

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LAS REDES NEURONALES DE
HOPFIELD UTILIZANDO FUNCIONES DE LYAPUNOV Y EL
TEOREMA DE LASALLE**

TESIS:

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

MAYRA AGAMA SANTIAGO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. TOMÁS PÉREZ BECERRA

HEROICA CIUDAD DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.

NOVIEMBRE DE 2025

Dedicatoria

*A mis padres, Florencia Santiago y Demetrio
Agama con todo mi amor y gratitud. Ojalá
que este trabajo sea un reflejo de su esfuerzo
y les demuestre que todo valió la pena.*

*Y para mí, por no dejar que un reinicio me
definiera, sino que me fortaleciera. Esta
tesis no es solo la que me titula, es la
que me enseñó la resiliencia.*

Agradecimientos

Esta tesis, antes que nada, es un reflejo del amor y la fe inquebrantable de mis padres. Ellos son el cimiento sobre el que se construyó este trabajo. Gracias por confiar en mí y ayudarme en todo momento. En especial, a mi madre, por sus cuidados infinitos durante mis épocas de enfermedad; sin ti, literalmente, no estaría aquí.

A mis hermanos Heriberto y Jesús Agama por su protección, sus enseñanzas y por cuidarme desde que era pequeña. A Sara Alejo, por ser como una hermana con quien crecí y compartí momentos tan gratos. A mis sobrinos, Ángel Damián y Alexis Agama Alejo, a quienes vi crecer y con los que aún disfruto divirtiéndome. Y a Teresa , por brindarme su confianza y sabiduría.

A Jorge Carrasco y su familia, les agradezco por su calidez, su apoyo incondicional y por todas las enseñanzas que han compartido conmigo.

A mis amigos de Licenciatura: Citlalli, Beatriz y Adrián, mi gratitud más profunda. Sin su ayuda, su cuidado y su compañía, no habría podido finalizar mis estudios. Fueron mi soporte, mi confianza y mi seguridad, las voces que me impulsaban a seguir adelante cuando enfrentaba a ese “monstruo” llamado vida estudiantil. Extiendo este agradecimiento a todos mis amigos de la universidad que formaron parte de esta etapa y dejaron su huella: Miriam, Luis Arellanes, Vania, Germán, Héctor, Mónica, Quiroz, Elías, Bogdan y Pol. A todos, gracias por las enseñanzas y los momentos compartidos. A todas mis amistades que forje a lo largo de mi vida universitaria, las que están y las que se fueron dejaron huella en mí. Gracias por todas sus enseñanzas.

En el ámbito académico, debo un agradecimiento primordial a mi director de tesis, el Dr. Tomás Pérez Becerra. Le agradezco profundamente por aceptar guiarme,

a pesar de su apretada agenda, por confiar en mi capacidad y por brindarme su conocimiento para que este trabajo llegara a su conclusión. Su disponibilidad para reuniones, sus correcciones minuciosas y su impulso para que yo mejorara fueron invaluableles. Gracias por ser un buen guía, me llevo los mejores recuerdos de este tiempo trabajando con usted.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a los sinodales que honraron este proyecto con su evaluación. Al Dr. Pedro Alberto Antonio Soto y al Dr. Emmanuel Abdías Romano Castillo, por su disponibilidad y las revisiones que enriquecieron este trabajo. De manera muy especial, al Dr. Eduardo Sánchez Soto, cuyo apoyo trascendió lo académico. Le agradezco no solo por sus revisiones, sino por creer firmemente en mí, por escucharme y apoyarme en todo momento.

Por último, pero no menos importante, deseo agradecer a la Universidad Tecnológica de la Mixteca y al programa de mi Licenciatura. Esta institución fue el espacio donde crecí, aprendí gracias a todos los profesores que me guiaron y me dieron las herramientas para lograr este trabajo.

Índice general

Lista de Figuras	vii
Introducción	ix
1. Fundamentos de redes neuronales de Hopfield	1
1.1. Teoría básica sobre cálculo	2
1.2. Teoría básica sobre circuitos	13
1.3. Teoría básica sobre álgebra	24
1.4. Teoría básica sobre redes neuronales	31
1.5. Modelo discreto y continuo de las redes de Hopfield	37
1.5.1. Modelo discreto de Hopfield	37
1.5.2. Modelo continuo de Hopfield	41
2. Estabilidad de Lyapunov y el teorema de invarianza de LaSalle	45
2.1. Definiciones básicas	46
2.2. Estabilidad de Lyapunov	48
2.3. Estabilidad asintótica y global	50
2.4. Conjuntos invariantes	50
2.5. Teorema de Invarianza de LaSalle	51
3. Regla de Hebb	55
3.1. Postulado de Donald O. Hebb	55
3.2. Regla de Hebb supervisada	59

3.3. Memoria de contenido direccionable.	61
4. Análisis de estabilidad en redes de Hopfield	65
4.1. Análisis de la derivada de la función de Lyapunov	67
4.2. Conjuntos Invariantes	71
4.3. Atractores de Hopfield como mínimos de la función de Lyapunov . . .	79
4.4. Red de Hopfield de alta ganancia	81
4.5. Análisis de trayectorias de las salidas de la red de Hopfield	86
4.6. Análisis de la matriz de pesos con diagonal cero	93
Conclusión	97
Bibliografía	99

Índice de figuras

1.	Captura de pantalla del sitio web de los premios Nobel donde se observa a Hopfield y a Hinton. Traducido de [35].	x
2.	Mapa destacando las investigaciones relevantes sobre Redes de Hopfield.	XIV
1.1.	Representación de una función $f(x) = y$	3
1.2.	Representación del vector dirección de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$	4
1.3.	Ejemplo donde $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas.	6
1.4.	Interpretación física de la divergencia. Extraído de [30].	8
1.5.	Representación de las trayectorias de $\dot{x} = -y$ y $\dot{y} = x$	11
1.6.	Representación de un atractor: todas las trayectorias convergen al origen.	12
1.7.	Ejemplos de algunos componentes eléctricos representativos (Fuente [28]).	14
1.8.	Ejemplo básico de un circuito eléctrico cerrado con fuente y receptor.	15
1.9.	Corriente alterna (a) y corriente continua (b) (Obtenida de [21]).	16
1.10.	Ejemplo de un circuito con 3 nodos y 5 ramas (Extraída de [2]).	17
1.11.	Representación de la Primera Ley de Kirchhoff LCK (Tomada de [2]).	20
1.12.	Representación de un circuito aplicando la Segunda Ley de Kirchhoff LVK (Fuente [2]).	20
1.13.	Ejemplos de circuitos en serie con la misma corriente. Recopilado de [17].	22
1.14.	Ejemplos de circuitos en paralelo con dos trayectorias. Extraído de [17].	23

1.15. Características de un amplificador operacional. Tomado de [14].	23
1.16. Amplificador operacional ideal (Recopilada de [14]).	24
1.17. Vista humana conectada con el cerebro (Recuperada de [11]).	32
1.18. Ilustración de la anatomía de una neurona biológica encontrada en [1].	33
1.19. Arquitectura de una red neuronal definida por $a = f(W\vec{p} + b)$ (Modi- ficada de [13]).	36
1.20. Capas de una red neuronal conectada completamente.	36
1.21. Arquitectura de cuatro neuronas de un modelo discreto de Hopfield conectadas.	37
1.22. Red de Hopfield discreta	38
1.23. Circuito eléctrico del modelo continuo de Hopfield (Modificada de [13]).	41
3.1. Donald O. Hebb. Tomada de [19].	56
4.1. Diagrama de fase donde se observa el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema.	76
4.2. Plano fase del sistema. El extremo inferior izquierdo y superior derecho son los atractores del sistema.	77
4.3. Plano fase del sistema, donde se muestran las trayectorias solución. Se observa que se dirigen hacia los dos puntos atractores.	78
4.4. Gráfica del amplificador característico para distintos valores de γ	82
4.5. Gráfica de $h(\vec{a}(t))$ y $\vec{a}(t)$ con diferentes valores de γ	83
4.6. Gráfico de la superficie $3D$ y su punto silla.	85
4.7. Gráfico de la superficie $3D$ con sus eigenvalores $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 0$	92
4.8. Gráfico de la superficie $3D$ con sus eigenvalores $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 0$ desde otro ángulo.	93

Redes neuronales y el premio Nobel de Física 2024

En las últimas décadas, las redes neuronales artificiales han cobrado una gran relevancia como modelos computacionales capaces de resolver problemas complejos en diversas áreas del conocimiento. Dentro de este ámbito, se encuentran las redes neuronales de Hopfield, las cuales destacan por su estructura recurrente y su capacidad para modelar funciones como memorias asociativas. Estos modelos fueron introducidos por John Hopfield y Geoffrey E. Hinton en [27] en el año 1982. Gracias a este trabajo, Hopfield fue merecedor del premio Nobel de Física en 2024, otorgado por la Real Academia de Ciencias en Suecia. De hecho, Hinton también obtuvo el premio Nobel por la aplicación de la red para la creación de las máquinas de Boltzmann (Figura 1). Estas redes representan un modelo clásico de redes recurrentes con aplicaciones en la optimización, recuperación de patrones y el modelado de memoria asociativa. Se caracterizan por su dinámica basada en energía, donde el estado evoluciona hacia configuraciones estables que corresponden a mínimos locales de una función de energía, la cual es conocida como función de Lyapunov. El análisis de la estabilidad de estas redes es fundamental para garantizar que, ante una perturbación o una condición inicial arbitraria, el sistema converja hacia un estado deseado o estable.

Estas redes pueden describirse mediante sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias, y cuya estabilidad es esencial para garantizar el correcto almacena-



John J. Hopfield

“Por los descubrimientos e inventos fundamentales que permiten el aprendizaje automático con redes neuronales artificiales”



- Extensión del Premio Nobel. Foto: Nanaka Adachi

Geoffrey Hinton

“Por los descubrimientos e inventos fundamentales que permiten el aprendizaje automático con redes neuronales artificiales”



- Extensión del Premio Nobel. Foto: Clément Morin

Figura 1: Captura de pantalla del sitio web de los premios Nobel donde se observa a Hopfield y a Hinton. Traducido de [35].

miento y recuperación de patrones. En este contexto, las herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, en particular las funciones de Lyapunov, se presentan como una metodología para el estudio del comportamiento asintótico de las trayectorias del sistema. Una función de Lyapunov permite verificar la estabilidad sin resolver explícitamente el sistema de ecuaciones diferenciales que lo describe. Asimismo, el Teorema de Invarianza de LaSalle extiende este análisis al establecer condiciones bajo las cuales las soluciones del sistema convergen hacia el conjunto más grande invariante contenido en el conjunto donde la derivada de la función de Lyapunov se anula. Esta perspectiva ofrece una visión más completa del comportamiento asintótico del sistema y de su estructura interna de estabilidad.

La presente investigación se centra en el análisis de la estabilidad de redes de Hopfield utilizando la función de Lyapunov propuesta por Hopfield y el teorema de LaSalle, con el objetivo de mostrar los criterios que garantizan la convergencia de la



red neuronal hacia puntos de equilibrio estables. Este enfoque no solo proporciona los fundamentos matemáticos para el funcionamiento de estas redes, sino que permite evaluar la robustez de las soluciones ante perturbaciones y diferentes condiciones iniciales, contribuyendo al desarrollo de modelos confiables para aplicaciones en el ámbito de la inteligencia artificial.

Antecedentes históricos y teóricos

La historia de las redes neuronales artificiales está llena de grandes trabajos y esfuerzos para desarrollar conceptos y teorías que ahora se dan por sentado. Esta historia ha sido documentada por diversos autores, se puede mencionar un libro particularmente interesante: “Neurocomputing: Foundations of Research” de John Anderson y Edward Rosenfeld ([3]), en el cual se han recopilado y editado un conjunto de unos 43 artículos de especial interés histórico. Cada artículo va precedido de una introducción que lo sitúa en perspectiva histórica.

La historia de las redes neuronales está acompañada siempre del desarrollo y aplicación de teorías matemáticas tales como la optimización, el álgebra lineal, el análisis funcional, cálculo, entre otras, así como de su implementación. Sin embargo, estos avances parecen haber ocurrido de forma intermitente, en lugar de una evolución constante. Por otro lado, parte del trabajo que fundamenta a las redes neuronales se produjo a finales del siglo XIX y principios del XX. Consistió principalmente en trabajos interdisciplinarios en física, psicología y neurofisiología, realizados por científicos como Hermann Von Helmholtz, Ernst Mach e Ivan Pavlov. Estos primeros trabajos enfatizaron las teorías generales del aprendizaje, la visión, el condicionamiento, etc., y no incluyeron modelos matemáticos específicos del funcionamiento



neuronal.

Los primeros modelos de redes neuronales surgieron desde el año 1943 con los trabajos de Warren McCulloch y Walter Pitts, quienes demostraron que las redes de neuronas artificiales podían, en principio, calcular cualquier función aritmética o lógica. Siguió Donald Hebb, quien propuso que el condicionamiento clásico (descubierto por Pavlov) se debe a las propiedades de las neuronas individuales y propuso un mecanismo para el aprendizaje en neuronas biológicas.

Posteriormente, Frank Rosenblatt desarrolló el perceptrón en 1958, una de las primeras redes neuronales implementadas. Él y sus colegas demostraron la capacidad del perceptrón para el reconocimiento de patrones. Este éxito inicial generó un gran interés en la investigación de redes neuronales. Casi al mismo tiempo, Bernard Widrow y Ted Hoff introdujeron un nuevo algoritmo de aprendizaje y lo utilizaron para entrenar redes neuronales lineales adaptativas, similares en estructura y capacidad al perceptrón de Rosenblatt. La regla de aprendizaje de Widrow-Hoff se sigue utilizando en la actualidad.

Algunas limitaciones inherentes de las redes fueron ampliamente difundidas en un libro de Marvin Minsky y Seymour Papert, entre ellas, el alto costo computacional requerido, con lo que se generó la creencia en la comunidad científica de que seguir investigando sobre redes neuronales era un callejón sin salida. Esto, sumado a la falta de computadoras digitales potentes para experimentar, provocó que muchos investigadores abandonaran el campo. Es hasta el surgimiento de las computadoras personales y estaciones de trabajo, en la década de 1980, que se dio el auge en el siglo pasado en la segunda era de la computación. Además, se introdujeron dos nuevos conceptos importantes; el primero fue el uso de la mecánica estadística para explicar el funcionamiento de una clase específica de red recurrente, que podía utilizarse como memoria asociativa. Esto fue descrito en un artículo fundamental del físico John Hopfield. El segundo desarrollo clave de la década de 1980 fue el algoritmo de retro-



propagación para el entrenamiento de redes perceptrónicas multicapa, descubierto independientemente por varios investigadores. Respecto al primer concepto, Hopfield tuvo la influencia de sus padres por la física; luego buscó desarrollarse en el área de biología y química. Posteriormente, se interesó en el funcionamiento del cerebro. Es en esta etapa donde crea su primera red simple con salidas 0 y 1 si la respuesta se dispara o no; es aquí donde observó cierta relación con la energía del sistema y agregó condiciones más complejas al sistema. Con ayuda del neurocientífico David Tang, resolvió el llamado problema del viajante.

Estado del arte

A continuación, se recopilan algunos artículos que abordan el tema desde un enfoque matemático. En la Figura 2 se visualiza la distribución geográfica de las investigaciones incluidas en este estado del arte, así como también en qué revista y año se publicaron. Se observa una concentración significativa del conocimiento en el continente asiático, particularmente en países como China, Rusia, Japón, Tailandia y Vietnam. Esta nos ofrece la oportunidad para contribuir al campo desde otras regiones.

Como se puede analizar en la Figura 2, el tema en el que se enmarca la tesis tiene relevancia actual; por ejemplo, en [8], del año 2020, los autores proponen un análisis de estabilidad para redes neuronales de Hopfield complejas que definen como USCVHNN con retrasos variables, incertidumbres paramétricas y perturbaciones estocásticas. Utiliza un enfoque que consiste en dividir el retraso (decaimiento) en subintervalos, combinado con funciones de Lyapunov y desigualdades matriciales lineales (LMIs). En los resultados destacan aplicaciones prácticas, como procesamiento



Universidad Tecnológica de la Mixteca Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

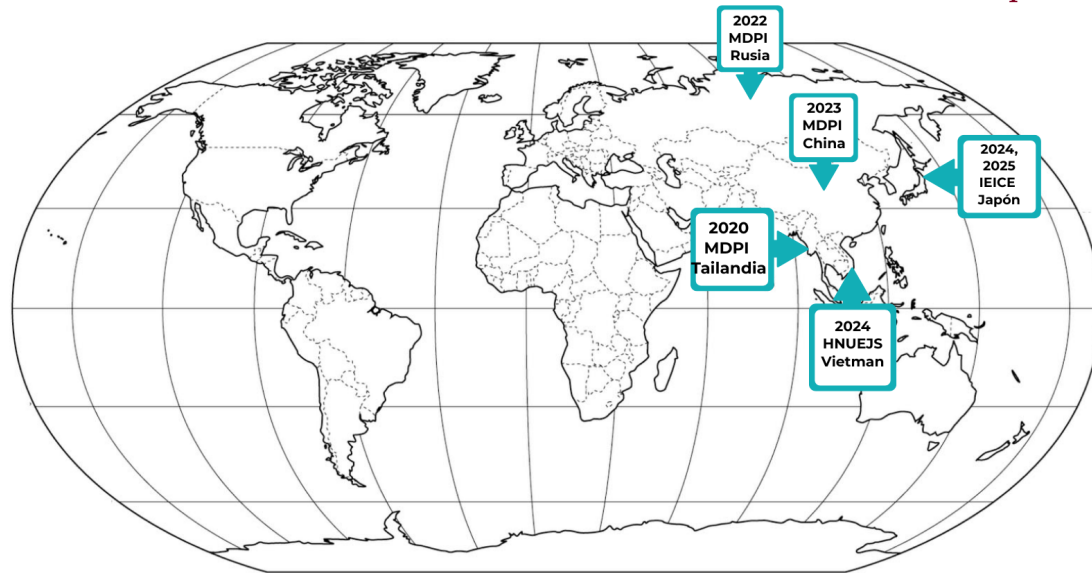


Figura 2: Mapa destacando las investigaciones relevantes sobre Redes de Hopfield.

de señales complejas, y la eficacia. Esto fue simulado en MATLAB.

Luego en [7], en el año 2022, se describen los resultados de una investigación cuyo objetivo fue estudiar la estabilidad de soluciones en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con lados derechos discontinuos, aplicando los resultados a redes neuronales de Hopfield. Los autores investigaron tanto ecuaciones lineales como no lineales, estableciendo condiciones suficientes para la estabilidad asintótica utilizando normas logarítmicas de los coeficientes (para sistemas lineales) y del jacobiano del lado derecho (para sistemas no lineales). Gracias a esto, se estableció una facilidad de expresión, determinación de áreas de robustez frente a variaciones paramétricas y aplicabilidad a diferentes métricas de estabilidad. Las conclusiones destacan la utilidad de los resultados obtenidos para analizar redes neuronales con sinapsis y funciones de activación discontinuas, proponiendo extensiones futuras en sistemas con retardos, ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, y aplicaciones en ecología, control automático e inmunología. El trabajo contribuye al campo de las redes neuronales y los sistemas dinámicos discontinuos, proporcionando herramientas teóricas para

garantizar estabilidad en modelos complejos.

Al año siguiente (2023), los autores del artículo [33] ofrecieron una revisión exhaustiva de los sistemas caóticos basados en redes neuronales de Hopfield memristivas ¹(MHNN), destacando su potencial para generar

comportamientos dinámicos complejos como hipercaos, multiestabilidad y atractores multicapa, gracias a la integración de memristores que emulan sinapsis neuronales o efectos de inducción electromagnética. El objetivo principal es sintetizar los avances en modelado, dinámicas caóticas y aplicaciones prácticas. Las conclusiones enfatizan la versatilidad de las MHNN para aplicaciones en inteligencia artificial y seguridad informática, aunque existe la necesidad de investigar su implementación en hardware y la incorporación de estímulos externos adicionales para modelar sistemas biológicos más realistas.

Gracias a la contribución de Hopfield también existen sistemas con retardos variables, llamadas redes de Hopfield con retardos proporcionales. Se utilizan para señales biológicas, control en tiempo real, entre otros. De acuerdo con [26], del 2024, estas redes son una extensión importante del modelo clásico, descritas por el sistema:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{f}_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^d \tilde{f}_j(x_j(p_{ij}t)) + I_i$$

donde:

- $x_i(t)$ representa el estado de la neurona i -ésima.
- $0 < p_{ij} < 1$ introduce retardos proporcionales no acotados.
- Los parámetros c_i , a_{ij} y a_{ij}^d tienen incertidumbres intervalares.
- Las funciones $\tilde{f}_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de activación no lineales (por ejemplo,

¹Un memristor es un componente electrónico pasivo de dos terminales que relaciona la carga eléctrica con el flujo magnético.

tangente hiperbólica o la función seno) que introducen la no linealidad del sistema, tanto en el término instantáneo como en el retardado.

- I_i es un estímulo o entrada externa constante aplicada a la neurona i .

El artículo [26] establece que, bajo ciertas condiciones, existe un único punto de equilibrio x^* que satisface la ecuación algebraica no lineal:

$$-Cx^* + A\tilde{f}(x^*) + A^d\tilde{f}(x^*) + I = 0,$$

donde A y A^d son las matrices de pesos de conexión instantánea y con retardo, respectivamente; C es la matriz diagonal de tasas de relajación neuronal; e $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas externas.

La existencia y unicidad de x^* se demuestra mediante el teorema del homeomorfismo global, requiriendo que las funciones de activación sean globalmente Lipschitz. Adicionalmente, para que este equilibrio sea globalmente asintóticamente estable de forma robusta, debe existir una matriz diagonal definida positiva denotada como $M \succ 0$ de tal forma que $M = \text{diag}\{m_i\}$ y con escalares $\alpha, \gamma > 0$ tales que se cumpla la condición:

$$\Theta = 2MC - \alpha m^* I_n - \gamma M^2 \tilde{A}^d - \alpha^{-1} m^* H F^2 - \gamma^{-1} n F^2 \succ 0,$$

donde F es una matriz diagonal que acota las derivadas de las funciones de activación, \tilde{A}^d y H se construyen a partir de las cotas de las matrices inciertas, $m^* = \max_i m_i$, e I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

También en ese año, en [31] se propone una extensión de las redes de Hopfield clásicas mediante el uso de anillos de grupo ², denominadas GRVHN

²Un anillo de grupo se forma a partir de un anillo R y un grupo G . Los elementos del anillo de grupo son combinaciones lineales de los elementos de G con coeficientes que provienen de R .

