UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Formas diferenciales y algunas aplicaciones

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Osorio Arvea Rafael Abisai

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Adolfo Maceda Méndez

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.
Octubre de 2025

*Dedicado a
mis padres, mi
hermano y a las
conductoras de ¡Qué
Chulada¡.*

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Actualmente, no existen muchos trabajos referentes a las formas diferenciales y mucho menos en español, aunado a lo anterior, los libros y tesis que abordan este tema no lo hacen de manera completa o de fácil comprensión para el lector, es por ello que para este trabajo de tesis se decidió por abordar a las formas diferenciales, desde su definición hasta sus aplicaciones, de una forma que clara para el lector, para lograr este objetivo, las demostraciones de teoremas y explicaciones de ejercicios serán lo más detalladamente posible, asimismo, habrá comentarios en distintas partes de este escrito que ayudarán a comprender mejor el cómo se desenvuelve este trabajo.

Este trabajo está conformado de siete capítulos, en el primero de ellos se abordarán distintas definiciones, ejemplos y teoremas que se usarán en los capítulos restantes. Posteriormente, en el segundo capítulo, se presentará la noción de k-tensor, lo que permite definir y estudiar a las k-formas y sus propiedades en el tercer capítulo. El cuarto capítulo introducirá un nuevo concepto: m-cubos singulares, el cual nos será útil para poder integrar k-formas. En el quinto capítulo se abordarán las variedades en $\mathbb{R}^n$, sus tipos, ejemplos y teoremas, esto, con el fin de que varios de los conceptos mostrados previamente puedan ser generalizados al contexto de variedades en el capítulo seis. Por último, el capítulo siete está enfocado a mostrar algunas aplicaciones de las formas diferenciales.

Todas las definiciones, teoremas, proposiciones y corolarios aquí presentados y que no cuentan con una cita, fueron adquiridos del libro **Calculus on manifolds** de Michael Spivak (Spivak, 1995).

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de comprender las diferentes definiciones, teoremas, ejemplos y aplicaciones presentados en esta tesis, es necesario presentar conceptos previos de diferentes áreas de las matemáticas, tales como álgebra lineal, teoría de la medida, trigonometría, y las más relevantes, Cálculo diferencial e integral en varias variables.

1.1. Espacio dual

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$. El espacio dual de V denotado por V^* o V' se define como el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to \mathbb{F}$, con operaciones lineales definidas punto a punto:

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x),$$
$$(\lambda\phi)(x) := \lambda\phi(x).$$

A los elementos de V se les llama funcionales lineales (Maximenko, 2020c).

Definición 1.2. Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $A = \{a_1, ..., a_n\}$ una base de V. Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, denotemos por χ_i al funcional cuyo valor en un vector $v \in V$ es igual a la i-ésima coordenada del vector de coordenadas de v respecto a la base A.

En otras palabras, si $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, entonces,

$$\chi_i(v) = \lambda_i.$$

Teorema 1.1. (Teorema de la base dual). Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $A = \{a_1, ..., a_n\}$ una base de V, entonces, existe una base $\{\chi_1, ..., \chi_n\}$ del espacio V^* tal que:

- Se tiene la siguiente relación entre los vectores a_i y los funcionales χ_i :

$$\chi_i(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

  para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$.

- Todo funcional $\phi \in V^*$ se escribe como una combinación lineal de los funcionales $\chi_1, ..., \chi_n$ de la siguiente manera:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)\chi_i,$$

  donde $\phi(a_i) \in \mathbb{F}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

La base $\{\chi_1, ..., \chi_n\}$ del espacio V^* definida en **Teorema 1.1** es llamada la base dual a la base A (Maximenko, 2020a).

Ejemplo 1.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{R}^n$ y $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y el conjunto de funcionales lineales $B^* = \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$, definidos como,

$$e_i^*(v_1, ..., v_n) = v_i,$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, luego,

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por el **Teorema 1.1** se tiene que B^* es una base para $(\mathbb{R}^n)^*$.

1.2. Permutaciones

Definición 1.3. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\delta : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$. A la función δ se llama **permutación** del conjunto $\{1, ..., k\}$ si es biyectiva. Al conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, ..., k\}$ se le denota por S_k, este conjunto cuenta con $k!$ elementos.

Las permutaciones suelen representarse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ \delta(1) & \delta(2) & \cdots & \delta(k) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2. Sean el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función $\delta : A \to A$ dada por:

$$\delta(i) = \begin{cases} i + 1, \text{ si } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 1, \text{ si } i = 5, \end{cases}$$

es fácil ver que δ es una función biyectiva, además, la representación de esta permutación es la siguiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.4. Sean $r, k \in \mathbb{N}$, tales que $r \leq k$ y $a_1, ..., a_r \in \{1, ..., k\}$, tales que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, para cada $i, j \in \{1, .., r\}$. La permutación δ tal que,

$$\begin{aligned} \text{para todo } p \in \{1, ..., r - 1\}, \ \delta(a_p) &:= a_{p+1}; \\ \delta(a_r) &:= a_1; \\ \text{para todo } j \notin \{a_1, ..., a_r\}, \ \delta(j) &:= j, \end{aligned}$$

se llama **ciclo** de los elementos $a_1, ..., a_r$, se dirá que este ciclo tiene longitud r y será denotado por $c(a_1, a_2, ..., a_r)$.
Para una mejor explicación de ejemplos y definiciones, se le agregará un subíndice p a la representación usual de ciclo, el cual indicará el número que le corresponde al ciclo de acuerdo al orden que se definirá más adelante.

Definición 1.5. Un ciclo de dos elementos se llama **transposición**.

Explicación detallada: si $p, q \in \{1, ..., k\}$, $p \neq q$, entonces:

$$c(p, q)(j) \begin{cases} p, \text{ si } j = q; \\ q, \text{ si } j = p; \\ j, \text{ si } j \in \{1, ..., k\} \backslash \{p, q\}. \end{cases}$$

(Maximenko, 2023c). A $c(p,q)$ lo denotaremos como $\tau_{p,q}$.

Definición 1.6. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\delta, \phi \in S_k$, el producto $\delta \cdot \phi : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ se define como sigue, $(\delta \cdot \phi)(j) = \delta(\phi(j)),$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$. Notemos que $\delta \cdot \phi$ es una función biyectiva y por lo tanto $\delta \cdot \phi \in S_k$ (Maximenko, 2023d).

Además, $\delta \cdot \phi = \delta \circ \phi$, es decir, el producto de dos permutaciones es igual a la composición de dichas permutaciones.

Propiedades:

1. Asociatividad:

$$\text{para todo } \delta, \sigma, \phi \in S_k,\ (\delta \cdot \sigma) \cdot \phi = \delta \cdot (\sigma \cdot \phi).$$

2. La permutación identidad, denotada por id o por e,

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix},$$

es un elemento neutro con respecto a la multiplicación de las permutaciones:

$$\delta \cdot e = e \cdot \delta = \delta, \text{ para todo } \delta \in S_k.$$

5. Si $k = 1$ o $k = 2$, entonces la multiplicación en S_k es conmutativa. Si $k \geq 3$, entonces la multiplicación en S_k no es conmutativa.

Cuando los conjuntos $\{a_{1,1}, ..., a_{1,r_1}\}, \{a_{2,1}, ..., a_{2,r_2}\}, ..., \{a_{p,1}, ..., a_{p,r_p}\}$ son disjuntos a pares, diremos que los ciclos

$$c_1(a_{1,1}, ..., a_{1,r_1}), c_2(a_{2,1}, ..., a_{2,r_2}), ..., c_p(a_{p,1}, ..., a_{p,r_p})$$

son ciclos disjuntos (Maximenko, 2020b).

Teorema 1.2. Sea $k \in \mathbb{N}$. Toda permutación $\delta \in S_k$ se puede ver como el producto de ciclos disjuntos (Fraleigh, 1987).

Es decir, podemos ver a δ de la siguiente manera,

$$\delta = c_1(a_{1,1}, ..., a_{1,r_1})c_2(a_{2,1}, ..., a_{2,r_2}) \cdots c_p(a_{p,1}, ..., a_{p,r_p}).$$

Para poder descomponer a una permutación $\delta \in S_k$ en un producto de p ciclos disjuntos, primero construimos al ciclo que contiene al elemento 1:

$$c_1(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,r_1}) = c_1(1, a_{1,2}, ..., a_{1,r_1}),$$

posteriormente, tomamos al primer elemento de $\{1, ..., k\}$ que no pertenece al conjunto $\{a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,r_1}\}$ y construimos un segundo ciclo, el cual empieza en dicho elemento:

$$c_2(a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,r_2}),$$

y así sucesivamente se construyen todos los ciclos de δ hasta que cada elemento de $\{1, ..., k\}$ pertenezca a algún ciclo, luego, δ se descompone en un producto de p ciclos disjuntos de la siguiente manera:

$$\delta = c_1(a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{1,r_1}) \cdots c_p(a_{p,1}, a_{p,2}, ..., a_{p,r_p}).$$

Ejemplo 1.3. Sea la permutación $\delta : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dada como sigue,

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

para poder descomponer a δ como un producto de ciclos, primero nos fijamos en el ciclo que contiene al elemento 1, dado que $\delta(1) = 3$ y $\delta(3) = 1$, entonces definimos al primer ciclo como sigue,

$$c_1(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

luego, para poder definir al siguiente ciclo, nos fijamos en el primer elemento de $\{1, 2, 3, 4\}$ que no pertenece a $\{1, 3\}$, en este caso, dicho elemento es 2, con esto y debido a que $\delta(2) = 4$ y $\delta(4) = 2$, el segundo y último ciclo se define de la siguiente manera,

$$c_2(2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

así, $\delta = c_1(1, 3) \cdot c_2(2, 4)$.

Definición 1.7. Sean $k, p \in \mathbb{N}$. Representando a $\delta \in S_k$ como un producto de p ciclos disjuntos:

$$\delta = c_1(a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{1,r_1}) \cdots c_p(a_{p,1}, a_{p,2}, ..., a_{p,r_p}),$$

con $p \leq k$, y donde cada ciclo tiene longitud r_i, $i \in \{1, ..., p\}$. Se define al **decremento** de una permutación como sigue:

$$d(\delta) = (r_1 - 1) + \cdots + (r_p - 1).$$

Definición 1.8. El **signo** o **signatura** de δ se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{sgn}(\delta) = (-1)^{d(\delta)}.$$

Proposición 1.1. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \{1, ..., k\}$ tales que $p \neq q$. Se cumple que

$$\operatorname{sgn}(\tau_{p,q}) = -1.$$

Teorema 1.3. Sea $k \in \mathbb{N}$. Dadas las permutaciones $\delta_1, \delta_2 \in S_k$, se cumple que:

$$\operatorname{sgn}(\delta_1 \cdot \delta_2) = \operatorname{sgn}(\delta_1)\operatorname{sgn}(\delta_2).$$

Corolario 1.1. Sea $\delta \in S_k$ y sean $p, q \in \{1, ..., k\}$ con $p \neq q$. Entonces,

$$\operatorname{sgn}(\delta \cdot \tau_{p,q}) = -\operatorname{sgn}(\delta) \text{ (Maximenko, 2023e).}$$

Ejemplo 1.4. Sea el conjunto $\{1, 2\}$, luego, las permutaciones posibles de este conjunto y sus respectivos signos son:

1.
$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_1 = c_1(1)c_2(2)$, luego, $d(\delta_1) = (1-1) + (1-1) = 0$, con esto,
$$\operatorname{sgn}(\delta_1) = (-1)^0 = 1.$$

2.
$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_2 = c_1(1, 2)$, luego, $d(\delta_2) = (2-1) = 1$, con esto,
$$\operatorname{sgn}(\delta_2) = (-1)^1 = -1.$$

Ejemplo 1.5. Sea el conjunto $\{1, 2, 3\}$, luego, las permutaciones posibles de este conjunto y sus respectivos signos son:

1.
$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_1 = c_1(1)c_2(2)c_3(3)$, luego, $d(\delta_1) = (1-1)+(1-1)+(1-1) = 0$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_1) = (-1)^0 = 1$.

2.
$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_2 = c_1(1)c_2(2,3)$, luego, $d(\delta_2) = (1-1)+(2-1) = 1$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_2) = (-1)^1 = -1$.

3.
$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_3 = c_1(1,3)c_2(2)$, luego, $d(\delta_3) = (2-1)+(1-1) = 1$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_3) = (-1)^1 = -1$.

4.
$$\delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_4 = c_1(1,2)c_2(3)$, luego, $d(\delta_4) = (2-1)+(1-1) = 1$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_4) = (-1)^1 = -1$.

5.
$$\delta_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_5 = c_1(1,2,3)$, luego, $d(\delta_5) = 3-1 = 2$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_5) = (-1)^2 = 1$.

6.
$$\delta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
así, $\delta_6 = c_1(1,2,3)$, luego, $d(\delta_6) = 3-1 = 2$, con esto, $\operatorname{sgn}(\delta_6) = (-1)^2 = 1$.

