

## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

INSTITUTO DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y MECATRÓNICA

### Diseño, construcción y control de un manipulador móvil

Tesis para obtener el grado de  
Ingeniero en Mecatrónica

Presenta:  
**Salado Chávez Carlos Alberto**

Director de Tesis:  
**Dr. Oscar David Ramírez Cárdenas**

Co-director de Tesis:  
**Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría**

H. Cd. de Huajuapan de León, Oaxaca, México, noviembre de 2025



*A mi madre, Karla Chávez,  
y a mi hermana, Karla Salado,  
por su amor inquebrantable.*

*A la memoria de mi padre, Jesús Salado,  
cuya presencia vive en cada logro y en cada sueño.  
Este fruto es también suyo.*

*A mis abuelos, Inés Soto y Aurelio Chávez,  
y a mis tíos y familiares,  
por ser raíz y refugio,  
nacido del esfuerzo, la paciencia y el amor  
que sembraron en mí.*



# Agradecimientos

A mi madre Karla Chávez, porque luchó hasta el final para que pudiera alcanzar mis metas, trabajando incansablemente por nosotros dos, siempre con la certeza de que íbamos a poder salir adelante. Afrontó cada problema que surgía con la frente en alto, sin dudar en ningún momento, incluso poniendo primero nuestra educación sobre su propia salud.

Gracias por cada sacrificio, por cada noche de desvelo y por nunca rendirte. Jamás tendré las palabras para agradecer tanto amor, fortaleza y apoyo que me brindaste durante todo el camino de mi preparación profesional.

A mi hermana Karla Salado, la que siempre estuvo cuando necesité un consejo, la que siempre ha sido mi compañera de vida desde los peores hasta los mejores momentos.

Gracias por el apoyo que me brindaste en tantas ocasiones, por estar siempre disponible cuando necesito hablar y por ser mi guía desde que papá falleció, asumiendo roles que no te correspondían con amor y dedicación.

Siempre has estado cuando más te necesito y siempre has sido mi apoyo en cada decisión que tomo.

A mis abuelos Inés Soto y Aurelio Chávez, por estar siempre presentes y al pendiente de nosotros desde que papá se fue. Gracias por cada visita, por los momentos compartidos y por el apoyo constante que le brindaron a mi mamá y a nosotros. Su amor incondicional ha sido un refugio en los momentos difíciles y una fuente de alegría en los buenos.

Gracias por tratarme con ese cariño tan especial y por hacerme sentir querido y protegido siempre.

Al Dr. Oscar Ramírez, mi director de tesis, por confiar en mis capacidades desde el primer momento y plantearme un proyecto ambicioso que me retó a crecer profesionalmente.

Gracias por ser mi guía en cada complicación y obstáculo del camino, por su paciencia y por compartir su conocimiento generosamente.

Con el tiempo, nuestra relación trascendió lo académico y se convirtió en una amistad genuina. Gracias por los buenos momentos, las pláticas y por demostrarme que un mentor también puede ser un gran amigo.

Al Dr. Miguel Domínguez, mi codirector de tesis, por su apoyo constante en la revisión de este trabajo y por su disposición para ayudarme en cada etapa del proceso. Gracias por su guía académica y por convertirse también en un amigo con el cual puedo contar.

A mis tíos Alberto, Jorge y especialmente a mi tío Marco, por estar siempre presentes cuando los he necesitado, por sus visitas, por los momentos agradables que nos regalaron y por su generosidad con mi mamá y mis abuelos. Gracias por su ejemplo de bondad y por

enseñarme que ser ingeniero es más que una profesión, es una forma de ver la vida y de contribuir al bienestar de quienes nos rodean.

Gracias por su cariño y por ser un ejemplo a seguir, no solo en lo profesional, sino también como seres humanos.

A toda la familia Chávez, por su apoyo incondicional a lo largo de estos años y por recibirme siempre con mucho amor en sus hogares, en especial a mis tíos Mireya, Miguel, Marcos, Alicia, Blanca, Oralia e Irene.

A mi familia de Huatulco: a mis tíos la Dra. Ruth y el Dr. Julio, a Paty y a la memoria de Manuel, y a mis primos Julio y Lupita, por ser mi familia desde que era muy pequeño y por hacerme sentir parte de ustedes en cada momento. Gracias por celebrar mis triunfos con genuina alegría y por estar presentes cuando más los he necesitado.

Su cariño y apoyo constante han sido fundamentales en mi camino. Espero que la vida nos siga permitiendo acompañarnos en cada etapa, compartiendo risas, sueños y recuerdos.

Y a Saraí y Alejandro, por cuidar de mí en Huajuapan y por ser ese refugio de apoyo y cariño.

A Jacqueline Merlin, por ser un apoyo fundamental durante estos años de carrera. Gracias por estar presente en los momentos de mayor estrés, por escucharme y por ser esa persona a la que siempre puedo recurrir. En la distancia de mi familia, tu compañía se volvió esencial en mi día a día, brindándome ese amor y apoyo que tanto necesitaba.

Juntos hemos crecido, aprendiendo el uno del otro y construyendo algo hermoso. Gracias por creer en mí cuando yo dudaba y por mostrarme que el amor verdadero se demuestra en los pequeños gestos y en la constancia. Gracias por ser mi compañera en este camino.

A Brian José Guerra Gómez, mi mejor amigo desde la secundaria, por una amistad que ha resistido el paso del tiempo y la distancia. Gracias por estar presente cuando más te he necesitado, por esos viajes interminables solo para compartir un momento juntos, y por el apoyo incondicional que siempre me has brindado, incluso económico en los momentos más difíciles.

Tu generosidad y lealtad van más allá de las palabras, y lo que más valoro es saber que cuento contigo sin importar las circunstancias. Esta amistad es uno de los regalos más valiosos de mi vida.

A mis amigos de Huatulco: Naresh, Jazmín, Eduardo, Itzel y Yesenia, quienes ocupan un lugar muy especial en mi corazón. Ustedes son amigos muy cercanos e importantes en mi vida, y sin importar la distancia que nos separe, sé que siempre puedo contar con ustedes. Gracias por estar presentes de tantas formas, por su cariño genuino y por los buenos deseos que me acompañan en cada paso que doy. Espero que sigamos caminando juntos, apoyándonos mutuamente y compartiendo momentos que seguirán fortaleciendo esta amistad tan valiosa. Ustedes son parte fundamental de quien soy hoy.

A Alan, Adriana y Ricardo, por compartir conmigo este último año de tesis y convertirse en un refugio de risas y compañía en los momentos de mayor frustración. Muchas veces una comida con ustedes era suficiente para cambiar mi día por completo y recordarme que no estaba solo en este camino.

A Ricardo, por fortalecer esa amistad que ya teníamos desde la carrera y por permitirme conocerte aún mejor durante este tiempo. Gracias por tu apoyo constante y por estar

## *Agradecimientos*

presente en cada etapa de este proceso.

A Alan, por estos años compartidos en la carrera y por darme la oportunidad de conocerte más allá de lo académico. Este último año me permitió descubrir la gran persona que eres y construir una amistad que valoro profundamente.

A Adriana, por esa bonita amistad que construimos a pesar de no haber compartido el mismo grupo en la carrera. Gracias por el apoyo mutuo, el respeto y la genuinidad de nuestra amistad. Espero que sigamos acompañándonos en los siguientes capítulos de nuestras vidas.

A Erick Chávez, por ser ese amigo con el que siempre pude contar sin importar el proyecto o la problemática. Gracias por tu apoyo constante durante la tesis, por ayudarme a resolver problemas técnicos y encontrar soluciones cuando más lo necesitaba. Pero más allá de lo académico, gracias por ser un amigo excepcional con el que puedo platicar, reírme y saber que en cualquier problema nos apoyamos mutuamente.

Tu amistad ha sido invaluable en este camino.

A los amigos que formé durante la carrera, especialmente a Matthew Herrera, uno de mis amigos más cercanos, con quien saqué adelante innumerables proyectos sabiendo que juntos siempre lo lograríamos.

Gracias por esa amistad donde podemos trabajar en equipo pero también reírnos, platicar de todo y hacer más grato cada día. A mi amigo Beed Alonso, con quien aunque nos vemos poco, siempre tenemos conversaciones interesantes y genuinas. A Jovani Gallegos, porque siempre es un gusto hablar contigo. A Pamela Niño, por las buenas pláticas que siempre tuvimos, por buscar apoyarme en todo lo que podías y por celebrar mis triunfos con genuina alegría. A Eduardo Carrillo, por ser como un hermano para mí, alguien con quien siempre me sentí en confianza y protegido. Tu amistad ha sido invaluable.

A José Francisco, David Gómez y Noe Martínez, por brindarme siempre un ambiente sano y positivo, y por esos planes tan bonitos que compartimos juntos. Gracias por los buenos momentos tanto en lo académico como en los viajes y convivios que hicieron de la carrera una experiencia más completa y memorable. Su amistad ha sido un regalo que recordaré siempre con mucho cariño. A Obed Ramírez, Javier Quiroz y Diego Bautista, por ser grandes compañeros con quienes siempre me la pasé increíble. Gracias por brindarme su amistad cuando más lo necesitaba, por abrirme las puertas de su círculo con generosidad, por las risas interminables, los buenos momentos y ese compañerismo genuino que hace que esta etapa sea inolvidable. Ustedes hicieron que cada día fuera más ligero y divertido.

Finalmente, a la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por brindarme los espacios y recursos necesarios para desarrollar mi carrera en un entorno seguro y propicio para el aprendizaje.

A los profesores que forjaron mi educación con dedicación y compromiso, compartiendo su conocimiento y experiencia.

A Acatlima, que fue mi hogar durante tantos años, proporcionándome todo lo necesario para desenvolverme cómodamente.

A la gente de las tiendas, cenadurías y comedores que siempre buscaron apoyar a los jóvenes con amabilidad y calidez, haciendo de este lugar un espacio más acogedor y grato.

A todos ellos, gracias por ser parte de este logro que también les pertenece



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Estado del arte . . . . .	4
1.2	Planteamiento del problema . . . . .	8
1.3	Justificación . . . . .	8
1.4	Hipótesis . . . . .	8
1.5	Objetivos . . . . .	9
1.5.1	Objetivo . . . . .	9
1.5.2	Objetivos específicos . . . . .	9
1.6	Metas . . . . .	9
1.7	Delimitaciones . . . . .	10
1.8	Metodología . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>13</b>
2.1	Configuraciones de locomoción con ruedas . . . . .	13
2.2	Configuraciones de locomoción . . . . .	13
2.2.1	Configuración <i>Ackerman</i> . . . . .	13
2.2.2	Configuración diferencial . . . . .	14
2.2.3	Configuración omnidireccional . . . . .	14
2.3	Grados de libertad . . . . .	15
2.4	Algoritmo de Denavit-Hartenberg . . . . .	15
2.4.1	Fundamentos de la representación cinemática . . . . .	15
2.4.2	Matrices de transformación homogénea . . . . .	16
2.4.3	Procedimiento para la aplicación del algoritmo D-H . . . . .	16
2.4.4	Aplicaciones en el análisis cinemático de robots . . . . .	16
2.5	Aplicación de métodos geométricos . . . . .	17
2.5.1	Fundamento del método geométrico . . . . .	17
2.6	Desacoplamiento cinemático en la cinemática inversa . . . . .	18
2.6.1	Principio del desacoplamiento cinemático . . . . .	18
2.6.2	Métodos analíticos y matriciales . . . . .	18
2.6.3	Métodos numéricos . . . . .	19
2.7	Odometría del robot omnidireccional . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Diseño del MMO</b>	<b>27</b>
3.1	Propuesta de diseño de la parte móvil . . . . .	27
3.2	Configuración de movilidad . . . . .	27

3.3	Materiales . . . . .	28
3.4	Diseño de la Estructura . . . . .	28
3.4.1	Diagrama explosionado . . . . .	32
3.5	Proceso de manufactura/ensamble . . . . .	33
3.5.1	Impresión de estructura del robot móvil . . . . .	33
3.5.2	Ensamble . . . . .	34
3.6	Propuesta de diseño del manipulador . . . . .	36
3.7	Configuración del manipulador . . . . .	37
3.7.1	Elección de articulación y grados de libertad . . . . .	37
3.8	Diseño de estructura del manipulador . . . . .	38
3.8.1	Eslabones . . . . .	39
3.9	Explosionado . . . . .	41
3.10	Proceso de ensamblaje del manipulador . . . . .	43
3.11	Electrónica . . . . .	46
3.11.1	Selección de componentes electrónicos . . . . .	46
3.11.2	Motores DC . . . . .	47
3.11.3	Servomotores . . . . .	47
3.11.4	Placa de control . . . . .	49
3.11.5	Sistemas de potencia . . . . .	49
3.11.6	Sistema de Alimentación . . . . .	50
3.12	Diagrama de conexión . . . . .	50
3.12.1	Alimentación y referencia de tierra (GND) . . . . .	50
3.12.2	Conexión de los puentes H ( <i>DRV8833</i> ) con el <i>Arduino</i> . . . . .	52
3.12.3	Conexión de los encoders de los motores DC . . . . .	52
3.12.4	Conexión de los 6 servomotores . . . . .	52
3.13	Diseño y fabricación del circuito . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Modelado y Control Cinemático</b>	<b>57</b>
4.1	Modelo del robot omnidireccional . . . . .	57
4.2	Control del robot omnidireccional . . . . .	58
4.2.1	Simulación en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	60
4.3	Cinemática Directa 5 GDL . . . . .	62
4.3.1	Modelado de ejes . . . . .	62
4.3.2	Cálculo de la matriz de transformación . . . . .	64
4.3.3	Espacio de trabajo . . . . .	70
4.4	Cinemática inversa . . . . .	71
4.4.1	Cinemática inversa de los primeros 3 GDL . . . . .	72
4.4.2	Posición a controlar y ángulos de orientación . . . . .	75
4.5	Simulación de Manipulador . . . . .	80
4.6	Combinación de modelos . . . . .	83
4.6.1	Simulación en conjunto . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Resultados Experimentales y Conclusiones</b>	<b>109</b>
5.1	Resultados . . . . .	109
5.1.1	Primera prueba . . . . .	110

5.1.2	Prueba 2 . . . . .	115
5.1.3	Prueba 3 . . . . .	120
5.2	Conclusión . . . . .	126
<b>A</b>	<b>Dibujo detallado de cada pieza del ensamblaje</b>	<b>128</b>
<b>B</b>	<b>Configuración del perfil de impresión en Ultimaker Cura</b>	<b>139</b>
B.1	Configuración general . . . . .	139
B.2	Configuración del extrusor . . . . .	139
B.3	Parámetros relevantes . . . . .	140
<b>C</b>	<b>Propuesta de practica de laboratorio</b>	<b>141</b>
<b>D</b>	<b>Presentaciones</b>	<b>145</b>
	<b>Referencias</b>	<b>154</b>

# Índice general

## Índice de tablas

1.1	Tabla de características de robots manipuladores móviles en la industria. . . . .	5
1.2	Tabla comparativa de manipuladores móviles en el ámbito académico. . . . .	7
3.1	Componentes seleccionados para el diseño del móvil. . . . .	27
3.2	Lista de piezas del ensamblaje. . . . .	32
3.3	Componentes seleccionados para el manipulador robótico. . . . .	36
3.4	Lista de piezas. . . . .	42
3.5	Especificaciones del motor <i>TenNuoDa GA25-370</i> . . . . .	47
3.6	Especificaciones del <i>servomotor DS5160</i> . . . . .	48
3.7	Especificaciones del <i>servomotor DS51150</i> . . . . .	48
3.8	Especificaciones del servomotor <i>JX CLS-12V-15</i> . . . . .	48
3.9	Especificaciones del servomotor <i>Tower Pro MG90S</i> . . . . .	49
3.10	Especificaciones de la placa Mega 2560 R3. . . . .	49
3.11	Especificaciones del módulo puente H <i>DRV8833</i> . . . . .	50
3.12	Especificaciones de las baterías LiPo utilizadas en el sistema. . . . .	50
4.1	Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg . . . . .	64

## Índice de figuras

1.1	Esquema de la metodología a seguir. . . . .	10
2.1	Ejemplo de un robot con sistema de dirección <i>Ackerman</i> [1]. . . . .	14

2.2	Ejemplo de un robot de accionamiento diferencial con 4 ruedas [1] . . . . .	14
2.3	Robot <i>Uranus</i> [2] . . . . .	14
2.4	Esquema de odometría para un robot omnidireccional. . . . .	19
3.1	Ruedas <i>Mecanum</i> a 45 grados . . . . .	28
3.2	Comparación entre el robot <i>Kuka Youbot</i> y la propuesta de diseño. . . . .	29
3.3	Vista general de las uniones y la estructura del manipulador móvil . . . . .	30
3.4	Esquina con orificio para motor (Pieza 1/6) para ensamblaje de estructura móvil. . . . .	30
3.5	Lateral de unión (1/2) de cada esquina para ensamblaje de estructura móvil.	31
3.6	Plataforma de ensamble . . . . .	31
3.7	Explosionado del vehículo . . . . .	33
3.8	Proceso de manufactura . . . . .	34
3.9	Pruebas de manufactura en componentes del robot móvil. . . . .	34
3.10	Ensamble de las 6 piezas . . . . .	35
3.11	Atornillado de cada pieza a la base . . . . .	35
3.12	Robot Movil Ensamblado . . . . .	36
3.13	Propuesta de manipulador . . . . .	37
3.14	Dimensiones del manipulador. . . . .	38
3.15	Visualización del primer eslabón y su ensamblaje con la base. . . . .	39
3.16	Primer Eslabón Imagen Isométrica . . . . .	40
3.17	Vista Isométrica Eslabón 4 . . . . .	41
3.18	Vista Isométrica Gripper . . . . .	41
3.19	Explosionado del manipulador. . . . .	43
3.20	Estructura de la base del manipulador . . . . .	44
3.21	Configuración de la integración de eslabones 2, 3 y 4 . . . . .	45
3.22	Ensamble del <i>gripper</i> con su mecanismo . . . . .	45
3.23	Ensamble final del manipulador . . . . .	46
3.24	Diagrama de conexión de los componentes y sensores . . . . .	53
3.25	Diagrama de conexión para el diseño de una placa de circuito impreso . . . . .	54
3.26	Diseño de placa con las pistas y conexiones . . . . .	55
3.27	Modelo 3D de la PCB sin montaje . . . . .	56
3.28	PCB completamente montada . . . . .	56
4.1	Diagrama del modelo cinemático de un robot omnidireccional. . . . .	57
4.2	Simulación del vehículo moviéndose a un punto deseado. . . . .	60
4.3	Gráfica de posición del móvil en $x_m^O, y_m^O$ . . . . .	61
4.4	Gráfica de movimiento en el ángulo $\gamma_m^O$ . . . . .	62
4.5	Sistema de ejes basado en la metodología de Denavit-Hartenberg. . . . .	63
4.6	Espacio trabajo manipulador. . . . .	71
4.7	Esquema del manipulador robótico mostrando los sistemas de coordenadas y articulaciones. . . . .	71
4.8	Vista lateral del manipulador robótico mostrando la configuración de los eslabones. . . . .	72
4.9	Diagrama de los tres primeros eslabones con sus ángulos y proyección. . . . .	73

4.10	Diagrama Visualizando eslabón 2 y 3. . . . .	74
4.11	Diagrama visualizando los eslabones 4 y 5. . . . .	75
4.12	Simulación del brazo en el software <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	81
4.13	Gráfica de movimiento del punto $tx_{arm}^m, ty_{arm}^m, tz_{arm}^m$ , ecuación (4.14). . . . .	82
4.14	Gráfica de los ángulos $\alpha_{Arm}^m, \beta_{Arm}^m, \gamma_{Arm}^m$ del manipulador, ecuación (4.26). . .	83
4.15	Diagrama visualizando del sistema de referencia en ángulos . . . . .	84
4.16	Primera simulación del manipulador móvil en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	93
4.17	Coordenadas $x, y, z$ del efecto final del robot . . . . .	94
4.18	Evolución de los ángulos de orientación $\alpha, \beta$ y $\gamma$ del efecto final del robot . .	95
4.19	Coordenadas $x$ e $y$ del robot y plataforma móvil . . . . .	95
4.20	Ángulo $\gamma$ de orientación de la plataforma móvil . . . . .	96
4.21	Orientación $\alpha, \beta, \gamma$ del manipulador vista desde la plataforma móvil . . . . .	96
4.22	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la simulación en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	97
4.23	Segunda simulación del manipulador móvil en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	98
4.24	Coordenadas $x, y, z$ del efecto final del robot . . . . .	99
4.25	Evolución de los ángulos de orientación $\alpha, \beta$ y $\gamma$ del efecto final del robot . .	99
4.26	Coordenadas $x$ e $y$ del robot y plataforma móvil . . . . .	100
4.27	Ángulo $\gamma$ de orientación de la plataforma móvil . . . . .	100
4.28	Orientación $\alpha, \beta, \gamma$ del manipulador vista desde la plataforma móvil . . . . .	101
4.29	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la simulación en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	102
4.30	Tercera simulación del manipulador móvil en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	103
4.31	Coordenadas $x, y, z$ del efecto final del robot . . . . .	103
4.32	Evolución de los ángulos de orientación $\alpha, \beta$ y $\gamma$ del efecto final del robot . .	104
4.33	Coordenadas X e Y del robot y plataforma móvil . . . . .	105
4.34	Ángulo $\gamma$ de orientación de la plataforma móvil . . . . .	105
4.35	Orientación $\alpha, \beta, \gamma$ del manipulador vista desde la plataforma móvil . . . . .	106
4.36	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la simulación en <i>CoppeliaSim</i> . . . . .	106
5.1	Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano $xy$ de la primera prueba. . . . .	110
5.2	Posición del efecto final en coordenadas $x, y$ y $z$ . . . . .	111
5.3	Orientación del efecto final en ángulos $\alpha, \beta$ y $\gamma$ . . . . .	112
5.4	Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en $x$ y $y$ . . . . .	112
5.5	Orientación de la plataforma móvil en ángulo $\gamma$ . . . . .	113
5.6	Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil. . . . .	113
5.7	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual. . . . .	114
5.8	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual. . . . .	115
5.9	Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano $xy$ de la segunda prueba. . . . .	116
5.10	Posición cartesiana del efecto final en la segunda prueba. . . . .	116

5.11	Orientación global del efecto final en la segunda prueba. . . . .	117
5.12	Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en el plano horizontal en la segunda prueba. . . . .	117
5.13	Orientación de la plataforma móvil en ángulo $\gamma$ en la segunda prueba. . . . .	118
5.14	Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil en la segunda prueba. . . . .	119
5.15	Secuencia fotográfica de la segunda prueba, movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio. . . . .	119
5.16	Secuencia fotográfica de la segunda prueba, movimiento del sistema móvil-manipulador vista superior. . . . .	120
5.17	Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano $xy$ para la tercera simulación de la tercera prueba. . . . .	121
5.18	Posición cartesiana del efecto final en la tercera prueba. . . . .	122
5.19	Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil en la tercera prueba. . . . .	123
5.20	Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en el plano horizontal en la tercera prueba. . . . .	123
5.21	Orientación de la plataforma móvil en ángulo $\gamma$ en la tercera prueba. . . . .	124
5.22	Orientación global del efecto final en la tercera prueba. . . . .	124
5.23	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual. . . . .	125
5.24	Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual. . . . .	126
A.1	Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 3" . . . . .	129
A.2	Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 1" . . . . .	130
A.3	Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Union Izquierdo" . . . . .	131
A.4	Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 2" . . . . .	132
A.5	Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 4" . . . . .	133
A.6	Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Base ServoMotor" . . . . .	134
A.7	Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Primer Eslabon" . . . . .	135
A.8	Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Segundo y Tercero Eslabon" . . . . .	136
A.9	Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Cuarto Eslabon" . . . . .	137
D.1	6ta Edición de exposición de proyectos de las asignaturas: Proyecto integrador de Ing en Mecatrónica y Seminario de investigación . . . . .	145
D.2	Exposición de prototipo . . . . .	146
D.3	VIII Semana de Electrónica y Mecatrónica . . . . .	146
D.4	Exposición en la semana mecatrónica . . . . .	146
D.5	EXPO Robótica móvil/Robótica de manipuladores . . . . .	147
D.6	Exposición en la EXPO Robótica móvil/Robótica de manipuladores . . . . .	147
D.7	Exposición en primaria para promover la carrera . . . . .	148
D.8	Presentación de artículo en congreso <i>COMROB 2024</i> . . . . .	148
D.9	Publicación de artículo [3] . . . . .	149



# Capítulo 1

## Introducción

Con la llegada de la nueva era de la robótica, los robots han ofrecido un impacto significativo en la industria, mejorando la producción, calidad y condiciones de trabajo. Estos dispositivos han sustituido tareas físicamente agotadoras y tienen el potencial de controlar una planta de producción bajo criterios específicos [4].

Un robot es el resultado de la integración de diversas áreas dedicadas a la automatización de tareas humanas. La variedad de estas tareas ha llevado al desarrollo de una amplia gama de robots, que operan mediante la interacción entre actuadores, sistemas internos y un control específico. Esta interacción permite la lectura, interpretación y ejecución de funciones complejas [5]. Dentro de esta diversidad, los robots móviles y los manipuladores destacan por su capacidad para realizar tareas especializadas con alta precisión.

Una rama fundamental de la robótica son los robots manipuladores, que se inspiran en las articulaciones humanas para su diseño y funcionalidad. Un manipulador se define como una cadena cinemática abierta, compuesta por un conjunto de eslabones interconectados que permiten el movimiento de sus articulaciones [5]. Cada movimiento independiente que realiza el manipulador se denomina grado de libertad, y en robótica, este se determina utilizando articulaciones prismáticas y de rotación [6]. La clasificación entre cadenas cinemáticas abiertas y cerradas se basa en la cantidad de rutas posibles para alcanzar un punto determinado; si existe más de una ruta, se trata de una cadena cerrada, de lo contrario, es una cadena abierta [6]. La capacidad de los robots manipuladores para imitar los movimientos humanos y su adaptabilidad a diversas aplicaciones industriales los convierte en herramientas invaluables para la automatización de procesos. No obstante, los manipuladores enfrentan desafíos de diseño relacionados con la estabilidad y la distribución del peso, además del análisis cinemático, que implica calcular las posiciones relativas entre los eslabones y un sistema de coordenadas fijo [7]. Por otro lado, los robots móviles son dispositivos electromecánicos que se desplazan con cierto grado de autonomía, ampliando el espacio de trabajo sin estar sujetos a una estructura fija [5]. Dependiendo de su modo de locomoción, pueden clasificarse en robots con orugas, patas o ruedas, y su control se centra en la capacidad de seguir un camino planificado de manera autónoma. Esto requiere el desarrollo de leyes de control que estabilicen al robot en un punto de trabajo, minimizando el error entre la posición deseada y la actual, y asegurando que las señales de control se mantengan dentro de los límites adecuados [8]. La capacidad de operar de forma independiente y adaptarse a tareas en entornos dinámicos hace que los robots móviles sean altamente versátiles. A diferencia de los robots manipula-

dores, que suelen estar anclados, los robots móviles operan en un entorno variable, lo que plantea retos adicionales en términos de control y estabilidad [9]. La integración de técnicas de autonomía, como la evasión de obstáculos y el seguimiento de trayectorias específicas, es un campo en constante evolución, que promete transformar radicalmente la manera en que los robots interactúan con su entorno.

La robótica móvil ha experimentado un notable avance en los últimos años, impulsando el desarrollo de diferentes tipos de manipuladores móviles y sistemas de control guiados. Estos sistemas ofrecen soluciones autónomas para una variedad de aplicaciones industriales y de servicio. Existen dos tipos principales de manipuladores móviles: el manipulador móvil autónomo, diseñado para ejecutar tareas sin intervención humana directa, donde la coordinación de sus grados de libertad en movimiento es esencial para realizar tareas complejas de manera eficiente [10], y el sistema de control guiado, que utiliza un mapa detallado del entorno local para generar trayectorias libres de obstáculos, actuando estas trayectorias como guía para el módulo de control del sistema [11]. Este creciente interés en los robots ha llevado a numerosas empresas a buscar la construcción e implementación de manipuladores móviles en diversas áreas, desde la fabricación hasta la logística y la atención médica, transformando así la manera en que se llevan a cabo las tareas en entornos variables, y prometiendo continuar impulsando la innovación y la eficiencia en una amplia gama de sectores industriales. Los robots manipuladores móviles destacan por su alcance, superando al de los robots manipuladores fijos. Además, la capacidad de movimiento de estos robots les permite adoptar posturas en puntos del espacio que serían inaccesibles para un robot de base fija, ofreciendo así una mayor capacidad de ajuste y precisión en una variedad de aplicaciones [12]. Su capacidad para adaptarse a entornos cambiantes y realizar tareas específicas los convierte en herramientas indispensables en campos como la manufactura y la exploración.

## 1.1. Estado del arte

La robótica móvil ha avanzado significativamente, facilitando la integración de plataformas móviles con brazos manipuladores robóticos para diversas aplicaciones industriales y de servicio. Las empresas líderes en el sector han diseñado soluciones innovadoras que integran manipuladores móviles. Estas compañías han enfocado sus esfuerzos en crear robots que optimizan la eficiencia y la seguridad en diversos entornos industriales. A continuación, se presentan algunos de los avances más destacados realizados por estas. Empresas líderes en robótica móvil, como *Omron*, han desarrollado soluciones que combinan manipuladores colaborativos con robots móviles autónomos. En este caso, *Omron* ha integrado un manipulador de la serie TM con un robot móvil de la serie LD, creando una plataforma flexible y eficiente para diversas aplicaciones industriales [13–15]. Este diseño permite a los robots realizar tareas de manipulación y transporte en entornos de trabajo colaborativos. Por otro lado, la empresa *Youibot* ha desarrollado diseños más específicos, como su robot capaz de manejar y cargar, en escenarios de fabricación de chips frontales de semiconductores [16, 17]. Este tipo de solución está orientada a la industria de semiconductores, donde la precisión y la capacidad de manejar cargas específicas son esenciales para la producción. Por otro lado, *Robotnik* y *KUKA* han optado por sistemas omnidireccionales para sus dispositivos [18–20]. Estos robots están diseñados para moverse de manera más sencilla en cualquier dirección,

lo que les permite navegar en espacios reducidos y realizar maniobras complejas con mayor precisión. La autonomía y la navegación en entornos estructurados y no estructurados son características clave en los robots desarrollados por estas empresas, permitiéndoles adaptarse a una amplia variedad de aplicaciones industriales.

En la tabla 1.1 1.2 se presentan las características específicas de cada una de estas empresas y las tecnologías de sus robots manipuladores móviles, destacando las ventajas que cada una ha aportado al campo de la robótica móvil.

Robot	Foto	Tamaño del móvil (x, y, z) (mm)	Longitud del manipulador (mm)	Capacidad de carga (manipulador)	Aplicaciones	Tipo de arquitectura móvil
<i>Omron</i> LD-250 [13-15]		698x500x383	700-1300	4-14 kg	Recoger, transportar, mejorar trazabilidad y eficiencia	Tracción diferencial
<i>Youibot</i> OW-12 [16,17]		1085x775x1510	1300	12 kg	Fabricación de semiconductores, manejo de FOUP POD, optimización, seguridad	Diferencial
<i>KUKA KMR</i> <i>iiwa</i> [18,19]		1130x630x700	800-820	7-14 kg	Montaje, pick and place, operaciones de calidad	Omnidireccional con ruedas Mecanum
<i>Robotnik R3D</i> [20]		978x776x690	1300	12.5 kg	Logística, montaje, manejo de materiales	Omnidireccional con ruedas Mecanum

Tabla 1.1: Tabla de características de robots manipuladores móviles en la industria.

El desarrollo de la robótica móvil ha permitido una integración cada vez más sofisticada de plataformas móviles con brazos manipuladores robóticos, lo que ha impulsado su uso en diversas aplicaciones industriales y de servicio. En este contexto, varias universidades han desarrollado robots que combinan estas tecnologías, aportando diferentes enfoques. Un ejemplo es *MADAR*, un robot manipulador móvil bimanual con capacidad de manipulación diestra. Este sistema se compone de una base móvil omnidireccional de diseño propio y una estructura superior que integra brazos y manos mecánicas con sensores táctiles. *MADAR* está diseñado para experimentos en planificación y control de movimientos, así como para

tareas de manipulación móvil en interiores. Además, permite la interacción con operadores humanos, centrándose en el control cinemático directo del manipulador, aunque no aborda el control cinemático del área móvil. En una línea similar, [21] presenta un robot manipulador móvil híbrido que combina un manipulador serial con una plataforma móvil omnidireccional. La plataforma, de forma rectangular, está equipada con cuatro robots móviles diferenciales, ubicados en cada esquina y fijos mediante uniones rotacionales. Aunque los robots móviles diferenciales no son omnidireccionales por sí mismos, la combinación de al menos dos de estos robots permite obtener omnidireccionalidad, logrando así redundancia en el sistema. Otro enfoque se encuentra en [22], que aborda un sistema robótico que integra un manipulador serial de 5 grados de libertad (GDL) con una base móvil, utilizando un robot *Pioneer 3-AT* de uso comercial. Este diseño amplía el espacio de trabajo y mejora la coordinación entre la base móvil y el manipulador. Para gestionar la dinámica de ambos componentes y reducir el error de posicionamiento, se desarrolló un controlador de posición basado en la técnica de control por torque precalculado. Finalmente, el proyecto descrito en [23] se enfoca en el desarrollo de un brazo robótico con 6 grados de libertad, tomando como referencia modelos como el *KUKA KR 5 sixx R650* y el *PUMA*. El algoritmo Denavit-Hartenberg (DH) fue utilizado para calcular la cinemática directa, asignando ejes a cada articulación. Este manipulador móvil, basado en la arquitectura *Ackerman* ofrece la capacidad de moverse en cualquier posición y orientación dentro de un plano, junto con las ecuaciones de cinemática correspondientes. Por otra parte, los autores presentes en [12, 24] presentan modelos cinemáticos teóricos, incluyendo transformaciones de matrices y simulaciones gráficas que representan el comportamiento de los sistemas estudiados. En el primer trabajo se presenta un controlador que garantiza la convergencia del robot móvil y del efecto final del manipulador a una trayectoria deseada, demostrando estabilidad semiglobal y acotada, con resultados de simulación que evidencian una efectividad notable en trayectorias paramétricas. El segundo trabajo aborda el análisis de la estabilidad a la volcadura en manipuladores móviles no-holonómicos, considerando la influencia de fuerzas externas y presentando simulaciones que ayudan a entender la estabilidad en estos sistemas.

La Universidad Tecnológica de la Mixteca cuenta con un repositorio de tesis que abordan robots manipuladores y móviles. El proyecto más relevante en el tema de manipuladores móviles es [25]. Este proyecto se centra en diseñar un manipulador robótico antropomórfico compacto con tres grados de libertad, utilizando motores de corriente directa (CD) tipo brushless en lugar de servomotores convencionales. El diseño está pensado para integrarse en un robot móvil de exploración y se beneficiará del sistema operativo ROS. Además, se han desarrollado proyectos relacionados con la navegación de robots móviles. Por ejemplo, [26] busca desarrollar y optimizar algoritmos de navegación autónoma para el vehículo *AutoNOMOS Mini V2*, utilizando redes neuronales convolucionales para superar obstáculos estáticos y móviles en un entorno controlado. De manera similar, [27] se enfoca en optimizar algoritmos de navegación autónoma para el *AutoNOMOS Mini V2*, empleando redes neuronales para sortear obstáculos en un entorno controlado. En esta misma línea, [28] propone un sistema de navegación autónoma para robots móviles en entornos desconocidos, integrando técnicas de SLAM y Aprendizaje por Refuerzo, evaluando tanto enfoques offline como online con el objetivo de lograr desplazamientos eficientes y seguros.

En la tabla 1.2 se presentan las características específicas de cada una de estas universidades y las tecnologías de sus robots manipuladores móviles. La tabla destaca las características

únicas de cada institución, como las dimensiones de los móviles, la longitud del manipulador, la capacidad de carga, las aplicaciones específicas, y el tipo de arquitectura móvil.

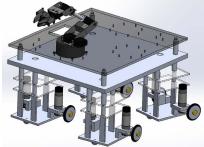
Universidad	Foto	Tamaño del móvil (dimensiones conocidas)	Longitud del manipulador	Capacidad de carga	Aplicaciones	Tipo de arquitectura móvil
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), España [29]		Diámetro de base 750 mm	850 mm	5 kg	Investigación en planificación y control de tareas en manipulación móvil, con énfasis en la interacción con operadores humanos en entornos interiores.	Omnidireccional de rueda esférica
Universidad Autónoma de México [21]		325 x 280 mm	Sin especificar	Sin especificar	Desarrollo y coordinación de manipuladores móviles omnidireccionales para el transporte de objetos en ambientes inteligentes, con un enfoque en el análisis cinemático y el control del movimiento.	Omnidireccional apoyado de 4 robots diferenciales
Pontificia Universidad Católica de Chile [22]		508 x 497 x 277 mm	577 mm	Torque no calculado debido a la falta de control en la corriente de los motores	Desarrollo de un controlador de posición para manipuladores móviles, integrando la dinámica de la base y del brazo y considerando perturbaciones y variaciones en el modelo dinámico.	Diferencial
Instituto Tecnológico de Puebla, UPAEP-CIP [23]		No especificada	1125.1 mm	Servomotores de 15 a 35 kg utilizados, pero no se especifica la carga total	Diseño y desarrollo de brazos robóticos personalizados para fines de investigación y educación, abarcando desde el diseño inicial hasta la implementación final.	<i>Ackerman</i>

Tabla 1.2: Tabla comparativa de manipuladores móviles en el ámbito académico.

## 1.2. Planteamiento del problema

La robótica moderna demanda que las empresas implementen soluciones avanzadas para la manipulación y navegación autónoma en entornos industriales. Empresas como Omron y Youibot ya han creado robots móviles con aplicaciones específicas. En el ámbito académico, instituciones como la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) también han logrado avances significativos en el desarrollo de robots manipuladores móviles. Siguiendo esta línea de investigación, diversas universidades han incorporado plataformas robóticas avanzadas para la formación y experimentación, entre ellas manipuladores móviles que permiten a los estudiantes integrar conocimientos teóricos y prácticos en robótica. No obstante, la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM) aún no cuenta con este tipo de plataformas, lo que limita el fortalecimiento de las competencias técnicas en el área. Esta ausencia restringe las oportunidades de los estudiantes para aplicar los conceptos aprendidos en escenarios reales, reduciendo su preparación frente a los retos tecnológicos que demanda la industria actual.

Ante este panorama, se propone el diseño y construcción de un robot manipulador móvil con ruedas omnidireccionales, integrando el control cinemático del sistema móvil y del manipulador. Este proyecto busca dotar a la UTM de una herramienta didáctica y experimental que fomente el aprendizaje práctico, la innovación y la investigación aplicada en el campo de la robótica.

## 1.3. Justificación

En la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM), la falta de este tipo de robots manipuladores móviles limita el desarrollo de habilidades prácticas y teóricas, afectando la preparación de los estudiantes para enfrentar desafíos en robótica, como la manipulación y la navegación autónoma. A diferencia de otras universidades que disponen de estos dispositivos, lo que les permite ofrecer una formación más completa, la carencia de este tipo de robots impide el desarrollo equilibrado de habilidades tanto prácticas como teóricas en los estudiantes, dificultando su preparación para enfrentar desafíos complejos en el campo de la robótica. Por lo tanto, implementar un manipulador móvil con fines demostrativos en el entorno académico es esencial para mejorar la calidad educativa y fomentar un aprendizaje más completo y aplicado en este campo.

## 1.4. Hipótesis

Mediante el diseño y construcción de un robot manipulador móvil, junto con la obtención de su modelo cinemático que describa el comportamiento espacial, el sistema será capaz de alcanzar puntos específicos en el espacio tridimensional, cumpliendo con los requisitos de posición y orientación establecidos

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo

Diseñar y construir un robot manipulador móvil con ruedas omnidireccionales, desarrollando un modelo de control cinemático combinado que coordine los movimientos del sistema de móvil y del manipulador, para lograr el posicionamiento en puntos específicos del espacio tridimensional.

### 1.5.2. Objetivos específicos

- Diseñar y construir la estructura del robot.
- Implementar el control cinemático del modelo de una configuración omnidireccional de 4 ruedas.
- Implementar el control cinemático para un manipulador con una configuración de 5 grados de libertad.
- Diseñar y fabricar el circuito electrónico en una placa PCB.
- Validar el funcionamiento completo del robot, verificando la interacción entre el sistema móvil y el manipulador.

## 1.6. Metas

- Diseñar la estructura mecánica y el circuito eléctrico del robot móvil omnidireccional.
- Validar el control cinemático mediante la simulación en *CoppeliaSim*.
- Ensamblar la estructura mecánica y el sistema eléctrico, y realizar pruebas iniciales para garantizar el correcto funcionamiento del robot.
- Programar el sistema de control para los motores y el control cinemático del vehículo, asegurando un movimiento preciso en todas las direcciones.
- Ejecutar pruebas de posicionamiento del vehículo omnidireccional para validar su precisión.
- Diseñar los eslabones del manipulador robótico.
- Programar los servomotores en una placa Arduino y asegurar un control adecuado.
- Ensamblar el manipulador e integrarlo al robot móvil.
- Integrar el control cinemático completo del manipulador y el robot móvil.

## 1.7. Delimitaciones

- El sistema estará diseñado para alcanzar las posiciones deseadas mediante el control cinemático.
- No se implementará ningún algoritmo de navegación autónoma.
- Las dimensiones de la base móvil serán de  $265 \times 221 \times 750$  mm, adecuadas para un entorno interior.
- El brazo robótico tendrá una capacidad de carga máxima de 100 gramos.
- La base móvil sin el brazo soportará hasta 2 kilogramos.
- Este prototipo está destinado a aplicaciones educativas y demostrativas en un entorno controlado.
- La estructura será de ácido poliláctico (PLA).
- La placa de desarrollo no puede tener menos de 20 pines de entrada/salida
- El robot operará exclusivamente en interiores.

## 1.8. Metodología

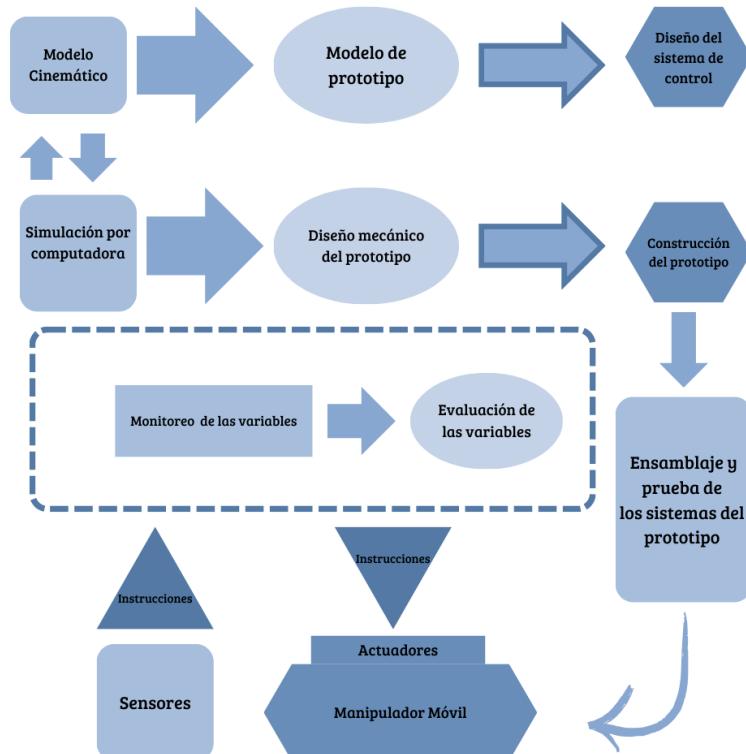


Figura 1.1: Esquema de la metodología a seguir.

[30]

La metodología que se usará para construir un manipulador móvil se basará específicamente en la presentada en [30], la cual sigue un flujo estructurado y basado en la integración progresiva de modelos teóricos, simulaciones computacionales y pruebas experimentales. La cual fue representada en la figura 1.1

A continuación, se describen las etapas clave:

1. **Modelo Cinemático** En esta primera fase, se desarrollan el modelo teórico que describen el comportamiento del robot móvil. Aquí se definen las ecuaciones cinemáticas que rigen el movimiento del robot, prestando especial atención a la estabilidad del sistema. Este modelo forman la base del Modelo del Prototipo y el Diseño Mecánico, proporcionando una representación matemática que guía el diseño estructural y funcional del robot.
2. **Simulación por Computadora:** Utilizando herramientas de simulación como *CoppeliaSim*, se valida y ajusta el modelo del prototipo. La simulación permite verificar las hipótesis sobre el movimiento y el control del robot, asegurando las características cinemáticas deseadas.
3. **Diseño Mecánico del Prototipo:** Basado en los resultados de los modelos y simulaciones previas, se procede al Diseño Mecánico del manipulador móvil. Aquí se definen los componentes estructurales, asegurando que puedan soportar las fuerzas que se presentarán durante la operación del robot. El diseño es verificado de manera experimental y se ayuda con análisis en las hojas de datos de cada motor.
4. **Construcción del Prototipo:** Una vez verificados los modelos, simulaciones y diseño mecánico, se procede a la construcción del robot. En esta etapa se integran los diferentes componentes, de modo que el prototipo reúna las características necesarias para su correcto funcionamiento.
5. **Ensamblaje y Prueba de los Sistemas:** Tras la construcción del prototipo, se realiza el ensamblaje final y las pruebas de los sistemas integrados. Estas pruebas verifican que el robot funcione de acuerdo con las especificaciones del diseño. Si se detectan desviaciones o fallos, se regresa a las etapas de simulación y diseño para realizar los ajustes necesarios.
6. **Monitoreo de Variables y Evaluación de Actuación:** En esta fase, se instrumenta el robot. Se capturan datos sobre las variables críticas del sistema (posición) y se evalúa la actuación del robot. Estos datos son esenciales para realizar ajustes en los modelos y mejorar el precisión del robot.
7. **Sensores y Actuadores:** Se integran sensores para captar información del entorno, como posición, inclinación o velocidad, y actuadores para controlar los movimientos del robot. Con los sensores, se busca que el robot lea su posición y corrija posibles desviaciones en sus movimientos.

Esta metodología garantiza un proceso iterativo y metódico para el desarrollo del robot, donde cada etapa se apoya en la anterior mediante la validación teórica y experimental, asegurando un diseño robusto y funcional.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Configuraciones de locomoción con ruedas

Los vehículos con ruedas son la solución más simple y eficiente para conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros y libres de obstáculos, permitiendo conseguir velocidades relativamente altas. Sin embargo, una limitación significativa es la dificultad para maniobrar o el deslizamiento en la impulsión, dependiendo de las características del terreno. La locomoción mediante ruedas es poco eficiente en terrenos blandos. [31]

Los robots móviles emplean diferentes tipos de locomoción mediante ruedas que les confieren características y propiedades respecto a la eficiencia energética, dimensiones, carga útil y maniobrabilidad. La mayor maniobrabilidad se consigue en vehículos omnidireccionales en el plano, capaces de trasladarse simultánea e independientemente en cada eje del sistema de coordenadas, y rotar según el eje perpendicular [31].

### 2.2. Configuraciones de locomoción

#### 2.2.1. Configuración *Ackerman*

Es la utilizada en vehículos de cuatro ruedas convencionales. Los vehículos robóticos para exteriores, tales como automóviles o incluso vehículos más pesados, resultan normalmente de la modificación de vehículos convencionales como se observa en la figura 2.1. La rueda delantera interior gira un ángulo ligeramente superior a la exterior para eliminar el deslizamiento. Las prolongaciones de los ejes de las dos ruedas delanteras se intersecan en un punto sobre la prolongación del eje de las ruedas traseras. El lugar de los puntos trazados sobre el suelo por los centros de los neumáticos son circunferencias concéntricas con centro sobre el eje de rotación. Si no se tienen en cuenta las fuerzas centrífugas, los vectores de velocidad instantánea son tangentes a estas curvas. El mayor problema de la locomoción *Ackerman* es la limitación en la maniobrabilidad [31].

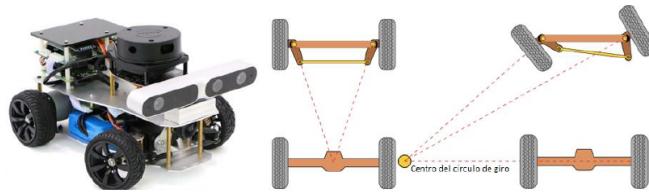


Figura 2.1: Ejemplo de un robot con sistema de dirección *Ackerman* [1].

## 2.2.2. Configuración diferencial

El direccionamiento viene dado por la diferencia de velocidades de las ruedas laterales. La tracción se consigue también con estas mismas ruedas. Adicionalmente, existen una o más ruedas para soporte. Esta configuración es la más frecuente en robots para interiores, como se observa en la figura 2.2 [31].

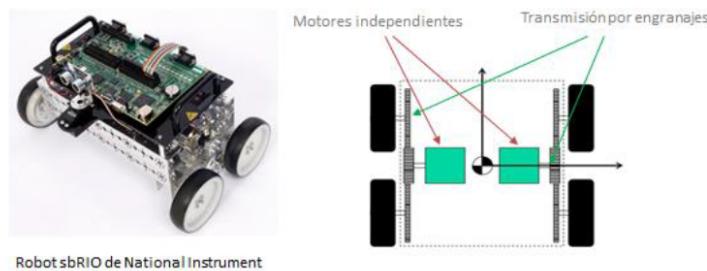


Figura 2.2: Ejemplo de un robot de accionamiento diferencial con 4 ruedas [1].

## 2.2.3. Configuración omnidireccional

Se consigue mediante el empleo de ruedas especiales, tales como las denominadas *ruedas suecas*, que permiten conseguir el movimiento omnidireccional de un vehículo con cuatro ruedas de este tipo adecuadamente controladas. Un ejemplo es el Robot Uranus (*Carnegie Mellon University*) con ruedas especiales para locomoción omnidireccional, como se observa en la figura 2.3 [31].

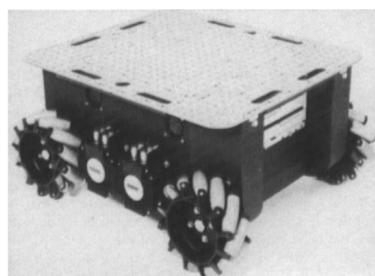


Figura 2.3: Robot *Uranus* [2].

## 2.3. Grados de libertad

Se define como grado de libertad (GDL) a cada uno de los movimientos independientes que puede realizar una articulación con respecto a la anterior. En la práctica, la robótica emplea principalmente articulaciones de rotación y prismáticas, las cuales poseen un solo grado de libertad. Cuando un robot incorpora una articulación con múltiples grados de libertad, se considera técnicamente como varias articulaciones diferentes conectadas por eslabones de longitud nula [6].

Existen varias propuestas a la hora de elegir los grados de libertad (GDL) para trabajar en un manipulador. Estos pueden incorporar desde 1 GDL hasta 6 o más GDL, según los requerimientos operativos del sistema. Los manipuladores con 1 o 2 GDL operan principalmente en un plano (X, Y). Aunque es posible incrementar el número de componentes estructurales en estos sistemas, sus movimientos permanecen limitados a un espacio bidimensional si no se incorpora un grado de libertad adicional en otro eje. Podemos trabajar con un manipulador de 3 GDL, el cual introduce la capacidad de desplazamiento en el eje Z. Esta adición transforma el sistema, permitiéndole operar en un espacio tridimensional y controlar tanto la posición como la orientación básica mediante ecuaciones de cinemática directa e inversa. Se puede trabajar con 4 o 5 GDL, los cuales contribuyen de manera considerable a la orientación del manipulador. En estas configuraciones, la integración de las dos articulaciones adicionales trabaja en el eje del efecto final, y sobre esta orientación se basa todo su movimiento. Al incluir un grado más (6 o más GDL), se amplía la estructura básica de 3 GDL, otorgando una mayor capacidad para maniobrar el manipulador y alcanzar puntos previamente inaccesibles, contrarrestando así las limitaciones inherentes a las estructuras con menor número de GDL.

## 2.4. Algoritmo de Denavit-Hartenberg

El algoritmo de Denavit-Hartenberg (D-H) constituye una herramienta matemática fundamental en la robótica para la descripción cinemática de sistemas mecánicos articulados. Esta metodología, desarrollada por Jacques Denavit y Richard Hartenberg en 1955, proporciona un enfoque sistemático y estandarizado para establecer sistemas de coordenadas en los eslabones de una cadena cinemática y definir las transformaciones entre ellos [6].

### 2.4.1. Fundamentos de la representación cinemática

La representación cinemática mediante el algoritmo D-H se basa en matrices de transformación homogénea que relacionan las coordenadas de un punto en el sistema de referencia de un eslabón con las coordenadas del mismo punto en el sistema de referencia del eslabón adyacente [6]. Cada articulación en un robot se caracteriza por cuatro parámetros fundamentales:

- $\theta_i$ : **Ángulo de articulación** - el ángulo entre los ejes X de los sistemas de referencia anterior y actual, medido alrededor del eje Z del sistema anterior.
- $d_i$ : **Distancia de desplazamiento** - la distancia a lo largo del eje Z anterior desde el origen del sistema anterior hasta la intersección con el eje X actual.

- $a_i$ : **Longitud del eslabón** - la distancia a lo largo del eje X actual desde la intersección con el eje Z anterior hasta el origen del sistema actual.
- $\alpha_i$ : **Ángulo de torsión** - el ángulo entre los ejes Z de los sistemas anterior y actual, medido alrededor del eje X actual.

### 2.4.2. Matrices de transformación homogénea

La transformación homogénea entre sistemas de coordenadas adyacentes se representa mediante la matriz:

$$A_i = \text{Rot}(z, \theta_i) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_i) \cdot \text{Trans}(a_i, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x, \alpha_i) \quad (2.1)$$

Esta matriz puede expresarse explícitamente como:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La transformación completa desde la base del robot hasta el efecto final se obtiene mediante la multiplicación secuencial de las matrices de transformación individuales:

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \quad (2.3)$$

donde  $n$  representa el número de grados de libertad del robot.

### 2.4.3. Procedimiento para la aplicación del algoritmo D-H

La implementación del algoritmo Denavit-Hartenberg sigue un proceso sistemático:

1. Identificación de los ejes de articulación.
2. Establecimiento de los sistemas de coordenadas en cada eslabón según las convenciones D-H.
3. Determinación de los cuatro parámetros D-H para cada articulación.
4. Cálculo de las matrices de transformación individuales.
5. Obtención de la matriz de transformación global mediante multiplicación secuencial.

### 2.4.4. Aplicaciones en el análisis cinemático de robots

La representación D-H facilita tanto el análisis de la cinemática directa como de la cinemática inversa:

- **Cinemática directa:** Determina la posición y orientación del efecto final del robot a partir de los valores de las variables de articulación.

- **Cinemática inversa:** Calcula los valores requeridos de las variables de articulación para alcanzar una posición y orientación específicas del efecto final.

Esta metodología se utiliza para la modelización de robots seriales, aunque puede extenderse a estructuras como robots paralelos mediante descomposición en cadenas cinemáticas seriales.

El algoritmo D-H se ha establecido como un estándar en la industria robótica y continúa siendo una herramienta utilizada en el diseño, control y simulación de sistemas robóticos, permitiendo la integración de diferentes subsistemas y la implementación de algoritmos de control.

## 2.5. Aplicación de métodos geométricos en la cinemática inversa

El método geométrico es una estrategia ampliamente utilizada para abordar aspectos de la cinemática inversa en robótica. Este enfoque se centra en el análisis de las relaciones geométricas entre los distintos elementos del robot para establecer las ecuaciones que relacionan la configuración articular con la posición y orientación deseadas del efecto final.

### 2.5.1. Fundamento del método geométrico

Según Barrientos et al., "la cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que intervienen- [6]. En el contexto de la cinemática inversa, este método se utiliza para determinar los valores de las articulaciones que permiten alcanzar una posición y orientación específicas, basándose en relaciones trigonométricas y vectoriales derivadas de la geometría del robot.

Para robots con configuraciones sencillas, como los robots planares, es posible derivar ecuaciones que relacionen directamente las coordenadas articulares con las coordenadas cartesianas del efecto final. Estas ecuaciones se obtienen mediante análisis geométrico, considerando las longitudes de los eslabones y los ángulos entre ellos. Este método resulta especialmente útil cuando la estructura del robot permite obtener soluciones analíticas sin recurrir a formalismos matemáticos más complejos.

### Limitaciones del método

Aunque el método geométrico es intuitivo y directo para configuraciones simples, su aplicabilidad se reduce en sistemas con mayor complejidad cinemática o con numerosos grados de libertad. En estos casos, pueden requerirse enfoques alternativos o complementarios, como los basados en el algoritmo de Denavit-Hartenberg, para sistematizar el análisis.

## 2.6. Desacoplamiento cinemático en la cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa para manipuladores robóticos en serie constituye un desafío central en el control automático. Dada la pose del efecto final, el objetivo es calcular los desplazamientos articulares correspondientes [32].

La complejidad depende de la geometría del manipulador: aunque existen soluciones cerradas para configuraciones especiales, el caso general de seis grados de libertad no admite una formulación analítica directa [32].

### 2.6.1. Principio del desacoplamiento cinemático

El desacoplamiento cinemático consiste en dividir el problema de la cinemática inversa en dos subproblemas: el cálculo de la posición y el de la orientación. Este principio resulta aplicable en manipuladores con muñeca esférica o Euler, ya que las tres últimas articulaciones (generalmente revolutas) forman un sistema que afecta únicamente a la orientación, mientras que las tres primeras determinan la posición del efecto final [33].