(Group Ring-Valued Hopfield Networks). El objetivo principal es superar las limitaciones de dimensiones en las redes de Hopfield basadas en álgebras de Clifford (potencias de dos) y ofrecer un marco flexible para redes de alta dimensionalidad arbitraria. Las GRVHN generalizan algunos modelos existentes. El trabajo incluye la definición de funciones de activación basadas en la maximización de una forma bilineal generalizada. Para una entrada $S \in FG$ (donde FG es el anillo de grupo), la función de activación se define como:

$$f_{\Gamma}(S) = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{Re}(\bar{\gamma}S),$$

donde $\Gamma \subset FG$ es un conjunto finito de valores posibles de salida neuronal, y $\operatorname{Re}(\bar{\gamma}S)$ generaliza el producto interno en espacios de Hilbert complejos.

Las GRVHN utilizan una función de energía para determinar la matriz de pesos, en donde la energía de la red se define como:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} \operatorname{Re}(\bar{z}_a w_{ab} z_b),$$

la cual es siempre un número real gracias a la propiedad de conjugación en el anillo de grupo. Además, las condiciones de convergencia que garantizan la estabilidad de la red son:

- Los pesos deben ser hermíticos: $w_{ab} = \overline{w_{ba}}$.
- No hay autoconexiones: $w_{aa} = 0$.
- La actualización de las neuronas es asíncrona.

Bajo estas condiciones, se demuestra que la energía decrece monótonamente en cada actualización neuronal, lo que garantiza la convergencia de la red a un estado estable en un número finito de pasos.



Además, se presentan ejemplos concretos como las redes hiperbólicas (HVHN) y bicomplejas (BCVHN), mostrando cómo se engloban dentro del marco de las GRVHN. Las conclusiones destacan que las GRVHN proporcionan un marco extensible para redes de Hopfield de alta dimensión, superando las limitaciones dimensionales de las implementaciones basadas en álgebras de Clifford.

Uno de los trabajos más recientes encontrados fue de 2025. En [32] se propone un marco teórico unificado para redes de Hopfield extendidas mediante el uso de álgebras de operadores, denominadas AHN (Algebraic Hopfield Networks). El objetivo principal es superar las limitaciones en la definición de funciones de activación y condiciones de estabilidad en modelos extendidos de redes de Hopfield, como las complejas (CVHN), cuaterniónicas (QVHN), split-cuaterniónicas (SQVHN) y rotatorias (RHN). Las AHN generalizan estos modelos al tratar los pesos como operadores que actúan sobre las salidas de las neuronas, definidas en módulos con productos internos. El artículo establece condiciones de estabilidad generalizadas y demuestra que la energía de la red decrece bajo estas condiciones, garantizando convergencia a estados estables. Las conclusiones destacan que este marco teórico no solo unifica y extiende modelos existentes, sino que también permite aplicaciones futuras en redes neuronales más allá de Hopfield, como redes profundas o memorias asociativas.

Como se observa, las redes neuronales de Hopfield son modelos ampliamente utilizados en el campo de la inteligencia artificial para la representación y almacenamiento de patrones de memoria mediante procesos de convergencia. Una característica fundamental de estas redes es su estabilidad, ya que de ella depende su funcionamiento como sistemas dinámicos. Aunque la función de energía asociada a estas redes sugiere una convergencia hacia mínimos locales, esta observación empírica no siempre proporciona garantías matemáticas formales sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio ni sobre el comportamiento asintótico del sistema. Es aquí donde se pueden aplicar las herramientas que ofrece la teoría de estabilidad de Lyapunov; en

particular, el uso de funciones de Lyapunov y el Teorema de Invarianza de LaSalle proporcionan un marco formal para garantizar la estabilidad global o asintótica del sistema. Sin embargo, aún se requiere un análisis detallado de las condiciones específicas bajo las cuales estos métodos aseguran la convergencia de la red a estados estables, especialmente para diferentes configuraciones del espacio de pesos y funciones de activación.

Estructura de la tesis

Como se observa en el estado del arte, el tema de las redes neuronales de Hopfield es actual y relevante, en este sentido, surge la necesidad de realizar un estudio profundo que combine el modelo matemático de las redes de Hopfield con herramientas de la teoría de estabilidad, con el fin de caracterizar su comportamiento de manera formal y fundamentada, siguiendo los pasos a la matemática que otorgó un premio Nobel a su creador. Por lo que el objetivo general de esta investigación es:

Analizar la estabilidad de las redes de Hopfield mediante la función de Lyapunov propuesta por Hopfield y la aplicación del teorema de invarianza de LaSalle, con el propósito de establecer condiciones formales de estabilidad para los estados de equilibrio del sistema no lineal.

Los objetivos específicos para lograr el general son descritos como:

- Describir matemáticamente el modelo dinámico de las redes de Hopfield en su forma continua, identificando sus propiedades estructurales relevantes para el análisis de estabilidad.



- Identificar que la función de Lyapunov permite evaluar la estabilidad del sistema sin resolver explícitamente sus ecuaciones diferenciales.
- Aplicar el Teorema de Invarianza de LaSalle para determinar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema y caracterizar el conjunto invariante hacia el cual convergen.
- Analizar un ejemplo que ilustre los resultados teóricos y validen la aplicabilidad de la red neuronal y su convergencia.

Por lo que la tesis se encuentra distribuida de la siguiente manera:

Capítulo 1: Denominado “Fundamentos de redes neuronales de Hopfield”. Puesto que es necesario introducir al lector sobre teoría básica que se utilizará a lo largo de esta investigación, este capítulo se compone de cinco secciones: teoría sobre cálculo, para comprender los teoremas; teoría de circuitos, con el fin de analizar correctamente el circuito de Hopfield e incluye las leyes de Kirchhoff; teoría de álgebra lineal, utilizada en la sinapsis de las redes neuronales y teoría de redes neuronales. Todo con el fin de analizar el modelo discreto y continuo de la red de Hopfield.

Capítulo 2: En este capítulo se muestra la teoría básica alrededor de la estabilidad de Lyapunov y el Teorema de Invarianza de LaSalle. Parte relevante en la investigación es la función de Lyapunov del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\dot{x} = f(x, t)$. Así mismo, se podrá observar que las condiciones del Teorema de Invarianza de LaSalle que garantizan la estabilidad de la red son:

1. Que exista la función de Lyapunov del sistema.
2. Que las trayectorias solución del sistema sean acotadas.

Entonces las trayectorias no escapan de cierto conjunto llamado conjunto de

atracción.

Capítulo 3: Titulado “Regla de Hebb” para analizar el entrenamiento de la red de Hopfield como una red de memoria asociativa.

Capítulo 4: En este apartado se comprueba que la función dada por Hopfield en su artículo original efectivamente es una función de Lyapunov del sistema derivado del circuito; como segundo punto, se determina el conjunto invariante. Cabe resaltar que se analiza un caso particular de la función de Lyapunov llamada “de alta ganancia” para ilustrar que los puntos de equilibrio coinciden con los puntos críticos de la función de Lyapunov.

En resumen, el estudio riguroso de la estabilidad en redes neuronales de Hopfield no solo tiene relevancia teórica en el ámbito de los sistemas dinámicos, sino que también tiene una alta pertinencia en el diseño de modelos confiables para la recuperación de patrones, la optimización y la clasificación de datos. Garantizar la convergencia de estas redes hacia estados estables es esencial para su funcionamiento correcto en entornos reales.

El uso de herramientas como la teoría de Lyapunov y el Teorema de LaSalle ofrece una base matemática sólida y una metodología rigurosa para evaluar el comportamiento dinámico de estas redes, fortaleciendo así su comprensión desde una perspectiva matemática y aplicada.

Al aplicar estos métodos al estudio de redes de Hopfield, esta tesis contribuye a fortalecer el vínculo entre la teoría de control y los modelos neuronales, proporcionando herramientas formales para validar la estabilidad de estos sistemas y para diseñarlos de forma más eficiente. Además, sentará las bases para posteriores estudios de estudiantes de posgrado en matemáticas y en inteligencia artificial.



Universidad Tecnológica de la Mixteca
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Fundamentos de redes neuronales de Hopfield

Las redes neuronales de Hopfield constituyen un modelo recurrente de gran interés en el ámbito de la matemática aplicada, pues permiten analizar el comportamiento colectivo de ecuaciones no lineales mediante el formalismo de los sistemas dinámicos. Su formulación parte de un circuito eléctrico que emula la señal entre neuronas y se basa en la representación del estado de la red como un vector dinámico cuya evolución temporal está gobernada por diferencias (en el caso discreto) o ecuaciones diferenciales (en el caso continuo).

Una de las características esenciales de este modelo es la existencia de un funcional de energía o función de Lyapunov, cuya disminución monótona garantiza que la dinámica de la red converge hacia estados estables. Este hecho permite relacionar las redes de Hopfield con problemas de estabilidad, teoría de sistemas dinámicos y



principios de optimización matemática. En particular, los estados estables corresponden a mínimos locales de la función de energía, lo que brinda una interpretación natural en términos de memorias asociativas o soluciones aproximadas a problemas de optimización combinatoria.

El presente capítulo tiene como propósito presentar los fundamentos matemáticos de las redes neuronales de Hopfield. Se iniciará con la teoría básica de cálculo para comprender los conceptos matemáticos que se necesitarán; después se hará una recapitulación de la teoría de circuito del cual se desprenden, principalmente la Ley de Kirchhoff en sus dos partes; luego se mostrarán algunos preliminares sobre redes neuronales y su principio biológico, se dará la descripción formal de su estructura y ecuaciones de evolución, tanto en su versión discreta como continua. Posteriormente, se demostrará su papel como criterio de convergencia hacia puntos de equilibrio. Todo esto para dar sustento al capítulo 2 en el que se establecerá la conexión con la teoría de estabilidad de Lyapunov y se discutirán las implicaciones de este marco en el análisis del comportamiento global de la red.

1.1. Teoría básica sobre cálculo

Gracias a los cambios y la variabilidad que se observa en la naturaleza, el cálculo infinitesimal brinda el soporte matemático para comprender y analizar estos eventos. Usualmente son representados por sistemas dinámicos. En esta sección se revisan los conceptos esenciales para entender la teoría sobre las funciones de Lyapunov, los cuales fueron obtenidos de [4], [16], [34], [36], [38] y [39]. Para llegar a ello, se comienza con la definición base de función, la cual representa una relación entre variables de entrada y salida. Formalmente, se define a continuación:

Definición 1.1.1. Una función f es una relación que asigna a cada elemento x del **dominio exactamente un elemento** y del **contradominio** (ver Figura 1.1).

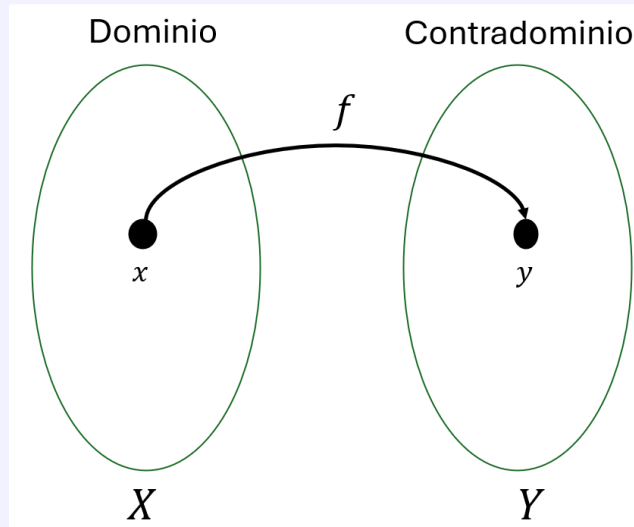


Figura 1.1: Representación de una función $f(x) = y$.

Nótese que la Definición 1.1.1 es para el espacio de los reales \mathbb{R} . Para poder extender el concepto de función a cualquier número de variables, se considera un **espacio numérico de dimensión n** y se denota por \mathbb{R}^n siendo \mathbb{R} el espacio de números reales. Al tomar un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, este se escribe de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

En general, las funciones pueden tener cualquier dimensión. Éstas suelen ser llamadas y definidas de la siguiente manera:

- **Función escalar:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = y$.
- **Campo escalar:** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x_1, \dots, x_n) = z$.
- **Campo vectorial:** $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$.

Cada una de ellas aportan diversos significados y son utilizadas para interpretar diversas áreas complejas y así modelarlas. De hecho, cuando se analiza la dinámica

de estas funciones con respecto al tiempo t , se da origen a los operadores diferenciales: gradiente, jacobiano, matriz hessiana y laplaciano. Cada operador se utiliza a distintas necesidades.

Definición 1.1.2. Sea un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, el **gradiente** de f en un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define como el vector de derivadas parciales:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

El gradiente representa de forma geométrica al vector dirección de la función f .

Ejemplo 1.1.1. Para $f(x, y) = x^2 + y^2$, el gradiente es $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$.

Geoméricamente, en la Figura 1.2 se observa la dirección hacia la que se dirige el gradiente de f .

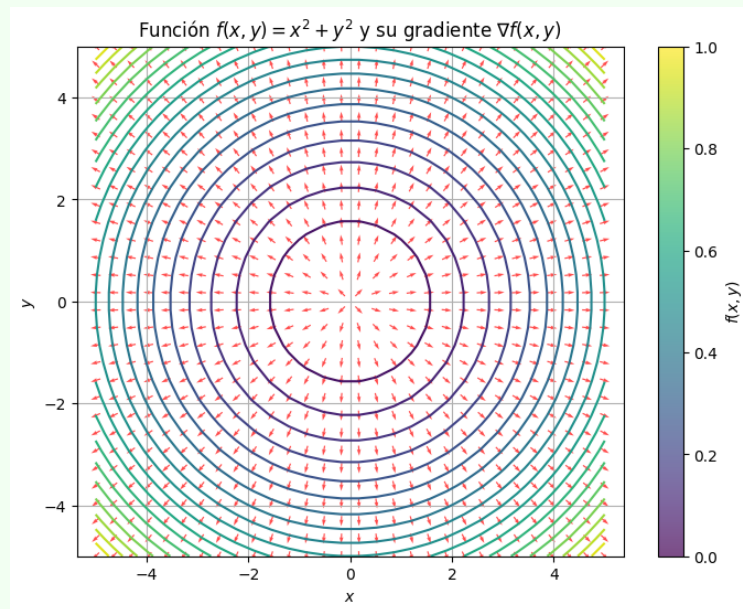


Figura 1.2: Representación del vector dirección de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Definición 1.1.3. Para un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con componentes $\mathbf{F}(x) = (\mathbf{F}_1(x), \mathbf{F}_2(x), \dots, \mathbf{F}_m(x))$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La **matriz jacobiana** $J_{\mathbf{F}}(x)$ es la matriz de dimensión $m \times n$ dada por:

$$J_{\mathbf{F}}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

El jacobiano generaliza la derivada para funciones multivariables. Por ejemplo:

Ejemplo 1.1.2. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(x, y) \\ \mathbf{F}_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y \\ \sin(xy) \end{pmatrix}.$$

El jacobiano es:

$$J_{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_2(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{bmatrix}.$$

Definición 1.1.4. Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la **matriz hessiana** es la matriz $n \times n$ de segundas derivadas parciales:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}.$$

La matriz hessiana proporciona información sobre la curvatura de f y con esto

se logra obtener información sobre sus puntos críticos. Por ejemplo,

Ejemplo 1.1.3. Si $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$, la matriz hessiana es:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea C^1 el conjunto de funciones reales continuas y que poseen primera derivada continua. Esto quiere decir que una función f es de clase C^1 si es continua y su derivada también lo es. El siguiente ejemplo ilustra a una función de este tipo.

Ejemplo 1.1.4. La función lineal $f(x) = 2x$ es de clase C^1 dado que la función $f(x)$ es continua y su derivada $f'(x) = 2$, también es continua (ver Figura 1.3).

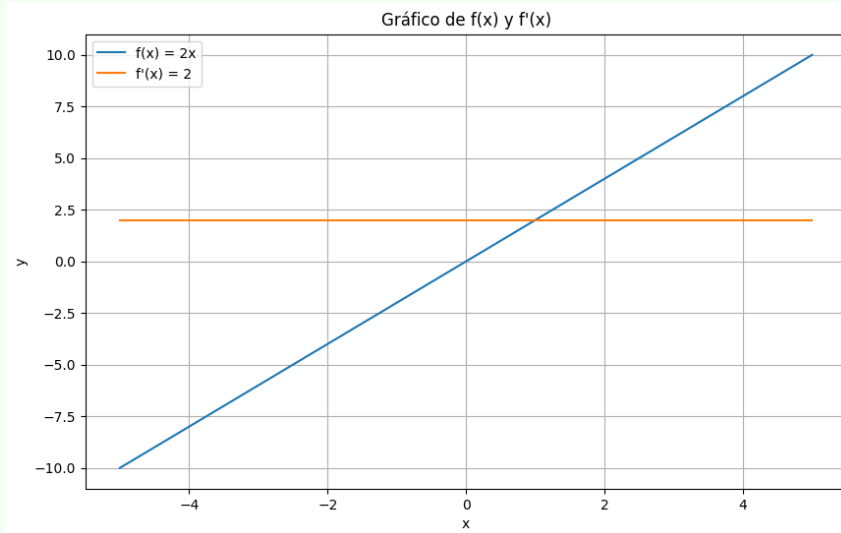


Figura 1.3: Ejemplo donde $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas.

Definición 1.1.5. Sea (X, τ) un **espacio topológico**. Un conjunto $U \subseteq X$ se denomina **conjunto abierto** si y solo si pertenece a la colección τ , es decir:

$$U \in \tau$$



Esto significa que los conjuntos abiertos son exactamente los elementos de la topología τ definida sobre X .

Alternativamente, en términos de propiedades:

1. \emptyset y X son abiertos: $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierta: Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
3. La intersección finita de abiertos es abierta: Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$.

En un espacio métrico (X, d) , la definición equivalente es:

Un conjunto $U \subseteq X$ es abierto si para todo $x \in U$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Definición 1.1.6. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto abierto U , donde $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ en coordenadas cartesianas. La **divergencia de \mathbf{F}** se define como:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ denota el operador nabla.

La interpretación física de la divergencia \mathbf{v} en un punto (x, y) es (ver Figura 1.4)

:

- Si $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$: Indica la presencia de una “fuente” en el punto (x, y) , es decir, el flujo neto de salida es positivo.
- Si $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$: Indica la presencia de un “sumidero”, donde el flujo neto de salida es negativo, lo que significa que el campo converge hacia el punto (x, y) .

- Si $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$: El flujo neto en el punto (x, y) es nulo. Si la divergencia es cero en todo el dominio, el campo se denomina *solenoidal*.

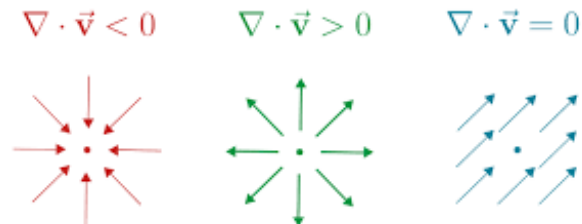


Figura 1.4: Interpretación física de la divergencia. Extraído de [30].

Definición 1.1.7. El **laplaciano** de un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define como la divergencia del gradiente:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Generalmente se utiliza en ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1.1.5. Cuando $f(x, y) = x^3 + y^3$, entonces

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x + 6y.$$

Algunos de los teoremas que se utilizarán en este trabajo con frecuencia son los siguientes:

Teorema 1.1.1. Regla de la cadena. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones diferenciables. Entonces:

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x),$$

donde \cdot denota multiplicación matricial.



Teorema 1.1.2. Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 1). Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{para } x \in [a, b]$$

es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) , y su derivada es $f(x)$. Es decir,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x). \quad (1.1)$$

Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2). Si f es continua en $[a, b]$ y F es una primitiva de f (es decir, $F' = f$), entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.2)$$

Definición 1.1.8. Un sistema dinámico (X, \mathcal{T}, Φ) se define como:

- X es un conjunto no vacío llamado **espacio de estados** o **espacio de fases**.
- \mathcal{T} el **conjunto de tiempos**, que puede ser:
 1. **Discreto:** $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ (incluyendo el 0).
 2. **Continuo:** $\mathcal{T} = \mathbb{R}$.
- La aplicación $\Phi : \mathcal{T} \times X \rightarrow X$ es una función que satisface:
 1. $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$
 2. Para todo $t, s \in \mathcal{T}$ y $x \in X$:

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$$



Para un tiempo fijo $t \in \mathcal{T}$ se denota,

$$\Phi_t : X \rightarrow X \quad \text{donde} \quad \Phi_t(x) = \Phi(t, x).$$

En el caso discreto ($\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ o \mathbb{N}), el sistema se describe completamente por un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ donde $\Phi_n(x) = f^n(x)$ para $n \in \mathcal{T}$.

En el caso continuo ($\mathcal{T} = \mathbb{R}$), el sistema está generalmente definido por un **campo vectorial** $F : X \rightarrow Y$ que genera un **flujo** Φ a través de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)).$$

En particular, una **trayectoria** del sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = F(x(t)),$$

es una curva $x(t)$ que satisface la ecuación diferencial para todo tiempo t en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.6. Se considera el sistema dinámico continuo definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

En este caso, los elementos del sistema dinámico (X, \mathcal{T}, Φ) son:

- $X = \mathbb{R}^2$ es el **espacio de estados**, donde cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ representa un estado del sistema.
- $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ es el **conjunto de tiempos** (continuo).
- La aplicación $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por:

$$\Phi(t, (x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix},$$

que satisface:

1. $\Phi(0, (x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$ (condición inicial).
2. $\Phi(t, \Phi(s, (x_0, y_0))) = \Phi(t + s, (x_0, y_0))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ (propiedad de grupo).

Este sistema está generado por el **campo vectorial** $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F(x, y) = (-y, x),$$

a través de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)).$$

Las **trayectorias** del sistema son curvas $(\Phi_1(t, x_0, y_0), \Phi_2(t, x_0, y_0))$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso particular, las trayectorias son un conjunto de círculos que comparten el mismo punto central.

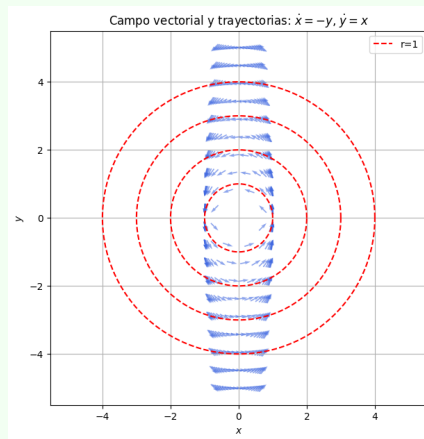


Figura 1.5: Representación de las trayectorias de $\dot{x} = -y$ y $\dot{y} = x$.

