los nombres de los problemas se muestran en la primera columna de la tabla. En las siguientes dos columnas se tiene el número de variables y de restricciones. La siguiente columna presenta el rango de error que tuvo la solución dada por **NSAQP** con respecto a los resultados obtenidos por el generador; aquí se determinan 4 tipos de error, el error primal norma 2 (EP2), el error dual norma 2 (ED2), el error primal norma infinita (EPI), y el error dual norma infinita (EDI). Por último se tiene el tiempo en minutos que ocupó **NSAQP** para resolver el problema. La tabla 1 muestra los resultados obtenidos para problemas que son bien condicionados y sin degeneración [9], es decir, problemas donde una mínima variación en los datos causa una pequeña variación en la solución.

Problema	*#var.*	*#res.*	*Rango de error*	*Tiempo*
*prob*10	10	7	$EP2 = 2.71E-14$ $ED2 = 9.16E-14$ $EPI = 1.42E-14$ $EDI = 5.68E-14$	0.0012
*prob*20	50	30	$EP2 = 9.64E-14$ $ED2 = 8.49E-14$ $EPI = 3.91E-14$ $EDI = 4.62E-14$	0.0306
*prob*30	100	70	$EP2 = 2.45E-13$ $ED2 = 2.76E-13$ $EPI = 7.11E-14$ $EDI = 1.06E-13$	0.442
*prob*40	150	90	$EP2 = 2.13E-13$ $ED2 = 1.30E-13$ $EPI = 6.04E-14$ $EDI = 7.46E-14$	2.504
*prob*50	200	100	$EP2 = 2.22E-13$ $ED2 = 2.72E-13$ $EPI = 4.97E-14$ $EDI = 7.82E-14$	3.206
*prob*60	250	150	$EP2 = 9.86E-13$ $ED2 = 1.09E-12$ $EPI = 1.99E-13$ $EDI = 3.34E-13$	9.267
*prob*70	300	200	$EP2 = 5.45E-13$ $ED2 = 4.75E-13$ $EPI = 1.71E-13$ $EDI = 1.55E-13$	47.19
*prob*80	800	400	$EP2 = 4.17E-12$ $ED2 = 3.77E-12$ $EPI = 1.43E-12$ $EDI = 1.39E-12$	556.39

Tabla 1. Problemas bien condicionados y sin degeneración

La tabla 2 presenta los resultados obtenidos para problemas que son bien condicionados y con degeneración. Un problema con degeneración tiene la característica de que algunas de sus restricciones de desigualdad que son activas, tienen multiplicadores de Lagrange asociados igual a cero.

problema	*#var*	*#res*	*Errores*	*Tiempo*
*prob*11	10	7	$EP2 = 2.45E-14$ $ED2 = 2.61E-14$ $EPI = 1.42E-14$ $EDI = 1.47E-14$	0.0012
*prob*21	50	30	$EP2 = 2.04E-13$ $ED2 = 2.12E-13$ $EPI = 8.17E-14$ $EDI = 8.88E-14$	0.0306
*prob*31	100	70	$EP2 = 2.54E-13$ $ED2 = 2.55E-13$ $EPI = 1.07E-13$ $EDI = 1.10E-13$	0.439
*prob*41	150	90	$EP2 = 3.36E-13$ $ED2 = 2.86E-13$ $EPI = 2.01E-13$ $EDI = 2.15E-13$	2.439
*prob*51	200	100	$EP2 = 2.33E-13$ $ED2 = 2.55E-13$ $EPI = 7.82E-14$ $EDI = 6.75E-14$	3.421
*prob*61	250	150	$EP2 = 8.43E-13$ $ED2 = 7.72E-13$ $EPI = 2.91E-13$ $EDI = 3.07E-13$	9.30
*prob*71	300	200	$EP2 = 5.11E-13$ $ED2 = 4.57E-13$ $EPI = 1.21E-13$ $EDI = 1.22E-13$	44.19

Tabla 2. Problemas bien condicionados y con degeneración

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos para problemas que son mal condicionados y sin degeneración, para estos problemas un error pequeño en los datos causa un error grande en la solución.

problema	*#var*	*#res*	*Errores*	*Tiempo*
*prob*12	10	7	$EP2$ =3.83E-14 $ED2$ =8.88E-12 EPI =2.13E-14 EDI =5.44E-12	0.0012
*prob*22	50	30	$EP2$ =2.22E-13 $ED2$ =1.82E-12 EPI =9.24E-14 EDI =1.07E-12	0.0324
*prob*32	100	70	$EP2$ =2.43E-13 $ED2$ =2.03E-12 EPI =7.11E-14 EDI =6.06E-13	0.427
*prob*42	150	90	$EP2$ =8.51E-13 $ED2$ =6.29E-13 EPI =1.95E-13 EDI =3.14E-13	3.019
*prob*52	200	100	$EP2$ =1.60E-12 $ED2$ =1.04E-10 EPI =3.73E-13 EDI =3.05E-11	3.202
*prob*62	250	150	$EP2$ =1.44E-12 $ED2$ =3.24E-11 EPI =2.83E-13 EDI =9.62E-12	9.262
*prob*72	300	200	$EP2$ =1.24E-12 $ED2$ =3.54E-12 EPI =1.78E-13 EDI =1.04E-12	44.49

Tabla 3. Problemas mal condicionados y sin degeneración

La tabla 4 muestra los resultados obtenidos para problemas que son mal condicionados y con degeneración.

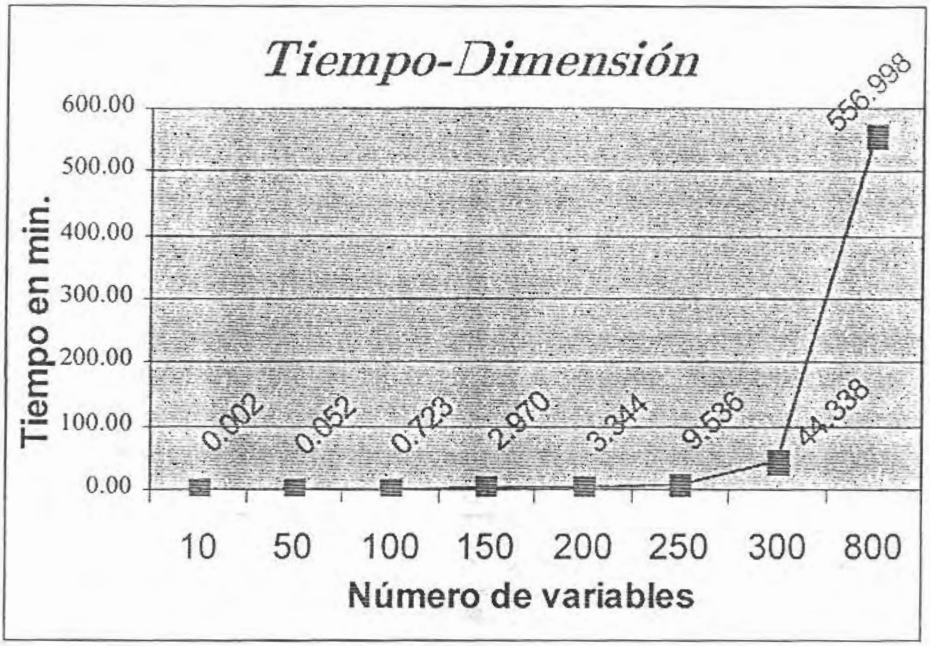
problema	$\#var$	$\#res$	*Errores*	*Tiempo*
$prob13$	10	7	$EP2 = 2.41E-14$ $ED2 = 9.15E-13$ $EPI = 1.42E-14$ $EDI = 6.07E-13$	0.0012
$prob23$	50	30	$EP2 = 3.12E-13$ $ED2 = 1.03E-12$ $EPI = 8.53E-14$ $EDI = 5.64E-13$	0.030
$prob33$	100	70	$EP2 = 1.03E-12$ $ED2 = 1.14E-10$ $EPI = 2.24E-13$ $EDI = 3.67E-11$	0.424
$prob43$	150	90	$EP2 = 7.51E-12$ $ED2 = 1.55E-11$ $EPI = 3.57E-12$ $EDI = 1.07E-11$	3.163
$prob53$	200	100	$EP2 = 4.27E-13$ $ED2 = 2.23E-12$ $EPI = 9.73E-14$ $EDI = 8.01E-13$	3.211
$prob63$	250	150	$EP2 = 6.84E-12$ $ED2 = 4.92E-11$ $EPI = 1.03E-12$ $EDI = 1.28E-11$	9.455
$prob73$	300	200	$EP2 = 1.85E-12$ $ED2 = 1.09E-11$ $EPI = 2.63E-13$ $EDI = 4.04E-12$	40.49

Tabla 4. Problemas mal condicionados y con degeneración

Gráficas de resultados

A continuación se presentan las gráficas que representan de manera más clara los resultados obtenidos en las pruebas realizadas.