Ejemplo 1.6. Sea $\delta : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ una permutación dada como sigue,

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

así,

$$\delta = c_1(1,2,3) \cdot c_2(4,5),$$

luego, $d(\delta) = (3-1) + (2-1) = 3$, con esto $\operatorname{sgn}(\delta) = (-1)^3 = -1$.
Por otro lado, consideremos a la transposición $\tau_{4,5} : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ que está dada como sigue,

$$\tau_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\begin{aligned} \delta \cdot \tau_{4,5} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \delta(5) & \delta(4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

así, $\delta \cdot \tau_{4,5} = c_1(1,2,3) \cdot c_2(4) \cdot c_3(5)$, luego, $d(\delta \cdot \tau_{4,5}) = (3-1)+(1-1)+(1-1) = 2$, con esto,

$$\operatorname{sgn}(\delta \cdot \tau_{4,5}) = (-1)^2 = -(-1) = -\operatorname{sgn}(\delta).$$

Teorema 1.4. Si $\delta \in S_k$. Entonces existen $d(\delta)$ transposiciones $\tau_1, ..., \tau_{d(\delta)}$ tales que $\delta = \tau_1 \cdots \tau_{d(\delta)}$. Si $m < d(\delta)$, entonces no existen m transposiciones $\beta_1, ..., \beta_m$ tales que $\delta = \beta_1 \cdots \beta_m$ (Maximenko, 2023a).

Recordemos que por definición, una permutación δ es una función biyectiva, con esto, podemos asegurar la existencia de δ^{-1}.

Definición 1.9. La **inversa** de una permutación δ es simplemente la función inversa δ^{-1}. Esto significa que si $\delta(p) = q$, entonces $\delta^{-1}(q) = p$ (Maximenko, 2023b).

1.3. Determinantes

Definición 1.10. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A = [A_{i,j}]$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$, una matriz cuadrada de orden n. El **determinante** de A, denotado por $det(A)$ o $|A|$ se define de la siguiente manera

$$det(A) := \sum_{\delta \in S_n} \mathrm{sgn}(\delta) A_{1,\delta(1)} A_{2,\delta(2)} \cdots A_{n,\delta(n)}.$$

(Lipschutz & Lipson, 2009).

Propiedades

- Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir, $det(A^T) = det(A)$.
- Si una fila (columna) de A consta solo de ceros, entonces $det(A) = 0$.
- Si dos filas (columnas) de A son linealmente dependientes, entonces,
$$det(A) = 0.$$
- Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o intercambiando dos columnas de A, entonces $det(B) = -det(A)$.
- Si B se obtiene a partir de A multiplicando una fila (columna) de A por un número real c, entonces $det(B) = c \cdot det(A)$.
- Si $B = [b_{ij}]$ se obtiene de $A = [a_{ij}]$ sumando a cada elemento de la r-ésima fila (columna) de A una constante c por el elemento correspondiente de la s-ésima fila (columna) de A, $r \neq s$, entonces $det(B) = det(A)$.
- El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes; es decir, $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ (Kolman & Hill, 2006).

Definición 1.11. Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz cuadrada de orden n. La matriz cuadrada B de orden n que satisface las siguientes condiciones

$$A \cdot B = I_n \quad B \cdot A = I_n,$$

es llamada la **matriz inversa de** A y es denotada por A^{-1} (Meyer, 2001).

Teorema 1.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz cuadrada de orden n. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

- A es invertible.
- $rango(A) = n$.
- Si $Ax = 0$, entonces $x = 0$ (Meyer, 2001).

1.4. Funciones y continuidad

Definición 1.12. Sea $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. El conjunto $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$, donde (a_i, b_i) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, es llamado **rectángulo abierto** en $\mathbb{R}^n$, mientras que el conjunto $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **rectángulo cerrado** en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **abierto** en $\mathbb{R}^n$ si para cada $x \in U$ existe un rectángulo abierto A tal que $x \in A \subset U$.

Definición 1.14. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos de $x \in A$ para los cuales existe un rectángulo abierto A tal que $x \in A \subset U$, es llamado **interior de** A y denotado por $int(A)$.

Definición 1.15. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales para todo $r > 0$ se cumple que

$$B(x, r) \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset,$$

es llamado **conjunto derivado de** A y denotado por A' (Apostol, 2006).

Teorema 1.6. Sean $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^m$ tales que $A = B \times C$. El conjunto A es un conjunto abierto si y solo si B y C son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Sean $f = (f_1, ..., f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in A'$, luego,

$$\lim_{x \to a} f(x) = (\lim_{x \to a} f_1(x), ..., \lim_{x \to a} f_m(x)).$$

Definición 1.16. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. La función f es llamada **continua en** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f es **continua** en A si es continua en cada $a \in A$.

Teorema 1.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua en A si y solo si para cada conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U) = V \cap A$.

1.5. Diferenciabilidad

Definición 1.17. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in int(A)$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Diremos que f es **diferenciable en** a, si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - \lambda(h)||}{||h||} = 0.$$

Si A es abierto en $\mathbb{R}^n$ y f es diferenciable en cada $a \in A$, entonces diremos que f es diferenciable en A

Proposición 1.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, entonces f es continua en a.

Definición 1.18. La transformación lineal λ dada en la **Definición 1.17**, es llamada la **derivada** de f en a, y es denotada por $Df(a)$.

Definición 1.19. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in (A)$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si el siguiente límite existe,

$$\lim_{h \to 0} \left|\left| \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} \right|\right|,$$

entonces es denotado como $D_i f(a)$ y es llamado la **i-ésima derivada parcial de f en a.**

Es importante ver que $D_i f(a)$ es la derivada ordinaria de una cierta función; de hecho, si $g(x) = f(a_1, ..., x, ..., a_n)$, entonces, $D_i f(a) = g'(a_i)$. Esto significa que $D_i f(a)$ es la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$ a la curva obtenida por la intersección de la gráfica de f con el plano $x_j = a_j$, con $j \neq i$. Si $f(x_1, ..., x_n)$ es dado por alguna fórmula involucrando $x_1, ..., x_n$, entonces podemos encontrar a $D_i f(x_1, ..., x_n)$ diferenciando la función cuyo valor en x_i es dado por la fórmula cuando las variables x_j son pensadas como constantes cuando $j \neq i$.

Ejemplo 1.7. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) =$sen$(x_1 x_2^2)$, así,

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2) &= x_2^2 \cos(x_1 x_2^2), \\ D_2 f(x_1, x_2) &= 2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2). \end{aligned}$$

Teorema 1.8. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f = (f_1, ..., f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ una función, donde para todo $i \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $a \in A$, entonces $D_j f_i(a)$ existe para cada $j \in \{1, ..., n\}$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ y,

$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

La matriz $f'(a)$ consta de m filas y n columnas, además, representa la derivada de f en a con respecto a las bases canónicas del dominio y cododominio de f. A $f'(a)$ le llamaremos la **matriz Jacobiana de f en a**.

Ejemplo 1.8. Continuando con la función dada en el **Ejemplo 1.7**, se tiene que la matriz Jacobiana de f en $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ es,

$$\begin{aligned} f'(x_1, x_2) =& (D_1 f(x_1, x_2) \quad D_2 f(x_1, x_2)) \\ =& (x_2^2 \cos(x_1 x_2^2) \quad 2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)). \end{aligned}$$

Teorema 1.9. Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^p$. Dado $a \in A$ tal que $f(a) \in B$, si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$, entonces, $g \circ f$ es diferenciable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Teorema 1.10. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde $f = (f_1, ..., f_m)$.

1. Si f es una función constante, entonces $Df(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}^n$. En este caso 0 denota a la función nula.

2. Si f es una transformación lineal, entonces $Df(a) = f$, para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

3. f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y solo si cada f_i es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ y

$$Df(a)(x) = (Df_1(a)(x), ..., Df_m(a)(x)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $Df_i(a)(x) = f_i'(a) \cdot x^t$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Corolario 1.2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos y $f : A \to B$ una función biyectiva y diferenciable en $a \in A$. Si f^{-1} es diferenciable en $f(a)$, entonces $det(f'(a)) \neq 0$.

Teorema 1.11. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. $Df(a)$ existe si las funciones $D_j f_i(a)$ existen en un conjunto abierto que contiene al punto a y son continuas en a, para todo $j \in \{1, ..., n\}$ y para todo $i \in \{1, ..., m\}$. En tal caso, se dice que f es **continuamente diferenciable**.

Es fácil ver que toda función continuamente diferenciable es diferenciable.

Definición 1.20. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si f tiene derivadas parciales de todos los órdenes en un conjunto abierto, se dice que f es de clase $\boldsymbol{C^\infty}$.

1.6. Funciones inversas

Teorema 1.12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in A$ y una función $f : A \to \mathbb{R}^n$. Si f es continuamente diferenciable en A y $det(f'(a)) \neq 0$, entonces, existe un conjunto abierto $V \subset A$ que contiene al punto a y un conjunto abierto W que contiene a $f(a)$ tales que $f : V \to W$ tiene una inversa continua y diferenciable $f^{-1} : W \to V$. Además, para todo $y \in W$ se satisface que:

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Teorema 1.13. Sean $n, p \in \mathbb{N}$, con $p \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^p$ una función continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene al punto a. Si $f(a) = 0$ y la matriz $f'(a)$ tiene rango p, entonces, existen conjuntos abiertos $W, U \subset \mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, además, existe una función diferenciable $h : W \to U$ con inversa diferenciable tal que $h(W) \subset A$ y

$$\begin{aligned}(f \circ h)(x) =& (f \circ h)(x_1, ..., x_n)\\ =& (x_{n-p+1}, ..., x_n),\end{aligned}$$

para todo $x \in W$.

1.7. Integración

Teorema 1.14. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $g : A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y continuamente diferenciable tal que $det(g'(x)) \neq 0$, para todo $x \in A$. Si la función $f : g(A) \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces:

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|detg'|.$$

Las siguientes dos definiciones fueron obtenidas de (Cárdenas, 2012).

Definición 1.21. Sean $n \in \mathbb{N}$, K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde $F = (F_1, ..., F_n)$, un campo vectorial continuo en el conjunto abierto y conexo U, una curva $\Gamma \subset U$ y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función derivable a trozos tal que $\Gamma = \gamma([a, b])$. Definimos la integral de F sobre la curva Γ según la parametrización γ como:

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Definición 1.22. Sean $F : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por la función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Definimos la integral de F sobre S, que denotamos como $\int_S F \cdot d\sigma$, como:

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

Teorema 1.15. (Regla de Leibniz para integrales). Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $D_2 f$ es una función continua y definiendo $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, entonces F es derivable y

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y)dx.$$

Teorema 1.16. (Corolario del Teorema de Fubini). Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_1 \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $f : R \to \mathbb{R}$. Si f es continua, entonces:

$$\int_R F = \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\int_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, ..., x_n) dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \right) \cdots \right) dx_{i_{n-1}} \right) dx_{i_n},$$

donde $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$ son distintos a pares, visto de otra manera, se cumple la siguiente igualdad: $\{i_1, ..., i_n\} = \{1, ..., n\}$ (Cárdenas, 2012).

El siguiente corolario se obtuvo de (Spivak, 2017).

Teorema 1.17. (Corolario del primer Teorema Fundamental del Cálculo). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $[0,1]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

1.8. Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.23. La **medida exterior de Lebesgue** de $A \subset \mathbb{R}^n$ se denota como $\mu^*(A)$ y se define de la siguiente manera

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right\},$$

donde $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección contable de rectángulos cerrados, estos rectángulos tienen la forma $U_i = [b_{1i}, a_{1i}] \times \cdots \times [b_{ni}, a_{ni}]$ y μ^* está dada de la siguiente manera $\mu^*(U_i) = (b_{1i} - a_{1i}) \cdots (b_{ni} - a_{ni})$ (Hunter, 2007).

Definición 1.24. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto A tiene **medida cero** si para todo $\epsilon > 0$ existe una cubierta $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A compuesta por rectángulos, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) < \epsilon,$$

en otras palabras, A tiene medida cero si $\mu^*(A) = 0$.

Teorema 1.18. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $I^m = [0,1]^m$ el cubo unitario de $\mathbb{R}^m$ y una función $f : I^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \in C^1$. Si $m < n$, entonces $f(I^m)$ tiene medida cero. Si $m = n$ y $A \subset I^m$ tiene medida cero, entonces $f(A)$ tiene medida cero (Gualtieri, 2017).

Teorema 1.19. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto de medida cero y $f : A \to \mathbb{R}$. Si f es una función continua, entonces $\int_A f = 0$.

Demostración: Dado que f es una función continua sobre un conjunto compacto, se sigue que f es una función acotada en dicho conjunto, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$

tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in A$, así,

$$\int_A f \leq \left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \leq \int_A M = M \cdot m^*(A) = 0.$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. $\square$

Proposición 1.3. Si $n \in \mathbb{N}$, $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ y ∂A la frontera de A, entonces, ∂A tiene medida cero.