En este enfoque, la cinemática inversa puede expresarse como:

$$T_6^0 = T_3^0(q_1, q_2, q_3) \cdot T_6^3(q_4, q_5, q_6) \quad (2.4)$$

Donde  $T_3^0$  depende solo de las articulaciones que determinan la posición, y  $T_6^3$  corresponde a la orientación de la muñeca. De este modo, el problema se resuelve de forma jerárquica: primero se determina la posición del punto de intersección de los ejes de la muñeca, y luego se calculan los ángulos necesarios para alinear la orientación deseada.

### 2.6.2. Métodos analíticos y matriciales

El método analítico tradicional se basa en la manipulación de las matrices de transformación homogénea. Una vez conocido  $T_6^0$ , la separación de subcadenas permite obtener expresiones que aíslan cada variable articular. Por ejemplo [33]:

$$[T_1^0(q_1)]^{-1} T_6^0 = T_2^1(q_2) T_3^2(q_3) T_4^3(q_4) T_5^4(q_5) T_6^5(q_6) \quad (2.5)$$

De esta forma, las primeras transformaciones se van eliminando sucesivamente hasta obtener ecuaciones dependientes de un número reducido de variables articulares.

Por otra parte, enfoques más avanzados reformulan el problema como la resolución de polinomios de alto grado. Manocha y Canny [32] demostraron que el sistema multivariable puede reducirse a un polinomio de grado 16 mediante sustituciones trigonométricas, y que este polinomio puede resolverse empleando matrices compañeras y problemas de eigenvalores:

$$C \cdot x = \lambda x \quad (2.6)$$

donde  $C$  es la matriz compañera asociada al polinomio y  $\lambda$  son sus raíces, que corresponden a posibles valores de las variables articulares. Este procedimiento evita la búsqueda explícita de raíces, utilizando en su lugar algoritmos numéricamente estables de álgebra lineal.

### 2.6.3. Métodos numéricos

Cuando la estructura del manipulador no permite un desacoplamiento exacto, se aplican algoritmos iterativos. Un ejemplo es el *New Inverse Kinematics Algorithm* (NIKA), propuesto por Kucuk y Bingul [33]. Este método reduce el problema asignando un valor inicial aleatorio a una articulación, y resolviendo el resto de manera analítica.

El algoritmo presenta ventajas sobre métodos como Newton-Raphson: requiere menos condiciones iniciales, es más robusto frente a singularidades y muestra una convergencia más rápida en configuraciones complejas. Por lo tanto, constituye una alternativa práctica para robots con geometrías que no cumplen las condiciones de desacoplamiento estricto.

## 2.7. Odometría del robot omnidireccional

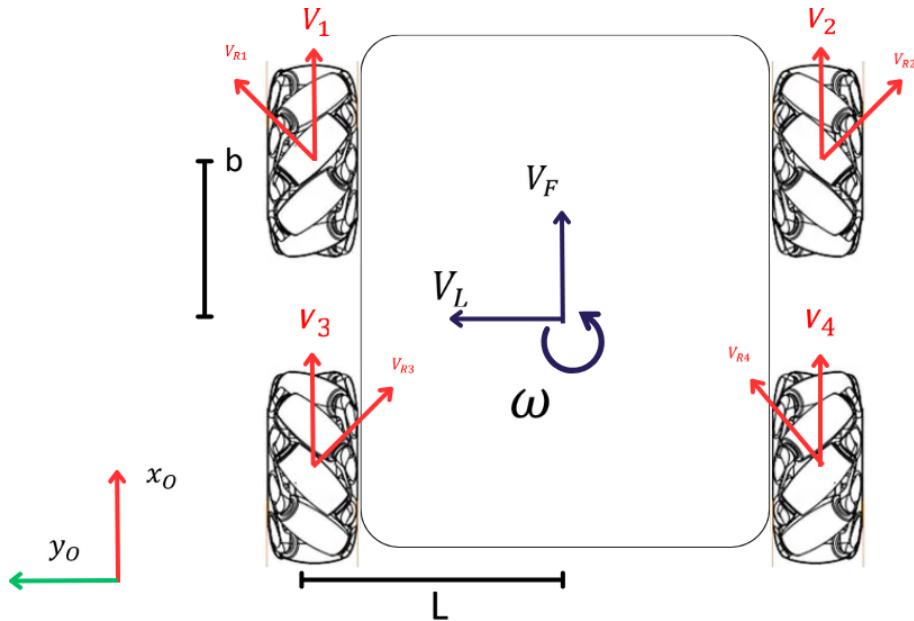


Figura 2.4: Esquema de odometría para un robot omnidireccional.

Para analizar el comportamiento de las 4 ruedas dentro del sistema (figura 2.4), se establecen las siguientes ecuaciones de velocidades:

#### Rueda 1

La ecuación 2.7 representa la combinación de la velocidad de la rueda ( $V_1$ ) con la velocidad relativa de los rodillos ( $V_{R1}$ ), que debe ser equivalente a la velocidad lineal del robot en las direcciones  $x$  ( $V_F$ ) e  $y$  ( $V_L$ ), junto con la contribución de la velocidad angular  $\omega$  debido a la distancia entre la rueda y el centro del robot.

$$V_1 \hat{i} + V_{R1}(\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) = V_F \hat{i} + V_L \hat{j} + \omega \hat{k} \times (b \hat{i} + L \hat{j}) \quad (2.7)$$

Para determinar el efecto de la velocidad angular sobre la rueda, se calcula el producto cruz entre el vector de velocidad angular  $\omega \hat{k}$  y el vector de posición de la rueda ( $b \hat{i} + L \hat{j}$ ):

$$\omega \hat{k} \times (b\hat{i} + L\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b & L & 0 \end{vmatrix} = -L\omega\hat{i} + b\omega\hat{j} \quad (2.8)$$

El resultado de este producto cruz (2.8) indica que la velocidad angular genera una componente de velocidad en la dirección  $x$  de  $-L\omega$  y en la dirección  $y$  de  $b\omega$ .

A continuación, se descompone la ecuación de velocidades en sus respectivas componentes. En la dirección  $x$ , obteniendo la ecuación 2.9:

$$V_1\hat{i} + V_{R1}\cos(45^\circ)\hat{i} = V_F(\hat{i}) - L\omega\hat{i} \quad (2.9)$$

De esta expresión se despeja la velocidad de la rueda 1:

$$V_1 = V_F - L\omega - V_{R1}\cos(45^\circ) = V_F - L\omega - V_{R1}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.10)$$

Por otro lado, en la dirección  $y$ , la ecuación se expresa en 2.11:

$$V_{R1}\sin(45^\circ)\hat{j} = V_L\hat{j} + b\omega\hat{j} \quad (2.11)$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para  $V_{R1}$ :

$$V_{R1} = \frac{V_L + b\omega}{\sin(45^\circ)} = \frac{V_L + b\omega}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2.12)$$

Sustituyendo la ecuación 2.12 en la ecuación 2.10 se obtiene:

$$V_1 = V_F - L\omega - \left( \frac{V_L + b\omega}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.13)$$

Finalmente, tras simplificar, la ecuación de velocidad para la rueda 1 (2.13) queda expresada como:

$$V_1 = V_F - L\omega - V_L - b\omega = V_F - V_L - (L + b)\omega \quad (2.14)$$

Esta ecuación (2.14) representa la relación entre la velocidad de la rueda y los parámetros cinemáticos del robot, considerando tanto sus desplazamientos lineales como su movimiento rotacional.

## Rueda 2

La ecuación (2.15) representa la combinación de la velocidad de la rueda ( $V_2$ ) con la velocidad relativa de los rodillos ( $V_{R2}$ ), que debe ser equivalente a la velocidad lineal del robot en las direcciones  $x$  ( $V_F$ ) e  $y$  ( $V_L$ ), junto con la contribución de la velocidad angular  $\omega$  debido a la distancia entre la rueda y el centro del robot.

$$V_2\hat{i} + V_{R2}(\cos 45^\circ\hat{i} - \sin 45^\circ\hat{j}) = V_F\hat{i} + V_L\hat{j} + \omega\hat{k} \times (b\hat{i} - L\hat{j}) \quad (2.15)$$

Para determinar el efecto de la velocidad angular sobre la rueda, se calcula el producto cruz entre el vector de velocidad angular  $\omega\hat{k}$  y el vector de posición de la rueda  $b\hat{i} - L\hat{j}$ :

$$\omega \hat{k} \times (b\hat{i} - L\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b & -L & 0 \end{vmatrix} = L\omega\hat{i} + b\omega\hat{j} \quad (2.16)$$

El resultado de este producto cruz (2.16) indica que la velocidad angular genera una componente de velocidad en la dirección  $x$  de  $L\omega$  y en la dirección  $y$  de  $b\omega$ .

A continuación, se descompone la ecuación de velocidades en sus respectivas componentes. En la dirección  $x$ , obteniendo la ecuación (2.17):

$$V_2\hat{i} + V_{R2} \cos(45^\circ)\hat{i} = V_F\hat{i} + L\omega\hat{i} \quad (2.17)$$

De esta expresión se despeja la velocidad de la rueda 2:

$$V_2 = V_F + L\omega - V_{R2} \cos(45^\circ) = V_F + L\omega - V_{R2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.18)$$

Por otro lado, en la dirección  $y$ , la ecuación se expresa en (2.19):

$$-V_{R2} \sin(45^\circ)\hat{j} = V_L\hat{j} + b\omega\hat{j} \quad (2.19)$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para  $V_{R2}$ :

$$V_{R2} = \frac{V_L + b\omega}{-\sin(45^\circ)} = \frac{V_L + b\omega}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2.20)$$

Sustituyendo la ecuación (2.20) en la ecuación (2.18) se obtiene:

$$V_2 = V_F + L\omega - \left( \frac{V_L + b\omega}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.21)$$

Finalmente, tras simplificar, la ecuación de velocidad para la rueda 2 (2.21) queda expresada como:

$$V_2 = V_F + L\omega + V_L + b\omega = V_F + V_L + (L + b)\omega \quad (2.22)$$

Esta ecuación (2.22) representa la relación entre la velocidad de la rueda y los parámetros cinemáticos del robot, considerando tanto sus desplazamientos lineales como su movimiento rotacional.

### Rueda 3

La ecuación (2.23) representa la combinación de la velocidad de la rueda ( $V_3$ ) con la velocidad relativa de los rodillos ( $V_{R3}$ ), que debe ser equivalente a la velocidad lineal del robot en las direcciones  $x$  ( $V_F$ ) e  $y$  ( $V_L$ ), junto con la contribución de la velocidad angular  $\omega$  debido a la distancia entre la rueda y el centro del robot.

$$V_3\hat{i} + V_{R3} \left[ \cos(45^\circ)\hat{i} - \sin(45^\circ)\hat{j} \right] = V_F\hat{i} + V_L\hat{j} + \omega \hat{k} \times (-b\hat{i} + L\hat{j}) \quad (2.23)$$

Para determinar el efecto de la velocidad angular sobre la rueda, se calcula el producto cruz entre el vector de velocidad angular  $\omega \hat{k}$  y el vector de posición de la rueda  $-b\hat{i} + L\hat{j}$ :

$$\omega \hat{k} \times (-b\hat{i} + L\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -b & L & 0 \end{vmatrix} = -L\omega\hat{i} - b\omega\hat{j} \quad (2.24)$$

El resultado de este producto cruz 2.24 indica que la velocidad angular genera una componente de velocidad en la dirección  $x$  de  $-L\omega$  y en la dirección  $y$  de  $-b\omega$ .

A continuación, se descompone la ecuación de velocidades en sus respectivas componentes. En la dirección  $x$ , obtenemos la ecuación (2.25):

$$V_3\hat{i} + V_{R3} \cos(45^\circ)\hat{i} = V_F\hat{i} - L\omega\hat{i} \quad (2.25)$$

De esta expresión se despeja la velocidad de la rueda 3:

$$V_3 = V_F - L\omega - V_{R3} \cos(45^\circ) = V_F - L\omega + V_{R3} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.26)$$

Por otro lado, en la dirección  $y$ , la ecuación se expresa en (2.27):

$$V_{R3} - \sin(45^\circ)\hat{j} = V_L\hat{j} - b\omega\hat{j} \quad (2.27)$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para  $V_{R3}$ :

$$V_{R3} = \frac{V_L - b\omega}{-\sin(45^\circ)} = \frac{V_L - b\omega}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.26) se obtiene:

$$V_3 = V_F - L\omega - \left( \frac{V_L - b\omega}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.29)$$

Finalmente, tras simplificar, la ecuación de velocidad para la rueda 3 queda expresada como:

$$V_3 = V_F - L\omega + V_L - b\omega = V_F + V_L - (L + b)\omega \quad (2.30)$$

Esta ecuación (2.30) representa la relación entre la velocidad de la rueda 3 y los parámetros cinemáticos del robot, considerando tanto sus desplazamientos lineales como su movimiento rotacional.

#### Rueda 4

La ecuación (2.31) representa la combinación de la velocidad de la rueda ( $V_4$ ) con la velocidad relativa de los rodillos ( $V_{R4}$ ), que debe ser equivalente a la velocidad lineal del robot en las direcciones  $x$  ( $V_F$ ) e  $y$  ( $V_L$ ), junto con la contribución de la velocidad angular  $\omega$  debido a la distancia entre la rueda y el centro del robot.

$$V_4\hat{i} + V_{R4} [\cos(45^\circ)\hat{i} + \sin(45^\circ)\hat{j}] = V_F\hat{i} + V_L\hat{j} + \omega \hat{k} \times (-b\hat{i} - L\hat{j}) \quad (2.31)$$

Para resolver el producto cruz, se tiene la siguiente expresión (2.32):

$$\omega \hat{k} \times (-b\hat{i} - L\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -b & -L & 0 \end{vmatrix} = L\omega\hat{i} - b\omega\hat{j} \quad (2.32)$$

La siguiente ecuación (2.33) representa la componente  $x$  de la velocidad:

$$V_4\hat{i} + V_{R4} \cos(45^\circ)\hat{i} = V_F\hat{i} + L\omega\hat{i} \quad (2.33)$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de la rueda 4 (2.34):

$$V_4 = V_F + L\omega - V_{R4} \cos(45^\circ) = V_F + L\omega - V_{R4} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.34)$$

En la dirección  $y$ , la ecuación correspondiente es (2.35):

$$V_{R4} \sin(45^\circ)\hat{j} = V_L\hat{j} - b\omega\hat{j} \quad (2.35)$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para  $V_{R4}$  (2.36):

$$V_{R4} = \frac{V_L - b\omega}{\sin(45^\circ)} = \frac{V_L - b\omega}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2.36)$$

Sustituyendo (2.36) en (2.34), obtenemos:

$$V_4 = V_F + L\omega - \left( \frac{V_L - b\omega}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.37)$$

Finalmente, la expresión para  $V_4$  queda de la siguiente manera (2.38):

$$V_4 = V_F + L\omega - V_L + b\omega = V_F - V_L + (L + b)\omega \quad (2.38)$$

Esta ecuación (2.38) describe la relación entre la velocidad de la rueda 4 y los parámetros cinemáticos del robot, considerando tanto los desplazamientos lineales como el movimiento rotacional.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L + b) \\ 1 & 1 & (L + b) \\ 1 & 1 & -(L + b) \\ 1 & -1 & (L + b) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_F \\ V_L \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Como es una matriz de  $3 \times 4$ , sacamos la pseudo inversa ( $m > n$ ) donde

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L + b) \\ 1 & 1 & (L + b) \\ 1 & 1 & -(L + b) \\ 1 & -1 & (L + b) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$J^t = (J^T * J)^{-1} \quad (2.41)$$

$$J^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -(L+b) & (L+b) & -(L+b) & (L+b) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$(J^T * J) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -(L+b) & (L+b) & -(L+b) & (L+b) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+b) \\ 1 & 1 & (L+b) \\ 1 & 1 & -(L+b) \\ 1 & -1 & (L+b) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$(J^T * J) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4(L+b)^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

donde

$$\det(J^T * J) = 4(16(L+b)^2) \quad (2.45)$$

$$Adj = \begin{bmatrix} 16(L+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 16(L+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$(J^T * J)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 16(L+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 16(L+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}}{4(16)(L+b)^2} \quad (2.47)$$

$$(J^T * J)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (L+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (L+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}}{4(L+b)^2} \quad (2.48)$$

donde

$$(J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(L+b)^2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$(J^T * J)^{-1} * J^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4(L+b)^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -(L+b) & (L+b) & -(L+b) & (L+b) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

siendo

$$J^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{(L+b)} & \frac{1}{(L+b)} & -\frac{1}{(L+b)} & \frac{1}{(L+b)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

dejando

$$\begin{bmatrix} V_F \\ V_L \\ \omega \end{bmatrix} = J^t * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{bmatrix} V_F \\ V_L \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{(L+b)} & \frac{1}{(L+b)} & -\frac{1}{(L+b)} & \frac{1}{(L+b)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

obteniendo

$$V_F = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \quad (2.54)$$

$$V_L = \frac{-V_1 + V_2 + V_3 - V_4}{4} \quad (2.55)$$

$$\omega = \frac{-V_1 + V_2 - V_3 + V_4}{4} \quad (2.56)$$



# Capítulo 3

## Diseño del Robot Manipulador Móvil Omnidireccional (MMO)

### 3.1. Propuesta de diseño de la parte móvil

La propuesta de diseño para el prototipo del MMO tiene como objetivo desarrollar una estructura que integre los sensores y actuadores necesarios para controlar la movilidad del robot. La arquitectura propuesta contempla espacios adecuados para la integración de los componentes electrónicos, incluyendo motores, controladores de potencia y las placas de programación requeridas para su operación. Las dimensiones se ajustan a las necesidades de operación en espacios interiores como se presentan en [34].

A continuación, se presenta la tabla 3.1 que muestra los componentes seleccionados para el diseño del prototipo. Estas especificaciones fueron determinadas para trabajar en el desarrollo del proyecto y se abordarán en cada capítulo del diseño.

Tabla 3.1: Componentes seleccionados para el diseño del móvil.

Componente	Especificación seleccionada
Material	PLA, ABS
Dimensiones físicas	Menor de 50x50 cm
Sistema de ruedas	Ruedas Mecanum (45°)
Sistema de potencia	Motores DC con reducción
Sistema de control	Control cinemático

### 3.2. Configuración de movilidad

La movilidad es un aspecto clave en el diseño del robot. Para que el robot se pueda desplazar y realizar las tareas asignadas, se evaluaron tres configuraciones principales: diferencial, Ackerman y omnidireccional [6].

Se eligió la configuración omnidireccional debido a su capacidad para desplazarse en todas las direcciones sin necesidad de maniobras complejas, lo cual resulta particularmente útil en espacios interiores. Como se mencionó en el estado del arte, esta configuración representa

una tendencia creciente en el sector robótico, donde empresas líderes están implementando sistemas omnidireccionales en sus diseños debido a sus ventajas operativas en entornos controlados.

Para este sistema se eligieron cuatro ruedas omnidireccionales de 80 mm de diámetro. Este tamaño permite mantener un diseño compacto adecuado para operaciones en interiores, donde los espacios suelen ser limitados. El diámetro seleccionado se ajusta al tamaño deseado del robot y el tipo de superficie sobre el que operará el robot, como se mencionó en la tabla 3.1. Las ruedas omnidireccionales implementadas en el móvil se muestran en la figura 3.1, donde se pueden apreciar sus características específicas.

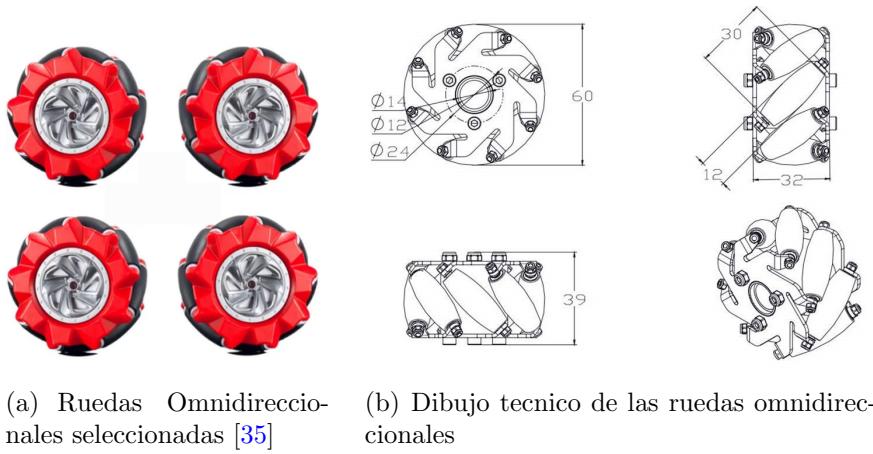


Figura 3.1: Ruedas *Mecanum* a 45 grados .

### 3.3. Materiales

El ácido poliláctico (PLA, por sus siglas en inglés) y el acrilonitrilo butadieno estireno (ABS, por sus siglas en inglés) se seleccionaron como materiales principales para la fabricación de la estructura del prototipo mediante impresión 3D, debido a que estos polímeros termoplásticos destacan por su favorable relación resistencia-peso, lo cual ayuda a la movilidad del robot. La implementación de estos materiales permite una fabricación con precisión controlada conforme a las especificaciones de diseño, manteniendo las tolerancias para el correcto funcionamiento de los sistemas mecánicos integrados. Además, la configuración modular del prototipo facilita las operaciones de mantenimiento preventivo y correctivo, permitiendo el acceso, sustitución y actualización de componentes individuales sin comprometer la integridad estructural del conjunto. Estas características técnicas constituyen factores determinantes para satisfacer los requerimientos estructurales y funcionales establecidos para el diseño del prototipo MMO.

### 3.4. Diseño de la Estructura

El diseño de la estructura del prototipo móvil está inspirado en el robot manipulador móvil omnidireccional *KUKA YouBot* [36] (figura 3.2(a)), una plataforma desarrollada para

trabajar en entornos controlados. Tomando como referencia estas características del *KUKA youBot*, se definieron las dimensiones para el móvil de 280 mm de largo, 221 mm de ancho y 73 mm de altura. Además, la configuración contempla un diseño simétrico entre las secciones frontal y trasera considerando la naturaleza omnidireccional del robot. Del mismo modo, los laterales fueron diseñados de forma semejante, manteniendo características entre sí. Las dimensiones y características de la estructura se muestran en la figura 3.2(b).

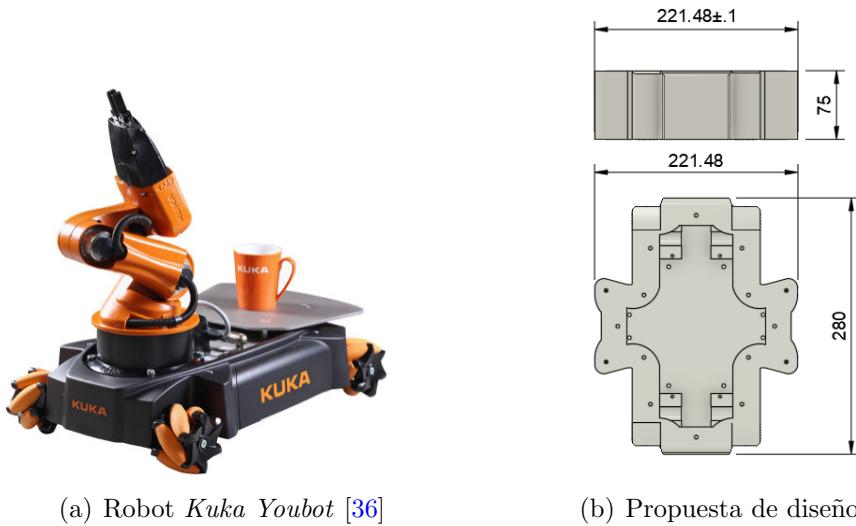


Figura 3.2: Comparación entre el robot *Kuka Youbot* y la propuesta de diseño.

Durante la fase de diseño, se consideraron las limitaciones del proceso de fabricación mediante impresión 3D con materiales PLA y ABS. Debido al tamaño considerable de la pieza y la complejidad de sus componentes, se identificó que fabricarla como una única unidad presentaría inconvenientes significativos. Estos son algunos de los puntos destacados:

- El tiempo de fabricación sería excesivo, lo que aumentaría el riesgo de interrupciones en el proceso y pérdidas de material.
- Las variaciones térmicas durante ciclos prolongados podrían generar deformaciones que comprometerían la precisión dimensional.

Para solucionar estas limitaciones técnicas, se implementó una estrategia de segmentación, dividiendo la estructura en seis piezas separadas de la base, como se muestran en la figura 3.3(a). En esta figura, cada color señala la división de la estructura. Cada segmento incorpora un sistema de rieles de acoplamiento en sus uniones que permiten el ensamblaje entre ellos, para posteriormente fijarse mediante tornillería a la base. Esta solución permite reducir el tiempo de impresión y los riesgos mencionados. Además, en la figura 3.3(b) permite visualizar la distribución espacial de los componentes previo al ensamblaje, verificando la coherencia constructiva del diseño propuesto.

La configuración de la estructura incluye alojamientos para cuatro motores de corriente continua y proporciona espacio para ruedas omnidireccionales de 80 mm de diámetro. El

diseño contempla también el espacio necesario para la instalación de placas de programación y elementos mecánicos y electrónicos.

Las esquinas (figura 3.4) de la estructura fueron diseñadas para albergar los motores y las ruedas. Los componentes laterales (figura 3.5) que conectan estas esquinas funcionan como elementos modulares que definen las dimensiones. Esta característica permite que futuras modificaciones en el largo o ancho del prototipo se puedan realizar mediante ajustes específicos en los componentes laterales y la base, sin necesidad de re diseñar todo el conjunto.

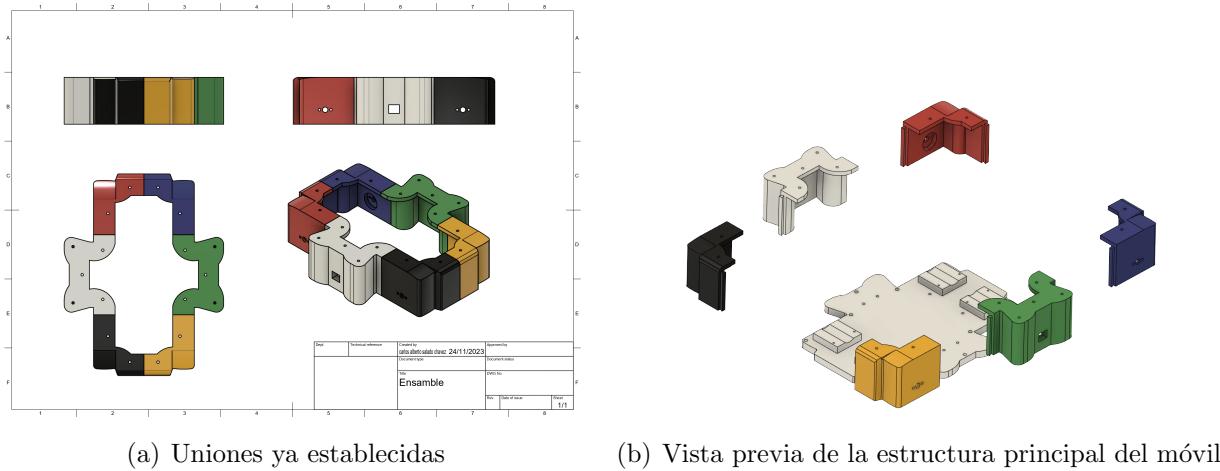


Figura 3.3: Vista general de las uniones y la estructura del manipulador móvil

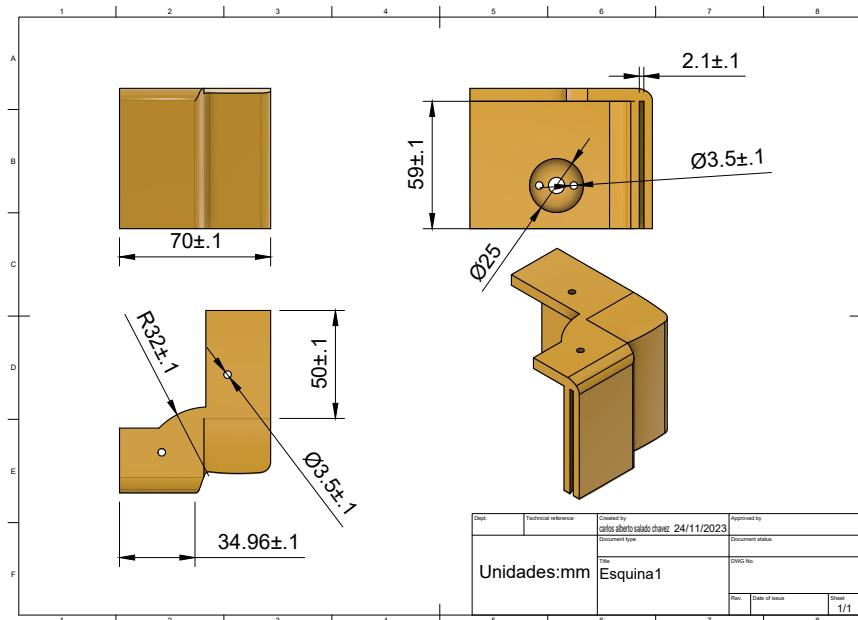


Figura 3.4: Esquina con orificio para motor (Pieza 1/6) para ensamblaje de estructura móvil.

La base (figura 3.6) se fabricó en material ABS para proporcionar mayor resistencia estructural. Para evitar desalineaciones del eje del motor, la base incorpora soportes diseñados

para ajustarse al perfil del motor, asegurando una sujeción firme del motor a la estructura y evitando posibles desbalances durante la operación.

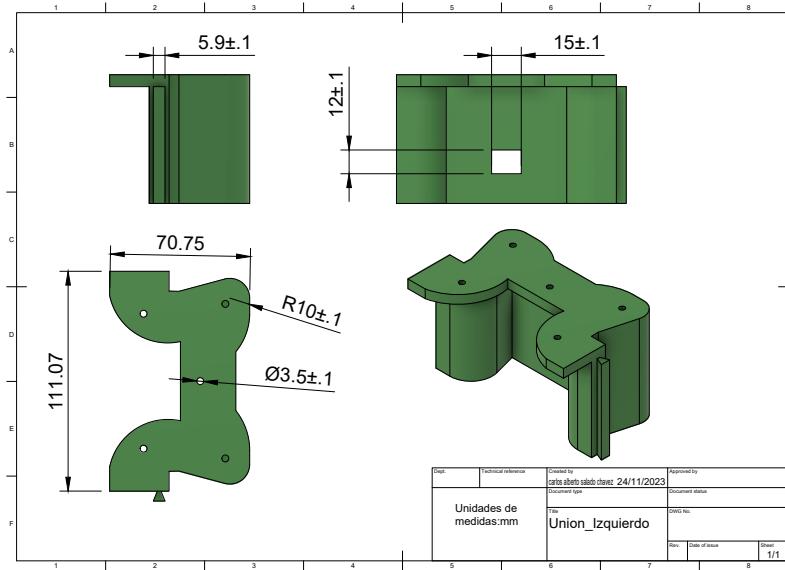


Figura 3.5: Lateral de unión (1/2) de cada esquina para ensamblaje de estructura móvil.

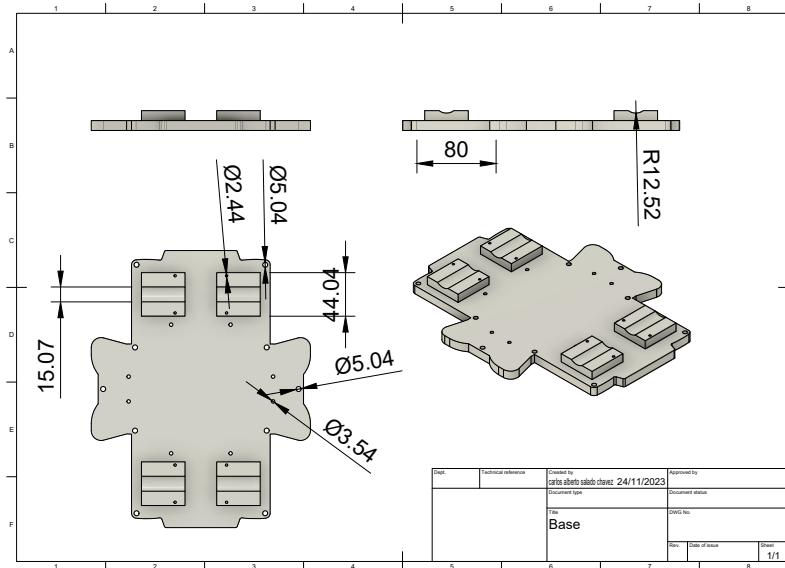


Figura 3.6: Plataforma de ensamble

El sistema móvil omnidireccional presentado en este capítulo se diseñó con un enfoque estructural segmentado que responde a consideraciones prácticas de fabricación y ensamblaje. La división de componentes facilita la producción mediante impresión 3D y permite realizar modificaciones dimensionales específicas sin necesidad de volver a diseñar la estructura completa. La unión de los componentes mediante tornillería y el sistema de rieles integrados en las piezas proporciona la estabilidad necesaria para el funcionamiento del robot. Este

método de ensamblaje también permite el desmontaje para tareas de mantenimiento cuando sea necesario. La configuración omnidireccional seleccionada y el tamaño de ruedas de 80 mm de diámetro son adecuados para la operación en entornos interiores, cumpliendo con los requisitos establecidos para el proyecto. Los componentes se diseñaron considerando la disposición de motores y demás elementos electrónicos necesarios para el funcionamiento del sistema. Los planos técnicos detallados de todos los componentes, incluyendo las esquinas, uniones laterales y la base, se encuentran documentados en el anexo para referencia en futuros desarrollos o modificaciones.

### 3.4.1. Diagrama explosionado

Esta sección presenta el diseño integrado del vehículo omnidireccional mediante un diagrama explosionado que ilustra los componentes principales, su distribución y las relaciones de ensamblaje entre ellos. El diagrama explosionado, mostrado en la figura 3.7, permite visualizar la disposición estructural de cada componente del sistema. Esta representación proporciona una referencia visual para los procesos de ensamblaje, mantenimiento y reparación. La numeración de las piezas corresponde a la lista de componentes detallada en la sección de materiales, lo que permite una identificación de cada elemento. La tabla 3.2 presenta un inventario detallado de los componentes que conforman el vehículo omnidireccional, numerados conforme a su representación en el dibujo explosionado (figura 3.7).

La estructura está compuesta por elementos diseñados específicamente para este sistema, como la base móvil y los soportes para motores, junto con componentes estándar como motores, tornillería y ruedas *Mecanum*.

Tabla 3.2: Lista de piezas del ensamblaje.

#	Cant.	Nombre de la pieza
1	1	Base móvil
2	1	Soporte para motor trasero derecho
3	1	Soporte para motor trasero izquierdo
4	1	Unión de soportes lado derecho
5	1	Soporte para motor frontal izquierdo
6	1	Soporte para motor frontal derecho
7	1	Unión de soportes lado izquierdo
8	4	Motores de CD
9	1	Placa para soporte de electrónica
10	1	Tapa superior con soporte para servo
11	10	Tornillo de 5x21mm
12	8	Tornillo de 3.5x9mm
13	4	Copple
14	18	Tornillo de 3.5x14mm
15	1	Rueda Mecanum delantera izquierda
16	1	Rueda Mecanum delantera derecha
17	1	Rueda Mecanum trasera izquierda
18	1	Rueda Mecanum trasera derecha

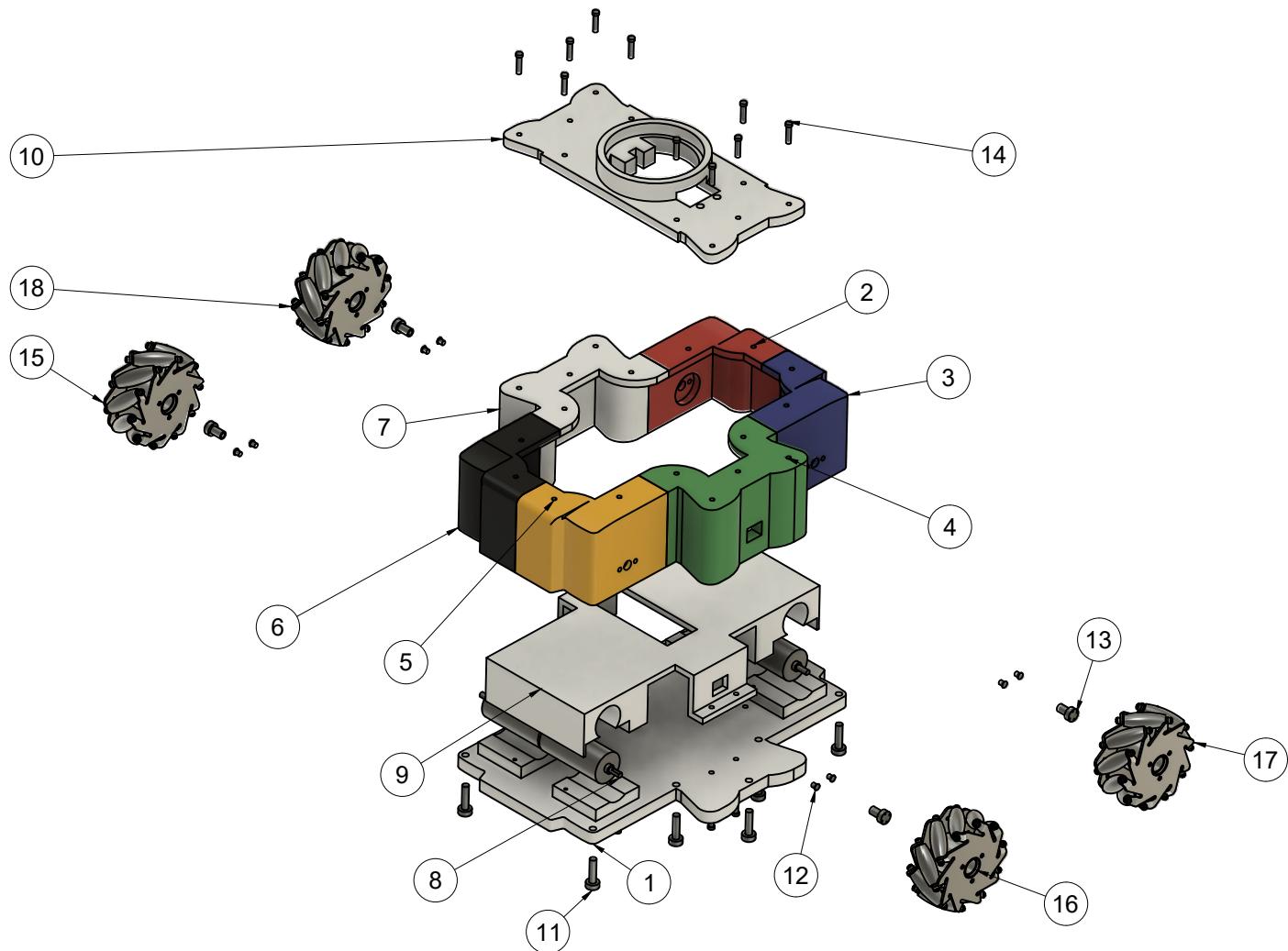


Figura 3.7: Explosión del vehículo

## 3.5. Proceso de manufactura/ensamble

### 3.5.1. Impresión de estructura del robot móvil

Para la fase de manufactura, se procedió a imprimir cada uno de los componentes previamente diseñados utilizando tecnología de impresión 3D. Se emplearon dos impresoras diferentes: una Ender 3V, con un área de impresión de 220 x 220 x 250 mm y velocidad máxima de 100 mm/s [37], y una Ender 3 Max Neo, con un área de impresión de 300 x 300 x 320 mm y velocidad de hasta 120 mm/s [38], con el fin de poder imprimir la base de 300 mm en la impresora Ender 3 Max Neo y las demás impresiones en la Ender 3V. Los parámetros usados para cada pieza se encuentran en el anexo B. En la figura 3.8 se muestra el proceso de impresión de uno de los componentes estructurales del proyecto, donde se puede apreciar el extrusor depositando material capa por capa para formar la pieza final según las especificaciones establecidas en la etapa de diseño.

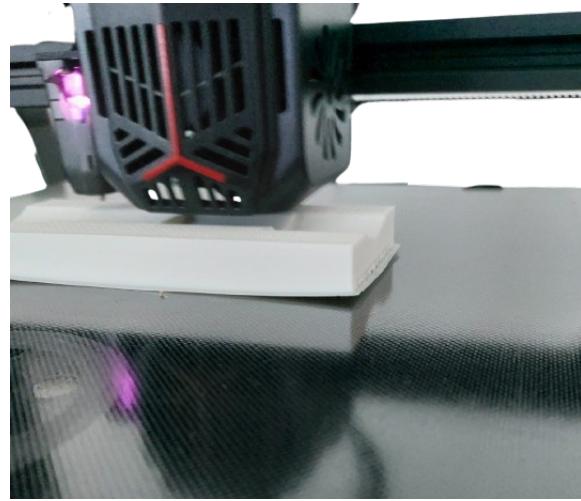


Figura 3.8: Proceso de manufactura

### 3.5.2. Ensamble

En primer lugar, se llevaron a cabo dos pruebas con las piezas iniciales fabricadas. La primera prueba consistió en verificar la funcionalidad de los rieles diseñados para la unión entre componentes, asegurando que las tolerancias y ajustes fueran correctos (figura 3.9(a)). La segunda prueba se centró en la implementación de insertos de latón roscados, los cuales proporcionan la cuerda de tornillo necesaria para la fijación. Estos insertos de latón se instalaron estratégicamente en cada pieza, permitiendo asegurar los componentes a la base mediante tornillos, lo que garantiza una estructura estable y desmontable cuando sea necesario (figura 3.9(b)).



(a) Prueba de riel



(b) Roscado de latón

Figura 3.9: Pruebas de manufactura en componentes del robot móvil.

Conforme se fueron imprimiendo las diferentes partes diseñadas, se procedió a su integración e implementación de los componentes correspondientes. Esto permitió verificar las dimensiones y asegurar que la estructura completa cumpliera con los parámetros establecidos en la fase de diseño como se puede ver en la figura 3.10.

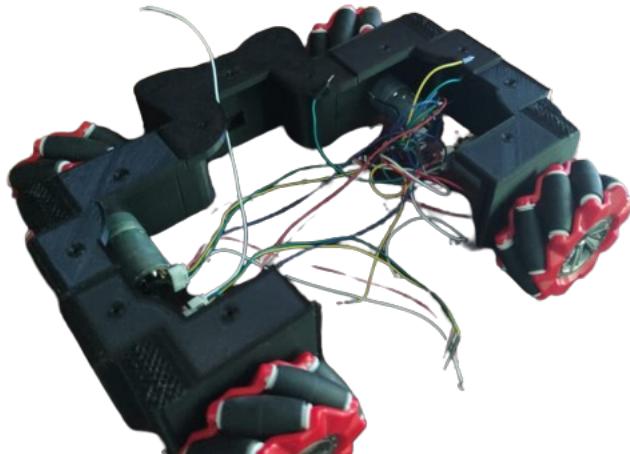


Figura 3.10: Ensamble de las 6 piezas

Finalmente, se procedió a la fijación del conjunto a la base mediante los latones roscados previamente instalados. Este método de sujeción proporcionó una conexión fija entre los componentes y la estructura base. La utilización de estos insertos roscados facilitó no solo la instalación inicial, sino que también permite un mantenimiento posterior, ya que posibilita el desmontaje cuando sea necesario (figura 3.11).

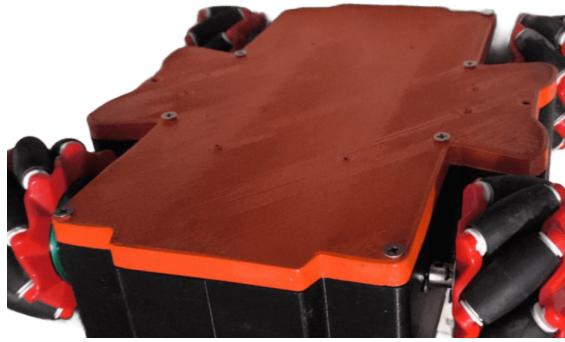


Figura 3.11: Atornillado de cada pieza a la base

El diseño concluido muestra el carrito completamente ensamblado, donde se puede apreciar la integración de todos los componentes fabricados. La estructura resultante exhibe la alineación de las piezas y la solidez proporcionada por la fijación con latones roscados. El producto final cumple con las especificaciones dimensionales establecidas en la fase de diseño.

Esta vista general permite visualizar el resultado de la metodología aplicada durante todo el proceso de desarrollo (figura 3.12).

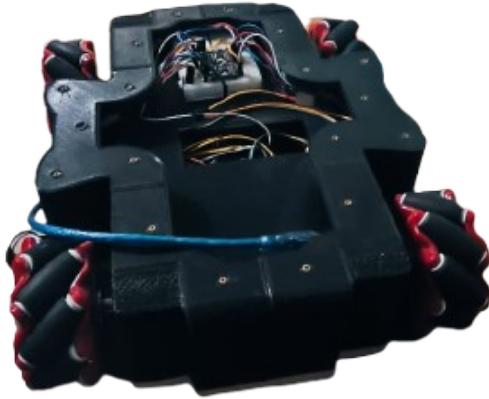


Figura 3.12: Robot Movil Ensamblado

### 3.6. Propuesta de diseño del manipulador

El manipulador robótico está diseñado para buscar posicionar su efecto final en coordenadas específicas dentro del espacio de trabajo. Su estructura, basada en un sistema de articulaciones y eslabones, permite la movilidad requerida, soporta su propio peso e integra los componentes necesarios para su funcionamiento. Para lograr el diseño, se han considerado distintas configuraciones estructurales y opciones de integración de componentes. A continuación, se presenta la tabla 3.3 que muestra los componentes seleccionados para el diseño del manipulador robótico. Estas especificaciones fueron determinadas para trabajar en el desarrollo del proyecto.

Tabla 3.3: Componentes seleccionados para el manipulador robótico.

Componente	Especificación seleccionada
Material	PLA
Método de fabricación	Impresión 3D
Configuración del manipulador	Serial de 5 GDL
Rango de alcance (mm)	500–700
Carga útil (kg)	Menos de 2
Sistema de actuación	Servomotores RC

## 3.7. Configuración del manipulador

### 3.7.1. Elección de articulación y grados de libertad

Se emplearon únicamente uniones revolutas (rotacionales) en la estructura del manipulador. Esta decisión se fundamenta en los tipos de uniones descritos en el capítulo 2 del marco teórico.

En primer lugar, la inspiración del robot *KUKA Youbot* proporcionó un modelo de referencia comprobada utilizando este tipo de articulaciones. Adicionalmente, las articulaciones revolutas facilitan el control de cada ángulo del eslabón mediante servomotores.

La integración del manipulador sobre una plataforma móvil fue otro factor considerado en esta decisión. Se planteó que la movilidad de la base podría compensar la ausencia de articulaciones prismáticas, ya que el desplazamiento lineal potencialmente puede lograrse mediante el movimiento coordinado de la plataforma.

El manipulador cuenta con 5 grados de libertad, distribuidos en 3 articulaciones para el posicionamiento y 2 para la orientación del efecto final. Esta distribución permite alcanzar distintos puntos en el espacio de trabajo con diversas orientaciones. Presentado así en la figura 3.13

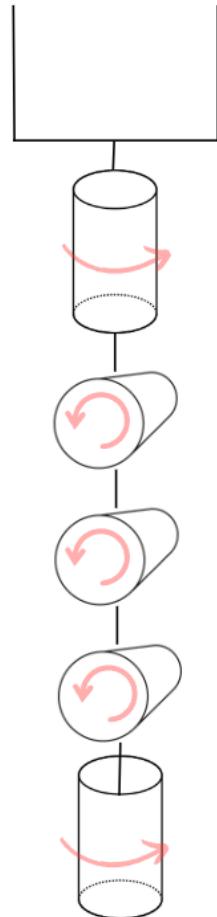


Figura 3.13: Propuesta de manipulador

### 3.8. Diseño de estructura del manipulador

El diseño del manipulador requirió un enfoque más riguroso que el de la plataforma móvil. Aunque se tomó inspiración del robot *Youbot* de *KUKA*, fue necesario desarrollar una estructura con mayor robustez debido a las diferencias en los componentes disponibles. La estructura tiene que cumplir dos requisitos principales, la primera consideración fue que debe soportar adecuadamente el peso de los servomotores y eslabones incorporados en el sistema. La segunda es que el manipulador debía tener un alcance suficiente para llegar a los extremos frontales y laterales de la base, dado que el manipulador está ubicado en el centro de la plataforma móvil. Las dimensiones del manipulador en su máxima extensión son 542 mm de altura, 95 mm de ancho y 70 mm de profundidad. Las proporciones de ancho y profundidad se definieron con un margen de seguridad superior al requerido para garantizar su resistencia estructural (figura 3.14). La configuración estructural incorpora un diseño dual en cada articulación: un lado aloja el eje del servomotor, mientras que el lado opuesto, a la misma altura, contiene un rodamiento. Esta disposición cumple dos funciones fundamentales: reducir la fricción durante el movimiento y proporcionar mayor estabilidad al sistema completo durante las maniobras de operación.

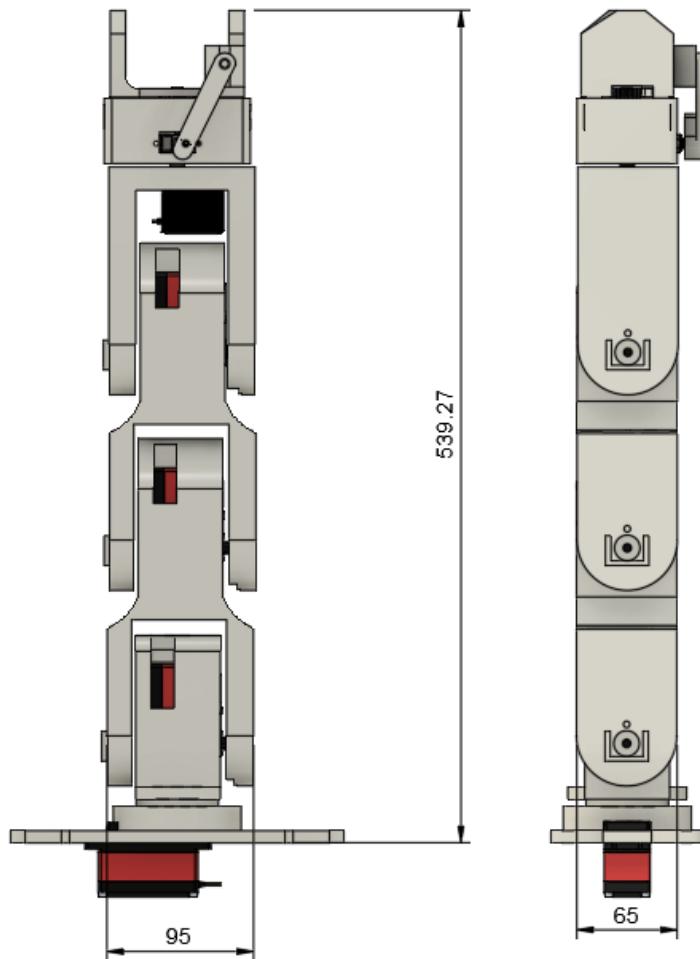


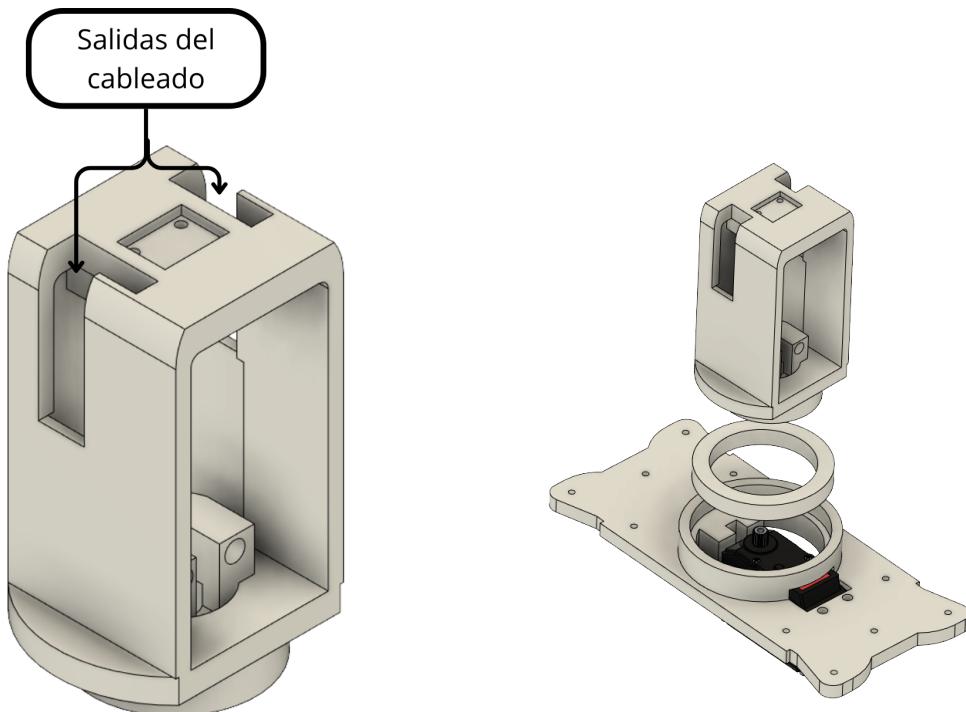
Figura 3.14: Dimensiones del manipulador.

### 3.8.1. Eslabones

#### Primer Eslabón del Manipulador

El primer eslabón debe estar centrado en la base del robot, ya que es el punto de referencia para el control del sistema. Dado que soporta el peso total del manipulador, se incorporó un balero entre este eslabón y la base para reducir la fricción. La parte inferior del eslabón presenta una geometría circular que se une al rodamiento mediante un ajuste por interferencia, donde una de las dimensiones es ligeramente mayor para permitir su ensamblaje mediante presión como se puede observar en el ensamblaje presentado en la figura 3.15(b).

El diseño interior del eslabón contempla un espacio suficientemente amplio para alojar el siguiente servomotor de la cadena cinemática. Adicionalmente, incorpora una salida para el cableado y aberturas laterales que permiten el paso de los cables provenientes de las articulaciones superiores, facilitando la organización interna y evitando interferencias durante el movimiento, de igual forma como se mencionó en el diseño de la estructura. Se adicionó un espacio a la misma altura del eje del motor para un rodamiento, esto para ayudar a tener un mejor equilibrio en la estructura. En la figura 3.15(a) se puede observar una vista del primer eslabón, pero si se desea conocer más detalles, consultar anexo.



(a) Primer Eslabón Imagen Isométrica

(b) Vista previa del ensamblaje del primer eslabón y la base

Figura 3.15: Visualización del primer eslabón y su ensamblaje con la base.

## Segundo y Tercer Eslabón

El segundo y tercer eslabón (figura 3.16) tienen el mismo diseño para contribuir al alcance necesario hacia los extremos de la base móvil y facilitar la estandarización del sistema. Estas dimensiones similares, junto con el resto de la estructura, permiten que el manipulador cumpla con el requisito de alcance total. Dado que ambas son articulaciones rotacionales, repetir el diseño simplifica la fabricación. La pieza cuenta con el espacio necesario para la incorporación del servomotor, así como la consideración de tornillos para la unión de la pieza al servomotor. Del otro extremo cuenta con su debido balero y en la parte posterior el espacio requerido para poder pasar cables de los eslabones siguientes.

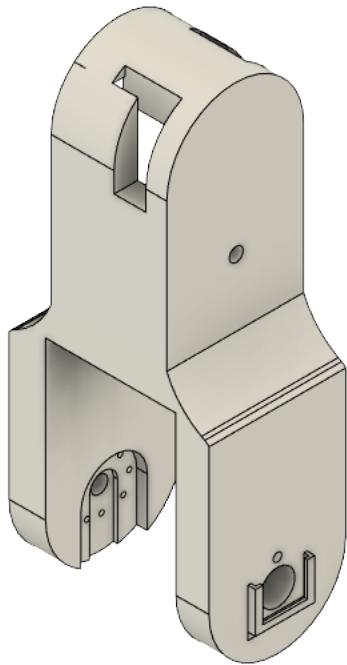


Figura 3.16: Primer Eslabón Imagen Isométrica

## Cuarto Eslabón y Efecto Final

El cuarto eslabón debía ser similar a los dos anteriores, pero debido a la incorporación del Efecto Final y del último eje de movimiento, este debía integrar el siguiente motor de manera diferente. En este caso, el ángulo de posición del motor debía tener el eje orientado hacia la parte superior, ya que el último sistema de coordenadas estaba propuesto de esa manera (figura 3.17).

El efecto final tipo pinza ha sido diseñado con un sistema de agarre que combina un mecanismo de manivela, piñón y cremallera, accionado por un servomotor. El servomotor mueve una manivela conectada a un balero (o rodamiento) ubicado dentro de la estructura que sostiene el mecanismo. Al girar la manivela, el movimiento se transmite al piñón, el cual engrana con una cremallera para generar el desplazamiento de las mordazas. La pinza izquierda se desplaza primero, activando un segundo mecanismo que permite que la pinza

derecha se mueva de manera sincronizada gracias a un sistema de engranaje central, logrando así la apertura y cierre coordinado del efecto final mediante un solo actuador (figura 3.18).