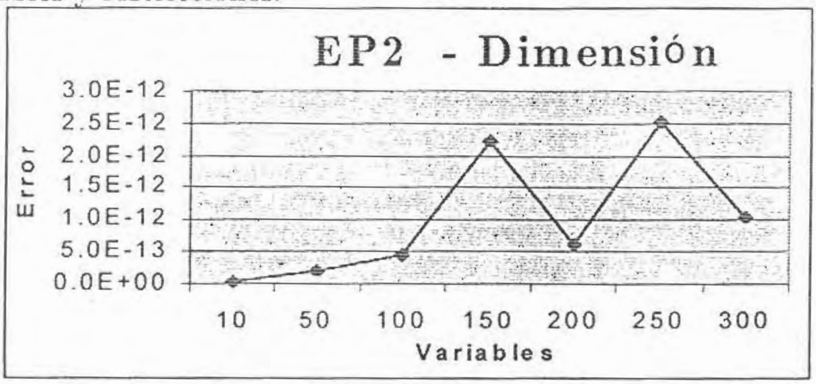
En esta primera gráfica se muestra la relación entre el tiempo que ocupó **NSAQP** para resolver un problema y la dimensión en número de variables del mismo. El tiempo que se representa en esta gráfica es un promedió de los problemas que tienen el mismo número de variables y restricciones.



Gráfica 1. Relación entre el tiempo y la dimensión del problema.

Como se puede observar, para problemas pequeños hasta de 200 variables, el tiempo requerido por el sistema para resolver este, no es muy grande, sin embargo, para problemas de 300 variables o más, el tiempo que ocupa el sistema crece considerablemente .

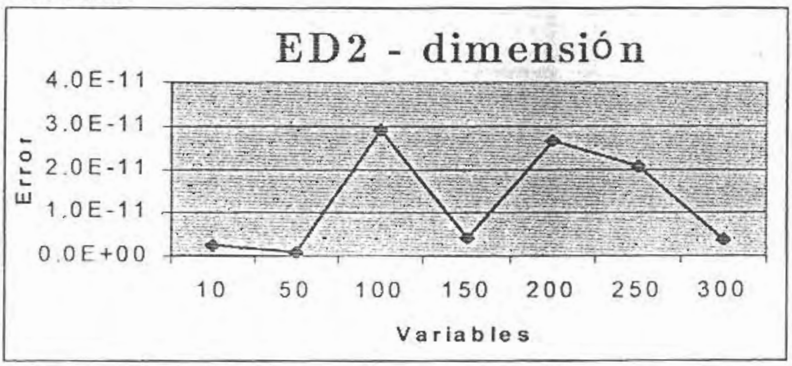
Ahora se presenta la gráfica que muestra el error primal (calculado con la norma 2), que se tuvo en las diferentes dimensiones de los problemas. El error que muestra la gráfica, es un promedio de los errores obtenidos en los problemas con el mismo número de variables y restricciones.



Gráfica 2. Error primal norma 2 con respecto a las diemensiones del problema.

Se puede observar que el error crece conforme aumenta las dimensiones del problema, aunque el crecimiento del error no es uniforme ni constante, lo que permite suponer que el rango de error se mantendrá aún para problemas muy grandes.

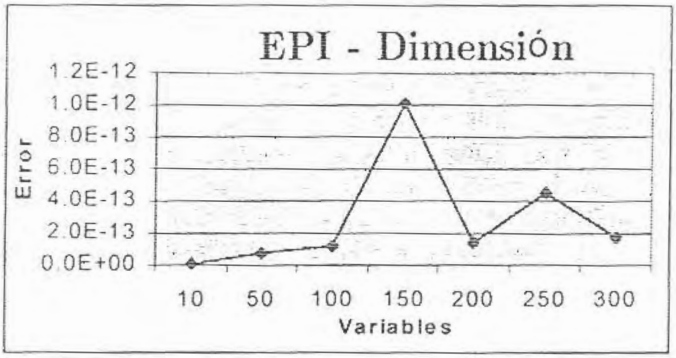
Ahora se presenta la gráfica que muestra el error dual (calculado con la norma 2), que se tuvo en las diferentes dimensiones de los problemas. Al igual que en la gráfica anterior, los errores mostrados son un promedio de los problemas con el mismo número de variables y restricciones.



Gráfica 3. Error dual norma 2 con respecto a las dimensiones del problema.

Al igual que en la gráfica anterior, se observa que los errores duales son muy pequeños, por debajo del orden de $1.0\ E-10$.

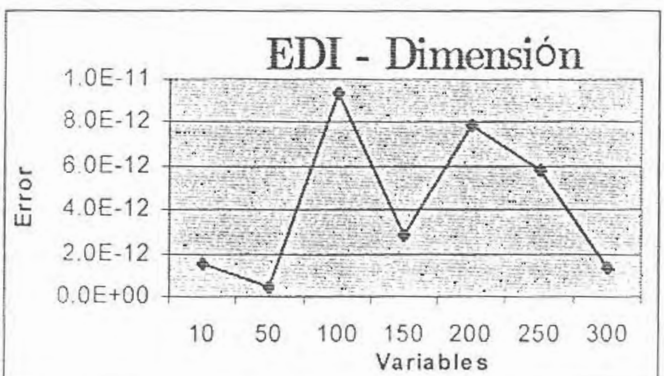
La gráfica siguiente muestra el error primal (calculado con la norma infinita), que se tuvo en las diferentes dimensiones de los problemas, cada punto en la gráfica, representa el error promedio de los problemas con el mismo número de variables y restricciones.



Gráfica 4. Error primal norma infinita con respecto a las dimensiones del problema.

Como en el caso de los errores calculados con la norma 2, se puede observar que el error crece conforme aumenta las dimensiones del problema, aunque el crecimiento del error no es uniforme ni constante.

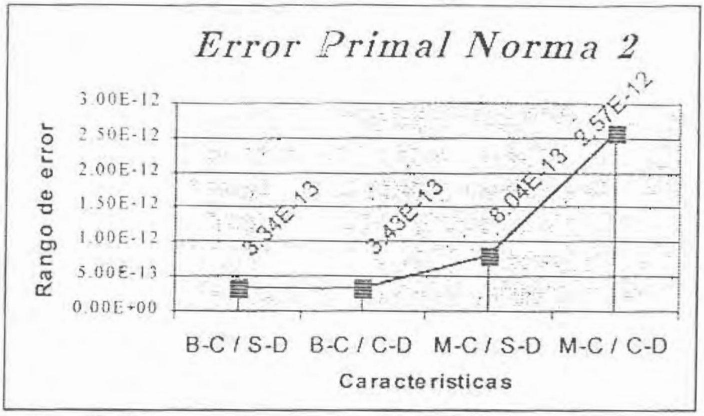
La gráfica siguiente muestra el error dual (calculado con la norma infinita), que se tuvo en las diferentes dimensiones de los problemas.



Gráfica 5. Error dual norma infinita con respecto a las dimensiones del problema.

Aunque el error obtenido en las variables duales es muy pequeño, se puede observar que su variación es muy irregular.

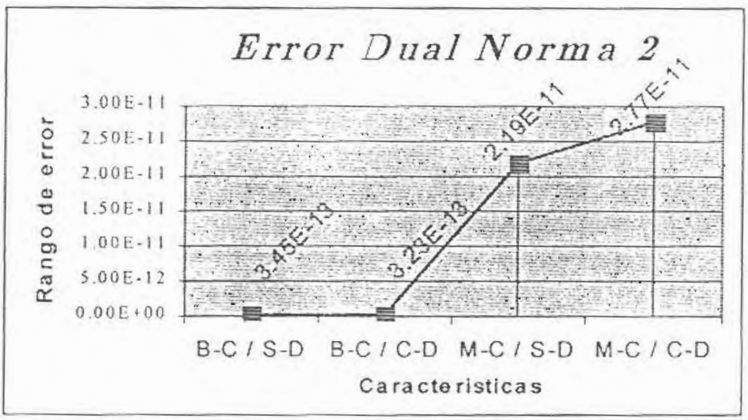
El rango de error primal promedio calculado con la norma 2 que presentaron los problemas, se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 6. Rango de error primal calculados con la norma 2.

La gráfica muestra que los mejores resultados se obtienen de los problemas que son bien condicionados y sin degeneración, por el contrario, los problemas mal condicionados y con degeneración presentan un error un poco mayor a los primeros. Sin embargo el error en todos los casos es muy pequeño.