Definición 1.1.9. En un sistema dinámico, un **atractor** es un conjunto hacia el cual evolucionan las trayectorias, es decir, el sistema convergerá hacia un conjunto particular de valores o un patrón, definido desde condiciones iniciales en su **cuenca de atracción**. Pueden ser puntos o conjuntos complejos.

Ejemplo 1.1.7. En el sistema dinámico definido por $\dot{x} = -x$, el origen ($x = 0$) constituye un **atractor**. En efecto, el origen es un punto fijo del sistema, ya que satisface $\dot{x} = -x = 0$, lo que implica $x = 0$.

Para analizar su estabilidad, se resuelve la ecuación diferencial mediante separación de variables: $\frac{dx}{dt} = -x$, cuya integración es $\ln|x| = -t + C$. Así la solución general $x(t) = x_0 e^{-t}$, donde $x_0 = x(0)$ representa la condición inicial. El comportamiento asintótico revela que para cualquier condición inicial $x_0 \neq 0$, se cumple $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{-t} = 0$. Esta convergencia hacia el origen, caracteriza al punto fijo como un atractor estable.

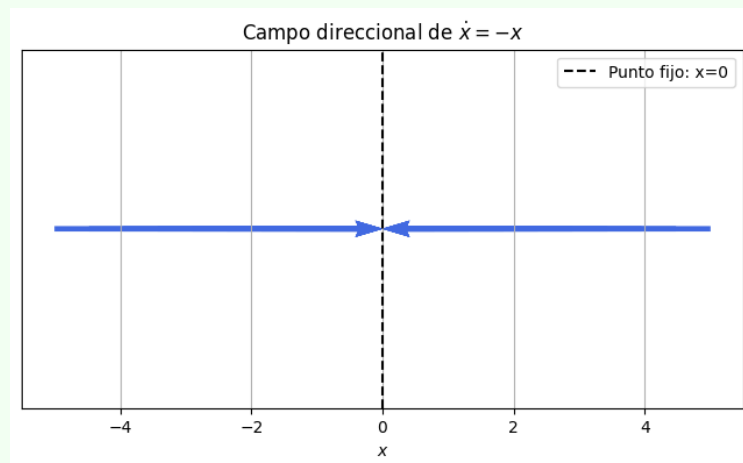


Figura 1.6: Representación de un atractor: todas las trayectorias convergen al origen.

La Figura 1.6 ilustra un atractor global del sistema.

En resumen, estas definiciones se usarán a lo largo de la tesis, así como los operadores que se definen. Por ejemplo, el jacobiano describe la dinámica local de un sistema dinámico; el hessiano caracteriza los puntos críticos, y el laplaciano aparece en ecuaciones que van cambiando respecto al tiempo. Así también, las trayectorias surgen cuando se integran campos vectoriales, mientras que los atractores revelan el comportamiento asintótico.

1.2. Teoría básica sobre circuitos

El estudio de los circuitos eléctricos es fundamental para comprender el comportamiento de las redes neuronales de Hopfield. Este apartado introduce tres pilares esenciales para el análisis de circuitos: la Ley de Ohm, las Leyes de Kirchhoff y el Amplificador Operacional, haciendo énfasis en la corriente eléctrica. Estos fundamentos permitirán sentar las bases para el estudio de circuitos no lineales y dinámicos. La información detallada se encuentra en [2], [14], [15], [17], [18], [21], [23] y [40].

Antes de presentar las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos, es necesario comprender qué son los circuitos eléctricos, específicamente los que utilizan corriente directa. En general, un circuito eléctrico está compuesto por distintos dispositivos llamados **componentes eléctricos**. Pueden ser tanto activos como pasivos. Los activos tienden a generar o alimentar energía (baterías, generadores, amplificadores operacionales, entre otros), mientras que los pasivos consumen la energía (resistencias, capacitores, inductores, etc.). El aspecto físico de algunos componentes eléctricos comúnmente utilizados se ilustra en la Figura 1.7. Estos elementos tienen el papel de dar lugar a la formación de circuitos eléctricos, y estos a su vez forman *modelos* (desde el punto de vista de la ingeniería). Estos modelos describen la relación que existe entre el voltaje y la corriente.

Cuando un conjunto de componentes activos es fuente de alimentación para ele-



Figura 1.7: Ejemplos de algunos componentes eléctricos representativos (Fuente [28]).

mentos pasivos, se da paso a la próxima definición.

Definición 1.2.1. Un **circuito eléctrico** es un conjunto de componentes eléctricos interconectados que forman una trayectoria cerrada, permitiendo el flujo de corriente eléctrica.

Todo circuito eléctrico funcional debe contener tres elementos esenciales:

- Una **fuentes de energía** que proporcione la fuerza electromotriz (pila, batería o generador).
- Un **receptor** que transforme la energía eléctrica en otra forma de energía (lámpara, motor, resistencia).
- Los **conductores** siguen un camino continuo para que la circulación de corriente exista.

En la Figura 1.8 se observa la representación esquemática de un circuito elemental que contiene estos tres componentes interconectados en una trayectoria cerrada.

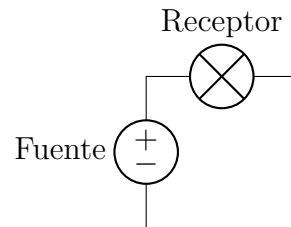


Figura 1.8: Ejemplo básico de un circuito eléctrico cerrado con fuente y receptor.

Definición 1.2.2. La corriente eléctrica (I) se define como la tasa de flujo de carga eléctrica a través de un conductor. Matemáticamente se expresa como

$$I = \frac{dq}{dt},$$

donde q es la carga en coulombs [C] y t el tiempo en segundos [s]. La unidad de corriente es el amperio [A]. En los metales, la corriente es producida por el movimiento de electrones, pero por convención se considera el flujo de cargas positivas.

Existen dos tipos de corrientes:

Corriente eléctrica $\left\{ \begin{array}{l} \text{Corriente Alterna,} \\ \text{Corriente Directa o Corriente Continua.} \end{array} \right.$

Definición 1.2.3. La corriente continua (CC) o corriente directa (DC) mantiene la dirección de la corriente eléctrica, es decir, no cambia con el tiempo, permaneciendo siempre del polo positivo al negativo o viceversa.

Definición 1.2.4. La corriente alterna (CA) cambia periódicamente de dirección y magnitud; dicho de otro modo, la corriente fluye en una dirección, luego invierte su sentido a la dirección opuesta y repite este ciclo constantemente.

La corriente alterna, como se observa en la Figura 1.9-(a), varía en forma de una senoidal perfecta a través del tiempo, mientras que la corriente continua, Figura 1.9-(b), se mantiene constante en el tiempo. Esta investigación se centra en la corriente continua o directa.

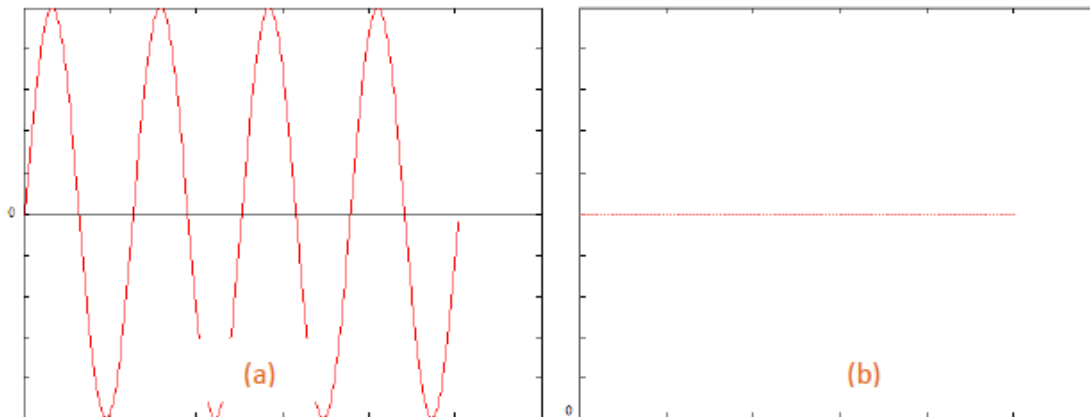


Figura 1.9: Corriente alterna (a) y corriente continua (b) (Obtenida de [21]).

Enseguida se presenta el Ejemplo 1.2.1 para comprender mejor los tipos de corriente.

Ejemplo 1.2.1. ¿Qué tipo de corriente llega a las casas?

A los hogares llega principalmente **corriente alterna** porque:

- Permite transformar el voltaje fácilmente usando transformadores.
- Facilita su transporte a largas distancias.
- Es más fácil de generar en grandes cantidades.

¿Dónde se usa corriente continua?

Aunque llega CA a nuestras casas, muchos dispositivos electrónicos (teléfonos,

computadoras, televisores) funcionan con CC. Por esto, incluyen adaptadores o fuentes de poder que convierten CA a CC.

Para analizar circuitos más complejos, es necesario introducir definiciones que describen las conexiones entre componentes:

Definición 1.2.5. Una **rama** representa un solo elemento, como una fuente de tensión o de resistor.

Definición 1.2.6. Un **nodo** es el punto de conexión entre dos o más ramas.

Definición 1.2.7. Un **lazo** comienza en un nodo y es cualquier trayectoria cerrada en un circuito.

Definición 1.2.8. Una **mall**a es un lazo que no contiene otro lazo dentro de él.

La Figura 1.10 tiene cinco ramas: la fuente de tensión de $10V$, la fuente de corriente de $2A$ y los tres resistores (5Ω , 2Ω y 3Ω). Cuenta con 3 nodos denotados con puntos: a , b y c . Note que el nodo b está compuesto por tres puntos conectados por alambres conductores y, por lo tanto, se convierte en un solo nodo, análogo al nodo c .

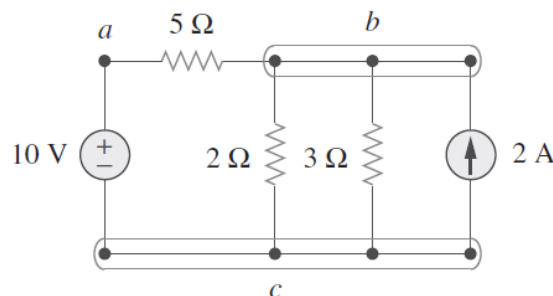


Figura 1.10: Ejemplo de un circuito con 3 nodos y 5 ramas (Extraída de [2]).



Las definiciones presentadas establecen las bases para describir las estructuras de los circuitos eléctricos. Se iniciará definiendo lo siguiente:

Definición 1.2.9. El **voltaje** (o diferencia de potencial eléctrico) entre dos puntos A y B se define como el trabajo por unidad de carga que debe realizarse para mover una carga de prueba q del punto A al punto B en contra del campo eléctrico. Matemáticamente se expresa como:

$$V = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

donde:

- V es el voltaje entre los puntos A y B [V].
- W_{AB} es el trabajo realizado [J].
- q es la carga eléctrica [C].
- \vec{E} es el campo eléctrico.
- $d\vec{l}$ es el elemento diferencial de camino.

El voltaje representa la energía potencial eléctrica por unidad de carga y es la fuerza impulsora que hace fluir la corriente en un circuito.

Definición 1.2.10. Una resistencia eléctrica R es la oposición que un material ofrece al paso de la corriente eléctrica. Se mide en ohmios (Ω) y su valor determina cuánta corriente puede pasar a través de un circuito.

Una ley conocida por su utilidad es la Ley de Ohm. Establecida por Georg Simon Ohm, relaciona el voltaje (V), la corriente (I) y la resistencia (R) en un elemento resistivo:

$$V = IR.$$

Esta ley indica que la caída de voltaje en una resistencia es directamente proporcional a la corriente que fluye a través de ella.

Otras leyes que serán referidas recurrentemente en esta investigación son las Leyes de Kirchhoff, estas son esenciales para el análisis de circuitos eléctricos complejos. Usualmente se introducen como definición de la siguiente manera.

Definición 1.2.11. La ley de Kirchhoff se divide en dos igualdades:

- **Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) o Primera Ley de Kirchhoff.**

Establece que la suma de las corrientes I que entran a un nodo es cero.

Matemáticamente:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

donde n es el número de ramas conectadas al nodo tal que I_k es la k -ésima corriente que entra (o sale) al nodo.

- **Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) o Segunda Ley de Kirchhoff.**

Establece que la suma de los voltajes alrededor de cualquier lazo o trayectoria cerrada es cero:

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0,$$

donde V_k representa el voltaje y n es el número total de ramas en el lazo.

La Primera Ley de Kirchhoff (LCK) conserva la carga eléctrica en los circuitos eléctricos; mientras que la Segunda Ley de Kirchhoff (LVK) conserva la energía eléctrica que existe en el circuito. Por ejemplo, se observa en la Figura 1.11 que al

aplicar la **Ley de Corrientes de Kirchoff** se tiene

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0,$$

dato que las corrientes i_1, i_3 e i_4 entran al nodo, a diferencia de i_2 e i_5 que salen de él.

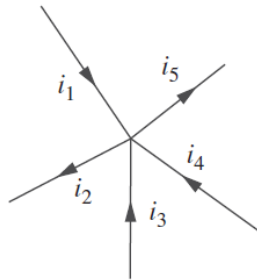


Figura 1.11: Representación de la Primera Ley de Kirchoff LCK (Tomada de [2]).

Para aplicar la Segunda Ley de Kirchoff (LVK) a la Figura 1.12, es fundamental seguir una **regla de recorrido** clara y consistente. La LVK establece que la suma algebraica de todos los voltajes en una malla cerrada es igual a cero.

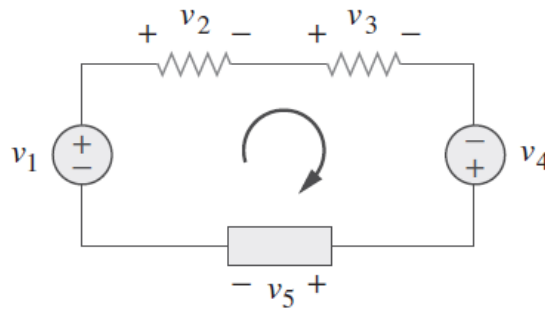


Figura 1.12: Representación de un circuito aplicando la Segunda Ley de Kirchoff LVK (Fuente [2]).

La regla fundamental para asignar los signos durante el recorrido es la siguiente: **al pasar por un componente, si la primera terminal que se encuentra es la**

positiva, el voltaje se toma con signo positivo (+); si la primera terminal es la negativa, se toma con signo negativo (-).

Supóngase que se inicia el recorrido en la rama del voltaje v_2 y se sigue la malla en sentido de las manecillas del reloj (aunque el sentido puede ser arbitrario, siempre que se mantenga consistente a lo largo de todo el recorrido). Aplicando metódicamente la regla de signos:

- Al comenzar en v_2 , la primera terminal encontrada es la **positiva**, por lo que se tiene $+v_2$.
- Después, en v_3 la primera terminal es positiva y se obtiene $+v_3$.
- Al llegar a v_4 , la primera terminal encontrada es la **negativa**, resultando en $-v_4$.
- En v_5 , la primera terminal es **positiva**, obteniendo $+v_5$.
- En v_1 , la primera terminal es **negativa**, por lo que $-v_1$.

Al sumar todos los términos e igualar a cero, se obtiene:

$$+v_2 - v_4 + v_5 - v_1 + v_3 = 0.$$

Este procedimiento demuestra la importancia de definir un sentido de recorrido y aplicar **sistemáticamente** la regla de signos para obtener correctamente la ecuación de la LVK.

Existen dos formas fundamentales de organizar los componentes: circuitos en serie y circuitos en paralelo. Cada uno posee características diferentes y es útil saber de ellas, ya que se puede predecir cómo se comportará la corriente, cómo se dividirá el voltaje y por qué algunos circuitos son más confiables que otros. Las diferencias se presentan a continuación:

- En un circuito en serie (ver Figura 1.13), los componentes están conectados uno tras otro, formando una única trayectoria para la corriente. La corriente que fluye a través de cada componente es la misma, mientras que el voltaje total aplicado al circuito es igual a la suma de los voltajes individuales en cada componente. La resistencia total en un circuito serie es la suma de todas las resistencias individuales:

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n.$$

Son utilizados en series de luces navideñas o dispositivos de protección.

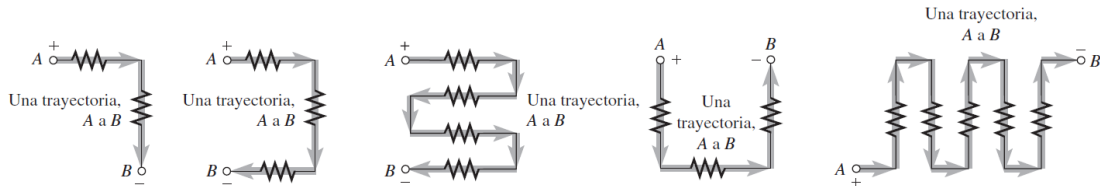


Figura 1.13: Ejemplos de circuitos en serie con la misma corriente. Recopilado de [17].

- En un circuito en paralelo (véase Figura 1.14), los componentes están conectados entre los mismos dos puntos, proporcionando múltiples trayectorias para la corriente. El voltaje es el mismo en todos los componentes, pero la corriente total es la suma de las corrientes individuales en cada rama. La resistencia total se calcula como:

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Usados en instalaciones eléctricas domésticas.

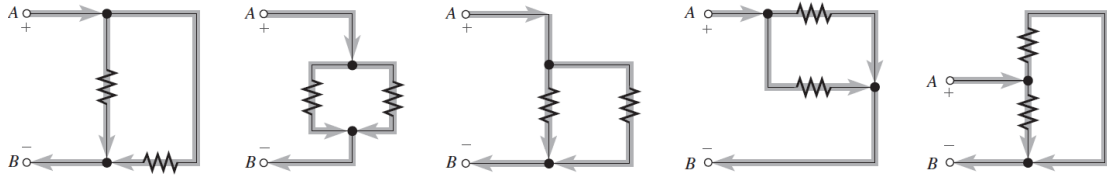


Figura 1.14: Ejemplos de circuitos en paralelo con dos trayectorias. Extraído de [17].

Una parte relevante en la formulación del circuito que da origen a las redes neuronales de Hopfield son los amplificadores operacionales, coloquialmente conocidos como opamp, que se introducen como definición a continuación.

Definición 1.2.12. El amplificador operacional es un elemento de circuito electrónico, diseñado para su uso con otros elementos de circuito que lleven a cabo operaciones de procesamiento de señales especificadas.

En la Figura 1.15 (a) se ilustra físicamente un amplificador operacional. Este consta de ocho clavijas (ver Figura 1.15 (b)) : dos ajustes de acero, entrada inversora, entrada no inversora, v_- , salida, v_+ y sin conexión.

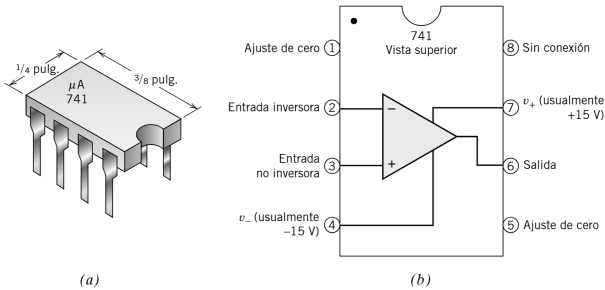


Figura 1.15: Características de un amplificador operacional. Tomado de [14].

Debido a que existen muchas modificaciones de los amplificadores operacionales, se hace énfasis solo en el amplificador operacional ideal. La cual se define a continuación.

Definición 1.2.13. Un amplificador operacional ideal debe cumplir con:

- Corriente de entrada en nodo inversora $i_1 = 0$.
- Corriente de entrada en nodo no inversora $i_2 = 0$.
- Los voltajes de los nodos cumplen que $v_1 = v_2$.

La Figura 1.16 proporciona un bosquejo de la Definición 1.2.13.

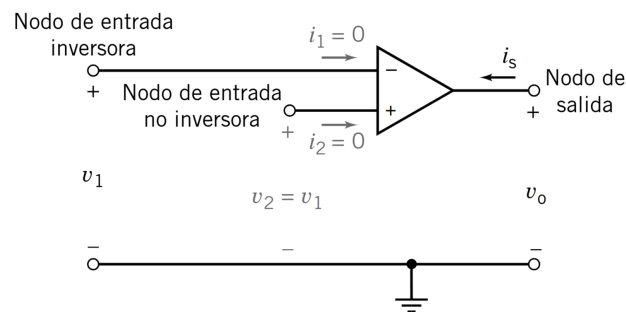


Figura 1.16: Amplificador operacional ideal (Recopilada de [14]).

Los conceptos de corriente eléctrica, Ley de Ohm, Leyes de Kirchhoff y amplificadores operacionales son fundamentales para el análisis de circuitos eléctricos. Estos principios son esenciales para el estudio de sistemas complejos como las redes neuronales de Hopfield.

1.3. Teoría básica sobre álgebra

Las redes de Hopfield fundamentan su entrenamiento por la Regla de Hebb, la cual se basa en conocimiento algebraico. Este conocimiento también será de utilidad para analizar la estabilidad de puntos fijos en un sistema dinámico. Por tal motivo, esta sección incluye teoría básica sobre algunos temas de álgebra lineal. Los conceptos fueron reunidos de [22].

Para comenzar, un campo \mathbb{F} es un conjunto junto con dos operaciones binarias, llamadas **suma** (+) y **multiplicación** (\cdot), que satisfacen las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in \mathbb{F}$:

- **Asociatividad:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Conmutatividad:** $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Elementos neutros:** Existen $0, 1 \in \mathbb{F}$ tales que $a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$.
- **Inversos aditivos:** Para todo a , existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.
- **Inversos multiplicativos:** Para todo $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- **Distributividad:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Se define un **espacio vectorial** V sobre un campo \mathbb{F} como un conjunto de elementos llamados vectores, junto con dos operaciones: + y (\cdot), satisfacen que para todo $u, v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

1. **Cerradura bajo la suma:** $u + v \in V$.
2. **Conmutatividad de la suma:** $u + v = v + u$.
3. **Asociatividad de la suma:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. **Existencia del vector cero:** Existe $0 \in V$ de tal forma que $u + 0 = 0 + u = u$.
5. **Existencia del inverso aditivo:** Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.
6. **Cerradura bajo producto por escalar:** $\alpha \cdot u \in V$
7. **Distributividad respecto a la suma de vectores:** $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
8. **Distributividad respecto a la suma de escalares:** $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.