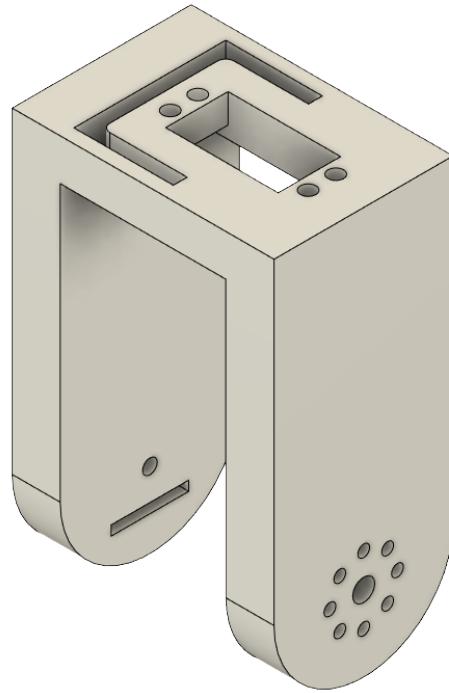


Figura 3.17: Vista Isométrica Eslabón 4

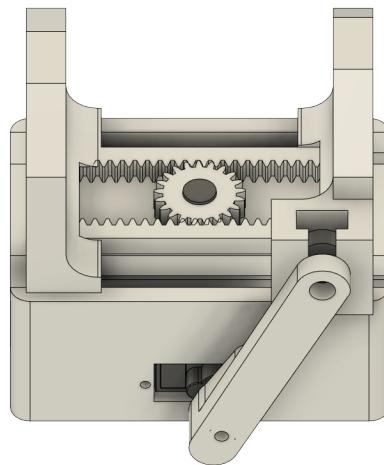


Figura 3.18: Vista Isométrica Gripper

### 3.9. Explosionado

En esta sección, se presenta un dibujo explosionado de la estructura del manipulador robótico, mostrando las partes principales, así como su ubicación y conexión entre sí. El

elemento fundamental del manipulador es el primer eslabón, que sirve como base para el montaje de los servomotores, rodamientos y demás componentes. Esta estructura debe ser lo suficientemente robusta para soportar tanto el peso propio del manipulador durante su operación. En el Anexo A podemos observar una imagen detallada del diseño completo del manipulador (ver figura 3.19). El dibujo explosionado permite visualizar con claridad la disposición de cada eslabón, la configuración dual de servomotores y rodamientos, y los espacios designados para el cableado, lo cual resulta fundamental para comprender su funcionamiento y para realizar tareas de mantenimiento y ensamblaje.

El diseño contempla la estandarización entre el segundo y tercer eslabón para simplificar la fabricación, mientras que el cuarto eslabón incorpora modificaciones específicas para alojar el *gripper* con su mecanismo de piñón y cremallera.

Tabla 3.4: Lista de piezas.

#	Cant.	Número de pieza
1	4	Servomotor <i>DS5160 SS9</i>
2	1	Base de servomotor a móvil
3	12	Tornillo 11x2.5mm
4	29	Tornillo 14x2mm
5	24	Tuerca 2mm
6	3	Soporte para tuercas
7	3	Latón 7mm
8	12	Latón 10mm
9	15	Tornillo 24x5mm
10	4	Balero 5x16mm
11	4	Latón 5mm
12	1	Servomotor <i>MG995R</i>
13	4	Tornillo 24x4
14	1	Eje del servomotor <i>MG995R</i>
15	1	Servomotor <i>MG90S Micro</i>
16	1	Eje del servomotor <i>MG90S</i>
17	1	Manivela
18	1	Primer eslabón
19	4	Círculo de eje para unión servomotor a eslabón
20	2	Segundo eslabón
21	1	Cuarto eslabón
22	1	Balero 55x72
23	1	Base de las mordazas del <i>gripper</i>
24	1	Engrane para sistema de <i>gripper</i>
25	1	Mordaza derecha
26	1	Mordaza izquierda
27	1	Balero 5x16mm
28	1	ServoMotor <i>DS51150</i>

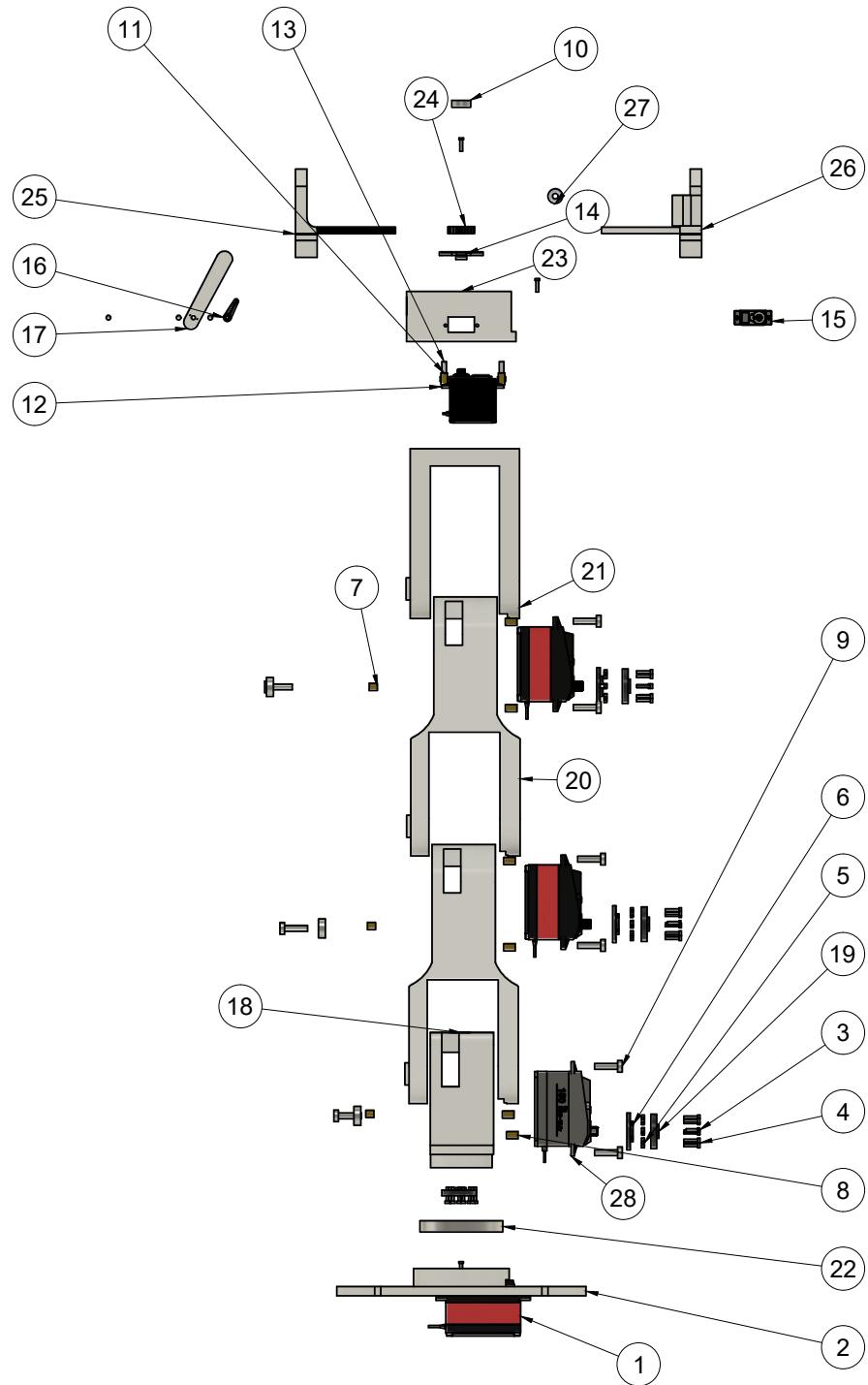


Figura 3.19: Explosión del manipulador.

### 3.10. Proceso de ensamblaje del manipulador

La primera pieza fabricada para el manipulador fue la base principal, elemento fundamental que proporciona estabilidad y soporte estructural al conjunto. Esta base incorpora

el alojamiento para el balero, tal como se detalló en la sección de diseño. Adicionalmente, la base cuenta con un compartimento para la instalación del motor, el cual proporcionará la fuerza necesaria para el funcionamiento del eje del sistema. Esta pieza constituye el punto de partida del ensamblaje, sobre la cual se integrarán progresivamente los demás componentes del manipulador.

El siguiente componente incorporado al ensamblaje fue el eslabón 1, elemento mecánico que cumple la función de transmitir el movimiento rotacional generado por el motor. Este eslabón se acopla directamente al eje de salida del motor instalado previamente en la base principal, constituyendo el primer elemento rotacional de la cadena cinemática.



(a) Base del manipulador con motor integrado      (b) Base del manipulador acoplado al primer eslabón

Figura 3.20: Estructura de la base del manipulador

La metodología de ensamblaje prosigue con la incorporación de los eslabones 2, 3 y 4. Como se especificó previamente en la sección de diseño, los eslabones 2 y 3 comparten características morfológicas y funcionales idénticas. El eslabón 4, si bien cumple funciones cinemáticas diferenciadas en la cadena articular, mantiene una configuración compatible con el sistema de ensamblaje establecido. La siguiente imagen (figura 3.21) ilustra la configuración resultante tras la integración de estos tres eslabones, evidenciando la progresión estructural del manipulador.



Figura 3.21: Configuración de la integración de eslabones 2, 3 y 4

El *gripper* (figura 3.22) ensamblado muestra el mecanismo de manivela controlado por un servomotor. Se observa cómo la manivela transmite el movimiento al rodamiento en la pinza izquierda, mientras el sistema de piñón-engrane central responde coordinadamente, provocando que ambas pinzas se abran y cierren simultáneamente.



Figura 3.22: Ensamble del *gripper* con su mecanismo

Finalmente, el ensamblaje completo del manipulador integrando base, eslabones y *gripper* se muestra en la figura 3.23, donde se observa el acoplamiento de los motores con cada eslabón, como se planteó en el diseño. Adicionalmente se presenta con el patrón de colores negro con naranja.



Figura 3.23: Ensamble final del manipulador

## 3.11. Electrónica

### 3.11.1. Selección de componentes electrónicos

La selección de componentes electrónicos define las capacidades de control, comunicación y alimentación del sistema. Los componentes principales incluyen motores DC, servomotores y una placa de desarrollo *Arduino* Mega, cada uno elegido por sus características específicas que contribuyen al funcionamiento integral del sistema.

### 3.11.2. Motores DC

Los motores DC *TenNuoDa GA25-370* fueron seleccionados por su capacidad de movilidad rotacional, adecuado para el funcionamiento de las ruedas omnidireccionales. Estos motores (tabla 3.5) incluyen un sensor encoder integrado, permitiendo implementar un controlador PID para optimizar el comportamiento del sistema. Este controlador ajusta la respuesta de forma proporcional, integral y derivativa, logrando así una respuesta estable, con menor error de seguimiento y reduciendo las oscilaciones para las señales de control establecidas.

Tabla 3.5: Especificaciones del motor *TenNuoDa GA25-370*.

Parámetro	Valor
Modelo	TenNuoDa GA25-370
Tipo	Motor de engranajes de corriente continua con escobillas
Característica principal	Alto par/torsión
Transmisión	Engranajes
Encoder	Integrado
Velocidad	60 RPM
Aplicación	Ruedas omnidireccionales
Dimensiones	40 mm (largo) x 25 mm (diámetro)

### 3.11.3. Servomotores

Se integraron tres servomotores *DS5160* con una capacidad de carga de 60 kg, estimando el peso que cada uno debe soportar. El primero de ellos se encuentra en la base, mientras que los otros dos controlan los eslabones dos y tres respectivamente, sus especificaciones se presentan en la tabla 3.6. Para el primer eslabón se empleó un servomotor *DS51150*, el cual ofrece un mayor torque debido a que, al posicionar el manipulador en diversos ángulos, puede comprometerse la carga y todo el peso recaer sobre el primer eslabón. Las especificaciones se encuentran en la tabla 3.7.

Para controlar el ángulo de rotación del *gripper* (último grado de libertad del sistema), se utilizó el servomotor *JX CLS-12V-15*. Dicho motor presenta menor capacidad de carga debido a su ubicación en la parte superior y al menor peso que debe soportar en comparación con los servomotores anteriores, sus especificaciones se presentan en la tabla 3.8. Para el funcionamiento de apertura y cierre del *gripper*, se utiliza un servomotor *Tower Pro MG90S* para que se adapte a las dimensiones del *gripper*. Sus características se encuentran en la tabla 3.9. Estos actuadores fueron seleccionados para el control del manipulador robótico debido a su capacidad para realizar movimientos de posicionamiento angular.

Tabla 3.6: Especificaciones del *servomotor DS5160*.

Parámetro	Valor
Modelo	DS5160
Tipo	Servo digital de alto torque
Torque máximo	60 kg.cm
Rango de voltaje	6V a 8.4V (óptimo 7.4V)
Ángulo de trabajo	180° / 270°
Señal de control	PWM (500 $\mu$ s a 2500 $\mu$ s)
Construcción	Engranajes metálicos, doble rodamiento de bolas
Dimensiones	65 mm x 30 mm x 48 mm
Peso	162 g

Tabla 3.7: Especificaciones del *servomotor DS51150*.

Parámetro	Valor
Modelo	DS51150
Tipo	Servo digital de alto torque
Torque máximo	150 kg.cm
Rango de voltaje	12V DC
Ángulo de trabajo	270°
Señal de control	PWM (500 $\mu$ s a 2500 $\mu$ s)
Construcción	Engranajes metálicos, doble rodamiento de bolas
Protección	Impermeable IP67
Dimensiones	65 mm x 30 mm x 48 mm
Peso	162 g

Tabla 3.8: Especificaciones del servomotor *JX CLS-12V-15*.

Parámetro	Valor
Modelo	JX CLS-12V-15
Tipo	Servo digital de alto torque
Torque máximo	15 kg.cm
Rango de voltaje	12V
Ángulo de trabajo	180°
Construcción	Engranajes metálicos
Peso	60 g

Tabla 3.9: Especificaciones del servomotor *Tower Pro MG90S*.

Parámetro	Valor
Modelo	Tower Pro MG90S
Tipo	Micro servo digital
Torque máximo	2.2 kg.cm
Rango de voltaje	4.8V a 6V
Ángulo de trabajo	180°
Construcción	Engranajes metálicos
Peso	14 g

### 3.11.4. Placa de control

El *Arduino* Mega 2560 R3 (tabla 3.10) fue elegido como la unidad central de control por su cantidad de múltiples entradas y salidas, permitiendo la integración de los sensores y actuadores del sistema. Sus 54 pines digitales, de los cuales 15 son salidas PWM, cumplen con el requisito de pines los cuales como mínimo son 22 pines digitales destinados al control de los motores y servomotores.

Tabla 3.10: Especificaciones de la placa Mega 2560 R3.

Parámetro	Valor
Modelo	Mega 2560 R3
Compatibilidad	<i>Arduino</i>
Cable	USB tipo A a USB tipo B
Entradas analógicas	16
Pines digitales	54 (15 con salida PWM)
Puertos UART	4
Memoria Flash	256 KB
Voltaje de trabajo	5V
Reloj interno	16 MHz

### 3.11.5. Sistemas de potencia

Para la gestión de potencia de los motores, se implementó el módulo puente H *DRV8833* (tabla 3.11), que permite controlar la dirección y velocidad de los motores DC. Este módulo de doble canal soporta hasta 1.5A de corriente continua por canal, suficiente para los motores seleccionados.

Tabla 3.11: Especificaciones del módulo puente H *DRV8833*.

Parámetro	Valor
Modelo	<i>DRV8833</i>
Tipo	Módulo Puente H
Número de canales	2
Voltaje de operación	3 – 10 V DC
Corriente máxima (por canal)	1.5 A (continua) / 2 A (pico)

### 3.11.6. Sistema de Alimentación

La alimentación del sistema se realiza mediante dos baterías LiPo (tabla 3.12), que proporcionan la energía necesaria para todos los componentes. La batería de 2S (7.4V, 1000mAh) se utiliza para la alimentación de los motores de corriente directa y los drivers, mientras que la batería de 3S (11.1V, 1500mAh) se destina a los servomotores que requieren mayor potencia. Este cambio se realizó debido a que, al intentar alimentar todo el sistema con una sola batería, la corriente no era suficiente para cubrir la demanda total. Al emplear dos baterías se aprovecha la distribución de celdas y se asegura un suministro más estable y confiable, especialmente para los servomotores.

Tabla 3.12: Especificaciones de las baterías LiPo utilizadas en el sistema.

Parámetro	Batería 1: ZIPPY 1000mAh 2S 25C	Batería 2: Turnigy 1500mAh 3S 25C
Tipo	LiPo	LiPo
Configuración	2S (7.4 V nominal)	3S (11.1 V nominal)
Capacidad	1000 mAh	1500 mAh
Aplicación	Motores DC y drivers	Servomotores de mayor potencia

## 3.12. Diagrama de conexión

A continuación se describe (en términos de pines y señales) la conexión de los elementos los elementos mostrados en el diagrama de conexión (figura 3.24): *Arduino* Mega, los dos puentes H (*DRV8833*), los cuatro motores DC con encoder, los seis servomotores y las baterías (2S y 4S LiPo, además de la alimentación *USB* para el *Arduino*), basándose en el nombre/etiqueta de cada pin.

### 3.12.1. Alimentación y referencia de tierra (GND)

#### Batería LiPo 2 celdas (2S)

- Terminal positivo (+) se conecta a la entrada de voltaje de motor en cada *DRV8833* (pin etiquetado como VM o VIN\_MOTOR en algunos módulos).

- Terminal negativo (–) va a la tierra común (*GND*) del sistema.

### Batería LiPo 3 celdas (3S)

Se empleó una sola batería LiPo de 3 celdas, aprovechando diferentes salidas de voltaje según la cantidad de celdas utilizadas:

- **3 celdas (3S, ~11.1 V nominal):** alimenta al servomotor de 150 kg, el cual requiere un voltaje cercano a 12 V.
- **2 celdas (2S, ~7.4 V nominal):** se utilizan para cuatro servomotores (tres de 60 kg y uno de 30 kg).
- **1 celda (1S, ~3.7 V nominal):** se destina al servomotor del *gripper*.

En todos los casos, el terminal negativo (–) de la batería se conecta a la tierra común (*GND*) del sistema.

### *Arduino* Mega

- Se alimenta a través de una batería portátil por el conector USB.
- El pin de *GND* del *Arduino* se conecta a la misma tierra común que comparten ambas baterías (4S y 2S) y todos los componentes.

### Puentes H *DRV8833*

Cada *DRV8833* tiene dos alimentaciones que revisar:

- *VM* (o *VIN\_MOTOR*): va a la batería 4S (positiva).
- *GND*: se conecta a la tierra común del sistema.

### Servomotores

- Cable de alimentación positivo (rojo): va a la batería LiPo 4S (+).
- Cable de tierra (negro/marrón): se conecta a la tierra común.
- Cable de señal (amarillo/naranja): va a un pin digital del *Arduino*.

**Nota:** Todos los negativos (*GND*) de la 2S, de la 4S, del *Arduino* y de los *DRV8833* deben unirse para tener referencia común.

### 3.12.2. Conexión de los puentes H (*DRV8833*) con el *Arduino*

Cada *DRV8833* controla dos motores (canales A y B). Sus pines típicos son:

- IN1 / IN2 (canal A), OUT1 / OUT2 (salida a motor A).
- IN3 / IN4 (canal B), OUT3 / OUT4 (salida a motor B).
- VM (alimentación de los motores, desde la 4S).
- VCC (lógica, desde 5V *Arduino*).
- *GND* (tierra).

#### *DRV8833* N.º1

- IN1 → Pin digital D5 del *Arduino*.
- IN2 → Pin digital D6 del *Arduino*.
- OUT1 / OUT2 → Motor DC N.º1.

### 3.12.3. Conexión de los encoders de los motores DC

Cada motor DC con encoder generalmente tiene:

- 2 cables de potencia (van a las salidas del *DRV8833*).
- 2 salidas de encoder (A y B).
- Alimentación del encoder (5V o 3.3V) y *GND*.

Ejemplo de asignación:

- Motor 1: Encoder A → Pin 2 del *Arduino*.
- Motor 2: Encoder A → Pin 18 del *Arduino*.

### 3.12.4. Conexión de los 6 servomotores

- Servo 1 → Pin 22 *Arduino*.
- Servo 2 → Pin 23 *Arduino*.
- Servo 3 → Pin 24 *Arduino*.

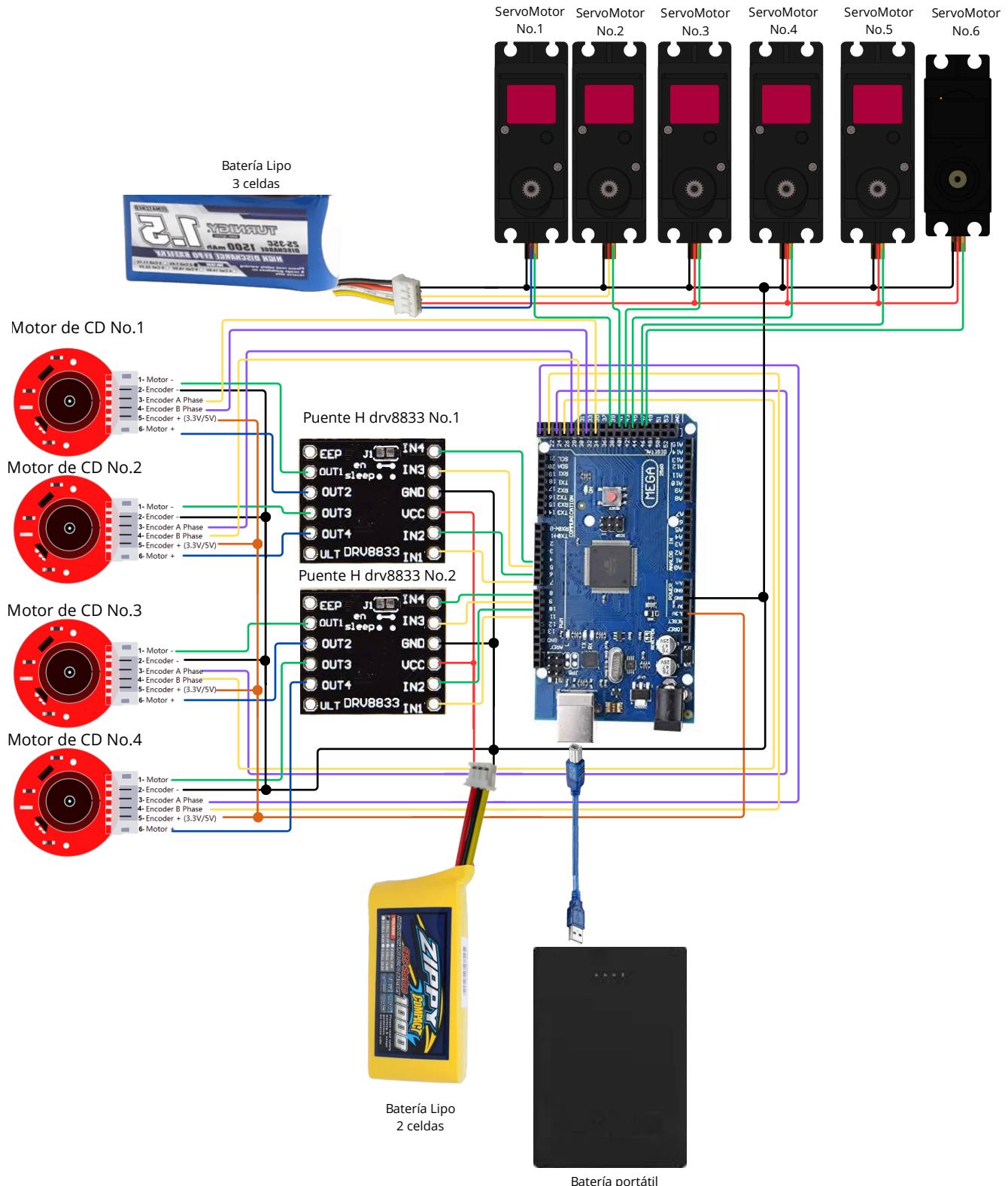


Figura 3.24: Diagrama de conexión de los componentes y sensores

### 3.13. Diseñar y fabricar el circuito electrónico en una placa de circuito impreso.

Una vez establecido el diagrama de conexión y definidas las interconexiones entre componentes, se procedió al diseño de una placa de circuito impreso (PCB, por sus siglas en inglés) para integrar todos los elementos del sistema robótico (figura 3.25). Esta placa será la encargada de controlar todo el sistema del robot.

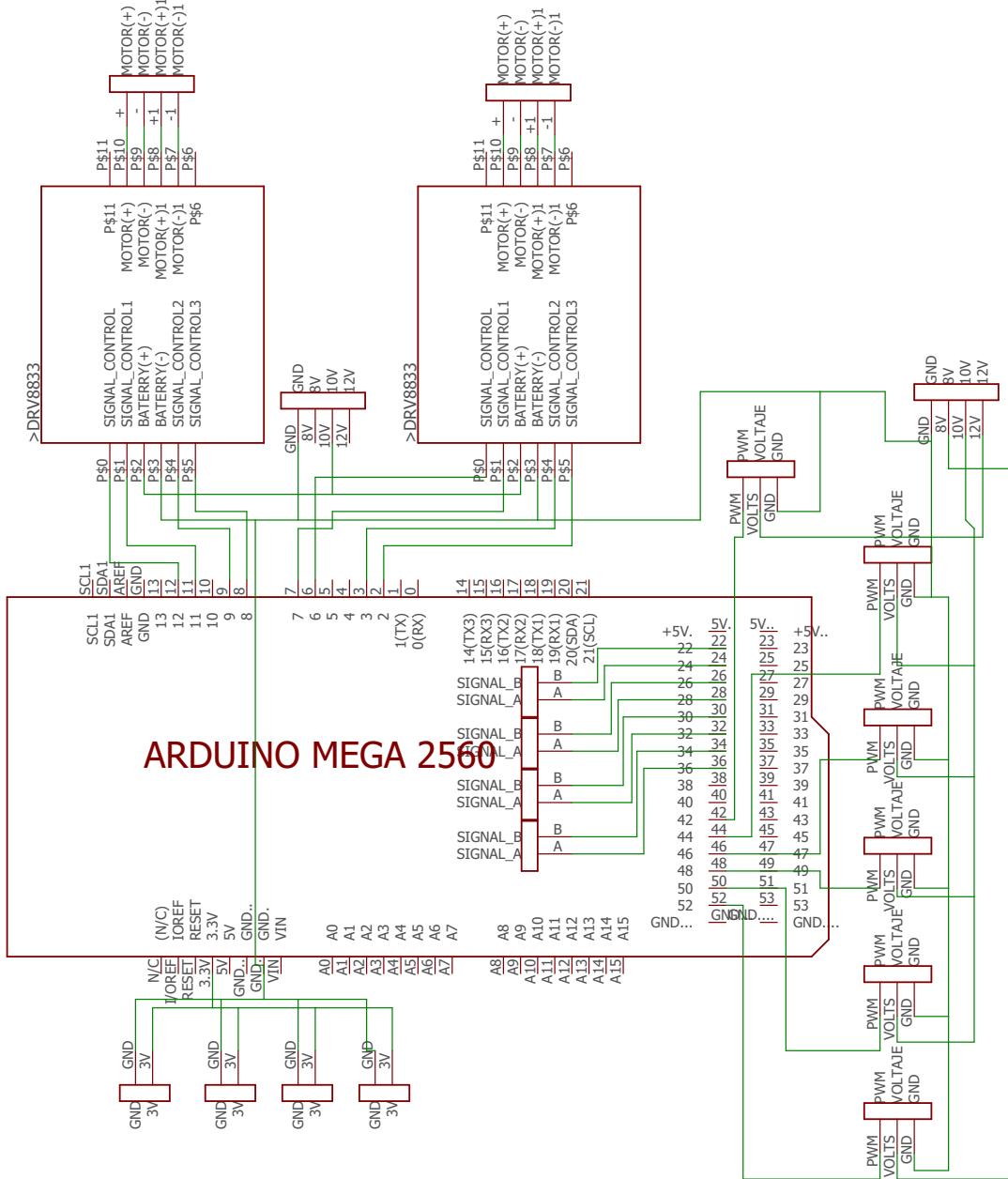


Figura 3.25: Diagrama de conexión para el diseño de una placa de circuito impreso

El diseño de la PCB como un módulo integrado para el *Arduino Mega* tiene como objetivo sustituir las conexiones dispersas, integrando en una sola placa todos los cables, sensores, actuadores y módulos necesarios para el funcionamiento del sistema. Esto elimina el uso de protoboards y cables sueltos que suelen generar conexiones inestables. Además, busca aprovechar el espacio vertical mediante el montaje directo sobre el *Arduino*, permitir el acceso directo a los pines disponibles.

Debido a las limitaciones del proceso de fabricación de una fresadora CNC al que se envió a maquinar la placa, esta se desarrolló en una configuración de una sola capa (single layer), lo que impuso restricciones importantes en el ruteo de señales.

En cuanto a las características eléctricas, las pistas y su separación fueron determinadas conforme a las especificaciones técnicas del proceso CNC. El uso de una sola capa presentó problemas en el ruteo, como la imposibilidad de cruzar pistas sin el uso de puentes, lo que limitó la implementación de un plano de tierra continuo. No obstante, se realizó una planificación detallada que aprovechó la disposición de los pines del *Arduino*, lo que permitió ajustar las asignaciones desde el código y dirigir las pistas hacia pines accesibles sin necesidad de generar cruces todo esto se puede observar en la figura 3.26.

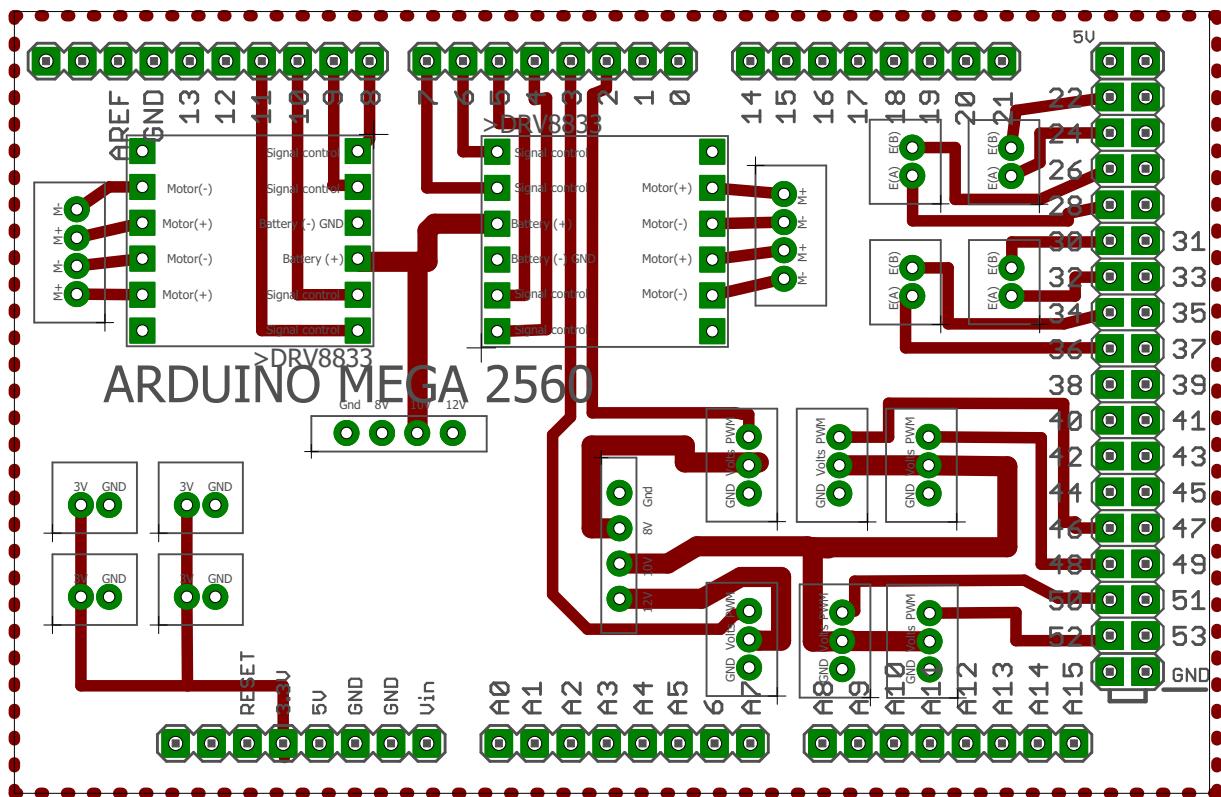


Figura 3.26: Diseño de placa con las pistas y conexiones

Finalmente, gracias a la herramienta de fusión, fue posible generar un modelo 3D de la placa, lo que permitió verificar visualmente la correcta disposición de los componentes y asegurar que no existan colisiones o interferencias entre ellos, como se muestra en la figura 3.27.

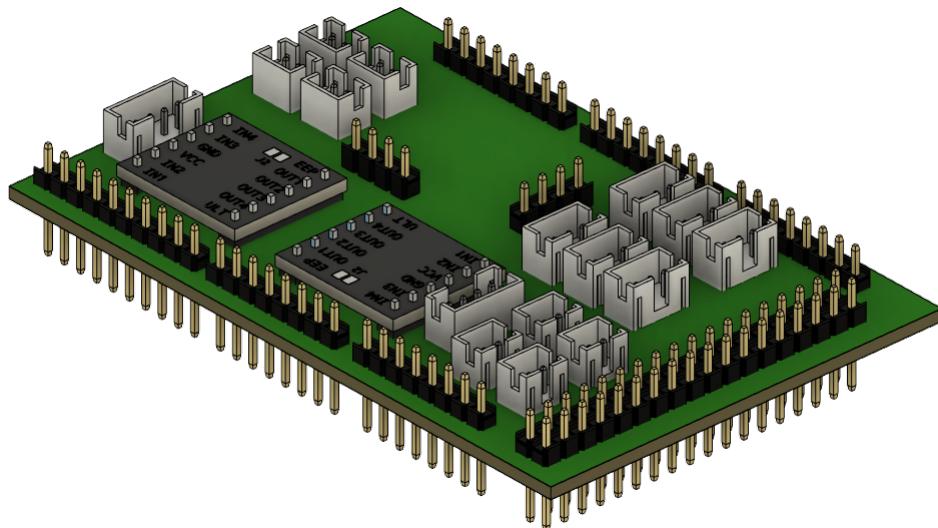


Figura 3.27: Modelo 3D de la PCB sin montaje

El montaje de la PCB se realizó mediante soldadura manual con estaño, asegurando la correcta fijación de los componentes y de las conexiones (figura 3.28). Para la conexión de cables externos se emplearon conectores JST, pensados para que en un posible mantenimiento sean desmontables. La secuencia incluyó la soldadura de componentes con terminales para orificios, seguida de una inspección visual para verificar las soldaduras y prevenir cortocircuitos, así como pruebas eléctricas de continuidad y medición de voltaje. Para este proceso se utilizaron herramientas como estación de soldadura con control de temperatura, estaño, pasta para soldar y multímetro.

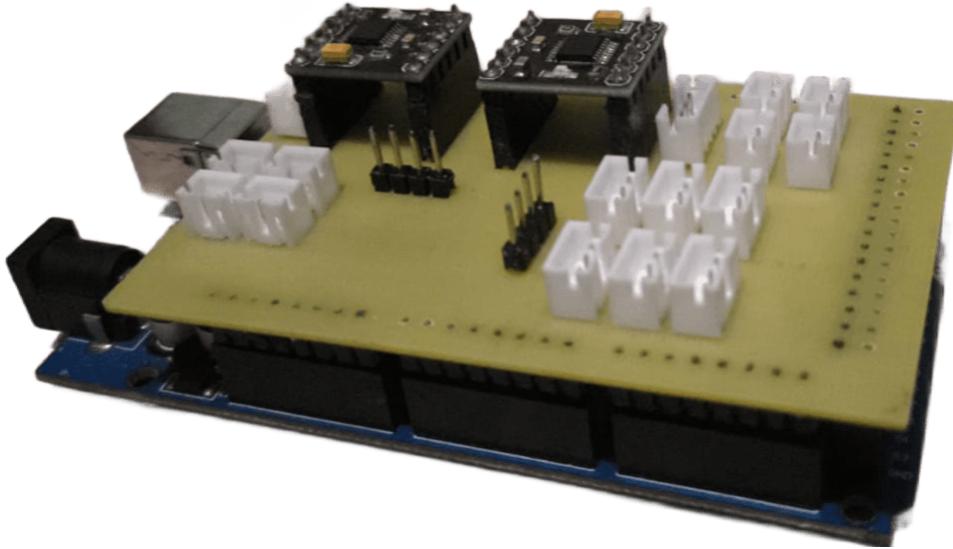


Figura 3.28: PCB completamente montada

# Capítulo 4

## Modelado y Control Cinemático

Este capítulo aborda el modelado y control cinemático del robot omnidireccional y del manipulador de 5 GDL. Se desarrollan las estrategias de control para el robot móvil, se implementa la metodología de Denavit-Hartenberg para la cinemática directa del manipulador, y se calcula la cinemática inversa mediante el método geométrico y pseudo desacoplo cinemático. El objetivo es integrar ambos modelos para lograr una operación coordinada y síncrona del sistema completo, validando su funcionamiento a través de simulaciones realizadas en *CoppeliaSim*.

### 4.1. Modelo del robot omnidireccional

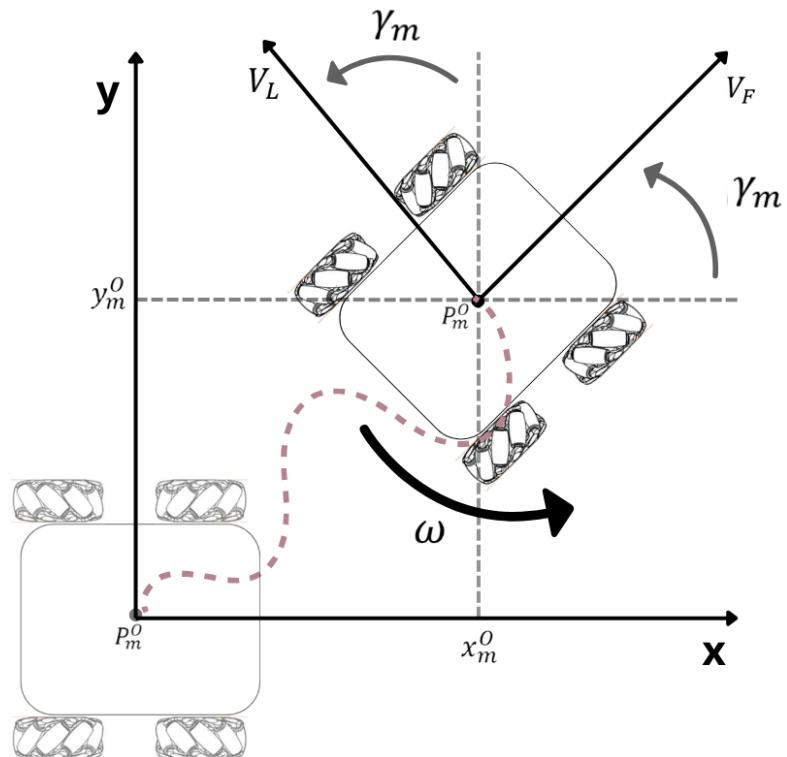


Figura 4.1: Diagrama del modelo cinemático de un robot omnidireccional.

En el diagrama 4.1 se representa el movimiento del robot en un plano bidimensional  $(x, y)$ . El punto central del robot,  $P_m^O$ , es la referencia para su control y desplazamiento visto desde el punto de origen del plano. Se consideran tres componentes de movimiento: la velocidad frontal ( $V_F$ ), la velocidad lateral ( $V_L$ ) y la velocidad angular ( $\omega$ ). Estos parámetros determinan la posición del robot en los ejes  $x$ ,  $y$  y su orientación  $\gamma$ , permitiendo su desplazamiento y rotación dentro del plano.

## 4.2. Control del robot omnidireccional

Para describir el movimiento del robot, se emplea un modelo cinemático basado en su orientación con respecto a un sistema de referencia global. Esto implica el uso de ecuaciones de transformación de velocidades para expresar la relación entre los componentes de velocidad y la posición en el plano.

Sabiendo que  $V_F$ ,  $V_L$  y  $\omega$  son los vectores de velocidad del móvil, y lo que se busca es determinar la posición del robot, se parte de la derivada de  $x_m^O$ ,  $y_m^O$  y  $\gamma_m^O$  respecto al tiempo. Para encontrar la velocidad  $\dot{x}_m^O$ , se descomponen los vectores  $V_F$  y  $V_L$  en el eje  $x$ . De manera similar, para encontrar  $\dot{y}_m^O$ , se descomponen estos vectores en el eje  $y$ , por otro lado, la velocidad de cambio de la orientación  $\dot{\gamma}$  está determinada por la velocidad angular  $\omega$  (4.1).

$$\begin{aligned}\dot{x}_m^O &= V_F \cos \gamma_m^O - V_L \sin \gamma_m^O \\ \dot{y}_m^O &= V_F \sin \gamma_m^O + V_L \cos \gamma_m^O \\ \dot{\gamma}_m^O &= \omega\end{aligned}\quad (4.1)$$

De esta manera, las ecuaciones (4.1) pueden representarse en forma matricial como se muestra en la matriz (4.2).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m^O \\ \dot{y}_m^O \\ \dot{\gamma}_m^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_m^O & -\sin \gamma_m^O & 0 \\ \sin \gamma_m^O & \cos \gamma_m^O & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_F \\ V_L \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Donde se puede observar que, para este caso en el que se analiza el modelo en el punto centrado del robot, existe una matriz que coincide con la matriz de rotación en el eje z ( $R_z$ ). A partir de esta matriz, es posible encontrar las variables  $V_F$ ,  $V_L$ ,  $\omega$  utilizando la inversa de la matriz de rotación ( $R_z$ ).

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \gamma_m^O & -\sin \gamma_m^O & 0 \\ \sin \gamma_m^O & \cos \gamma_m^O & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dado que la matriz de rotación es ortonormal, se cumple que  $\det(A) = 1$ . Esto implica que la matriz (4.3) preserva longitudes y ángulos, y además, por ser ortogonal, se cumple que  $A^T = A^{-1}$ , es decir, la matriz inversa es su propia transpuesta (4.4).

$$R_z^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_m^O & \sin \gamma_m^O & 0 \\ -\sin \gamma_m^O & \cos \gamma_m^O & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Obteniendo la matriz inversa (4.4) podemos despejar las ecuaciones (4.2) y encontrar los valores de  $V_F, V_L, \omega$  como podemos observar de manera matricial (4.5) y representada como ecuaciones (4.6).

$$\begin{bmatrix} VF \\ VL \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_m^O & \sin \gamma_m^O & 0 \\ -\sin \gamma_m^O & \cos \gamma_m^O & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m^O \\ \dot{y}_m^O \\ \dot{\gamma}_m^O \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} V_F &= \dot{x}_m^O \cos \gamma_m^O + \dot{y}_m^O \sin \gamma_m^O \\ V_L &= -\dot{x}_m^O \sin \gamma_m^O + \dot{y}_m^O \cos \gamma_m^O \\ \omega &= \dot{\gamma}_m^O \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando que el control de regulación implica que la derivada del punto deseado es cero ( $\dot{x}_{Pd}^O, \dot{y}_{Pd}^O, \dot{\gamma}_{Pd}^O$ ), es decir, que el punto deseado es estático y no cambia con respecto al tiempo. Matemáticamente, esto se representa con  $\dot{x}_{Pd}^O = 0, \dot{y}_{Pd}^O = 0, \dot{\gamma}_{Pd}^O = 0$ , lo que significa que el control propuesto solo busca llevar la posición del robot ( $P_m^O$ ) al punto deseado y no seguir una trayectoria en movimiento. Debido a que el punto deseado es estático, el control se reduce a minimizar el error de posición y orientación, dejando las ecuaciones de la siguiente manera (4.7).

$$\begin{aligned} U_x &= \dot{x}_m^O = \dot{x}_{Pd}^O - K(x_m^O - x_{Pd}^O) \\ U_y &= \dot{y}_m^O = \dot{y}_{Pd}^O - K(y_m^O - y_{Pd}^O) \\ U_\gamma &= \dot{\gamma}_m^O = \dot{\gamma}_{md}^O - K(\gamma_m^O - \gamma_{md}^O) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde:

- $K$ : ganancia de control.
- $\mathbf{p}_m^O = [x_m^O, y_m^O, \gamma_m^O]$ : vector de posición actual.
- $\mathbf{p}_{Pd}^O = [x_{Pd}^O, y_{Pd}^O, \gamma_{md}^O]$ : vector de posición deseada.

La variable  $\mathbf{U} = [U_x, U_y, U_\gamma]$  representa la señal de control, es decir, el conjunto de velocidades lineales y angulares que se deben aplicar al sistema para llevar al robot desde su estado actual al deseado. Dado que este punto es estático, las señales de control corresponden a:

- $U_x = \dot{x}_m^O$  es la velocidad de control en el eje  $x$ .
- $U_y = \dot{y}_m^O$  es la velocidad de control en el eje  $y$ .
- $U_\gamma = \dot{\gamma}_m^O$  es la velocidad angular de control.

De modo que las ecuaciones que describen los vectores de velocidad tanto frontal, lateral, como angular son representadas de la siguiente manera(4.8).

$$\begin{aligned} V_F &= U_x \cos \gamma_m^O + U_y \sin \gamma_m^O \\ V_L &= -U_x \sin \gamma_m^O + U_y \cos \gamma_m^O \\ \omega &= U_\gamma \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalmente, para poder controlar cada rueda del omnidireccional se usan las ecuaciones de odometría presentadas en el capítulo 2.7 las cuales describen la velocidad de cada rueda para llegar al punto deseado.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= V_F - V_L - (L + b) \omega \\
 v_2 &= V_F + V_L + (L + b) \omega \\
 v_3 &= V_F + V_L - (L + b) \omega \\
 v_4 &= V_F - V_L + (L + b) \omega
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

#### 4.2.1. Simulación en *CoppeliaSim*

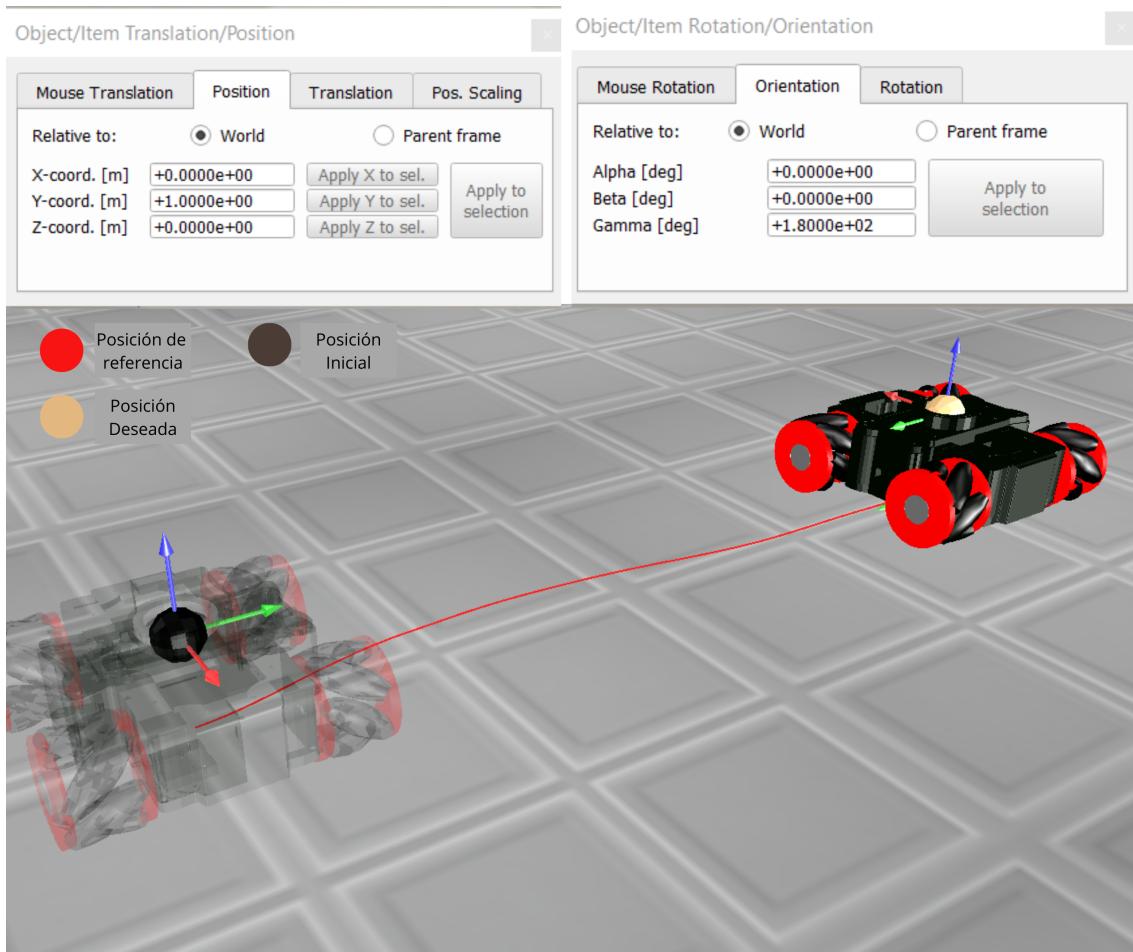


Figura 4.2: Simulación del vehículo moviéndose a un punto deseado.

La simulación fue implementada en *CoppeliaSim*, donde el ensamblaje robótico se exportó en formato URDF y se implementó el algoritmo de control cinemático. La figura 4.2 evidencia la correlación entre el modelo cinemático teórico y el comportamiento simulado del sistema durante la operación. La interfaz presenta la trayectoria del robot móvil mediante un vector direccional rojo proyectado en el plano cartesiano ( $x, y$ ). El sistema visualiza tres estados

principales: la posición inicial del robot (representada por el modelo transparente en la parte inferior izquierda), la posición de referencia o punto objetivo (indicado en color amarillo), y la posición final alcanzada por el robot (modelo sólido en color negro con elementos rojos). El panel de control izquierdo permite ajustar la posición objetivo del punto de referencia con coordenadas establecidas en  $x = 0,0\text{ m}$  y  $y = 1,00\text{ m}$ . El panel derecho configura los parámetros de orientación deseada, definiendo un ángulo  $\gamma = 180,00^\circ$ .

La figura 4.3 presenta la evolución temporal de las coordenadas cartesianas del robot móvil durante la ejecución de la trayectoria. El análisis de estas curvas permite verificar la estabilidad del controlador cinemático implementado. Se observa que la coordenada  $y_m^O$  (representada mediante la línea verde) presenta un aumento gradual hasta alcanzar el valor de referencia  $y_m^O = 1,00\text{ m}$ , con una respuesta estable y un ascenso hasta mantenerse cerca del objetivo. Inicialmente se observa un comportamiento transitorio antes de estabilizarse en la posición final. La coordenada  $x_m^O$  presenta pequeñas variaciones al inicio del movimiento, que muestra una desviación mínima. Estas desviaciones se reducen progresivamente hasta que  $x$  alcanza su respectivo valor de referencia:  $x_m^O = 0,00\text{ m}$

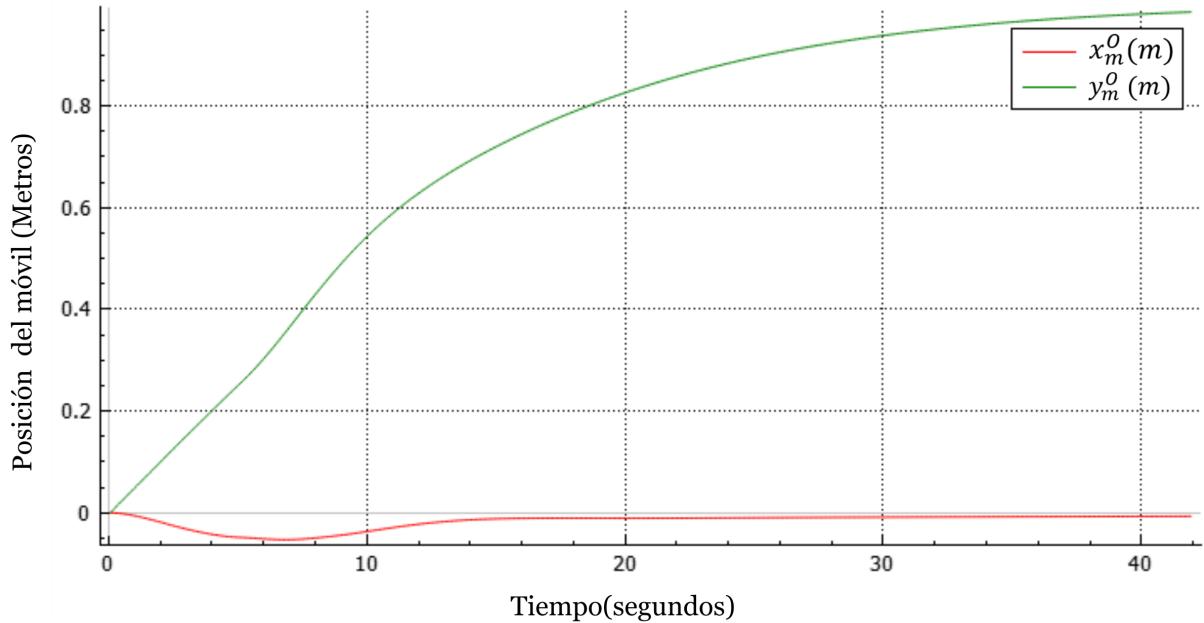


Figura 4.3: Gráfica de posición del móvil en  $x_m^O, y_m^O$

La figura 4.4 muestra cómo cambia a lo largo del tiempo el ángulo  $\gamma$  del robot móvil, expresado en grados. Analizar este ángulo es importante para entender cómo se comporta el robot mientras realiza la maniobra de posicionamiento. El ángulo  $\gamma_m^O$  (línea azul) presenta un aumento progresivo desde  $0^\circ$  hasta alcanzar un valor cercano a  $180^\circ$ , manteniéndose estable posteriormente.

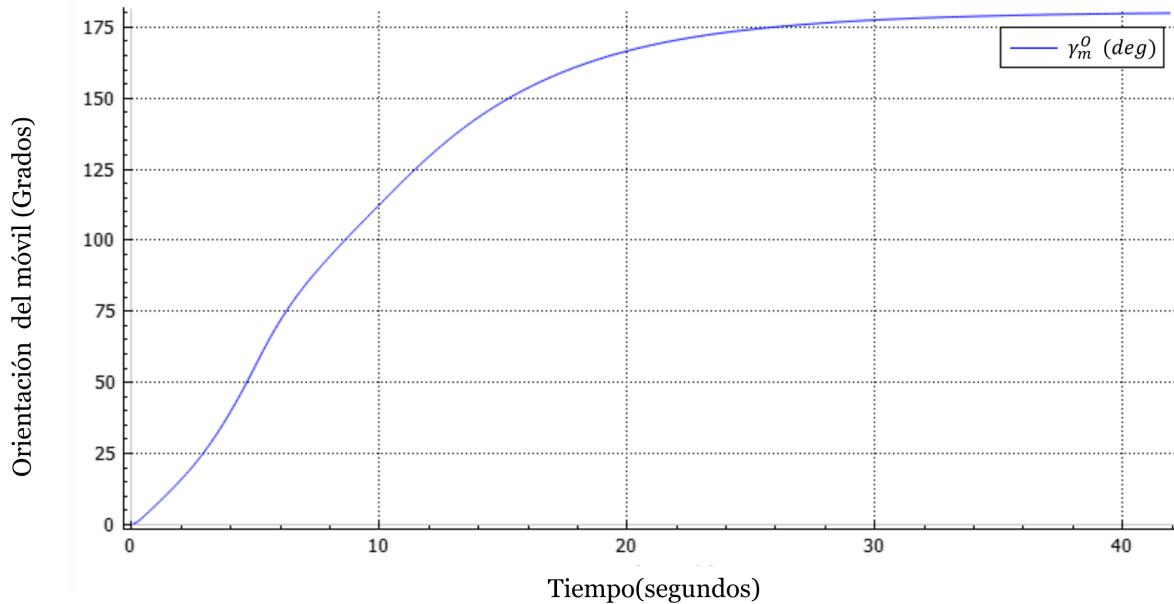


Figura 4.4: Gráfica de movimiento en el ángulo  $\gamma_m^O$

## 4.3. Cinemática Directa 5 GDL

### 4.3.1. Modelado de ejes

En la figura 3.13 se muestran los movimientos que debe realizar el manipulador en cada grado de libertad propuesto. Considerando que el diseño utiliza exclusivamente articulaciones de tipo revoluta, es necesario establecer la orientación adecuada de los ejes coordinados según la metodología de Denavit-Hartenberg.

Siguiendo este método, se debe orientar el eje z en la dirección del movimiento de cada articulación, respetando las condiciones establecidas para la definición de los ejes x, z (el eje y queda determinado implícitamente). La distribución resultante de los sistemas coordinados se presenta en la figura 4.5. Para definir la parametrización del manipulador según la metodología de Denavit Hartenberg, se estableció inicialmente el sistema de referencia base, en este caso la base del móvil  $(x_0^m, y_0^m, z_0^m)$  en la estructura fija del robot, la cual será el punto  $P_m^O$ . A partir de esta referencia, el primer sistema de coordenadas fue definido en el primer eslabón, alineando el sistema de referencias  $z_0$  con el eje de la primera articulación.

El segundo sistema de referencia se ubicó en la siguiente articulación, asegurando que su sistema de referencias  $z_1$  coincidiera con el eje de rotación de dicha articulación. Dado que el eje  $y_1$  quedaba orientado hacia la parte superior, y considerando las convenciones del método de Denavit-Hartenberg, se realizó una rotación sobre el sistema de referencias  $z_1$  para alinear el sistema de referencias  $x_1$  de manera adecuada, permitiendo así el desplazamiento de longitud  $L_1$  a lo largo de este.