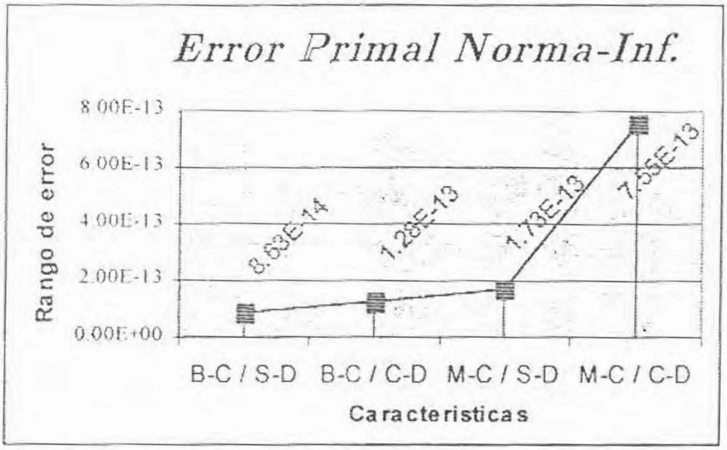
El rango de error dual promedio calculado con la norma 2 que presentaron los problemas, se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 7. Rango de error dual calculados con la norma 2.

El error en la variables duales, es muy parecido al obtenido en las variables primales, con la diferencia de que los problemas bien condicionados y con degeneración fueron los que presentaron un rango de error menor.

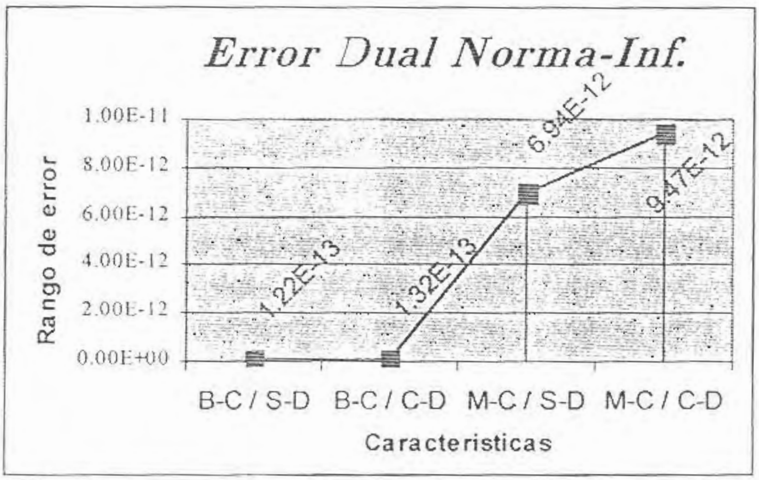
El rango de error primal promedio calculado con la norma infinita que presentaron los problemas, se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 8. Rango de error primal calculados con la norma infinita.

Se puede apreciar que el rango de error obtenido en todos los problemas es muy pequeño, de estos, los que menor error tuvieron fueron los problemas bien condicionados y sin degeneración.

El rango de error dual promedio calculado con la norma infinita que presentaron los problemas, se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 9. Rango de error dual calculados con la norma infinita.

Los errores obtenidos en las variables duales son muy pequeños, de estos, los problemas mal condicionados y con degeneración presentaron un error un poco mayor al de los demás problemas.

Capítulo 5

Conclusiones.

En el capítulo anterior se mostraron los resultados obtenidos en las pruebas realizadas a **NSAQP**, en este capítulo se describen las conclusiones a las que se llegó conforme al análisis efectuado a estos resultados.

Se probaron un total de 29 problemas. En cuanto a las dimensiones del problema se tuvo que 4 eran de 10 variables con 7 restricciones, 4 de 50 variables y 30 restricciones, 4 de 100 variables con 70 restricciones, 4 de 150 variables con 90 restricciones, 4 de 200 variables con 100 restricciones, 4 de 250 variables con 150 restricciones, 4 de 300 variables con 200 restricciones, y uno de 800 variables con 400 restricciones . En cuanto a las características de los problemas, 8 eran bien condicionados y sin degeneración, 7 bien condicionados y con degeneración, 7 mal condicionados y sin degeneración, y 7 mal condicionados y con degeneración.

1.- Para todos los problemas que se ejecutaron en **NSAQP**, el sistema encontró la solución óptima del problema, por lo que se puede afirmar que el sistema NSAQP es funcional.

2. El error más grande que se encontró en las soluciones óptimas obtenidas fué del orden de $1.0\ E-10$, este error, debido a las dimensiones de los problemas probados se puede decir que es despreciable, por lo que se puede sustentar que el sistema es eficaz dado que encuentra la solución óptima del problema.

3.- Los problemas bien condicionados y sin degeneración fueron los que presentaron un menor rango de error en la solución óptima, sin embargo se requirió un mayor tiempo computacional para encontrar su solución.

4.- El sistema resolvió en un menor tiempo los problemas mal condicionados y con degeneración, aunque en estos problemas, los errores en la solución óptima fueron un poco mayor a los presentados en los demás problemas, sin embargo estos errores no dejan de ser muy pequeños, pues están por debajo del orden de $1.0E-11$.

5.- En los problemas bien condicionados y con degeneración se obtuvo un error menor en la solución óptima al que se obtuvo en los problemas mal condicionados y sin degeneración, así como también el tiempo para encontrar la solución óptima fué menor en el primer caso.

6.- El tiempo que ocupa el sistema para resolver un determinado problema, crece de forma exponencial conforme aumenta el número de variables del mismo. Esto se puede observar en las gráficas obtenidas en la realización de las pruebas.

7.- Se alcanza a notar que los errores duales y los errores primales obtenidos en la solución de los problemas, se mantienen por debajo del orden de $1.0E-10$, sin importar la dimensión del problema.

Capítulo 6

Manual de usuario.

NSAQP es un sistema que resuelve problemas cuadráticos estrictamente convexos. NSAQP fue implementado en MATLAB. En este capítulo se describe cómo usar el sistema correctamente. El contenido de este capítulo contiene la información siguiente:

Requerimientos mínimos del sistema.

Ejecución de NSAQP.

Cargar los datos del problema.

Comenzar a resolver el problema.

Ver los resultados del problema resuelto.

Imprimir resultados.

Obtener ayuda.

Salir del sistema.

Requerimientos mínimos del sistema.

- Computadora personal.
- Procesador 486.
- Windows 95.
- 16 MB en RAM.
- 20 MB disponibles en disco duro.
- MATLAB ver. 5.1.

Ejecución de NSAQP.

Para ejecutar NSAQP, seguir los pasos siguientes:

1.- Ejecutar MATLAB. El archivo matlab.exe generalmente se encuentra en el directorio:

c:\matlab\bin\matlab.exe

2.- Cuando MATLAB se ejecuta, el directorio actual es c:\matlab\bin\, por lo que es necesario situarse en el directorio en donde se encuentra NSAQP. Para esto se teclea lo siguiente en la línea de comandos de MATLAB.

cd c:\directorio_de_trabajo   y presionar ENTER.

donde directorio_de_trabajo es la ruta en donde se encuentra el archivo NSAQP.m.

3.-Después, en la línea de comandos de MATLAB teclear NSAQP y presionar ENTER, con lo cual iniciará la ejecución de NSAQP. La figura 1 muestra el inicio del sistema.

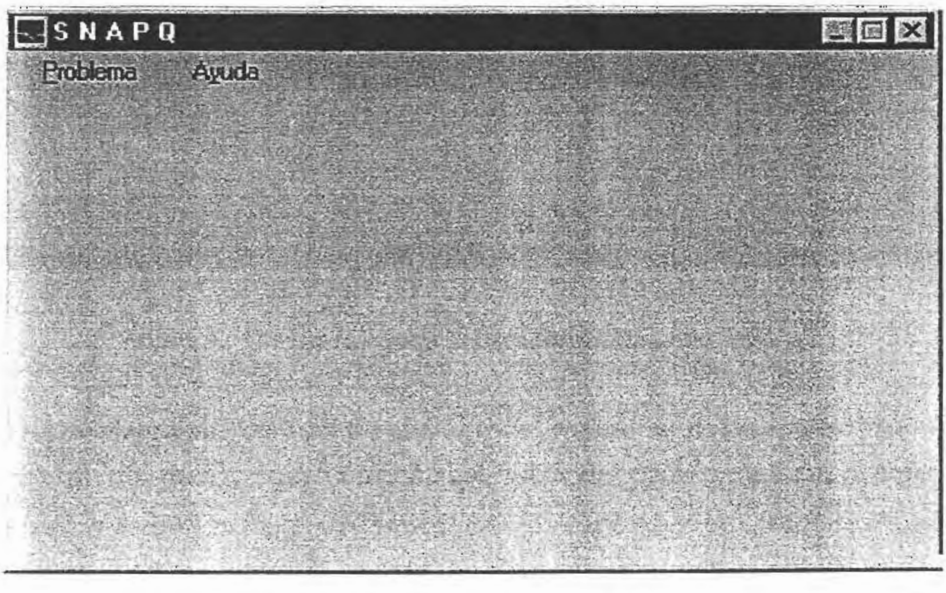


Figura 1. Inicio del sistema NSAQP

Cargar los datos del problema.

NSAQP carga los datos del problema a resolver de dos maneras, desde un archivo y desde el teclado.

a) Cargar los datos del problema desde un archivo.