1.9. Identidades trigonométricas

- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, si $x = \frac{z}{y}$ se sigue que $\cos(\arctan(x)) = \frac{|y|}{\sqrt{z^2+y^2}}$.
- $\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, si $x = \frac{z}{y}$ se sigue que $\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{|y|z}{y\sqrt{z^2+y^2}}$.
- $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\tan(x+\pi) = \tan(x)$.

1.10. Partición de unidad

Teorema 1.20. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{O}$ es una cubierta abierta de A, entonces, existe una colección Φ de funciones $\phi \in C^\infty$ definidas en un conjunto abierto que contiene a A, con las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in A$, se cumple que $0 \leq \phi(x) \leq 1$.
2. Para cada $x \in A$, existe un conjunto abierto V que contiene a x, tal que todas las funciones $\phi \in \Phi$, a excepción de un número finito, son 0 en V.
3. Para cada $x \in A$, se cumple que: $\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1$.

A la colección Φ se le llama **partición de la unidad para A de clase C^∞**.

Capítulo 2

K-tensores

En este capítulo se presentarán la definición y propiedades de los k-tensores. Asimismo, se explicarán las operaciones fundamentales que se pueden realizar con ellos y su forma general de representación.

2.1. K-tensores de V

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Denotaremos el k-producto cartesiano $V \times V \times \cdots \times V$ por V^k, con $k \in \mathbb{N}$. Una función $T : V^k \to \mathbb{R}$ es llamada **multilineal** si para todo $i \in \{1, ..., k\}$, para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos,

$$T(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k) = c \cdot T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c \cdot T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k).$$

Una función multilineal $T : V^k \to \mathbb{R}$ se llama ***k*-tensor** en V.

Ejemplo 2.1. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por,

$$T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ y $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned} T(c((x_1, x_2) + (z_1, z_2)), (y_1, y_2)) =& c(x_1 + z_1)y_1 + c(x_2 + z_2)y_2 \\ =& cx_1y_1 + cz_1y_1 + cx_2y_2 + cz_2y_2 \\ =& c(x_1y_1 + x_2y_2) + c(z_1y_1 + z_2y_2) \\ =& c \cdot T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ & + c \cdot T((z_1, z_2), (y_1, y_2)), \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
T((x_1, x_2), c((y_1, y_2) + (z_1, z_2))) =& x_1 c(y_1 + z_1) + x_2 c(y_2 + z_2) \\
=& c x_1 y_1 + c x_1 z_1 + c x_2 y_2 + c x_2 z_2 \\
=& c(x_1 y_1 + x_2 y_2) + c(x_1 z_1 + x_2 z_2) \\
=& c \cdot T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\
& + c \cdot T((x_1, x_2), (z_1, z_2)).
\end{aligned}$$

Así, T es un 2-tensor.

Ejemplo 2.2. Una generalización para todo $k \in \mathbb{N}$ del ejemplo anterior es el k-tensor $T : \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2)^k \to \mathbb{R}$ dado por,

$$T((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}), ..., (x_{k1}, x_{k2})) = x_{11} x_{21} \cdots x_{k1} + x_{12} x_{22} \cdots x_{k2}.$$

Ejemplo 2.3. Toda transformación lineal $T : V \to \mathbb{R}$ es un 1-tensor, esto se debe a que para todo $x_1, x_2 \in V$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, se cumple que,

$$T(c(x_1 + x_2)) = cT(x_1 + x_2) = c(T(x_1) + T(x_{"})) = c \cdot T(x_1) + c \cdot T(x_2).$$

Proposición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. El conjunto de k-tensores denotado como $\mathscr{T}^k(V)$, con $k \in \mathbb{N}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones dadas por:

$$\begin{aligned}
(S + T)(v_1, ..., v_k) &= S(v_1, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_k), \\
(cS)(v_1, ..., v_k) &= c \cdot S(v_1, ..., v_k),
\end{aligned}$$

para todo $S, T \in \mathscr{T}^k(V)$ y $c \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sean $S, T, R \in \mathscr{T}^k(V)$ y $c \in \mathbb{R}$.

1. Cerradura sobre la suma.

$$\begin{aligned}
&(T + S)(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k) \\
&\qquad = T(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k) + S(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&c \cdot T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c \cdot T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)\\
&+ c \cdot S(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c \cdot S(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)\\
=&c(T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + S(v_1, ..., v_i, ..., v_k))\\
&+ c(T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k) + S(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k))\\
=&c(T + S)(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c(T + S)(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

Con esto, $S + T \in \mathscr{T}^k(V)$.

Debido a que $T(v_1, ..., v_k), S(v_1, ..., v_k), R(v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}$, es sencillo ver que se cumplen las siguientes dos propiedades.

2. Conmutatividad de la suma.

$$
\begin{aligned}
(T + S)(v_1, ..., v_k) =&T(v_1, ..., v_k) + S(v_1, ..., v_k)\\
=&S(v_1, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_k)\\
=&(S + T)(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

3. Asociatividad de la suma.

$$
\begin{aligned}
&(T + (S + R))(v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =T(v_1, ..., v_k) + (S + R)(v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =T(v_1, ..., v_k) + (S(v_1, ..., v_k) + R(v_1, ..., v_k))\\
&\qquad =T(v_1, ..., v_k) + S(v_1, ..., v_k) + R(v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =(T(v_1, ..., v_k) + S(v_1, ..., v_k)) + R(v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =(T + S)(v_1, ..., v_k) + R(v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =((T + S) + R)(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

4. Existencia de neutro aditivo.
   Sea $O : V^k \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue, $O(v_1, ..., v_k) = 0$, luego, O satisface lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
O(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k) =&0\\
=&c \cdot 0 + c \cdot 0\\
=&c \cdot O(v_1, ..., v_i, ..., v_k)\\
&+ c \cdot O(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k),
\end{aligned}
$$

así, $O \in \mathscr{T}^k(V)$, luego,

$$\begin{aligned}(T+O)(v_1,...,v_k) &= T(v_1,...,v_k) + O(v_1,...,v_k)\\ &= T(v_1,...,v_k)+0\\ &= T(v_1,...,v_k),\end{aligned}$$

con esto, existe un elemento neutro aditivo O en $\mathscr{T}^k(V)$. A O le llamaremos k-tensor nulo.

5. Existencia de inverso aditivo.
   Debido a que T es un k-tensor, se sigue que,

$$\begin{aligned}&T(v_1,...,c(v_i+v_{i'}),...,v_k)\\ &\qquad = c\cdot T(v_1,...,v_i,...,v_k) + c\cdot T(v_1,...,v_{i'},...,v_k),\end{aligned}$$

   luego,

$$\begin{aligned}&-T(v_1,...,c(v_i+v_{i'}),...,v_k)\\ &\qquad = -(cT(v_1,...,v_i,...,v_k) + cT(v_1,...,v_{i'},...,v_k))\\ &\qquad = (-1)c\cdot T(v_1,...,v_i,...,v_k) + (-1)c\cdot T(v_1,...,v_{i'},...,v_k)\\ &\qquad = c(-1)T(v_1,...,v_i,...,v_k) + c(-1)T(v_1,...,v_{i'},...,v_k)\\ &\qquad = c(-T)(v_1,...,v_i,...,v_k) + c(-T)(v_1,...,v_{i'},...,v_k).\end{aligned}$$

   Así, $-T \in \mathscr{T}^k(V)$, además,

$$\begin{aligned}(T+(-T))(v_1,...,v_k) =& T(v_1,...,v_k) + (-T)(v_1,...,v_k)\\ =& T(v_1,...,v_k) - T(v_1,...,v_k)\\ =& 0\\ =& O(v_1,...,v_k),\end{aligned}$$

   por ende existe un inverso aditivo en $\mathscr{T}^k(V)$.

6. Cerradura sobre el producto por un escalar.
   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego,

$$(\alpha T)(v_1,...,c(v_i+v_{i'}),...,v_k) = \alpha\cdot T(v_1,...,c(v_i+v_{i'}),...,v_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(c \cdot T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c \cdot T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)) \\
&= \alpha c \cdot T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + \alpha c \cdot T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k) \\
&= c(\alpha \cdot T(v_1, ..., v_i, ..., v_k)) + c(\alpha \cdot T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)) \\
&= c(\alpha T)(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c(\alpha T)(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, $\alpha T \in \mathscr{T}^k(V)$.

7. Asociatividad del producto de escalares.
   Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos que,

$$
\begin{aligned}
((\alpha\beta)T)(v_1, ..., v_k) &= \alpha\beta \cdot T(v_1, ..., v_k) \\
&= \alpha(\beta \cdot T(v_1, ..., v_k)) \\
&= \alpha \cdot (\beta T)(v_1, ..., v_k) \\
&= (\alpha(\beta T))(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

8. Distribución de la suma escalar.
   Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
((\alpha + \beta)T)(v_1, ..., v_k) =&(\alpha + \beta) \cdot T(v_1, ..., v_k) \\
=&\alpha \cdot T(v_1, ..., v_k) + \beta \cdot T(v_1, ..., v_k) \\
=&(\alpha T + \beta T)(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

9. Distribución de suma vectorial.
   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha(T + S))(v_1, ..., v_k) =&\alpha(T + S)(v_1, ..., v_k) \\
=&\alpha \cdot T(v_1, ..., v_k) + \alpha \cdot S(v_1, ..., v_k) \\
=&(\alpha T + \alpha S)(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

10. Unitaridad.
    Tenemos que $1 \in \mathbb{R}$, luego,

$$
(1 \cdot T)(v_1, ..., v_k) = 1 \cdot T(v_1, ..., v_k) = T(v_1, ..., v_k).
$$

Con esto, se concluye que $\mathscr{T}^k(V)$ es un espacio vectorial. □

Dados un k-tensor y un l-tensor, es posible obtener un $k+l$-tensor como resultado de la operación definida a continuación.

Definición 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Tomando $S \in \mathscr{T}^k(V)$ y $T \in \mathscr{T}^l(V)$, con $k, l \in \mathbb{N}$, definimos al **producto tensorial** $S \otimes T : V^{k+l} \to \mathbb{R}$ como:

$$(S \otimes T)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}) = S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}).$$

Propiedades. Si $S_1, S_2 \in \mathscr{T}^k(V)$, $U \in \mathscr{T}^m(V)$, $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^l(V)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k, l, m \in \mathbb{N}$, entonces,

- $(S_1 + S_2) \otimes T_1 = S_1 \otimes T_1 + S_2 \otimes T_1$.
- $S_1 \otimes (T_1 + T_2) = S_1 \otimes T_1 + S_1 \otimes T_2$.
- $(\alpha S_1) \otimes T_1 = S_1 \otimes (\alpha T_1) = \alpha(S_1 \otimes T_1)$.
- $(S_1 \otimes T_1) \otimes U = S_1 \otimes (T_1 \otimes U)$.

Proposición 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dados $S \in \mathscr{T}^k(V)$ y $T \in \mathscr{T}^l(V)$, con $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que $S \otimes T \in \mathscr{T}^{k+l}(V)$.

Demostración: Sean $S \in \mathscr{T}^k(V)$, $T \in \mathscr{T}^l(V)$, $c \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, ..., k+l\}$.