9. **Compatibilidad de productos:** $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.

10. **Elemento neutro multiplicativo:** $1 \cdot u = u$.

Definición 1.3.1. Un vector v es **combinación lineal** de los vectores v_1, v_2, \dots, v_k si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_k tales que:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k.$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales se denomina **espacio generado** por $\{v_1, \dots, v_k\}$ y se denota por $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

Ejemplo 1.3.1. En \mathbb{R}^3 , el vector $(7, 2, 9)$ es combinación lineal de $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 2)$ pues:

$$(7, 2, 9) = 7(1, 0, 1) + 2(0, 1, 2).$$

Definición 1.3.2. Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es **linealmente independiente** si la única solución de:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$$

es $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. En caso contrario, el conjunto es **linealmente dependiente**.

Ejemplo 1.3.2. Los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ en \mathbb{R}^3 son linealmente independientes. Sin embargo, $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ y $(1, 1, 1)$ son linealmente dependientes, pues:

$$2(1, 2, 3) - 1(2, 4, 6) + 0(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$



Definición 1.3.3. La **transpuesta** de una matriz A de $m \times n$, denotada por A^T , es la matriz de $n \times m$ cuyas columnas son las filas de A . Es decir, si $A = [a_{ij}]$, entonces $A^T = [a_{ji}]$.

Las propiedades de la transpuesta son:

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.
4. $(cA)^T = cA^T$ para cualquier escalar c .
5. Si A es invertible, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Ejemplo 1.3.3. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, su transpuesta es:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definición 1.3.4. Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en \mathbb{R}^n , el **producto punto** se define como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

El producto punto tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.



3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$.

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Definición 1.3.5. Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathbb{R}^n son **ortogonales** si su producto punto es cero:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$$

Un conjunto de vectores es **ortogonal** si todos los pares de vectores distintos en el conjunto son ortogonales.

Definición 1.3.6. Un conjunto de vectores es **ortonormal** si es ortogonal y cada vector tiene norma 1. Es decir, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

y se llama delta de Kronecker.

Ejemplo 1.3.4. Los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ son ortogonales pues:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(1) + (0)(1) + (-1)(1) = 0.$$

Definición 1.3.7. Un subconjunto H de un espacio vectorial V es un **subespacio** de V si:

- El vector cero de V está en H : $\mathbf{0} \in H$.
- H es cerrado bajo la suma de vectores: Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.



- H es cerrado bajo la multiplicación por escalares: Si $\mathbf{u} \in H$ y $c \in \mathbb{F}$, entonces $c\mathbf{u} \in H$.

Definición 1.3.8. El **complemento ortogonal** de un subespacio W de \mathbb{R}^n , denotado por W^\perp , es el conjunto de todos los vectores en \mathbb{R}^n que son ortogonales a todo vector en W :

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ para todo } \mathbf{w} \in W\}.$$

Ejemplo 1.3.5. En \mathbb{R}^3 , si $W = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, entonces $W^\perp = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$.

Definición 1.3.9. Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ es un **eigenvalor** de A si existe un vector $\mathbf{v} \neq 0$ tal que:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

El vector \mathbf{v} se denomina **eigenvector** de A correspondiente a λ .

Cabe recordar que una forma para hallar los eigenvalores es resolver la **ecuación característica**:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ejemplo 1.3.6. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, la ecuación característica es:

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$



Las soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$.

Para $\lambda_1 = 1$, resolvemos $(A - I)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definición 1.3.10. Dada una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales, el **núcleo** (o kernel) de T es el conjunto de todos los vectores en V que se mapean al vector cero en W :

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

El núcleo es un subespacio de V .

Definición 1.3.11. El **eigenespacio** correspondiente a un eigenvalor λ de una matriz A es el conjunto de todos los eigenvectores correspondientes a λ , junto con el vector cero:

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} = \text{Núcleo}(A - \lambda I).$$

Cada eigenespacio es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

Además, los eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos son linealmente independientes.

Ejemplo 1.3.7. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica es $(3 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$, así que $\lambda_1 = 3$ (multiplicidad algebraica 2) y $\lambda_2 = 2$. Para $\lambda_1 = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Los conceptos de álgebra lineal tienen aplicaciones fundamentales en diversas áreas. Particularmente, en sistemas dinámicos los eigenvalores determinan la estabilidad de puntos fijos.

1.4. Teoría básica sobre redes neuronales

Para contextualizar las redes de Hopfield, en este apartado se muestran algunas definiciones básicas y fundamentos teóricos sobre las redes neuronales.

De acuerdo con algunas investigaciones en [9], [13], [24] y [25], la gran mayoría de autores indica que la esencia de las redes neuronales provino del principio biológico: el cerebro humano. El cerebro humano es un sistema biológico fundamental que procesa información de manera paralela, la adapta y es eficiente.

Ejemplo 1.4.1. Un ejemplo simple es la visión humana. Esta es capaz de reconocer rostros entre 100 – 200 milisegundos.

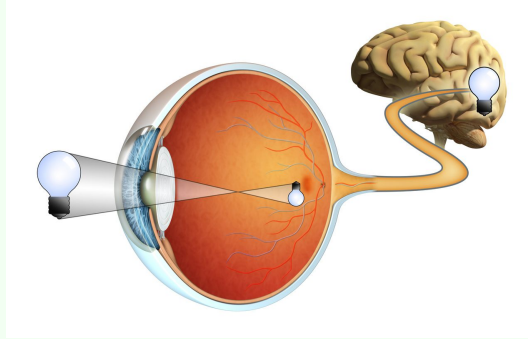


Figura 1.17: Vista humana conectada con el cerebro (Recuperada de [11]).

El cerebro humano consiste en una red masivamente interconectada de elementos por medio de las neuronas. Cada neurona biológica está compuesta principalmente por (ver Figura 1.18):

- Las dendritas actúan como una red receptora y conducen señales eléctricas hacia el cuerpo celular.
- El soma efectúa un proceso de las señales entrantes.
- El axón conduce la señal desde el soma hacia otras neuronas. El punto de contacto entre el axón de una neurona y una dendrita de otra se denomina sinapsis.

En general, se puede imaginar a una neurona como un árbol donde las dendritas actúan como las raíces, recibiendo la información que viene de otras células; el soma representa el tronco, encargado de procesar e integrar toda esa información; el axón funciona como una rama que transporta la señal a lo largo de su recorrido; y finalmente, las terminales axónicas son como las hojas que liberan oxígeno al aire y pasan el mensaje a la siguiente neurona en la sinapsis, pero este árbol no está solo, pertenece a todo un bosque frondoso. Así es como funciona el cerebro y las

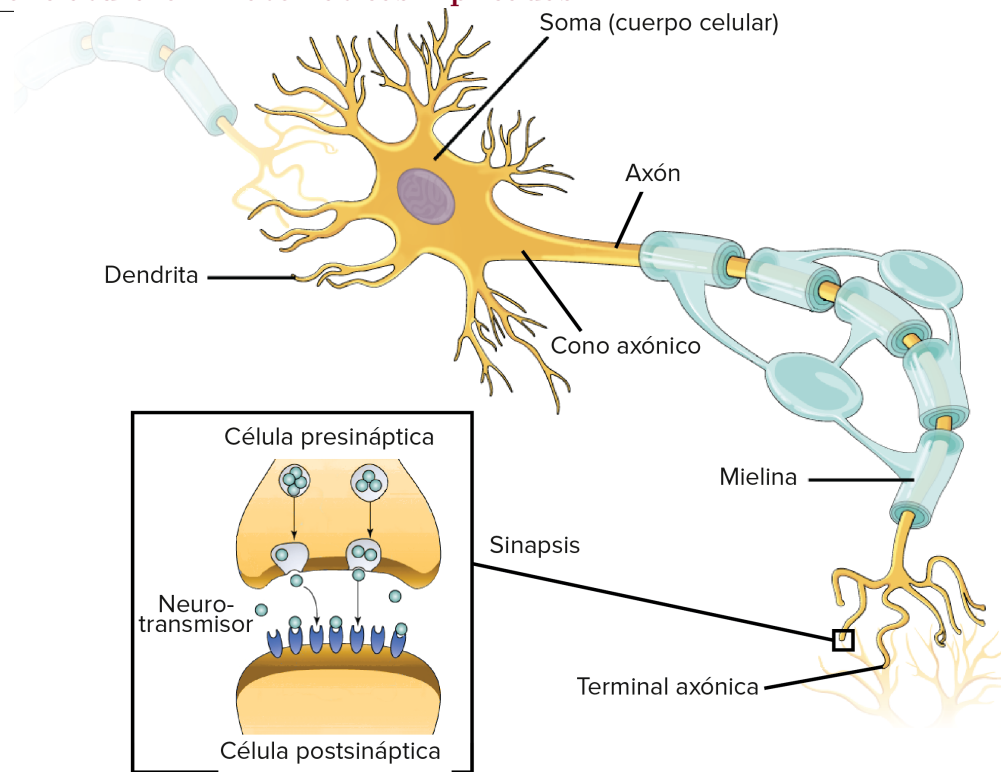


Figura 1.18: Ilustración de la anatomía de una neurona biológica encontrada en [1].

redes neuronales artificiales intentan imitar este comportamiento por medio de los algoritmos computacionales.

Una neurona artificial contiene los siguientes componentes:

- **Entradas** : Como su nombre lo indica, representan los datos de entrada y se agrupan en un vector $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_R)$, donde R denota el número de entradas.
- **Pesos Sinápticos** : Cada conexión de entrada tiene un peso asociado y se

agrupan como una matriz

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1R} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{S1} & w_{S2} & \cdots & w_{SR} \end{pmatrix}.$$

Cada elemento w_{ij} representa el peso entre la neurona j de la capa de entrada y la neurona i de la capa de salida.

- **Sesgo (bias):** Parámetro que ajusta la salida de la neurona:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_S \end{pmatrix}.$$

- **Combinación Lineal:** La neurona calcula la suma ponderada de sus entradas más un sesgo (b). Esta operación se expresa como el **producto punto** (o producto interno) entre el vector de pesos y el vector de entrada, más el sesgo:

$$n = W\vec{p} + b = \sum_{j=1}^R w_{1,j}p_j + b. \quad (1.3)$$

- **Función de Activación (f):** La entrada n es pasada a través de una función de transferencia o activación f , para producir la salida de la neurona a , esto es:

$$a = f(n) = f(W\vec{p} + b). \quad (1.4)$$

Las funciones de activación introducen la no-linealidad necesaria para que la red pueda aprender patrones. Entre ellas existen:



Nombre	Relación Entrada/Salida	Función f
Límite duro	$\begin{cases} a = 0 & n < 0 \\ a = 1 & n \geq 0 \end{cases}$	hardlin
Límite duro simétrico	$\begin{cases} a = -1 & n < 0 \\ a = +1 & n \geq 0 \end{cases}$	hardlims
Lineal	$a = n$	purelin
Lineal saturante	$\begin{cases} a = 0 & n < 0 \\ a = n & 0 \leq n \leq 1 \\ a = 1 & n > 1 \end{cases}$	satlin
Lineal saturante simétrica	$\begin{cases} a = -1 & n < -1 \\ a = n & -1 \leq n \leq 1 \\ a = 1 & n > 1 \end{cases}$	satlins
Log-Sigmoide	$a = \frac{1}{1 + e^{-n}}$	logsig
Tangente hiperbólica sigmoide	$a = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$	tansig
Lineal positiva	$\begin{cases} a = 0 & n < 0 \\ a = n & 0 \leq n \end{cases}$	poslin
Competitiva	$\begin{cases} a = 1 & \text{neurona con máx } n \\ a = 0 & \text{todas las demás} \end{cases}$	compet

Cuadro 1.1: Funciones de transferencia (Traducida de [13]).

Las arquitecturas de las redes neuronales exhiben cómo es su funcionalidad. En la Figura 1.19 se observa la arquitectura de una red neuronal sencilla.

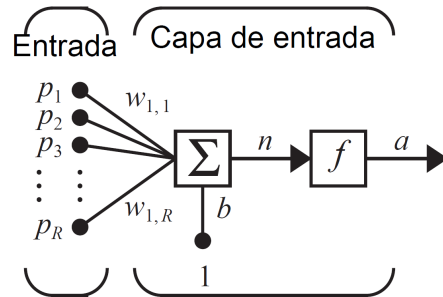


Figura 1.19: Arquitectura de una red neuronal definida por $a = f(W\vec{p} + b)$ (Modificada de [13]).

Una red neuronal artificial está compuesta por distintas capas que trabajan de manera conjunta para procesar la información. La primera de ellas es la **capa de entrada**, la cual recibe los datos originales del problema a resolver. Después se encuentra la **capa oculta** o intermedia, que se encarga de transformar la información mediante operaciones matemáticas y funciones de activación. En esta etapa, las neuronas combinan los valores de entrada con pesos y sesgos, generando representaciones internas más abstractas. Finalmente, se localiza la **capa de salida**, la cual produce el resultado final de la red (véase Figura 1.20).

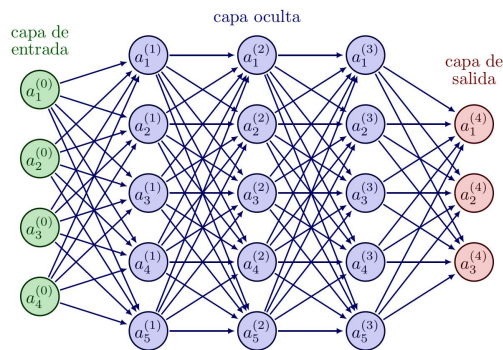


Figura 1.20: Capas de una red neuronal conectada completamente.

En conjunto, estas tres capas permiten que la red neuronal aprenda patrones a partir de los datos y realice predicciones con base en ellos.

1.5. Modelo discreto y continuo de las redes de Hopfield

La información proporcionada en la sección 1.2 y 1.4 brindan el sustento del siguiente análisis de las redes neuronales de Hopfield, tanto para el modelo discreto como el continuo. Las redes de Hopfield son sistemas dinámicos recurrentes que exhiben propiedades de memoria asociativa, donde la información se almacena en los estados estables del sistema.

1.5.1. Modelo discreto de Hopfield

La arquitectura del modelo discreto de Hopfield consiste en una red de una capa completamente recurrente, donde cada neurona está conectada a todas las demás, excepto consigo misma (véase Figura 1.21).

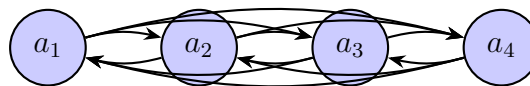


Figura 1.21: Arquitectura de cuatro neuronas de un modelo discreto de Hopfield conectadas.

Formalmente, para una red con n neuronas:

- Cada neurona i tiene un estado binario. Las neuronas a_i pueden tomar el valor 1 o -1 .

- Las conexiones están definidas por una matriz de pesos simétrica W donde se debe cumplir que $w_{ii} = 0$. De esto se deduce que no existen autoconexiones, o bien $w_{ii} = 0$, para todo i .

Se observa en la Figura 1.22 que la red neuronal de Hopfield discreta es de dimensión S , definida por la ecuación

$$\vec{a}(t + 1) = \text{satlins}(W\vec{a}(t) + \vec{b})$$

con condición inicial $\vec{a}(0) = P$, donde $\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^{S \times 1}$ representa el vector de estado en el instante t , $W \in \mathbb{R}^{S \times S}$ es la matriz de pesos recurrentes, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{S \times 1}$ es el vector de sesgo, y $\text{satlins}(\cdot)$ denota la función de activación saturación lineal. El operador D actúa como un integrador discreto que introduce un retardo unitario al ser discreto, propagando el estado $\vec{a}(t)$ al siguiente paso temporal.

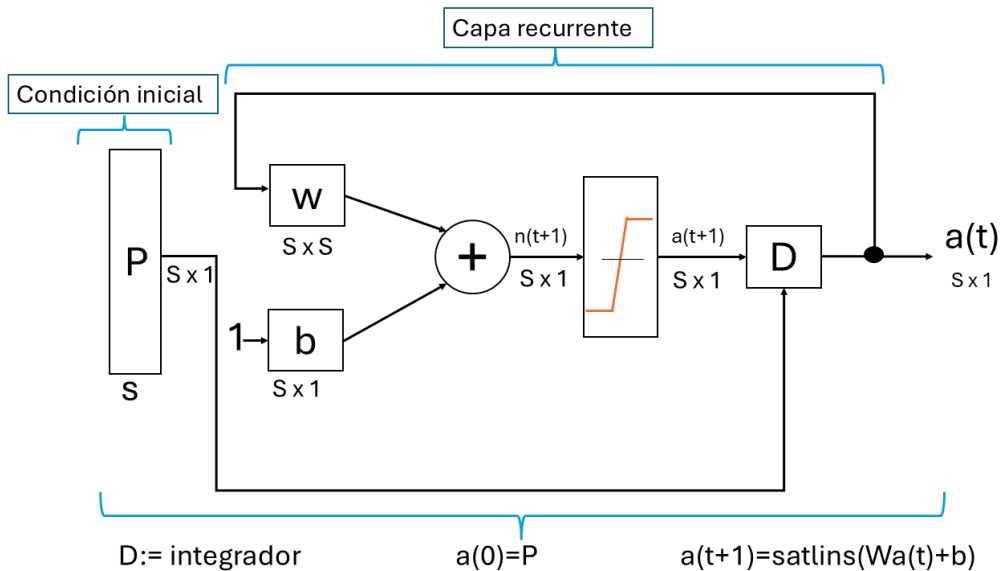


Figura 1.22: Red de Hopfield discreta

La función de activación $\text{satlins} : \mathbb{R}^S \rightarrow [-1, 1]^S$ se define componente a compo-

nente como:

$$\text{satlins}(x_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } x_i \leq -1 \\ x_i & \text{si } -1 < x_i < 1 \\ 1 & \text{si } x_i \geq 1 \end{cases}$$

Para almacenar p patrones $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_R\}$, donde cada $\vec{p}_k = [p_1^k, p_2^k, \dots, p_S^k]^T$ con $p_i^k \in \{-1, 1\}$, los pesos se calculan como:

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^p p_i^k p_j^k & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.5)$$

La función de energía para el modelo discreto está dada por

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^S w_{ij} a_i a_j + \sum_{i=1}^S \theta_i a_i, \quad (1.6)$$

donde θ_i representa el umbral de activación de la neurona i .

Para comprender mejor, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.1. Considere red de Hopfield discreta con 4 neuronas y dos patrones de entrenamiento:

$$\vec{p}^1 = [1, 1, -1, -1]^T \text{ y } \vec{p}^2 = [-1, -1, 1, 1]^T.$$

Se aplica la ecuación (1.5) para obtener la matriz de pesos:



$$w_{ij} = \vec{p}_i^1 \vec{p}_j^1 + \vec{p}_i^2 \vec{p}_j^2, \quad \text{para } i \neq j,$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora se aplica un patrón de prueba $a(0) = [1, 1, 1, -1]^T$ y se actualiza:

1. Neurona 1: $\vec{a}_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) = 2$, $a_1 = 1$.
2. Neurona 2: $\vec{a}_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) = 2$, $a_2 = 1$.
3. Neurona 3: $\vec{a}_3 = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -6$, $a_3 = -1$.
4. Neurona 4: $\vec{a}_4 = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -6$, $a_4 = -1$.

El estado final $a = [1, 1, -1, -1]^T$ corresponde al primer patrón almacenado.

La energía inicial y final se obtiene al aplicar la ecuación (1.6) y es

$$V_{\text{inicial}} = -\frac{1}{2}(2 + 2 - 6 + 2) = 0 \quad \text{y}$$
$$V_{\text{final}} = -\frac{1}{2}(6 + 6 + 6 + 6) = -12.$$

Confirmando que la energía disminuyó durante el proceso y por ende la red ya converge.

1.5.2. Modelo continuo de Hopfield

El modelo continuo se implementa mediante circuitos eléctricos donde cada neurona corresponde a un amplificador operacional. La dinámica se describe por:

- Amplificadores operacionales con función de transferencia sigmoide.
- Resistencias R_{ij} que implementan los pesos sinápticos.
- Capacitores C_i que modelan la dinámica temporal.
- Fuentes de corriente externas I_i .

Las ecuaciones del circuito para cada neurona i salen aplicando las leyes de Kirchoff (1.2.11) y se obtiene que:

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^S T_{ij} v_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i,$$

donde $v_i = f(u_i)$ es la salida del amplificador, T_{ij} son las conductancias del circuito y f es una función sigmoide (ver Figura 1.23).

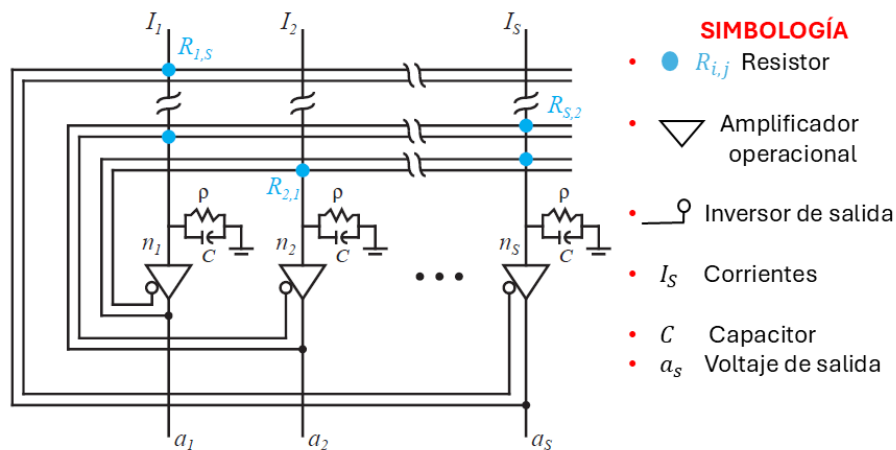


Figura 1.23: Circuito eléctrico del modelo continuo de Hopfield (Modificada de [13]).



En el modelo continuo, el aprendizaje puede realizarse mediante la regla de Hebb (la cual se abarca en el capítulo 3):

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^p p_i^k p_j^k, \quad \text{para } i \neq j.$$

La simetría $T_{ij} = T_{ji}$ es esencial para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el modelo continuo, la función de energía es más compleja:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S T_{ij} v_i v_j + \sum_{i=1}^S \frac{1}{R_i} \int_0^{v_i} f^{-1}(v) dv - \sum_{i=1}^S I_i v_i,$$

donde $v_i = f(u_i)$ es la salida de la neurona i y f^{-1} es la función inversa de la sigmoide.