Para el tercer sistema de referencia  $(x_2, y_2, z_2)$ , solamente se realizó una rotación de 90 sobre el eje z. Esto logra acomodar el eje x en dirección al desplazamiento en  $L_3$ , manteniendo el eje z con su orientación respecto al movimiento del eslabón.

Para el cuarto sistema de referencia  $(x_3, y_3, z_3)$  se definió manteniendo la misma orientación del sistema anterior sin necesidad de una transformación adicional. Sin embargo, al establecer el sistema de referencia  $(x_4, y_4, z_4)$ , se encontraron restricciones metodológicas que impedían un desplazamiento directo a lo largo de  $L_4$ . Por lo tanto, se optó por mantener la misma orientación del sistema previo, asegurando la continuidad en la secuencia de transformación.

Finalmente, el último sistema de referencia  $(x_5, y_5, z_5)$  se ubicó en el efecto final, alineado con el punto de interés para el control y la ejecución de tareas del manipulador.

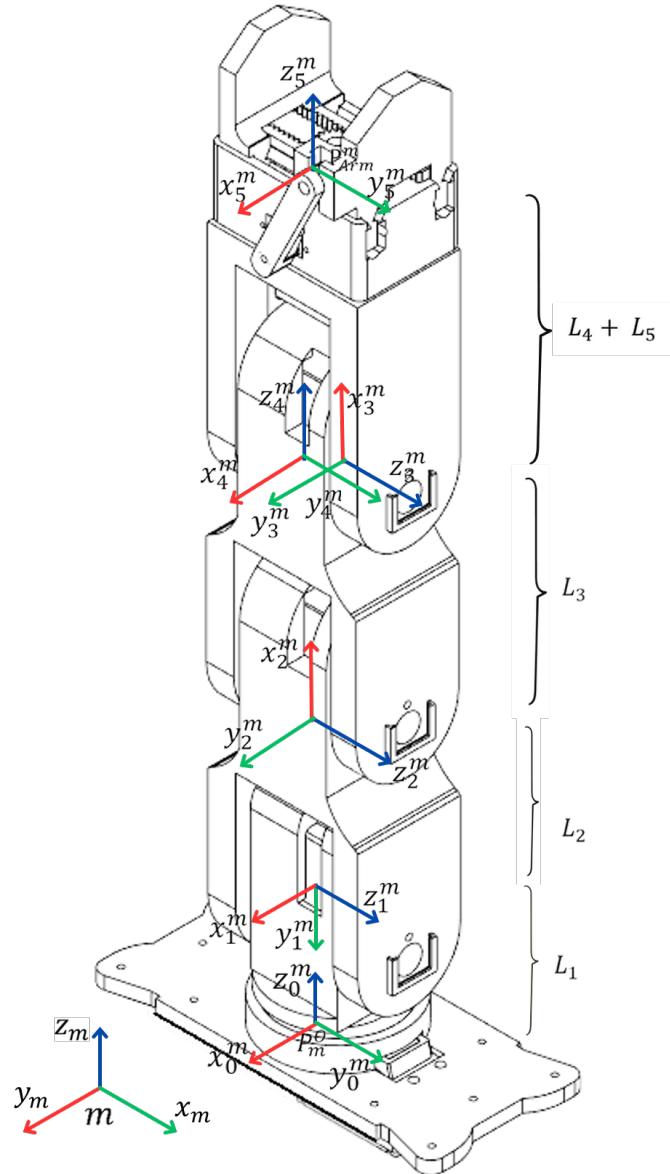


Figura 4.5: Sistema de ejes basado en la metodología de Denavit-Hartenberg.

Tras establecer los ejes coordinados y considerar las restricciones metodológicas de Denavit-Hartenberg, se realizó la parametrización cinemática del manipulador. La tabla 4.1 resume los

parámetros geométricos característicos de cada articulación, los cuales permitieron calcular las transformaciones homogéneas entre sistemas de referencia consecutivos.

Tabla 4.1: Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg

$i$	$q_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$L_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$q_2 + \frac{\pi}{2}$	0	$L_2$	0
3	$q_3$	0	$L_3$	0
4	$q_4 - \frac{\pi}{2}$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	$q_5$	$L_4 + L_5$	0	0

### 4.3.2. Cálculo de la matriz de transformación

Una vez obtenida la tabla (4.1) de Denavit-Hartenberg, podemos encontrar la matriz de transformación de nuestro sistema del punto que se desea controlar, en este caso el efecto final visto en nuestro sistema de referencia 0, ubicado en la base del manipulador, quedando la matriz de transformación descrita como  $(T_5^0)$ . Dicha matriz está construida a partir de la multiplicación de cada sistema de referencia y los movimientos realizados en la tabla de Denavit-Hartenberg. Por ende, la expresión queda representada en la ecuación (4.10)

$$T_5^0 = T_1^0 * T_2^1 * T_3^2 * T_4^3 * T_5^4 \quad (4.10)$$

Cada término representa la matriz de transformación generada a partir de la matriz de transformación descrita por Denavit-Hartenberg para el eje visto en el punto anterior. De modo que las siguientes expresiones son la representación de cada matriz de transformación.

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & L_2 \cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & L_2 \sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T_3^2 &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & L_3 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & L_3 \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T_4^3 &= \begin{bmatrix} \cos\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(q_4 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T_5^4 &= \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 & 0 \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Finalmente, la multiplicación presentada en la ecuación 4.10, tras sustituir y multiplicar los términos (4.11), resulta en la matriz de transformación homogénea ( $T_0^5$ ) que se muestra a continuación. Esta matriz representa la transformación completa desde el sistema de referencia inicial (0) hasta el efecto final (5), integrando los movimientos y longitudes de cada articulación del manipulador robótico. La matriz resultante contiene los elementos que describen la orientación y posición del efecto final respecto al sistema de referencia base, considerando todas las transformaciones geométricas definidas previamente en la tabla de Denavit-Hartenberg.

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & r_{1,4} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & r_{2,4} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & r_{3,4} \\ r_{4,1} & r_{4,2} & r_{4,3} & r_{4,4} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) - \sin(q_1) \sin(q_5) - (\cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \\
&\quad \sin(q_4)) - \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3), \\
r_{1,2} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - (\cos(q_5) \\
&\quad \sin(q_1)) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5), \\
r_{1,3} &= -\frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \\
r_{1,4} &= -\cos(q_1) \left( L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4) \right), \\
r_{2,1} &= \cos(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) - (\cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
&\quad \sin(q_4)) - \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3), \\
r_{2,2} &= \cos(q_1) \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + (\cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
&\quad \sin(q_5)) + \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,3} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4), \\
r_{2,4} &= -\sin(q_1) \left( L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4) \right), \\
r_{3,1} &= \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5), \\
r_{3,2} &= \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5), \\
r_{3,3} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4), \\
r_{3,4} &= L_1 + L_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos(q_2) + L_5 \cos(q_2 + q_3 + q_4), \\
r_{4,1} &= 0, \quad r_{4,2} = 0, \quad r_{4,3} = 0, \quad r_{4,4} = 1.
\end{aligned}$$

De la matriz de transformación homogénea ( $T_0^5$ ) expresada en la ecuación (4.12), para determinar la posición del manipulador mediante cinemática directa, son de interés únicamente los componentes  $r_{1,4}, r_{2,4}, r_{3,4}$  de la matriz, los cuales representan los vectores de traslación  $tx$ ,  $ty$  y  $tz$  del manipulador. Estos vectores de posición permiten calcular las coordenadas cartesianas del efecto final respecto al sistema de referencia base, expresados mediante las siguientes ecuaciones (4.13).

$$\begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(q_1)(L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\ -\sin(q_1)(L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\ L_1 + L_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos(q_2) + L_5 \cos(q_2 + q_3 + q_4) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Expresadas de forma individual como ecuaciones y su representación en el espacio respecto a la ase móvil (4.14).

$$\begin{aligned}
tx_{arm}^m &= -\cos(q_1)(L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
ty_{arm}^m &= -\sin(q_1)(L_3 \sin(q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_2) + L_5 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
tz_{arm}^m &= L_1 + L_3 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos(q_2) + L_5 \cos(q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Con las ecuaciones (4.14) se puede determinar la posición del efecto final en el sistema de coordenadas  $tx_{Arm}^m, ty_{Arm}^m, tz_{Arm}^m$ . Sin embargo, para caracterizar completamente su configuración espacial, es necesario establecer la orientación del mismo. Para esto se requiere encontrar una ecuación que relacione los ángulos de orientación ( $\alpha_{Arm}^m, \beta_{Arm}^m, \gamma_{Arm}^m$ ), con los ángulos asignados en cada eje ( $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ ). Esto con el fin de encontrar el valor de cada ángulo del efecto final visto en la base móvil. Tradicionalmente, estos ángulos representan las rotaciones alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y se pueden obtener mediante una descomposición secuencial de la matriz de rotación. La representación matemática de esta secuencia de rotaciones se expresa mediante la siguiente ecuación (4.15).

$$R_{x,y,z} = R_x(\alpha_{Arm}^m) * R_y(\beta_{Arm}^m) * R_z(\gamma_{Arm}^m) \quad (4.15)$$

Cada expresión queda de la siguiente manera (4.16).

$$\begin{aligned}
 R_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_{Arm}^m) & -\sin(\alpha_{Arm}^m) \\ 0 & \sin(\alpha_{Arm}^m) & \cos(\alpha_{Arm}^m) \end{bmatrix}, \\
 R_y &= \begin{bmatrix} \cos(\beta_{Arm}^m) & 0 & \sin(\beta_{Arm}^m) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_{Arm}^m) & 0 & \cos(\beta_{Arm}^m) \end{bmatrix}, \\
 R_z &= \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{Arm}^m) & -\sin(\gamma_{Arm}^m) & 0 \\ \sin(\gamma_{Arm}^m) & \cos(\gamma_{Arm}^m) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

La matriz de rotación dada corresponde a una parametrización en términos de los ángulos de Euler  $\alpha_{Arm}^m$ ,  $\beta_{Arm}^m$  y  $\gamma_{Arm}^m$ , los cuales representan rotaciones sucesivas alrededor de los ejes coordenados. Para extraer estos ángulos, se analiza la estructura de la matriz obtenida en la ecuación 4.17.

$$R_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{Arm}^m) \cos(\gamma_{Arm}^m) & -\cos(\beta_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m) & \sin(\beta_{Arm}^m) \\ \cos(\alpha_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m) + (\cos(\gamma_{Arm}^m) \sin(\alpha_{Arm}^m) \sin(\beta_{Arm}^m)) & \cos(\alpha_{Arm}^m) \cos(\gamma_{Arm}^m) - (\sin(\alpha_{Arm}^m) \sin(\beta_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m)) & (-\cos(\beta_{Arm}^m) \sin(\alpha_{Arm}^m)) \\ \sin(\alpha_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m) - (\cos(\alpha_{Arm}^m) \cos(\gamma_{Arm}^m) \sin(\beta_{Arm}^m)) & \cos(\gamma_{Arm}^m) \sin(\alpha_{Arm}^m) + (\cos(\alpha_{Arm}^m) \sin(\beta_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m)) & (\cos(\alpha_{Arm}^m) \cos(\beta_{Arm}^m)) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Los ángulos de Euler se pueden obtener a partir de la relación entre los elementos de la matriz y las funciones trigonométricas:

### Cálculo de $\beta_{Arm}^m$

El elemento (1, 3) de la matriz nos proporciona la ecuación (4.18).

$$R_{x,y,z}(1, 3) = \sin(\beta_{Arm}^m) \tag{4.18}$$

Por lo tanto, el ángulo  $\beta_{Arm}^m$  se obtiene en la ecuación (4.19).

$$\beta_{Arm}^m = \arcsin(R_{x,y,z}(1, 3)) \tag{4.19}$$

### Cálculo de $\alpha_{Arm}^m$

A partir de la tercera columna de la matriz, se observa en (4.20).

$$R_{x,y,z}(2, 3) = -\cos(\beta_{Arm}^m) \sin(\alpha_{Arm}^m), \quad R_{x,y,z}(3, 3) = \cos(\alpha_{Arm}^m) \cos(\beta_{Arm}^m) \tag{4.20}$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene (4.21):

$$\tan(\alpha_{Arm}^m) = \frac{R_{x,y,z}(2, 3)}{R_{x,y,z}(3, 3)} \quad (4.21)$$

De donde se deduce:

$$\alpha_{Arm}^m = \arctan 2(-R_{x,y,z}(2, 3), R_{x,y,z}(3, 3)) \quad (4.22)$$

### Cálculo de $\gamma_{Arm}^m$

Considerando la primera fila de la matriz (4.23):

$$R_{x,y,z}(1, 1) = \cos(\beta_{Arm}^m) \cos(\gamma_{Arm}^m), \quad R_{x,y,z}(1, 2) = -\cos(\beta_{Arm}^m) \sin(\gamma_{Arm}^m) \quad (4.23)$$

Se obtiene (4.24):

$$\tan(\gamma_{Arm}^m) = \frac{-R_{x,y,z}(1, 2)}{R_{x,y,z}(1, 1)} \quad (4.24)$$

Por lo que el ángulo  $\gamma_{Arm}^m$  es:

$$\gamma_{Arm}^m = \arctan 2(-R_{x,y,z}(1, 2), R_{x,y,z}(1, 1)) \quad (4.25)$$

### Expresión Final de los Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler extraídos de la matriz de rotación quedan definidos como (4.26):

$$\begin{aligned} \beta_{Arm}^m &= \arcsin(R_{x,y,z}(1, 3)) \\ \alpha_{Arm}^m &= \arctan 2(-R_{x,y,z}(2, 3), R_{x,y,z}(3, 3)) \\ \gamma_{Arm}^m &= \arctan 2(-R_{x,y,z}(1, 2), R_{x,y,z}(1, 1)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Estos valores permiten recuperar los parámetros de orientación a partir de la matriz de rotación dada.

Una vez obtenidas las ecuaciones, se establece que la matriz de ángulos de Euler es la misma que la matriz de rotación obtenida en la matriz de transformación mediante el método de Denavit-Hartenberg (4.12) igualándolo de la siguiente manera (4.27).

$$R_{x,y,z} = R_0^5 \quad (4.27)$$

Para ello, es necesario obtener la matriz de rotación  $3 \times 3$  a partir de la matriz de transformación  $T_0^5$  (4.12). Los elementos  $T_0^5(1, 4)$ ,  $T_0^5(2, 4)$  y  $T_0^5(3, 4)$  forman un vector de posición, por lo que la matriz de rotación se extrae desde  $T_{1,1}$  hasta  $T_{3,3}$ , quedando:

$$R_0^5 = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

con

$$\begin{aligned}
 r_{1,1} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) - \sin(q_1) \sin(q_5) - (\cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \\
 &\quad \sin(q_4)) - \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3), \\
 r_{1,2} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - (\cos(q_5) \\
 &\quad \sin(q_1)) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5), \\
 r_{1,3} &= -\frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \\
 r_{2,1} &= \cos(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) - (\cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
 &\quad \sin(q_4)) - \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3), \\
 r_{2,2} &= \cos(q_1) \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + (\cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \\
 &\quad \sin(q_5)) + \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5), \\
 r_{2,3} &= \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4), \\
 r_{3,1} &= \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5), \\
 r_{3,2} &= \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5), \\
 r_{3,3} &= \cos(q_2 + q_3 + q_4),
 \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones 4.19, 4.22 y 4.25, y obteniendo los valores de  $R_0^5$  a partir de la ecuación 4.28, se obtienen las ecuaciones (4.29):

$$\begin{aligned}
 \beta_{Arm}^m &= \sin^{-1} \left( -\frac{1}{2} \cdot \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cdot \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right) \\
 \alpha_{Arm}^m &= \tan_2^{-1} \left( \frac{-\left(\frac{1}{2} \cdot \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cdot \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4)\right)}{\cos(q_2 + q_3 + q_4)} \right) \quad (4.29) \\
 \gamma_{Arm}^m &= \text{atan2} \left( -\cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) \right. \\
 &\quad \left. - \cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + (\cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \right. \\
 &\quad \left. \sin(q_3) \sin(q_5)), \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) - \sin(q_1) \sin(q_5) - (\cos(q_1) \right. \\
 &\quad \left. \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4)) - \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) - (\cos(q_1) \right. \\
 &\quad \left. \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3)) \right)
 \end{aligned}$$

Al evaluar las ecuaciones de orientación del efecto final, se identifica que cuando  $\beta_{Arm}^m = \frac{\pi}{2}$ , el sistema experimenta una condición particular en la representación mediante ángulos de Euler. En este caso, la matriz de rotación pierde una de sus soluciones únicas, lo que puede provocar que los valores de  $\alpha_{Arm}^m$  y  $\gamma_{Arm}^m$  se vuelvan ambiguos o cambien de manera abrupta.

En términos cinemáticos, bajo la convención Z,Y,X para los ángulos de Euler, el hecho de que  $\beta_{Arm}^m = \frac{\pi}{2}$  implica que el eje intermedio (y) queda alineado con el eje z del efecto. Esto

significa que la orientación del efecto ya no puede representarse de manera única mediante los mismos valores de  $\alpha_{Arm}^m$  y  $\gamma_{Arm}^m$ , pues distintos pares de valores pueden producir la misma orientación.

Para solucionar esta ambigüedad, se adopta la convención de fijar  $\alpha_{Arm}^m = 0$ . Esta elección permite eliminar la redundancia en la representación de la orientación y garantiza que  $\gamma_{Arm}^m$  sea el único ángulo necesario para definir la rotación restante.

Dado que  $\alpha_{Arm}^m = 0$  y  $\beta_{Arm}^m = \frac{\pi}{2}$ , es posible evaluar la matriz  $R_{x,y,z}$  en la ecuación 4.17, obteniendo la siguiente expresión (4.30):

$$R_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\gamma_{Arm}^m) & \cos(\gamma_{Arm}^m) & 0 \\ 0 & \sin(\gamma_{Arm}^m) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Para encontrar el valor de  $\gamma_{Arm}^m$ , utilizamos los elementos de la matriz  $R_{21}$  y  $R_{22}$ , que están relacionados con  $\sin(\gamma_{Arm}^m)$  y  $\cos(\gamma_{Arm}^m)$ . De la matriz, tenemos (4.31):

$$R_{21} = \sin(\gamma_{Arm}^m), \quad R_{22} = \cos(\gamma_{Arm}^m) \quad (4.31)$$

La relación entre estos elementos es (4.32):

$$\gamma_{Arm}^m = \arctan\left(\frac{R_{21}}{R_{22}}\right) \quad (4.32)$$

Al sustituir los valores de la ecuación 4.28 en las posiciones correspondientes, es posible determinar el ángulo  $\gamma_{Arm}^m$ , dejando definidos los otros dos ángulos según su evaluación en la matriz 4.17, obteniendo la siguiente expresión (4.33).

$$\begin{aligned} \beta_{Arm}^m &= \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{Arm}^m = 0 \\ \gamma_{Arm}^m &= \text{atan2}\left(\frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5), \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) - \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5)\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

De esta manera, se obtienen las seis ecuaciones necesarias para determinar la posición y orientación del manipulador a partir de los ángulos de entrada. Esto permite verificar si la ubicación es correcta e incluso considerar la variable asociada a la ambigüedad cuando  $\beta_{Arm}^m = \frac{\pi}{2}$ , asegurando una representación de la orientación.

### 4.3.3. Espacio de trabajo

La figura 4.6 muestra el espacio de trabajo del manipulador obtenido a partir del modelo cinemático directo. En esta representación tridimensional se observan los puntos alcanzables por el efecto final considerando las combinaciones de las variables articulares dentro de sus límites mecánicos.

La distribución de colores corresponde a la altura del efecto final (eje Z), donde los tonos azules representan posiciones más bajas y los tonos rojos las más elevadas. La forma semi-esférica del conjunto indica el rango angular de los eslabones y la configuración geométrica del

brazo, evidenciando que el manipulador puede operar eficientemente dentro de un volumen que abarca aproximadamente desde los 0.1 m hasta los 0.6 m de altura.

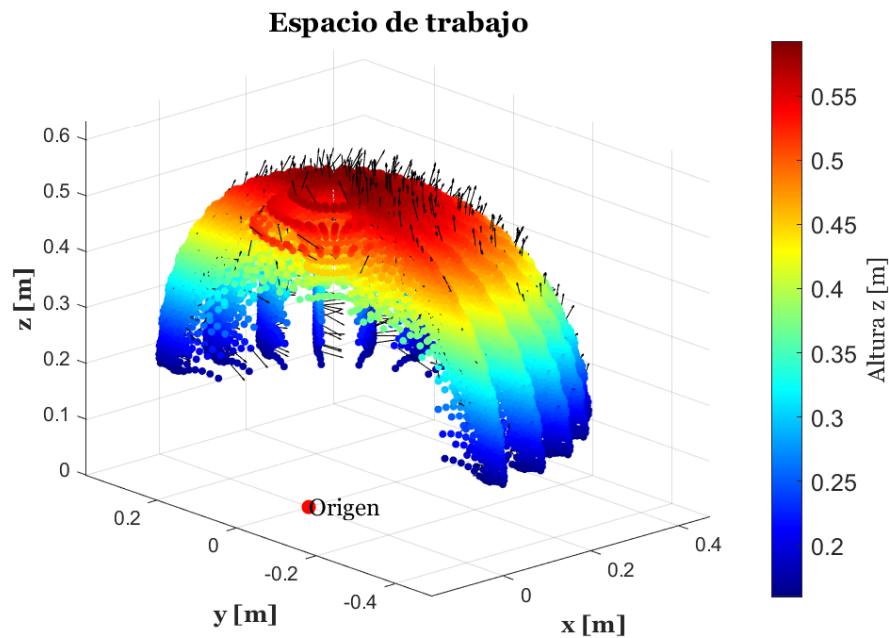


Figura 4.6: Espacio trabajo manipulador.

#### 4.4. Cinemática inversa

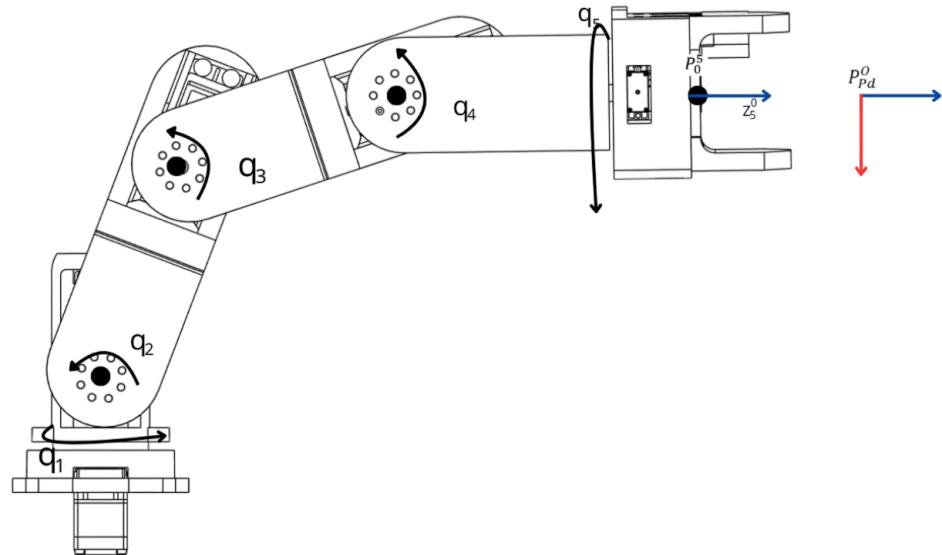


Figura 4.7: Esquema del manipulador robótico mostrando los sistemas de coordenadas y articulaciones.

La cinemática inversa calcula los ángulos necesarios en cada articulación para que un sistema mecánico posicione su efecto final en un punto específico con coordenadas  $(x, y, z)$  y orientación  $(\alpha, \beta, \gamma)$  donde cada posición deseada es vista desde el origen del mundo. Es esencial en robótica para determinar cómo mover las articulaciones para alcanzar posiciones deseadas. En este caso el origen del sistema es la base del robot móvil  $(x_{Arm}^m, y_{Arm}^m, z_{Arm}^m, \alpha_{Arm}^m, \beta_{Arm}^m, \gamma_{Arm}^m)$ , y el punto deseado en el sistema visto desde el origen  $(x_{Pd}^O, y_{Pd}^O, z_{Pd}^O, \alpha_{Pd}^O, \beta_{Pd}^O, \gamma_{Pd}^O)$ , como se muestra en la figura 4.7.

#### 4.4.1. Cinemática inversa de los primeros 3 GDL

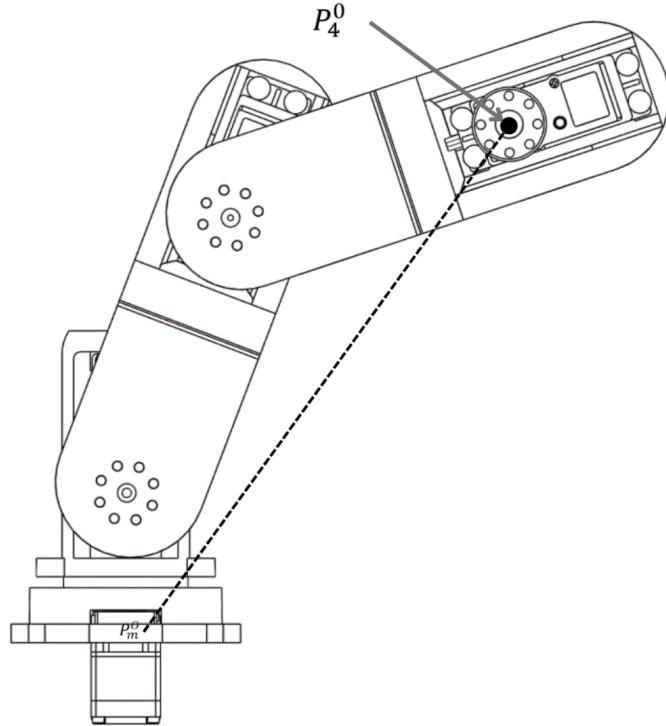


Figura 4.8: Vista lateral del manipulador robótico mostrando la configuración de los eslabones.

Para calcular la cinemática inversa, se utilizará el método geométrico. Para ello, se comenzará considerando únicamente los tres primeros eslabones del manipulador. Esto se debe a que los últimos dos grados de libertad están destinados a la orientación del efecto final y operan principalmente en el eje  $z$  del efecto final, mientras que los tres primeros determinan la posición del extremo del brazo, permitiendo configuraciones como codo arriba o codo abajo, como se muestra en la Figura 4.8.

Para visualizar esta configuración, en la figura 4.9 se muestra la disposición de los eslabones en una posición arbitraria, junto con la representación de los ángulos asociados y el punto  $P_4^0$  es el que se desea controlar.

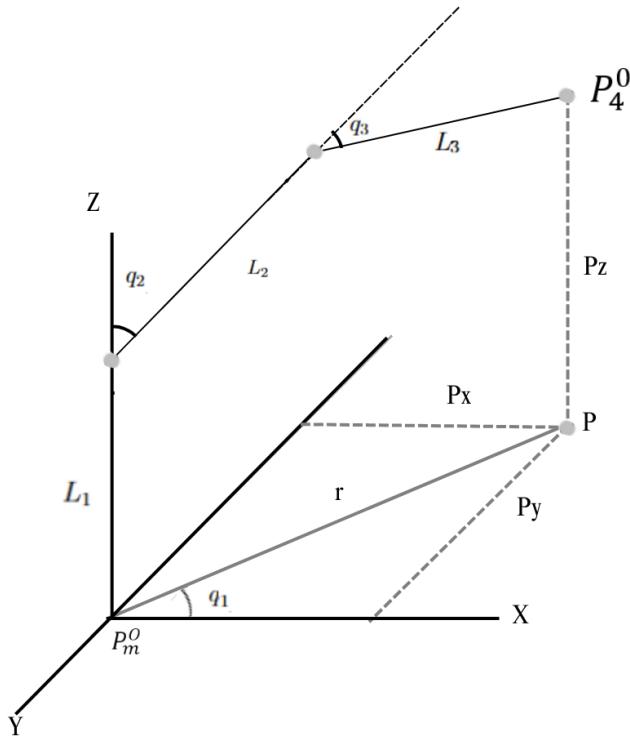


Figura 4.9: Diagrama de los tres primeros eslabones con sus ángulos y proyección.

El primer ángulo  $q_1$  se puede determinar proyectando el punto final  $P_4^0$  en el plano  $x, y$ , obteniendo así sus coordenadas  $P_x$  y  $P_y$ . Aplicando trigonometría, se obtiene que  $q_1$  es el arcotangente de la razón entre  $P_y$  y  $P_x$  como se muestra en la ecuación (4.34).

$$q_1 = \arctan \left( \frac{P_y}{P_x} \right) \quad (4.34)$$

Además, al trazar una línea desde el origen hasta la proyección del punto final, se define la distancia radial  $r$ , cuya expresión se plantea en (4.35).

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (4.35)$$

Para las siguientes ecuaciones, se amplió el área de observación de los eslabones 2 y 3, incluyendo las líneas necesarias para el análisis (figura 4.10). En esta nueva representación, se puede visualizar la distancia radial  $r$  y la diferencia en la coordenada  $z$  del punto final con respecto al primer eslabón ( $P_z - L_1$ ). Asimismo, se define una nueva distancia radial  $r_2$  en este plano, donde se pueden identificar los dos ángulos generados con  $r_2$  ( $\gamma$ ,  $\beta$ ), además del ángulo del eslabón 3 ( $\alpha$ ).

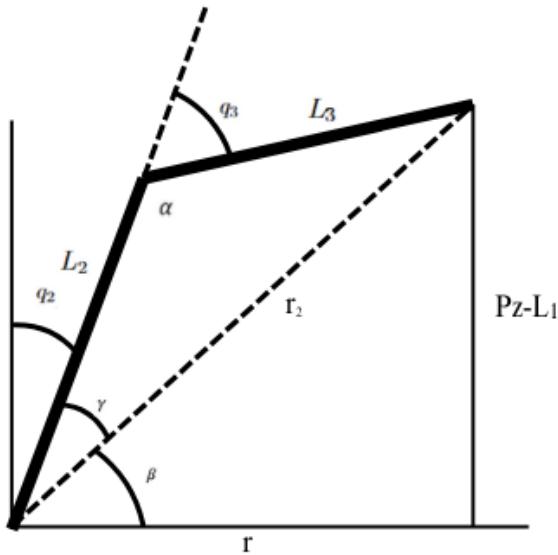


Figura 4.10: Diagrama Visualizando eslabón 2 y 3.

Para el cálculo de la nueva línea radial  $r_2$ , se aplica el teorema de Pitágoras, donde la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado (ecuación 4.36). Al tomar la raíz cuadrada, se obtiene la distancia radial  $r_2$ , como se expresa en la ecuación (4.37).

$$r_2^2 = r^2 + (P_z - L_1)^2 \quad (4.36)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (P_z - L_1)^2} \quad (4.37)$$

Con el triángulo formado por  $r_2$ ,  $r$  y  $(P_z - L_1)$ , se puede obtener el ángulo  $\beta$ , expresado de la siguiente forma (4.38):

$$\beta = \arctan \left( \frac{P_z - L_1}{r} \right) \quad (4.38)$$

Para el cálculo de  $\gamma$ , se aplica la ley de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Donde  $c$  es igual a  $L_3$  debido a su posición con respecto al ángulo  $\gamma$ . La ecuación queda expresada de la siguiente manera 4.39:

$$L_3^2 = L_2^2 + r_2^2 - 2L_2r_2 \cos \gamma \quad (4.39)$$

Despejando la ecuación para  $\gamma$ , se obtiene (4.40):

$$\gamma = \arccos \left( \frac{L_2^2 + r_2^2 - L_3^2}{2L_2r_2} \right) \quad (4.40)$$

Conociendo los dos ángulos, el valor de  $q_2$  se obtiene restando su suma de 90 grados (4.41):

$$q_2 = 90^\circ - (\gamma + \beta) \quad (4.41)$$

Para determinar el ángulo  $q_3$ , se aplica nuevamente la ley de cosenos, donde  $\alpha$  es el ángulo a encontrar y, por geometría,  $r_3$  es el lado correspondiente. La ecuación se expresa en (4.42) y despejado  $\alpha$  en (4.43).

$$r_3^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3 \cos \alpha \quad (4.42)$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{L_2^2 + L_3^2 - r_3^2}{2L_2L_3} \right) \quad (4.43)$$

Finalmente, el ángulo  $q_3$  se obtiene restando  $\alpha$  de 180 grados (4.44):

$$q_3 = 180^\circ - \alpha \quad (4.44)$$

Las ecuaciones para controlar los ángulos  $q_1, q_2, q_3$  a partir de un punto  $P_4^0$  quedan expresadas de la siguiente manera (4.45).

$$\begin{aligned} q_1 &= \arctan \left( \frac{P_y}{P_x} \right) \\ q_2 &= 90^\circ - (\gamma + \beta) \\ q_3 &= 180^\circ - \alpha \end{aligned} \quad (4.45)$$

#### 4.4.2. Posición a controlar y ángulos de orientación

##### Posición a controlar

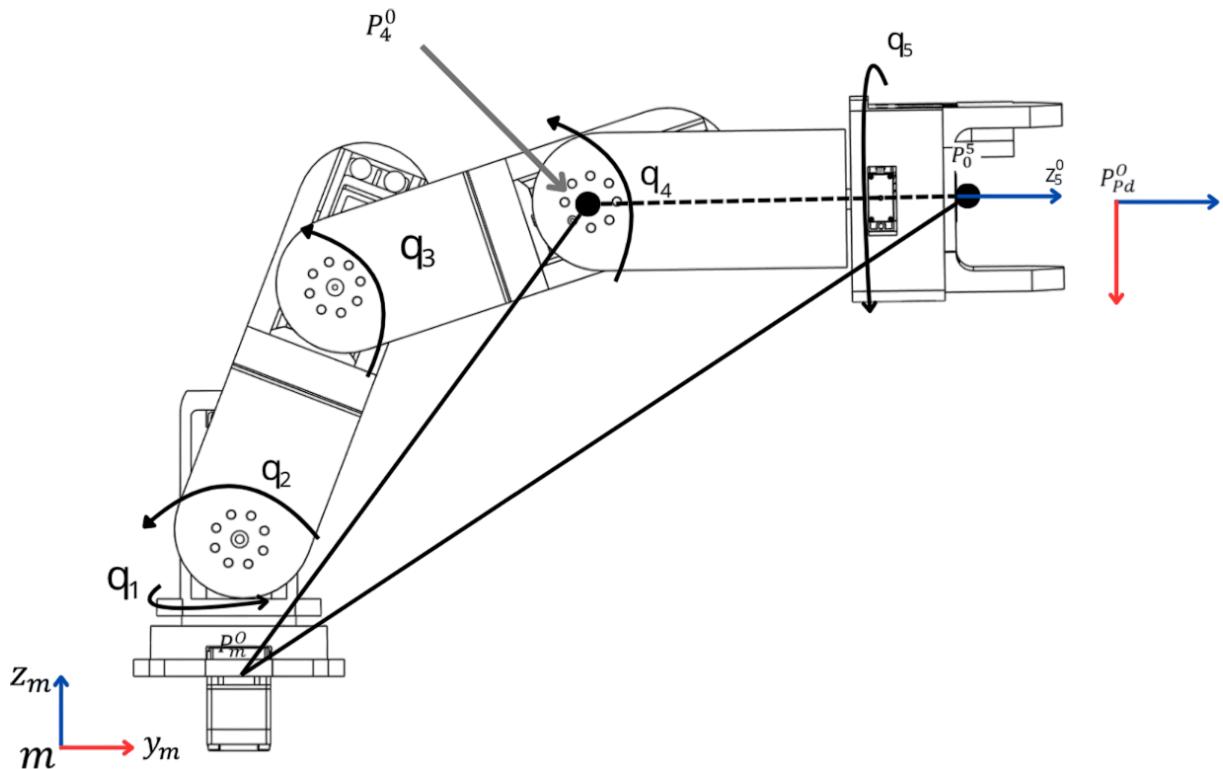


Figura 4.11: Diagrama visualizando los eslabones 4 y 5.

Una vez obtenidas las ecuaciones para calcular los ángulos  $q_1, q_2, q_3$ , es necesario determinar el punto a controlar. En la cinemática inversa de 3 GDL, el efecto final se consideraba en el eslabón número 3. Sin embargo, en un manipulador de 5 GDL, este enfoque no es aplicable, ya que se deben considerar los eslabones 4 y 5.

Siguiendo esta estructura, el punto final del efecto está representado por el punto  $P_0^5$ . Pero también hay que tomar en cuenta la posición del eslabón 3, representada por  $P_0^4$ . El valor de dicho punto es desconocido, lo que significa que desconocemos los valores  $x, y, z$  del punto  $P_0^4$  de la figura 4.9. Es importante destacar que este punto es el que controla todo el manipulador y que su posición debe enviarse a la cinemática inversa de 3 GDL para calcular los ángulos  $q_1, q_2, q_3$ .

Para ello, es necesario realizar un análisis (figura 4.11) basado en el conocimiento del punto final deseado, la distancia de los eslabones y la formulación de una estrategia para determinar la posición  $P_0^4$  a partir de estos valores conocidos. En este sentido, se plantea que:

El vector de posición deseada está representado por  $t_0^5$  (4.46), el cual consta de las coordenadas deseadas en  $x, y, z$ :

$$t_0^5 = t_{Pd} = [x_{Pd}, y_{Pd}, z_{Pd}] \quad (4.46)$$

donde  $t_{Pd}$  representa la posición deseada del efecto final en el espacio cartesiano.

De manera similar, la orientación deseada se expresa mediante los ángulos de rotación  $\alpha_{Pd}, \beta_{Pd}, \gamma_{Pd}$  (4.47). Estos ángulos representan la orientación deseada del efecto final y siguen la convención  $x, y, z$ .

$$O_{Pd} = [\alpha_{Pd}, \beta_{Pd}, \gamma_{Pd}] \quad (4.47)$$

Teniendo en cuenta que la matriz de orientación deseada se obtiene como el producto de las matrices de rotación asociadas a cada uno de estos ángulos en sus respectivos ejes (4.48).

$$R_5^0 = R_x(\alpha_{Pd})R_y(\beta_{Pd})R_z(\gamma_{Pd}) \quad (4.48)$$

Donde  $R_5^0$  representa la matriz de rotación compuesta por la multiplicación de las matrices de rotación elementales de cada eje con sus respectivos ángulos deseados en la orientación (4.49). Las matrices  $R_x(\alpha_{Pd})$ ,  $R_y(\beta_{Pd})$  y  $R_z(\gamma_{Pd})$  se multiplican secuencialmente para obtener la matriz resultante que describe la orientación final del efecto.

$$R_5^0 = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) & -\cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) & \sin(\beta_{Pd}) \\ \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + (\cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) & \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - (\sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) & (-\cos(\beta_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd})) & \sin(\gamma_{Pd})) & \sin(\alpha_{Pd})) \\ \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - (\cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) & \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + (\cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) & (\cos(\alpha_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd})) & \sin(\gamma_{Pd})) & \cos(\beta_{Pd})) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

A partir de esta matriz, se construye la matriz de transformación homogénea deseada.

$$P_5^0 = T_5^0 = \begin{bmatrix} R_5^0 & t_5^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se llegara a conocer la posición  $t_4^0$ , es posible calcular el punto final deseado  $t_5^0$  sumando la contribución de los eslabones 4 y 5, los cuales trabajan en la dirección del eje  $z_5^0$ :

$$t_5^0 = t_4^0 + (L_4 + L_5) \cdot z_5^0 \quad (4.50)$$

Esta ecuación (4.50) nos dice que la posición deseada ( $t_5^0$ ) es la suma de la posición del eslabón 4 y la contribución de los eslabones 4 y 5 en la dirección del eje  $z_5^0$ .

Pero recordemos que el punto  $t_5^0$  es el valor deseado. Entonces, al conocer el valor deseado, la distancia de los eslabones ( $L_4, L_5$ ) y el vector  $z_5^0$  de la transformación de sistemas, se puede despejar la expresión para obtener  $t_4^0$  (4.51):

$$t_4^0 = t_5^0 - (L_4 + L_5) \cdot z_5^0 \quad (4.51)$$

Donde:

$z_5^0$  es la tercera columna de la matriz de rotación  $R_5^0$  ecuación 4.49.

$L_4, L_5$  es la distancia de los eslabones al punto final

$t_5^0$  es conocido por el punto deseado.

$t_4^0$  es el vector de posición sobre el cual se encontraran los ángulos  $q_1, q_2, q_3$

$$z_5^0 = \begin{bmatrix} \sin(\beta_{Pd}) \\ -\cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \\ \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\beta_{Pd}) \end{bmatrix}$$

tomando en cuenta la ecuación (4.51) y sabiendo que  $t_4^0$  es un vector de posición todo se puede expresar de manera matricial, queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5^0 \\ y_5^0 \\ z_5^0 \end{bmatrix} - (L_4 + L_5) \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Una vez calculados los valores  $x_4, y_4, z_4$  del punto  $P_4^0$  (4.52), es posible conocer los valores  $q_1, q_2, q_3$  usando las ecuaciones obtenidas por el método geométrico (4.45)

### Ángulos de orientación

Conociendo los ángulos  $q_1, q_2, q_3$  a partir de la cinemática inversa de 3 GDL, ahora es posible determinar los valores de  $q_4$  y  $q_5$ . Para ello, nos basamos en la tabla de Denavit-Hartenberg (4.1)

$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
$q_1$	$L_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
$q_2 + \frac{\pi}{2}$	0	$L_2$	0
$q_3$	0	$L_3$	0
$q_4 - \frac{\pi}{2}$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
$q_5$	$L_4 + L_5$	0	0

A partir de la multiplicación de las matrices de rotación correspondientes a cada ángulo, se obtiene  $R_5^0$ :

$$R_5^0 = R_1^0 \cdot R_2^1 \cdot R_3^2 \cdot R_4^3 \cdot R_5^4$$

Dado que ya se conocen los valores de  $q_1, q_2, q_3$ , es posible calcular la matriz de transformación  $R_3^0$ :

$$R_3^0 = R_1^0 \cdot R_2^1 \cdot R_3^2$$

Donde todos los valores son conocidos. Además,  $R_5^0$  se puede obtener a partir de la ecuación de orientación deseada (4.48). Por lo tanto, podemos agrupar la expresión y despejarla de la siguiente manera

$$R_5^0 = R_3^0 \cdot R_5^3$$

Despejando queda

$$R_5^3 = (R_3^0)^T \cdot R_5^0$$

quedando de la siguiente forma:

$$R_5^3 = \begin{bmatrix} -\sin(q_2 + q_3) \cos(q_1) & -\sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) & \cos(q_2 + q_3) \\ -\cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) & -\cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) & -\sin(q_2 + q_3) \\ \sin(q_1) & -\cos(q_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) & -\cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) & \sin(\beta_{Pd}) \\ \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + (\cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) & \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - (\sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) & (-\cos(\beta_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd})) & \sin(\gamma_{Pd})) & \sin(\alpha_{Pd})) \\ \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - (\cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) & \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + (\cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) & (\cos(\alpha_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd})) & \sin(\gamma_{Pd})) & \cos(\beta_{Pd})) \end{bmatrix}$$

dando:

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$r_{1,1} = \cos(q_2 + q_3) \left( \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) - \sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) - \sin(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}),$$

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \cos(q_2 + q_3) \left( \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) - \sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\
&\quad (\cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd})) + \sin(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \cos(q_1) \\
&\quad \sin(\gamma_{Pd}), \\
r_{1,3} &= -\sin(q_2 + q_3) \sin(\beta_{Pd}) \cos(q_1) + \sin(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(q_1) \\
&\quad + \cos(q_2 + q_3) \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\beta_{Pd}), \\
r_{2,1} &= -\sin(q_2 + q_3) \left( \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) - \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\
&\quad \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) - \cos(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \\
&\quad \cos(q_1), \\
r_{2,2} &= \cos(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \cos(q_1) \sin(\gamma_{Pd}) - \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \right. \\
&\quad \left. - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) - \sin(q_2 + q_3) \left( \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right. \\
&\quad \left. \sin(\gamma_{Pd}) \right), \\
r_{2,3} &= \cos(q_2 + q_3) \cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(q_1) - \cos(q_2 + q_3) \sin(\beta_{Pd}) \cos(q_1) \\
&\quad - \sin(q_2 + q_3) \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\beta_{Pd}), \\
r_{3,1} &= \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(q_1) - \cos(q_1) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right), \\
r_{3,2} &= -\cos(q_1) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \sin(q_1), \\
r_{3,3} &= \sin(\beta_{Pd}) \sin(q_1) + \cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \cos(q_1).
\end{aligned}$$

También podemos tener  $R_5^3$  de manera simbólica de la tabla de Denavit multiplicando las matrices

$$R_5^3 = R_4^3 \cdot R_5^4$$

Resultado:

$$R_5^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) \sin(q_4) & -\sin(q_4) \sin(q_5) & \cos(q_4) \\ -\cos(q_4) \cos(q_5) & \cos(q_4) \sin(q_5) & \sin(q_4) \\ -\sin(q_5) & -\cos(q_5) & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener los ángulos  $q_4$  y  $q_5$ , podemos usar las siguientes relaciones:  
De la entrada  $r_{(3,1)}$  (usando el elemento  $-\sin(q_5)$ ):

$$\sin(q_5) = -r_{31}$$

De la entrada  $r_{(3,2)}$  (usando el elemento  $-\cos(q_5)$ ):

$$\cos(q_5) = -r_{32}$$

De estas dos ecuaciones podemos resolver para  $q_5$ :

$$q_5 = \text{atan2}(r_{31}, r_{32})$$

Para  $q_4$ , lo obtenemos de la entrada  $r_{(2,3)}$ , que está relacionada con el seno de  $q_4$ :

$$\sin(q_4) = r_{23}$$

Por lo tanto, podemos obtener  $q_4$  de:

$$q_4 = \text{asin}(r_{23})$$

Por lo tanto, se puede sustituir los valores necesarios de la matriz 4.53 que combina los ángulos deseados y calculados previamente, lo que son valores conocidos capaz de ser sustituidos queda de la siguiente manera (4.54).

$$\begin{aligned} q_4 &= \text{asin} \left( \cos(q_2 + q_3) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(q_1) - \cos(q_2 + q_3) \sin(\beta) \cos(q_1) - (\sin(q_2 + q_3) \cos(\alpha) \cos(\beta)) \right) \\ q_5 &= \text{atan2} \left( -[\cos(\beta) \cos(\gamma) \sin(q_1) - \cos(q_1)(\cos(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\gamma) \sin(\alpha) \sin(\beta))], \right. \\ &\quad \left. - [-\cos(q_1)(\cos(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)) - \cos(\beta) \sin(\gamma) \sin(q_1)] \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Finalmente las ecuaciones para controlar cada angulo a partir de un punto deseado quedan descritas de la siguiente forma (4.55).

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{arctan} \left( \frac{P_y}{P_x} \right) \\ q_2 &= 90^\circ - (\gamma + \beta) \\ q_3 &= 180^\circ - \alpha \\ q_4 &= \text{asin} \left( \cos(q_2 + q_3) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(q_1) - \cos(q_2 + q_3) \sin(\beta) \cos(q_1) - (\sin(q_2 + q_3) \cos(\alpha) \cos(\beta)) \right) \\ q_5 &= \text{atan2} \left( -[\cos(\beta) \cos(\gamma) \sin(q_1) - \cos(q_1)(\cos(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\gamma) \sin(\alpha) \sin(\beta))], \right. \\ &\quad \left. - [-\cos(q_1)(\cos(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)) - \cos(\beta) \sin(\gamma) \sin(q_1)] \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

## 4.5. Simulación de Manipulador

La figura 4.12 muestra la simulación del manipulador robótico, a través de la cual se validó el modelo cinemático implementado. En la parte superior de la interfaz se encuentran los controles paramétricos, que permiten definir las coordenadas del punto objetivo, identificado

como *punto deseado*, el cual se representa con una esfera amarilla en el espacio cartesiano tridimensional.

El panel izquierdo permite ingresar la posición del punto deseado, con respecto al sistema de coordenadas global ( $X: -0.1000$  m,  $Y: 0.0000$  m,  $Z: 0.3280$  m). Por su parte, el panel derecho ajusta la orientación deseada del efecto final, destacando el ángulo *beta*, configurado en  $45^\circ$  grados.

En la visualización se observa la postura adoptada por el manipulador para alcanzar el objetivo. El efecto final, marcado con un indicador rojo, intenta coincidir con la posición y orientación establecidas. La trayectoria seguida por el efecto se representa con una curva roja que muestra el historial de sus posiciones.

Se detecta un pequeño desfase entre el punto objetivo y la posición real alcanzada por el efecto final. Esta diferencia se debe a las limitaciones cinemáticas propias de la estructura del manipulador y sus grados de libertad. Sin embargo, los resultados muestran que el modelo cinemático es capaz de dirigir el efecto final hacia la proximidad del punto objetivo, lo que valida el funcionamiento del modelo cinemático y del sistema de control implementado.

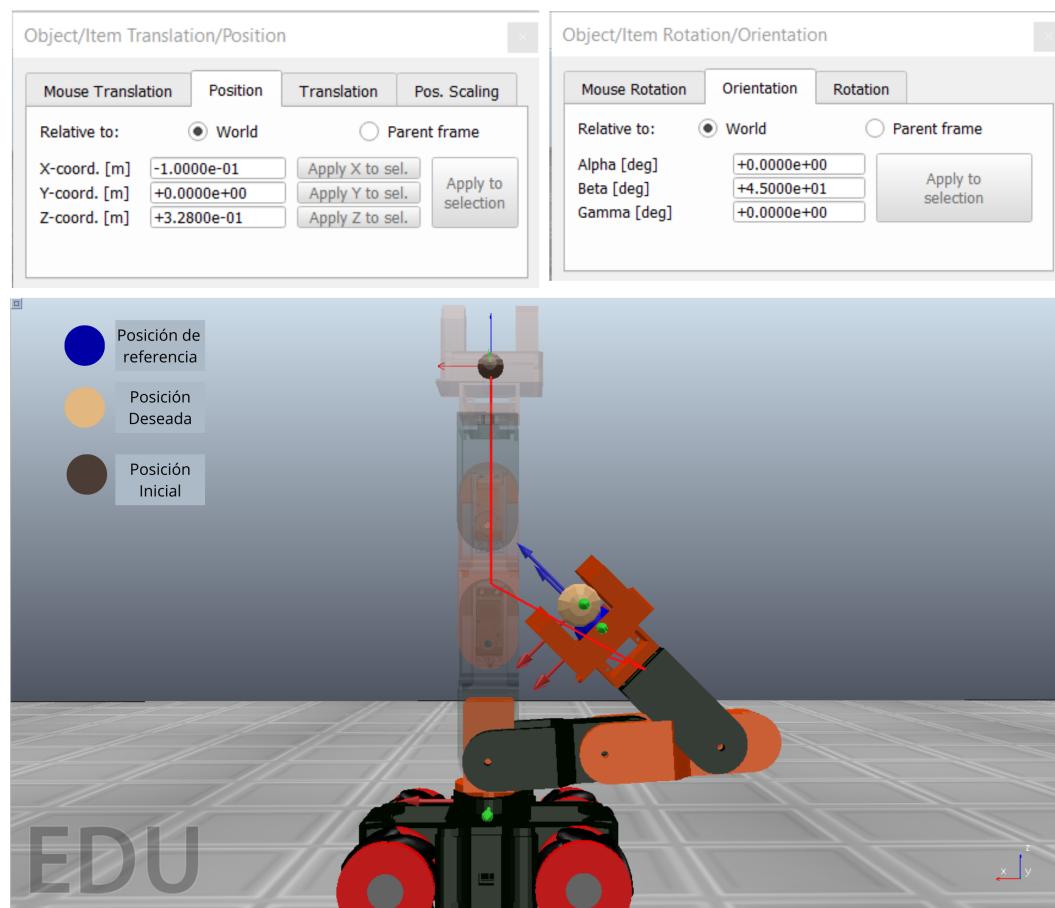


Figura 4.12: Simulación del brazo en el software *CoppeliaSim*.

La figura 4.13 muestra el análisis temporal de las coordenadas del manipulador robótico durante su trayectoria hacia el punto objetivo, graficando las posiciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  en función del tiempo. La coordenada  $x$  (línea roja) presenta un sobrepaso negativo cercano a  $-0.2$  m. Este comportamiento refleja la inercia del sistema junto con la acción del controlador.

La coordenada  $y$  (línea verde) muestra una oscilación inicial con un pico y posteriormente una convergencia hacia valores cercanos a cero, indicando un posicionamiento adecuado sobre este eje. La componente  $z$  (línea azul) inicia en 0,6 m y desciende hasta un mínimo entre 0,4 y 0,2 m.

Todas las componentes muestran un comportamiento transitorio y una posterior estabilización sin oscilaciones sostenidas, lo que confirma la estabilidad del sistema y del controlador. Este resultado también concuerda con la simulación, en la que se observó la convergencia del efecto final al objetivo con errores residuales mínimos.

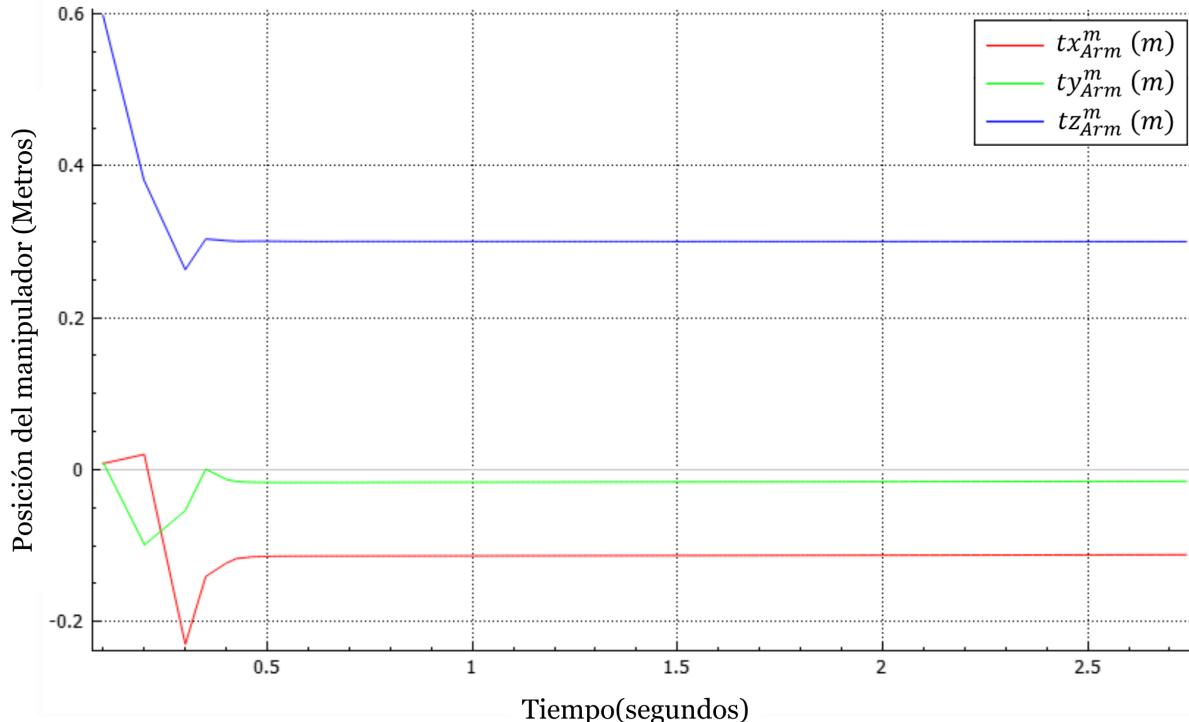


Figura 4.13: Gráfica de movimiento del punto  $tx_{arm}^m, ty_{arm}^m, tz_{arm}^m$ . ecuación (4.14).

La figura 4.14 complementa el análisis del sistema robótico mediante la representación temporal de los ángulos de orientación del efecto final. Se muestran las tres componentes angulares ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), definidas según la convención de ángulos de Euler, bajo el mismo intervalo temporal que la gráfica de posición. La componente  $\alpha$  (curva roja) presenta una oscilación inicial con un pico pasando los  $-40^\circ$ , seguida de una caída la cual posteriormente se aproxima de forma progresiva hacia  $0^\circ$ , cumpliendo así la orientación deseada. El ángulo  $\beta$  (curva verde) muestra la variación más amplia. Parte de un pico cercano a  $20^\circ$ , alcanza un valor pasando los  $40^\circ$ , en concordancia con la orientación objetivo. La componente  $\gamma$  (curva azul) también presenta un comportamiento oscilatorio entre  $0^\circ$  y un máximo próximo a  $20^\circ$ , para luego estabilizarse en  $0^\circ$ , valor correspondiente a su configuración final esperada.

Las tres componentes presentan una evolución transitoria seguida de una estabilización, sin oscilaciones sostenidas. Este comportamiento refleja un control angular adecuado frente a las condiciones dinámicas del sistema. El análisis conjunto de las gráficas de posición y orientación respalda la correcta implementación del control cinemático, mostrando una con-

vergencia estable del efecto final hacia el objetivo, con un comportamiento consistente en todas sus variables.