- Caso 1. $1 \leq i \leq k$.

$$\begin{aligned}
&(S \otimes T)(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_{k+l}) \\
&\qquad = S(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&\qquad = (c \cdot S(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + c \cdot S(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&\qquad = c \cdot S(v_1, ..., v_i, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&\qquad + c \cdot S(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&\qquad = c \cdot (S \otimes T)(v_1, ..., v_i, ..., v_{k+l}) \\
&\qquad + c \cdot (S \otimes T)(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_{k+l}).
\end{aligned}$$

- Caso 2. $k+1 \leq i \leq k+l$.

$$\begin{aligned}
&(S\otimes T)(v_1, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_{k+l})\\
&\qquad = S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., c(v_i + v_{i'}), ..., v_{k+l})\\
&\qquad = S(v_1, ..., v_k) \cdot (c \cdot T(v_{k+1}, ..., v_i, ..., v_{k+l}) + c \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{i'}, ..., v_{k+l}))\\
&\qquad = c \cdot S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_i, ..., v_{k+l})\\
&\qquad + c \cdot S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{i'}, ..., v_{k+l})\\
&\qquad = c \cdot (S \otimes T)(v_1, ..., v_i, ..., v_{k+l})\\
&\qquad + c \cdot (S \otimes T)(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_{k+l}).
\end{aligned}$$

Así, $S \otimes T \in \mathscr{T}^{k+l}(V)$. □

Ejemplo 2.4. Sean $S \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^2)$ y $T \in \mathscr{T}^1(\mathbb{R}^2)$, dadas como sigue:

$$S((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2.$$
$$T(w_1, w_2) = w_1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&(S \otimes T)((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (w_1, w_2))\\
&\qquad =S((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \cdot T(w_1, w_2)\\
&\qquad =(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2)w_1\\
&\qquad =x_1y_1z_1w_1 + x_2y_2z_2w_1.
\end{aligned}$$

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (u_1, u_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, con esto,

$$\begin{aligned}
&(S \otimes T)(c((x_1, x_2) + (u_1, u_2)), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (w_1, w_2))\\
&\qquad =S(c((x_1, x_2) + (u_1, u_2)), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \cdot T(w_1, w_2)\\
&\qquad =S(c((x_1 + u_1, x_2 + u_2)), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \cdot T(w_1, w_2)\\
&\qquad =(c(x_1 + u_1)y_1z_1 + c(x_2 + u_2)y_2z_2)w_1\\
&\qquad =cx_1y_1z_1w_1 + cu_1y_1z_1w_1 + cx_2y_2z_2w_1 + cu_2y_2z_2w_1\\
&\qquad =c(x_1y_1z_1w_1 + x_2y_2z_2w_1) + c(u_1y_1z_1w_1 + u_2y_2z_2w_1)\\
&\qquad =c \cdot (S \otimes T)((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (w_1, w_2))\\
&\qquad\quad + c \cdot (S \otimes T)((u_1, u_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (w_1, w_2)).
\end{aligned}$$

De manera análoga, se demuestran las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(S\otimes T)((x_1,x_2),c((y_1,y_2)+(u_1,u_2)),(z_1,z_2),(w_1,w_2))&\\
=&c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(w_1,w_2))\\
&+c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(u_1,u_2),(z_1,z_2),(w_1,w_2)),\\
(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),c((z_1,z_2)+(u_1,u_2)),(w_1,w_2))&\\
=&c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(w_1,w_2))\\
&+c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(u_1,u_2),(u_1,u_2),(w_1,w_2)),
\end{aligned}
$$

además,

$$
\begin{aligned}
(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),&(z_1,z_2),c((w_1,w_2)+(u_1,u_2)))\\
&=S((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2))\cdot T(c((w_1,w_2)+(u_1,u_2)))\\
&=(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2)c(w_1+u_1)\\
&=c(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2)w_1+c(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2)u_1\\
&=c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(w_1,w_2))\\
&\quad+c\cdot(S\otimes T)((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(u_1,u_2)).
\end{aligned}
$$

Con esto se concluye que $S\otimes T\in\mathscr{T}^4(\mathbb{R}^2)$.

Notemos que $\mathscr{T}^1(V)$ es el conjunto de todas las funciones multilineales de una sola entrada, es decir, es el conjunto de todas las transformaciones lineales cuyo dominio es V y codominio es $\mathbb{R}$, con esto, es fácil notar que $\mathscr{T}^1(V)=V^*$.

Teorema 2.1. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita n y una base $\{v_1,...,v_n\}$ de V. Si $\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_n\}$ es la base dual correspondiente a $\{v_1,...,v_n\}$, entonces el conjunto de todos los productos tensoriales,

$$\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k},\ 1\leq i_1,...,i_k\leq n,$$

es una base para $\mathscr{T}^k(V)$, que además tiene dimensión n^k.

Demostración: Sean $\{v_1,...,v_n\}$ una base para V, y $\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_n\}$ la base dual correspondiente. Dados $w_1,...,w_k$ vectores de V y $T\in\mathscr{T}^k(V)$, tenemos que,

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$ y para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Además,

$$\begin{aligned}
\phi_m(w_i) &= \phi_m\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \phi_m(a_{ij}v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi_m(v_j) \\
&= a_{im},
\end{aligned}$$

para todo $m \in \{1, ..., k\}$, con esto,

$$T(w_1, ..., w_k) = T\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}v_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{kj}v_j\right),$$

debido a que tenemos k sumas donde el índice j aparece en todas, cambiaremos el índice de la suma en la entrada l por j_l, para todo $l \in \{1, ..., k\}$, con esto,

$$\begin{aligned}
T(w_1, ..., w_k) &= T\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}v_{j_1}, ..., \sum_{j_k=1}^{n} a_{kj_k}v_{j_k}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} T(v_{j_1}, ..., v_{j_k}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \phi_{j_1}(w_1) \cdots \phi_{j_k}(w_k) T(v_{j_1}, ..., v_{j_k}).
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de j_l por i_l, se llega a lo siguiente,

$$\begin{aligned}
T(w_1, ..., w_k) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \phi_{i_1}(w_1) \cdots \phi_{i_k}(w_k) T(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k}(w_1, ..., w_k) T(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} T(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k}\right)(w_1, ..., w_k).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$T=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}T(v_{i_1},...,v_{i_k})\cdot\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k},$$

debido a que $T(v_{i_1},...,v_{i_k})$ es un número real, podemos decir que el conjunto de todos los k-tensores de la forma $\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}$ genera a $\mathscr{T}^k(V)$. Por otro lado,

$$\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}(v_{j_1},...,v_{j_k})=\phi_{i_1}(v_{j_1})\cdots\phi_{i_k}(v_{j_k}),$$

dado que $\phi_{i_l}(v_{j_l})=1$ solo si $i_l=j_l$, para todo $l\in\{1,2,...,k\}$, entonces,

$$\phi_{i_1}(v_{j_1})\cdots\phi_{i_k}(v_{j_k})=\begin{cases}1, \text{ si } j_l=i_l, \text{ para todo } l\in\{1,2,...,k\},\\ 0\ , \text{ otro caso.}\end{cases}$$

Sea $O\in\mathscr{T}^k(V)$ el k-tensor nulo y supongamos que existen números de la forma $a_{i_1,...,i_k}$ tales que,

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}a_{i_1,...,i_k}\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}=O,$$

luego, al evaluar en $v_{j_1},...,v_{j_k}$, resulta lo siguiente:

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}a_{i_1,...,i_k}\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}\right)(v_{j_1},...,v_{j_k})=O(v_{j_1},...,v_{j_k})=0,$$

visto de otra forma,

$$\begin{aligned}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}a_{i_1,...,i_k}(\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}(v_{j_1},...,v_{j_k}))&\\ &=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}a_{i_1,...,i_k}\phi_{i_1}(v_{j_1})\cdots\phi_{i_k}(v_{j_k})\\ &=0,\end{aligned}$$

notemos que $\phi_{j_1}(v_{j_1})\cdots\phi_{j_k}(v_{j_k})=1$, así,

$$a_{j_1,...,j_k}\phi_{j_1}(v_{j_1})\cdots\phi_{j_k}(v_{j_k})=a_{j_1,...,j_k}\cdot 1=0,$$

lo que implica que $a_{j_1,...,j_k}=0$, para todo $j_l\in\{1,...,n\}$, $l\in\{1,...,k\}$. Por otro lado, dado que para ϕ_{il}, para todo $i_l \in \{1, ..., n\}$ y para todo $l \in \{1, ..., k\}$, existen n posibles elecciones de funciones, se sigue que existen n^k formas distintas de combinar,

$$\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k},$$

así, el conjunto de todos los productos tensoriales,

$$\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k},\ 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n,$$

es linealmente independiente y $\mathscr{T}^k(V)$ tiene dimensión n^k. □

2.2. K-tensores alternantes

Definición 2.3. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $k \geq 2$. Un k-tensor $\omega \in \mathscr{T}^k(V)$ se llama **alternante** si, para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, ..., k\}$, se cumple que para todo $v_1, ..., v_k \in V$:

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k).$$

Ejemplo 2.5. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ y $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned}\omega(c((x_1, x_2) + (z_1, z_2)), (y_1, y_2)) =& c(x_1 + z_1)y_2 - c(x_2 + z_2)y_1\\ =& cx_1y_2 + cz_1y_2 - cx_2y_1 - cz_2y_1\\ =& c(x_1y_2 - x_2y_1) + c(z_1y_2 - z_2y_1)\\ =& c \cdot \omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + c \cdot \omega((z_1, z_2), (y_1, y_2)),\end{aligned}$$

análogamente,

$$\omega((x_1, x_2), c((y_1, y_2) + (z_1, z_2))) = c \cdot \omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + c \cdot \omega((x_1, x_2), (z_1, z_2)).$$

Así, ω es un 2-tensor, además,

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$\begin{aligned}
&= -(-x_1y_2 + x_2y_1)\\
&= -(x_2y_1 - x_1y_2)\\
&= -(y_1x_2 - y_2x_1)\\
&= -\omega((y_1, y_2), (x_1, x_2)).
\end{aligned}$$

Con esto, ω es un 2-tensor alternante de $\mathbb{R}^2$.

A diferencia del **Ejemplo 2.1**, el **Ejemplo 2.5** no puede ser generalizado para todo $k \in \mathbb{N}$, pero sí para $\mathbb{R}^n$ como explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Sean $V = \mathbb{R}^n$, n par y $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
\omega((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) =& x_1y_n - x_ny_1 + x_2y_{n-1} - x_{n-1}y_2\\
&+ \cdots + x_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}+1} - x_{\frac{n}{2}+1}y_{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Se tiene que ω es 2-tensor alternante de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. El conjunto de k-tensores alternantes, denotado por $\Lambda^k(V)$, es un subespacio de $\mathscr{T}^k(V)$.

Demostración: Sean $\omega, \eta \in \Lambda^k(V)$ y $c \in \mathbb{R}$.

1. Cerradura sobre la suma.
   Como ya se vió anteriormente $\omega + \eta$ es un k-tensor, además,

   $$\begin{aligned}
   &(\omega + \eta)(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)\\
   &\qquad =\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) + \eta(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)\\
   &\qquad = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) - \eta(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)\\
   &\qquad = -(\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) + \eta(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k))\\
   &\qquad = -(\omega + \eta)(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k).
   \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\omega + v \in \Lambda^k(V)$.

2. Cerradura sobre el producto por un escalar.
   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego,

   $$(\alpha\omega)(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \alpha \cdot \omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(-\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)) \\
&= -\alpha \cdot \omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \\
&= (-\alpha\omega)(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k).
\end{aligned}
$$

Con esto, $\alpha\omega \in \Lambda^k(V)$.

Por lo tanto, $\Lambda^k(V)$ es un subespacio de $\mathscr{T}^k(V)$. $\square$

Si $k > n$ el único tensor alternante es el k-tensor nulo. Por otro lado, dados $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$, no siempre se cumple que $\omega \otimes \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Sean $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ y $\eta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, dadas como sigue,

$$
\begin{aligned}
\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\
\eta((z_1, z_2), (u_1, u_2)) &= z_1 u_2 - z_2 u_1.
\end{aligned}
$$

Intercambiando el vector (y_1, y_2) con el vector (u_1, u_2) se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\omega \otimes \eta((x_1, x_2), (u_1, u_2), (z_1, z_2), (y_1,y_2)) \\
&= \omega((x_1, x_2), (u_1, u_2))\eta((z_1, z_2), (y_1, y_2)) \\
&= (x_1 u_2 - x_2 u_1)(z_1 y_2 - z_2 y_1).
\end{aligned}
$$

Sean $(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (1, 1)$ y $(z_1, z_2) = (u_1, u_2) = (1, \frac{1}{2})$, así,

$$
\begin{aligned}
\omega \otimes \eta((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (u_1, u_2)) &= \omega \otimes \eta((1, 1), (1, 1), (1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1)) \\
&= (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)(1 \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por otro lado, al intercambiar el vector (y_1, y_2) con el vector (u_1, u_2) se obtiene el siguiente resultado,

$$
\begin{aligned}
\omega \otimes \eta((x_1, x_2), (u_1, u_2), (z_1, z_2), (y_1, y_2)) &= \omega \otimes \eta((1, 1), (\tfrac{1}{2}, 1), (1, \tfrac{1}{2}), (1, 1)) \\
&= (1 \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2})(1 \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}) \\
&= \tfrac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\omega \otimes \eta((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (u_1, u_2))&\\ &=0\\ &\neq -\tfrac{9}{16}\\ &=-\,\omega \otimes \eta((x_1, x_2), (u_1, u_2), (z_1, z_2), (y_1, y_2)).\end{aligned}$$

Definición 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $T \in \mathscr{T}^k(V)$ con $k \in \mathbb{N}$, definimos a $Alt(T) : V^k \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$Alt(T)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}).$$

Notemos que cuando $k = 1$, se tiene que:

$$Alt(T)(v_1) = \frac{1}{1!} \sum_{\delta \in S_1} \operatorname{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta(1)}) = T(v_1).$$

Recordemos que por definición, los k-tensores alternantes solo existen cuando $k \geq 2$, pero, por la igualdad previa, diremos que todo 1-tensor es alternante, así, $\Lambda^1(V) = \mathscr{T}^1(V)$.