Los modelos, discreto y continuo, comparten propiedades fundamentales, las cuales se muestran en el Cuadro 1.2.

Característica	Modelo Discreto	Modelo Continuo
Estados	Binarios $\{-1, 1\}$	Continuos $[-1, 1]$
Tiempo	Discreto	Continuo
Implementación	Software	Circuitos analógicos
Aplicaciones	Memorias asociativas	Optimización continua

Cuadro 1.2: Comparativa entre los modelos discreto y continuo de Hopfield.

Las principales diferencias radican en su implementación y aplicaciones: el modelo discreto es más adecuado para aplicaciones digitales y memorias asociativas (el término de memorias asociativas direccionables se analizará con más detalle en el capítulo 4), mientras que el modelo continuo ofrece mayor flexibilidad para problemas de optimización y puede implementarse físicamente mediante circuitos analógicos.

En el ámbito de las aplicaciones digitales, los modelos discretos son fundamentales en los sistemas de procesamiento digital de señales, en la implementación de



redes neuronales artificiales en hardware digital y en el diseño de controladores lógicos programables. Su naturaleza binaria lo hace ideal para implementaciones en microcontroladores [25]. También se emplean en memorias asociativas direccionables por contenido [27], en sistemas de recuperación de información y reconocimiento de patrones; por ejemplo, restauran imágenes borrosas.

Por otro lado, el modelo continuo puede implementarse físicamente usando amplificadores operacionales, resistencias y capacitores [10], lo que permite soluciones en tiempo real para problemas de optimización complejos, procesamiento de señales analógicas y sistemas de control automático con respuesta rápida.

Esta diversidad de implementaciones refleja la versatilidad y utilidad de los modelos de Hopfield.



Estabilidad de Lyapunov y el teorema de invarianza de LaSalle

El análisis de la estabilidad constituye un eje fundamental en el estudio de sistemas dinámicos, ya que permite caracterizar el comportamiento de las soluciones en torno a un punto de equilibrio. Dentro de este marco, el enfoque propuesto por Aleksandr Lyapunov, de origen ruso, en 1892, ha demostrado ser una de las herramientas más usuales para abordar problemas de estabilidad sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema. Su método se basa en la construcción de un funcional escalar (conocido como función de Lyapunov), que actúa como un análogo de la energía y cuya evolución temporal refleja la tendencia del sistema desde o hacia el equilibrio.

La aplicación del método de Lyapunov requiere, en muchos casos, condiciones sobre la derivada de la función candidata; en este contexto, el Teorema de Invarianza



de LaSalle amplía las posibilidades del análisis al considerar conjuntos invariantes y al establecer criterios de estabilidad asintótica bajo hipótesis más generales.

El presente capítulo tiene como objetivo exponer los fundamentos de la estabilidad de Lyapunov y mostrar el Teorema de Invarianza de LaSalle. Se inicia con los fundamentos matemáticos de existencia y unicidad del problema de Cauchy, se introducen los puntos de equilibrio, estables, asintóticamente estables e inestables. La sección 2.2 muestra la teoría básica de estabilidad de Lyapunov; particularmente, se hace énfasis en la función de Lyapunov y el teorema de Lyapunov, siendo la estabilidad asintótica y global parte relevante. Luego, en la sección 2.4, se definen los conjuntos invariantes para posteriormente formular el Teorema de Invarianza de LaSalle.

Con lo expuesto en este capítulo se proporcionan los fundamentos para la caracterización del comportamiento asintótico de las redes de Hopfield del capítulo 4.

2.1. Definiciones básicas

Considérese un sistema dinámico, en general no lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (2.1)$$

Definición 2.1.1. Sea $f(x, y)$ una función $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $(x_0, y_0) \in D$. Se denomina **problema de Cauchy** o **problema de valores iniciales de primer orden** al problema que consiste en buscar funciones $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo tal que $x_0 \in I$ e $y \in C^1$, que verifique la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo $x \in I$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$.



Se representa como

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

En particular, si f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ son funciones continuas en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, se satisfacen las condiciones de la **Definición 2.1.1.**

El sistema 2.1 se llama **no autónomo** y se llama **autónomo** cuando f no depende del tiempo, es decir, $\dot{x} = f(x)$.

Un concepto central en el estudio de sistemas dinámicos es el de punto de equilibrio, el cual caracteriza los estados donde el sistema permanece constante en el tiempo.

Definición 2.1.2. El estado $x^* \in \mathbb{R}^n$ se llama **punto crítico, punto singular** ó **estado estacionario del sistema** si $f(x^*, t) \equiv 0$ para todo t .

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el punto crítico es $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$. En caso de que no lo sea, se hace el cambio de variable $z = x - x^*$, que lleva al punto x^* al origen, dado que los cálculos y la teoría se simplifican.

Para caracterizar el comportamiento del sistema alrededor de un punto de equilibrio, se definen diferentes tipos de estabilidad.

Definición 2.1.3. Sea $x^* = 0$ un punto crítico del sistema. Entonces:

- el punto 0 es **estable** si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|x^*(t_0)\| < \delta$ implica $\|x^*(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq t_0$.
- 0 es **asintóticamente estable** si es estable y además $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = 0$.



- 0 es **inestable** si no es estable, es decir, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ existe $x^*(t_0)$ que verifica $\|x^*(t_0)\| < \delta$ y $\|x^*(t)\| \geq \epsilon$, para algún $t_1 > t_0$. Si además esto sucede para todo $x^*(t_0)$ con $\|x^*(t_0)\| < \delta$, entonces 0 se llama **completamente inestable**.

2.2. Estabilidad de Lyapunov

La teoría de Lyapunov consiste en generalizar el concepto de energía V que aparece en los sistemas conservativos desde el punto de vista de la Mecánica, donde es bien sabido que un punto crítico es estable si la energía tiene un mínimo en dicho punto.

Una definición clave en el método directo de Lyapunov es la derivada orbital, que mide la evolución de una función a lo largo de las trayectorias del sistema.

Definición 2.2.1. Dada una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , se define **la derivada orbital** \dot{V} de V respecto al sistema $\dot{x} = f(x, t)$, como la siguiente derivada direccional:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \nabla V \cdot f(x, t).$$

Nótese que, dada una solución del sistema, se tiene

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(\dot{x}(t))}{dt}.$$

El método directo de Lyapunov se basa en la construcción de funciones escalares que permiten analizar la estabilidad sin resolver las ecuaciones diferenciales.



Definición 2.2.2. La función $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $x^* = 0 \in D$ es una **función de Lyapunov** para el sistema 2.1, si verifica lo siguiente:

1. $V \in C^1(D)$.
2. V es **definida positiva**, es decir, $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \in D$, con $x \neq 0$.
3. \dot{V} es **semidefinida negativa**, es decir, $\dot{V}(0) = 0$ y $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in D$.

Teorema 2.2.1. Teorema de Lyapunov

- El punto crítico $x^* = 0$ del sistema es estable si existe una función de Lyapunov definida en un entorno $D \subset \mathbb{R}^n$ con $0 \in D$.
- El punto crítico $x^* = 0$ del sistema es asintóticamente estable si existe una función de Lyapunov definida en un entorno
- $D \subset \mathbb{R}^n$ con $0 \in D$ tal que \dot{V} es definida negativa, es decir, $\dot{V}(0) = 0$ y $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in D$ con $x \neq 0$.

La siguiente definición es una generalización de la Definición 2.2.2:

Definición 2.2.3. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Si G es cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , se dice que V es una **función de Lyapunov sobre G** del sistema

$$\frac{da}{dt} = g(a)$$

si $\frac{dV(\vec{a})}{dt} = (\nabla V(\vec{a}))^T g(\vec{a})$ no cambia de signo sobre G .

Nótese que aquí no se requiere que la función sea definida positiva, solo que



sea continuamente diferenciable. De hecho, la derivada no cambia de signo si es semidefinida negativa o semidefinida positiva.

2.3. Estabilidad asintótica y global

Las redes neuronales de Hopfield son modelos ampliamente utilizados en el campo de la inteligencia artificial para la representación y almacenamiento de patrones de memoria mediante procesos de convergencia. Una característica fundamental de estas redes es su estabilidad, ya que de ella depende su funcionamiento como sistemas dinámicos. Es aquí donde se pueden aplicar las herramientas poderosas que ofrece la teoría de estabilidad de Lyapunov, en particular, el uso de funciones de Lyapunov y el Teorema de Invariancia de LaSalle proporcionan un marco formal para garantizar la estabilidad global o asintótica del sistema. Sin embargo, aún se requiere un análisis detallado de las condiciones específicas bajo las cuales estos métodos aseguran la convergencia de la red a estados estables, especialmente para diferentes configuraciones del espacio de pesos y funciones de activación.

En este sentido, surge la necesidad de realizar un estudio profundo que combine el modelo matemático de las redes de Hopfield con herramientas de la teoría de estabilidad, con el fin de caracterizar su comportamiento de manera formal y fundamentada.

2.4. Conjuntos invariantes

Definición 2.4.1. Un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n se define como **conjunto invariante** con respecto a



$$\frac{d\vec{a}}{dt} = g(\vec{a}), \quad (2.3)$$

si toda solución de la ecuación (2.3) que comience en el conjunto permanece en el conjunto para todo tiempo t .

Ahora, para V una **función de Lyapunov sobre G** , defínase el conjunto

$$Z = \left\{ \vec{a} : \frac{dV(\vec{a})}{dt} = 0, \vec{a} \text{ en la clausura de } G \right\}.$$

Sea L definido como el **conjunto invariante más grande en Z** . Este conjunto incluye todos los posibles puntos para los cuales la solución podría converger. La función de Lyapunov no cambia en L ya que su derivada es 0 y la trayectoria estará atrapada en L porque es un conjunto invariante. Ahora, si este conjunto solo tiene un único punto estable, entonces es asintóticamente estable. Ésta es la esencia del Teorema Invariante de LaSalle.

En el análisis de sistemas dinámicos, los conjuntos invariantes juegan un papel crucial para entender el comportamiento a largo plazo de las trayectorias.

2.5. Teorema de Invarianza de LaSalle

Este teorema extiende la teoría de Lyapunov y permite establecer la convergencia a subconjuntos invariantes del sistema, fortaleciendo los resultados de estabilidad asintótica.

Teorema 2.5.1. Teorema de Invarianza de LaSalle

Si V es una función de Lyapunov sobre G para la ecuación (2.3), entonces cada solución $\vec{a}(t)$ que pertenezca a G para todo $t > 0$ se aproxima a

$$\mathcal{L}^0 = L \cup \{\infty\},$$



cuando $t \rightarrow \infty$ (Es decir, G es una cuenca de atracción para L , que contiene todos los puntos estables). Si todas las trayectorias son acotadas, entonces

$$\vec{a}(t) \rightarrow L, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Para comprender mejor el teorema, es útil definir formalmente qué significa que una trayectoria sea acotada. En [37] se encuentra la siguiente definición.

Definición 2.5.1. Una **trayectoria acotada** de un sistema analítico es una solución $\vec{a}(t)$ para la cual existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|a(t)\| \leq M \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además, cualquier trayectoria $\vec{a}(t)$ de un sistema analítico puede ser:

- Acotada ($\|a(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$).
- Irse al infinito ($\|a(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$).
- Oscilación (ni acotada ni irse al infinito) .

Recuérdese que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es conectado si no existen dos conjuntos abiertos (en la topología de C) A y B , no vacíos, tales que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Un corolario útil del Teorema de Invarianza de LaSalle, que facilita su aplicación en sistemas con regiones acotadas, se enuncia a continuación.

Corolario 2.5.1. (Corolario de LaSalle)

Sea G una componente (un subconjunto conectado) de

$$\Omega_\eta = \{\vec{a} : V(\vec{a}) < \eta\}.$$

Supongamos que G es acotado, $\frac{dV(\vec{a})}{dt} \leq 0$ sobre el conjunto G y sea el conjunto



$$\mathcal{L}^0 = \overline{(L \cap G)}$$

con $\mathcal{L}^0 \subseteq G$. Entonces \mathcal{L}^0 es un atractor y $G \subseteq \mathcal{L}^0$, en consecuencia, $\mathcal{L}^0 = G$.

Los conceptos de estabilidad de Lyapunov y el teorema de invarianza de LaSalle presentados en este capítulo proporcionan las herramientas teóricas necesarias para analizar la convergencia y estabilidad de las redes de Hopfield, que serán estudiadas en el capítulo 4. Estas herramientas permitirán caracterizar los puntos de equilibrio y los comportamientos asintóticos de dichas redes neuronales.



Regla de Hebb

La red de Hopfield no tiene una regla de entrenamiento asociada a ella, es decir, no se entrena ni aprende por ella misma. En su lugar, se usa un proceso basado en la función de Lyapunov para determinar la matriz de pesos. Este capítulo se dedica a mostrar una manera de realizar el entrenamiento basado en la regla de Hebb al considerar la red como una que tiene memoria; por esta razón, se inicia con la introducción de esta regla para, posteriormente, retomarla en la sección de memoria de contenido direccionable. Toda la información fue recolectada de [13].

3.1. Postulado de Donald O. Hebb

Donald O. Hebb nació en Chester, Nueva Escocia. Comenzó a estudiar a Freud después de graduarse de la Universidad Dalhousie en Halifax en 1925. Se interesó en psicología al estudiar una maestría en la Universidad McGill, donde investigó sobre



Figura 3.1: Donald O. Hebb. Tomada de [19].

el conocimiento Pavloviano. Recibió su Ph.D. en Harvard en 1936 y, en 1949, resumió las dos décadas de investigación en *“The Organization of Behavior”*.

La premisa principal fue que el comportamiento podría explicarse por la acción de las neuronas y enfatizó la conexión entre estímulos y respuestas. La más famosa idea fue el postulado que dio origen al conocido aprendizaje Hebbiano:

“Cuando un axón de una célula A está lo suficientemente cercano a una célula B y repetida o persistentemente toma parte en dispararla, algunos procesos crecen o se llevan a cabo cambios metabólicos en una o ambas células de tal manera que la eficiencia de A como una de las células que disparan a B es incrementada.”

La ley del aprendizaje de Hebb se usa en combinación con una variedad de arquitecturas de redes. Por ejemplo, la red llamada “asociador lineal”, con estructura:

Entrada \rightarrow Capa lineal \rightarrow Salida,

donde la salida es $\vec{a} = W\vec{p}$, es decir,

$$a_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}p_j.$$

El asociador lineal es un ejemplo de unidad de red neuronal llamada “de memoria asociativa”. La función de una memoria asociativa es memorizar Q parejas de vectores prototipo formados por entradas y salidas:

$$\{\vec{p}_1, \vec{t}_1\}, \{\vec{p}_2, \vec{t}_2\}, \dots, \{\vec{p}_Q, \vec{t}_Q\}.$$

En otras palabras, si la red recibe una entrada $\vec{p} = \vec{p}_q$, entonces debería producir una salida $\vec{a} = \vec{t}_q$ para $q = 1, 2, \dots, Q$. Más aún, si la entrada cambia ligeramente, digamos $\vec{p} = \vec{p}_q + \vec{\delta}$, entonces la salida debe cambiar ligeramente, digamos $\vec{a} = \vec{t}_q + \vec{\epsilon}_\delta$.

1. ¿Cómo se puede interpretar matemáticamente el postulado de la regla de Hebb?
2. ¿Cómo se puede usar para entrenar la matriz de pesos del asociador lineal?

Primero lo que se hace es reinterpretar el postulado como:

- Si dos neuronas a cada lado de una sinapsis son activadas simultáneamente, la fuerza de la sinapsis incrementará.
- La conexión (sinapsis) entre la entrada p_j y la salida a_i es el peso w_{ij} . Por lo tanto el postulado de Hebb deberá implicar que si un p_j positivo produce un a_i positivo, w_{ij} debería incrementar. Esto sugiere que una interpretación matemática del postulado podría ser:

$$w_{ij}^{\text{nuevo}} = w_{ij}^{\text{viejo}} + \alpha f(a_i)g(p_j),$$

donde p_j es el j -ésimo elemento del q -ésimo vector entrada \vec{p}_q , a_i es el i -ésimo elemento de la salida de la red cuando el q -ésimo vector entrada ingresa en la

red, esto es,

$$a_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} p_{j,q},$$

donde $p_{j,q}$ es el j -ésimo elemento del vector de entrada \vec{p}_q . Además, α es una constante positiva llamada tasa de aprendizaje, y f y g son funciones de activación correspondientes.

La ecuación se puede simplificar, en particular, como:

$$w_{ij}^{\text{nuevo}} = w_{ij}^{\text{viejo}} + \alpha a_i p_j,$$

con funciones de activación lineales. Esta expresión ejecuta el postulado de Hebb; el cambio del peso es proporcional al producto de la actividad en cada lado de la sinapsis. Por tanto, si p_j y a_i son positivas, no negativas simultáneamente, el peso incrementa. Si son de signo contrario, el peso decrementa.

La regla de Hebb es una regla de aprendizaje que no requiere información sobre la salida deseada. Para la regla de Hebb supervisada se sustituye la salida por la salida deseada como:

$$w_{ij}^{\text{nuevo}} = w_{ij}^{\text{viejo}} + t_{i,q} p_{j,q},$$

donde $t_{i,q}$ es el i -ésimo elemento del q -ésimo vector objetivo \vec{t}_q .

En forma matricial se puede escribir:

$$W^{\text{nuevo}} = W^{\text{viejo}} + \vec{t}_q \vec{p}_q^T.$$

Si se inicializa la matriz de peso en cero:

$$W = \sum_{q=1}^Q \vec{t}_q \vec{p}_q^T = \vec{t}_1 \vec{p}_1^T + \vec{t}_2 \vec{p}_2^T + \cdots + \vec{t}_Q \vec{p}_Q^T.$$

3.2. Regla de Hebb supervisada

La regla de Hebb supervisada está dada por

$$W = \sum_{q=1}^Q \vec{p}_q \vec{p}_q^T.$$

Si se asume que los patrones prototipo son $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_Q\}$, cada uno de los vectores contiene S elementos que toman los valores entre -1 o 1 , el siguiente teorema determina los eigenspacios generados por los vectores prototipo.

Proposición 3.2.1. Si el conjunto de $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_Q\}$ son linealmente independientes y ortogonales, entonces:

- La matriz de pesos W tiene dos eigenvalores: S y 0 .
- El eigenspacio para el eigenvalor S es el espacio generado por los vectores prototipo.
- El eigenspacio para el eigenvalor 0 es el complemento ortogonal del espacio generado por los vectores prototipo.

Demostración:

Supóngase que los vectores prototipo son ortogonales. De esta manera, si se ingresa el vector prototipo \vec{p}_j a la red, entonces

$$W \vec{p}_j = \sum_{q=1}^Q (\vec{p}_q \vec{p}_q^T) \vec{p}_j.$$

Por la ortogonalidad de los vectores prototipo ($\vec{p}_q^T \vec{p}_j = 0$ para $q \neq j$), todos los términos de la suma se anulan excepto cuando $q = j$:

$$W \vec{p}_j = (\vec{p}_j \vec{p}_j^T) \vec{p}_j.$$



Nótese que $\vec{p}_j \vec{p}_j^T$ es una matriz de $S \times S$ (producto exterior), mientras que $\vec{p}_j^T \vec{p}_j$ es un escalar (producto punto). Usando la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$(\vec{p}_j \vec{p}_j^T) \vec{p}_j = \vec{p}_j (\vec{p}_j^T \vec{p}_j).$$

Dado que cada elemento de \vec{p}_j es ± 1 , el producto punto $\vec{p}_j^T \vec{p}_j$ es igual a la dimensión S :

$$\vec{p}_j^T \vec{p}_j = \sum_{k=1}^S p_{jk}^2 = \sum_{k=1}^S 1 = S.$$

Por lo cual:

$$W \vec{p}_j = \vec{p}_j \cdot S = S \vec{p}_j.$$

Esto se puede escribir como:

$$W \vec{p}_j = \lambda \vec{p}_j.$$

Por lo tanto, cada vector prototipo es un eigenvector de la matriz de pesos y tiene un eigenvalor común $\lambda = S$. De aquí que, el eigenespacio X para el eigenvalor $\lambda = S$ es

$$X = \text{span} \{ \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_Q \}.$$

Este espacio contiene todos los vectores que pueden ser escritos como combinaciones lineales de los vectores prototipo. Esto es, cualquier vector $\vec{a}(t)$ que es una combina-

ción lineal de los vectores prototipo es un eigenvector, esto ya que

$$\begin{aligned}
 W\vec{a}(t) &= W \{ \alpha_1(t)\vec{p}_1 + \alpha_2(t)\vec{p}_2 + \cdots + \alpha_Q(t)\vec{p}_Q \} \\
 &= \alpha_1 W\vec{p}_1 + \alpha_2 W\vec{p}_2 + \cdots + \alpha_Q W\vec{p}_Q \\
 &= \alpha_1 S\vec{p}_1 + \alpha_2 S\vec{p}_2 + \cdots + \alpha_Q S\vec{p}_Q \\
 &= S \{ \alpha_1\vec{p}_1 + \alpha_2\vec{p}_2 + \cdots + \alpha_Q\vec{p}_Q \} \\
 &= S\vec{a}(t).
 \end{aligned}$$

Ahora se considera que los vectores \vec{p}_j , $j = 1, \dots, Q$, son linealmente independientes. Entonces el eigenespacio para el eigenvalor $\lambda = S$ es Q -dimensional.

Ahora, si el espacio \mathbb{R}^S puede ser dividido en dos conjuntos disjuntos, entonces

$$\mathbb{R}^S = X \cup X^\perp,$$

donde X^\perp es el complemento ortogonal de X . Esto significa que para cualquier vector $\vec{a} \in X^\perp$,

$$(\vec{p}_q)^T \vec{a} = 0, \quad \text{para todo } q = 1, 2, \dots, Q.$$

Si $\vec{a} \in X^\perp$,

$$W\vec{a} = \sum_{q=1}^Q (\vec{p}_q \vec{p}_q^T) \vec{a} = \sum_{q=1}^Q \vec{p}_q \cdot 0 = \vec{0} = 0 \cdot \vec{a}.$$

Por ende, X^\perp define un eigenespacio para el eigenvalor de multiplicidad $\lambda = 0$. ■

3.3. Memoria de contenido direccionable.

A continuación, se presenta la manera en la que una red de Hopfield puede ser diseñada para funcionar como una memoria asociativa. El tipo de memoria asociativa que se diseñará será llamada una “memoria de contenido direccionable”, ya que recupera memoria almacenada o recuerdos sobre las bases de parte de los contenidos. Esto se asemeja a las memorias estándar de las computadoras. Por ejemplo, si



se tiene una base de datos de contenido direccionable que contiene nombres, direcciones y números de empleado, podemos recuperar una entrada de datos completa simplemente proporcionando el nombre del empleado (quizás parcialmente).