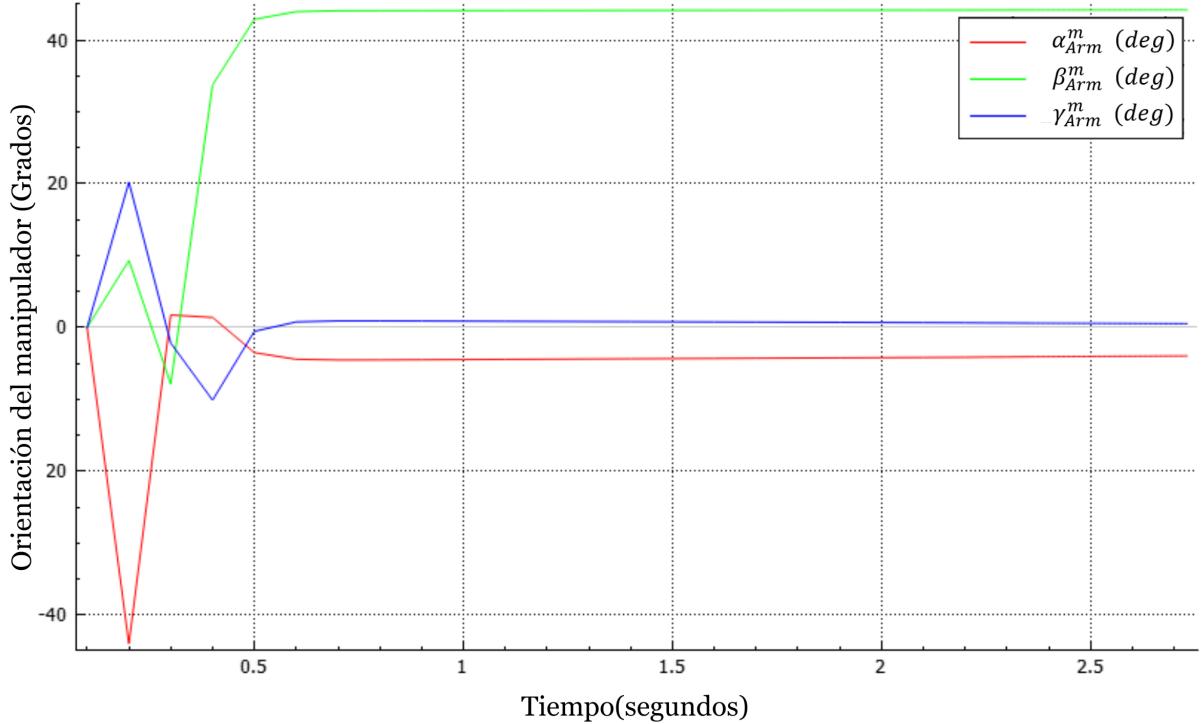


Figura 4.14: Gráfica de los ángulos  $\alpha_{Arm}^m, \beta_{Arm}^m, \gamma_{Arm}^m$  del manipulador, ecuación (4.26).

## 4.6. Combinación de modelos para trabajar de manera sincrona

Una vez obtenidas las ecuaciones que describen el movimiento de ambos sistemas, se busca integrar un sistema sobre otro, es decir, que durante la evaluación se considere tanto la posición del manipulador como la del móvil. Para ello se proponen los puntos conocidos vistos desde el origen para poder modificar la interpretación del control cinemático figura 4.15.

Para ello, se modifica la ecuación (4.52), donde el punto deseado debe expresarse como una diferencia de posición del efecto final con respecto a la posición del móvil. Esto implica restar la posición actual del robot móvil, definida por las variables  $x_m^O, y_m^O$ , considerando únicamente los dos movimientos que el manipulador puede realizar con respecto al sistema de referencia. Esta modificación debe realizarse antes del cálculo de los ángulos  $q_1, q_2, q_3$  (4.52). Donde el nuevo punto que se desea controlar del manipulador  $P_4^0$  debe tener la referencia de la posición del móvil actual.

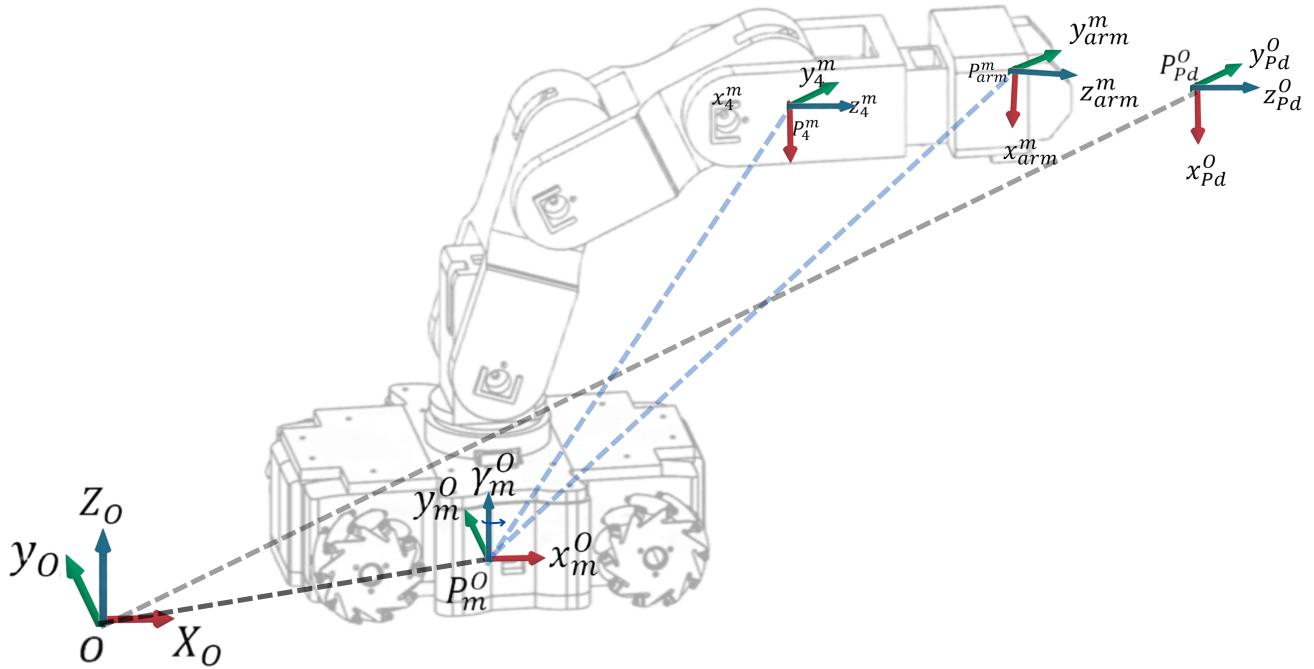


Figura 4.15: Diagrama visualizando del sistema de referencia en ángulos

El punto que controla los movimientos del manipulador se encuentra en el 3er eslabón, es decir, el punto  $P_0^4$ . Sin embargo, en este caso es importante considerar que el origen de dicho punto es referente a la base del móvil. Por lo tanto, dicho punto corresponde al eje 4 visto desde el móvil, denotado como  $P_4^m$  (4.56).

$$\begin{aligned} P_{Arm}^m &= P_4^m + (L_4 + L_5) * z_5^m \\ P_4^m &= P_{Arm}^m - (L_4 + L_5) * z_5^m \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dado que este es el punto que controla los movimientos del manipulador, es necesario relacionar el posicionamiento del móvil con respecto al punto deseado. El detalle importante es que ambas posiciones están referenciadas respecto al origen del plano global. Es decir, el punto a controlar del manipulador visto desde el origen es igual al punto deseado visto desde el origen menos la posición del móvil respecto al mismo origen (4.57).

$$P_{Arm}^O = P_{pd}^O - P_m^O \quad (4.57)$$

El detalle es que en las ecuaciones (4.56) y (4.57), los sistemas del punto 4 están referenciados en diferente origen. Por ello, es necesario establecer la matriz de transformación que permite convertir de un sistema a otro (4.58). Debido a que el móvil solo puede orientarse en el eje de las z, la matriz de rotación es en el ángulo  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} P_{Arm}^O &= R_m^O \cdot P_{Arm}^m \\ P_{Arm}^m &= (R_m^O)^{-1} \cdot P_{pd}^O \end{aligned} \quad (4.58)$$

Teniendo esta equivalencia, podemos sustituir directamente en la ecuación (4.56) la transformación obtenida (4.58). Y conociendo los valores de  $P_{Arm}^O$  de la ecuación (4.57), podemos obtener la expresión para determinar los nuevos valores de  $x_4, y_4, z_4$  como se muestra en la ecuación 4.59 y expresado de manera matricial en la ecuación (4.60).

$$\begin{aligned} P_4^m &= (R_O^m)^{-1} \cdot P_{Arm}^O - (L_4 + L_5) \cdot z_5^m \\ P_4^m &= (R_O^m)^{-1} \cdot (P_{Pd}^O - P_m^O) - (L_4 + L_5) \cdot z_5^m \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{bmatrix} x_4^m \\ y_4^m \\ z_4^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_O^m) & \sin(\gamma_O^m) & 0 \\ -\sin(\gamma_O^m) & \cos(\gamma_O^m) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_5^O - x_m^O \\ y_5^O - y_m^O \\ z_5^O \end{bmatrix} - (L_4 + L_5) \begin{bmatrix} \sin(\beta_{Pd}^O) \\ -\cos(\beta_{Pd}^O) \sin(\alpha_{Pd}^O) \\ \cos(\alpha_{Pd}^O) \cos(\beta_{Pd}^O) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

De esta manera, las ecuaciones para controlar el manipulador quedan expresadas en (4.61). Recordando que una vez calculados los valores de  $x_4, y_4, z_4$ , se debe realizar el cálculo de cada ángulo utilizando las ecuaciones (4.55). Al actualizar los ángulos ( $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ ), estos quedan referenciados respecto al sistema de coordenadas global del origen, lo que permite conocer los valores de las componentes de traslación del manipulador  $tx_{Arm}^O$ ,  $ty_{Arm}^O$  y  $tz_{Arm}^O$  en el marco de referencia del sistema robótico completo.

$$\begin{aligned} x_4^m &= \cos(\gamma_m^O)(x_5^O - x_m^O) + \sin(\gamma_m^O)(y_5^O - y_m^O) - (L_4 + L_5) \sin(\beta_{Pd}^O) \\ y_4^m &= -\sin(\gamma_m^O)(x_5^O - x_m^O) + \cos(\gamma_m^O)(y_5^O - y_m^O) + (L_4 + L_5) \cos(\beta_{Pd}^O) \sin(\alpha_{Pd}^O) \\ z_4^m &= z_5^O - (L_4 + L_5) \cos(\alpha_{Pd}^O) \cos(\beta_{Pd}^O) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Las siguientes fórmulas que deben ser modificadas son las correspondientes al móvil (4.7), ya que estas actúan en función de la información del vehículo móvil en relación con la posición deseada. Sin embargo, en este caso, debe considerarse la posición del manipulador con respecto a la distancia deseada para que el móvil determine hasta qué punto debe desplazarse. Por lo tanto, las ecuaciones quedan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} U_x &= \dot{X}_c = \cancel{\dot{X}_{Pd}} - K(x_m^O - (x_{Pd}^O - tx_{Arm}^O)) \\ U_y &= \dot{Y}_c = \cancel{\dot{Y}_{Pd}} - K(y_m^O - (y_{Pd}^O - ty_{Arm}^O)) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Para el control del manipulador, es importante considerar que el modelo de cinemática inversa operan desde el punto de vista del móvil. Por esta razón, aunque el punto objetivo del espacio de trabajo está definido en el sistema de coordenadas global (origen) causando que si se toman los valores de  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$  con los ángulos deseados globales se obtendrían los valores de  $\alpha_{Arm}^O, \beta_{Arm}^O, \gamma_{Arm}^O$  vistos desde el origen. Para solucionar esto es necesario transformar dichas coordenadas al marco de referencia del móvil antes de aplicar la cinemática inversa. Esta conversión implica expresar las posiciones y orientaciones deseadas como si fueran vistas desde el propio móvil, lo que permite compensar automáticamente cualquier variación en su orientación.

La relación básica que conecta la rotación deseada del efecto final en el marco del móvil,  $R_{Pd}^m$ , con la rotación deseada en el sistema global,  $R_{Pd}^O$ , y la orientación actual del móvil,  $R_m^O$ , es:

$$R_{Pd}^m = (R_m^O)^{-1} \cdot R_{Pd}^O \quad (4.63)$$

Si consideramos que el móvil rota sólo alrededor del eje  $z$  con ángulo  $\theta$ , su matriz de rotación inversa es:

$$(R_m^O)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

La matriz de rotación deseada en el sistema global,  $R_{Pd}^O$ , tiene elementos a partir del punto deseado (4.47):

$$R_{Pd}^O = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \beta_D \cos \gamma_D, \\ a_{12} &= -\cos \beta_D \sin \gamma_D, \\ a_{13} &= \sin \beta_D, \\ a_{21} &= \cos \alpha_D \sin \gamma_D + \cos \gamma_D \sin \alpha_D \sin \beta_D, \\ a_{22} &= \cos \alpha_D \cos \gamma_D - \sin \alpha_D \sin \beta_D \sin \gamma_D, \\ a_{23} &= -\cos \beta_D \sin \alpha_D, \\ a_{31} &= \sin \alpha_D \sin \gamma_D - \cos \alpha_D \cos \gamma_D \sin \beta_D, \\ a_{32} &= \cos \gamma_D \sin \alpha_D + \cos \alpha_D \sin \beta_D \sin \gamma_D, \\ a_{33} &= \cos \alpha_D \cos \beta_D. \end{aligned}$$

Multiplicando (4.64) por  $R_{Pd}^O$  obtenemos:

$$R_{Pd}^m = \begin{bmatrix} \cos \theta r_{11} + \sin \theta r_{21} & \cos \theta r_{12} + \sin \theta r_{22} & \cos \theta r_{13} + \sin \theta r_{23} \\ -\sin \theta r_{11} + \cos \theta r_{21} & -\sin \theta r_{12} + \cos \theta r_{22} & -\sin \theta r_{13} + \cos \theta r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Los ángulos locales se pueden obtener a partir de los elementos de  $R_{Pd}^m$  (usando la convención ZYX o similar). Esta convención consiste en aplicar sucesivamente tres rotaciones: primero una rotación alrededor del eje  $z$  (ángulo  $\gamma$ ), seguida de una rotación alrededor del eje  $y$  (ángulo  $\beta$ ), y finalmente una rotación alrededor del eje  $x$  (ángulo  $\alpha$ ). La matriz de rotación correspondiente se expresa como:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha) \quad (4.65)$$

donde

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

La multiplicación de estas tres matrices da lugar a la expresión explícita:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

A partir de esta matriz, los ángulos locales se extraen mediante:

$$\beta = -\arcsin(R_{31}), \quad \gamma = \arctan 2(R_{21}, R_{11}), \quad \alpha = \arctan 2(R_{32}, R_{33}). \quad (4.66)$$

donde  $r_{31}$  es el elemento (3,1) de  $R_{Pd}^m$ :

$$\begin{aligned} r_{31} &= \sin \alpha_D \sin \gamma_D - \cos \alpha_D \cos \gamma_D \sin \beta_D \\ \beta_D &= -\arcsin(\sin \alpha_D \sin \gamma_D - \cos \alpha_D \cos \gamma_D \sin \beta_D) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Para  $\gamma_D$  se usa la función atan2:

$$\gamma_D = \arctan 2 \left( \frac{-\sin \theta (\cos \alpha_D \cos \gamma_D - \sin \alpha_D \sin \beta_D \sin \gamma_D) - \cos \beta_D \cos \theta \sin \gamma_D}{\cos \beta_D}, \frac{\sin \theta (\cos \alpha_D \sin \gamma_D + \cos \gamma_D \sin \alpha_D \sin \beta_D) + \cos \beta_D \cos \gamma_D \cos \theta}{\cos \beta_D} \right) \quad (4.68)$$

Y el ángulo  $\alpha_D$  se calcula mediante:

$$\alpha_D = \arctan 2 \left( -\frac{-\sin \beta_D \sin \theta - \cos \beta_D \sin \alpha_D \cos \theta}{\cos \beta_D}, \frac{\cos \alpha_D \cos \beta_D}{\cos \beta_D} \right) \quad (4.69)$$

Con estos ángulos referidos al sistema del móvil, el cálculo continúa con las ecuaciones de cinemática inversa para obtener los ángulos articulares correspondientes al punto deseado, como se muestra en las ecuaciones (4.55) de tal manera que si se toman los valores de  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$  con los ángulos deseados vistos desde el móvil se obtendrían los valores de  $\alpha_{Arm}^m, \beta_{Arm}^m, \gamma_{Arm}^m$  vistos desde el angulo actual de la plataforma.

Para el control del ángulo de orientación del robot móvil  $\gamma_m^O$ , se puede trabajar asignando un valor deseado a gamma del móvil  $\gamma_{md}^O$  directamente, utilizando la siguiente expresión.

$$U_\theta = -k(\gamma_m^O - \gamma_{md}^O)$$

No obstante, también es válido calcular el ángulo de orientación a partir del punto deseado, considerando la orientación del manipulador y la relación con el móvil. Esta alternativa es útil para otros sistemas o robots que requieran determinar el ángulo deseado de manera dinámica a partir de su espacio de trabajo.

En este sentido, para calcular el ángulo de orientación del robot manipulador, se debe plantear de la siguiente manera. Dado que el robot móvil solo puede moverse alrededor del eje  $z$  según el sistema de referencia utilizado, se debe establecer una relación con la orientación del eje  $z$  tanto en el punto deseado como en el manipulador. Donde el punto deseado debe estar relacionado con la consideración del eje  $z$  del manipulador con respecto a su orientación, donde la orientación del punto deseado debe ser la multiplicación de la rotación del manipulador con respecto al móvil. Sin embargo, al ser de interés únicamente el ángulo de orientación del móvil, es necesario despejar  $R_m^O$  utilizando la inversa de la matriz de orientación del manipulador, obteniendo la siguiente expresión. Partiendo de esto, nos quedan las ecuaciones (4.70).

$$\begin{aligned} R_{Pd}^O &= R_m^O R_{Arm}^m \\ R_m^O &= R_{Pd}^O (R_{Arm}^m)^{-1} \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde

$$(R_{Arm}^m)^{-1} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) - \sin(q_1) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) \\ &\quad - \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \sin(q_1) \\ &\quad + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5), \end{aligned}$$

$$r_{1,3} = -\frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4),$$

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= \cos(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) - \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \\ &\quad - \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2,2} &= \cos(q_1) \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) \\ &\quad + \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5), \end{aligned}$$

$$r_{2,3} = \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4),$$

$$r_{3,1} = \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5),$$

$$r_{3,2} = \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5),$$

$$r_{3,3} = \cos(q_2 + q_3 + q_4).$$

$$R_{Pd}^O = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) & -\cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) & \sin(\beta_{Pd}) \\ \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \begin{pmatrix} \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd}) \end{pmatrix} & \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \begin{pmatrix} \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \\ \sin(\gamma_{Pd}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\cos(\beta_{Pd}) \\ \sin(\alpha_{Pd}) \end{pmatrix} \\ \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \\ \sin(\beta_{Pd}) \end{pmatrix} & \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \\ \sin(\gamma_{Pd}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{Pd}) \\ \cos(\beta_{Pd}) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

dando como resultado la matriz expresada en (4.71).

$$R_{Pd}^O (R_{Arm}^m)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

con

$$c_{1,1} = \sin(\beta_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \left( \sin(q_1) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3) \right)$$

$$c_{1,2} = \sin(\beta_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) \right) + \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - (\cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) - \cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \left( \cos(q_1) \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \right) \right. \\ \left. \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \right)$$

$$c_{1,3} = \cos(q_2 + q_3 + q_4) \sin(\beta_{Pd}) - \cos(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right),$$

$$\begin{aligned}
c_{2,1} = & - \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) \left( \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) - \right. \\
& \left. \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) - \cos(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \right. \\
& \left. + \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \right) - \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) \\
& \left( \sin(q_1) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) \right. \\
& \left. + \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \\
& \sin(\alpha_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,2} = & \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \right. \\
& \left. \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) \right. \\
& \left. + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \right) + \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) \\
& \left( \cos(q_1) \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) \right. \\
& \left. + \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \\
& \sin(\alpha_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,3} = & \left( \frac{1}{2} \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \frac{1}{2} \cos(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) \right) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right. \\
& \left. \sin(\gamma_{Pd}) \right) - \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right) \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \right. \\
& \left. \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \cos(q_2 + q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1} = & \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\beta_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) + \frac{1}{2} \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) \right) - \left( \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \right. \\
& \left. \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) \left( \sin(q_1) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) + \cos(q_1) \right. \\
& \left. \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \right. \\
& \left. \sin(q_2) \sin(q_3) \right) - \left( \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) \left( \cos(q_2) \cos(q_5) \right. \\
& \left. \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) - \cos(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_3) \cos(q_5) \right. \\
& \left. \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,2} = & \left( \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \right) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \right. \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \\
& \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \Big) + \left( \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) \left( \cos(q_1) \right. \\
& \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_3) \\
& \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \Big) - \cos(\beta_{Pd}) \cos(\alpha_{Pd}) \cos(q_2) \\
& + q_3 + q_4), \\
c_{3,3} = & (\sin(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) - \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \sin(\beta_{Pd})) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \right. \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \\
& \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \Big) + (\cos(\gamma_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) + \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd})) \left( \cos(q_1) \right. \\
& \cos(q_5) - \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_5) + \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_3) \\
& \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \Big) + \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\beta_{Pd}) \\
& \left( \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) - \frac{1}{2} \cos(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) \right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se sabe que la rotación del móvil esta presente en el ángulo  $\gamma$  en el que opera el móvil. Por ello, se trabaja con la matriz de transformación en torno al eje  $z$ . Por lo tanto, se puede establecer la relación entre el resultado de multiplicación presentada en la matriz (4.71) y la matriz  $z$  (4.72) planteado la ecuación (4.73).

$$R_m^O = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_m^O) & -\sin(\gamma_m^O) & 0 \\ \sin(\gamma_m^O) & \cos(\gamma_m^O) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$R_m^O = R_{Pd}^O \cdot (R_{Arm}^m)^{-1} \quad (4.73)$$

Para obtener el ángulo  $\gamma$  a partir de la matriz de rotación  $R_z$  (4.72), se utilizan las relaciones trigonométricas entre sus elementos (4.74). Dado que el cociente entre el seno y el coseno de un ángulo corresponde a la tangente, se puede escribir (4.75). Para determinar  $\gamma$ , se emplea la función arcotangente de dos parámetros (atan2), que permite obtener el ángulo en el cuadrante correcto donde atan2( $y, x$ ) devuelve el ángulo considerando el signo de  $y$  y  $x$  (4.76). Finalmente, al sustituir los valores obtenidos de la multiplicación de matrices en la ecuación 4.71, se obtiene la expresión de gamma del móvil calculada ( $\gamma_{mc}^O$ ) (4.77).

$$\begin{aligned}
R_m^O(1, 1) &= \cos(\gamma_m^O) \\
R_m^O(2, 1) &= \sin(\gamma_m^O)
\end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\tan(\gamma_{mc}^O) = \frac{R_m^O(2, 1)}{R_m^O(1, 1)} \quad (4.75)$$

$$\gamma_{mc}^O = \text{atan2}(R_m^O(2, 1), R_m^O(1, 1)) \quad (4.76)$$

$$\gamma_{mc}^O = \text{atan2}(\sin(\gamma_m^O), \cos(\gamma_m^O)) \quad (4.77)$$

Finalmente, para el cálculo se sustituyen los elementos en las posiciones (2, 1) y (1, 1), pero ahora tomados de la matriz  $R_{Pd}^O(R_{Arm}^O)^{-1}$  (4.71).

$$\begin{aligned} \gamma_{mc}^O = & \text{atan2} \left( \left( \cos(\alpha_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) - \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) \right) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \right. \right. \\ & \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \\ & \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \left. \right) - \left( \cos(\alpha_{Pd}) \sin(\gamma_{Pd}) + \cos(\gamma_{Pd}) \right. \\ & \sin(\alpha_{Pd}) \sin(\beta_{Pd}) \left( \sin(q_1) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_2) \right. \\ & \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \\ & \sin(q_3) \left. \right) + \cos(\beta_{Pd}) \sin(\alpha_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right), \\ & - \sin(\beta_{Pd}) \left( \frac{1}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3 + q_4) + \frac{1}{2} \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right) - \cos(\beta_{Pd}) \cos(\gamma_{Pd}) \left( \sin(q_1) \right. \\ & \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \cos(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) \sin(q_4) \\ & + \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_4) + \cos(q_1) \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3) \left. \right) - \cos(\beta_{Pd}) \\ & \sin(\gamma_{Pd}) \left( \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \sin(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) - \cos(q_5) \right. \\ & \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4) \sin(q_5) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) \left. \right) \end{aligned}$$

Conociendo el ángulo que necesita establecer el móvil a partir de la consideración de los ángulos deseados ( $\alpha_{Pd}, \beta_{Pd}, \gamma_{Pd}$ ) y los ángulos del efecto final ( $\alpha_{Arm}^O, \beta_{Arm}^O, \gamma_{Arm}^O$ )

$$U_\theta = -K(\gamma_m - (\gamma_{mc}^O)) \quad (4.78)$$

#### 4.6.1. Simulación en conjunto

En esta simulación se grafican las variables principales del sistema con el fin de analizar el comportamiento del modelo y de la programación implementada. Las posiciones en los ejes  $x$  y  $y$  del móvil permiten observar la acción de las señales de control  $U_x$  y  $U_y$  al desplazar el robot hacia el punto de referencia. De manera complementaria, los ángulos y la orientación del móvil permiten verificar que es posible establecer un valor deseado y que el sistema logre alcanzarlo de manera estable.

##### Primerá Simulación

La figura 4.16 muestra la primera simulación del sistema robótico, donde se propuso avanzar un metro en el eje  $x$  manteniendo una altura específica de 0.5 metros, con una

orientación angular del móvil deseada de -45 grados y la orientación del punto controlado en  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ . En la parte superior de la interfaz aparecen los controles con los valores de posición y orientación deseados, referidos al sistema de coordenadas global.

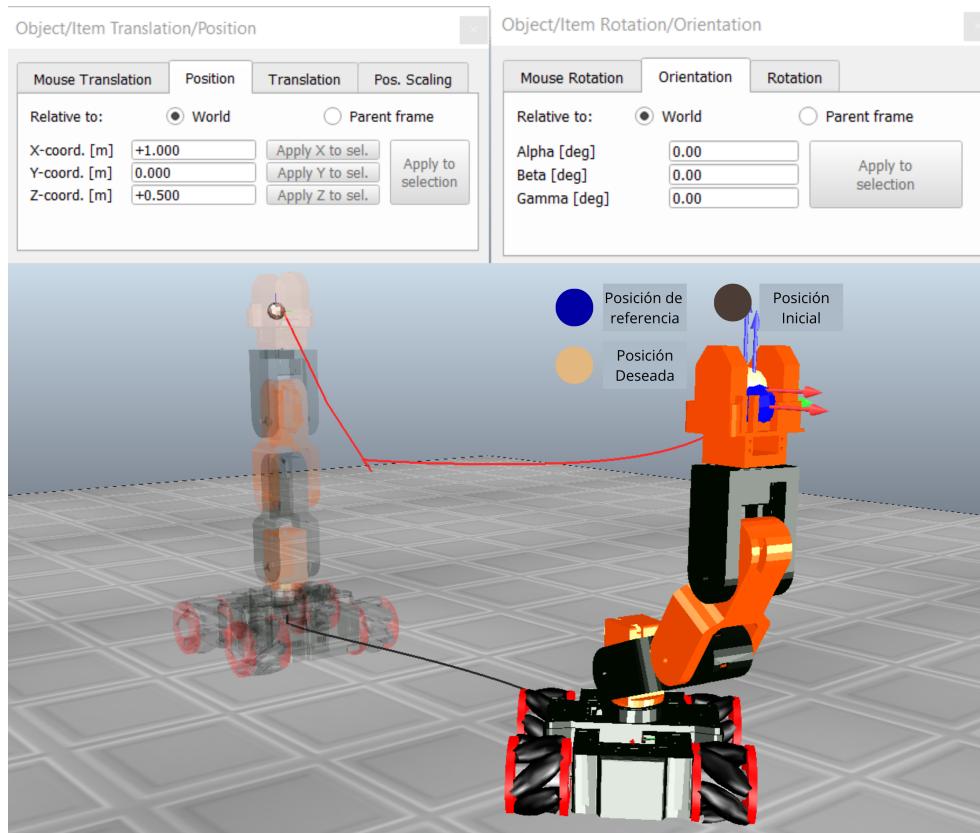


Figura 4.16: Primera simulación del manipulador móvil en *CoppeliaSim*

En la simulación se observa al robot llegando a la posición deseada y una versión semi-transparente que representa la posición inicial. La trayectoria seguida está marcada por una línea roja que conecta ambas posiciones, mostrando el desplazamiento realizado por el sistema, mientras que la trayectoria seguida solo por el robot móvil está trazada por una línea negra. La leyenda ubicada en la parte superior derecha explica la codificación de colores: el círculo azul representa la posición de referencia del robot, el círculo marrón indica la posición inicial del sistema y el círculo *beige* corresponde a la posición deseada. Esta configuración inicial permite evaluar la respuesta del sistema ante un desplazamiento lineal simple. El robot debe coordinar el movimiento de la plataforma móvil con el ajuste del brazo manipulador para alcanzar el punto objetivo, demostrando la función del control integrado en tareas de posicionamiento.

La figura 4.17 muestra la evolución de las coordenadas cartesianas del efecto final del robot manipulador montado sobre la plataforma móvil. Esta gráfica representa el comportamiento de todo el sistema visto desde el origen de referencia global. La coordenada  $tx_{Arm}^0$  (línea roja) muestra un crecimiento gradual desde aproximadamente 0,2 m hasta alcanzar cerca de 1,0 m al final del periodo de simulación, lo que indica el desplazamiento progresivo del efecto final en la dirección  $x$ . La coordenada  $ty_{Arm}^0$  (línea verde) se mantiene prácticamente

en cero durante toda la trayectoria, confirmando que el movimiento se realiza únicamente en el plano  $x-z$ , sin desviaciones laterales. La coordenada  $tz_{Arm}^0$  (línea azul) presenta un comportamiento característico: inicialmente desciende desde 0,6 m hasta aproximadamente 0,4 m, lo que corresponde a la etapa en que el sistema extiende el manipulador para alcanzar puntos más alejados. Posteriormente se observa una elevación gradual hasta estabilizarse en aproximadamente entre 0,4 m y 0,6 m coincidiendo con el ajuste del manipulador conforme la plataforma móvil se acerca a la posición objetivo y permite una configuración más favorable del brazo robótico.

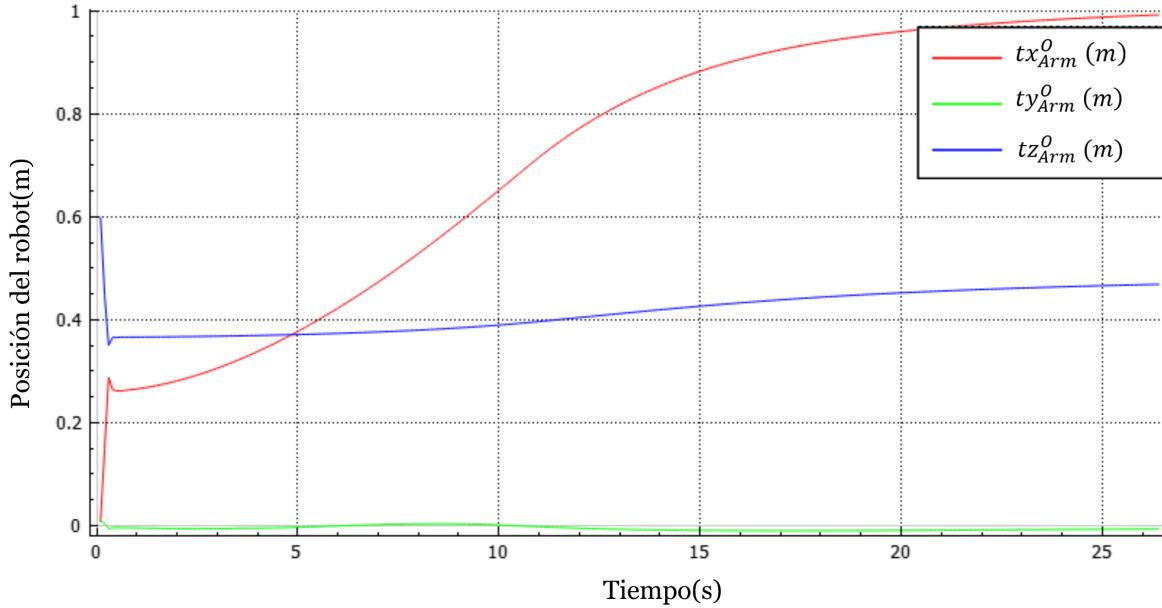


Figura 4.17: Coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del efecto final del robot

La figura 4.18 muestra la evolución de los ángulos de orientación del efecto final del robot manipulador, expresados en el sistema de referencia global. El ángulo  $\alpha_{Arm}^0$  (línea roja) se mantiene prácticamente estable en cero grados durante toda la simulación, lo que indica que no hay rotación significativa alrededor del eje correspondiente. El ángulo  $\beta_{Arm}^0$  (línea verde) presenta un comportamiento dinámico iniciando con un pico superior a los  $5^\circ$ , seguido de una rápida transición que lo lleva a aproximadamente  $-20^\circ$ , para posteriormente estabilizarse cerca de  $0^\circ$ . Este comportamiento refleja los ajustes de orientación necesarios durante las etapas iniciales del movimiento. El ángulo  $\gamma_{Arm}^0$  (línea azul) muestra variaciones iniciales moderadas, comenzando cerca de  $0^\circ$  y experimentando variaciones menores antes de estabilizarse. Esta orientación se mantiene relativamente constante durante la mayor parte de la trayectoria, indicando una orientación controlada del efecto final. Este comportamiento indica que el sistema realiza ajustes angulares coordinados para mantener la orientación del efecto final mientras se desplaza hacia el objetivo, siendo el ángulo  $\beta$  el más afectado por la cinemática del movimiento.

La figura 4.19 muestra la evolución de las coordenadas del efecto final del robot y la plataforma móvil. La coordenada  $t_x_{Arm}^0$  del robot (línea roja) alcanza 1,0 m, mientras que la plataforma móvil  $x_m^0$  (línea negra) llega a 0,8 m. Esta diferencia de 0,2 m demuestra que el

brazo manipulador se extiende para compensar y alcanzar el objetivo final. Las coordenadas en dirección  $y$ , tanto  $ty_{Arm}^0$  (línea verde) como  $y_m^0$  (línea azul), permanecen en cero para ambos sistemas, confirmando el movimiento unidireccional en  $x$ . Este comportamiento muestra la coordinación en la que la plataforma móvil se acomoda para que el manipulador alcance el punto deseado.

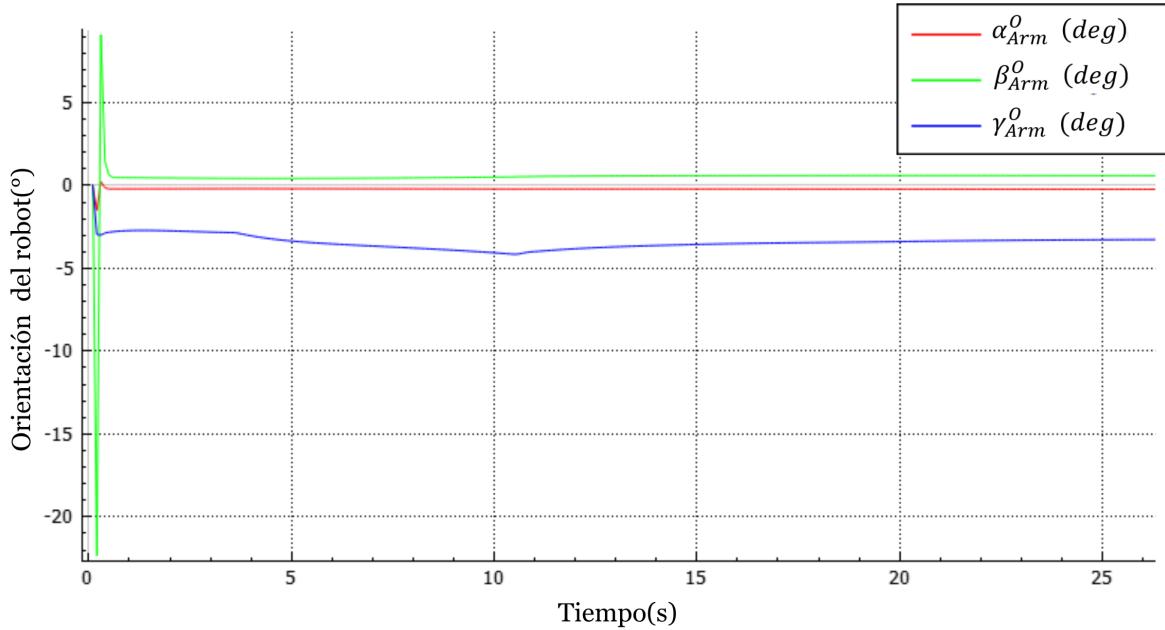


Figura 4.18: Evolución de los ángulos de orientación  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del efecto final del robot

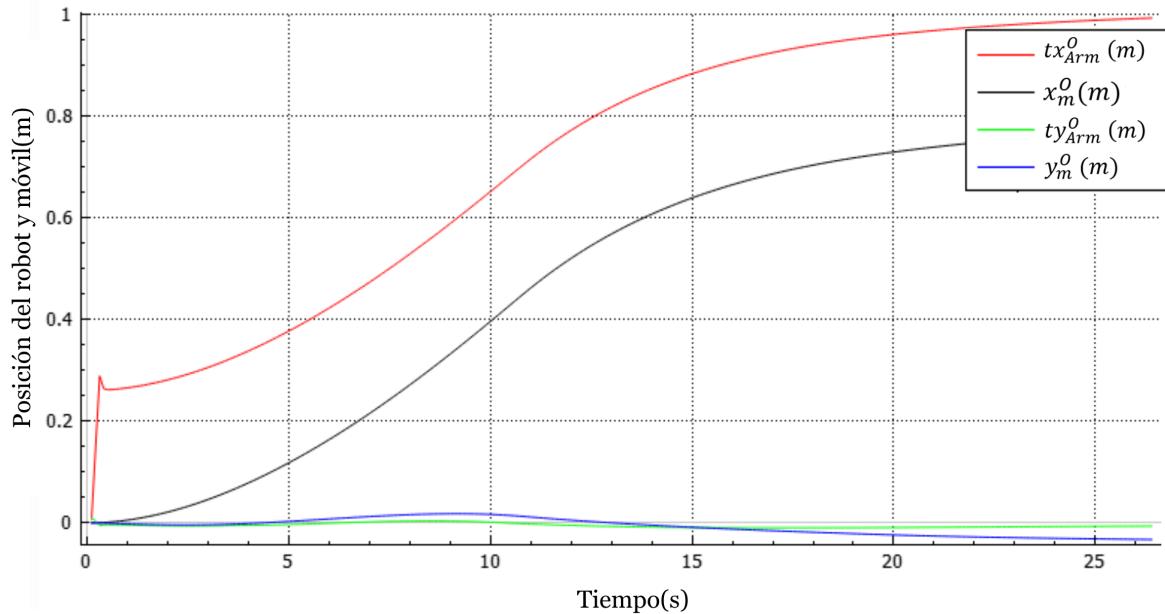


Figura 4.19: Coordenadas  $x$  e  $y$  del robot y plataforma móvil

La figura 4.20 muestra la evolución del ángulo  $\gamma$  (orientación en  $z$ ) de la plataforma móvil

durante la simulación. El ángulo  $\gamma$  presenta un pico inicial, seguido de un descenso hacia los  $-45^\circ$  establecidos. Este comportamiento demuestra cómo la plataforma móvil ajusta su orientación según el ángulo deseado establecido para el móvil sin afectar el posicionamiento del sistema completo, y luego se estabiliza en su orientación de referencia.

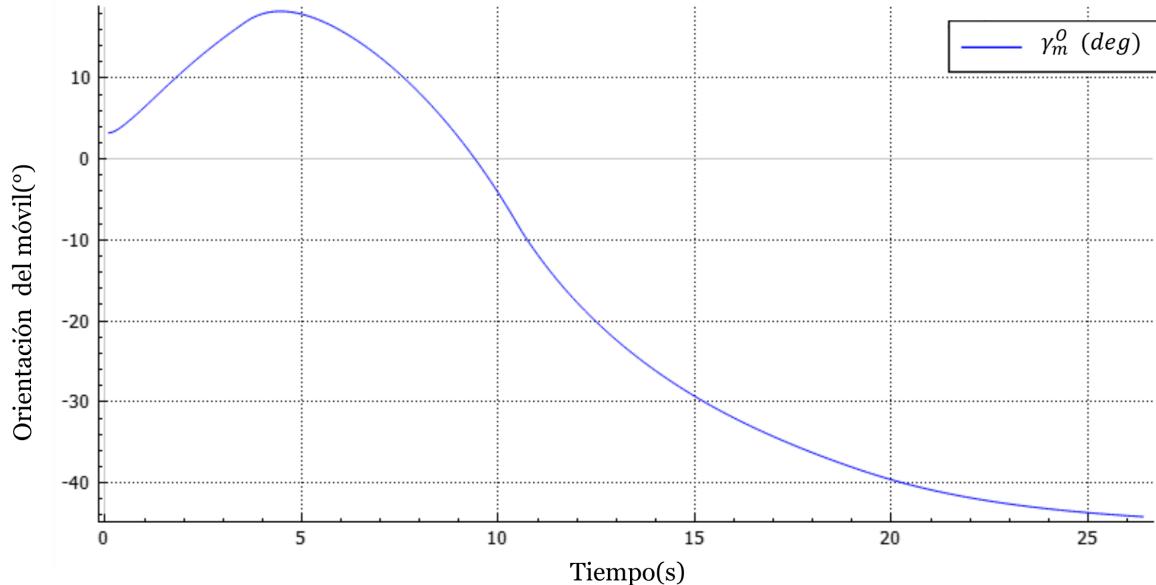


Figura 4.20: Ángulo  $\gamma$  de orientación de la plataforma móvil

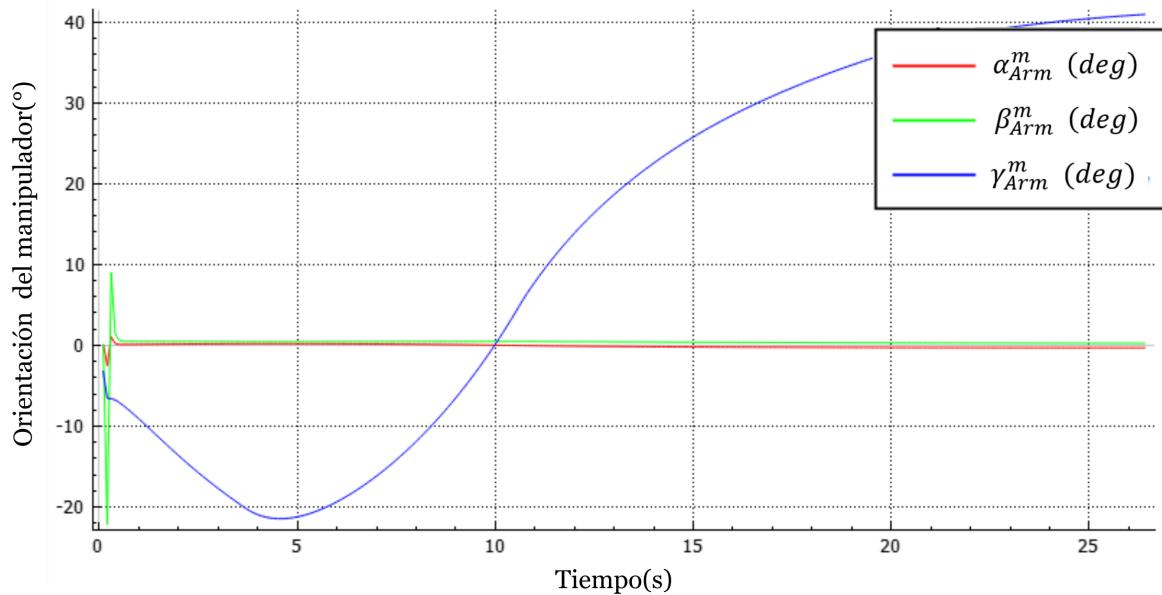


Figura 4.21: Orientación  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  del manipulador vista desde la plataforma móvil

La figura 4.21 muestra la orientación del manipulador vista desde el sistema de referencia de la plataforma móvil, donde se observa claramente cómo la rotación de  $-45^\circ$  de la base afecta la perspectiva del brazo robótico. El ángulo  $\alpha$  (línea roja) se mantiene prácticamente

constante, cerca de  $0^\circ$ . El ángulo  $\beta$  (línea verde) presenta oscilaciones iniciales notables, con un pico de  $10^\circ$  a  $-20^\circ$  y posteriormente se estabiliza en torno a  $0^\circ$ . El ángulo  $\gamma$  (línea azul) muestra el cambio más significativo, ascendiendo más de  $40^\circ$ .

Al comparar con la figura 4.18, se observa que el comportamiento es lógico debido a la rotación de  $-45^\circ$  de la base móvil se compensa con los  $42^\circ$  del ángulo  $\gamma$  del manipulador (visto desde la base), lo que demuestra la coordinación efectiva entre ambos subsistemas para mantener la orientación global deseada del efecto final.

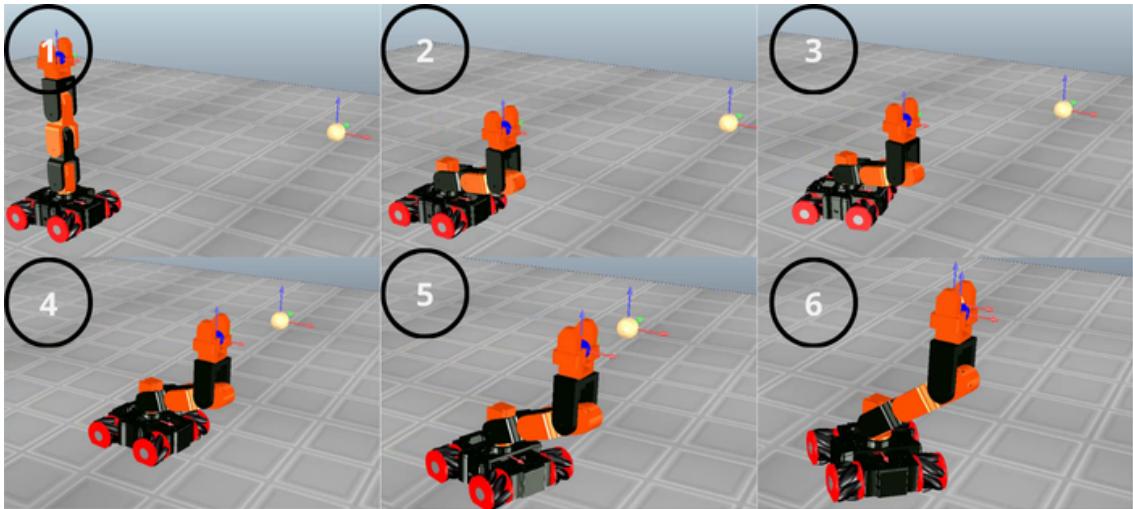


Figura 4.22: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la simulación en *CoppeliaSim*.

En la secuencia fotográfica (figura 4.22) se observa que el robot móvil–manipulador logró alcanzar el punto establecido. Para la validación experimental, se colocaron flechas como guías visuales para indicar el ángulo de orientación del robot móvil y se marcaron distintos puntos de referencia a lo largo del eje  $x$ , lo que permitió verificar que tanto la plataforma móvil como el efecto final se aproximaron de forma consistente a sus posiciones objetivo. La secuencia de seis etapas muestra la coordinación efectiva entre la plataforma móvil y el brazo manipulador durante todo el proceso de navegación y manipulación simultánea.

### Segunda Simulación

La figura 4.23 muestra la segunda simulación del sistema, con objetivo en  $(-1,000 \text{ m}, -1,000 \text{ m}, +0,368 \text{ m})$ , orientación del robot en  $(\alpha : +45,00^\circ, \beta : 0,00^\circ, \gamma : 0,00^\circ)$  y orientación del móvil deseada en  $0,00^\circ$  en el sistema de referencia global. Los paneles de control establecen coordenadas negativas en  $x$  e  $y$ , ubicando el objetivo en el tercer cuadrante del plano horizontal. La orientación angular de  $45^\circ$  en  $\alpha$  añade complejidad al control coordinado, requiriendo sincronización entre la plataforma móvil y el brazo manipulador. En la simulación se observa la configuración actual del robot y la posición inicial semitransparente. La trayectoria roja que conecta ambos puntos representa el movimiento del efecto final del sistema, mientras que la línea negra indica el desplazamiento de la plataforma móvil, mostrando así el movimiento coordinado de ambos subsistemas para alcanzar la posición y orientación deseadas.

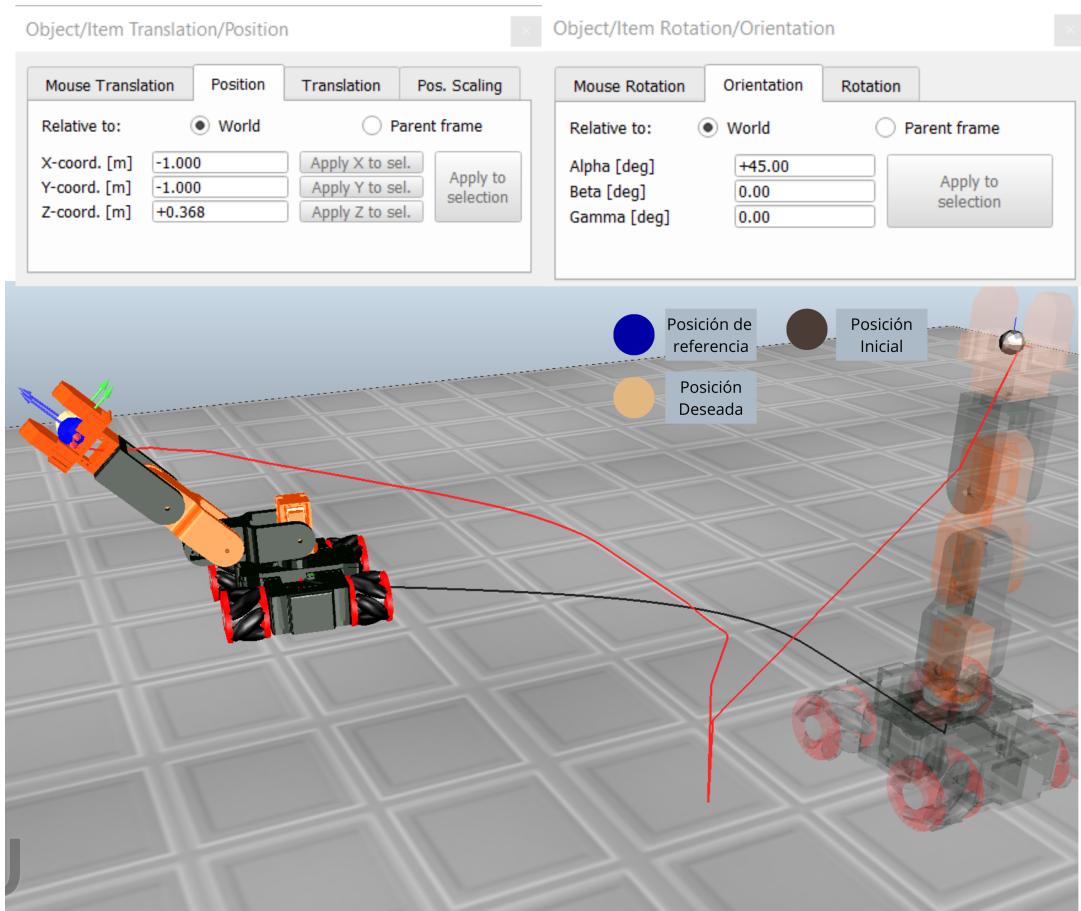
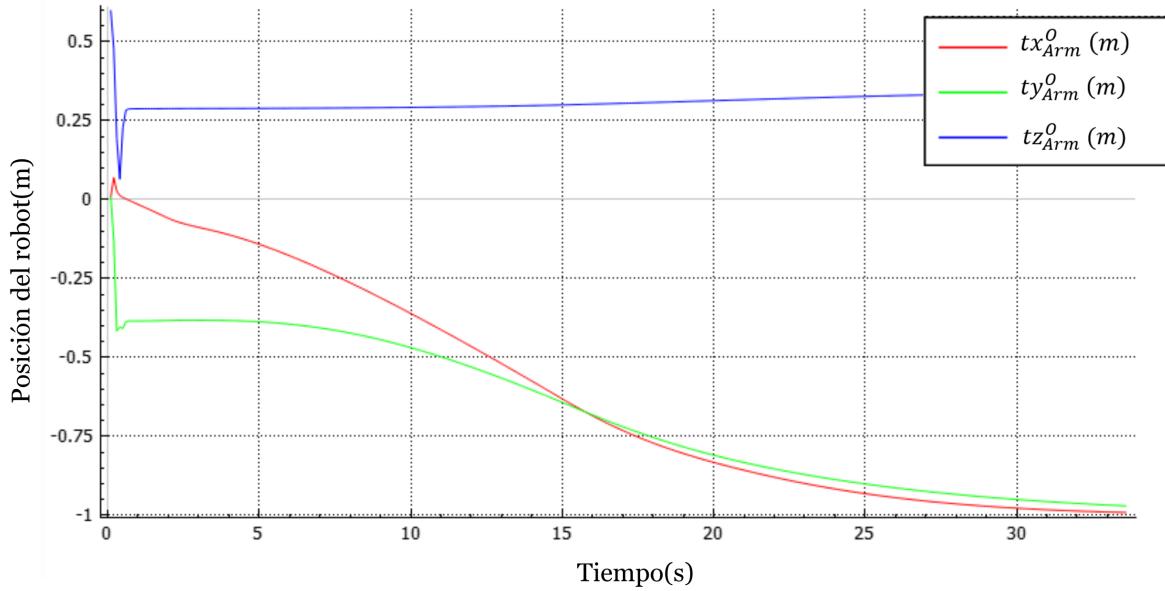
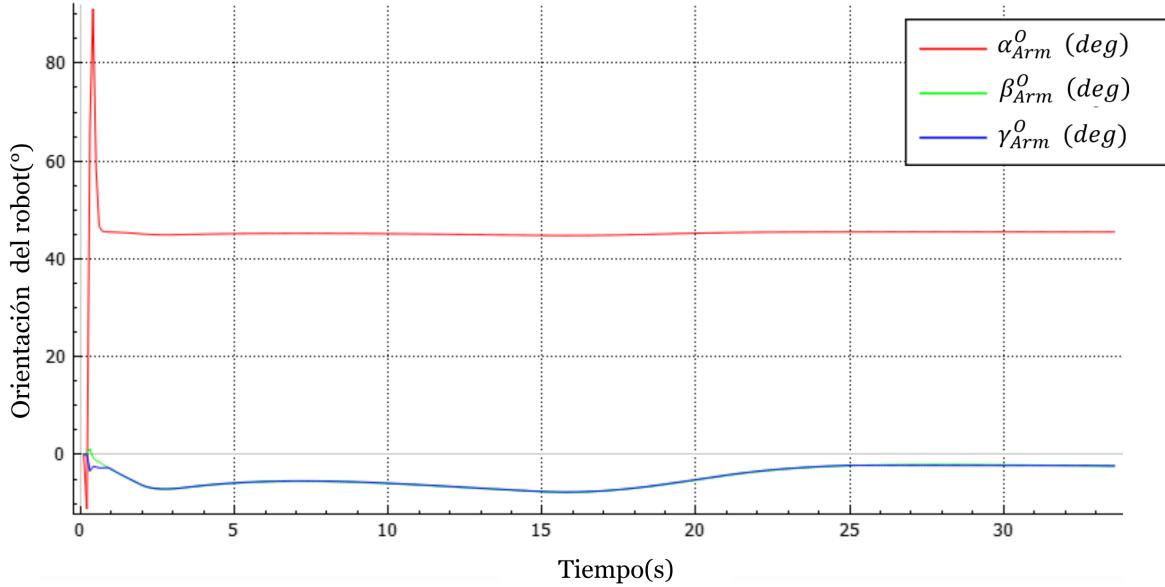


Figura 4.23: Segunda simulación del manipulador móvil en *CoppeliaSim*

La figura 4.24 muestra el cambio respecto al tiempo de las coordenadas cartesianas del efecto final durante la segunda simulación hacia el punto objetivo  $(-1,0 \text{ m}, -1,0 \text{ m}, 0,368 \text{ m})$ . Las coordenadas  $x$  e  $y$  (líneas roja y verde respectivamente) presentan comportamientos similares, iniciando desde valores positivos cercanos a cero y descendiendo hacia sus valores objetivo de  $-1,0 \text{ m}$ . La coordenada  $z$  (línea azul) exhibe un comportamiento distintivo, con un pico inicial cercano a  $0,5 \text{ m}$  durante los primeros segundos, seguido de un descenso hasta aproximadamente  $0,3 \text{ m}$ . El sistema demuestra una respuesta con el robot aproximado al punto deseado.

La figura 4.25 presenta el movimiento temporal de los ángulos de orientación del efecto final durante la segunda simulación, con objetivo angular de  $(\alpha : +45,00^\circ, \beta : 0,00^\circ, \gamma : 0,00^\circ)$ . El ángulo *alpha* (línea roja) muestra el comportamiento más dinámico, con un pico inicial superior a  $80^\circ$  antes de aproximarse hacia el valor objetivo de  $45^\circ$ . Este transitorio refleja el ajuste necesario del sistema para alcanzar la orientación deseada. Los ángulos *beta* y *gamma* (líneas verde y azul respectivamente) presentan perturbaciones iniciales menores, con picos inferiores a  $0$  respectivamente. Ambos ángulos convergen suavemente hacia sus valores objetivo de  $0^\circ$ . La respuesta del sistema demuestra un control de la orientación, con estimación hacia los valores deseados. El comportamiento coordinado permite al robot mantener la orientación especificada mientras alcanza la posición objetivo.