Ejemplo 2.8. Sea $T \in \mathscr{T}^3(\mathbb{R}^2)$ dado por:

$$T((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2.$$

Considerando las permutaciones δ_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dadas en el **Ejemplo 1.5** y tomando $v_1 = (x_1, x_2)$, $v_2 = (y_1, y_2)$ y $v_3 = (z_1, z_2)$, resulta,

$$\begin{aligned}Alt(T)((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2))&\\ &=Alt(T)(v_1, v_2, v_3)\\ &=\frac{1}{3!}[\operatorname{sgn}(\delta_1) T(v_{\delta_1(1)}, v_{\delta_1(2)}, v_{\delta_1(3)}) + \operatorname{sgn}(\delta_2) T(v_{\delta_2(1)}, v_{\delta_2(2)}, v_{\delta_2(3)})\\ &\quad + \operatorname{sgn}(\delta_3) T(v_{\delta_3(1)}, v_{\delta_3(2)}, v_{\delta_3(3)}) + \operatorname{sgn}(\delta_4) T(v_{\delta_4(1)}, v_{\delta_4(2)}, v_{\delta_4(3)})\\ &\quad + \operatorname{sgn}(\delta_5) T(v_{\delta_5(1)}, v_{\delta_5(2)}, v_{\delta_5(3)}) + \operatorname{sgn}(\delta_6) T(v_{\delta_6(1)}, v_{\delta_6(2)}, v_{\delta_6(3)})]\\ &=\frac{1}{6}[1 \cdot T(v_1, v_2, v_3) + (-1) \cdot T(v_1, v_3, v_2)\\ &\quad + (-1) \cdot T(v_3, v_2, v_1) + (-1) \cdot T(v_2, v_1, v_3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+1\cdot T(v_2,v_3,v_1)+1\cdot T(v_3,v_1,v_2)]\\
=&\frac{1}{6}[T((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2))-T((x_1,x_2),(z_1,z_2),(y_1,y_2))\\
&-T((z_1,z_2),(y_1,y_2),(x_1,x_2))-T((y_1,y_2),(x_1,x_2),(z_1,z_2))\\
&+T((y_1,y_2),(z_1,z_2),(x_1,x_2))+T((z_1,z_2),(x_1,x_2),(y_1,y_2))]\\
=&\frac{1}{6}[x_1y_1z_1-x_2y_2z_2-x_1z_1y_1-x_2z_2y_2\\
&-z_1y_1x_1-z_2y_2x_2-y_1x_1z_1-y_2x_2z_2\\
&+y_1z_1x_1+y_2z_2x_2+z_1x_1y_1+z_2x_2y_2]\\
=&0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.9. Sea $\{e_1,e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\{\phi_1,\phi_2\}$ la base dual correspondiente. Considerando las permutaciones δ_i, para cada $i\in\{1,2\}$ dadas como en el **Ejemplo 1.4** y tomando $v_1=(x_1,x_2)$ y $v_2=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, resulta,

$$
\begin{aligned}
Alt(\phi_1\otimes\phi_2)(v_1,v_2)=&\frac{1}{2!}\sum_{\delta\in S_2}(\phi_1\otimes\phi_2)(v_{\delta(1)},v_{\delta(2)})\\
=&\frac{1}{2!}\sum_{\delta\in S_2}\phi_1(v_{\delta(1)})\cdot\phi_2(v_{\delta(2)})\\
=&\frac{1}{2!}[\phi_1(v_1)\cdot\phi_2(v_2)-\phi_1(v_2)\cdot\phi_2(v_1)]\\
=&\frac{1}{2}[x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2]\\
=&\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.2. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $k\geq 2$.

1) Si $T\in\mathscr{T}^k(V)$, entonces $Alt(T)\in\Lambda^k(V)$.

2) Si $\omega\in\Lambda^k(V)$, entonces $Alt(\omega)=\omega$.

3) Si $T\in\mathscr{T}^k(V)$, entonces $Alt(Alt(T))=Alt(T)$.

Demostración:

1. Sean $T\in\mathscr{T}^k(V)$ y la transposición $\tau_{p,q}\in S_k$. Dado $\delta\in S_k$ definimos a

$\delta' = \delta \cdot \tau_{p,q}$, notemos que δ' cumple lo siguiente,

$$\begin{aligned}\delta'(p) =&(\delta \cdot \tau_{p,q})(p) = \delta(\tau_{p,q}(p)) = \delta(q),\\ \delta'(q) =&(\delta \cdot \tau_{p,q})(q) = \delta(\tau_{p,q}(q)) = \delta(p),\\ \delta'(j) =&(\delta \cdot \tau_{p,q})(j) = \delta(\tau_{p,q}(j)) = \delta(j), \text{ para todo } j \in \{1, ..., k\}\backslash\{p, q\},\end{aligned}$$

además, $\delta' \in S_k$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p < q$, luego,

$$\begin{aligned}&Alt(T)(v_1, ..., v_p, ..., v_q, ..., v_k)\\ &\qquad=\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k} \text{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(p)}, ..., v_{\delta(q)}, ..., v_{\delta(k)})\\ &\qquad=\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k} \text{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(q)}, ..., v_{\delta'(p)}, ..., v_{\delta'(k)}),\end{aligned}$$

por **Corolario 1.1** se tiene que,

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\delta') =&\text{sgn}(\delta \cdot \tau_{p,q})\\ =&-\text{sgn}(\delta),\end{aligned}$$

es decir, $\text{sgn}(\delta) = -\text{sgn}(\delta')$. Por otro lado, debido a que para cada $\delta \in S_k$ se define a $\delta' = \delta \cdot \tau_{p,q}$ y $\delta' \in S_k$, se puede cambiar el índice de la suma de δ por δ', con esto,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k} \text{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(q)}, ..., v_{\delta'(p)}, ..., v_{\delta'(k)})\\ &\qquad=\frac{1}{k!}\sum_{\delta'\in S_k} -\text{sgn}(\delta')\ T(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(q)}, ..., v_{\delta'(p)}, ..., v_{\delta'(k)})\\ &\qquad=-\frac{1}{k!}\sum_{\delta'\in S_k} \text{sgn}(\delta')\ T(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(q)}, ..., v_{\delta'(p)}, ..., v_{\delta'(k)})\\ &\qquad=-Alt(T)(v_1, ..., v_q, ..., v_p, ..., v_k).\end{aligned}$$

Así,

$$Alt(T)(v_1, ..., v_p, ..., v_q, ..., v_k) = -Alt(T)(v_1, ..., v_q, ..., v_p, ..., v_k).$$

Con esto, $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$.

2. Sean $\omega \in \Lambda^k(V)$ y la transposición $\tau_{p,q}$, así,

$$\begin{aligned}\omega(v_1, ..., v_p, ..., v_q, ..., v_k) &= -\,\omega(v_1, ..., v_q, ..., v_p, ..., v_k)\\ &= -\,\omega\big(v_{\tau_{p,q}(1)}, ..., v_{\tau_{p,q}(p)}, ..., v_{\tau_{p,q}(q)}, ..., v_{\tau_{p,q}(k)}\big),\end{aligned}$$

con esto,

$$\omega\big(v_{\tau_{p,q}(1)}, ..., v_{\tau_{p,q}(k)}\big) = -\omega(v_1, ..., v_k) = \mathrm{sgn}(\tau_{p,q})\omega(v_1, ..., v_k). \tag{2.1}$$

Por otro lado, sea $\delta \in S_k$. Por **Teorema 1.4**, existen $d(\delta)$ transposiciones $\tau_1, ..., \tau_{d(\delta)}$ tales que

$$\delta = \tau_1 \cdots \tau_{d(\delta)}. \tag{2.2}$$

De (2.1), (2.2) y del **Teorema 1.3**, se sigue que,

$$\begin{aligned}\omega\big(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}\big) =&\omega\big(v_{(\tau_1\cdots\tau_{d(\delta)})(1)}, ..., v_{(\tau_1\cdots\tau_{d(\delta)})(k)}\big)\\ =&\omega\big(v_{\tau_1(\tau_2(\cdots(\tau_{d(\delta)}(1))))}, ..., v_{\tau_1(\tau_2(\cdots(\tau_{d(\delta)}(k))))}\big)\\ =&\mathrm{sgn}(\tau_1)\omega\big(v_{\tau_2(\cdots(\tau_{d(\delta)}(1)))}, ..., v_{\tau_2(\cdots(\tau_{d(\delta)}(k)))}\big)\\ =&\mathrm{sgn}(\tau_1)\mathrm{sgn}(\tau_2)\omega\big(v_{\tau_3(\cdots(\tau_{d(\delta)}(1)))}, ..., v_{\tau_3(\cdots(\tau_{d(\delta)}(k)))}\big)\\ =&\mathrm{sgn}(\tau_1)\mathrm{sgn}(\tau_2)\cdots\mathrm{sgn}(\tau_{d(\delta)})\omega(v_1, ..., v_k)\\ =&\mathrm{sgn}(\tau_1\cdots\tau_{d(\delta)})\omega(v_1, ..., v_k)\\ =&\mathrm{sgn}(\delta)\omega(v_1, ..., v_k),\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}Alt(\omega)(v_1, ..., v_k) =&\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k}\mathrm{sgn}(\delta)\ \omega\big(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}\big)\\ =&\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k}\mathrm{sgn}(\delta)\mathrm{sgn}(\delta)\ \omega(v_1, ..., v_k)\\ =&\omega(v_1, ..., v_k)\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k}(\mathrm{sgn}(\delta))^2\\ =&\omega(v_1, ..., v_k)\frac{1}{k!}\sum_{\delta\in S_k}1\\ =&\omega(v_1, ..., v_k)\frac{1}{k!}k!\\ =&\omega(v_1, ..., v_k),\end{aligned}$$

$(\text{sgn}(\delta))^2 = 1$ debido a que el signo de una permutación es igual a 1 o a -1.

3. Sea $T \in \mathscr{T}^k(V)$. Por 1) se cumple que $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$, así, aplicando 2) se concluye que $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$.

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Ejemplo 2.10. Sea ω dado como en el **Ejemplo 2.5**, recordemos que ω es un 2-tensor alternante, para este ejemplo nos apoyaremos del **Ejemplo 1.4**, tomando a $v_1 = (x_1, x_2)$ y $v_2 = (y_1, y_2)$ se tiene que,

$$\begin{aligned} Alt(\omega)(v_1, v_2) =& \frac{1}{2!}[\text{sgn}(\delta_1)\omega(v_{\delta_1(1)}, v_{\delta_1(2)}) + \text{sgn}(\delta_2)\omega(v_{\delta_2(1)}, v_{\delta_2(2)})] \\ =& \frac{1}{2}[1 \cdot \omega(v_1, v_2)) + (-1) \cdot \omega(v_2, v_1)] \\ =& \frac{1}{2}[\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2))) - \omega((y_1, y_2), (x_1, x_2))] \\ =& \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 - (y_1x_2 - y_2x_1)] \\ =& \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 - (x_2y_1 - x_1y_2)] \\ =& \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_1 + x_1y_2] \\ =& \frac{1}{2}[2x_1y_2 - 2x_2y_1] \\ =& x_1y_2 - x_2y_1 \\ =& \omega((x_1, x_2), (y_1y_2)) \\ =& \omega(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Definición 2.5. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Dada una transformación lineal $f : V \to W$, se puede definir una transformación lineal

$$f^\bullet : \mathscr{T}^k(W) \to \mathscr{T}^k(V),$$

dada por,

$$f^\bullet T(v_1, ..., v_k) = T(f(v_1), ..., f(v_k)),$$

para algún $T \in \mathscr{T}^k(W)$ y para cada $v_1, ..., v_k \in V$.

Definición 2.6. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dados dos tensores, $T \in \mathscr{T}^k(V)$ y $S \in \mathscr{T}^l(V)$, con $k, l \in \mathbb{N}$. Se define al **producto cuña** $T \wedge S$ como sigue:

$$T \wedge S = \tfrac{(k+l)!}{k!l!} Alt(T \otimes S).$$

Propiedades. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dados $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$, con $k, l \in \mathbb{N}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente,

- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta_1 = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_1$.
- $\omega_1 \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_1 \wedge \eta_2$.
- $(\alpha\omega_1) \wedge \eta_1 = \omega_1 \wedge (\alpha\eta_1) = \alpha(\omega_1 \wedge \eta_1)$.
- Sean W un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y una transformación lineal $f : W \to V$, entonces

$$f^{\bullet}(\omega_1 \wedge \eta_1) = f^{\bullet}(\omega_1) \wedge f^{\bullet}(\eta_1).$$

Proposición 2.4. Sean V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $k, l \in \mathbb{N}$. Tomando $T \in \mathscr{T}^k(V)$ y $S \in \mathscr{T}^l(V)$, se cumple que $T \wedge S \in \Lambda^{k+l}(V)$.

Demostración: Sean $T \in \mathscr{T}^k(V)$ y $S \in \mathscr{T}^l(V)$, luego, por la **Proposición 2.2** se tiene que $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+l}(V)$, así, aplicando el **Teorema 2.2**, 1), se sigue que $Alt(T \otimes S) \in \Lambda^{k+l}(V)$, debido a que $\Lambda^{k+l}(V)$ es un subespacio vectorial, entonces,

$$T \wedge S = \tfrac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+l}(V).$$

Por lo tanto, queda demostrada la proposición. $\square$

Notemos que T y S son arbitrarios, con esto, podemos considerar el caso cuando ambos son k-tensores alternantes, así, el hecho de que el producto cuña de dos tensores alternantes de como resultado un tensor alternante nos será muy útil para poder determinar una base para $\Lambda^k(V)$.