Ahora, imagine que se quiere almacenar un conjunto de patrones prototipo en una red de Hopfield. Cuando un patrón entrante ingresa a la red, la red deberá producir el patrón almacenado que más se asemeje al patrón de entrada.

La salida inicial de la red se asigna al patrón entrada. Esto significa que el estado inicial de la red $\vec{a}(0)$ se fija igual al patrón de entrada \vec{p}_{entrada} . A partir de este estado, la red evoluciona mediante actualizaciones iterativas de sus neuronas. La dinámica de la red está diseñada para que el estado $\vec{a}(t)$ converja al patrón prototipo \vec{p}_q que sea más cercano al patrón entrante en términos de similitud. Para que esta convergencia ocurra de manera efectiva, los patrones prototipo deben corresponder a los mínimos de la función de Lyapunov de la red.

Si se asume que los patrones prototipo son $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_Q\}$, cada uno de los vectores contiene S elementos que toman los valores entre -1 o 1 y $Q \ll S$, esto indica que el espacio de estados es grande, con lo cual los patrones prototipo están bien distribuidos en este espacio y no están cercanos unos de otros.

Para que la red de Hopfield sea capaz de recordar los patrones prototipo, los patrones deben ser los mínimos de la función de Lyapunov. Para lograr el objetivo de la investigación, en lo siguiente se analizan los patrones prototipo como los mínimos de la siguiente función cuadrática, llamada función de índice de rendimiento:

$$J(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q ((\vec{p}_q)^T \vec{a}(t))^2.$$

Si los elementos del vector \vec{a} están restringidos a los valores ± 1 , esta función está minimizada en los patrones prototipo; en efecto, será demostrada a continuación.

Proposición 3.3.1. Si los vectores prototipo \vec{p}_j , $j = 1, \dots, Q$, son ortogonales, entonces la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$ es igual al índice de rendimiento cuadrático $J(\vec{a}(t))$.

Demostración:

Bajo la suposición de que los patrones prototipo son ortogonales. Si se evalúa el índice de rendimiento en uno de los patrones prototipo, se encuentra que,

$$J(\vec{p}_j) = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (\vec{p}_q^T \vec{p}_j)^2 = -\frac{1}{2} (\vec{p}_j^T \vec{p}_j)^2 = -\frac{S^2}{2},$$

ya que los elementos de \vec{p}_j son ± 1 y $\vec{p}_j^T \vec{p}_j = S$.

Ahora, al evaluar el índice de rendimiento en un patrón de entrada aleatorio $\vec{a}(t)$, el cual no necesariamente está cercano a un patrón prototipo, cada elemento en la suma de $J(\vec{a}(t))$ es el producto interno entre el patrón prototipo y la entrada.

El producto interno crece cuando la entrada se acerca a un patrón prototipo, y decrece entre más se aleje. Por lo tanto, $J(\vec{a}(t))$ será más grande (más negativo) cuando $\vec{a}(t)$ sea igual a uno de los patrones prototipo.

Por lo que se ha encontrado una función cuadrática que indica con precisión el desempeño de la memoria de contenido direccionable. El siguiente paso es elegir la matriz de peso W y el bias tal que la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$ sea equivalente al índice de rendimiento cuadrático $J(\vec{a}(t))$.

Se utiliza la regla de Hebb supervisada para calcular la matriz de pesos (con patrones objetivos iguales a los patrones de entrada) de la forma:

$$W = \sum_{q=1}^Q \vec{p}_q (\vec{p}_q)^T,$$

y el bias

$$\vec{b} = \vec{0},$$



entonces la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned} V(\vec{a}(t)) &= -\frac{1}{2}\vec{a}(t)^T W \vec{a}(t) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a}(t)^T \left[\sum_{q=1}^Q \vec{p}_q \vec{p}_q^T \right] \vec{a}(t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \vec{a}(t)^T \vec{p}_q \vec{p}_q^T \vec{a}(t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (\vec{p}_q^T \vec{a}(t))^2 = J(\vec{a}(t)). \end{aligned}$$

■

Resta analizar si la salida de la red convergerá a los patrones prototipo almacenados, lo que da paso al capítulo siguiente.

Análisis de estabilidad en redes de Hopfield

La aplicación de la Teoría de Estabilidad de Lyapunov al análisis de las redes neuronales recurrentes **fue una de las contribuciones clave de Hopfield**. Algo interesante es que Cohen y Grossberg en [12] también usaron la teoría de Lyapunov para el análisis de redes competitivas al mismo tiempo. El **Teorema de Invarianza de LaSalle** 2.5.1 puede ser aplicable para determinar la estabilidad de las redes de Hopfield. Este es el punto central de esta investigación. Para esto, primero se escribe la ecuación de la red de Hopfield, la cual se define como

$$\sigma \frac{d(\vec{x}(t))}{dt} = -\vec{x}(t) + W\vec{a}(t) + \vec{b},$$

con $\vec{a}(t) = f(\vec{x}(t))$.

El siguiente paso es encontrar la función de Lyapunov asociada al sistema. Hopfield, en su artículo publicado en 1982 ([27]), sugirió la siguiente función:



$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) + \sum_{i=1}^s \left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\} - \vec{b}^T \vec{a}(t). \quad (4.1)$$

Esta función de Lyapunov también es llamada función de transferencia o función de energía. La elección de esta función de Lyapunov (4.1) es una de las contribuciones clave que realizó Hopfield y le hizo merecedor del Premio Nobel de Física en el año 2024.

En la presente investigación se comprobará que la función $V(\vec{a}(t))$ cumple con las condiciones del **Teorema de Invarianza de LaSalle 2.5.1**, al igual que se establece el conjunto invariante. El conjunto de estas condiciones son algunas de las aportaciones de esta tesis. Las condiciones que se comprobarán son:

1. La derivada temporal de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$, es negativa o cero $\left(\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0\right)$ a lo largo de las trayectorias del sistema.
2. Existe el conjunto invariante L más grande.
3. Las trayectorias de las soluciones son acotadas.

Este capítulo tiene como propósito probar las tres condiciones. La sección 4.1 analizará la derivada de la función de Lyapunov; en la sección 4.2 se determina el conjunto invariante, ilustrado con ejemplos, principalmente, el ejemplo 4.2.1, que es dado por Hopfield en su artículo original. Finalmente, para aplicar el Teorema de Invarianza de LaSalle 2.5.1 se analizan los atractores como los mínimos de la función de Lyapunov (sección 4.3), luego se utiliza la técnica de aplicar una ganancia alta en la sección 4.4, en la cual se muestra que las trayectorias se encuentran dentro de un hipercubo, es decir, son acotadas. Con esto, se demuestra la estabilidad de las redes de Hopfield y se logra el objetivo general de la investigación.

4.1. Análisis de la derivada de la función de Lyapunov

Toda la sección está dedicada a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *Si la derivada de la función de activación $f(\vec{a}(t))$ es una función creciente, entonces la derivada orbital de la función*

$$V(\vec{a}(t)) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t)}_{\text{término 1}} + \sum_{i=1}^s \underbrace{\left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\}}_{\text{término 2}} - \underbrace{\vec{b}^T \vec{a}(t)}_{\text{término 3}}$$

es negativa o cero a lo largo de las trayectorias del sistema, esto es,

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0.$$

Demostración:

En un primer paso, se calcula la derivada de $V(\vec{a}(t))$ con respecto al tiempo, término a término mediante el uso de la regla de la cadena.

- **Para el término 1:** La derivada de $-\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t)$ se calcula como

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) \right] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t)], \quad (4.2)$$

específicamente

$$\frac{d}{dt} [(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t)] = \frac{d(\vec{a}(t))^T}{dt} W \vec{a}(t) + (\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt}. \quad (4.3)$$

Dado que W es simétrica ($W = W^T$) con entradas escalares, entonces es igual a su transpuesta y se puede simplificar como

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\vec{a}(t))^T}{dt} W \vec{a}(t) &= \left[\frac{d(\vec{a}(t))^T}{dt} W \vec{a}(t) \right]^T \\
 &= (\vec{a}(t))^T W^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \\
 &= (\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por consiguiente de las ecuaciones (4.3) y (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t)] &= (\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + (\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \\
 &= 2(\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4.5) en el primer término (ecuación (4.2)):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} (\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) \right] &= -\frac{1}{2} \left[2(\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \right] \\
 &= -(\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

- **Para el término 2:** $\sum_{i=1}^s \left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\}$, se aplica la regla de la cadena.

La derivada de una integral con límite superior variable es:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^{a_i(t)} g(u) du \right] = g(a_i(t)) \cdot \frac{da_i(t)}{dt}.$$

En este caso, $g(u) = f^{-1}(u)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{d}{da_i(t)} \left[\int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right] = f^{-1}(a_i(t)).$$

Ahora se aplica la regla de la cadena para obtener:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[\int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right] &= \left[\frac{d}{da_i(t)} \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right] \cdot \frac{da_i(t)}{dt} \\
 &= f^{-1}(a_i(t)) \frac{da_i(t)}{dt}.
 \end{aligned}$$

Como el valor $x_i(t)$ es $x_i(t) = f^{-1}(a_i(t))$, se tiene:

$$f^{-1}(a_i(t)) \frac{da_i(t)}{dt} = x_i(t) \frac{da_i(t)}{dt}.$$

Luego, la derivada de la suma para todas las neuronas que van desde $i = 0 \dots N$ es entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right] &= \sum_{i=1}^N x_i(t) \frac{da_i(t)}{dt} \\ &= (\vec{x}(t))^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

- **Para el término 3:** $-\vec{b}^T \vec{a}(t)$, se aplica la derivada con respecto al tiempo y se tiene que,

$$\frac{d}{dt} \left[-\vec{b}^T \vec{a}(t) \right] = -\vec{b}^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt}. \quad (4.8)$$

Ahora se combinan los tres términos (4.6), (4.7) y (4.8) para obtener que la derivada de $V(\vec{a}(t))$ es:

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = \left[(-\vec{a}(t))^T W \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \right] + \left[(\vec{x}(t))^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \right] + \left[-\vec{b}^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \right],$$

o bien, se factoriza $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$ y se sigue que la derivada de $V(\vec{a}(t))$ es,

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = \left[-(\vec{a}(t))^T W + (\vec{x}(t))^T - \vec{b}^T \right] \frac{d\vec{a}(t)}{dt}. \quad (4.9)$$

Por otro lado, recordar que la ecuación diferenciable del circuito eléctrico está regida por:

$$\sigma \frac{d(\vec{x})}{dt} = -\vec{x}(t) + W \vec{a}(t) + \vec{b}, \quad (4.10)$$

con $\vec{a}(t) = f(\vec{x}(t))$.

Se reordena la ecuación (4.10) como

$$W\vec{a}(t) + \vec{b} - \vec{x}(t) = \sigma \frac{d(\vec{x})}{dt}.$$

Luego, se emplea la transpuesta en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} [W\vec{a}(t) + \vec{b} - \vec{x}(t)]^T &= \left[\sigma \frac{d(\vec{x}(t))}{dt} \right]^T, \\ (\vec{a}(t))^T W^T + \vec{b}^T - (\vec{x}(t))^T &= \sigma \left[\frac{d(\vec{x}(t))}{dt} \right]^T. \end{aligned}$$

Al multiplicar por -1 :

$$-(\vec{a}(t))^T W^T - \vec{b}^T + (\vec{x}(t))^T = -\sigma \left[\frac{d(\vec{x}(t))}{dt} \right]^T.$$

Por otro lado, la ecuación (4.9) se puede reescribir

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = -\sigma \left[\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right]^T \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -\sigma \sum_{i=0}^s \left(\frac{dx_i(t)}{dt} \right) \left(\frac{da_i(t)}{dt} \right).$$

Como $x_i(t) = f^{-1}(a_i(t))$, se puede expandir la derivada de $x_i(t)$ como:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [f^{-1}(a_i(t))] = \frac{d}{da_i(t)} [f^{-1}(a_i(t))] \frac{da_i(t)}{dt}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} &= -\sigma \sum_{i=1}^s \left(\frac{dx_i(t)}{dt} \right) \left(\frac{da_i(t)}{dt} \right) \\ &= -\sigma \sum_{i=1}^s \left(\frac{d}{da_i(t)} [f^{-1}(a_i(t))] \right) \left(\frac{da_i(t)}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Bajo la suposición de que $f^{-1}(a_i(t))$ es una función creciente y dado que debería ser un amplificador operacional entonces:

$$\frac{d}{da_i(t)} [f^{-1}(a_i(t))] > 0.$$

Lo que implica que $\frac{d}{dt}V(\vec{a}(t)) \leq 0$, por lo tanto, si $f'(a_i(t))$ es una función creciente, $\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt}$ es semidefinida negativa. En conclusión, $V(\vec{a}(t))$ es una función de Lyapunov válida. ■

4.2. Conjuntos Invariantes

Esta sección se encuentra dedicada a encontrar el conjunto invariante más grande.

Teorema 4.2.1. *Si*

$$\frac{d}{da_i(t)} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right] > 0,$$

entonces existe el conjunto invariante más grande.

Demostración:

Sea el conjunto Z :

$$Z = \left\{ \vec{a}(t) : \frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = 0, \vec{a}(t) \text{ en la clausura de } G \right\}.$$

Se demostrará que Z es el conjunto invariante más grande. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que G es todo \mathbb{R}^s , donde s representa el tamaño del vector $a(t)$.

Considérese la expresión:

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = -\sigma \sum_{i=1}^s \left(\frac{d}{da_i(t)} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right] \right) \left(\frac{da_i(t)}{dt} \right)^2,$$

Ahora, esta derivada es negativa; en efecto, al analizar la expresión $\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt}$ término a término se observa que:

- $\sigma > 0$ (pues, es constante positiva).
- $\frac{d}{da_i(t)} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right] > 0$ (por hipótesis).
- $\left(\frac{da_i(t)}{dt} \right)^2 \geq 0$ (el cuadrado siempre es no negativo).



Por lo tanto, cada término de la suma es no negativo, y en consecuencia:

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0, \text{ para todo } \vec{a}(t).$$

La igualdad

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} = 0$$

se alcanza si y solo si:

$$\left(\frac{da_i(t)}{dt}\right)^2 = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, s,$$

lo que implica:

$$\frac{da_i(t)}{dt} = 0, \text{ para todo } i,$$

entonces

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{0}.$$

Cuando $\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{0}$, el circuito está en equilibrio. Sustituyendo en la ecuación del circuito (4.10):

$$\sigma \left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right) = -\vec{x}(t) + W\vec{a}(t) + \vec{b}.$$

Como

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{0},$$

entonces

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{0}.$$

Esto se debe a la relación de $\vec{a}(t) = f(\vec{x}(t))$, y de esto se obtiene que:

$$-\vec{x}(t) + W\vec{a}(t) + \vec{b} = \vec{0}.$$

Esto significa que los puntos en Z son exactamente los puntos de equilibrio del sistema. Como cualquier punto en Z es un punto de equilibrio, y los puntos de equilibrio son invariantes, el conjunto invariante más grande L es exactamente Z . Por lo tanto, todos los puntos en Z son potenciales atractores del sistema. ■

Para ilustrar el Teorema 4.2.1, veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.2.1. Se considera el siguiente ejemplo del artículo original de Hopfield ([27]). Se examina un sistema que tiene un amplificador característico definido por la función de activación:

$$\vec{a}(t) = f(\vec{x}(t)) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\vec{x}(t)\pi\gamma}{2} \right),$$

donde $\gamma = 1.4$ es la ganancia del amplificador operacional.

Observe que la inversa de la función es:

$$\vec{x}(t) = f^{-1}(\vec{a}(t)) = \frac{2}{\pi\gamma} \tan \left(\frac{\pi}{2} \vec{a}(t) \right).$$

Ahora, supóngase que se tienen dos amplificadores que hacen la funcionalidad de dos neuronas, con la salida de cada uno conectada a la entrada del otro a través de un resistor, de tal modo que

$$R_{12} = R_{21} = 1 \quad \text{y} \quad T_{12} = T_{21} = 1.$$

Por lo tanto, se tiene la matriz de pesos simétrica

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la capacitancia ante el amplificador se fija en 1, tenemos

$$\sigma = R_i C_i = 1.$$

Como $\gamma = 1.4$ y $b_1 = b_2 = 0$ y, por ende,

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



La función de Lyapunov para la red de Hopfield está definida como

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) + \sum_{i=1}^s \left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\} - \vec{b}^T \vec{a}(t).$$

Ahora se calculan los términos por separado.

- Para el primer término:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) &= -\frac{1}{2}[a_1(t), a_2(t)] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}[a_2(t), a_1(t)] \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(a_1(t)a_2(t) + a_2(t)a_1(t)) \\ &= -a_1(t)a_2(t). \end{aligned}$$

Este término representa la interacción entre las neuronas.

- El segundo término está compuesto por una sumatoria, en donde cada uno de los términos es

$$\int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du = \int_0^{a_i(t)} \frac{2}{\pi\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right) du. \quad (4.11)$$

Se resuelve particularmente la integral:

$$\int \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right) du = -\frac{2}{\pi} \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right) + C.$$

Es importante mencionar que los logarítmicos representan la energía interna de cada neurona. Así, la solución de la integral en (4.11) es

$$\begin{aligned}
 \int_0^{a_i(t)} \frac{2}{\pi\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right) du &= \frac{2}{\pi\gamma} \left[-\frac{2}{\pi} \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right) \right]_0^{a_i(t)} \\
 &= -\frac{4}{\pi^2\gamma} \left[\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a_i(t)\right)\right) - \log(\cos(0)) \right] \\
 &= -\frac{4}{\pi^2\gamma} \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a_i(t)\right)\right) \\
 &= \frac{2}{\gamma\pi} \left[-\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right) \right]_0^{a_i(t)}.
 \end{aligned}$$

- El tercer término es cero ya que $\vec{b} = \vec{0}$.

Finalmente, la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned}
 V(\vec{a}(t)) &= -a_1(t)a_2(t) - \frac{4}{1.4\pi^2} \left[\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a_1(t)\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a_2(t)\right)\right) \right].
 \end{aligned}$$

La ecuación de estado con $\sigma = 1$ y $\vec{b} = \vec{0}$ es

$$\sigma \left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -\vec{x}(t) + Wf(\vec{x}(t)) + \vec{b} = -\vec{x}(t) + W\vec{a}(t).$$

Se sustituye la matriz de pesos y se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix},$$

o bien,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + a_2(t) \quad \text{y} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + a_1(t).$$

Donde las salidas de la neurona son

$$a_1(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4x_2(t)}{2} \right) \quad \text{y} \quad a_2(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4x_1(t)}{2} \right).$$

Por lo que

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4\pi x_2(t)}{2} \right)$$

y

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4\pi x_1(t)}{2} \right).$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas describe la evolución temporal del circuito. Para analizar su comportamiento:

- **Puntos de equilibrio:** Se encuentran resolviendo $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{0}$:

$$x_1(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4\pi x_2(t)}{2} \right), \quad x_2(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1.4\pi x_1(t)}{2} \right).$$

- **Estabilidad:** La función $V(\vec{a}(t))$ actúa como función de Lyapunov. Dado que:

$$\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0,$$

el sistema es estable y las trayectorias convergen a puntos de equilibrio.

- **Atractores:** Para $\gamma = 1.4$, el sistema presenta **dos atractores** (mínimos de $V(\vec{a}(t))$ ver Figura 4.1). Estos corresponden a estados estables donde:

$$(x_1(t), x_2(t)) \approx (0.8, 0.8) \quad \text{y} \quad (x_1(t), x_2(t)) \approx (-0.8, -0.8).$$

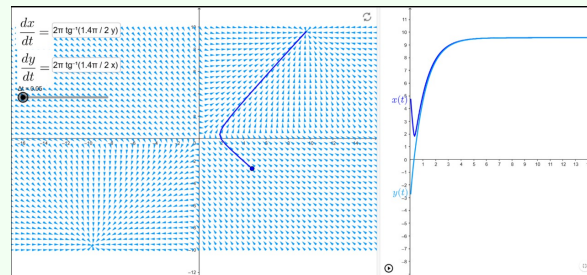


Figura 4.1: Diagrama de fase donde se observa el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema.