Figura 4.24: Coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del efecto final del robotFigura 4.25: Evolución de los ángulos de orientación  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del efecto final del robot

La figura 4.26 muestra el desplazamiento respecto al tiempo de las posiciones del efecto final del robot y de la plataforma móvil en los ejes  $x$  e  $y$ , evidenciando cómo se coordina el movimiento de la base para el alcance del objetivo. Las posiciones del robot en  $x$  e  $y$  (líneas roja y verde) se aproximan hacia los valores objetivo de  $-1,0$  m cada una. Ambas coordenadas inician desde valores cercanos a cero y descienden hacia sus referencias negativas. Las posiciones de la plataforma móvil (líneas negra y azul) muestran un comportamiento diferenciado que refleja la estrategia de coordinación. Esta diferencia entre las posiciones del efecto final y la base móvil indica que el brazo manipulador se extiende para compensar

la posición de la plataforma. La coordinación entre ambos subsistemas demuestra que la plataforma móvil no simplemente sigue al efecto final, sino que se posiciona estratégicamente para ayudar a la configuración cinemática del sistema completo, permitiendo que el brazo manipulador alcance la posición y orientación deseadas.

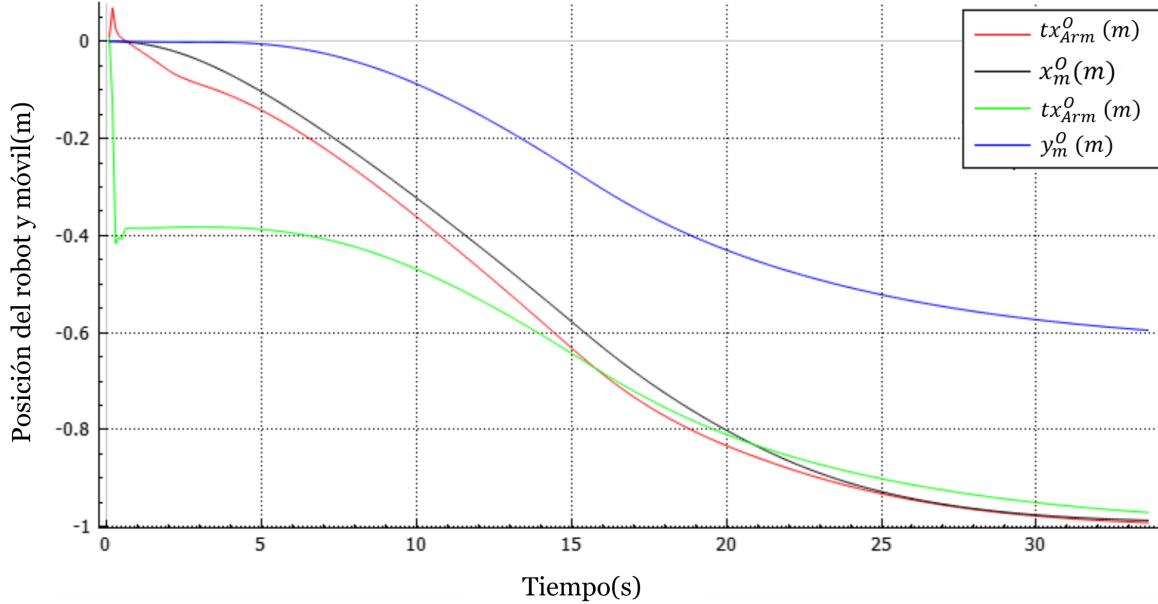


Figura 4.26: Coordenadas  $x$  e  $y$  del robot y plataforma móvil

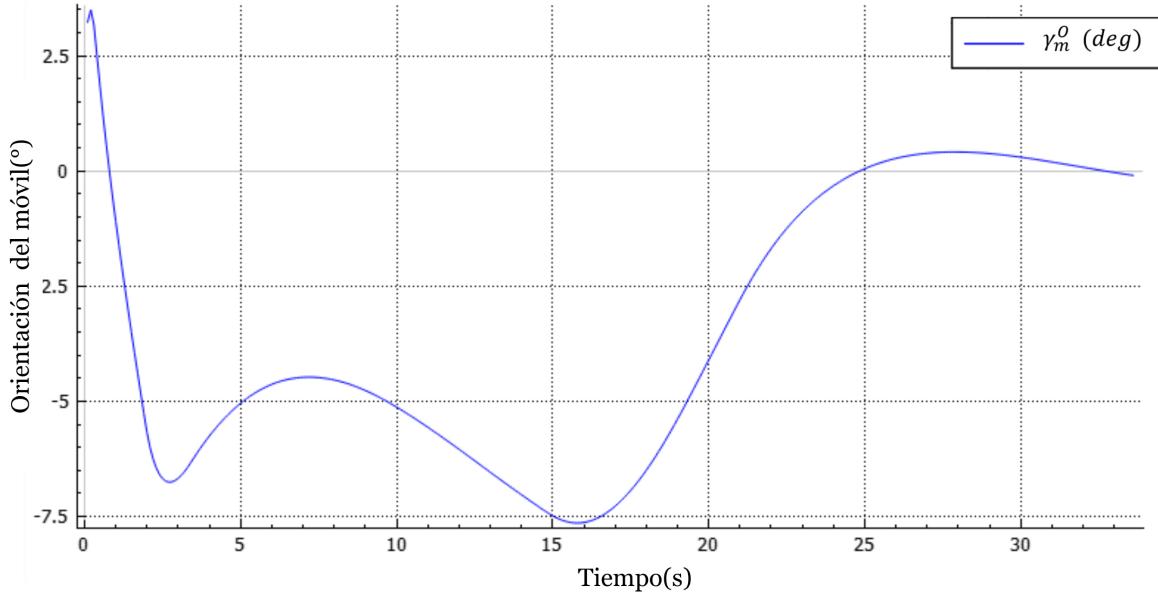


Figura 4.27: Ángulo  $\gamma$  de orientación de la plataforma móvil

La figura 4.27 presenta la evolución del ángulo  $\gamma$  de la plataforma móvil, que corresponde a la orientación angular deseada de la plataforma móvil. El ángulo  $\gamma$  del móvil inicia en  $0^\circ$  y experimenta un pico alrededor de los primeros segundos. Posteriormente, la orientación

desciende de manera oscilatoria, pasando por un mínimo aproximado de  $-6^\circ$ , antes de establecerse hacia el valor objetivo de  $0^\circ$ . Este comportamiento demuestra que la plataforma móvil no solo se posiciona de manera cartesiana para asistir al manipulador, sino que también ajusta su orientación angular de manera independiente, alcanzando el ángulo deseado  $\gamma$  sin afectar el control del manipulador. La convergencia hacia  $0^\circ$  indica un control efectivo de la orientación de la base móvil como parte integral del sistema coordinado.

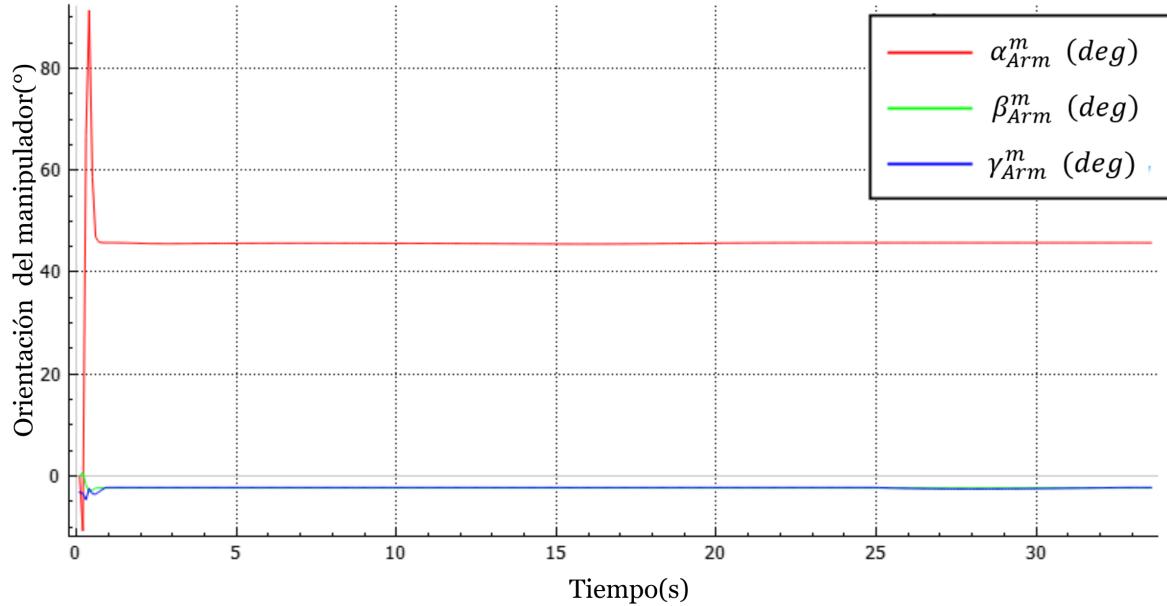


Figura 4.28: Orientación  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  del manipulador vista desde la plataforma móvil

La figura 4.28 muestra la orientación del efecto final del manipulador vista desde el sistema de referencia de la plataforma móvil, revelando cómo se comporta el brazo robótico relativo a su base. El ángulo  $\alpha$  (línea roja) presenta la mayor actividad, con un pico inicial de  $80^\circ$  seguido de oscilaciones que se estabilizan en aproximadamente  $50^\circ$ . Este valor final indica la configuración angular necesaria del manipulador respecto a su base móvil para alcanzar el objetivo global de  $45^\circ$ . Los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  (líneas verde y azul) muestran perturbaciones iniciales menores, respectivamente durante los primeros segundos. Ambos terminan estabilizándose hacia valores cercanos a  $0^\circ$ . Esta representación en el marco de referencia móvil demuestra que, mientras el sistema completo alcanza la orientación global deseada, el manipulador adopta una configuración específica relativa a su plataforma. La diferencia entre los  $45^\circ$  objetivo global y la aproximación a  $50^\circ$  del manipulador respecto al móvil refleja la contribución de la orientación de la base en la estrategia de control coordinado.

En la secuencia fotográfica (fig. 4.29) se observa que el robot móvil-manipulador logró alcanzar el punto establecido. Para la validación experimental, se colocaron flechas como guías visuales para indicar el ángulo de orientación del robot móvil y se marcaron distintos puntos de referencia a lo largo del eje  $x$ , lo que permitió verificar que tanto la plataforma móvil como el efecto final se aproximaron de forma consistente a sus posiciones objetivo. La secuencia de nueve etapas muestra la coordinación efectiva entre la plataforma móvil y el brazo manipulador durante todo el proceso de navegación y manipulación simultánea.

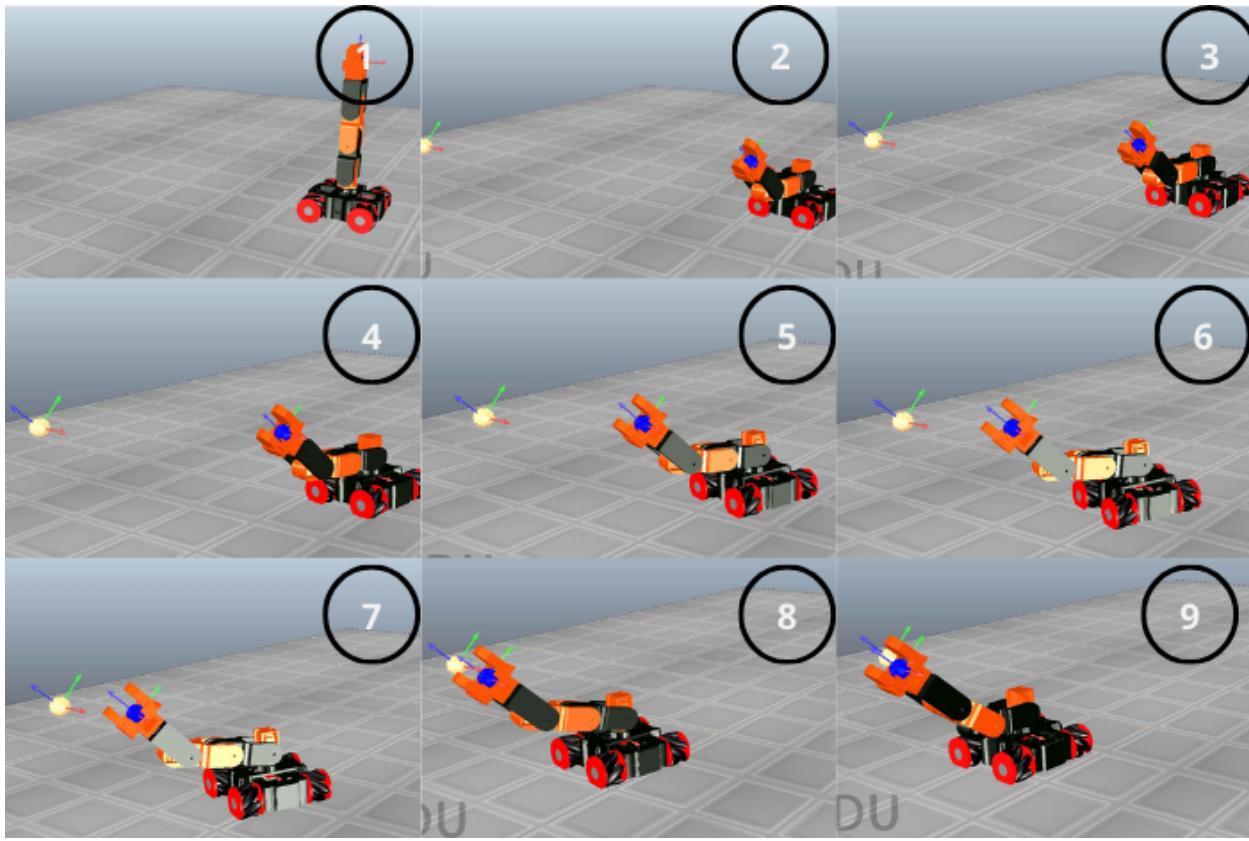


Figura 4.29: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la simulación en *CoppeliaSim*.

### Tercera Simulación

La figura 4.30 presenta la tercera simulación del sistema, con objetivo en ( $x : 0,000\text{ m}$ ,  $y : -1,000\text{ m}$ ,  $z : +0,500\text{ m}$ ) y orientación ( $\alpha : +30,00^\circ$ ,  $\beta : 0,00^\circ$ ,  $\gamma : +30,00^\circ$ ) en el sistema de referencia global.

Los paneles de control muestran que  $x$  se mantiene en el origen,  $y$  en  $-1,000\text{ m}$  y  $z$  en  $+0,500\text{ m}$ . La plataforma móvil alcanza un ángulo deseado independiente de  $\gamma$  del sistema, fijado en  $+30,00^\circ$ , sin afectar el control del manipulador, mientras que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del sistema se mantienen en  $+30,00^\circ$ ,  $0,00^\circ$  y  $+30,00^\circ$ , respectivamente. Esta simulación evalúa la capacidad del sistema para coordinar múltiples rotaciones angulares y posiciones, asegurando movimientos tanto del móvil como del manipulador.

La figura 4.31 muestra la variación a lo largo del tiempo de las coordenadas cartesianas del efecto final durante la tercera simulación hacia el punto objetivo ( $x : 0,0\text{ m}$ ,  $y : -1,0\text{ m}$ ,  $z : 0,500\text{ m}$ ). La coordenada  $x$  (línea roja) presenta un pico inicial en los primeros segundos, para posteriormente acercarse hacia  $0,0\text{ m}$ . La coordenada  $y$  (línea verde) desciende desde  $0,0\text{ m}$  hasta  $-1,0\text{ m}$ . La coordenada  $z$  (línea azul) muestra oscilaciones iniciales antes de ascender gradualmente hacia  $0,500\text{ m}$ , reduciéndose progresivamente hasta estabilizarse.

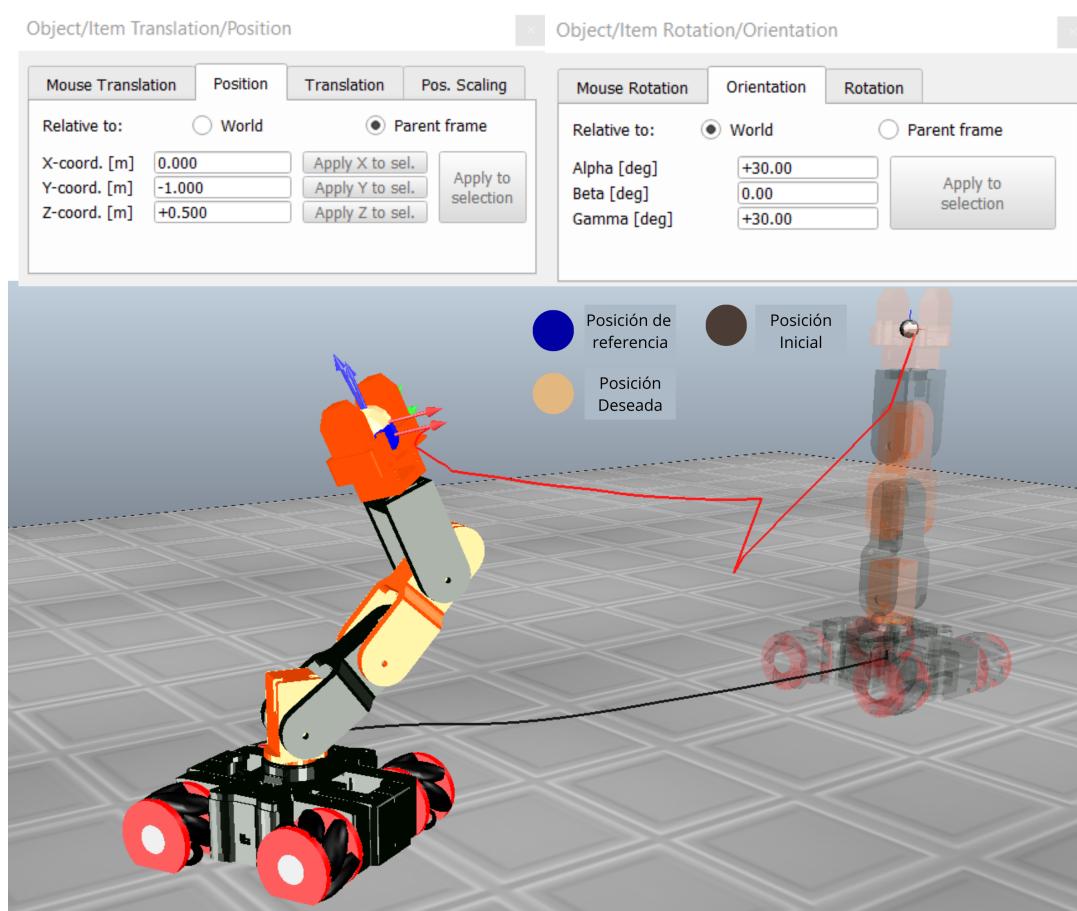


Figura 4.30: Tercera simulación del manipulador móvil en *CoppeliaSim*

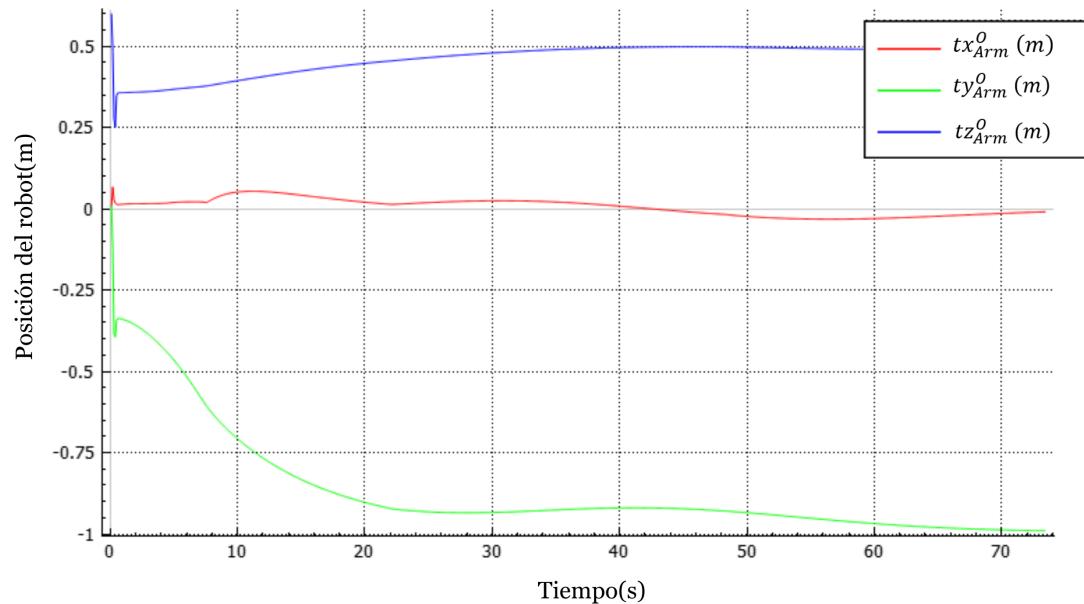


Figura 4.31: Coordenadas  $x, y, z$  del efecto final del robot

La figura 4.32 muestra la evolución temporal de la orientación del efecto final (ángulos de Euler  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) durante la simulación de posicionamiento. El ángulo  $\alpha$  (línea roja) exhibe un comportamiento dinámico complejo, iniciando con picos de  $\sim 50^\circ$  en los primeros segundos, descendiendo hasta aproximadamente  $0^\circ$  alrededor y posteriormente ascendiendo para estabilizarse cerca de  $20^\circ$ . El ángulo  $\beta$  (línea verde) presenta oscilaciones entre  $10$  y  $-10$  convergiendo finalmente hacia  $-10^\circ$ . El ángulo  $\gamma$  (línea azul) muestra el comportamiento con oscilaciones iniciales que se establecen rápidamente superando los  $20^\circ$  y se mantienen relativamente constantes durante el resto de la simulación. El sistema de orientación demuestra convergencia exitosa con diferentes dinámicas para cada ángulo de Euler, evidenciando un control robusto de la orientación del efecto final.

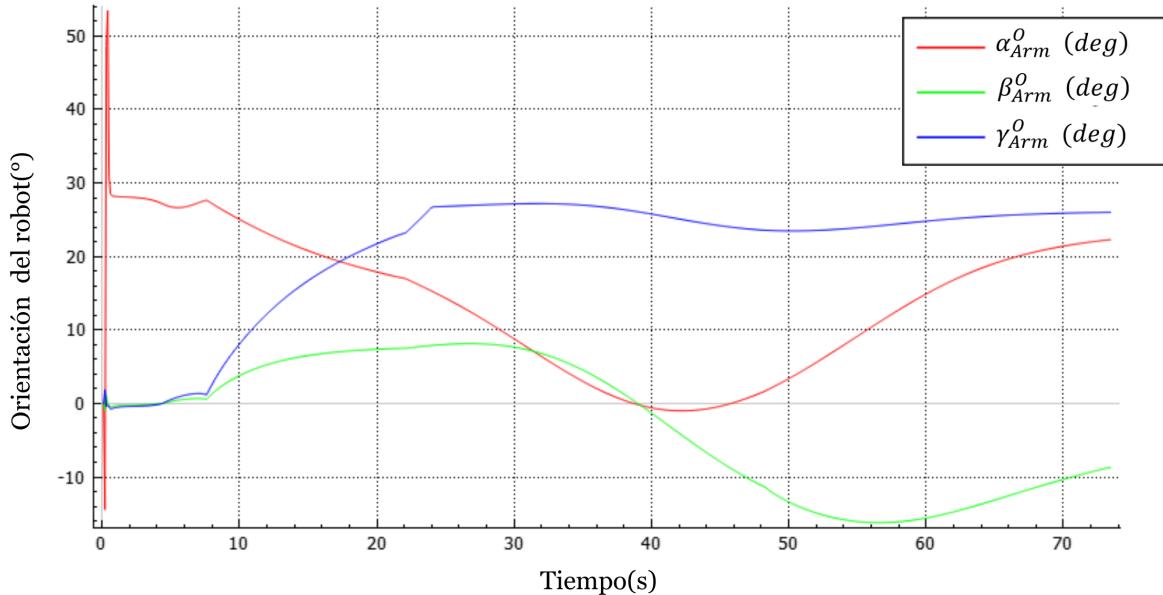


Figura 4.32: Evolución de los ángulos de orientación  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del efecto final del robot

La figura 4.33 muestra la coordinación entre la posición de la base móvil y el manipulador durante el seguimiento de trayectoria, evidenciando el comportamiento colaborativo del sistema robot móvil-manipulador. En el eje  $x$ , la base móvil (línea negra) desciende gradualmente desde  $0\text{ m}$  hasta acercarse aproximadamente a  $-0,25\text{ m}$  para luego retornar hacia  $0\text{ m}$ , mientras que el manipulador (línea roja) presenta su trayectoria hacia  $0\text{ m}$ . En el eje  $y$ , la base móvil (línea azul) exhibe un desplazamiento descendente continuo desde  $0\text{ m}$  hasta superar  $-1\text{ m}$ , complementando al manipulador (línea verde), que desciende desde  $0\text{ m}$  hasta aproximadamente  $-1\text{ m}$ . De esta manera, se puede observar que estabilizar la base para asistir al manipulador no implica que deba permanecer siempre detrás de él, sino que se posiciona estratégicamente según la trayectoria.

La figura 4.34 muestra la evolución de la orientación angular  $\gamma$  de la base móvil, representando un objetivo de orientación independiente del posicionamiento del efecto final. La base móvil inicia desde  $0^\circ$  y ejecuta una rotación controlada hasta alcanzar  $30^\circ$  con una respuesta de tipo exponencial. Este comportamiento demuestra la capacidad del sistema de control para manejar simultáneamente dos objetivos independientes: el posicionamiento del efecto final mediante la coordinación base-manipulador, y el control de la orientación de la

plataforma móvil según una referencia predefinida.

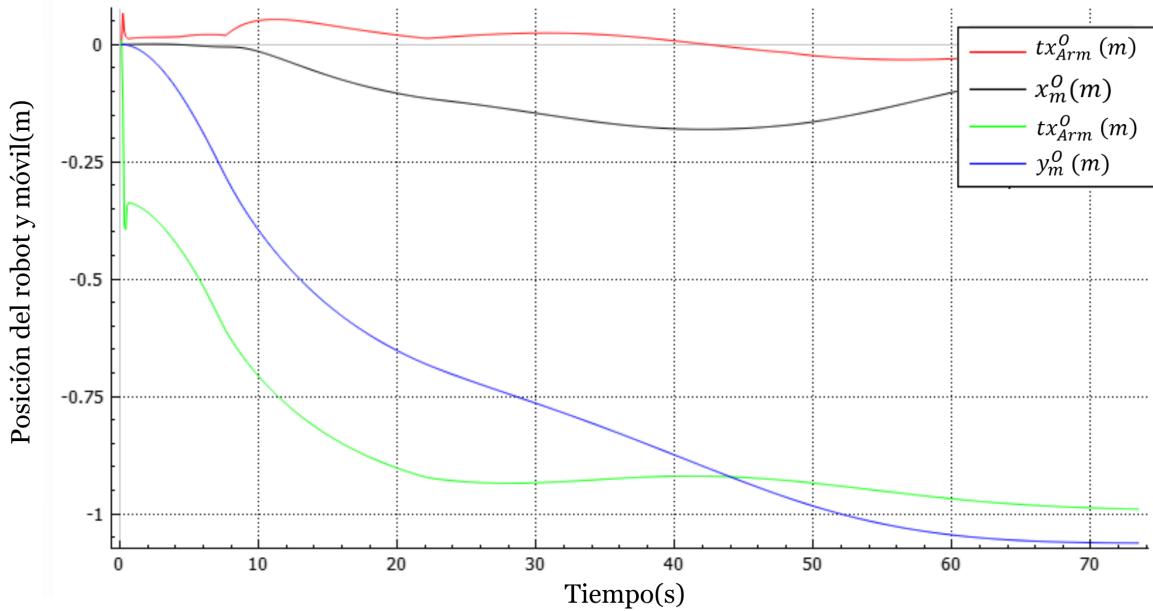


Figura 4.33: Coordenadas X e Y del robot y plataforma móvil

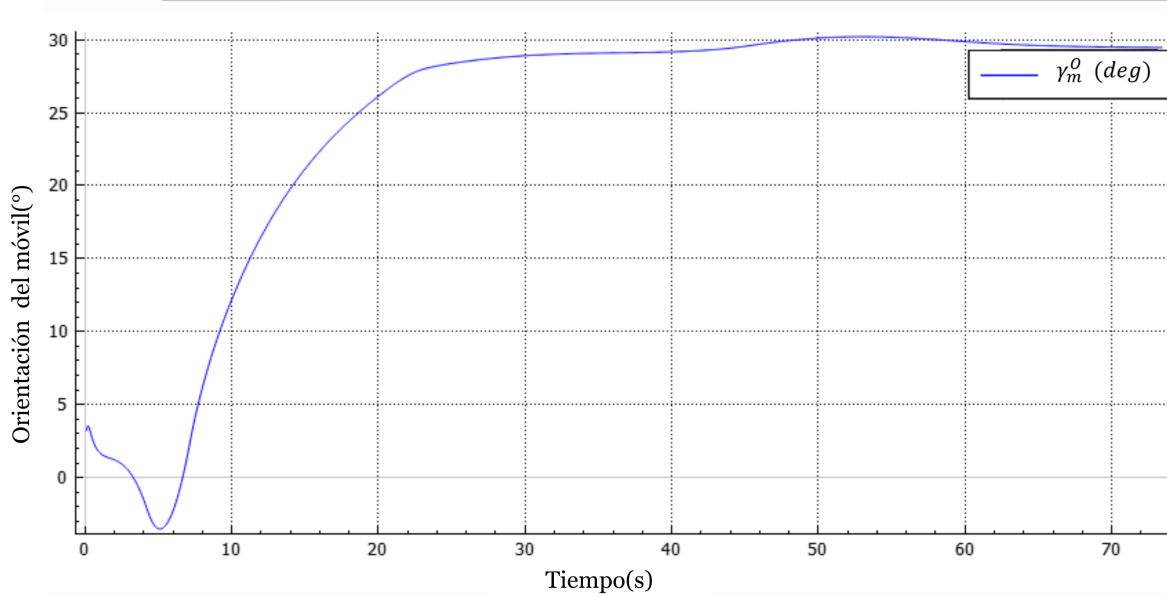


Figura 4.34: Ángulo  $\gamma$  de orientación de la plataforma móvil

La figura 4.35 muestra la evolución de la orientación del efecto final desde el sistema de referencia de la base móvil. El ángulo  $\alpha$  (rojo) presenta picos iniciales superiores a  $40^\circ$ , desciende hasta  $0^\circ$  y se estabiliza cerca de  $20^\circ$ . El ángulo  $\beta$  (verde) oscila inicialmente, desciende gradualmente pasando  $-20^\circ$  y se estabiliza en  $-20^\circ$ . El ángulo  $\gamma$  (azul) permanece estable cerca de  $0^\circ$ . Esta perspectiva evidencia la adaptación continua del manipulador a los

movimientos de la base para mantener la orientación deseada del efecto final, demostrando la efectividad del control coordinado.

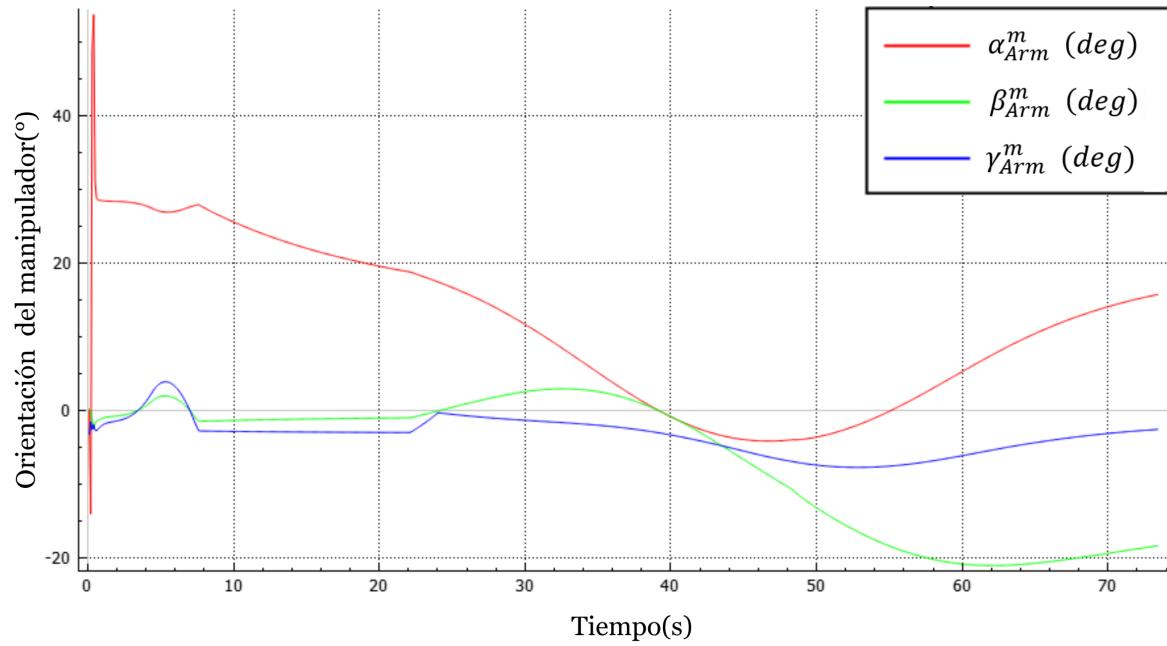


Figura 4.35: Orientación  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  del manipulador vista desde la plataforma móvil

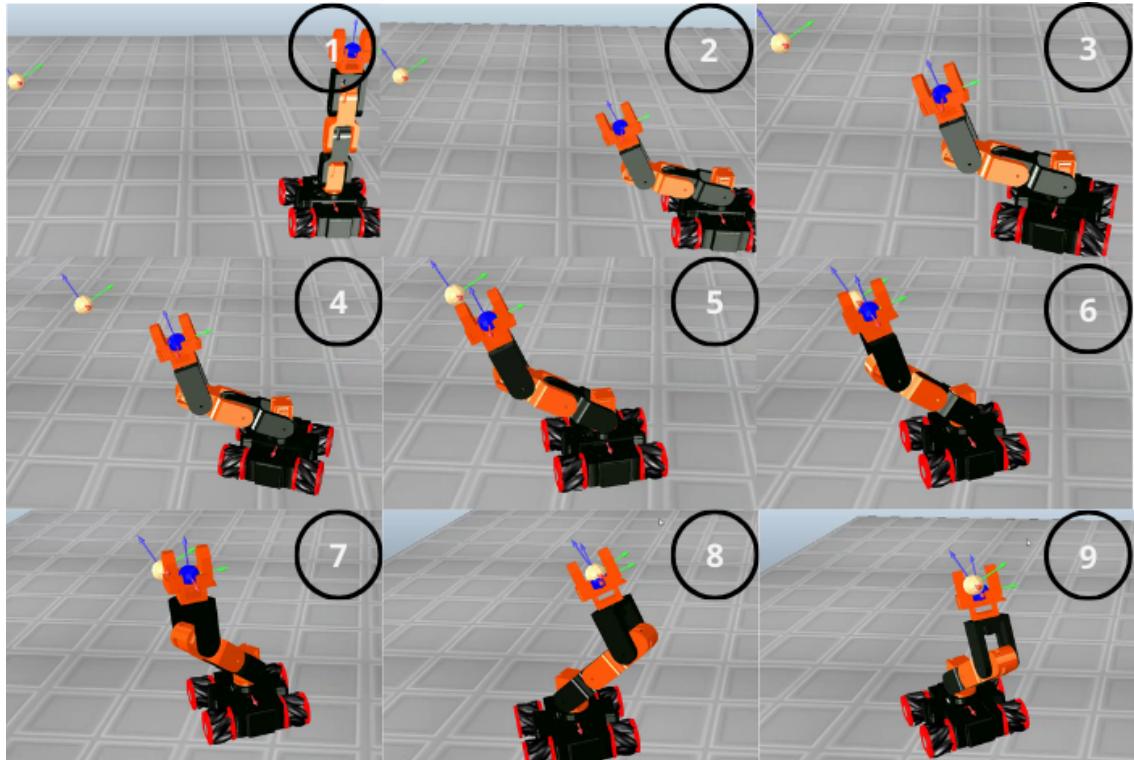


Figura 4.36: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la simulación en *CoppeliaSim*.

En la secuencia fotográfica (fig. 4.36) se observa que el robot móvil-manipulador logró alcanzar el punto establecido. Para la validación experimental, se colocaron flechas como guías visuales para indicar el ángulo de orientación del robot móvil y se marcaron distintos puntos de referencia a lo largo del eje  $x$ , lo que permitió verificar que tanto la plataforma móvil como el efecto final se aproximaron de forma consistente a sus posiciones objetivo. La secuencia de nueve etapas muestra la coordinación efectiva entre la plataforma móvil y el brazo manipulador durante todo el proceso de navegación y manipulación simultánea.



# Capítulo 5

## Resultados Experimentales y Conclusiones

### 5.1. Resultados

Para validar el comportamiento del robot físico, se realizaron pruebas experimentales utilizando los mismos puntos objetivo y condiciones que en las simulaciones presentadas anteriormente. Para comprobar si el resultado era el esperado, se procedió a graficar los valores de posición, además de presentar una línea de tiempo fotográfica al final de cada prueba. Para el móvil, se gráfico la lectura de los *encoders* para conocer la posición en  $x_m^O$ ,  $y_m^O$  y su ángulo  $\gamma_m^O$ , lo que permite observar la acción directa de las señales de control  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_\gamma$  en la dinámica de desplazamiento y orientación. Para conocer la posición tanto del manipulador como del sistema completo, se utilizó la cinemática directa, calculada a partir de los valores obtenidos en cada ángulo articular, los cuales consideran el desplazamiento cartesiano del robot móvil. En este caso, las coordenadas  $tx_{Arm}^O$ ,  $ty_{Arm}^O$ ,  $tz_{Arm}^O$  siempre representan la posición del efecto final, pero los ángulos de orientación  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependen de la referencia utilizada. Así, al considerar la base móvil, los ángulos reflejan la rotación de la plataforma y del manipulador ( $\alpha_m^O$ ,  $\beta_m^O$ ,  $\gamma_m^O$ ), mientras que respecto al origen global se obtiene la orientación real del efecto en el espacio ( $\alpha_{Arm}^O$ ,  $\beta_{Arm}^O$ ,  $\gamma_{Arm}^O$ ). Este análisis evidencia cómo la interacción entre la base y el brazo modifica la orientación del efecto final, buscando verificar que se mantenga la configuración deseada. La posición actual se puede obtener de las ecuaciones planteadas en el capítulo de odometría (Cap 2.7). Donde a partir de las velocidades medidas de cada rueda podemos obtener la velocidad (5.1) y a partir de estas velocidades integrar respecto al tiempo para obtener la posición medida  $x_m$ ,  $y_m$ ,  $\gamma_m$  (5.2).

$$\begin{aligned} V_F &= \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} \\ V_L &= \frac{-v_1 + v_2 + v_3 - v_4}{4} \\ \omega &= \frac{-v_1 + v_2 - v_3 + v_4}{4} \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 x_m &= \int V_F dt = \int \left( \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} \right) dt \\
 y_m &= \int V_L dt = \int \left( \frac{-v_1 + v_2 + v_3 - v_4}{4} \right) dt \\
 \gamma_m &= \int \omega dt = \int \left( \frac{-v_1 + v_2 - v_3 + v_4}{4} \right) dt
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

### 5.1.1. Primera prueba



Figura 5.1: Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano  $xy$  de la primera prueba.

En esta prueba se estableció como objetivo que el efecto final alcanzara la siguiente configuración:

$$\begin{aligned}
 x_{Pd}^O &= 1,0 \text{ m}, & y_{Pd}^O &= 0,0 \text{ m}, & z_{Pd}^O &= 0,5 \text{ m} \\
 \alpha_{Pd}^O &= 0^\circ, & \beta_{Pd}^O &= 0^\circ, & \gamma_{Pd}^O &= 0^\circ \\
 \gamma_{md}^O &= -45^\circ
 \end{aligned}$$

Es importante mencionar que en esta prueba la orientación deseada del móvil,  $\gamma_{md}$ , se estableció en  $-45^\circ$ , lo cual es posible gracias al control directo de la orientación del móvil,

como se explicó en el capítulo 4. Esto permite que el móvil mantenga una orientación establecida durante el desplazamiento, facilitando la coordinación con el manipulador para alcanzar la posición y orientación del efecto final deseada. En la figura 5.1 se observa que el sistema alcanza aproximadamente la configuración objetivo, donde la plataforma móvil mantiene la orientación programada y el manipulador se extiende para posicionar el efecto final en la zona deseada. La coordinación entre ambos subsistemas es visualmente evidente, mostrando consistencia con el comportamiento simulado.

La figura 5.2 muestra la evolución de las coordenadas cartesianas  $tx_{Arm}^O$ ,  $ty_{Arm}^O$ ,  $tz_{Arm}^O$  del efecto final durante la primera prueba experimental. La coordenada  $tx$  (línea roja) presenta un crecimiento gradual desde 0.25 m hasta 1.0 m. La coordenada  $ty$  (línea verde) se mantiene en cero, confirmando el movimiento unidireccional programado. La coordenada  $tz$  (línea azul) inicia en 0.6 m, desciende a 0.4 m inicialmente y se eleva hasta aproximadamente 0.5 m, comportamiento similar al observado en simulación (figura 4.17).

La figura 5.3 presenta los ángulos  $\alpha_{Arm}^O$ ,  $\beta_{Arm}^O$  y  $\gamma_{Arm}^O$  del efecto final. El ángulo  $\alpha$  (línea roja) se mantiene estable cerca de  $0^\circ$  al igual que el ángulo  $\beta$  (línea verde) permanece alrededor de  $0^\circ$ . El ángulo  $\gamma$  (línea azul) muestra oscilaciones discretas significativas, con cambios abruptos antes de estabilizarse cerca de  $-0.5^\circ$ . Este comportamiento es coherente con el patrón simulado (figura 4.18), pero con mayores perturbaciones propias del sistema físico.

La figura 5.4 compara las posiciones del efecto final y la plataforma móvil. El efecto final (línea roja sólida) alcanza 1.0 m mientras la plataforma (línea roja punteada) llega a 0.8 m, con una diferencia de 0.2 m que demuestra la extensión del manipulador para compensar y alcanzar el objetivo. Las coordenadas  $y$  de ambos sistemas permanecen en cero. Este resultado coincide con la simulación (figura 4.19), validando el funcionamiento correcto del control integrado.

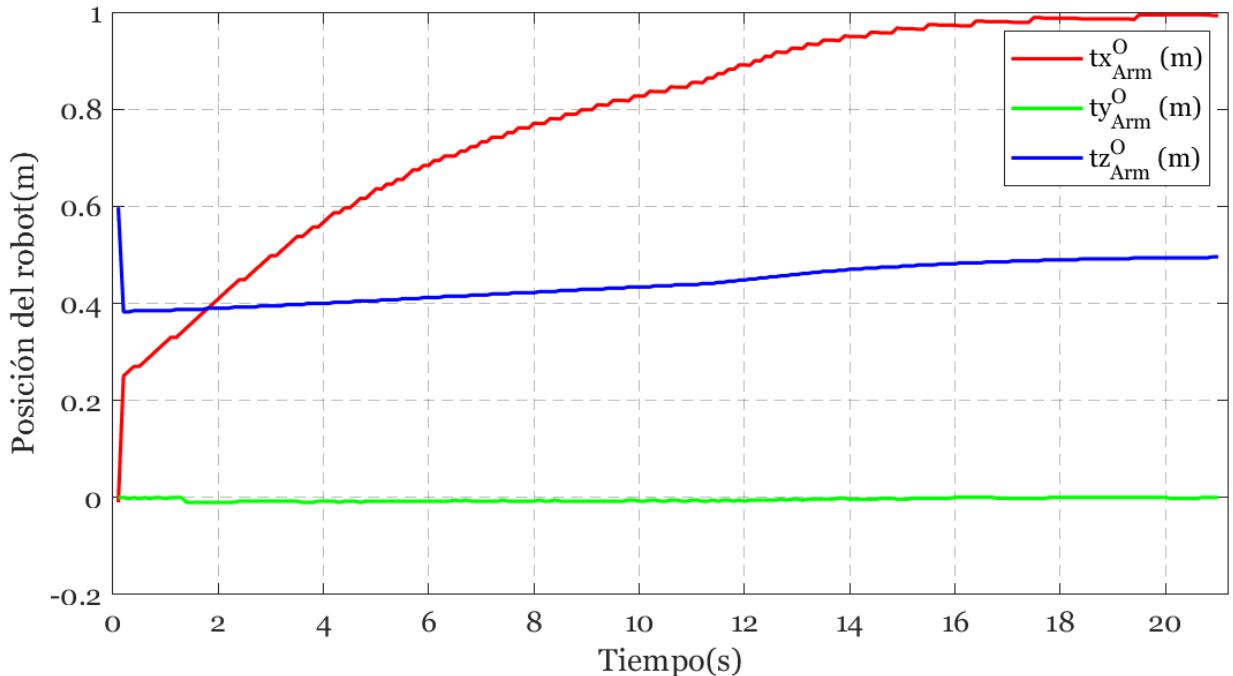


Figura 5.2: Posición del efecto final en coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

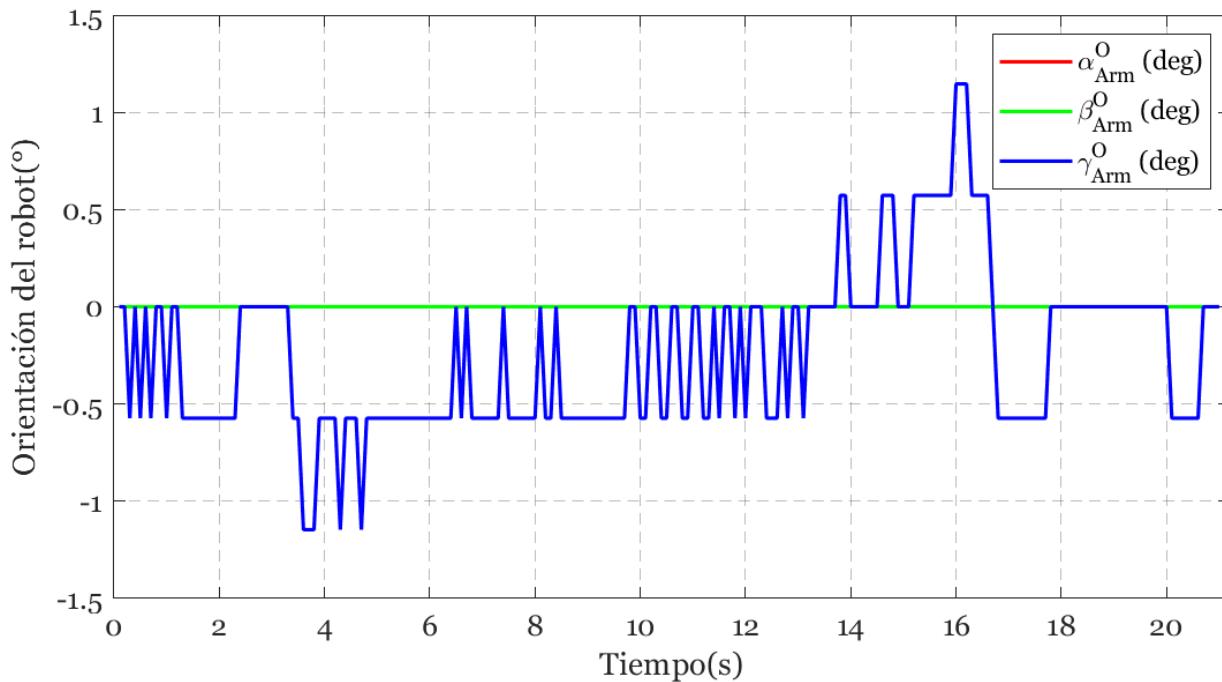


Figura 5.3: Orientación del efecto final en ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

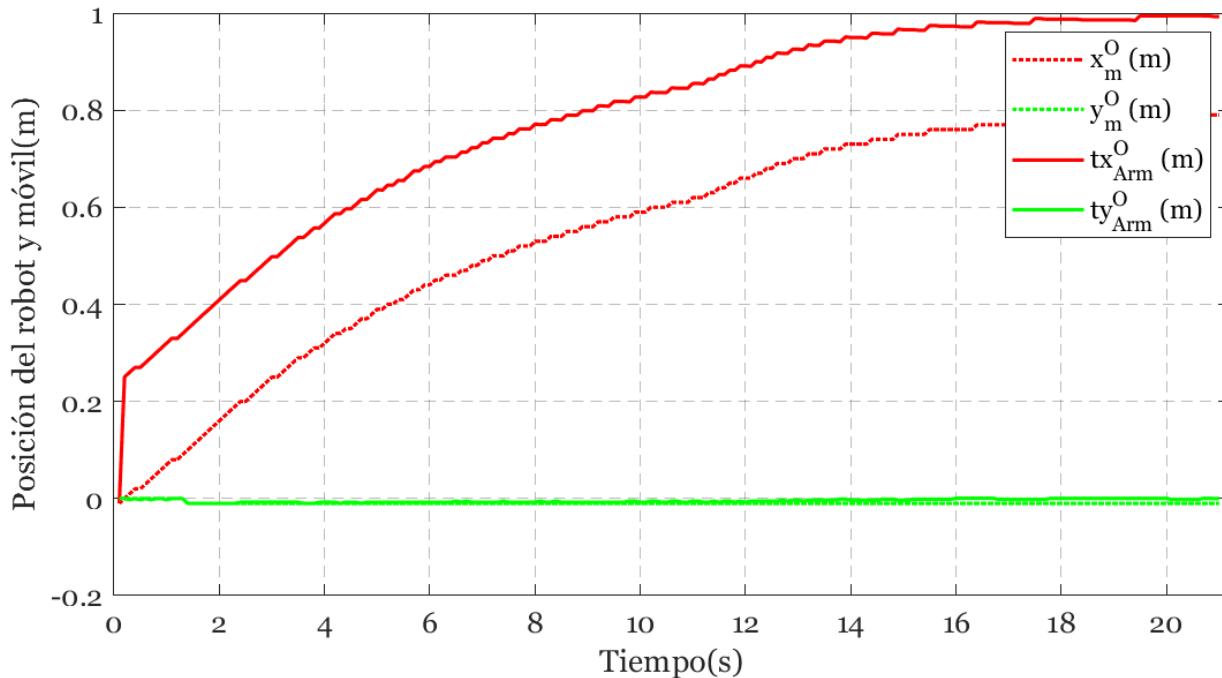


Figura 5.4: Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en  $x$  y  $y$ .

La figura 5.5 muestra la evolución del ángulo  $\gamma_m^O$  de la plataforma móvil, manteniéndose estable en la orientación deseada. Este comportamiento reproduce lo observado en simulación (figura 4.20), lo que demuestra la función del control de orientación de la base móvil.

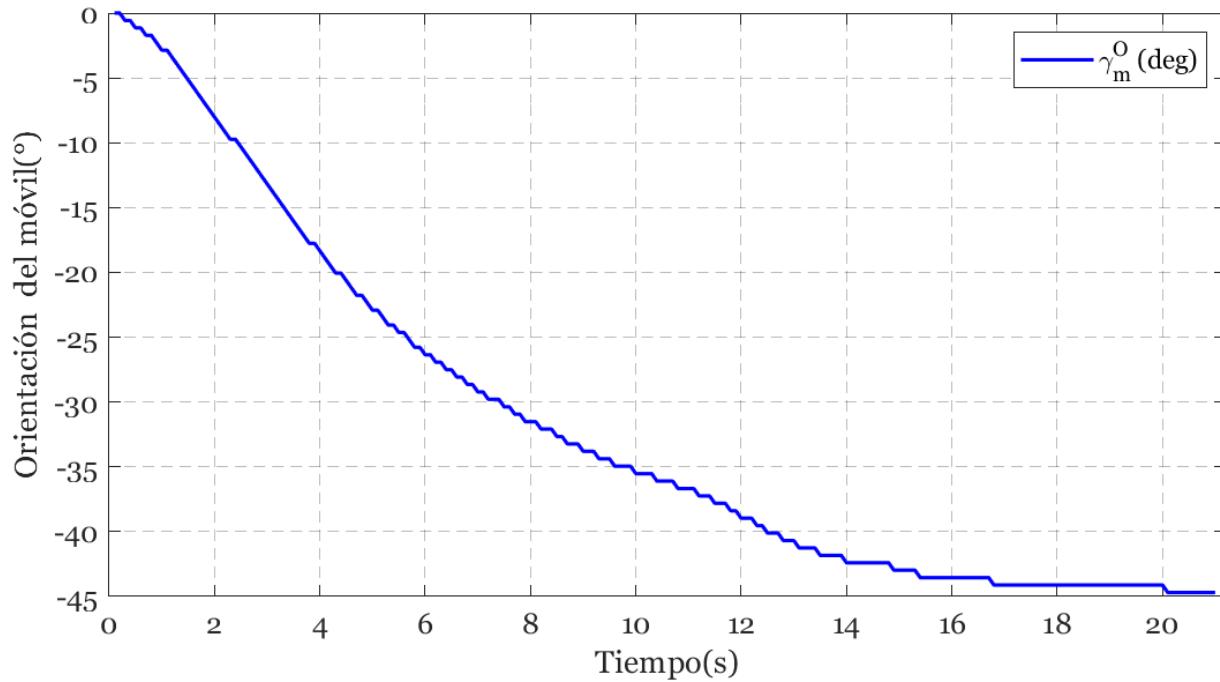
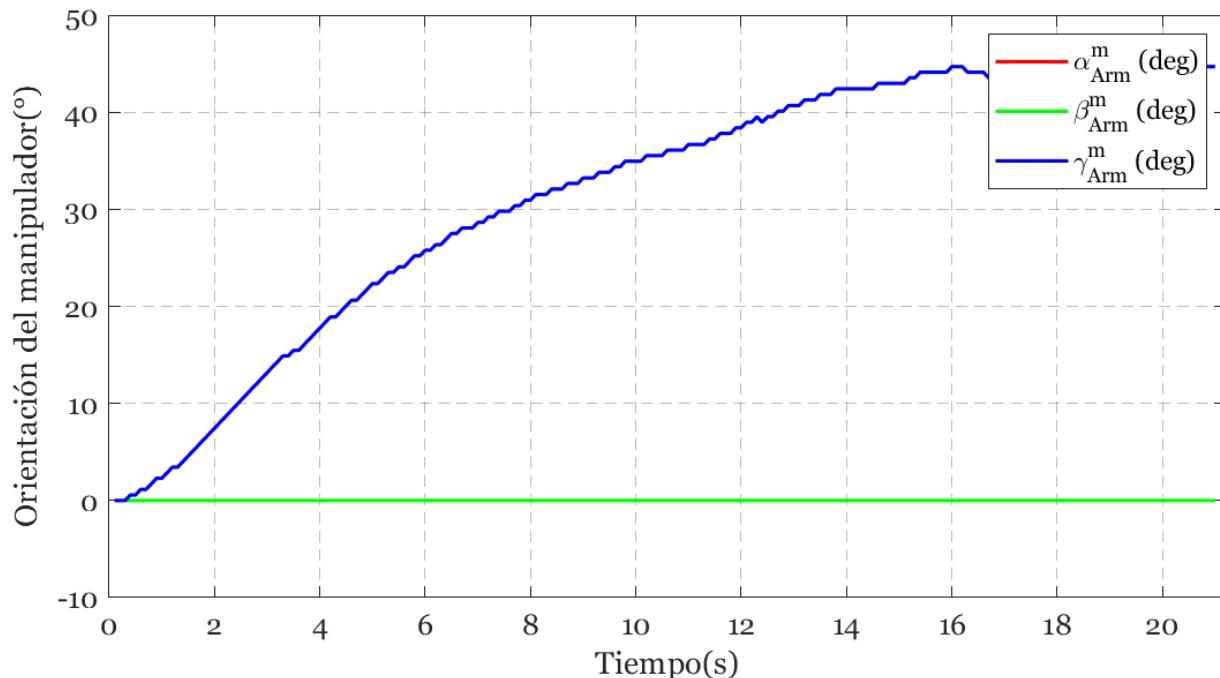
Figura 5.5: Orientación de la plataforma móvil en ángulo  $\gamma$ .

Figura 5.6: Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil.

La figura 5.6 presenta los ángulos del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil. Los ángulos  $\alpha_{Arm}^m$  y  $\beta_{Arm}^m$  (líneas roja y verde) permanecen constantes cerca de  $0^\circ$ , mientras que el ángulo  $\gamma_{Arm}^m$  (línea azul) incrementa, compensando la rotación de la plataforma. Es-

to resulta en una orientación global del efecto final cercana a  $0^\circ$ , lo que coincide con la simulación (figura 4.21) y valida la coordinación efectiva entre subsistemas.

En la secuencia fotográfica (figura 5.8) se observa que el robot móvil-manipulador logró alcanzar el punto establecido. No obstante, se presentaron ligeras tolerancias en las posiciones alcanzadas, atribuibles a las condiciones propias de un sistema real, como holguras mecánicas, balanceos estructurales y pequeños juegos en los mecanismos. Para la validación experimental, el desplazamiento en el eje  $z$  fue medido con un flexómetro, registrándose una altura cercana a los 0,5 metros, tal como se había definido en los parámetros de referencia, asimismo se colocaron marcas como guías visuales. Para observar el movimiento de los ángulos de orientación del robot móvil se presenta la figura 5.7, la cual muestra una vista superior para permitir observar el movimiento del robot. Esto permitió verificar que tanto la plataforma móvil como el efecto final se aproximaron de forma consistente a sus posiciones objetivo. La primera prueba experimental muestra un comportamiento cercano al obtenido en la simulación, validando tanto el modelo cinemático como la estrategia de control implementada.