Para cargar los datos del problema desde un archivo, seleccionar del menú principal Problema-Archivo-Abrir como se muestra en la figura siguiente.

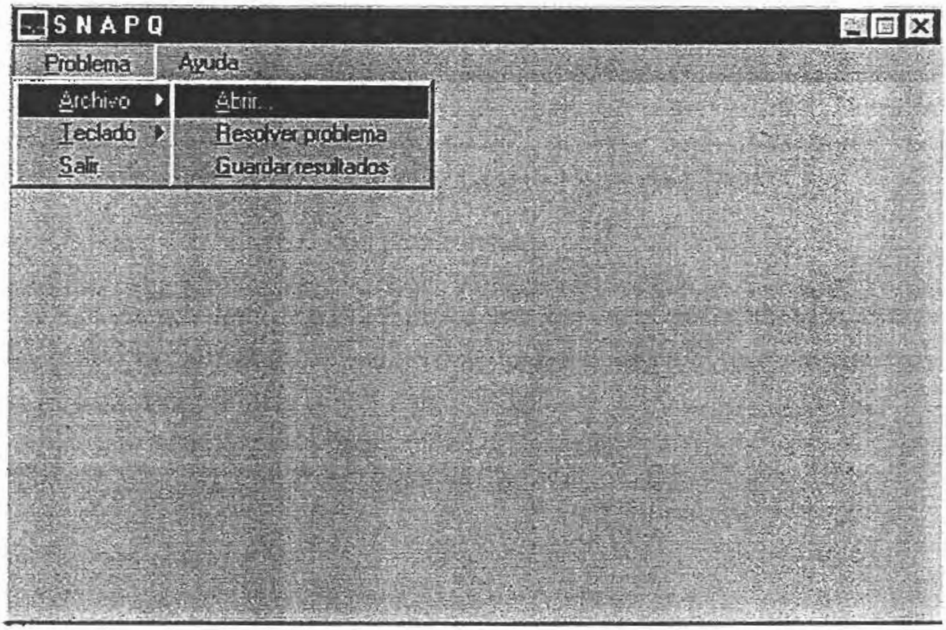


Figura 2. Cargar los datos del problema desde un archivo.

Aparecerá un cuadro de diálogo en el que se debe introducir el nombre del archivo que contiene los datos del problema, si el archivo no se encuentra en el directorio de trabajo se debe especificar la ruta completa en donde se encuentra el archivo. La figura siguiente ejemplifica lo anterior.

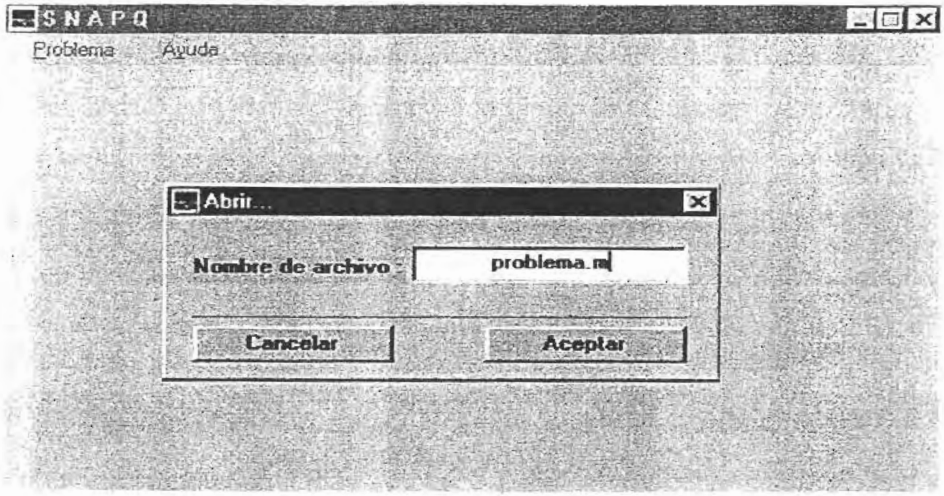


Figura 3. Especificar el nombre del archivo que contiene los datos del problema.

El archivo cargado debe cumplir con ciertas especificaciones, las cuales se describen con más detalle en el apéndice A.

b) Cargar los datos del problema desde el teclado.

Para cargar los datos del problema desde el teclado, seleccionar del menú principal Problema-Teclado-Leer_datos como se muestra en la figura siguiente.

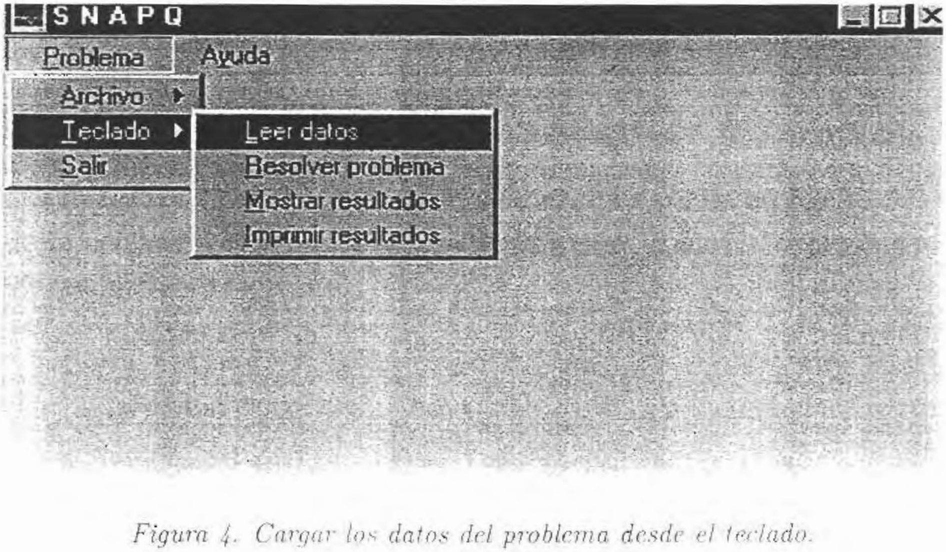


Figura 4. Cargar los datos del problema desde el teclado.

Inmediatamente después, los datos son introducidos tal y como lo muestra la siguiente figura.

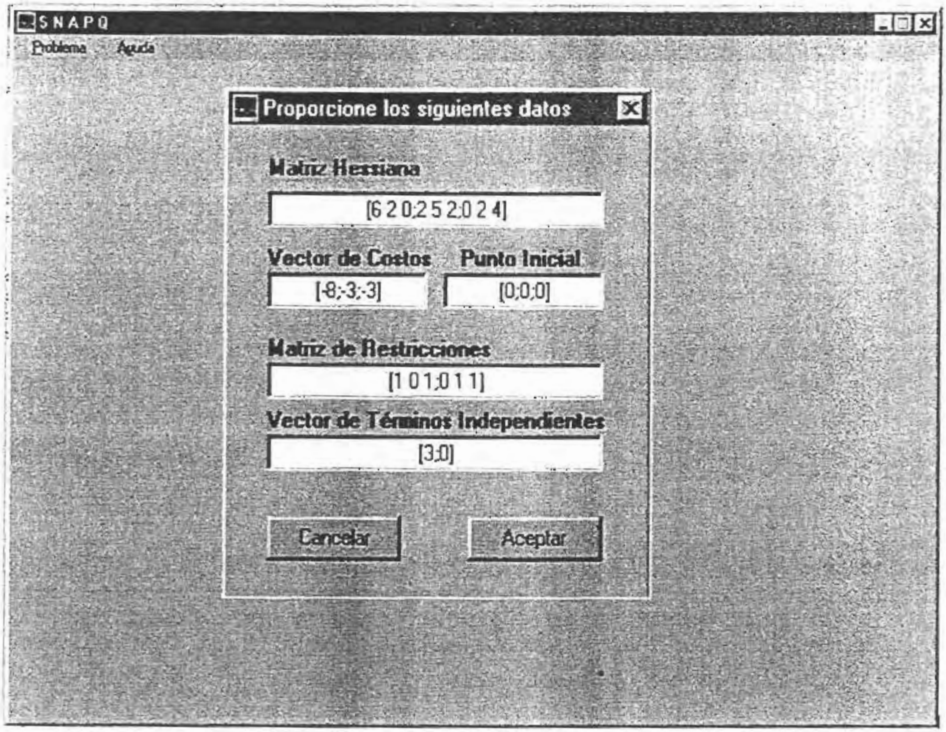


Figura 5. Introducir los datos del problema a resolver.

Los datos introducidos deben tener la sintaxis válida en MATLAB[6], de lo contrario el sistema marcará errores a la hora de que el problema inicie a resolverse.

[6] Para mayor información acerca del lenguaje de MATLAB visitar http://www.matworks.com

Comenzar a resolver el problema.

Una vez que los datos del problema han sido cargados, se procede a resolver el problema. Si los datos del problema se cargaron desde un archivo, seleccionar del menú principal Problema-Archivo-Resolver_problema tal y como muestra la figura siguiente.