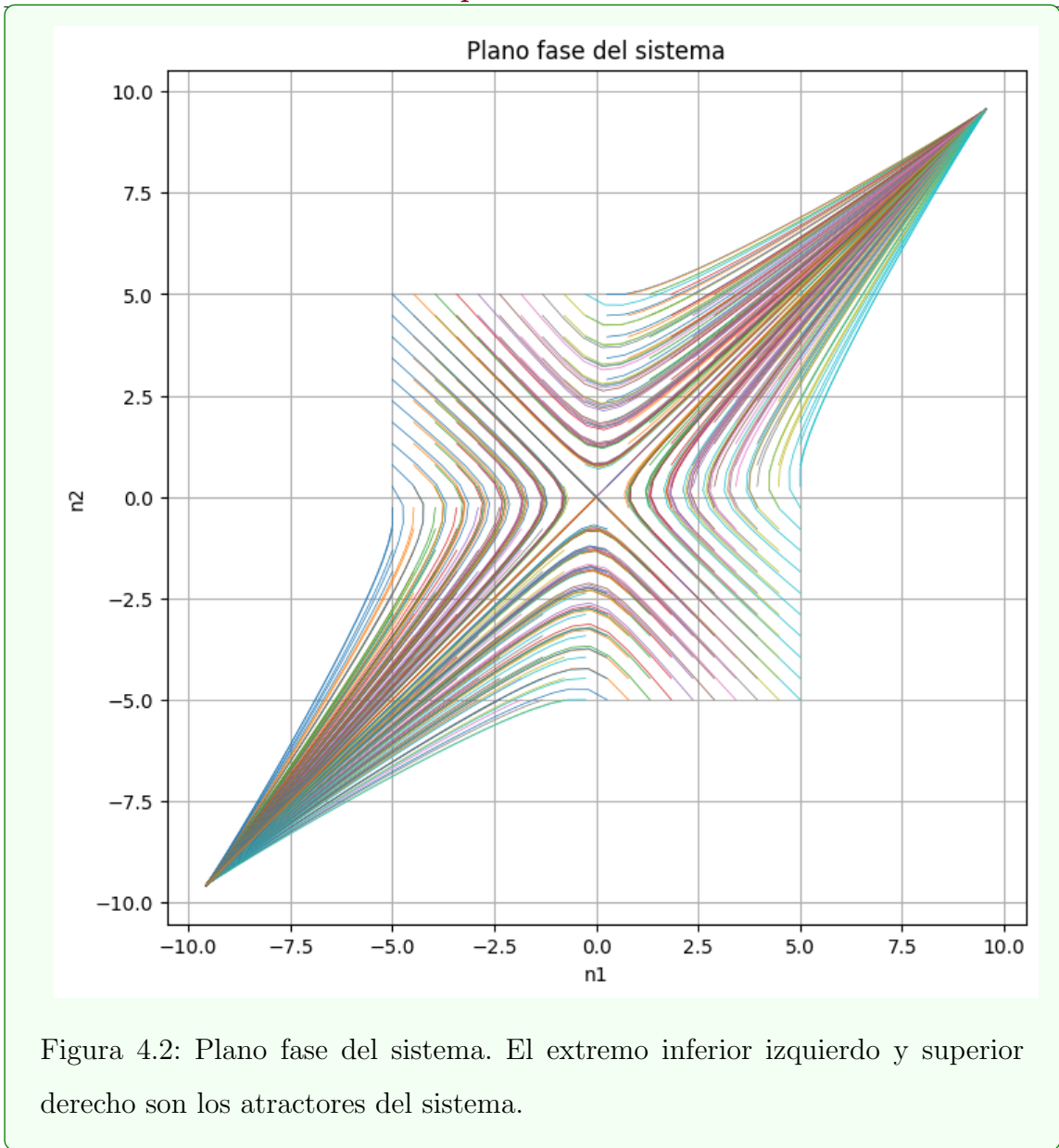
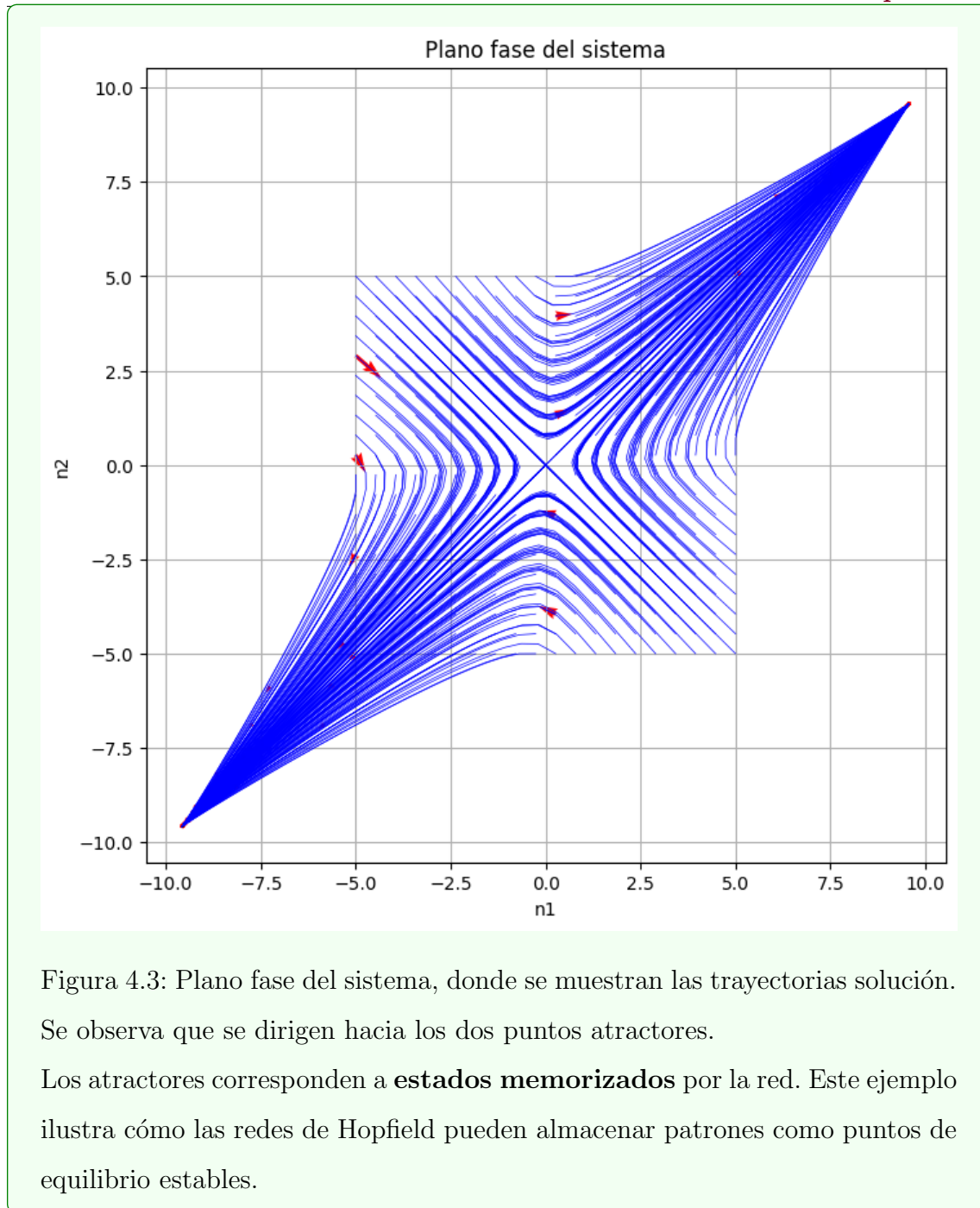


Figura 4.2: Plano fase del sistema. El extremo inferior izquierdo y superior derecho son los atractores del sistema.



4.3. Atractores de Hopfield como mínimos de la función de Lyapunov

El análisis previo ha establecido las condiciones suficientes para la estabilidad de las redes de Hopfield mediante el método de la función de Lyapunov. En particular, se ha demostrado el siguiente resultado fundamental:

Teorema 4.3.1. *Si la derivada de la función de activación $f(\vec{a}(t))$ es una función creciente y satisface*

$$\frac{d}{da_i(t)} [f^{-1}(a_i(t))] > 0,$$

entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- 1. La derivada orbital de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$ es semidefinida negativa $\left(\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0\right)$ a lo largo de las trayectorias del sistema.*
- 2. Existe un conjunto invariante L maximal para el sistema.*

No obstante, para completar el análisis de estabilidad, resta demostrar que las trayectorias del sistema son acotadas. Esta condición, junto con el Teorema 4.3.1, garantizaría la convergencia a puntos de equilibrio. En esta sección se desea determinar los puntos atractores del sistema.

Como se ilustró en el Ejemplo 4.2.1 y en la Figura 4.2, los atractores de la red de Hopfield corresponden a los puntos estacionarios de la función de Lyapunov. A continuación, se extiende esta relación para el caso general.

Teorema 4.3.2. *Sea f la función de transferencia. Si la función de transferencia $f(x(t))$ y su inversa $f^{-1}(a(t))$ son monótonas crecientes, **entonces***



los puntos de equilibrio de la red coinciden exactamente con los puntos críticos de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$.

Demostración:

Los atractores del sistema —deben satisfacer la condición de equilibrio:

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{0}.$$

Los puntos críticos de una función diferenciable se alcanzan cuando el gradiente se anula. Por lo cual, los puntos estacionarios de una función de Lyapunov

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) + \sum_{i=1}^s \left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\} - \vec{b}^T \vec{a}(t)$$

cumplen:

$$\nabla V(\vec{a}(t)) = \vec{0},$$

donde el gradiente se define como

$$\nabla V(\vec{a}(t)) = \left[\frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_1(t)}, \frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_2(t)}, \dots, \frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_s(t)} \right]^T.$$

El i -ésimo componente del gradiente (siguiendo un procedimiento análogo al del Teorema 4.1.1) se calcula como

$$\frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_i(t)} = -\sigma \frac{d}{dt} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right]. \quad (4.12)$$

Al aplicar la regla de la cadena en (4.12), se deduce que

$$\frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_i(t)} = -\sigma \frac{d}{da_i(t)} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right] \frac{da_i(t)}{dt}.$$

Nótese que si $f^{-1}(\vec{a}(t))$ es una función aproximadamente lineal sobre una región, la expresión anterior implica una relación entre la dinámica del sistema y el gradiente de Lyapunov. En efecto, si

$$\frac{d}{d\vec{a}(t)} \left[f^{-1}(\vec{a}(t)) \right] = k > 0,$$

con k constante, entonces

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -\alpha \nabla V(\vec{a}(t)), \text{ con } \alpha = \frac{1}{\sigma k}.$$

Esto demuestra que, bajo dicha condición, la evolución de la red sigue un descenso de gradiente conforme pasa el tiempo t de $V(\vec{a}(t))$. Bajo la hipótesis de que la función de transferencia $f(x(t))$ y su inversa $f^{-1}(a(t))$ son monótonas crecientes, se cumple que

$$\frac{d}{da_i(t)} \left[f^{-1}(a_i(t)) \right] > 0.$$

Por lo que, de la ecuación (4.3) se induce que

$$\frac{\partial V(\vec{a}(t))}{\partial a_i(t)} = \vec{0} \text{ es equivalente a } \frac{da_i(t)}{dt} = \vec{0}.$$

Se extiende este resultado de forma vectorial y se concluye que

$$\nabla V(\vec{a}(t)) = \vec{0} \text{ si y solo si } \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{0}.$$

En consecuencia, los atractores del sistema (puntos de equilibrio) coinciden exactamente con los puntos críticos de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$.

■

Este resultado establece una relación fundamental entre la dinámica de la red y la minimización de la función de Lyapunov ($V(\vec{a}(t))$) (o función de energía), característica esencial de las redes de Hopfield.

4.4. Red de Hopfield de alta ganancia

La función de Lyapunov de la red de Hopfield puede simplificarse si se consideran los casos donde el amplificador de la ganancia es grande. Para el análisis de esto, se vuelve a retomar el Ejemplo 4.2.1.

Recuérdese que el amplificador característico γ es:

$$\vec{a}(t) = f(\vec{x}(t)) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\vec{x}(t)\pi\gamma}{2} \right).$$

En la Figura (4.4) se ilustran diversas curvas con distintos valores de γ .

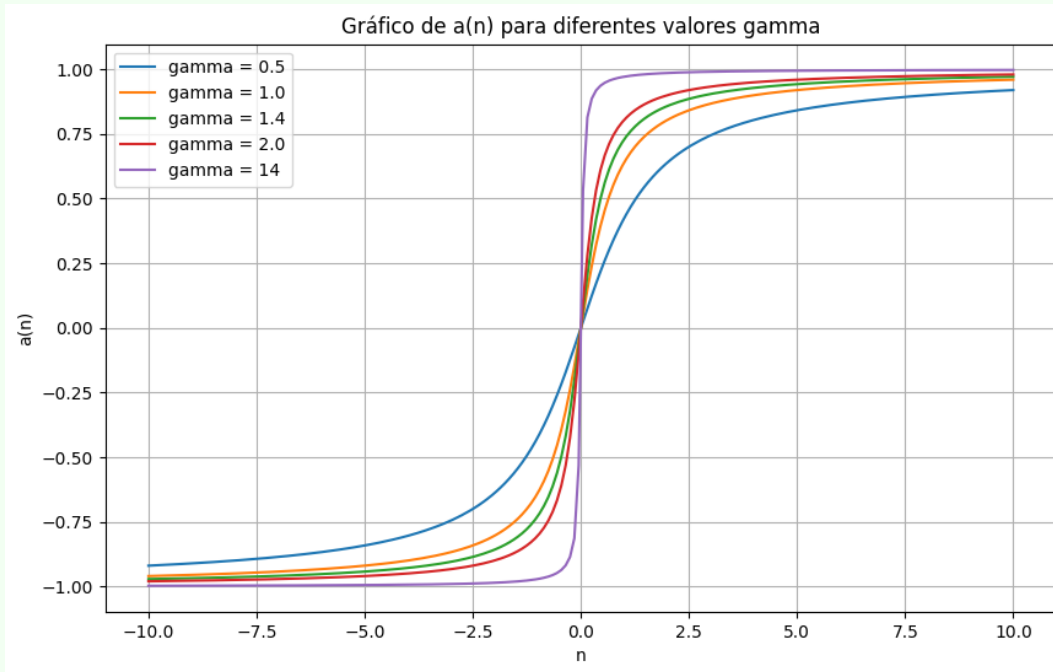


Figura 4.4: Gráfica del amplificador característico para distintos valores de γ .

La ganancia γ determina el nivel del salto (o escalón en $\vec{x} = \vec{0}$), cuando gamma tiende a infinito ($\gamma \rightarrow \infty$), f se aproxima a una función signo (o escalón).

Recuerde que la función de Lyapunov es

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) + \sum_{i=1}^s \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du - \vec{b}^T \vec{a}(t).$$

Para el ejemplo 4.2.1:

$$f^{-1}(\vec{a}(t)) = \frac{2}{\pi\gamma} \tan \left(\frac{\pi}{2} \vec{a}(t) \right).$$

Por lo tanto, el segundo término en la función de Lyapunov toma la forma:

$$\int_0^{a_i(t)} f^{-1}(\vec{u}(t)) d\vec{u} = \frac{2}{\gamma\pi} \left[-\frac{2}{\pi} \log \left(\cos \left(\frac{\pi a_i(t)}{2} \right) \right) \right]$$

$$= -\frac{4}{\pi^2\gamma} \log \left(\cos \left(\frac{\pi a_i}{2} \right) \right).$$

Una gráfica de esta función se muestra en la figura 4.5.

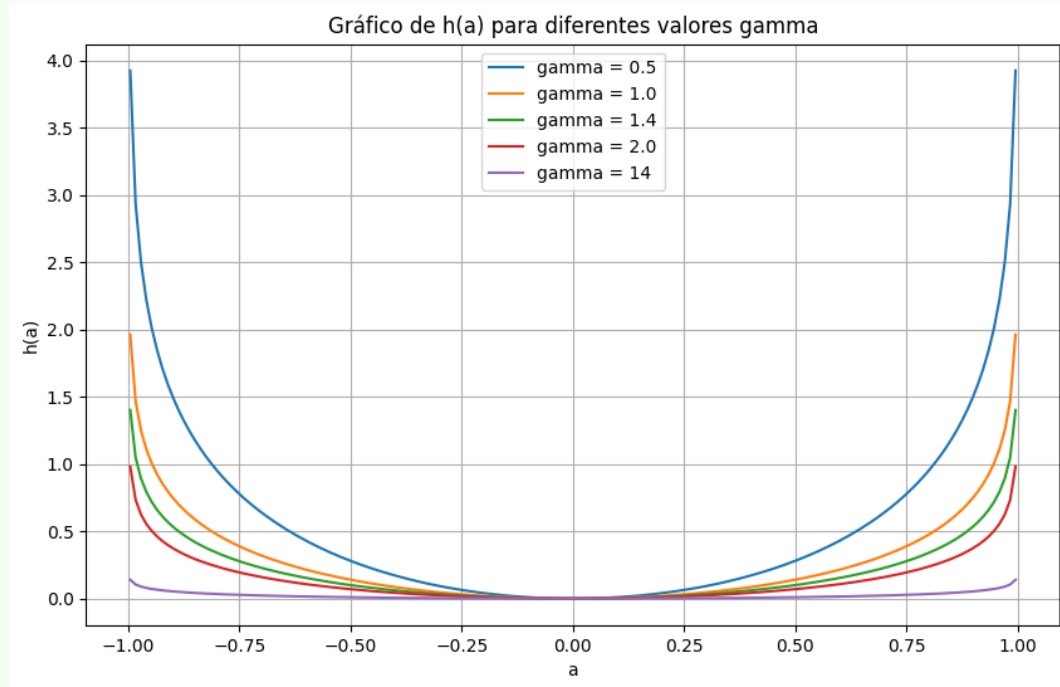


Figura 4.5: Gráfica de $h(\vec{a}(t))$ y $\vec{a}(t)$ con diferentes valores de γ .

Cuando γ tiende a infinito, la función se aplana y está cercana a cero. Por lo tanto, cuando la ganancia γ tiende a infinito, la integral en el segundo término de la función de Lyapunov estará cercana a cero en el intervalo $-1 < a_i(t) < 1$. Esto permite eliminar ese término, y la función de Lyapunov, denominada de alta ganancia, se reduce a

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) - b^T \vec{a}(t).$$

De hecho, la función es una función cuadrática. Ahora,



$$\nabla^2 V(\vec{a}(t)) = -W.$$

Con esto, se puede identificar la superficie de $\vec{V}(\vec{a}(t))$, ya que una superficie de una función cuadrática se determina por los eigenvalores y eigenvectores de su matriz Hessiana.

La matriz Hessiana para la función de Lyapunov del Ejemplo 4.2.1 es

$$\nabla^2 V(\vec{a}(t)) = -W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de esta matriz Hessiana se calculan como

$$|\nabla^2 V(\vec{a}(t)) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Por lo tanto, los eigenvalores son

$$\lambda_1 = -1 \text{ y } \lambda_2 = 1.$$

Se sigue que los eigenvectores son

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ya que la matriz Hessiana tiene un eigenvalor positivo y uno negativo, se tiene una condición de punto silla. La superficie tiene una curvatura negativa a lo largo del primer eigenvector y una curvatura positiva a lo largo del segundo eigenvector (véase Figura 4.6).

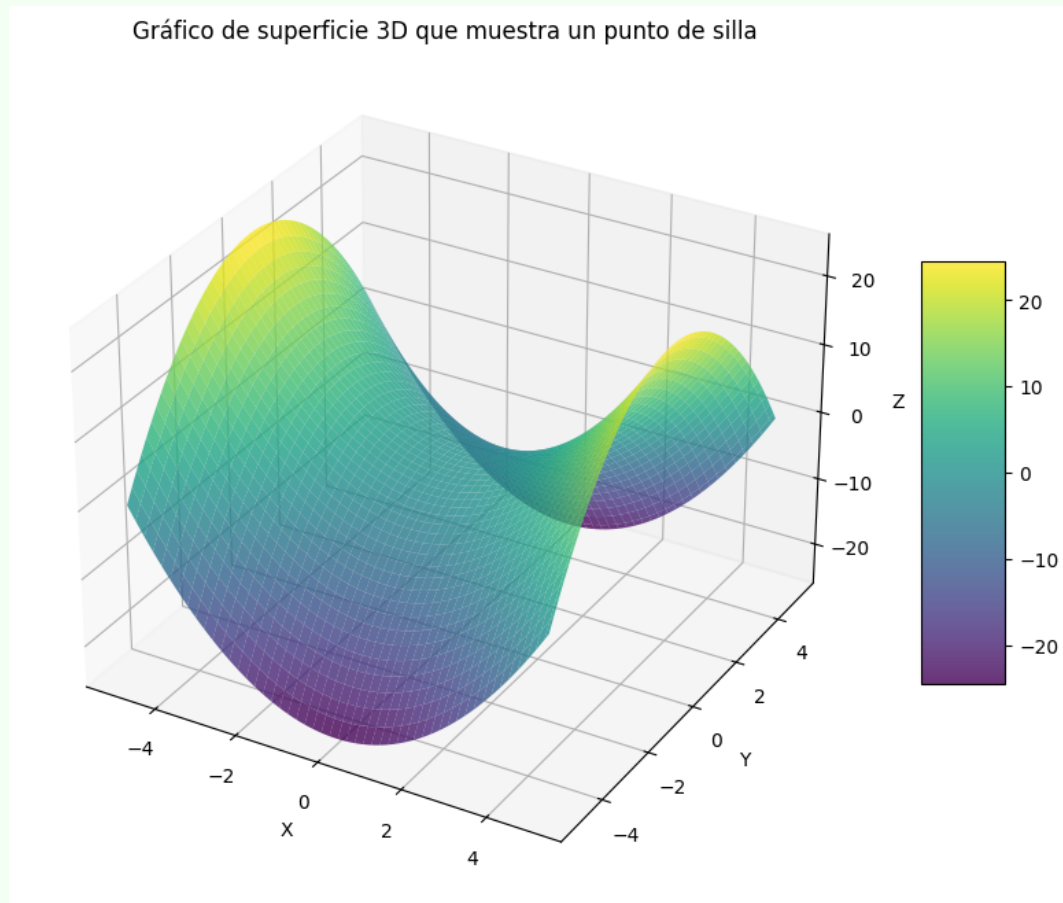


Figura 4.6: Gráfico de la superficie 3D y su punto silla.

La función de Lyapunov no tiene un mínimo global. Sin embargo, la red está restringida al hipercubo $\{\vec{a}(t) : -1 < a_i(t) < 1\}$ por la función de transferencia. Por lo tanto, existirá un mínimo en las dos esquinas del hipercubo:

$$a_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } a_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior analizado se observa que:

- Cuando la ganancia es muy pequeña, existe un sólo mínimo en el origen.



- Cuando la ganancia se incrementa, el mínimo se mueve del origen hacia las dos esquinas, por ejemplo con $\gamma = 1.4$, el mínimo se encuentra en

$$a_1(t) = \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.57 \end{bmatrix} \text{ y } a_2(t) = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.57 \end{bmatrix}.$$

4.5. Análisis de trayectorias de las salidas de la red de Hopfield

A lo largo de esta sección se asume que los patrones prototipo

$$\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_Q\}$$

contienen S elementos que toman los valores entre -1 o 1 . En el caso general, cuando hay más de dos neuronas en la red, el mínimo de alta ganancia caerá en ciertas esquinas del hipercubo

$$\{\vec{a}(t) : -1 < a_i(t) < 1\}.$$

Lo que se plantea como la siguiente proposición.

Proposición 4.5.1. En una red de Hopfield con función de transferencia $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ estrictamente monótona, los puntos estacionarios que corresponden a mínimos de la función de Lyapunov se encuentran en la frontera del hipercubo $(-1, 1)^s$, donde s es la dimensión del espacio de salida de la red.

Demostración:

Sea $\vec{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_s(t)) \in (-1, 1)^s$ un estado de la red. Un punto estacionario debe satisfacer

$$a_i(t) = f\left(\sum_{j=1}^s w_{ij}a_j(t) - \theta_i\right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Por construcción, $\vec{a}(t)$ pertenece siempre al hipercono abierto $(-1, 1)^s$, ya que $\text{Im}(f) = (-1, 1)$.

Considérese la función de Lyapunov

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) - \vec{b}^T \vec{a}(t),$$

asociada al sistema. Dado que f es estrictamente creciente y acotada, si una coordenada $a_i(t)$ se encuentra en el interior del intervalo $(-1, 1)$, existen perturbaciones arbitrariamente pequeñas que pueden disminuir el valor de $V(\vec{a}(t))$, desplazando la trayectoria hacia un estado de menor energía. En consecuencia, dichos estados no pueden ser mínimos locales, sino que corresponden a puntos tipo silla o inestables.