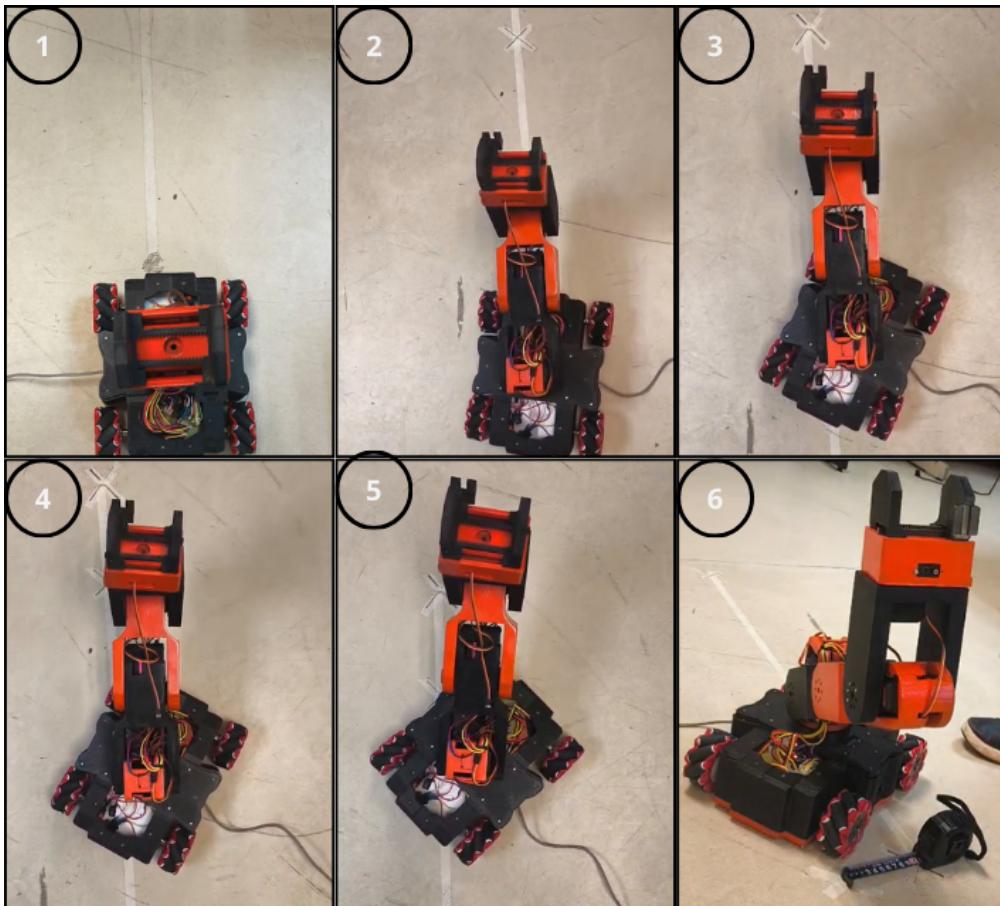


Figura 5.7: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual.

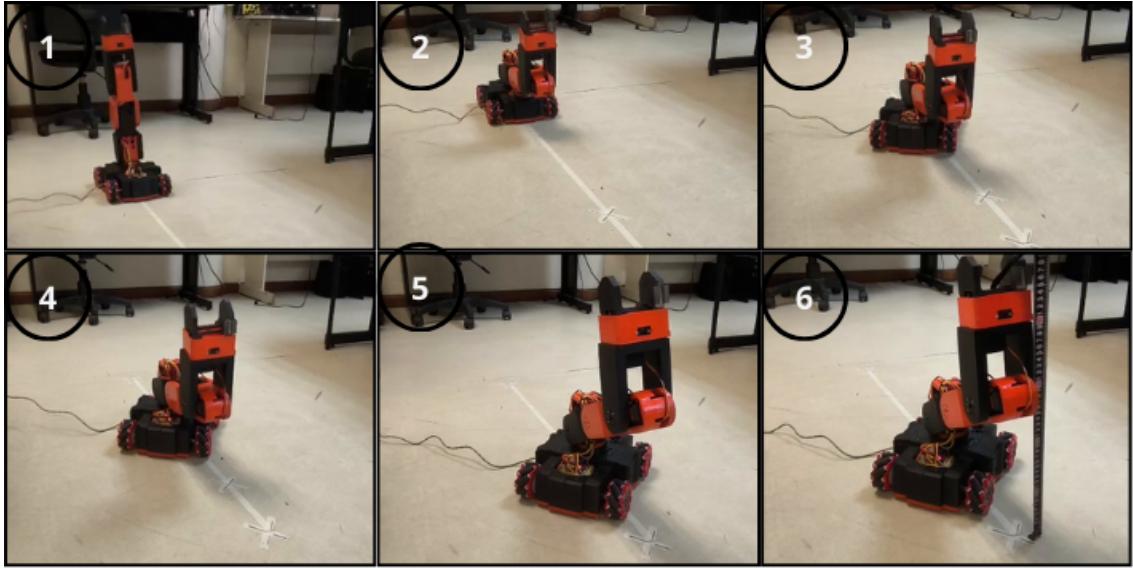


Figura 5.8: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual.

### 5.1.2. Prueba 2

En esta segunda prueba se evaluó la capacidad del sistema móvil-manipulador para alcanzar un objetivo ubicado en el cuadrante negativo del plano  $xy$ .

$$\begin{aligned} x_{Pd}^O &= -1,0 \text{ m}, & y_{Pd}^O &= -1,0 \text{ m}, & z_{Pd}^O &= 0,368 \text{ m} \\ \alpha_{Pd}^O &= 45^\circ, & \beta_{Pd}^O &= 0^\circ, & \gamma_{Pd}^O &= 0^\circ \\ \gamma_{md}^O &= 0^\circ \end{aligned}$$

Asimismo, el ángulo de orientación deseado del robot móvil se fijó en  $\gamma_{md}^O = 0^\circ$ . Esta configuración representa un caso más desafiante debido a la propuesta de un ángulo del efecto final y el sentido de desplazamiento del móvil, lo cual pone a prueba la coordinación entre la navegación del robot y el control del manipulador. En la figura 5.9 se observa que el sistema real reproduce de manera aproximada la configuración planteada, mostrando consistencia con la segunda simulación (figura 4.23).

La figura 5.10 presenta la evolución de las coordenadas cartesianas del efecto final. Las coordenadas  $tx_{Arm}^O$  (línea roja) y  $ty_{Arm}^O$  (línea verde) muestran un comportamiento descendente gradual y simétrico, partiendo desde valores iniciales cercanos a 0 m y convergiendo hacia aproximadamente -1.0 m. Este movimiento coordinado en el plano horizontal indica una trayectoria diagonal controlada. La coordenada  $tz_{Arm}^O$  (línea azul) inicia en aproximadamente 0.6 m, desciende y posteriormente se estabiliza alrededor de 0.4 m, patrón que coincide con lo observado en la simulación (figura 4.24), aunque con menor variabilidad debido a la dinámica física del sistema real.



Figura 5.9: Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano  $xy$  de la segunda prueba.

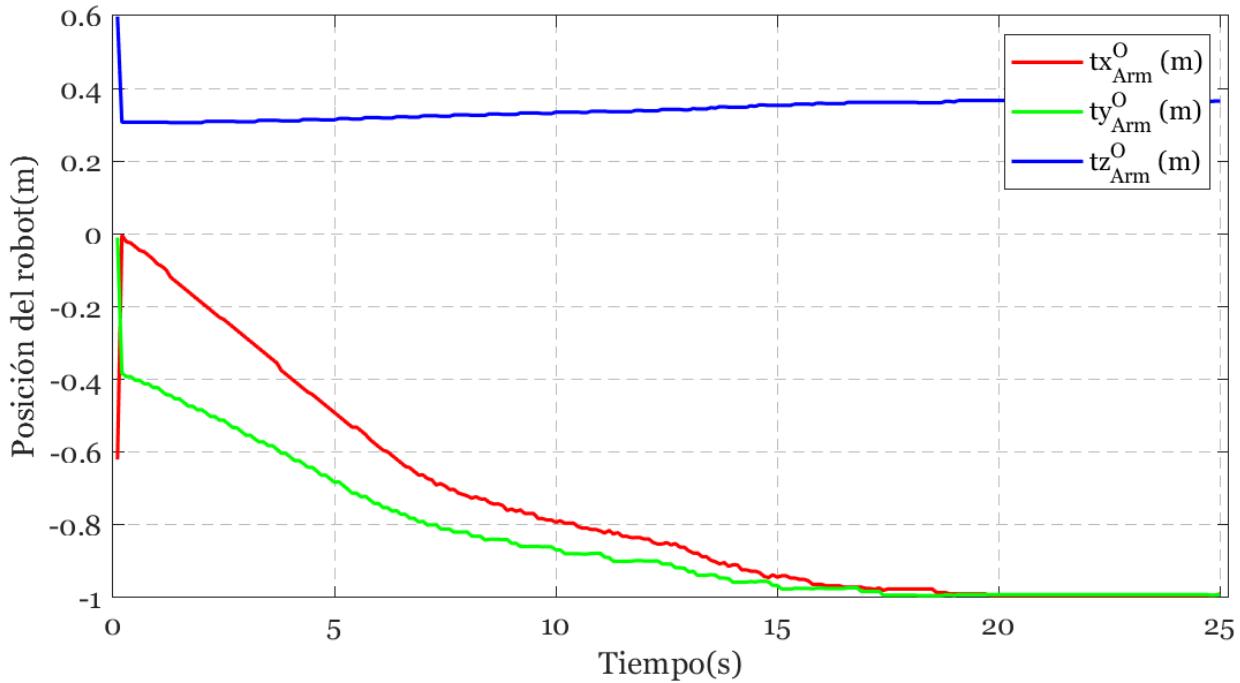


Figura 5.10: Posición cartesiana del efecto final en la segunda prueba.

La figura 5.11 muestra la orientación del efecto final en el sistema de coordenadas global. El ángulo  $\alpha_{Arm}^O$  (línea roja) alcanza rápidamente  $45^\circ$  y se mantiene estable, comportamiento consistente con la simulación (figura 4.25), confirmando que la orientación del efecto final se logra principalmente a través del primer grado de libertad rotacional del manipulador. El

ángulo  $\beta_{Arm}^O$  (línea verde) se mantiene estable cerca de  $0^\circ$ , mientras que el ángulo  $\gamma_{Arm}^O$  (línea azul) presenta oscilaciones cercanas a  $0^\circ$ , buscando validar el control de la orientación global del efecto final.

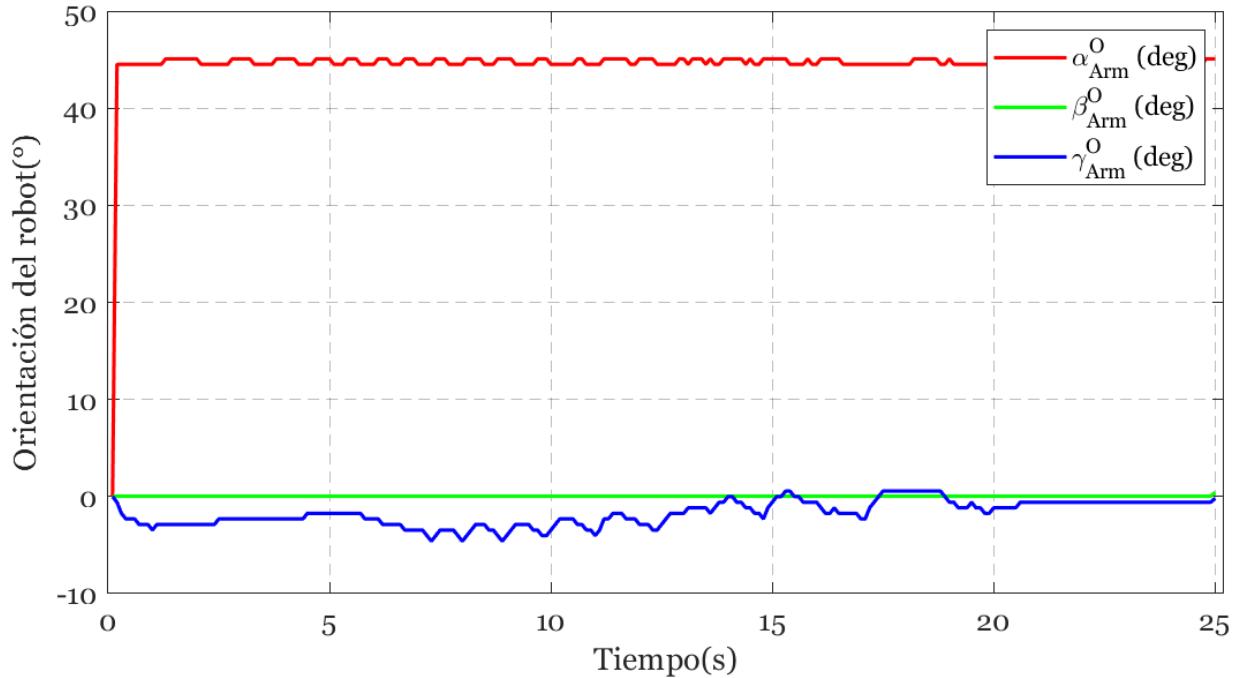


Figura 5.11: Orientación global del efecto final en la segunda prueba.

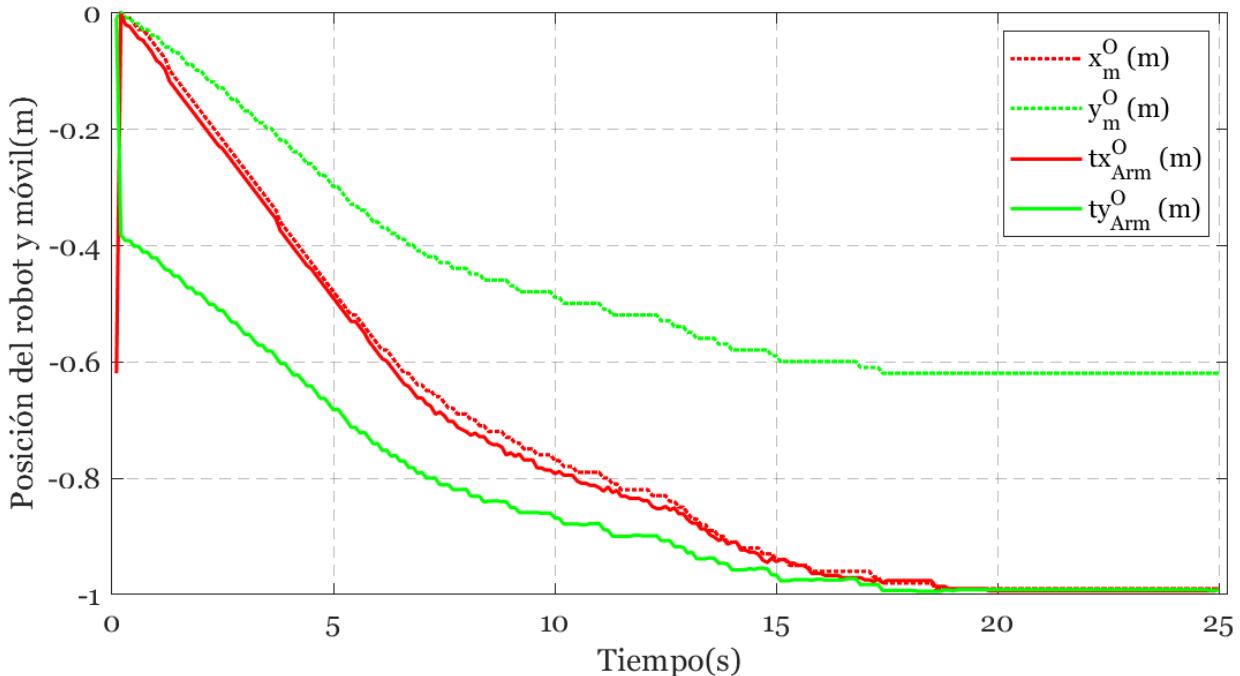


Figura 5.12: Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en el plano horizontal en la segunda prueba.

La figura 5.12 compara las trayectorias del efecto final y la plataforma móvil en el plano horizontal. Las líneas sólidas (roja y verde) representan las coordenadas  $x$  e  $y$  del efecto final, mientras que las líneas punteadas muestran las coordenadas correspondientes de la plataforma móvil. Se observa una coordinación efectiva entre ambos subsistemas, donde las trayectorias siguen patrones similares pero con ligeras diferencias que evidencian la contribución del manipulador. Este resultado reproduce el mismo comportamiento identificado en la simulación (figura 4.26), donde la plataforma móvil realiza el posicionamiento principal y el manipulador efectúa los ajustes finos para alcanzar la configuración objetivo.

La figura 5.13 muestra la evolución del ángulo  $\gamma_m^O$  de la plataforma móvil durante la segunda prueba. Se observa un comportamiento más dinámico comparado con la primera prueba, con variaciones continuas entre aproximadamente  $-5^\circ$  y  $0^\circ$ . Estas fluctuaciones son coherentes con las oscilaciones presentes en la simulación (figura 4.27), reflejando el control reactivo de orientación de la base móvil, que ajusta continuamente su orientación para optimizar la cinemática del sistema y facilitar el alcance del objetivo por parte del manipulador.

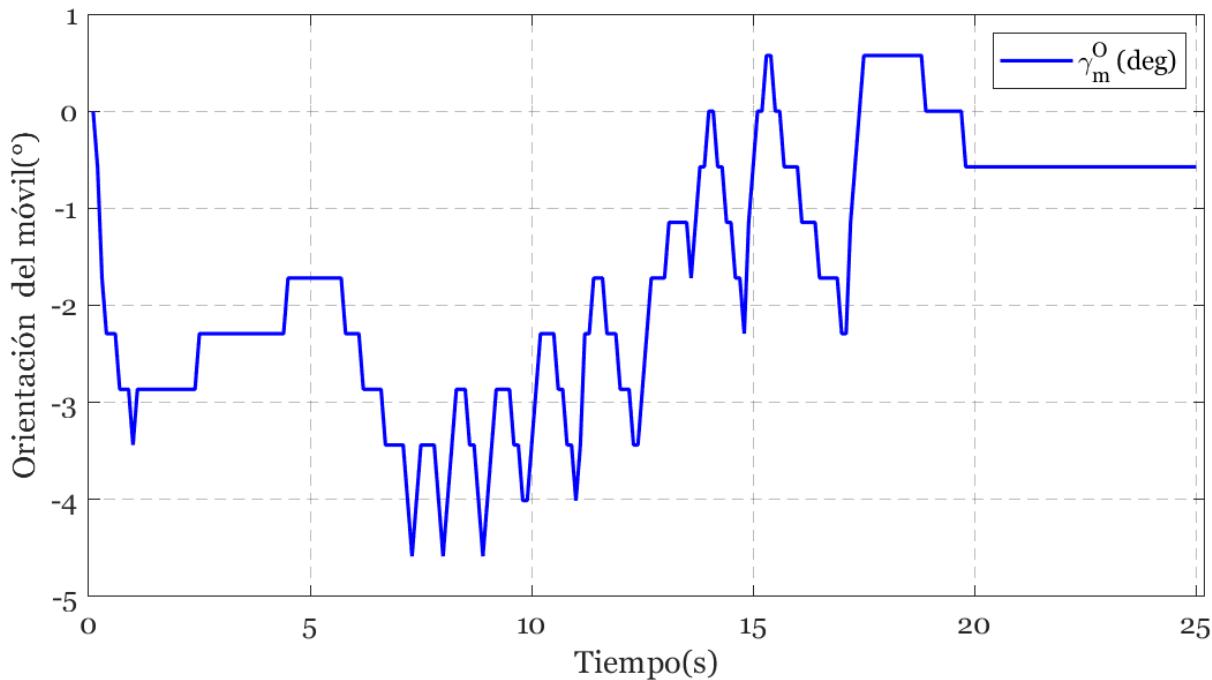


Figura 5.13: Orientación de la plataforma móvil en ángulo  $\gamma$  en la segunda prueba.

La figura 5.14 presenta los ángulos del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil durante la segunda prueba experimental. El ángulo  $\alpha_{Arm}^m$  (línea roja) muestra un crecimiento inicial abrupto desde  $0^\circ$  hasta aproximadamente  $45^\circ$ , manteniéndose estable en este valor con variaciones mínimas. Los ángulos  $\beta_{Arm}^m$  (línea verde) y  $\gamma_{Arm}^m$  (línea azul) permanecen prácticamente constantes cerca de  $0^\circ$ , con perturbaciones insignificantes. Este comportamiento reproduce de forma cercana lo observado en simulación (figura 4.28), demostrando la capacidad del manipulador para alcanzar y mantener orientaciones específicas mientras coordina efectivamente con el movimiento de la base móvil.

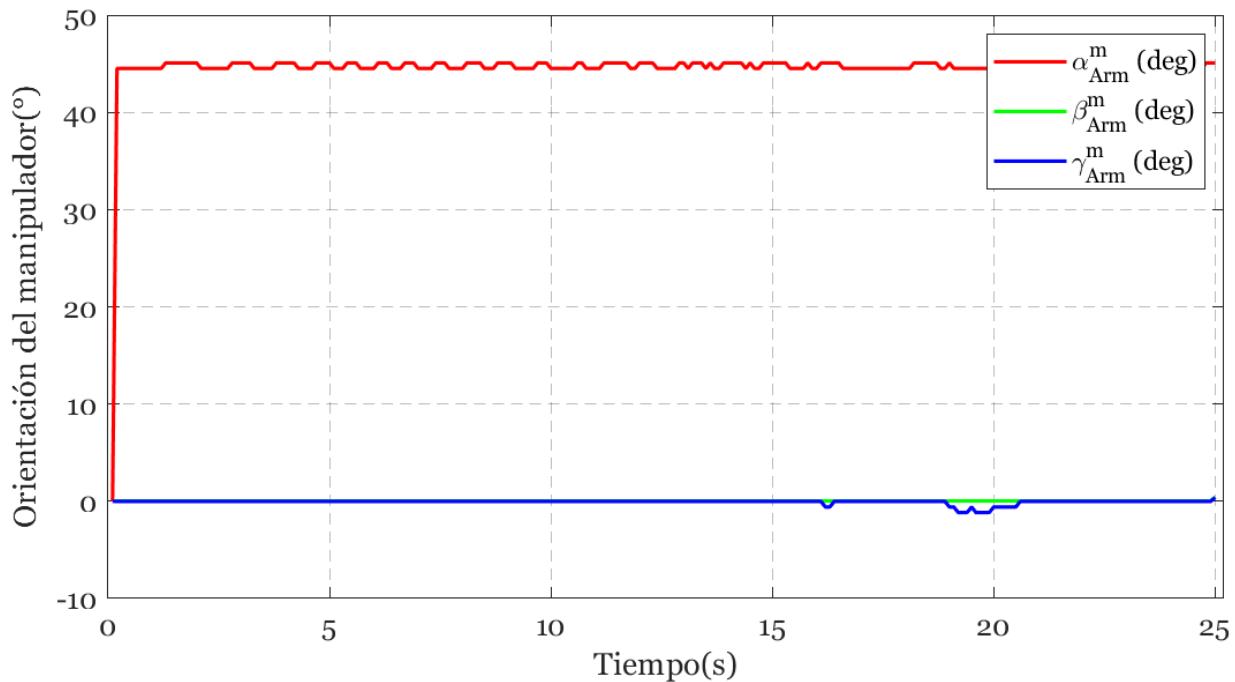


Figura 5.14: Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil en la segunda prueba.

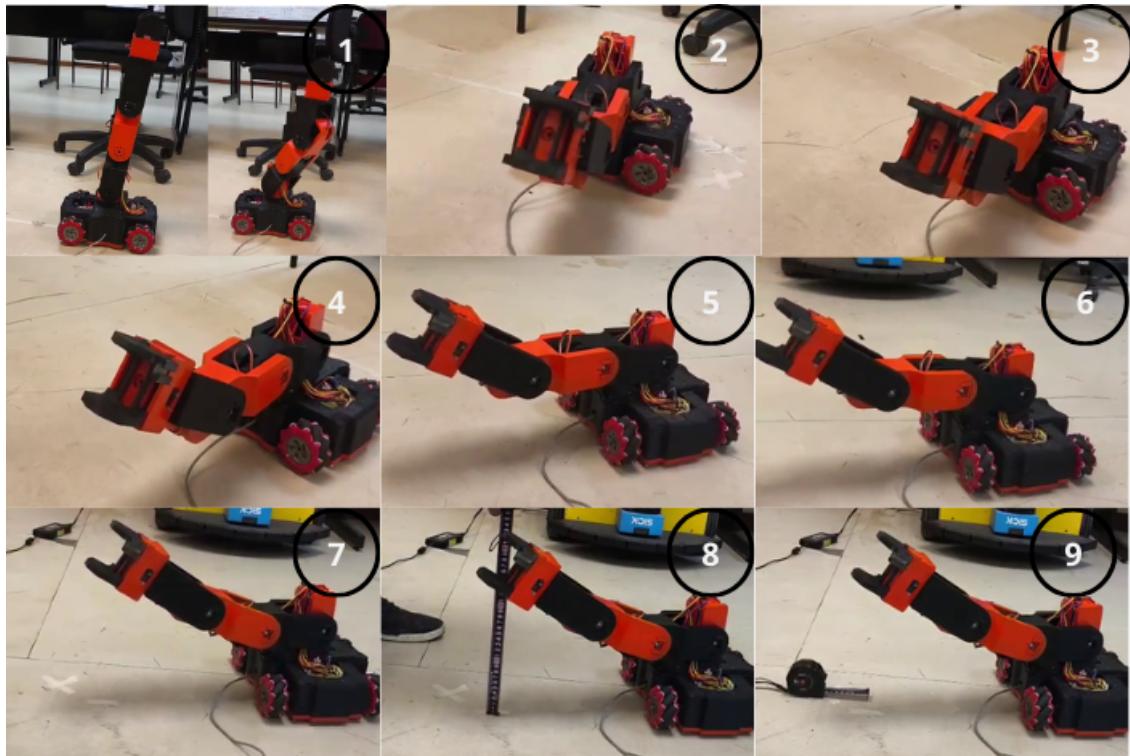


Figura 5.15: Secuencia fotográfica de la segunda prueba, movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio.

En la secuencia fotográfica (figura 5.15) se observa que el sistema móvil-manipulador alcanzó el punto objetivo planteado. Se presentaron pequeñas desviaciones en las posiciones logradas, atribuibles a factores propios de un sistema real, aunque el comportamiento general coincidió con lo esperado en la simulación, siendo este error de aproximadamente 10 cm. Para la figura 5.16 se presenta la secuencia fotográfica de la segunda prueba donde se puede observar el desplazamiento desde una vista superior confirma el movimiento correcto aun con el desfase físico.

La segunda prueba experimental muestra un comportamiento cercano al obtenido en simulación, validando la capacidad del sistema para ejecutar trayectorias más complejas y dinámicas mientras mantiene la coordinación efectiva entre la plataforma móvil y el manipulador. Estos resultados respaldan la robustez y versatilidad de la estrategia de control implementada para diferentes configuraciones objetivo.



Figura 5.16: Secuencia fotográfica de la segunda prueba, movimiento del sistema móvil-manipulador vista superior.

### 5.1.3. Prueba 3

En esta tercera prueba se evaluó la capacidad del sistema móvil-manipulador para alcanzar un objetivo ubicado en el semiplano negativo del eje  $y$ .

$$\begin{aligned}
 x_{Pd}^O &= 0,0 \text{ m}, & y_{Pd}^O &= -1,0 \text{ m}, & z_{Pd}^O &= 0,5 \text{ m} \\
 \alpha_{Pd}^O &= 30^\circ, & \beta_{Pd}^O &= 0^\circ, & \gamma_{Pd}^O &= 30^\circ \\
 \gamma_{md}^O &= 30^\circ
 \end{aligned}$$

En esta configuración el ángulo de orientación deseado del efecto final se fijó en  $\alpha_{Pd}^O = 30^\circ$  con  $\beta_{Pd}^O = 0^\circ$   $\gamma_{Pd}^O = 30^\circ$ , mientras que la orientación deseada del robot móvil se estableció en  $\gamma_{md}^O = 30^\circ$ . Este caso resulta especialmente exigente porque combina un desplazamiento lateral en  $y$  con una orientación del móvil diferente a la orientación del efecto, lo que pone a prueba la coordinación entre la planificación de la trayectoria del chasis y la regulación del manipulador. En la figura 5.17 se aprecia cómo el sistema real reproduce, de forma aproximada, la configuración planteada, manteniendo consistencia con las simulaciones previas (véase la segunda simulación en la figura 4.23).



Figura 5.17: Comparación entre la posición real del robot móvil y la posición de referencia en el plano  $xy$  para la tercera simulación de la tercera prueba.

La figura 5.18 presenta la evolución de las coordenadas cartesianas del efecto final durante la tercera prueba. Las coordenadas objetivo  $tx_{Arm}^O$  e  $ty_{Arm}^O$  se mantienen constantes en

aproximadamente  $-0$  m y  $-1,0$  m, respectivamente, mientras que las coordenadas medidas del efecto final muestran una convergencia progresiva hacia dichos valores. La coordenada  $x$  permanece cercana a 0 m con ligeras oscilaciones, en tanto que la coordenada  $y$  desciende de forma controlada desde 0 m hasta  $-1,0$  m, reproduciendo el patrón descendente observado en la segunda prueba, aunque con una trayectoria distinta. La coordenada  $tz_{Arm}^O$  conserva estabilidad en el intervalo  $0,4$ – $0,6$  m, confirmando el control en el eje vertical.

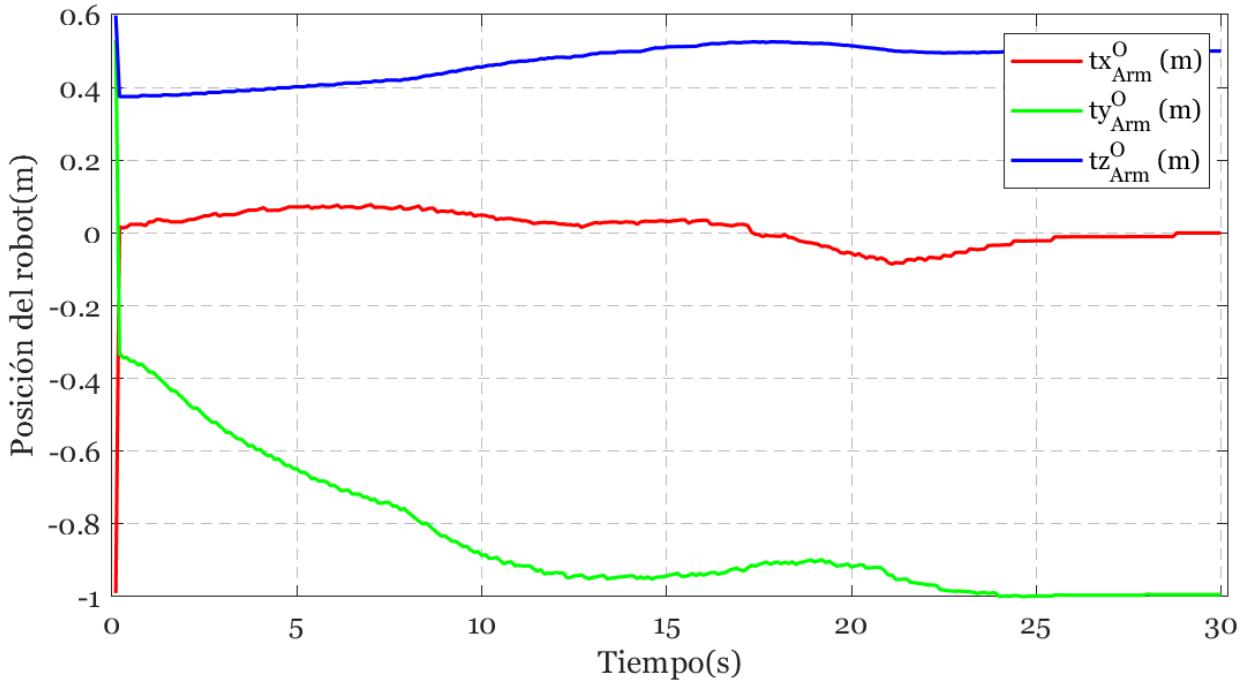


Figura 5.18: Posición cartesiana del efecto final en la tercera prueba.

La figura 5.19 muestra la orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil. A diferencia de la estabilidad reportada en la segunda prueba, el ángulo  $\alpha_{Arm}^O$  presenta variaciones notables, oscilando entre aproximadamente  $-10$  y  $30$ . Los ángulos  $\beta_{Arm}^O$  y  $\gamma_{Arm}^O$  también exhiben oscilaciones más marcadas. Se aprecia una zona de transición con cambios simultáneos en los tres ángulos. Este comportamiento refleja la mayor complejidad de la configuración objetivo y la necesidad de ajustes dinámicos por parte del manipulador.

La figura 5.20 presenta la coordinación entre el efecto final y la plataforma móvil en el plano horizontal durante la tercera prueba. Las líneas sólidas (roja y verde) representan las coordenadas  $x$  e  $y$  del efecto final, mientras que las líneas punteadas corresponden a las coordenadas de la plataforma móvil. Se observa una coordinación entre ambos subsistemas, donde la plataforma móvil (líneas punteadas) establece las referencias objetivo en aproximadamente 0 m para  $x$  y  $-1,0$  m para  $y$ . Las trayectorias del efecto final siguen patrones de convergencia controlada, manteniéndose la coordenada  $x$  relativamente estable cerca de 0 m y descendiendo la coordenada  $y$  gradualmente desde 0 m hasta  $-1,0$  m. La diferencia entre las trayectorias del efecto final y de la plataforma móvil evidencia la contribución específica del manipulador en los ajustes finos necesarios para alcanzar la configuración objetivo, reproduciendo el mismo principio de coordinación jerárquica observado en pruebas anteriores,

donde la plataforma móvil realiza el posicionamiento principal y el manipulador efectúa las correcciones.

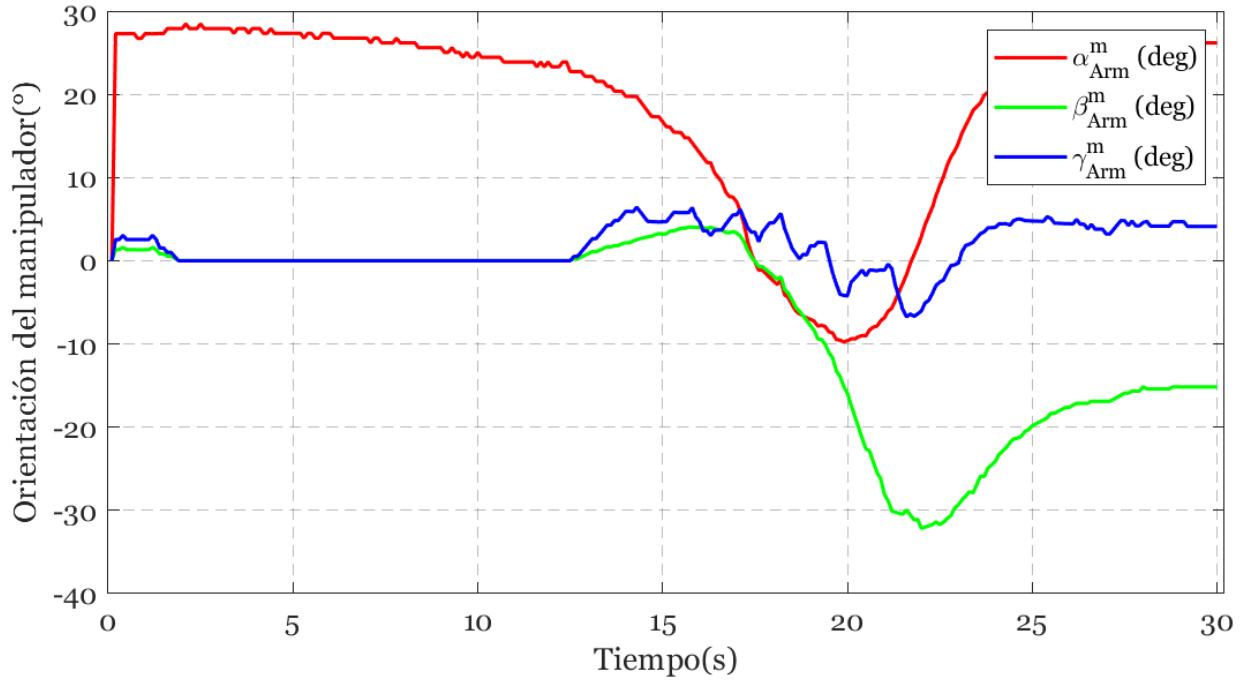


Figura 5.19: Orientación del manipulador en coordenadas de la plataforma móvil en la tercera prueba.

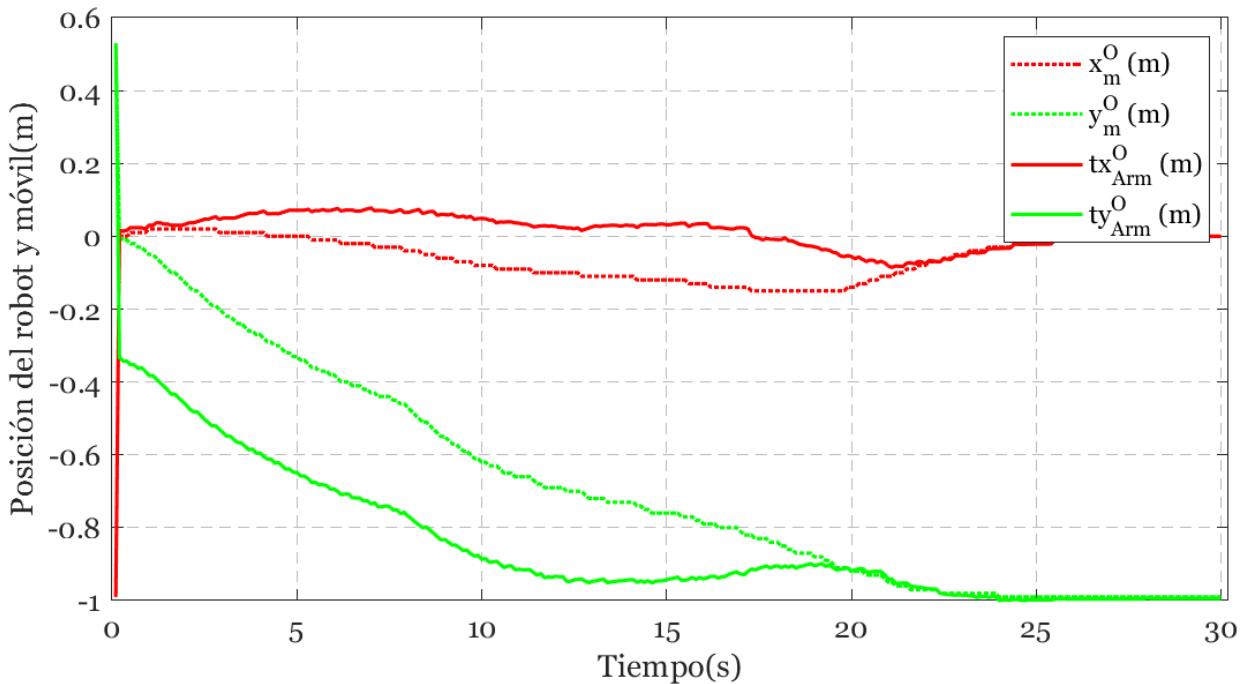


Figura 5.20: Coordinación entre efecto final y plataforma móvil en el plano horizontal en la tercera prueba.

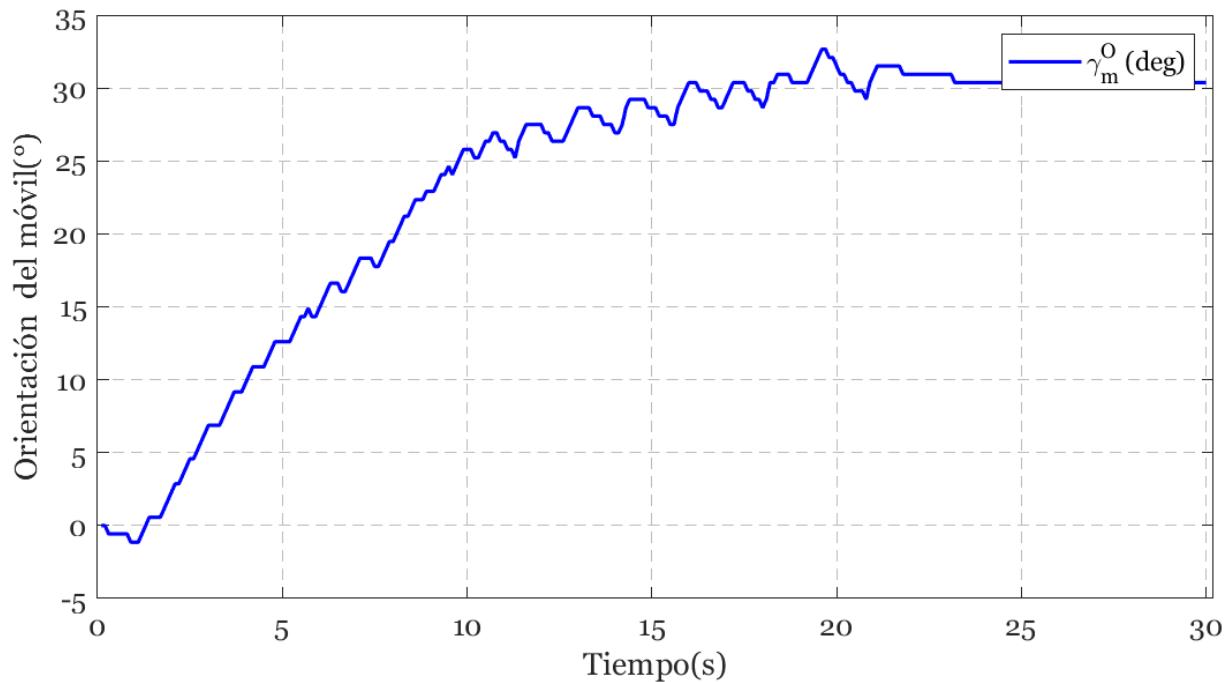


Figura 5.21: Orientación de la plataforma móvil en ángulo  $\gamma$  en la tercera prueba.

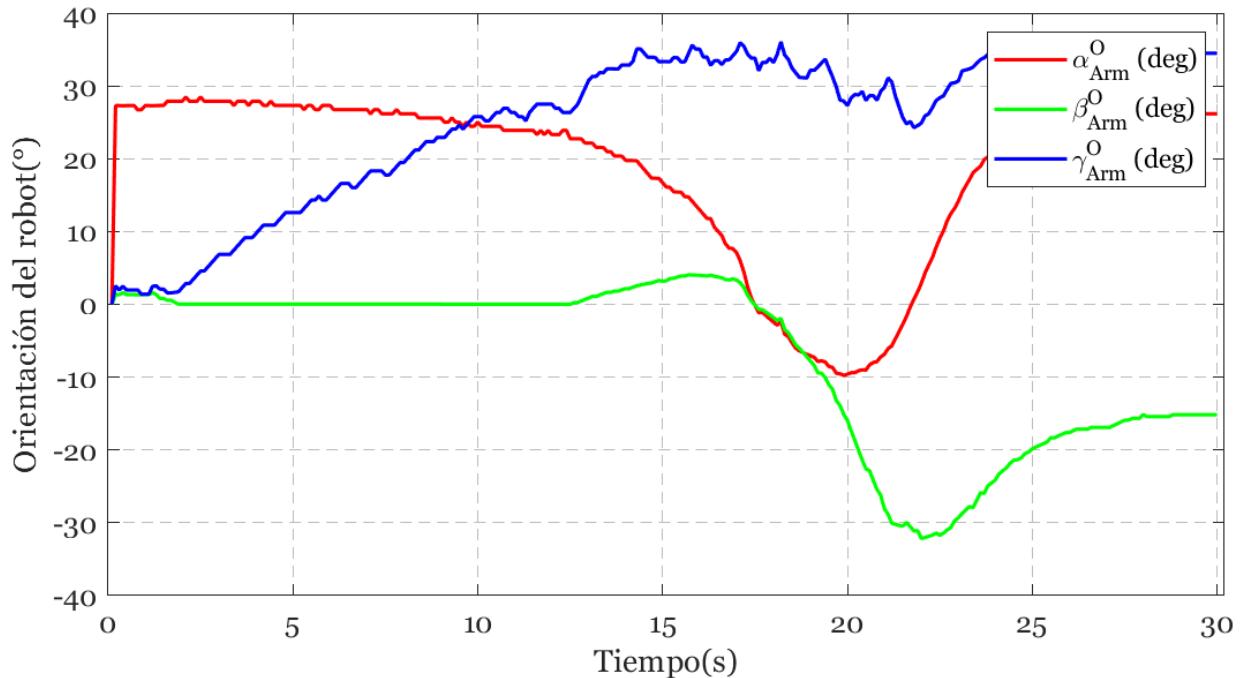


Figura 5.22: Orientación global del efecto final en la tercera prueba.

La figura 5.21 muestra la evolución del ángulo  $\gamma_m^O$  de la plataforma móvil. A diferencia de la segunda prueba, donde las variaciones fueron pequeñas (entre  $-5$  y  $0$ ), en esta ocasión se observa un crecimiento progresivo y sostenido desde  $0$  hasta aproximadamente  $30$ . Este

comportamiento indica que la configuración objetivo demanda una rotación significativa de la base móvil, la cual facilita el posicionamiento final del manipulador.

La figura 5.22 presenta la orientación global del efecto final. El ángulo  $\alpha_{Arm}^m$  inicia estable en torno a 25–30 durante los primeros 10 segundos, seguido de variaciones más dinámicas necesarias para cumplir la tarea. El ángulo  $\gamma_{Arm}^m$  muestra un incremento sostenido hasta aproximadamente 35, comportamiento que difiere significativamente de las oscilaciones mínimas observadas en la segunda prueba. Estos resultados evidencian que la orientación global del efecto final requiere rotaciones más amplias en esta configuración.

En la secuencia fotográfica (figura 5.24) se observa que el sistema móvil–manipulador alcanzó el punto objetivo definido para la tercera configuración. Se identificaron desviaciones más notorias respecto a las pruebas anteriores, principalmente en los ángulos del manipulador, reflejando la mayor complejidad de la tarea. No obstante, tanto la plataforma móvil como el efecto final lograron aproximarse a las posiciones de referencia de manera consistente, confirmando la capacidad del sistema para ejecutar movimientos de mayor exigencia en orientación y desplazamiento. En la figura 5.23 se puede visualizar desde un la perspectiva superior el cambio constante de los ángulos tanto de la plataforma móvil como del manipulador, para tratar de llegar a la misma posición presentada en la simulación.

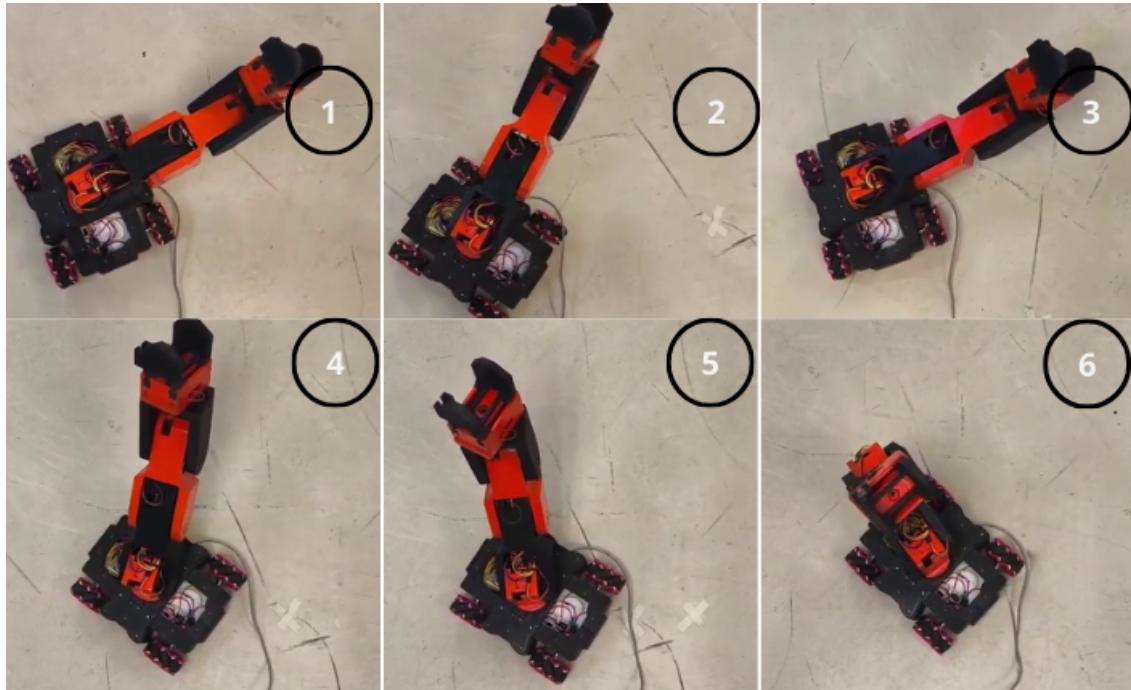


Figura 5.23: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil–manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual.

La tercera prueba experimental evidencia la versatilidad del sistema de control ante configuraciones objetivo más desafiantes. La mayor complejidad en los movimientos angulares, tanto del manipulador como de la base móvil, junto con la coordinación efectiva entre ambos subsistemas durante las fases de transición, valida la capacidad del sistema para ejecutar trayectorias dinámicas y rotaciones de mayor amplitud. Estos resultados confirman la robustez

y adaptabilidad del algoritmo de control, sentando las bases para aplicaciones robóticas en escenarios más complejos y exigentes.

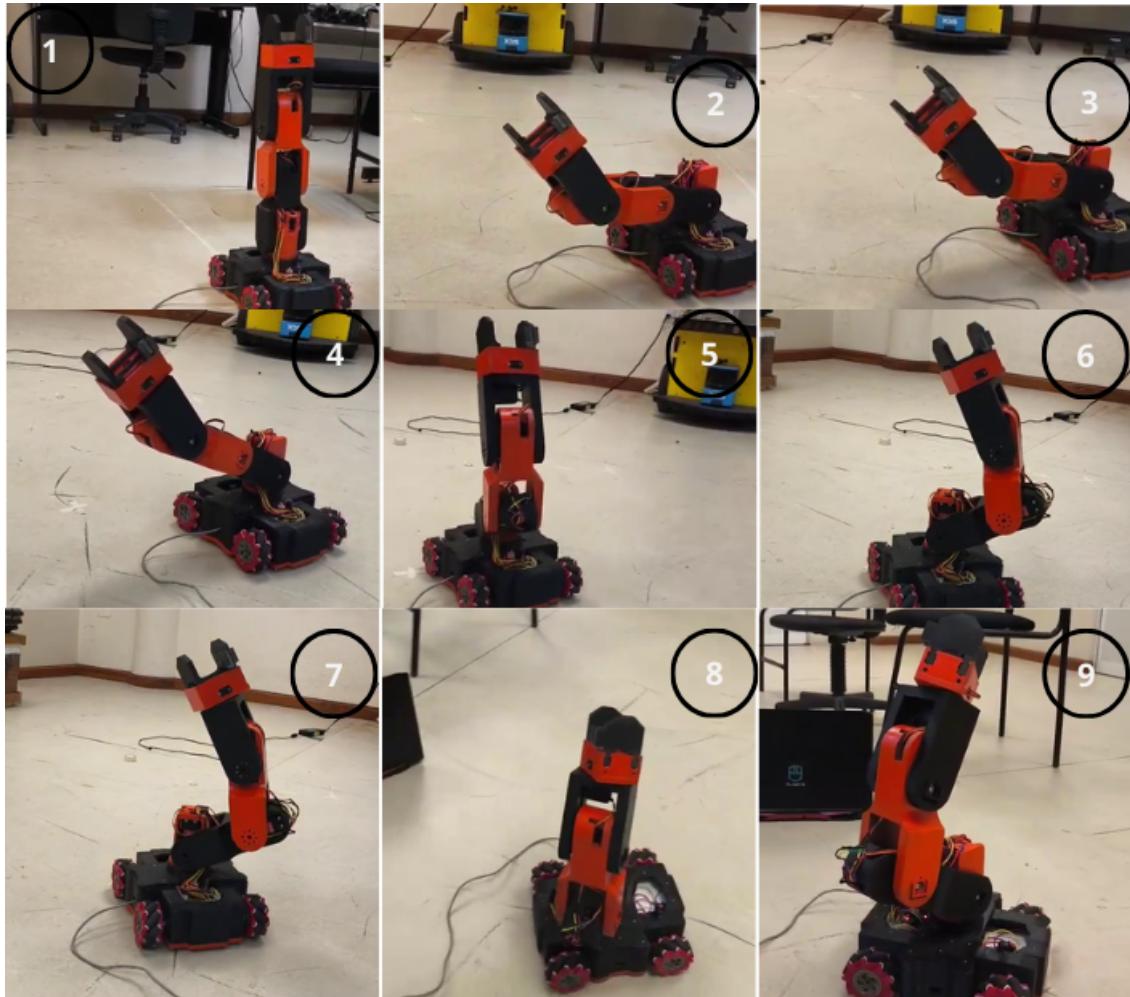


Figura 5.24: Secuencia fotográfica del movimiento del sistema móvil-manipulador durante la prueba en el laboratorio virtual.

## 5.2. Conclusión

El presente trabajo cumplió con el objetivo de diseñar, construir e implementar el control cinemático de un manipulador móvil compuesto por una base omnidireccional y un brazo robótico de cinco grados de libertad. La ejecución del proyecto implicó un proceso multidisciplinario que abarcó diseño mecánico, manufactura por impresión 3D, integración electrónica, simulación computacional, programación de sistemas de control y validación experimental.

El desarrollo del proyecto logró satisfacer completamente todos los objetivos específicos establecidos. Se diseñó y construyó la estructura del robot, se implementó el control cinemático tanto para la configuración omnidireccional de 4 ruedas como para el manipulador de 5 grados de libertad. Se diseñó y fabricó el circuito electrónico en una placa PCB personalizada, y se validó el funcionamiento completo del sistema verificando la interacción coordinada

entre el sistema móvil y el manipulador.

Respecto a la hipótesis planteada, si bien no se implementó completamente la funcionalidad de tomar y trasladar objetos físicos debido a limitaciones en el sistema de percepción y control de agarre, el control cinemático desarrollado demuestra la capacidad potencial para realizar estas tareas una vez implementados los sensores y actuadores complementarios necesarios. El objetivo de proporcionar una herramienta para la investigación y educación en la robótica se aborda mediante la elaboración de una propuesta de práctica educativa (anexo C) que permite a los estudiantes experimentar con el sistema desarrollado. El control integrado presentado para el sistema móvil y manipulador busca fortalecer la comprensión teórica de los principios de control robótico, al tiempo que desperta el interés sobre cómo se pueden combinar modelos cinemáticos ya establecidos para controlar sistemas robóticos complejos de manera coordinada.

El impacto del proyecto trascendió las aulas para convertirse en un notable caso de divulgación científica y tecnológica, participando activamente en múltiples foros y exposiciones a lo largo de 2024 (anexo D).

La trayectoria de difusión del proyecto durante ese año comenzó el 12 de febrero, con la presentación del trabajo *Control gestual de un robot móvil omnidireccional mediante CNN* durante la 6ta Edición de la Exposición de Proyectos de Ingeniería en Mecatrónica. Esta presentación fue fundamental, pues sentó las bases para el logro académico más relevante del proyecto: la aceptación del artículo para su publicación en noviembre y su posterior presentación en el prestigioso congreso **COMROB 2024** en Torreón, Coahuila, donde además fue distinguido con una candidatura al premio **Dr. Rafael Kelly**. Continuando con la divulgación, el proyecto fue un actor principal en la **VIII Semana de Electrónica y Mecatrónica**, celebrada en abril de 2024, donde se realizaron demostraciones del control de posición del robot omnidireccional ante la comunidad universitaria. Las actividades se intensificaron durante el verano. El 19 de junio, la propuesta del manipulador móvil fue uno de los presentados en la **Expo de Robótica Móvil y Robótica de Manipuladores**. Al mes siguiente, en julio, el equipo llevó a cabo una valiosa actividad de vinculación comunitaria al visitar una escuela primaria, donde se utilizó el robot móvil para promover la carrera de Ingeniería en Mecatrónica y despertar el interés por la ciencia en las nuevas generaciones. Esta completa trayectoria a lo largo del año demuestra la notable versatilidad del sistema desarrollado, consolidándose como plataforma para investigación y divulgación científica.

El desarrollo evidenció la complejidad al diseño de sistemas robóticos reales. Durante la etapa de construcción se requirieron ajustes en la estructura debido a limitaciones no previstas en el modelado CAD, tales como tolerancias de ensamblaje e interferencias geométricas.

En el ámbito electrónico, se implementó un sistema integral que incluyó la selección, dimensionamiento y conexión de los principales componentes. La base móvil fue equipada con cuatro motores de corriente directa con *encoder*, controlados mediante puentes H DRV8833 y gestionados desde un microcontrolador *Arduino*, mientras que el manipulador integró cinco servomotores para su operación. El diseño y fabricación de la tarjeta PCB permitió centralizar las conexiones y mejorar la estabilidad eléctrica. Retos como la distribución de cargas y el filtrado de señales fueron afrontados con soluciones prácticas que buscan garantizar la operatividad de los circuitos durante el funcionamiento continuo del prototipo.