Proposición 2.5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Tomando $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$, con $k, l \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente igualdad,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

Demostración: Sean $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ y $v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l} \in V$, luego,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l})
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta)(\omega \otimes \eta)(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}, v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta)\omega(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) \cdot \eta(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta)\eta(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \cdot \omega(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta)(\eta \otimes \omega)(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}, v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\eta \otimes \omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k),
\end{aligned}$$

ahora modificaremos el orden de las entradas de $(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k)$, para esto, primero trasladaremos al vector v_1 a la primera entrada,

$$\begin{aligned}
Alt(\eta \otimes \omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k)
&= (-1) Alt(\eta \otimes \omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_1, v_{k+l}, v_2, ..., v_k) \\
&= (-1)^2 Alt(\eta \otimes \omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l-2}, v_1, v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_2, ..., v_k) \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^l Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_{k+1}, ..., v_{k+l-2}, v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_2, ..., v_k),
\end{aligned}$$

repitiendo el proceso para el vector v_2,

$$\begin{aligned}
Alt(\eta \otimes \omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k)
&= (-1)^l Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_{k+1}, ..., v_{k+l-2}, v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_2, ..., v_k) \\
&= (-1)^l(-1) Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_{k+1}, ..., v_{k+l-2}, v_{k+l-1}, v_2, v_{k+l}, v_3, ..., v_k) \\
&= (-1)^l(-1)^2 Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_{k+1}, ..., v_{k+l-2}, v_2, v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_3, ..., v_k) \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^l(-1)^l Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_2, v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_3, ..., v_k) \\
&= ((-1)^l)^2 Alt(\eta \otimes \omega)(v_1, v_2, v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_{k+l}, v_3, ..., v_k),
\end{aligned}$$

siguiendo el mismo proceso para los vectores $v_3, ..., v_k$, notemos que son $k-2$ vectores, se concluye lo siguiente,

$$\begin{aligned}
&Alt(\eta\otimes\omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =((-1)^l)^2((-1)^l)^{k-2}Alt(\eta\otimes\omega)(v_1, v_2, v_3, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_{k+l})\\
&\qquad =((-1)^l)^k Alt(\eta\otimes\omega)(v_1, v_2, v_3, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_{k+l})\\
&\qquad =(-1)^{kl} Alt(\eta\otimes\omega)(v_1, v_2, v_3, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l-1}, v_{k+l}),
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
&\omega\wedge\eta(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l})\\
&\qquad =\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\eta\otimes\omega)(v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_1, ..., v_k)\\
&\qquad =\frac{(k+l)!}{k!l!}(-1)^{kl}Alt(\eta\otimes\omega)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l})\\
&\qquad =(-1)^{kl}\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\eta\otimes\omega)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l})\\
&\qquad =(-1)^{kl}\eta\wedge\omega(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

Ejemplo 2.11. Sean $S\in\mathscr{T}^2(\mathbb{R}^2)$ y $T\in\mathscr{T}^1(\mathbb{R}^2)$, dadas como sigue:

$$\begin{aligned}
S((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= x_1y_1 + x_2y_2,\\
T(v_1, v_2) &= v_1.
\end{aligned}$$

Luego, considerando las permutaciones δ_i, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ dadas en el **Ejemplo 1.5** y los vectores $v_1 = (x_1, x_2)$, $v_2 = (y_1, y_2)$ y $v_3 = (z_1, z_2)$, resulta,

$$\begin{aligned}
(S\otimes T)(v_1, v_2, v_3) =&(S\otimes T)((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2))\\
=&S((x_1, x_2), (y_1, y_2))\cdot T(z_1, z_2)\\
=&(x_1y_1 + x_2y_2)z_1\\
=&x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1.
\end{aligned}$$

Así,

$$T\wedge S(v_1, v_{2,3}) = \frac{(2+1)!}{2!1!}Alt(T\otimes S)(v_1, v_2, v_3)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{3!}{2}\sum_{\delta\in S_3}(S\otimes T)(v_{\delta(1)},v_{\delta(2)},v_{\delta(3)})\\
&=\frac{6}{2}\sum_{\delta\in S_3}S(v_{\delta(1)},v_{\delta(2)})\cdot T(v_{\delta(3)})\\
&=3[\operatorname{sgn}(\delta_1)S(v_1,v_2)\cdot T(v_3)+\operatorname{sgn}(\delta_2)S(v_1,v_3)\cdot T(v_2)\\
&\quad+\operatorname{sgn}(\delta_3)S(v_3,v_2)\cdot T(v_1)+\operatorname{sgn}(\delta_4)S(v_2,v_1)\cdot T(v_3)\\
&\quad+\operatorname{sgn}(\delta_5)S(v_2,v_3)\cdot T(v_1)+\operatorname{sgn}(\delta_6)S(v_2,v_1)\cdot T(v_2)]\\
&=3[S((x_1,x_2),(y_1,y_2))\cdot T(z_1,z_2)-S((x_1,x_2),(z_1,z_2))\cdot T(y_1,y_2)\\
&\quad-S((z_1,z_2),(y_1,y_2))\cdot T(x_1,x_2)-S((y_1,y_2),(x_1,x_2))\cdot T(z_1,z_2)\\
&\quad+S((y_1,y_2),(z_1,z_2))\cdot T(x_1,x_2)+S((z_1,z_2),(x_1,x_2))\cdot T(y_1,y_2)]\\
&=3[x_1y_1z_1+x_2y_2z_1-x_1z_1y_1-x_2z_2y_1-z_1y_1x_1-z_2y_2x_1\\
&\quad-y_1x_1z_1-y_2x_2z_1+y_1z_1x_1+y_2z_2x_1+z_1x_1y_1+z_2x_2y_1]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Proposición 2.6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean $T_i \in \mathscr{T}^{k_i}(V)$, con $i \in \{1, ..., n\}$. Si para algún j, con $j \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $T_j = O$, entonces:

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_j \wedge \cdots \wedge T_n = O, \text{ para todo } j \in \{1, ..., n\}.$$

Demostración: Sean $T_i \in \mathscr{T}^{k_i}(V)$, con $i \in \{1, ..., n\}$, $k' = k_1 + \cdots + k_n$ y $v_1, ..., v_{k'} \in V$. Supongamos que $T_j = O$, donde $j \in \{1, ..., n\}$, luego,

$$
\begin{aligned}
T_1\wedge\cdots\wedge &T_n(v_1,...,v_{k'})\\
&=\frac{k'!}{k_1!\cdots k_n!}Alt(T_1\otimes\cdots\otimes T_n)(v_1,...,v_{k'})\\
&=\frac{k'!}{k_1!\cdots k_n!}\frac{1}{k'!}\sum_{\delta\in S_{k'}}\operatorname{sgn}(\delta)(T_1\otimes\cdots\otimes T_n)(v_{\delta(1)},...,v_{\delta(k')})\\
&=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\sum_{\delta\in S_{k'}}\operatorname{sgn}(\delta)T_1(v_{\delta(1)},...,v_{\delta(k_1)})\\
&\cdots T_j(v_{\delta(k_1+\cdots k_{j-1})},...,v_{\delta(k_1+\cdots k_j)})\cdots T_n(v_{\delta(k'-k_n)},...,v_{\delta(k')})\\
&=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\sum_{\delta\in S_{k'}}\operatorname{sgn}(\delta)T_1(v_{\delta(1)},...,v_{\delta(k_1)})\cdots 0\cdots T_n(v_{\delta(k'-k_n)},...,v_{\delta(k')})\\
&=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\sum_{\delta\in S_{k'}}0
\end{aligned}
$$

$$= 0$$
$$= O(v_1, ..., v_{k'}).$$

Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

Teorema 2.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

1) Si $S \in \mathscr{T}^k(V)$, $T \in \mathscr{T}^l(V)$ y $Alt(S) = O$, entonces:

$$Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = O.$$

2) Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ y $\theta \in \Lambda^m(V)$, entonces:

$$Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta)).$$

3) Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ y $\theta \in \Lambda^m(V)$, entonces:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Demostración: En efecto:

1. Sean $S \in \mathscr{T}^k(V)$, $T \in \mathscr{T}^l(V)$ y supongamos que $Alt(S) = O$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
(k+l)!Alt(S \otimes T)(v_1, ..., v_{k+l}) \\
&= \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta)(S \otimes T)(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) T(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}).
\end{aligned}$$

Sea $G \subset S_{k+l}$ el conjunto de permutaciones que solo dejan fijos a los elementos $k+1, ..., k+l$, así,

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta)(S \otimes T)(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) T(v_{\delta(k+1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}).
\end{aligned}$$

Dado que toda permutación de G solo cambia a los elementos $1, ..., k$ y S se evalúa en k vectores, podemos reescribir la sumatoria anterior de la siguiente manera,

$$\sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) = \sum_{\delta' \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta') S(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(k)}), \tag{2.3}$$

luego,

$$\begin{aligned}
T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) & \sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta) S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \sum_{\delta' \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta') S(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(k)}) \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) \frac{k!}{k!} \sum_{\delta' \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta') S(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(k)}) \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) k! \left[\frac{1}{k!} \sum_{\delta' \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta') S(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(k)}) \right] \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) k! Alt(S)(v_{\delta'(1)}, ..., v_{\delta'(k)}) \\
&= T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}) k! \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta)(S \otimes T)(v_1, ..., v_{k+l}) = 0.$$

Sea $\delta_0 \in S_{k+l} \backslash G$, definamos ahora a G' de la siguiente manera,

$$G' = \{\sigma = \delta \cdot \delta_0 : \delta \in G\},$$

y consideremos el cambio, $v_{\delta_0(i)} = u_i$, para todo $i \in \{1, ..., k+l\}$, así,

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in G'} & \operatorname{sgn}(\sigma)(S \otimes T)(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in G'} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in G} \operatorname{sgn}(\delta \cdot \delta_0) S(v_{(\delta \cdot \delta_0)(1)}, ..., v_{(\delta \cdot \delta_0)(k)}) T(v_{(\delta \cdot \delta_0)(k+1)}, ..., v_{(\delta \cdot \delta_0)(k+l)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\delta\in G}\operatorname{sgn}(\delta)\operatorname{sgn}(\delta_0)S(v_{\delta(\delta_0(1))},...,v_{\delta(\delta_0(k))})T(v_{\delta(\delta_0(k+1))},...,v_{\delta(\delta_0(k+l))})\\
&=\sum_{\delta\in G}\operatorname{sgn}(\delta)\operatorname{sgn}(\delta_0)S(u_{\delta(1)},...,u_{\delta(k)})T(u_{\delta(k+1)},...,u_{\delta(k+l)})\\
&=\sum_{\delta\in G}\operatorname{sgn}(\delta)\operatorname{sgn}(\delta_0)S(u_{\delta(1)},...,u_{\delta(k)})T(u_{k+1},...,u_{k+l})\\
&=\operatorname{sgn}(\delta_0)T(u_{k+1},...,u_{k+l})\sum_{\delta\in G}\operatorname{sgn}(\delta)S(v_{\delta(1)},...,v_{\delta(k)}),
\end{aligned}
$$

siguiendo un razonamiento similar al usado en (2.3), se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\delta_0)T(u_{k+1},...,u_{k+l})\sum_{\delta\in G}\operatorname{sgn}(\delta)S(v_{\delta(1)},...,v_{\delta(k)})&\\
&=\operatorname{sgn}(\delta_0)T(u_{k+1},...,u_{k+l})\sum_{\delta'\in S_k}\operatorname{sgn}(\delta')S(v_{\delta'(1)},...,v_{\delta'(k)}\\
&=\operatorname{sgn}(\delta_0)T(u_{k+1},...,u_{k+l})k!\left[\frac{1}{k!}\sum_{\delta'\in S_k}\operatorname{sgn}(\delta')S(v_{\delta'(1)},...,v_{\delta'(k)}\right]\\
&=\operatorname{sgn}(\delta_0)T(u_{k+1},...,u_{k+l})k!\cdot 0\\
&=0.
\end{aligned}
$$

De aquí, se tiene que,

$$\sum_{\sigma\in G'}\operatorname{sgn}(\sigma)(S\otimes T)(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k+l)})=0.$$

A continuación demostraremos por contradicción que G y G' son conjuntos disjuntos. Supongamos que $G\cap G'\neq\emptyset$, así, existe al menos alguna permutación $\delta_1\in G\cap G'$, luego, existe alguna permutación $\delta_2\in G$ tal que $\delta_1=\delta_2\cdot\delta_0$, lo que implica lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
(\delta_2)^{-1}\cdot\delta_1 &=(\delta_2)^{-1}\cdot(\delta_2\cdot\delta_0)\\
&=((\delta_2)^{-1}\delta_2)\cdot\delta_0\\
&=e\cdot\delta_0\\
&=\delta_0,
\end{aligned}
$$

así, $\delta_0\in G$, lo cual es una contradicción. Repitiendo el proceso de fragmentar a S_{k+l} en conjuntos disjuntos, donde la suma sobre cada conjunto es 0, entonces, la suma sobre S_{k+l} es 0, con lo cual $Alt(S\otimes T)=O$. La igualdad

$Alt(T \otimes S) = O$ se demuestra de manera similar.