En cambio, cuando $a_i(t)$ tiende a ± 1 para toda i , las neuronas se encuentran en saturación. En esta situación, ninguna coordenada puede variar sin salir del rango de f , lo que impide descensos adicionales en $V(\vec{a}(t))$. Por lo tanto, los estados en la frontera del hipercono son los únicos que constituyen mínimos locales de la función de Lyapunov.

■

Esta propiedad está en concordancia con la interpretación de la red de Hopfield como una memoria asociativa binaria: los patrones estables almacenados corresponden a configuraciones con componentes $a_i(t) \in \{-1, +1\}$, los cuales se encuentran precisamente en la frontera del hipercono $(-1, 1)^s$.

Teorema 4.5.1. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ una función de transferencia. Si los vectores prototipo son linealmente independientes y ortogonales y la función de transferencia f y su inversa f^{-1} son monótonas crecientes, entonces las trayectorias de la red de Hopfield se encuentran en el hipercono*

$$\{\vec{a}(t) : -1 < a_i(t) < 1\},$$

es decir, son acotadas.



Demostración:

El Teorema 4.3.2 garantiza que los puntos de equilibrio de la red coinciden con los puntos críticos de la función de Lyapunov, por lo que la demostración se centrará en el análisis de estos últimos.

En el caso de la red de alta ganancia, la función de Lyapunov se reduce a una forma cuadrática:

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) - b^T \vec{a}(t),$$

y los puntos estacionarios satisfacen la ecuación:

$$\nabla V(\vec{a}(t)) = -W \vec{a}(t) - \vec{b} = \vec{0},$$

esto se deduce en la sección 4.4. Sin embargo, debido a la restricción impuesta por la función de transferencia $f(\vec{a}(t))$, estos puntos son mapeados al hipercubo $(-1, 1)^s$, los puntos estacionarios que son mínimos de la función de Lyapunov se encuentran en la frontera del hipercubo por la Proposición 4.5.1. De hecho, para ganancias altas, los atractores se ubican en las esquinas del hipercubo, es decir, en puntos donde cada componente $a_i(t)$ es 1 o -1 (o en general, los vértices del hipercubo).

Por otro lado, para ganancias bajas, la función de Lyapunov incluye el término integral que suaviza la superficie, y los atractores pueden ser puntos interiores del hipercubo. A medida que la ganancia aumenta, estos puntos se desplazan hacia los vértices. Este comportamiento permite a la red de Hopfield funcionar como un sistema de memoria asociativa, donde los patrones almacenados corresponden a los vértices del hipercubo.

En resumen, el parámetro de ganancia γ controla la forma de la función de Lyapunov y, por tanto, la ubicación de los atractores. Para ganancias altas, los atractores son vértices del hipercubo, lo cual es deseable en aplicaciones de redes neuronales que funcionan por medio de memorias asociativas.

Considérese nuevamente la función de Lyapunov de alta ganancia:

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) - b^T \vec{a}(t).$$

La técnica de Hopfield es elegir la matriz de pesos W y el vector sesgo (bias) b de tal manera que $V(\vec{a}(t))$ tome la forma de una función que se desee minimizar y convertir cualquier problema que se quiera resolver en un problema de minimización, ya que la red de Hopfield minimizará $V(\vec{a}(t))$ y esto resolverá también el problema original. El truco, por supuesto, está en la conversión, la cual, en general, no es directa.

Se tiene hasta este momento que la matriz Hessiana (obtenida en sección 4.4) para la función de Lyapunov es

$$\nabla^2 V(\vec{a}(t)) = -W,$$

por lo que los eigenvalores para $\nabla^2 V(\vec{a}(t))$ son $-S$ y 0 por la proposición 3.2.1.

La función de Lyapunov

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) - b^T \vec{a}(t)$$

es una función cuadrática. Por lo tanto, los eigenvalores de la matriz Hessiana determinan su forma. Así pues,

- El primer eigenvalor $-S$ al ser negativo indica que $V(\vec{a}(t))$ tendrá una curvatura negativa en X .
- Como el segundo eigenvalor es 0, entonces $V(\vec{a}(t))$ tendrá curvatura cero en X^\perp .

Ya que $V(\vec{a}(t))$ tiene curvatura negativa en X , las trayectorias de la red de Hopfield tienden a caer en las esquinas del hipercubo $\{\vec{a}(t) : -1 < a_i(t) < 1\}$ que están contenidas en X .

■



Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 4.5.2. *Si los vectores prototipo son linealmente independientes y ortogonales y la función de transferencia f y su inversa f^{-1} son estrictamente crecientes, entonces las salidas de la red de Lyapunov convergen a los mínimos de la función de Lyapunov.*

Demostración:

Retomemos el Teorema de LaSalle, sus principales condiciones son:

1. **La derivada temporal de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$, es negativa o cero** $\left(\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0\right)$ **a lo largo de las trayectorias del sistema.** La cual es demostrada en el Teorema 4.1.1.
2. **Existe el conjunto invariante L más grande.** Con su prueba en el Teorema 4.2.1.

Las dos condiciones se utilizan para llegar al Teorema 4.3.2 y confirmar que los puntos críticos coinciden con los puntos mínimos de la función de Lyapunov $V(\vec{a}(t))$. Luego, por la Proposición 4.5.1 se obtiene que los estados en la frontera del hipercubo son los únicos mínimos locales en la función $V(\vec{a}(t))$. Como f y f^{-1} son funciones monótonas crecientes, entonces, por el Teorema 4.5.1. Por lo tanto, las trayectorias de las soluciones son acotadas. ■

Observe que al calcular la matriz de pesos usando la regla de Hebb, existen al menos dos mínimos de la función de Lyapunov para cada vector prototipo. Si p_q es un vector prototipo, entonces $-p_q$ también estará en el espacio generado por los vectores prototipo X . Por lo tanto, el negativo de cada vector prototipo será una de las esquinas del hipercubo

$$\{\vec{a}(t) : -1 < a_i(t) < 1\},$$

que está contenido en X . También existirán otros mínimos de la función de Lyapunov que no correspondan a los patrones prototipo. Estos mínimos son llamados patrones espurios (spurious).

El objetivo del diseño de la red de Hopfield es minimizar el número de patrones espurios y lograr que las bases de atracción de cada uno de los patrones prototipo sean tan grandes como sea posible.

Para ilustrar este método, considere el siguiente ejemplo en donde se aplica la regla de Hebb.

Ejemplo 4.5.1. Sea la matriz,

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y considere que ha sido diseñada con la regla de Hebb un patrón prototipo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$W = P_1(P_1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que

$$W' = W - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ es la matriz original}).$$

La función de Lyapunov de alta ganancia es

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W a(t) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{a}(t).$$

La matriz Hessiana para $V(\vec{a}(t))$ es

$$\nabla^2 V(\vec{a}(t)) = -W = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sus eigenvalores son $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 0$, y sus correspondientes eigenvectores son

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

El primer eigenvector correspondiente al eigenvalor $-S = -2$ representa el espacio generado por el vector prototipo

$$X = \{\vec{a}(t) : a_1(t) = a_2(t)\}.$$

El segundo eigenvector, correspondiente al eigenvalor 0, representa el complemento ortogonal del primer eigenvector

$$X^\perp = \{\vec{a}(t) : a_1(t) = -a_2(t)\}.$$

Geoméricamente se observa en las Figuras 4.7 y 4.8.

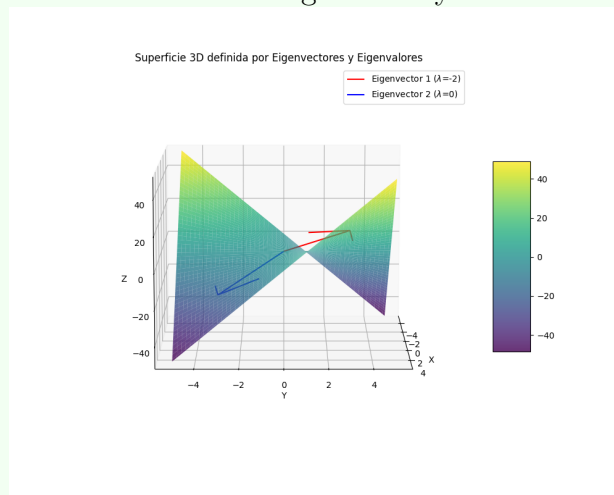
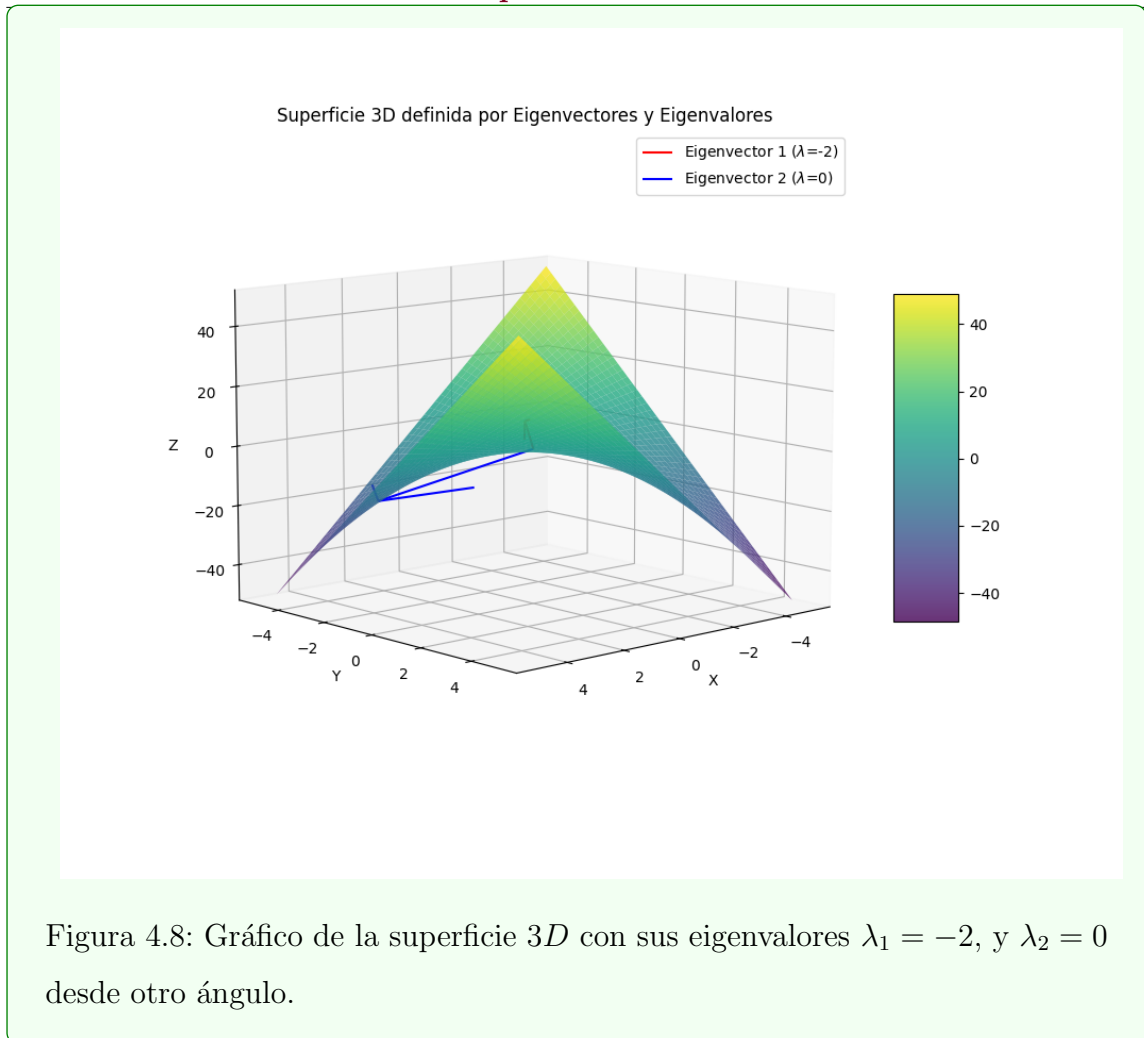


Figura 4.7: Gráfico de la superficie 3D con sus eigenvalores $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = 0$.



4.6. Análisis de la matriz de pesos con diagonal cero

Para la red de memoria de contenido direccionable, todos los elementos de la matriz de pesos serán iguales a Q (el número de patrones prototipo). Esto se visualiza nuevamente retomando el Ejemplo 4.5.1:



Ejemplo 4.6.1. Considere la matriz,

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y el patrón prototipo

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Como los elementos de P son ± 1 . Por lo tanto, se puede hacer cero la matriz diagonal restando Q veces la matriz identidad I :

$$W^2 = W - QI.$$

Como las columnas de W son linealmente independientes y ortogonales, si se multiplica esta nueva matriz por uno de los vectores prototipo, se obtiene:

$$W^1 P_Q = [W - QI]P_q = SP_q - QP_q = (S - Q)P_q.$$

Por ello, $S - Q$ es un eigenvalor de W' , y el correspondiente eigenespacio es X , es decir, el espacio generado por los vectores prototipo.

Esta vez se multiplica la nueva matriz de pesos por un vector del espacio ortogonal, por ejemplo, $\vec{a}(t) \in X^\perp$ y se encuentra:

$$\begin{aligned} W'\vec{a}(t) &= [W - QI]\vec{a}(t) \\ &= 0 - Q\vec{a}(t) \\ &= -Q\vec{a}(t). \end{aligned}$$

Así, $-Q$ es un eigenvalor de W' y su correspondiente espacio es X^\perp .

En resumen, los eigenvectores de W' son los mismos que los de W , pero sus eigenvalores son $(S - Q)$ y $-Q$, en lugar de S y 0 . Por lo tanto, los eigenvalores de la matriz hessiana de la función modificada de Lyapunov son

$$\nabla^2 V(\vec{a}) = -W' \text{ son } -(S - Q) \text{ y } Q.$$

Esto implica que la superficie de energía tendrá curvatura negativa en X y positiva en X^\perp , en contraste con la función de Lyapunov original, que tiene curvatura negativa en X y la curvatura es cero en X^\perp .

El cambio tiene poco efecto:

- Si la condición inicial cae fuera de la línea $a_1 = -a_2$, entonces en cualquier caso la red convergerá a una de las esquinas del hipercubo $\{\vec{a} : -1 < a_i < 1\}$, los cuales son los puntos:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Si la condición cae exactamente en la línea $a_1 = -a_2$, y si se usa la matriz de pesos W , entonces la salida de la red se mantendrá constante, pero si se usa la matriz W' entonces, la salida convergerá al punto silla en el origen.

Ninguno de estos resultados es deseable, ya que la red no convergerá al mínimo de la función de Lyapunov; sin embargo, dar la condición inicial $a_1 = -a_2$ es poco probable en la práctica.

El análisis del Ejemplo 4.6.1 muestra la necesidad de justificar el porqué la red de Hopfield converge.



Conclusión

El objetivo de esta tesis fue mostrar los criterios que garantizan la convergencia de la red neuronal de Hopfield hacia puntos de equilibrio estables. A lo largo de esta investigación se ha demostrado satisfactoriamente la hipótesis central que postula la existencia de una función de Lyapunov con derivada definida negativa para las redes de Hopfield, garantizando la convergencia del sistema a un conjunto de equilibrio mediante la aplicación del Teorema de Invarianza de LaSalle. Para esto se cumplieron con los siguientes objetivos específicos:

1. **Descripción matemática del modelo dinámico (Capítulo 2):** Se estableció formalmente el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que gobierna la dinámica de las redes de Hopfield continuas, identificando la simetría de la matriz de pesos W y la monotonicidad de la función de activación $f(\vec{x})$.
2. **Identificación de la función de Lyapunov:** Se demostró que la función propuesta por Hopfield,

$$V(\vec{a}(t)) = -\frac{1}{2}(\vec{a}(t))^T W \vec{a}(t) + \sum_{i=1}^s \left\{ \int_0^{a_i(t)} f^{-1}(u) du \right\} - \vec{b}^T \vec{a}(t),$$

permite analizar la estabilidad sin resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales, cumpliendo con el segundo objetivo específico.

3. **Aplicación del Teorema de LaSalle (Teorema 2.5.1):** Se verificaron las condiciones del teorema de invarianza de LaSalle (Sección 2.5):

- Se probó que $\frac{dV(\vec{a}(t))}{dt} \leq 0$ a lo largo de las trayectorias.



- Se identificó el conjunto invariante máximo L .
- Se acotaron las trayectorias.

Con esto se garantizó la convergencia asintótica al conjunto de equilibrio.

4. **Análisis de ejemplo ilustrativo (Capítulo 4):** A través del Ejemplo 4.2.1 y su análisis en las secciones subsiguientes, se validó la aplicabilidad práctica de la red y su convergencia a los atractores previstos. Este ejemplo fue tomado de [27].

En conclusión, esta tesis ha establecido de manera completa las condiciones de estabilidad para las redes de Hopfield tanto discretas como continuas, validando la hipótesis y se cumplieron con todos los objetivos específicos propuestos. Los resultados obtenidos proporcionan una base sólida para el diseño de una red de Hopfield cuya convergencia se basa en los puntos de equilibrios de funciones de Lyapunov. Esperemos que esta investigación sea la base para futuras investigaciones en redes neuronales y ¿por qué no? también hacerlas merecedoras de un Premio Nobel.

Bibliografía

- [1] Khan Academy. Estructura y función de las neuronas, 2023. Accedido el: [12-09-2025].
- [2] Charles K. Alexander and Matthew N. O. Sadiku. *Fundamentos de circuitos eléctricos*. Mc Graw Hill Education, México, 5 edition, 2013. Traducido de la quinta edición de: Fundamentals of Electric Circuits.
- [3] James A. Anderson and Edward Rosenfeld. *Neurocomputing, Volume 1: Foundations of Research*. The MIT Press, 04 1988.
- [4] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume 1. Reverté, Barcelona, 2 edition, 1969.
- [5] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 3 edition, 2015.
- [6] Jana Bontempini Rey. Existencia y unicidad de solución del problema de cauchy, Septiembre 2022. Directora: Delfina Gómez Gandarillas.
- [7] Ilya Boykov, Vladimir Roudnev, and Alla Boykova. Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with discontinuous right-hand sides: Applications to hopfield artificial neural networks. *Mathematics*, 10(9):1524, 2022.
- [8] Pharunyou Chanthorn, Grienggrai Rajchakit, Usa Humphries, Pramet Kaewmesri, Ramalingam Sriraman, and Chee Peng Lim. A delay-dividing approach to



- robust stability of uncertain stochastic complex-valued hopfield delayed neural networks. *Symmetry*, 12(5):683, 2020.
- [9] Aggarwal Charu C. *Neural networks and deep learning: a textbook*. Springer, 2018.
- [10] Leon O Chua. *CNN: A paradigm for complexity*, volume 31. World Scientific, 1998.
- [11] Clínica Baviera. ¿quieres saber cómo se produce la visión?, 2023. Accedido el: [11/09/2025].
- [12] Michael A. Cohen and Stephen Grossberg. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13(5):815–826, 1983.
- [13] Howard B. Demuth, Mark H. Beale, Orlando De Jess, and Martin T. Hagan. *Neural network design*. Martin Hagan, 2014.
- [14] Richard C. Dorf and James A. Svoboda. *Circuitos eléctricos*. Alfaomega, Ciudad de México, 8 edition, 2011.
- [15] Richard C. Dorf and James A. Svoboda. *Circuitos eléctricos*. Alfaomega, Ciudad de México, 9 edition, 2015.
- [16] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2 edition, 2010.
- [17] Thomas L. Floyd. *Principio de circuitos eléctricos*. Pearson Educación, México, 8 edition, 2007.



- [18] Jesús Fraile Mora. *Circuitos eléctricos*. Pearson Educación, Madrid, 2 edition, 2019.
- [19] Julia Gaffney. Donald olding hebb, 2020. Published Online: June 22, 2020.
- [20] I. García. *Teoría de estabilidad y control*. Eines. Edicions de la Universitat de Lleida, 2005.
- [21] Eduardo Francisco García Cabezas, Jhonny Marcelo Orozco Ramos, and Juan Carlos Cayán Martínez. *Fundamentos para el análisis de circuitos eléctricos en corriente continua*, 2022.
- [22] Stanley I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. Cengage Learning, 8 edition, 2018.
- [23] David Halliday, Robert Resnick, and Kenneth S Krane. *Physics, Volume 2*. John Wiley & Sons, 2010.
- [24] Simon Haykin. *Neural network A Comprehensive Foundation*. Pearson Prentice Hall, McMaster University Hamilton, Ontario, Canada, 2 edition, 2001.
- [25] Simon Haykin. *Neural Network and Learning Machines*. Pearson Prentice Hall, McMaster University Hamilton, Ontario, Canada, 3 edition, 2009.
- [26] Dang Hien. Robust stability of uncertain hopfield neural networks with proportional delaysrobust stability of uncertain hopfield neural networks with proportional delays. *Journal of Science Natural Science*, pages 14–25, 10 2024.
- [27] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79(8):2554–2558, 1982.



- [28] InElectronic. Componentes electrónicos pasivos y activos. <https://inelectronic.com/en/componentes-electronicos-pasivos-y-activos/>, 2024.
- [29] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3 edition, 2002. Disponible en <https://flyingv.ucsd.edu/krstic/files/Khalil-3rd.pdf>.
- [30] Khan Academy. Divergencia, 2023. Accedido el: [18/11/2025].
- [31] Masaki Kobayashi. Group ring-valued hopfield networks. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 15(4):910–919, 2024.
- [32] Masaki Kobayashi. Algebraic hopfield network. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, page 2024DMP0002, 2025.
- [33] Hairong Lin, Chunhua Wang, Fei Yu, Jingru Sun, Sichun Du, Zekun Deng, and Quanli Deng. A review of chaotic systems based on memristive hopfield neural networks. *Mathematics*, 11(6):1369, 2023.
- [34] Jerrold E. Marsden and Anthony Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, New York, 5 edition, 2003.
- [35] Nobel Prize. All nobel prizes 2024. <https://www.nobelprize.org/all-nobel-prizes-2024/>, 2024. Accedido el: [01/09/2025].
- [36] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, New York, 2 edition, 2006.
- [37] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2001.



-
- [38] Michael Spivak. *Cálculo*. Editorial Reverté, Barcelona, 3 edition, 2012.
- [39] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, Boca Raton, 2 edition, 2018.
- [40] Paul E. Tippens. *Física conceptos y aplicaciones*. McGraw-Hill, México D.F., México, 7 edition, 2001. Traducción de: Physics, 7th ed.