Desde el punto de vista teórico, se desarrollaron los modelos cinemáticos tanto del vehículo omnidireccional como del brazo de cinco grados de libertad. Para la base móvil, se formula-

ron las ecuaciones que relacionan las velocidades angulares de las ruedas Mecanum con los desplazamientos lineales y rotacionales del vehículo, obteniendo la matriz de transformación que describe la cinemática directa y su correspondiente inversión para el control de trayectorias. En el caso del manipulador, se construyó la tabla de parámetros Denavit–Hartenberg y, a partir de ella, se derivaron las matrices de transformación homogénea que describen la posición y orientación del efecto final en función de las variables articulares. Este proceso permitió no solo obtener la cinemática directa, sino también plantear la cinemática inversa mediante la resolución analítica de las ecuaciones de posición. Dicho desarrollo matemático aseguró la consistencia entre ambos modelos y sentó las bases para su implementación computacional.

Un aspecto central fue la combinación de ambos modelos en un marco de referencia común. Para ello, se utilizó la transformación homogénea que describe la posición y orientación de la base móvil en el sistema global, sincronizando con la cadena cinemática del manipulador. De este modo, se obtuvo un modelo unificado que expresa la posición y orientación del efecto final en coordenadas absolutas, integrando tanto el movimiento de la plataforma como las configuraciones articulares del brazo. Es importante destacar que las ecuaciones del vehículo dependen directamente de las variables articulares del manipulador al definir la ubicación del efecto final en el espacio, y de manera recíproca, la cinemática del manipulador se ve condicionada por la posición y orientación de la base. Esta interdependencia permitió construir un modelo completo de manipulador móvil, capaz de planificar trayectorias conjuntas y de diseñar un control que coordina simultáneamente traslación y manipulación de forma estable.

La correcta definición de sistemas de referencia y el uso sistemático de transformaciones homogéneas resultaron claves para garantizar la coherencia del planteamiento. Las simulaciones en *CoppeliaSim* no solo corroboraron la validez de las ecuaciones derivadas, sino que también permitieron ensayar trayectorias, analizar configuraciones espaciales del manipulador y verificar la coordinación con la base móvil antes de proceder a la validación experimental.

En cuanto a los resultados experimentales, las tres pruebas realizadas permitieron evaluar el desempeño del sistema bajo diferentes configuraciones. En todas ellas, el prototipo demostró ser capaz de ejecutar trayectorias planificadas, integrando de manera estable la movilidad de la base y la manipulación del brazo. Se comprobó que el control cinemático implementado asegura un movimiento coordinado entre ambos subsistemas, aunque se observaron desviaciones atribuibles a factores como latencias de procesamiento, flexibilidad estructural y vibraciones inducidas por la interacción entre motores y servos. A pesar de estas limitaciones, los ensayos validaron la viabilidad del diseño y confirmaron que la estrategia de control aplicada es funcional en un prototipo físico.

El valor de este trabajo trasciende la validación técnica del prototipo: demuestra que es posible desarrollar sistemas robóticos con recursos limitados, aplicando metodologías rigurosas y una integración progresiva de modelos, simulaciones y pruebas experimentales. Además, establece un precedente para futuros desarrollos en la Universidad Tecnológica de la Mixteca, al proveer un manipulador móvil que servirá para la enseñanza e investigación en robótica.

En conclusión, se confirma que la integración multidisciplinaria mecánica, electrónica, programación y control es indispensable en el desarrollo de sistemas robóticos. Cada reto superado, desde el diseño estructural hasta la validación experimental, fortaleció la metodología empleada y sentó bases sólidas para afrontar proyectos de mayor complejidad.

## Anexo A

### Dibujo detallado de cada pieza del ensamblaje

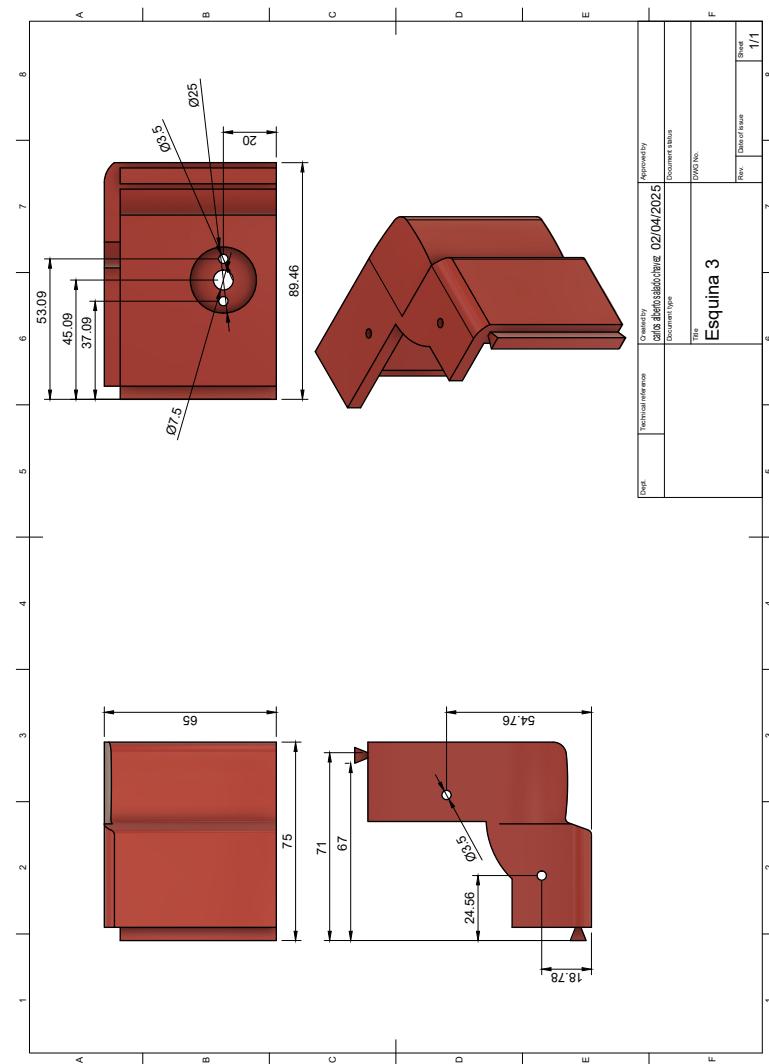


Figura A.1: Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 3".

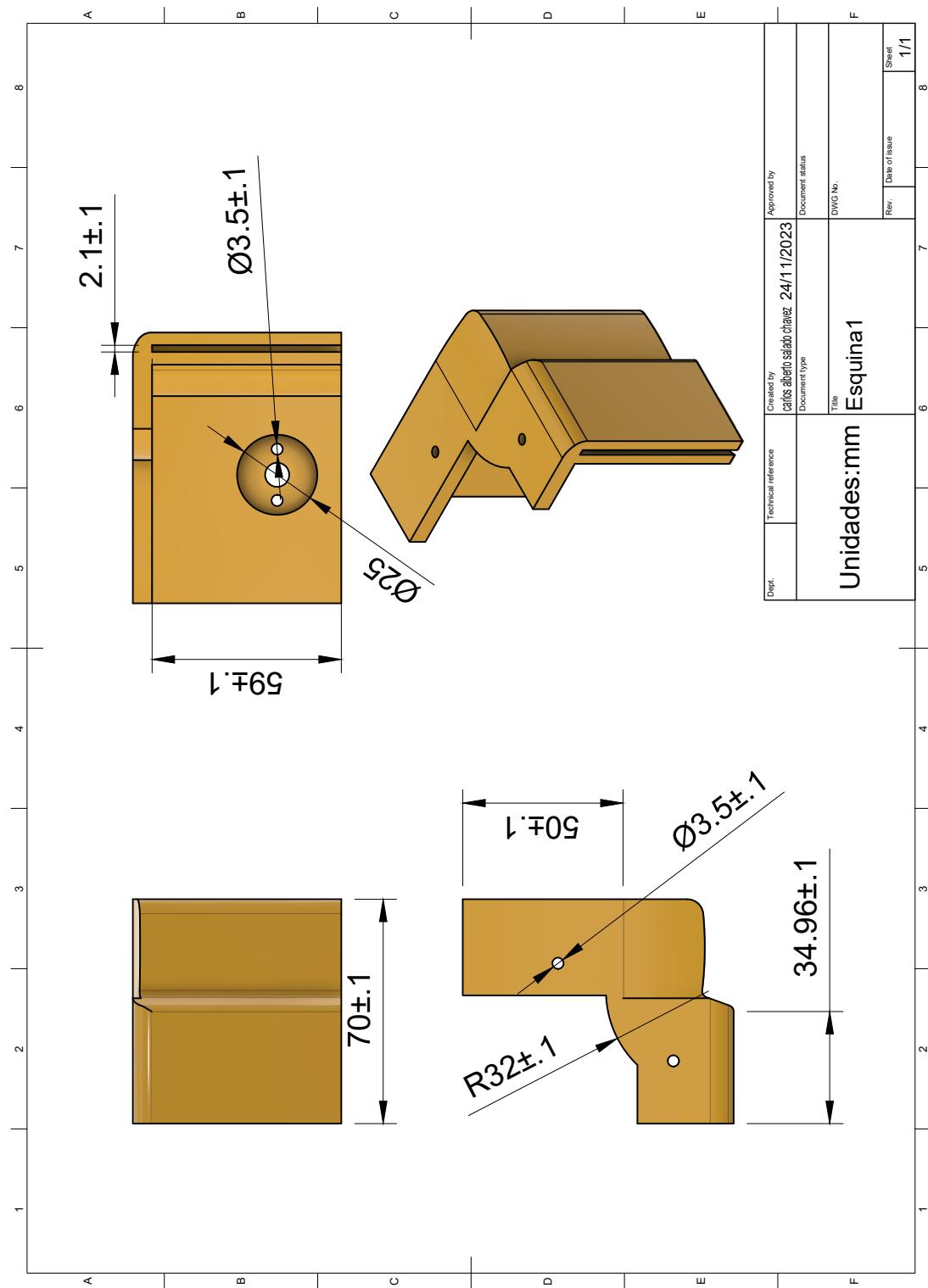


Figura A.2: Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 1".

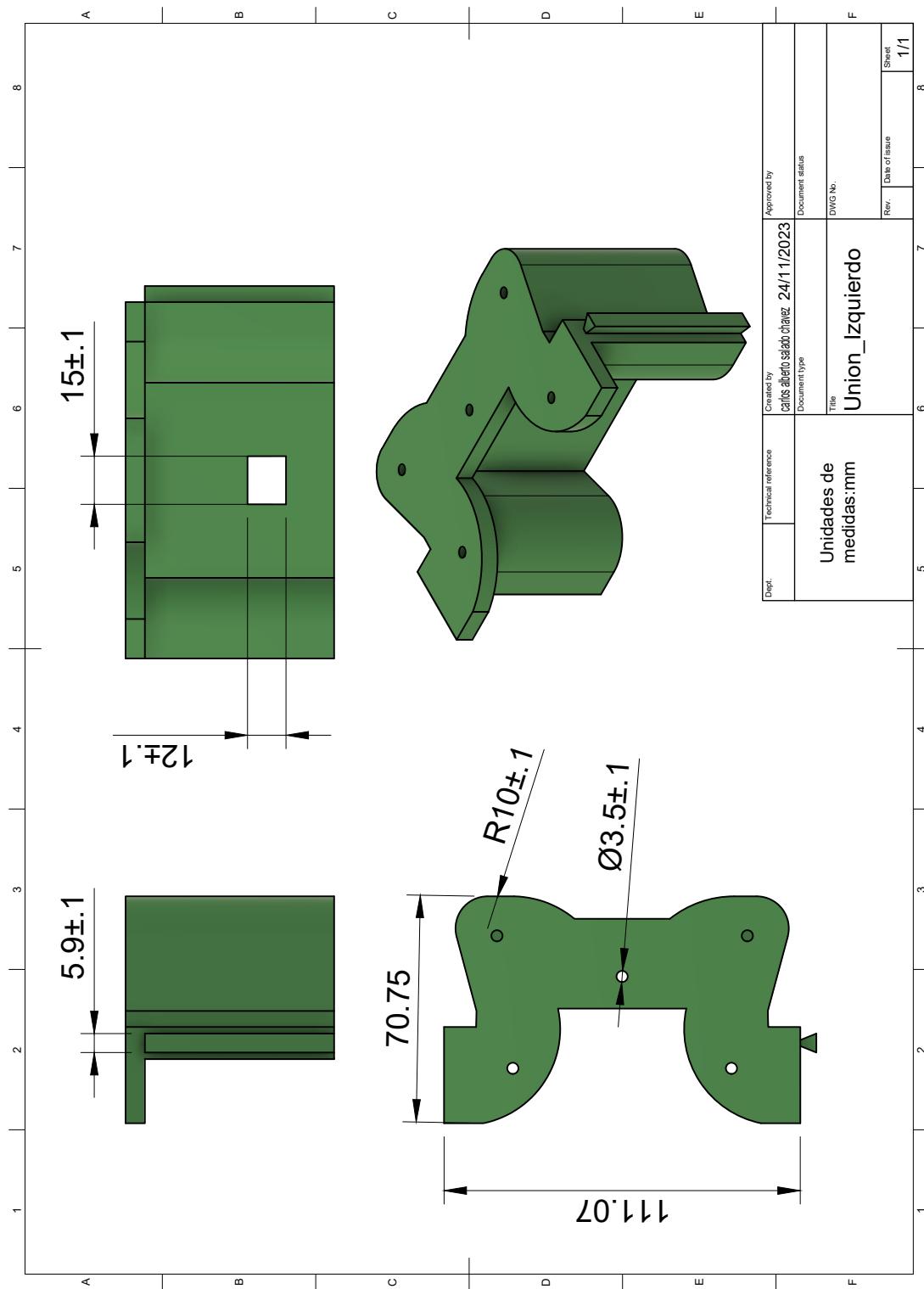


Figura A.3: Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Union Izquierdo".

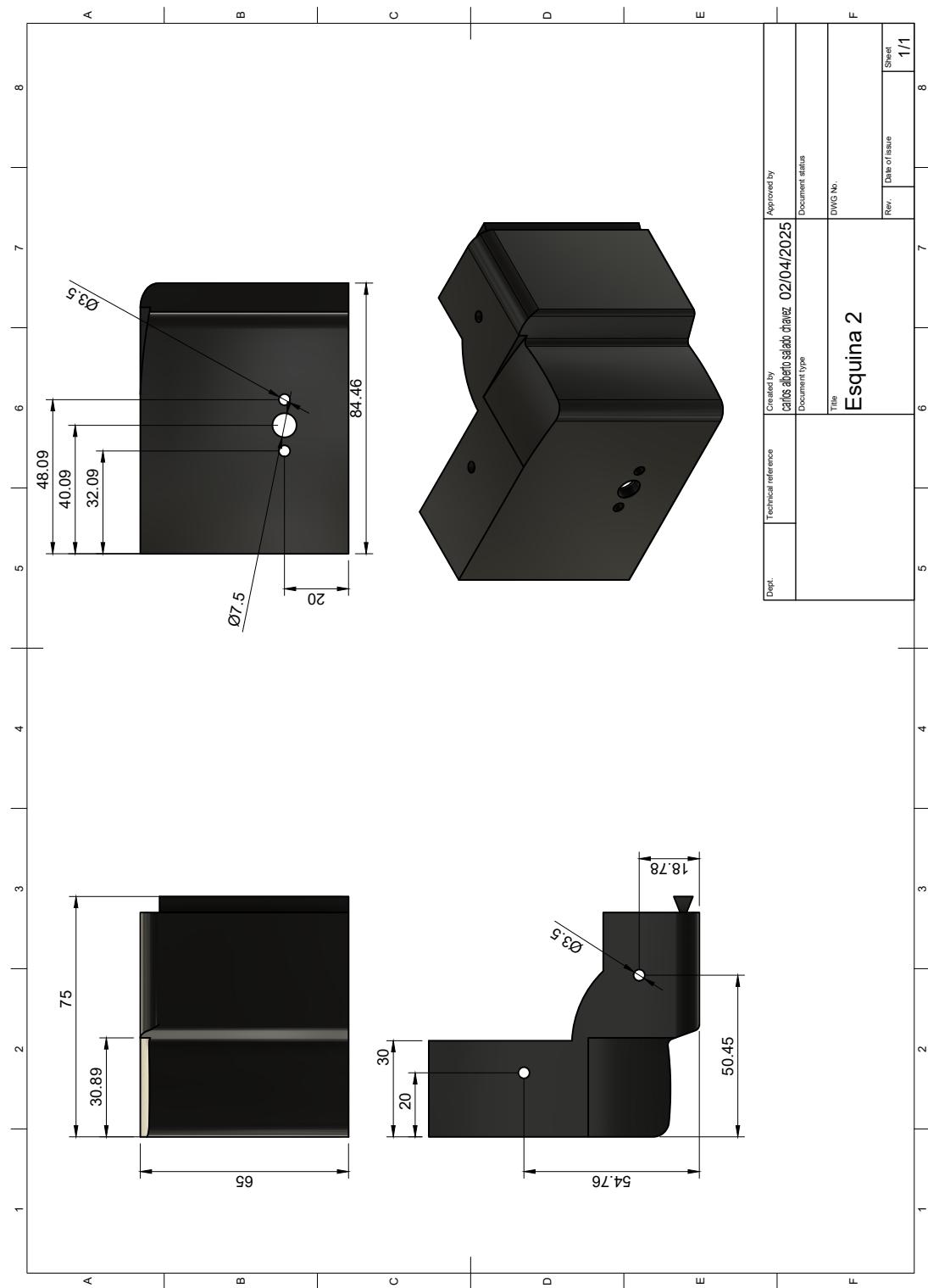


Figura A.4: Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 2".

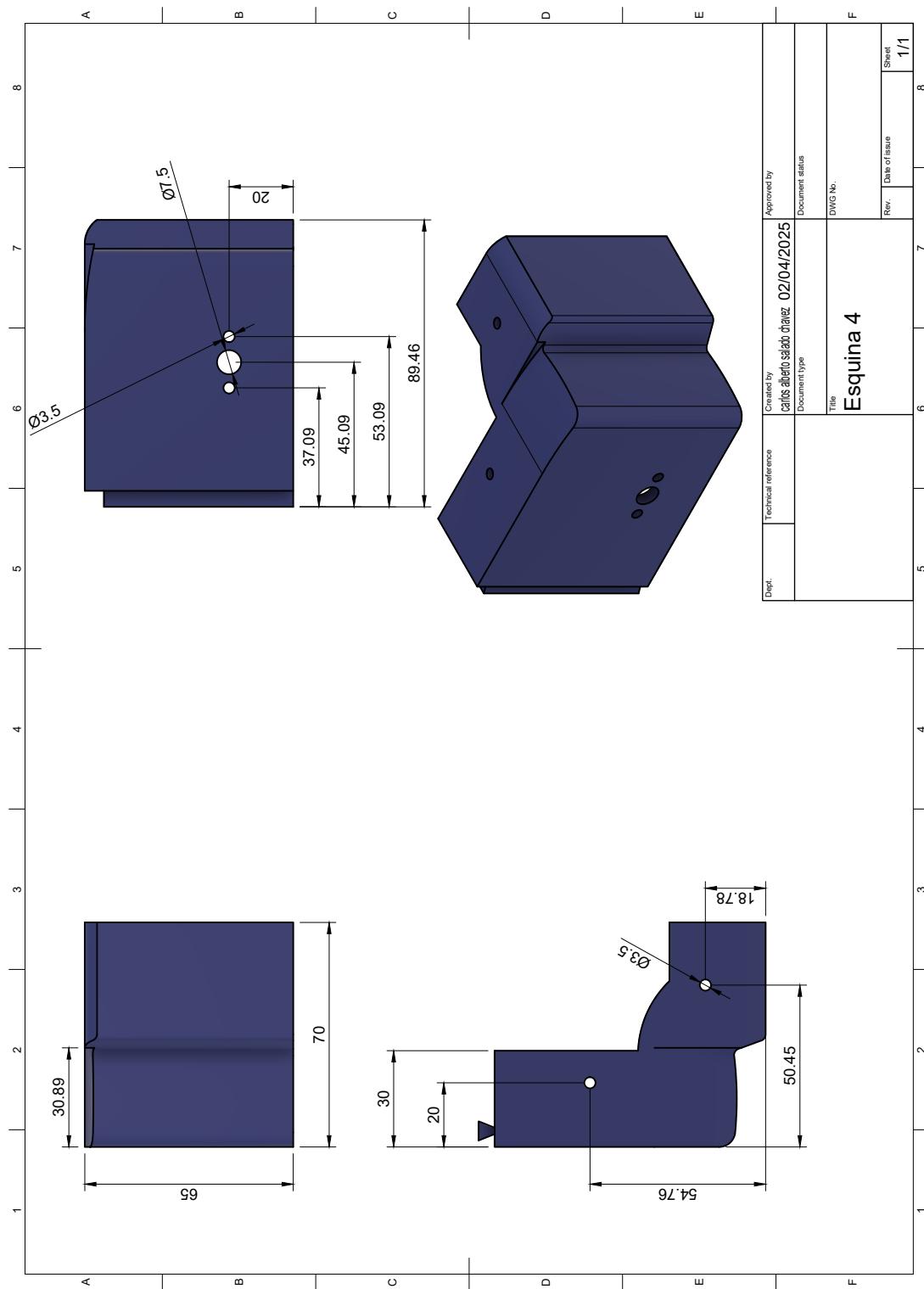


Figura A.5: Diseño CAD de la pieza del móvil titulada "Esquina 4".

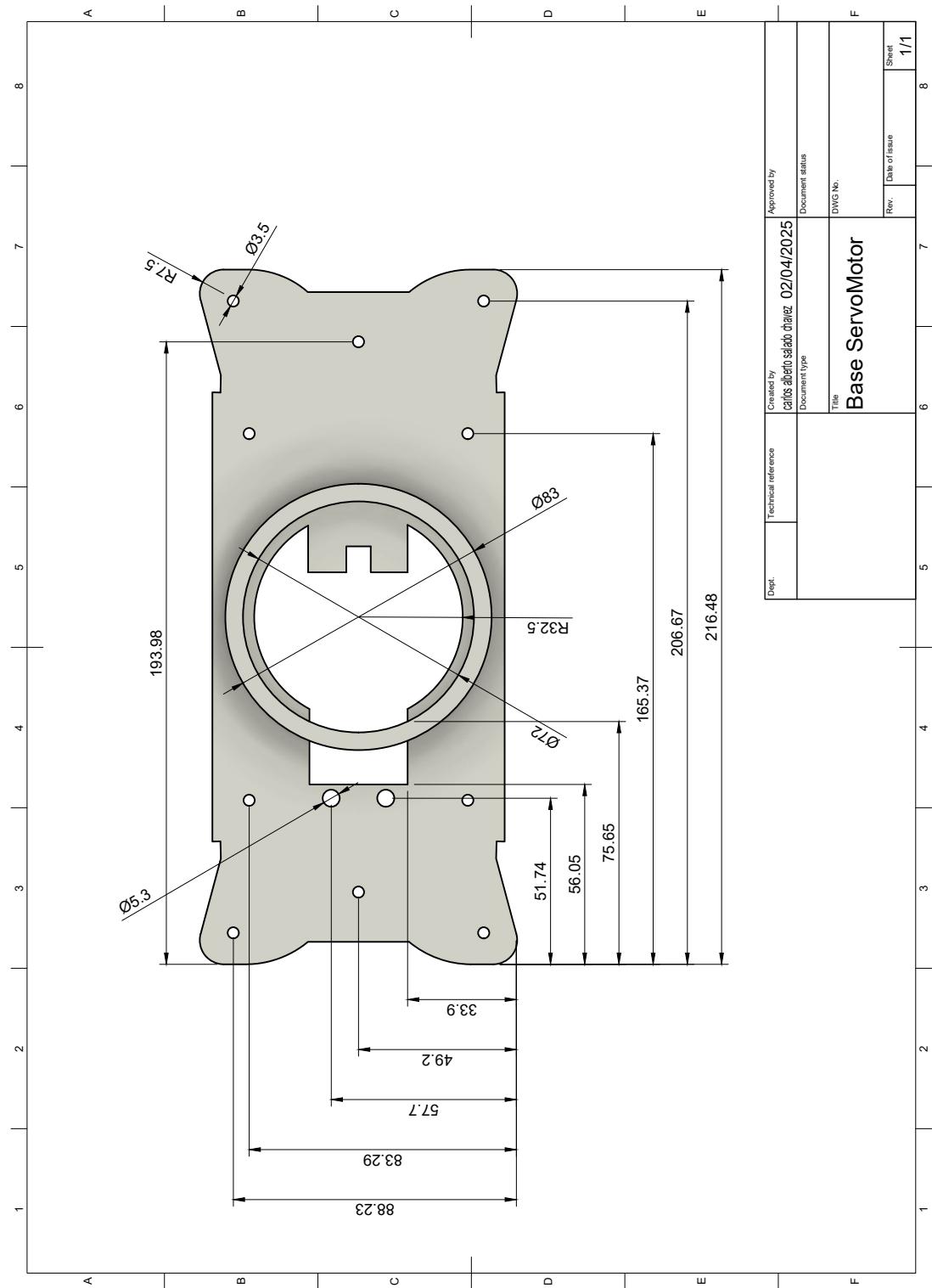


Figura A.6: Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Base ServoMotor".

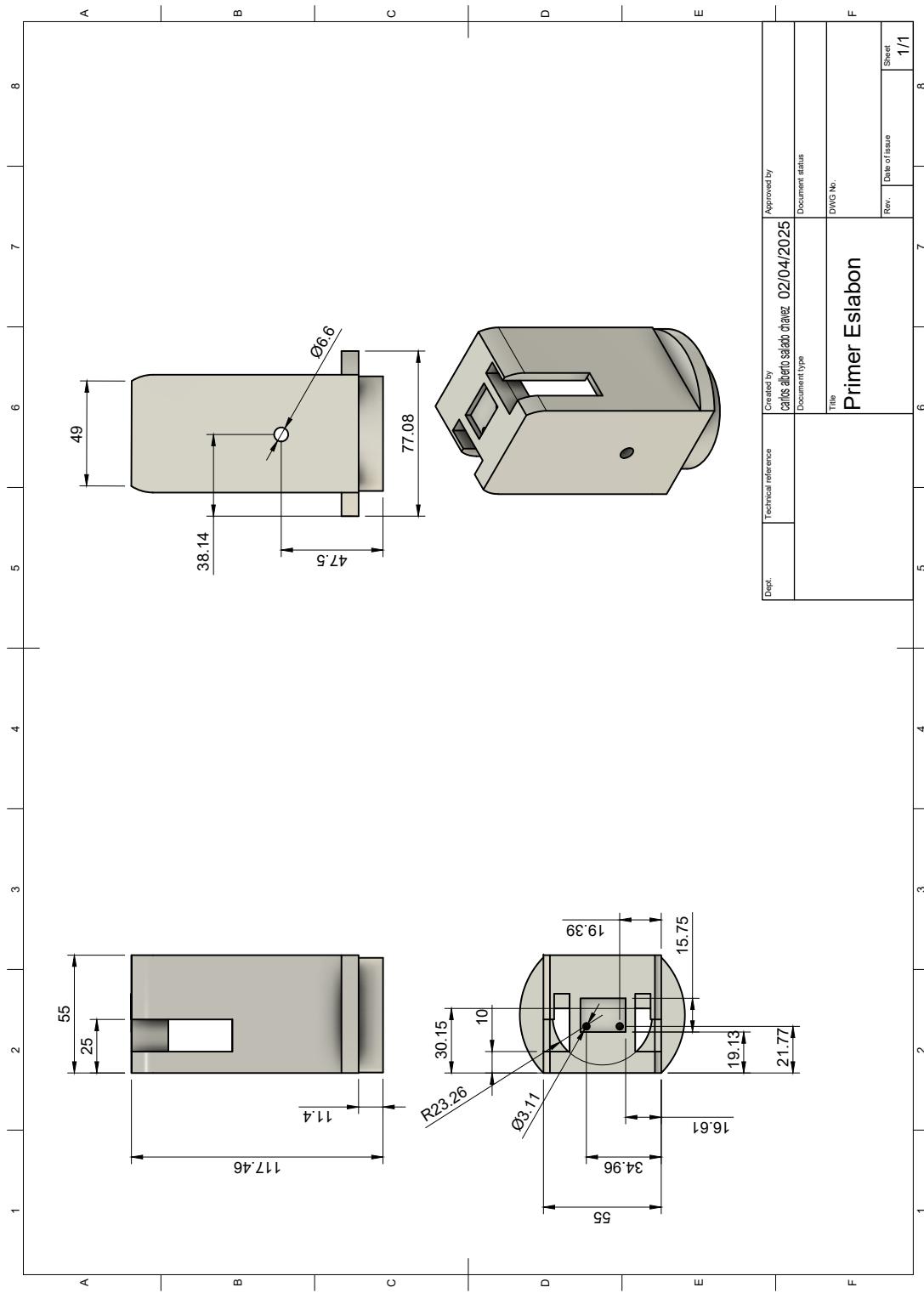


Figura A.7: Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Primer Eslabon".

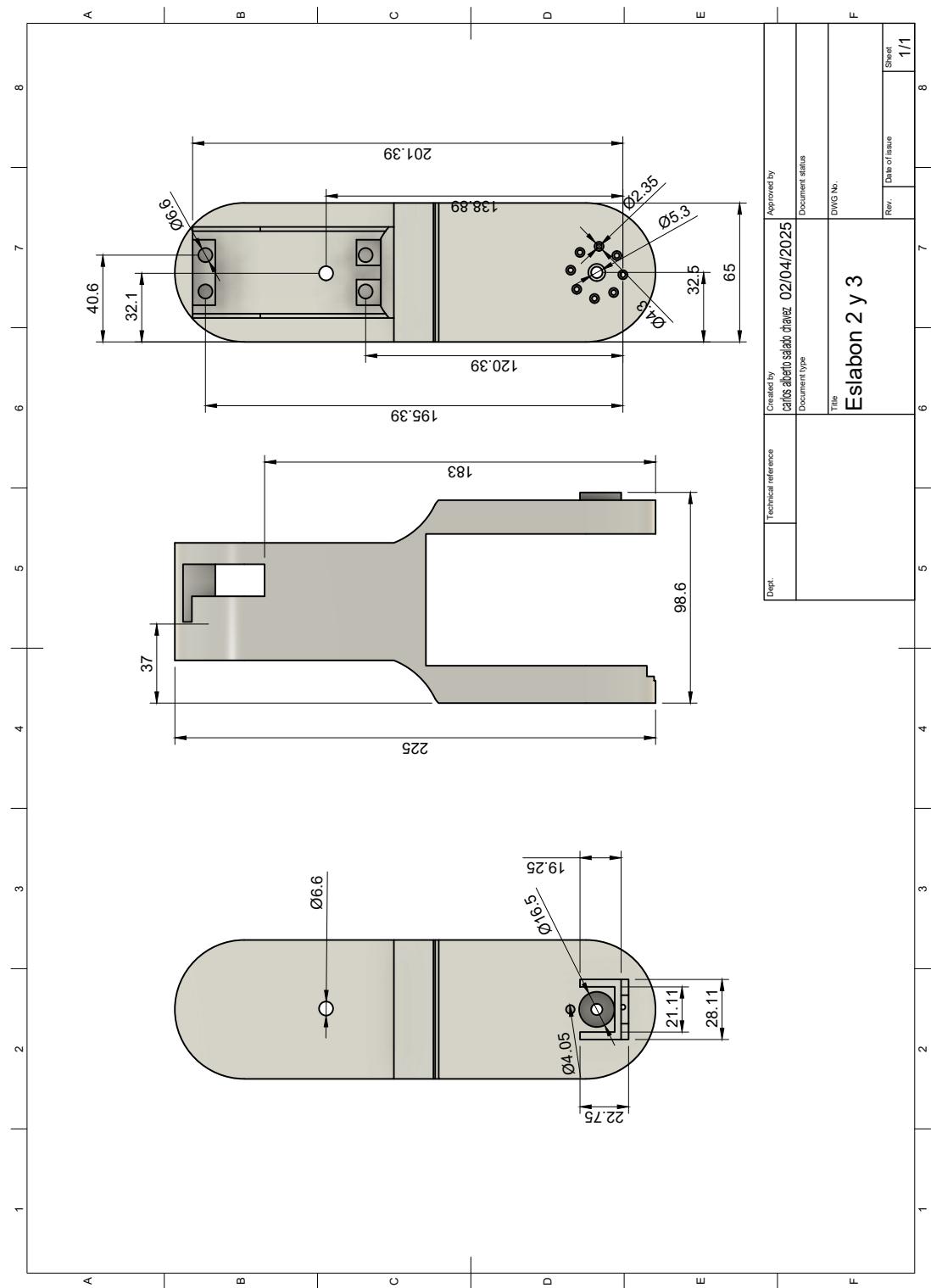


Figura A.8: Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Segundo y Tercero Eslabon".

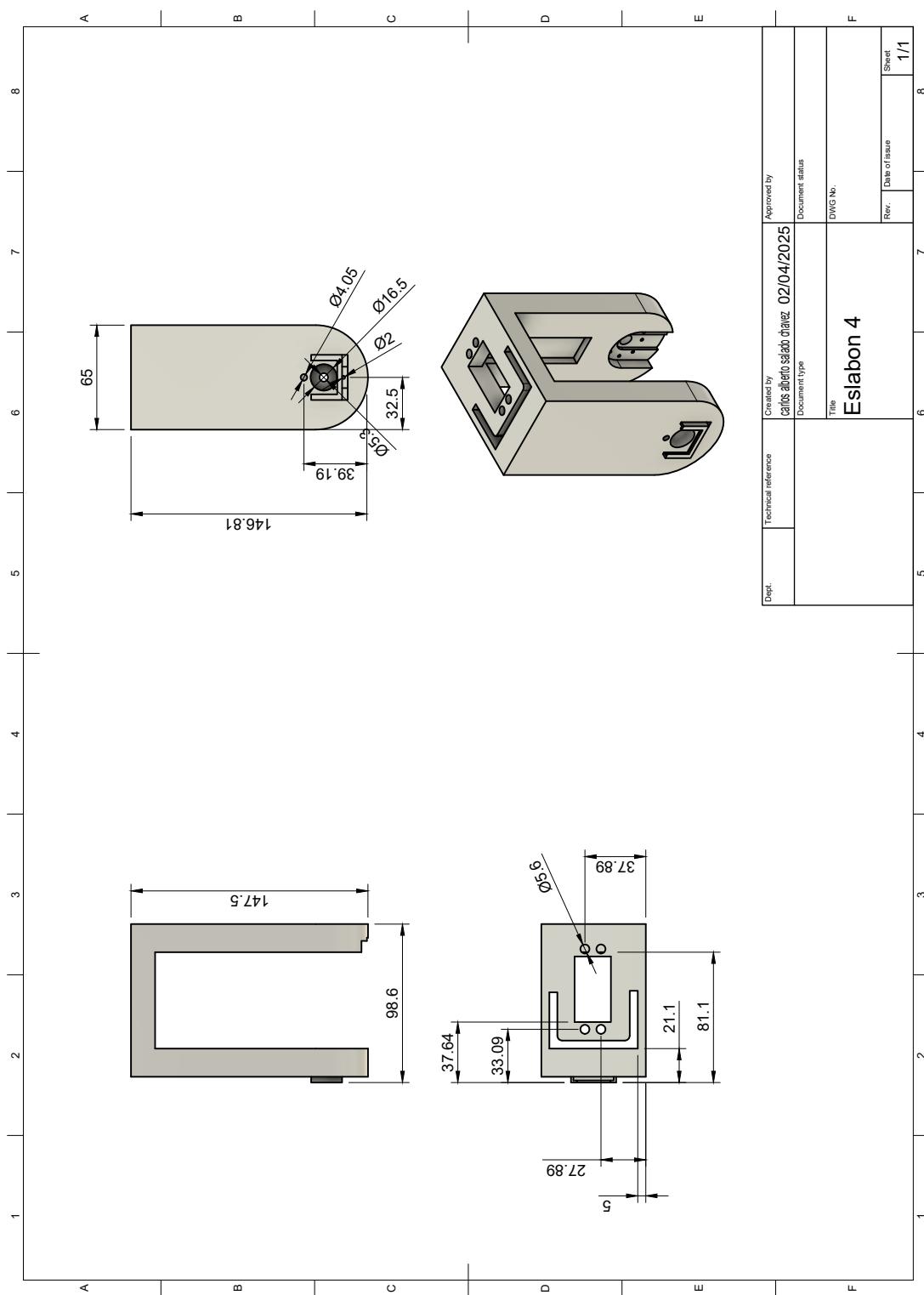


Figura A.9: Diseño CAD de la pieza del manipulador titulada "Cuarto Eslalon".



## Anexo B

# Configuración del perfil de impresión en Ultimaker Cura

Nombre del perfil: Perfil para piezas del manipulador móvil

Impresora base: Creality Ender 3 Pro

Tipo de calidad: adaptativa

Versión del perfil: 4

Versión de configuración: 22

### B.1. Configuración general

```
adaptive_layer_height_enabled = False
adhesion_type = brim
layer_height = 0.2
layer_height_0 = 0.32
material_bed_temperature = 60
retraction_combing = all
support_enable = True
support_type = everywhere
travel_retract_before_outer_wall = False
```

### B.2. Configuración del extrusor

```
bottom_layers = 5
coasting_enable = True
coasting_volume = 0.256
cool_fan_full_at_height = 1
cool_fan_speed = 100
infill_before_walls = True
infill_overlap = 20
infill_pattern = gyroid
infill_sparse_density = 20
```

```
line_width = 0.4
material_flow = 100
material_print_temperature = 210
retraction_amount = 6
retraction_speed = 25
skin_overlap = 15
speed_print = 60
top_layers = 5
wall_line_count = 3
wall_thickness = 1.2
```

### B.3. Parámetros relevantes

Temperatura de impresión: 210 °C

Velocidad de impresión: 60 mm/s

Retracción: 6 mm a 25 mm/s

Capas superiores: 5

Capas inferiores: 5

Recuento de paredes: 3

Grosor de pared: 1.2 mm

Tipo de relleno: Gyroid

Densidad de relleno: 20 %

Solapamiento del relleno: 20 %

Coasting: Activado (Volumen: 0.256 mm<sup>3</sup>)

Enfriamiento completo a: 1 mm de altura

Velocidad del ventilador: 100 %

Patrón de retracción: Combinar en todo

Iniciar retracción antes de pared externa: No

## Anexo C

# Propuesta de práctica de laboratorio



## Universidad Tecnológica de la Mixteca Laboratorio de Robótica

**Práctica: Análisis experimental de la combinación de un robot manipulador móvil**

### Objetivo

Comprender la interacción entre la base móvil omnidireccional y el manipulador de 5 grados de libertad mediante mediciones manuales de posición y orientación en un entorno controlado, así como interpretar el funcionamiento del controlador que coordina ambos sistemas.

### Introducción

La combinación de un robot móvil con un manipulador genera un sistema capaz de trasladar objetos y manipularlos en distintas posiciones del espacio. Aunque el código ya está programado para llevar al robot a puntos deseados, es necesario interpretar físicamente los resultados verificando que la posición y orientación alcanzadas coincidan con lo esperado.

En esta práctica se registrarán manualmente las posiciones y orientaciones tanto de la base como del efecto final del manipulador, con el fin de analizar cómo se complementan ambos sistemas y reflexionar sobre el papel del controlador cinemático en la coordinación del movimiento.

### Materiales

- Robot manipulador móvil (prototipo desarrollado).
- Cinta métrica o regla.
- Transportador o goniómetro para medir ángulos.

- Cinta adhesiva para marcar puntos de referencia en el suelo.
- Hoja de registro de datos.

## Procedimiento

1. Definir tres puntos de destino en el espacio (ejemplo: dos sobre el plano XY y uno con elevación en Z).
2. Programar el robot para que se desplace a dichos puntos.
3. En cada punto:
  - a) Medir la posición de la base móvil en el plano XY con cinta métrica respecto a un sistema de coordenadas marcado en el suelo.
  - b) Medir la orientación de la base (ángulo de giro) con el transportador.
  - c) Medir manualmente la posición del efecto final (X, Y, Z) con respecto al mismo sistema de referencia.
  - d) Medir la orientación del efecto final (ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$ ) utilizando el transportador o referencias visuales.
  - e) Registrar todos los datos en tablas comparativas.

## Resultados esperados

Tabla de posiciones y orientaciones medidas en cada punto de prueba:

Punto	Base (X,Y) [cm]	Base ( $\gamma$ ) [°]	Efecto (X,Y,Z) [cm]	Efecto ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) [°]	Observaciones
1					
2					
3					

Observaciones sobre las diferencias entre la posición esperada (del programa) y la medida manual.

## Preguntas

1. ¿Qué diferencias existen entre la posición deseada y la medida manual?
2. ¿Cómo influye el movimiento de la base en la posición final del efecto?
3. ¿La orientación del efecto final depende más del manipulador o de la base?

4. ¿Qué dificultades se presentaron al medir manualmente las posiciones y orientaciones?
5. ¿El controlador logra coordinar los dos sistemas sin generar errores acumulados en la posición?
6. ¿Qué papel cumple el control cinemático en la compensación de los movimientos de la base respecto al manipulador?
7. ¿Cómo se asegura que los ángulos y posiciones calculados por el controlador correspondan al movimiento real del robot?
8. Si se cambiara la referencia de un punto deseado, ¿qué subsistema (móvil o manipulador) realiza la mayor parte del ajuste?
9. ¿Qué limitaciones observaste en el controlador al ejecutar la tarea?
10. ¿Qué mejoras podrían hacerse en el controlador para aumentar la precisión y la coordinación del sistema completo?

## Conclusiones

El estudiante debe reflexionar sobre la importancia de verificar experimentalmente el comportamiento del robot, y cómo la combinación de sistemas (base + manipulador) requiere una correcta coordinación a través del controlador cinemático para alcanzar posiciones precisas en el espacio.



## Anexo D

### Presentaciones



Figura D.1: 6ta Edición de exposición de proyectos de las asignaturas: Proyecto integrador de Ing en Mecatrónica y Seminario de investigación

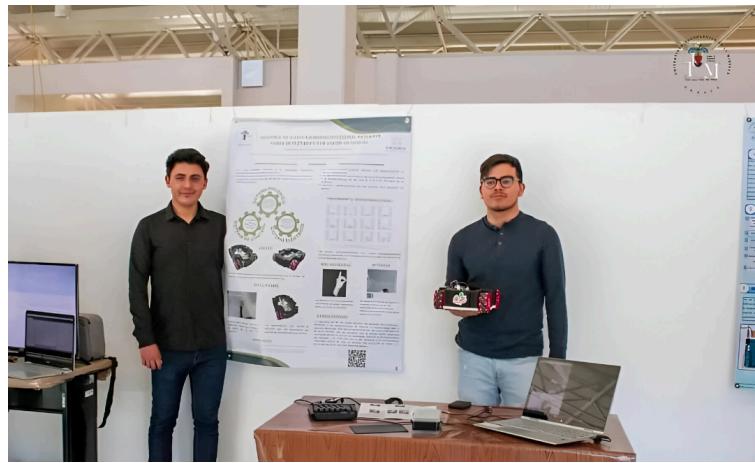


Figura D.2: Exposición de prototipo



Figura D.3: VIII Semana de Electrónica y Mecatrónica



Figura D.4: Exposición en la semana mecatrónica



Figura D.5: EXPO Robótica móvil/Robótica de manipuladores



Figura D.6: Exposición en la EXPO Robótica móvil/Robótica de manipuladores



Figura D.7: Exposición en primaria para promover la carrera



Figura D.8: Presentación de artículo en congreso *COMROB 2024*

# Control gestual de un robot móvil omnidireccional mediante CNN.

1<sup>st</sup> Carlos-A. Salado-Chávez

*Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Huajuapan de León, Oaxaca, México  
carlos0201@live.com.mx*

2<sup>nd</sup> Matew Herrera-Perez

*Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Huajuapan de León, Oaxaca, México  
mattewhperez@gmail.com*

3<sup>rd</sup> Karla I. Salado-Chávez

*División de estudios de Posgrado  
Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Huajuapan de León, Oaxaca, México  
itzchav3001@gmail.com*

4<sup>th</sup> Oscar D. Ramírez-Cárdenas

*División de estudios de Posgrado  
Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Huajuapan de León, Oaxaca, México  
odramirez@mixteco.utm.mx*

5<sup>th</sup> Esther Lugo González

*Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Huajuapan de León, Oaxaca, México  
elugog@mixteco.utm.mx*

**Abstract**—Este trabajo presenta el diseño y la construcción de un robot móvil omnidireccional, controlado mediante el reconocimiento de la lengua de señas en inglés. La dirección del robot se ajusta con señas interpretadas por una red neuronal convolucional.

El robot ha sido diseñado de forma modular, lo que facilita tanto el ensamblaje como la manufactura y permite un acceso sencillo para la reparación y el reemplazo de piezas. La comunicación del robot con una interfaz externa se realiza a través de una conexión Wi-Fi, utilizando un módulo ESP32 para la transmisión de datos. Esta configuración permite la operación del robot basada en la lengua de señas, subrayando su utilidad en la interacción humano-robot y facilitando la comunicación con personas que utilizan este lenguaje.

Además, el robot podría tener aplicaciones en la asistencia doméstica, proporcionando una solución accesible tanto para personas con pérdida auditiva o limitaciones de movilidad como para usuarios sin tales limitaciones, mejorando así la funcionalidad y el apoyo en el entorno doméstico.

**Index Terms**—Robot Omnidireccional, Lengua de señas, Visión por computadora, redes convolucionales.

## I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la robótica ha experimentado avances significativos que han transformado la capacidad de los robots para interactuar con su entorno y con los humanos. Los progresos en tecnologías de sensores han permitido a los robots reconocer gestos, expresiones faciales y posturas mediante técnicas avanzadas de visión artificial. Estos desarrollos han facilitado la creación de interfaces que mejoran la interacción entre humanos y máquinas. En particular, la robótica de servicio se enfoca en asistir a los seres humanos realizando tareas que son peligrosas, repetitivas o para mejorar la calidad de vida [1]. Este campo ha llevado al desarrollo de robots móviles con diferentes configuraciones de locomoción, como los tipos diferencial, Ackermann y omnidireccional, incluyendo el modelo presentado en este trabajo.

Los robots omnidireccionales son un tipo de robots móviles terrestres que se desplazan en distintas direcciones sin

necesidad de cambiar de orientación por medio de ruedas mecanum. Es decir, efectúan distintos movimientos de rotación o traslación en el plano. Las aplicaciones que se le dan actualmente a este tipo de robots son: tareas de navegación autónoma, seguimiento de objetivos, entretenimiento, entre otras [2]. En [3], Gordón et.al. desarrollan un robot omnidireccional de cuatro ruedas con un manipulador de 5 grados de libertad con pinza de agarre sobre la estructura, el robot es capaz de planear rutas y de reconocer señalamientos de tráfico por medio de algoritmos de Visión Artificial y procesamiento de imágenes en tiempo real. A pesar de que su uso se limita a ambientes controlados y con señalizaciones de tráfico, este es un avance para los vehículos omnidireccionales de mayor capacidad de movimiento. En el 2020, Ramos [4] presenta dos robots omnidireccionales para fines de entretenimiento de 3 y 4 ruedas respectivamente, en este trabajo se implementaron en los robots mecanismos que permiten al vehículo disparar proyectiles con el fin de inmovilizar al oponente. En ese mismo año, Espinoza et.al. [5] propone el uso de un conjunto vehículos móviles trabajando coordinadamente en tareas de transporte a corta distancia resolviendo necesidades en logística industrial. Entre las propuestas de los robots móviles presentan a los omnidireccionales y describe que las ventajas en la utilización de estos es la capacidad de dirigirse en cualquier dirección, además de ser estable, sin embargo, la complejidad de implementación aumenta.

Por otro lado, en el 2023 Sotelo [6] presenta la propuesta de un robot móvil equipado con Visión Artificial para la detección de obstáculos y personas. Este robot utiliza *Python* como lenguaje de programación y aprovecha bibliotecas de código abierto como *OpenCV*. Además, incorpora ROS (Sistema Operativo de Robots), que facilita al móvil diversas funciones, incluyendo mapeo, localización y control, según se detalla en [6]. Pawar et al. [7] presentaron en 2021 un algoritmo de detección y seguimiento de objetos en tiempo real para robots móviles omnidireccionales, basado en redes neuronales

Figura D.9: Publicación de artículo [3]



# Bibliografía

- [1] J. R. F. Olmedo, W. M. M. López, and M. M. B. Sampedro, *Cinemática y Dinámica de Robots Móviles con Ruedas*, primera ed., A. P. G., Ed. Ediciones, 2023, este texto ha sido sometido a evaluación de pares externos con base en la normativa de la editorial.
- [2] P. F. Muir and C. P. Neuman, “Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot,” *Autonomous robot vehicles*, pp. 25–31, 1990.
- [3] C.-A. Salado-Chávez, M. Herrera-Perez, K. I. Salado-Chávez, O. D. Ramírez-Cárdenas, and E. Lugo González, “Control gestual de un robot móvil omnidireccional mediante CNN,” in *Memorias del XXVI Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, M. Llamas Leal, Ed. Torreón, Coahuila, México: Asociación Mexicana de Robótica (AMRob), nov 2024, pp. 139–144.
- [4] I. Bambino, “Una introducción a los robots móviles,” Recuperado [http://www.aadeca.org/pdf/CP\\_monografias/monografia\\_robot\\_movil.pdf](http://www.aadeca.org/pdf/CP_monografias/monografia_robot_movil.pdf), 2008.
- [5] A. Ollero Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Marcombo, 2005.
- [6] A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil Santoja, *Fundamentos de robótica*, 2nd ed. Madrid, España: McGraw-Hill Interamericana de España S.L., 2007, 2<sup>a</sup> Edición.
- [7] J. L. R. Arias and A. R. Fonseca, “Modelamiento matemático de la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de tres grados de libertad,” *Ingeniería solidaria*, vol. 8, no. 15, pp. 46–52, 2012.
- [8] G. Hernández Millán, L. H. Ríos Gonzales, and M. Bueno López, “Implementación de un controlador de posición y movimiento de un robot móvil diferencial,” *Tecnura*, vol. 20, no. 48, pp. 123–136, 2016.
- [9] L. E. Solaque Guzmán, M. A. Molina Villa, and E. L. Rodríguez Vásquez, “Seguimiento de trayectorias con un robot móvil de configuración diferencial,” *Ingenierías USBMed*, vol. 5, no. 1, pp. 26–34, 2014.
- [10] S. H. K. Al Ansari, “Metodología para el desarrollo de un manipulador móvil autónomo con características antropométricas,” Ph.D. dissertation, Universidad Carlos III de Madrid, 2011.

- [11] D. B. Rojas, L. Lorente, and C. de Quirós, “Planificación local basada en sensores para un manipulador móvil en tareas de colaboración con humanos,” *Madrid: Universidad Carlos III de Madrid*, 2002.
- [12] J. G. Pérez-Fuentevilla, A. B. Morales-Díaz, A. Rodríguez-Ángeles *et al.*, “Control de un robot manipulador móvil de dos grados de libertad,” *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICB*, vol. 10, no. Especial4, pp. 61–72, 2022.
- [13] OMRON, “Ld platform user’s guide,” Omron Adept Technologies, Inc., Tech. Rep. I611-E-01, 2017, manual. [Online]. Available: [https://assets.omron.eu/downloads/manual/en/i611\\_mobile\\_robots\\_oem\\_-\\_ld\\_platform\\_users\\_manual\\_en.pdf](https://assets.omron.eu/downloads/manual/en/i611_mobile_robots_oem_-_ld_platform_users_manual_en.pdf)
- [14] OMRON, “Omron tm collaborative robots,” OMRON Corporation, Tech. Rep., 2022, manual, Copyright 2018-2022. [Online]. Available: [https://www.ia.omron.com/data\\_pdf/cat/tm\\_i836-e1\\_2\\_1\\_csm1066064.pdf?id=3739](https://www.ia.omron.com/data_pdf/cat/tm_i836-e1_2_1_csm1066064.pdf?id=3739)
- [15] OMRON, “Mobile manipulator in semiconductor & electronics,” OMRON Corporation, Tech. Rep., 2013, manual. [Online]. Available: [https://intechchennai.com/micro-site/omron-solutions/mobile\\_manipulator/pdf/Mobile-Manipulator-for-Digital-Industry.pdf](https://intechchennai.com/micro-site/omron-solutions/mobile_manipulator/pdf/Mobile-Manipulator-for-Digital-Industry.pdf)
- [16] ROBO PRIDE, “Youibot ow12-1,” ROBO PRIDE, Tech. Rep., 2024, manual. [Online]. Available: <https://sanki1948robo.securesite.jp/rb/robopride/product/youibot-ow12-1/>
- [17] YOUIBOT, “Operation series - ow12,” YOUIBOT, Tech. Rep., 2022, manual. [Online]. Available: <https://en.youibot.com/products-category/o-series-19.html>
- [18] KUKA, “Kmr iiwa,” KUKA, Tech. Rep., 2017, manual. [Online]. Available: <https://www.kuka.com/kmr-iiwa>
- [19] KUKA, “Kmr iiwa and iiwa: Ssp - on safe,” KUKA, Tech. Rep., 2017, manual, Copyright 2024. [Online]. Available: [https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/87f2706ce77c4318877932fb36f6002d/kuka\\_kmriiwa\\_en.pdf?rev=f69d3c1ea3194f62ab80db873e600594&hash=AA40699635EBAAD944E1A761AB0A3010](https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/87f2706ce77c4318877932fb36f6002d/kuka_kmriiwa_en.pdf?rev=f69d3c1ea3194f62ab80db873e600594&hash=AA40699635EBAAD944E1A761AB0A3010)
- [20] Robotnik, “Mobile manipulator robot [mmr] ur10 rb-kairos,” Robotnik, Tech. Rep., 2021, manual. [Online]. Available: [https://robotnik.eu/wp-content/uploads/2024/08/Robotnik\\_Datasheet\\_RB-KAIROS-10e\\_2024\\_ES.pdf](https://robotnik.eu/wp-content/uploads/2024/08/Robotnik_Datasheet_RB-KAIROS-10e_2024_ES.pdf)
- [21] I. C. C. López, “Manipulador móvil omnidireccional redundante: Coordinación de movimientos en ambientes inteligentes,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, 2015.
- [22] P. G. Acevedo, “Control de trayectoria de robots manipuladores móviles utilizando retroalimentación linealizante,” Master’s thesis, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, 2015.
- [23] J. Pérez, “Diseño y construcción de un brazo robótico manipulador móvil,” in *Sexto Coloquio Interdisciplinario de Doctorado*. Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, 2013, recuperado de <https://upaep.mx/micrositios/colloquios/colloquio2013/memorias/Mesa>.

- [24] N. A. M. Sánchez, V. J. G. Villela, and J. A. S. Jiménez, “Restricciones no-holonómicas en la estabilidad a la volcadura en manipuladores móviles.”
- [25] A. T. C. Reyes, “Desarrollo de un manipulador antropomórfico de 3 gdl con motores de cd tipo brushless,” Tesis de Maestría en Robótica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México, 2022, disponible en: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/412> [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/412>
- [26] F. E. M. Hernández, “Diseño de algoritmos para la navegación autónoma del vehículo “autonomos mini v2” con obstáculos estáticos y móviles en un entorno controlado,” Tesis de Maestría en Robótica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México, 2024, disponible en: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/477> [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/477>
- [27] E. F. V. Álvarez, “Control de múltiples robots no holonómicos bajo un esquema líder seguidor,” Tesis de Maestría en Robótica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México, 2022, disponible en: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/451> [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/451>
- [28] K. I. Salado Chávez, “Navegación autónoma de un robot móvil en configuración diferencial usando un sensor lidar,” Tesis de Maestría en Robótica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México, 2025.
- [29] R. Suárez, L. Palomo-Avellaneda, J. Martínez, D. Clos, and N. García, “Manipulador móvil, bíbrazo y diestro con nuevas ruedas omnidireccionales,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 17, no. 1, pp. 10–21, 2020.
- [30] E. G. Hurtado, J. R. Reséndiz, E. V. Soto, L. A. Z. Aviles, and S. T. Arriaga, “Mechatronics methodology: 15 years of experience metodología mecatrónica: 15 años de experiencia,” *Ingeniería e Investigación*, vol. 35, no. 3, pp. 107–114, 2015.
- [31] A. Ollero Baturone, *Robótica Manipuladores y robots móviles*. Marcombo, S.A. - Alfaomega, 2001.
- [32] D. Manocha and J. F. Canny, “Efficient inverse kinematics for general 6r manipulators,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, no. 5, pp. 648–657, 1994.
- [33] S. Kucuk and Z. Bingul, “Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 4, pp. 1983–1999, 2014.
- [34] G. A. Acosta Amaya, “Ambiente multi-agente robótico para la navegación colaborativa en escenarios estructurados,” Ph.D. dissertation, 2010.
- [35] M. Libre, “Llanta omnidireccional mecanum 80mm (set 4 piezas) robótica,” accedido: 27 de enero de 2025. [Online]. Available: [https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-1426694931-llanta-omnidireccional-mecanum-80mm-set-4-piezas-robotica\\_-JM](https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-1426694931-llanta-omnidireccional-mecanum-80mm-set-4-piezas-robotica_-JM)

- [36] R. Bischoff, U. Huggenberger, and E. Prassler, “Kuka youbot-a mobile manipulator for research and education,” in *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2011, pp. 1–4.
- [37] Creality, *User Manual: CREALITY ENDER-3 V2 3D Printer*, v1.0 ed., SainSmart, 2711 Centerville Road, Wilmington, DE, 19808, United States, Jul. 2020, available from: <https://docs.sainsmart.com/>.
- [38] Creality, *Ender-3 Max Neo 3D Printer User Manual*, v1.1 ed., Creality, 2022, manual de usuario en múltiples idiomas (inglés, francés, alemán, italiano, español).