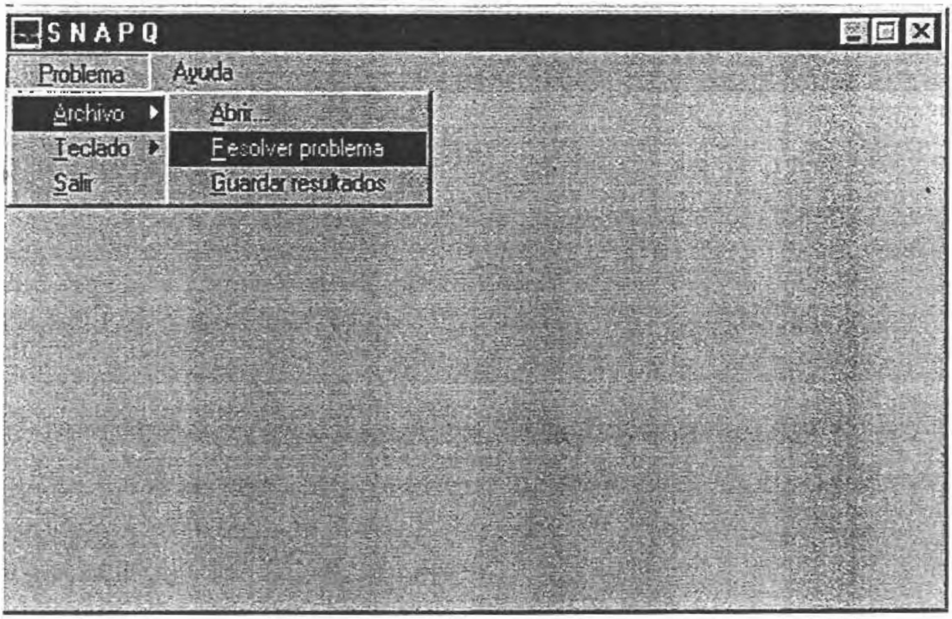


Figura 6. Resolver un problema cargado desde archivo.

Si el archivo que contiene los datos del problema no se encuentra o no existe, el sistema marcará el siguiente error.

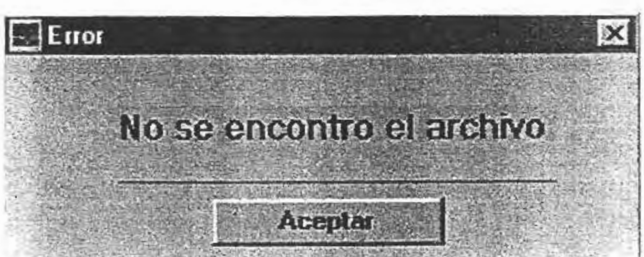


Figura 7: Error al resolver un problema cargado desde archivo.

Si los datos del problema se cargaron desde el teclado seleccionar del menú principal Problema-Teclado-Resolver problema, tal como lo muestra la siguiente figura.

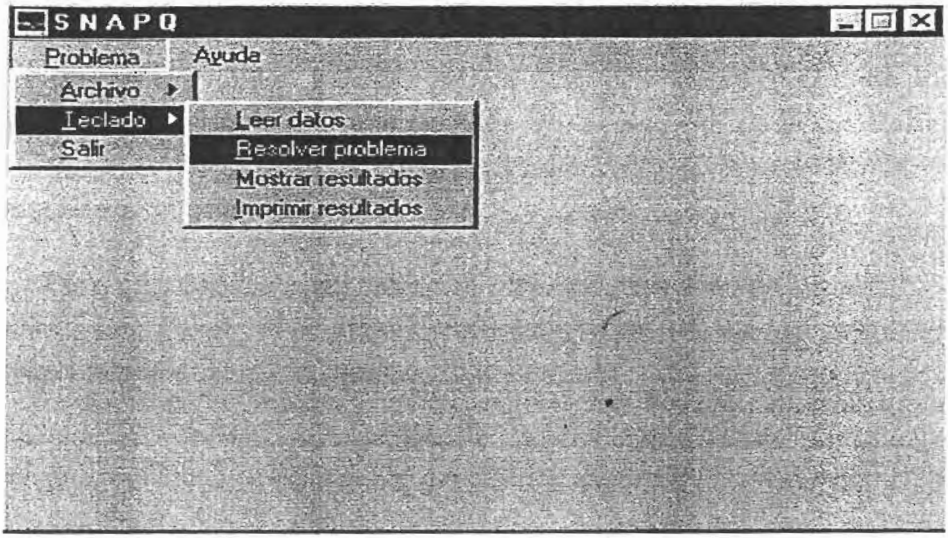


Figura 8. Resolver un problema cargado desde teclado.

En los dos casos, esto hará que NSAQP inicie la resolución del problema. Cuando el sistema termine de resolver el problema la siguiente caja de diálogo aparecerá.

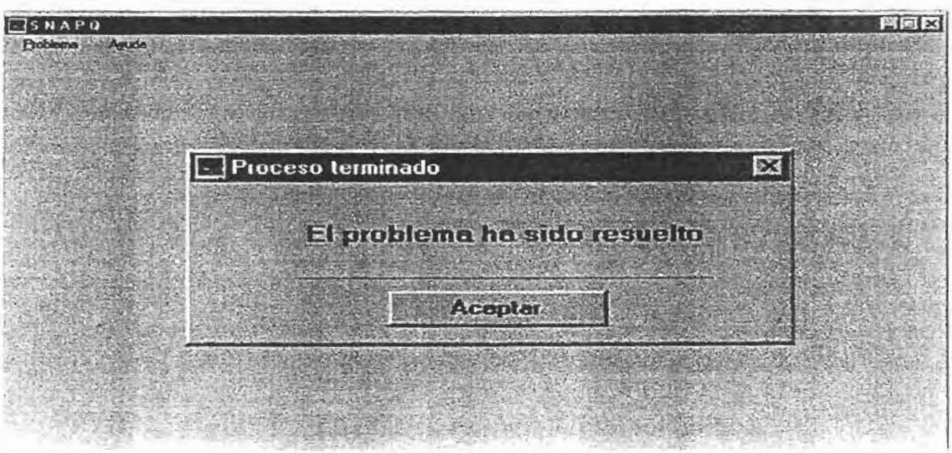


Figura 9. Fin del proceso para resolver un problema.

Ver los resultados del problema resuelto.

El sistema regresa como resultados la solución óptima del problema así cómo los multiplicadores de Lagrange asociados. Estos resultados se pueden guardar en un archivo siempre y cuando los datos del problema se hayan cargado de un archivo, de lo contrario, si los datos del problema se cargaron del teclado, los resultados se muestran en pantalla.

Para guardar los resultados del problema resuelto en un archivo, seleccionar del menú principal Problema-Archivo-Guardar_resultados, como se muestra en la figura:

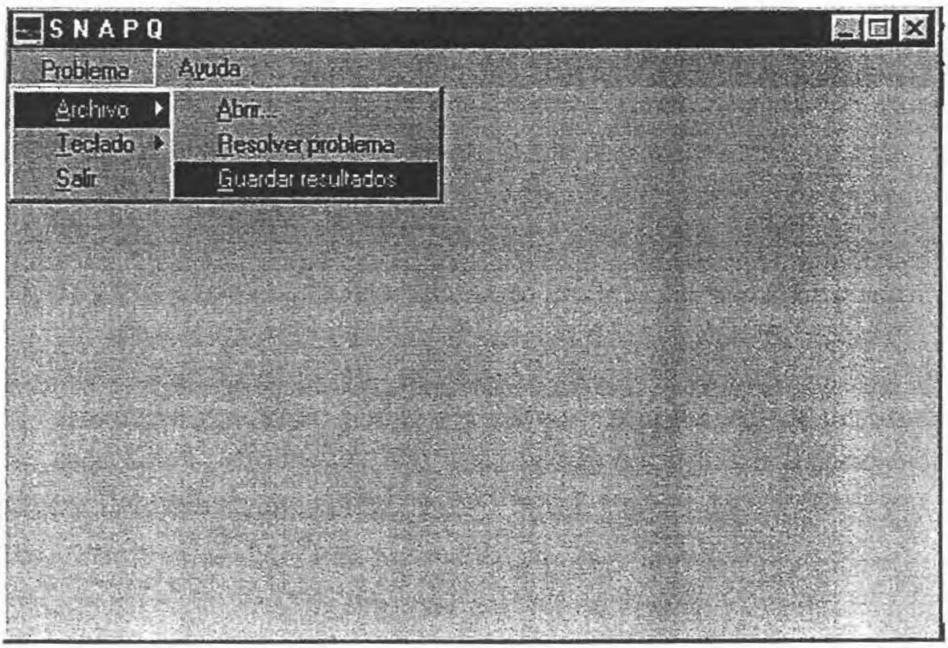


Figura 10. Guardar los resultados en un archivo.