2. Sean $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ y $\theta \in \Lambda^m(V)$. Dados $S, T \in \mathscr{T}^k(V)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
&Alt(T + \alpha \cdot S)(v_1, ..., v_k)\\
&\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)\ (T + \alpha \cdot S)(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)})\\
&\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)\ T(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)}) + \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)\ \alpha \cdot S(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k)})\\
&\quad = Alt(T)(v_1, ..., v_k) + \alpha \cdot Alt(S)(v_1, ..., v_k)\\
&\quad = (Alt(T) + \alpha \cdot Alt(S))(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Alt(Alt(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) &= Alt(Alt(\eta \otimes \theta)) - Alt(\eta \otimes \theta)\\
&= Alt(\eta \otimes \theta) - Alt(\eta \otimes \theta) \qquad (2.4)\\
&= O,
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
Alt(Alt(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) &= Alt(Alt(\omega \otimes \theta)) - Alt(\omega \otimes \eta)\\
&= Alt(\omega \otimes \eta) - Alt(\omega \otimes \eta) \qquad (2.5)\\
&= O.
\end{aligned}$$

Por (2.4) y por 1), se tiene que:

$$\begin{aligned}
O =& Alt(\omega \otimes [Alt(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \eta])\\
=& Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta) - \omega \otimes \eta \otimes \theta)\\
=& Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta)) - Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta),
\end{aligned}$$

así,

$$Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta)) = Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \qquad (2.6)$$

Por otro lado, de (2.5) e 1), se sigue que,

$$O = Alt([Alt(\omega \otimes \eta) - \omega \ \otimes \eta] \otimes \theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta - \omega \otimes \eta \otimes \theta) \\
&= Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) - Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta),
\end{aligned}
$$

así,

$$Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \tag{2.7}$$

De (2.5) y (2.6) se concluye lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) &= Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \\
&= Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta)).
\end{aligned}
$$

3. Sean $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ y $\theta \in \Lambda^m(V)$, luego,

$$
\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} Alt((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} Alt(\frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, queda demostrado el teorema. □

Teorema 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base del mismo. Si $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ es la base dual correspondiente a $\{v_1, ..., v_n\}$, entonces el conjunto de todos los k-tensores alternantes:

$$\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

es una base para $\Lambda^k(V)$, que además tiene dimensión:

$$\binom{n}{k}.$$

Demostración: Sea $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathscr{T}^k(V)$, por **Teorema 2.1**, podemos ver a ω de la siguiente manera:

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1,...,i_k} \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k}.$$

Entonces, dado que $\omega \in \Lambda^k(V)$, por el **Teorema 2.2**, 2), se sigue que:

$$\begin{aligned}\omega =& Alt(\omega)\\ =& Alt\left(\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1,\dots,i_k}\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}\right)\\ =& \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1,\dots,i_k} Alt(\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}).\end{aligned}$$

Por **Teorema 2.3,** 3) se tiene que,

$$\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k} = \frac{(1+\cdots+1)!}{1!\cdots 1!}Alt(\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}),$$

lo que implica que, $Alt(\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_k}) = \frac{1}{k!}\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k}$, con esto,

$$\begin{aligned}\omega =& \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} b_{i_1,\dots,i_k}\frac{1}{k!}\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k}\\ =& \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} c_{i_1,\dots,i_k}\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k},\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $c_{i_1,\dots,i_k}$ es un escalar. Por lo tanto, se concluye que el conjunto de todos los k-tensores $\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi_{i_k}$ genera a $\Lambda^k(V)$. La demostración de que este conjunto es linealmente independiente es análoga a la demostración del **Teorema 2.1**. Así, este conjunto es una base para $\Lambda^k(V)$.

A continuación se dará la razón de que los índices de las sumas cumplen que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ y posteriormente se encontrará la dimensión del conjunto mencionado anteriormente. Sean $w_1, w_2 \in V$, luego, para todo $l \in \{1, ..., k\}$ se cumple,

$$\begin{aligned}\phi_{i_l}\wedge\phi_{i_l}(w_1,w_2) =& \frac{(1+1)!}{1!1!}Alt(\phi_{i_l}\otimes\phi_{i_l})(w_1,w_2)\\ =& \frac{2!}{1}\frac{1}{2!}\sum_{\delta\in S_2}\operatorname{sgn}(\delta)(\phi_{i_l}\otimes\phi_{i_l})(w_{\delta(1)},w_{\delta(2)})\\ =& \sum_{\delta\in S_2}\operatorname{sgn}(\delta)[\phi_{i_l}(w_{\delta(1)})\cdot\phi_{i_l}(w_{\delta(2)})]\\ =& \operatorname{sgn}(\delta_1)\phi_{i_l}(w_{\delta_1(1)})\phi_{i_l}(w_{\delta_1(2)}) + \operatorname{sgn}(\delta_2)\phi_{i_l}(w_{\delta_2(1)})\phi_{i_l}(w_{\delta_2(2)}\\ =& \phi_{i_l}(w_1)\phi_{i_l}(w_2) - \phi_{i_l}(w_2)\phi_{i_l}(w_1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=0\\
&=O(w_1, w_2),
\end{aligned}
$$

donde O es el 2-tensor nulo; con esto, si $i_j = i_l$, con $j \neq l$ y $j, l \in \{1, ..., k\}$, entonces,

$$
\begin{aligned}
c_{i_1,\ldots,i_k}&\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=c_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_j} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_l} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=(-1)^{1\cdot(l-1)}c_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_l} \wedge \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_j} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{l-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=(-1)^{l-1}(-1)^{1\cdot(j-1)}c_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_l} \wedge \phi_{i_j} \wedge \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{j-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{l-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=(-1)^{l+j-2}c_{i_1,\ldots,i_k}(\phi_{i_l} \wedge \phi_{i_l}) \wedge \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{j-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{l-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=(-1)^{l+j-2}c_{i_1,\ldots,i_k}O \wedge \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{j-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_{l-1}} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&=O,
\end{aligned}
$$

luego, trabajando con las primeras dos sumatorias,

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} c_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} c_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_2=1}^{n} [c_{1,i_2,\ldots,i_k}\phi_1 \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + c_{2,i_2,\ldots,i_k}\phi_2 \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{3,i_2,\ldots,i_k}\phi_3 \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{n,i_2,\ldots,i_k}\phi_n \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}]\\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} [c_{1,1,\ldots,i_k}\phi_1 \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + c_{1,2,\ldots,i_k}\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{1,3,\ldots,i_k}\phi_1 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{1,n,\ldots,i_k}\phi_1 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{2,1,\ldots,i_k}\phi_2 \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + c_{2,2,\ldots,i_k}\phi_2 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{2,3,\ldots,i_k}\phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{2,n,\ldots,i_k}\phi_2 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{3,1,\ldots,i_k}\phi_3 \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + c_{3,2,\ldots,i_k}\phi_3 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{3,3,\ldots,i_k}\phi_3 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{3,n,\ldots,i_k}\phi_3 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + \cdots + c_{n,1,\ldots,i_k}\phi_n \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + c_{n,2,\ldots,i_k}\phi_n \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\\
&\quad + c_{n,3,\ldots,i_k}\phi_n \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{n,n,\ldots,i_k}\phi_n \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} [O + c_{1,2,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + c_{1,3,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{1,n,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (-1)^{1\cdot 1} c_{2,1,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + O \\
&\quad + c_{2,3,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + c_{2,n,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (-1)^{1\cdot 1} c_{3,1,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + (-1)^{1\cdot 1} c_{3,2,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + O + \cdots + c_{3,n,\ldots,i_k} \phi_3 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{1\cdot 1} c_{n,1,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + (-1)^{1\cdot 1} c_{n,2,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (-1)^{1\cdot 1} c_{n,3,\ldots,i_k} \phi_3 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + (-1)^{1\cdot 1} c_{n,n-1,\ldots,i_k} \phi_{n-1} \wedge \phi_n \\
&\quad \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + O] \\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} [(c_{1,2,\ldots,i_k} - c_{2,1,\ldots,i_k}) \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (c_{1,3,\ldots,i_k} - c_{3,1,\ldots,i_k}) \phi_1 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + (c_{1,n,\ldots,i_k} - c_{n,1,\ldots,i_k}) \phi_1 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (c_{2,3,\ldots,i_k} - c_{3,2,\ldots,i_k}) \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + (c_{2,n,\ldots,i_k} - c_{n,2,\ldots,i_k}) \phi_2 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + (c_{3,4,\ldots,i_k} - c_{4,3,\ldots,i_k}) \phi_3 \wedge \phi_4 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + (c_{3,n,\ldots,i_k} - c_{n,3,\ldots,i_k}) \phi_3 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + (c_{n-1,n,\ldots,i_k} - c_{n,n-1,\ldots,i_k}) \phi_{n-1} \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}] \\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} [d_{1,2,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + d_{1,3,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + d_{1,n,\ldots,i_k} \phi_1 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + d_{2,3,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} + \cdots + d_{2,n,\ldots,i_k} \phi_2 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + d_{3,4,\ldots,i_k} \phi_3 \wedge \phi_4 \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + d_{3,n,\ldots,i_k} \phi_3 \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \\
&\quad + \cdots + d_{n-1,n,\ldots,i_k} \phi_{n-1} \wedge \phi_n \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}] \\
&= \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n-1} d_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \phi_{i_1} \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k},
\end{aligned}
$$

para fines prácticos, en lugar de escribir $i_2 = i_1+1$, se escribirá $i_2 > i_1$. Trabajando con las demás sumatorias de una forma similar a lo anterior mostrado, se concluirá que $i_3 > i_2$ y así sucesivamente $i_k > i_{k-1}$, por todo lo anterior explicado, podemos ver al k-tensor alternante ω de la siguiente manera,

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n-(k-1)} \sum_{i_2>i_1}^{n-(k-2)} \cdots \sum_{i_{k-1}>i_{k-2}}^{n-1} \sum_{i_k>i_{k-1}}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k},$$

dado que $i_k > i_{k-1}$ e i_k puede ser igual a n, entonces el valor máximo que puede tomar el índice i_{k-1} es $n-1$, siguiendo este mismo argumento se puede encontrar a los valores máximos de las demás sumatorias.

Para un mejor aprovechamiento del espacio, se reescribirá a las k sumatorias de la siguiente manera,

$$\sum_{i_1=1}^{n-(k-1)} \sum_{i_2>i_1}^{n-(k-2)} \cdots \sum_{i_k>i_{k-1}}^{n} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k},$$

y por ende,

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} b_{i_1,\dots,i_k} \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}.$$

Sean los conjuntos de índices $\{i_1, ..., i_k\}$ y $\{j_1, ..., j_k\}$, con $i_l, j_l \in \{1, ..., n\}$, para todo $l \in \{1, ..., k\}$, se probará que si $\{i_1, ..., i_k\} \neq \{j_1, ..., j_k\}$, entonces,

$$\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \neq \phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_k},$$

tomemos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$, y renombremos a los vectores $v_l = e_{i_l}$, para todo $l \in \{1, ..., k\}$ luego,

$$\begin{aligned}
\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) =& \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}(v_1, ..., v_k) \\
=& \frac{k!}{1! \cdots 1!} Alt(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k})(v_1, ..., v_k) \\
=& k! \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k})(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k+l)}) \\
=& \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=& \operatorname{sgn}(e) \phi_{i_1}(v_{e(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{e(k+l)}) \\
& + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&1 \cdot \phi_{i_1}(v_1) \cdots \phi_{i_k}(v_{k+l}) \\
&+ \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 \cdot \phi_{i_1}(e_{i_1}) \cdots \phi_{i_k}(e_{i_{k+l}}) \\
&+ \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 \cdots 1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}),
\end{aligned}
$$

debido a que en toda permutación diferente de la permutación identidad se cumple que $\delta(m) = m' \neq m$, para algún $m \in \{1, ..., k\}$, se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) =&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_m}(v_{\delta(m)}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_m}(v_{m'}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{i_m}(e_{i_{m'}}) \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{i_1}(v_{\delta(1)}) \cdots 0 \cdots \phi_{i_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
=&1 + \sum_{\delta \in S_k \setminus \{e\}} 0 \\
=&1,
\end{aligned}
$$

por otro lado, dado que $\{i_1, ..., i_k\} \neq \{j_1, ..., j_k\}$, existe algún j_m, con $m \in \{1, ..., k\}$ tal que $j_m \notin \{i_1, ..., i_k\}$, luego $\phi_{j_m}(e_{i_l}) = 0$, para todo $l \in \{1, ..., k\}$, así,

$$
\begin{aligned}
\phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_k}(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) &= \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{j_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{j_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{j_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{j_m}(v_{\delta(m)}) \cdots \phi_{j_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{j_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{j_m}(v_{m'}) \cdots \phi_{j_k}(v_{\delta(k+l)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{j_1}(v_{\delta(1)}) \cdots \phi_{j_m}(e_{i_{m'}}) \cdots \phi_{j_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \phi_{j_1}(v_{\delta(1)}) \cdots 0 \cdots \phi_{j_k}(v_{\delta(k+l)}) \\
&= \sum_{\delta \in S_k} 0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

luego, $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) \neq \phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_k}(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$, debido a que existe al menos un conjunto de vectores que cumplen la desigualdad anterior, se concluye que,

$$\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} \neq \phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_k}.$$