Aparecerá un cuadro de diálogo en donde se debe especificar el nombre del archivo que contendrá la información de los resultados obtenidos. El archivo debe tener extensión .m, el sistema guardará el archivo en el directorio de trabajo, si se desea que el archivo se guarde en otro lugar se debe especificar la ruta. El cuadro de diálogo es el siguiente:

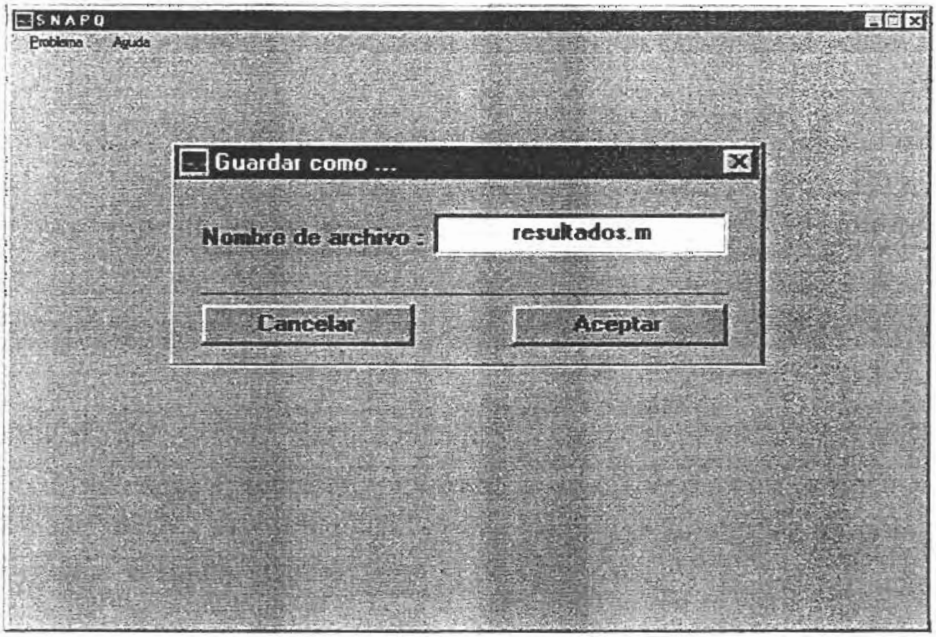


Figura 11. Especificar el nombre del archivo donde se guardarán los resultados

El archivo guardado puede abrirse en cualquier editor de textos (se recomienda wordpad). Ver apéndice B para mayor información acerca del archivo de salida.

Para mostrar los resultados en pantalla, seleccionar del menú principal Problema-Teclado-Mostrar_resultados.

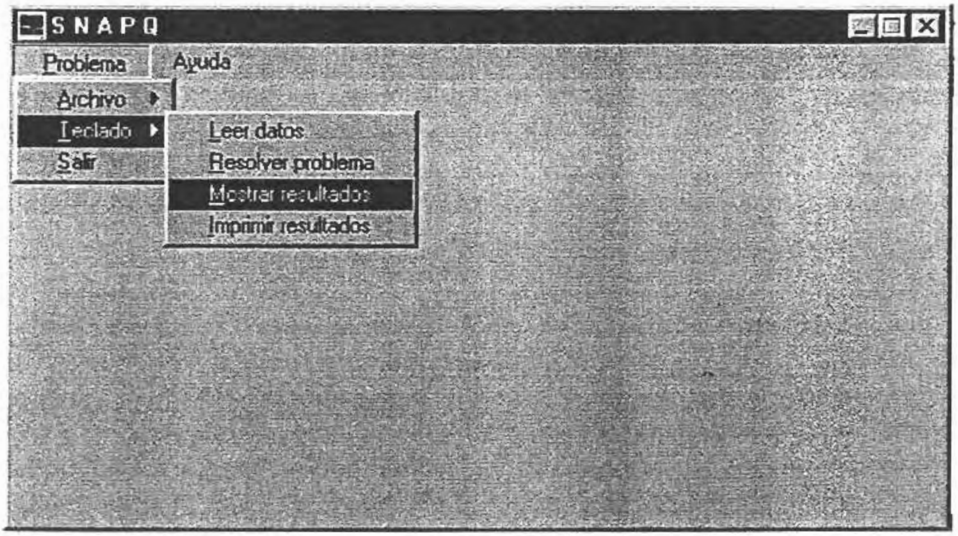


Figura 12. Mostrar resultados en pantalla.

Con lo cual aparecerán en patalla la solución óptima (x óptima) del problema y los multiplicadores de Lagrange (Lambda) asociados a cada una de las restricciones de desigualdad.

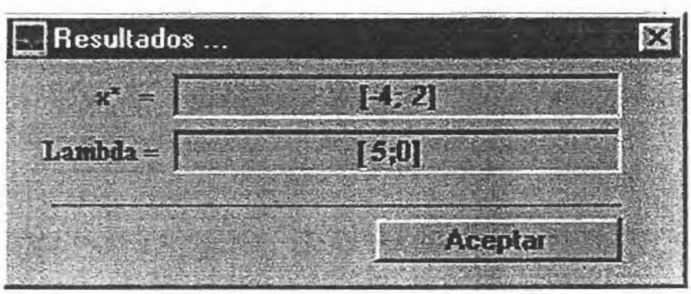


Figura 13. x óptima y multiplicadores de Lagrange

Imprimir resultados.

Si los resultados fueron guardados en un archivo, basta con abrir el archivo desde un editor de textos e imprimirlo. Ahora bien, si los resultados son los de un problema cargado desde el teclado, en el menú principal seleccionar Problemas-Teclado-Imprimir_resultados, tal como lo muestra la figura siguiente:

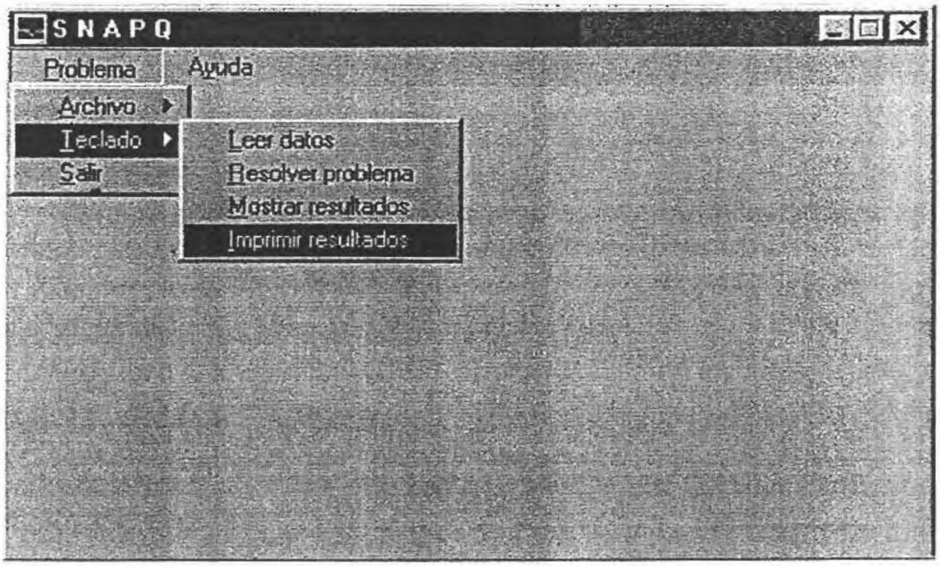


Figura 14. Imprimir los resultados de un problema dado desde el teclado.

Obtener ayuda.

Para obtener ayuda dentro de la ejecución de NSAQP, seleccionar del menú principal Ayuda, con lo que se mostrará un ventana desde la cual se prodrá seleccionar el tema de ayuda deseado, la siguiente figura ejemplifica lo anterior.

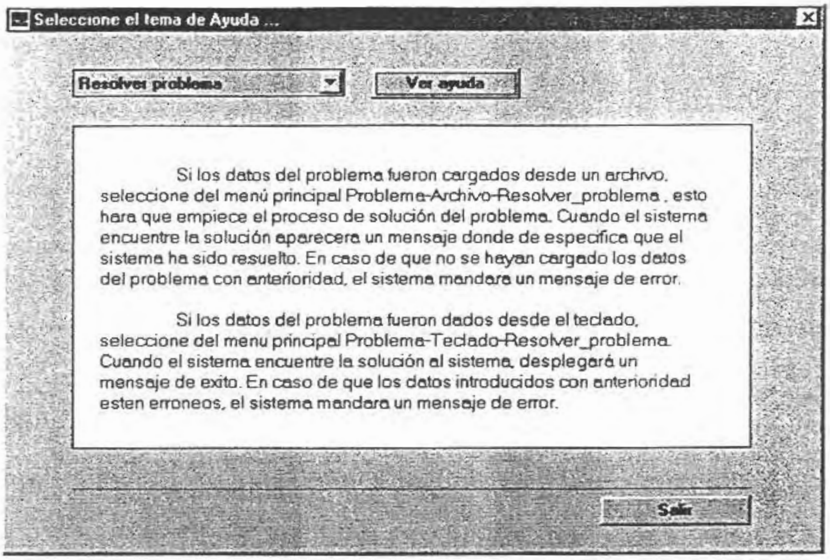


Figura 15. Ventana de la opción Ayuda

Una vez seleccionado el tema, pulsar el botón Ver ayuda para que el sistema muestre la información requerida

Salir del sistema.

Para salir del sistema sólo hay que seleccionar del menú principal Problema-Salir, lo cual hará que se retorne a la ventana principal de MATLAB.

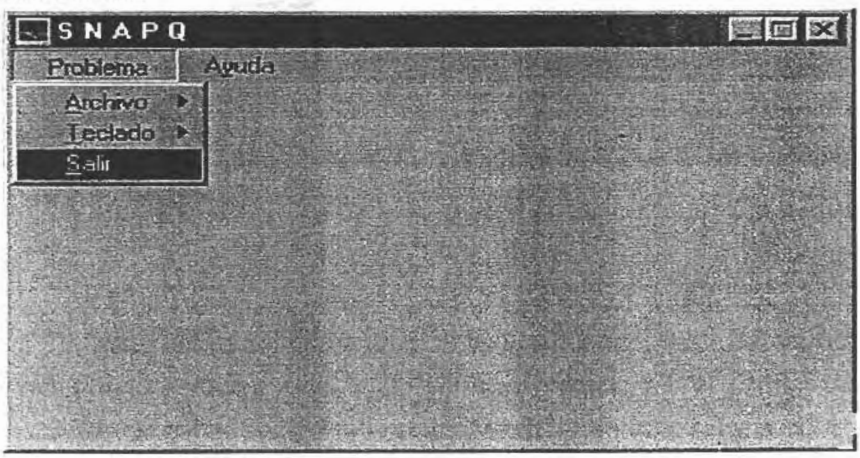


Figura 16. Salir del sistema.

Para salir de MATLAB seleccione del menú principal Archivo-Salir.

Apéndice A.

Archivo de entrada.

Cuando el usuario desee cargar los datos del problema desde un archivo, debe asegurarse de que el archivo cumpla con las siguientes especificaciones, de lo contrario los datos no seran leídos correctamente ocasionando errores en el sistema.

1.- El archivo que contiene los datos del problema a resolver debe tener extensión .m, esta se debe especificar explícitamente a la hora de que el sistema pida introducir el nombre del archivo.

2.- El archivo debe contener los datos siguientes en este orden, el número de variables, el número de restricciones, la matriz hessiana Q, el vector de costos c, la matriz de restricciones A, el vector de términos independientes b y el punto inicial x_0.

3.- Puesto que los datos de los problemas se obtuvieron de un generador de problemas prueba, se adoptó el formato con el que este generador proporciona los archivos, por consiguiente, el formato de los archivos de entrada debe ser el siguiente:

a) La primer línea del archivo contiene el número de variables.
b) La segunda línea del archivo puede contener cualquier número.
c) En la tercera línea se especifica el número de restricciones.
d) Las tres líneas siguientes pueden contener cualquier valor.
e) Depués, en las líneas subsecuentes se especifican los valores de la matriz Q, el vector c, la matriz A, el vector b y el punto inicial. Cada valor de estos vectores y matrices debe colocarse una sola línea y se debe especificar con letra el nombre del vector o matriz antes de proporcionar estos valores.

El siguiente archivo muestra el formato y orden de los datos que debe tener el archivo de entrada .m.

```
3
0
2
1
1
1
MATRIZ G
2.360468510106240e+000
-1.548998309424215e-001
5.623708181657638e-001
-1.548998309424214e-001
1.968901084345295e+000
-2.055448599475784e-002
5.623708181657638e-001
-2.055448599475784e-002
1.732258700148276e+000
VECTOR c
5.090929966551645e+001
-8.093182692556185e+001
8.088484399789348e+001
MATRIZ A
-3.097521303551862e-001
-2.835519392884376e-001
-3.910905080705666e-001
-7.586619126174120e-001
-8.209959879962375e-001
-1.315712065036797e+000
VECTOR B
8.907842088470405e+000
2.996377839719214e+001
PUNTO INICIAL
-8.827912066979977e+000
1.878998983822546e+001
-2.940832196034458e+001
```

Apéndice B.

Archivo de salida.

El nombre del archivo en donde se guardan los resultados obtenidos de la solución de un problema dado, debe tener extensión .m. Este archivo se puede abrir un cualquier editor de textos, de preferencia en wordpad. El archivo que se muestra a continuación muestra los resultados obtenidos al solucionar un problema con los datos expuestos en el apéndice A.

```
SOLUCION OPTIMA
-8.972979300905465e+000
3.936495309135336e+001
-4.421086952157314e+001
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE
3.976285355221243e+000
0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000
```

En primer lugar se muestra la solución óptima del problema, seguido de los multiplicadores de Lagrange asociadados a cada una de las restricciones del mismo. El multiplicador de Lagrange igual a cero, corresponde a la restricción que evaluada en el punto óptimo, no se cumple en la igualdad.

Apéndice C.

Un ejemplo gráfico.

Este espacio está dedicado para ilustrar por medio de gráficos, el proceso que se desarrolla para poder encontrar la solución óptima de un problema dado.

El ejemplo que se considera tiene un campo de aplicación bastante restringido, ya que es aplicable solamente a problemas con dos variables de decisión. A pesar de esa limitación, el ejemplo resulta ilustrativo de algunas de las propiedades que podrán ser generalizadas y formuladas en un lenguaje matemático formal para problemas con más varibles.

Supongase que se tiene el siguiente problema.

$$
\begin{array}{rcl}
\text{min. } \ f(x) & = & x_1^2 + x_2^2 + 13x_1 + x_2 \\
s.a. \ \ x_1 + x_2 & \geq & -2 \\
x_1 - 2x_2 & \geq & -12
\end{array}
$$

entonces, se tiene que:

$$
G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \end{pmatrix}
$$

Ahora bien, para comenzar a resolver el problema, se necesita conocer un punto inicial que sea factible. Este punto se puede encontrar al graficar cada una de las restricciones del problema y así conocer el espacio de soluciones factibles.

En la siguiente figura se encuentra representado el espacio de soluciones factibles del problema tomando sólo la restricción 1.

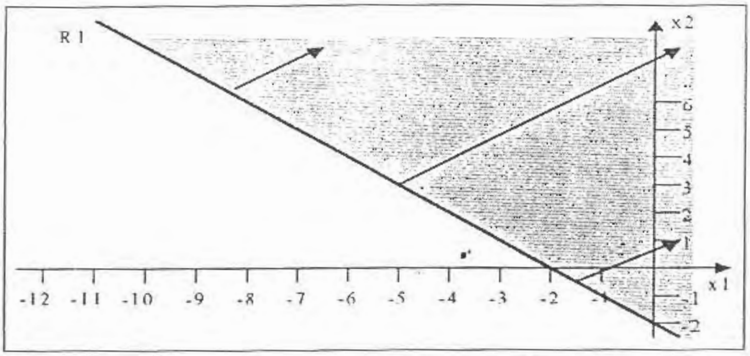


Fig. Espacio de soluciones factibles para la restricción 1.

La parte sombreada indica que cualquier punto que se tome dentro de esa región, cumple con la restricción 1.

En la figura siguiente se encuentra representado el espacio de soluciones factibles del problema tomando solo la restricción 2.

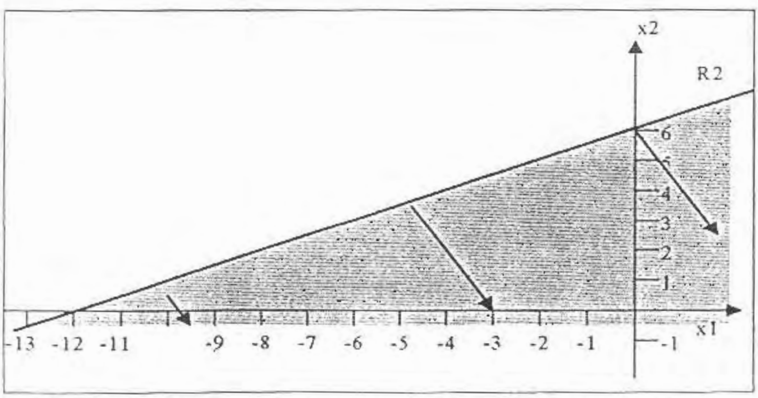


Fig. Espacio de soluciones factibles para la restricción 2.

Como se puede observar, la interseccion de los dos espacios de soluciones factibles mostrados anteriormente, representa el conjunto de soluciones factibles del problema, del cual se puede tomar un punto para iniciar a resolver el problema, es decir:

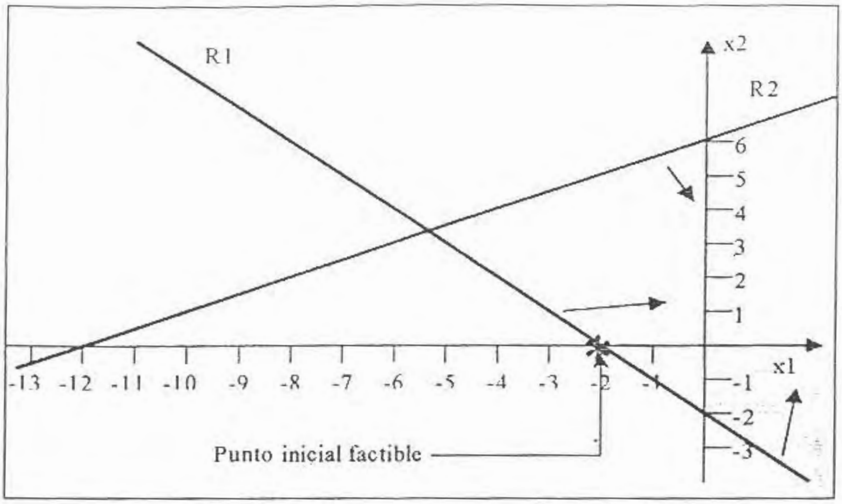


Fig. Espacio de soluciones factibles para el problema en general.

La parte sombreada indica que cualquier punto que se tome dentro de esa región, es un punto factible del problema. por lo que un punto factible es:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se calcula el conjunto activo, es decir las restriciciones que evaluadas en el punto factible se cumplen en la igualdad, con lo que se obtiene que el conjuto activo se compone de la restricción 1, se calcula el vector de búsqueda y el multiplicador de Lagrange asociado a esta restricción, con lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &= 5 \end{aligned}$$

El vector de búsqueda indica que se puede encontrar una x mejor de la que se tiene, por lo que se calcula la longitud de paso y se actualiza la solución x.

$$\alpha_1 = 1$$
$$x_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado que con el nuevo punto obtenido el conjunto activo no cambia, se vuelve a calcular el nuevo vector de búsqueda y el multiplicador de Lagrange asociado a la restriccion activa, de lo cual se obtiene que:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 5$$

Ahora se tiene que el vector de búsqueda indica que el punto actual es la solución óptima para el problema con las restricciones del conjunto activo, se comprueba que sea el óptimo del problema en general verificando que el multiplicador de Lagrange sea mayor o igual cero. Dado que $\lambda_1 = 5$ el problema se ha resuelto con x óptima igual a:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La siguiente figura muestra dónde se ubica este punto:

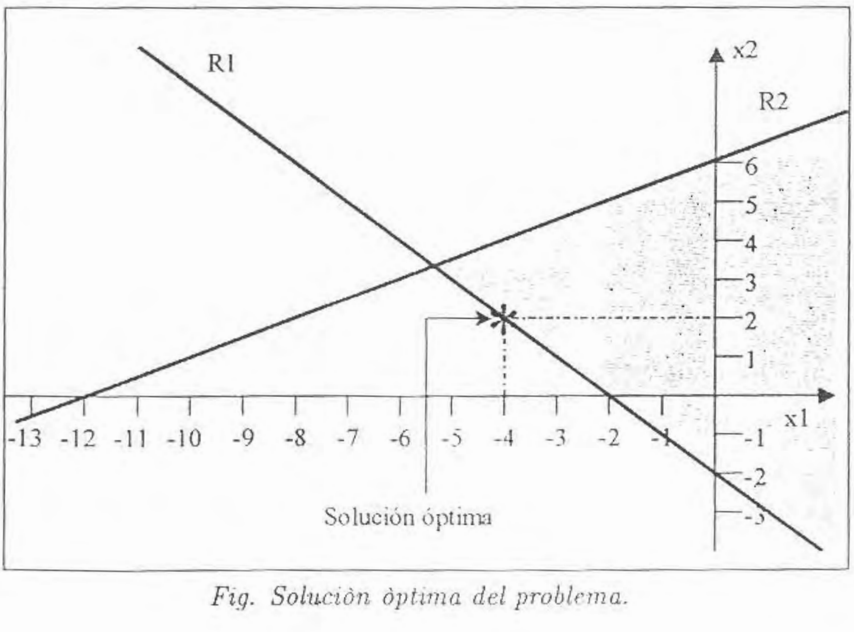


Fig. Solución òptima del problema.

Apéndice D.

Glosario.

Dirección factible. Dado un punto factible x, un vector de dirección d es factible si existe $\alpha > 0$ tal que $x + \alpha d$ es factible. El objetivo de la dirección factible es hacer que en cada iteración el valor objetivo mejore.

Error dual. Es el error que se obtiene en los multiplicadores de Lagrange.

Error primal. Es el error que se obtiene en la solución óptima.

Lagrangiano. Esta definido como la función:$L(x, u, \lambda) = f(x) + ug(x) + \lambda h(x)$ para x en X y $u \geq 0$.

Longitud de paso. Es un escalar α, el cual determina cuanto hay que moverse a lo largo de un vector de dirección d.

Matriz definida positiva. Una matriz A es definida positiva si sus valores propios son todos estrictamente mayor que cero, es decir: $\lambda > 0$.

Matriz hessiana. Es la matriz formada por la segundas derivadas parciales de una función $f(x)$, matemáticamente: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Norma 2 de un vector. Para un espacio en R^n, la norma 2 de un vector se define como $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Norma infinita de un vector. Para un espacio en R^2, la norma infinita de un vector se define como $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$.

Número de condición (de una matriz). Éste es $||A||\ ||A^{-1}||$ cuando A es no singular y $||\ ||$ es alguna norma de la matriz. Si el número de condición de un problema es mayor que uno, se dice que el problema es mal condicionado.

Optimización. Es la búsqueda de la mejor solución a un problema.

Problema bien condicionado. Tiene la característica de que una minima variación en los datos causa una pequeña variación en la solución.

Problema degenerado. Tiene la característica de que algunas de sus restricciones de desigualdad que son activas, tienen multiplicadores de Lagrange asociados igual a cero.

Problema no lineal. Por lo menos uno de las funciones (objetivo o restricciones) es no lineal.

Punto factible. Un punto es factible si satisface todas las restricciones de un problema.

Región factible. Es el conjunto de todos los puntos factibles. Un programa matemático es factible si su región factible no está vacía.

Restricción activa. Es una restricción de desigualdad que se cumple en la igualdad en un punto dado.

Restricción inactiva. Es una restricción de desigualdad que no se cumple en la igualdad en un punto dado.

Vector gradiente. Vector formado por las primeras derivadas parciales de una función $f(x)$, matemáticamente: $\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]$.

Bibliografía.

[1] S.I. Gass and M. H. Carl (1993). "Encyclopedia of Operations Research and Magament Science". Kluwer Academic Publishers.

[2] Marcial L. , Garcia L. y Sandoval L.(1993). "Generador Aleatorio de Problemas Prueba Para Programación Cuadrática". Reporte de Investigación No. 4, Proyecto Programación Cuadratica No. 1862E (CONACyT), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[3] A. Floudas Christodoulos (1995). "Nonlinear and Mixed-Integer Optimization". Oxford University Press, Inc.

[4] E. Luenberger David (1984). "Programación Lineal y No Lineal". Addison-Wesley Iberoamericana.

[5] Philip E. Gill, Walter Murray, Margaret H. Wright (1981). "Practical Optimization". Academic Press, Inc.

[6] Pedreira Andrade Luis P., Sejias Macías J. Antonio (1996). "Método del Conjunto Activo: Una Primera Aproximación a su Aplicación al Estudio del Peaje Óptimo". Universidad de A Coruña

[7] H.Golub Gene, Van Loan Charles F. (1989)." Matriz Computations". The Johns Hopkins University Press.

[8] Escalona García Roberto (1997). "Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB". Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A.

[9] Nocedal and Wright (1999). "Numerical Optimization". Springer Series in Optimization Research.

[10] Philip E. Gill, Walter Murray, Margaret H. Wright (1991). "Numerical Linear Algebra and Optimization". Addison-Wesley Publishing Company.

[11] M. Gould Nicholas I., E. Hribar Mary and Nocedal Jorge (1998). "On the Solution of Equality Constrained Quadratic Programming Problems Arising in Optimization". Department for Computation and Information, Rutherford Appleton Laboratory.

[12] Gómez Suárez Manuel A., Pedreira Andrade Luis. P. (1997). "Sobre la Convergencia del Método de Conjunto Activo que Controla la Inercia para Programación Cuadrática.". Universidad de A Coruña.

[13] Optimization Technology Center at Argonne National Laboratory and Northwestern University.
http://www.ece.nwu.edu/OTC/

[14] NEOS Guide
http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/index.html

[15] NEOS Server from Optimization.
http://www-neos.mcs.anl.gov/

[16] The MathWorks
http://www.mathworks.com/