Aunado a lo anterior, no importa el orden en que se acomoden los índices $\{i_1, ..., i_k\}$ en el producto cuña, ya que como se vio anteriormente, se estaría obteniendo prácticamente el mismo k-tensor en cualquier orden.
Así, el número de formas posibles de combinar k de los n elementos de la base dual en el producto cuña es,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Ejemplo 2.12. Sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ la base dual correspondiente. Para este ejemplo, primero encontraremos el producto tensorial de todos los pares posibles de elementos de la base dual, $\phi_i \otimes \phi_j$ tales que $i < j$ e $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sean $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4), v_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$, luego,

$$
\begin{aligned}
\phi_1 \otimes \phi_2(v_1, v_2) &= \phi_1(v_1) \cdot \phi_2(v_2) = x_1 y_2, \\
\phi_1 \otimes \phi_3(v_1, v_2) &= \phi_1(v_1) \cdot \phi_3(v_2) = x_1 y_3, \\
\phi_1 \otimes \phi_4(v_1, v_2) &= \phi_1(v_1) \cdot \phi_3(v_2) = x_1 y_3, \\
\phi_1 \otimes \phi_4(v_1, v_2) &= \phi_1(v_1) \cdot \phi_4(v_2) = x_1 y_4, \\
\phi_2 \otimes \phi_3(v_1, v_2) &= \phi_2(v_1) \cdot \phi_3(v_2) = x_1 y_3,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\phi_2 \otimes \phi_4(v_1, v_2) =&\phi_2(v_1) \cdot \phi_4(v_2) = x_2 y_4,\\ \phi_3 \otimes \phi_4(v_1, v_2) =&\phi_2(v_1) \cdot \phi_4(v_2) = x_2 y_4,\end{aligned}$$

luego, apoyándonos del **Ejemplo 2.9**, se sigue que,

$$\begin{aligned}
\phi_1 \wedge \phi_2(v_1, v_2) =&\frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_1 \otimes \phi_2)(v_1, v_2)\\
=&2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_1 \otimes \phi_2)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)})\\
=&x_1 y_2 - x_2 y_1\\
=&\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\\
=&det_{1,2}(v_1, v_2),\\
\phi_1 \wedge \phi_3(v_1, v_2) =&\frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_1 \otimes \phi_3)(v_1, v_2)\\
=&2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_1 \otimes \phi_3)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)})\\
=&x_1 y_3 - x_3 y_1\\
=&\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\\
=&det_{1,3}(v_1, v_2),\\
\phi_1 \wedge \phi_4(v_1, v_2) =&\frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_1 \otimes \phi_4)(v_1, v_2)\\
=&2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\phi_1 \otimes \phi_4)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)})\\
=&x_1 y_4 - x_4 y_1\\
=&\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}\\
=&det_{1,4}(v_1, v_2),\\
\phi_2 \wedge \phi_3(v_1, v_2) =&\frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_2 \otimes \phi_3)(v_1, v_2)\\
=&2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_2 \otimes \phi_3)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)})\\
=&x_2 y_3 - x_3 y_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= det_{2,3}(v_1, v_2), \\
\phi_2 \wedge \phi_4(v_1, v_2) &= \frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_2 \otimes \phi_4)(v_1, v_2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_2 \otimes \phi_4)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}) \\
&= x_2 y_4 - x_4 y_2 \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix} \\
&= det_{2,4}(x, y), \\
\phi_3 \wedge \phi_4(v_1, v_2) &= \frac{1+1}{1!1!} Alt(\phi_3 \otimes \phi_4)(v_1, v_2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2!} \sum_{\delta \in S_2} \operatorname{sgn}(\delta)(\phi_3 \otimes \phi_4)(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}) \\
&= x_3 y_4 - x_4 y_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} \\
&= det_{3,4}(v_1, v_2).
\end{aligned}
$$

Por el **Teorema 2.4**, podemos decir que $\{det_{1,2}, det_{1,3}, det_{1,4}, det_{2,3}, det_{2,4}, det_{3,4}\}$ es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$, aunque técnicamente es igual a la base dual dada al inicio, existe una gran diferencia, ya que es mucho más fácil manejar 2-tensores con esta nueva base.

Más aún, el **Ejemplo 2.12** ilustra el hecho de que el producto cuña de dos tensores se puede ver como el determinante de una matriz cuadrada de orden 2, esto será generalizado y demostrado como un teorema para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.7. Sean $\varphi_1, ..., \varphi_k \in \mathscr{T}^1(V)$, con $k \in \mathbb{N}$. Dados $v_1, ..., v_k \in V$ se cumple que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, ..., v_k) = det(A)$, donde A está dada de la siguiente manera,

$$
A = \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}.
$$

Demostración: Sean $\varphi_1, ..., \varphi_k \in \mathscr{T}^1(V)$ y $v_1, ..., v_k \in V$, luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, ..., v_k) =& \frac{(1+\cdots+1)!}{1!\cdots 1!} Alt(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)(v_1, ..., v_k) \\
=& k! \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta)(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)(v_{\delta(1)}, ..., v_{\delta(k))}) \\
=& \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \varphi_1(v_{\delta(1)}) \cdots \varphi_k(v_{\delta(k)}),
\end{aligned}$$

consideremos a la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix},$$

luego, usando la definición de determinante dada en la **Definición 1.10**, de la **Sección 1.3**, se sigue que,

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, ..., v_k) = \sum_{\delta \in S_k} \operatorname{sgn}(\delta) \varphi_1(v_{\delta(1)}) \cdots \varphi_k(v_{\delta(k)}) = det(A).$$

Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

En el siguiente ejemplo se definirá un nuevo n-tensor alternante que nos será muy útil para la demostración de un teorema que se presentará páginas más adelante. A este nuevo tensor lo denotaremos por **det** y debido a que está relacionado con la función determinante que conocemos usualmente, es posible que existan confusiones, así, se usará *det* para hacer referencia a la función determinante usual empleado en matrices.

Ejemplo 2.13. Sea el n-tensor $\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, definido como sigue:

$$\det((x_{11}, ..., x_{1n}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nn})) = det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sean $n+1$ vectores $(x_{11}, ..., x_{1n}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nn}), (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, primero se demostrará que det es un n-tensor,

$$
\begin{aligned}
&\det((x_{11},...,x_{1n}),...,c((x_{j1},...,x_{jn})+(z_1,...,z_n)),...,(x_{n1},...,x_{nn}))\\
&=det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ cx_{j1}+cz_1 & cx_{j2}+cz_2 & \cdots & cx_{jn}+cz_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\\
&=det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ cx_{j1} & cx_{j2} & \cdots & cx_{jn}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}+det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ cz_1 & cz_2 & \cdots & cz_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\\
&=c\cdot det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}+c\cdot det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\\
&=c\cdot\det((x_{11},...,x_{1n}),...,(x_{j1},...,x_{jn}),...,(x_{n1},...,x_{nn}))\\
&\quad+c\cdot\det((x_{11},...,x_{1n}),...,(z_1,...,z_n),...,(x_{n1},...,x_{nn})).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, det es un n- tensor de $\mathbb{R}^n$. Ahora se demostrará que es un n- tensor alternante,

$$
\begin{aligned}
&\det((x_{11},...,x_{1n}),...,(x_{i1},...,x_{in}),...,(x_{j1},...,x_{jn}),...,(x_{n1},...,x_{nn}))\\
&=det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= -det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{i2} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{j2} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= -\det((x_{11}, ..., x_{1n}), ..., (x_{j1}, ..., x_{jn}), ..., (x_{i1}, ..., x_{in}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nn})).$$

Con esto, $\det \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces, por el **Teorema 2.4**, se tiene que $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1. Visto de otra forma, todo n-tensor alternante de V es múltiplo de algún n-tensor alternante diferente del n-tensor nulo O de V.

Teorema 2.5. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\{v_1, ..., v_n\}$ de V y $\omega \in \Lambda^n(V)$. Si $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$ son n vectores en V, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$, entonces,

$$\omega(w_1, ..., w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, ..., v_n).$$

Demostración: Sea $\eta : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ definida como sigue,

$$\eta((a_{11}, ..., a_{1n}), ..., (a_{n1}, ..., a_{nn})) = \omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j\right).$$

Primero veamos que $\eta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.
Sean $n+1$ vectores $(a_{11}, ..., a_{1n}), ..., (a_{n1}, ..., a_{nn}), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, así,

$$\begin{aligned} \eta((a_{11}, ..., a_{1n}), ..., \alpha((a_{l1}, ..., a_{ln}) + (b_1, ..., b_n)), ..., (a_{n1}, ..., a_{nn})) \\ =&\omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j, ..., \sum_{j=1}^n \alpha(a_{lj} + b_j)v_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j\right) \\ =&\omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j, ..., \alpha\sum_{j=1}^n a_{lj}v_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j\right) \\ &+ \omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j, ..., \alpha\sum_{j=1}^n b_jv_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\alpha\cdot\omega\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{lj}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}v_j\right)\\
&+\alpha\cdot\omega\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}b_{j}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}v_j\right)\\
=&\alpha\cdot\eta((a_{11},...,a_{1n}),...,(a_{l1},...,a_{ln}),...,(a_{n1},...,a_{nn}))\\
&+\alpha\cdot\eta((a_{11},...,a_{1n}),...,(b_1,...,b_n),...,(a_{n1},...,a_{nn})),
\end{aligned}$$

con esto, η es un n-tensor, además,

$$\begin{aligned}
\eta((a_{11},...,a_{1n}),...,(a_{l1},...,a_{ln}),...,(a_{m1},...,a_{mn}),...,(a_{n1},...,a_{nn}))&\\
=&\omega\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{lj}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{mj}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}v_j\right)\\
=&-\omega\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{mj}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{lj}v_j,...,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}v_j\right)\\
=&-\eta((a_{11},...,a_{1n}),...,(a_{m1},...,a_{mn}),...,(a_{l1},...,a_{ln}),...,(a_{n1},...,a_{nn})),
\end{aligned}$$

luego, $\eta\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, dado que $\det\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, podemos decir que $\eta=\det\cdot\lambda$, para algún $\lambda\in\mathbb{R}$, con esto, tomando a la base canónica $\{e_1,...,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, se sigue que,

$$\begin{aligned}
\lambda=&1\cdot\lambda\\
=&\det(e_i)\cdot\lambda\\
=&\eta(e_1,...,e_n)\\
=&\omega(v_1+0\cdot v_2+\cdots+0\cdot v_n,...,0\cdot v_1+0\cdot v_2+\cdots+v_n)\\
=&\omega(v_1,...,v_n).
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
\omega(w_1,...,w_n)&=\eta((a_{11},...,a_{1n}),...,(a_{n1},...,a_{nn}))\\
&=\det(a_{ij})\cdot\lambda\\
&=\det(a_{ij})\cdot\omega(v_1,...,v_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $\omega(w_1,...,w_n)=\det(a_{ij})\cdot\omega(v_1,...,v_n)$. $\square$

2.3. Orientación

Las definiciones que se presentan a continuación, son importantes para capítulos posteriores.

Definición 2.7. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base del mismo. A la n-ada $(v_1, ..., v_n)$ se le llama **base orientada de** V.

Definición 2.8. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un n-tensor $\omega \in \Lambda^n(V)$ diferente del n-tensor nulo O, se tienen dos grupos disjuntos de las bases orientadas de V; uno se conforma de bases orientadas $(v_1, ..., v_n)$ tales que $\omega(v_1, ..., v_n) > 0$, y el segundo se conforma de bases $(w_1, ..., w_n)$ tales que $\omega(w_1, ..., w_n) < 0$. Cada uno de estos conjuntos es llamado **orientación** de V.

Sean $\{v_1, ..., v_n\}$ y $\{w_1, ..., w_n\}$ dos bases de V y la matriz $A = (a_{ij})$, donde $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, luego, $(v_1, ..., v_n)$ y $(w_1, ..., w_n)$ pertenecen a la misma orientación si y solo si $det(A) > 0$.
La orientación a la cual una base orientada $(v_1, ..., v_n)$ de V pertenece es denotada como $[v_1, ..., v_n]$, mientras que la segunda orientación se denota como $-[v_1, ..., v_n]$.

Definición 2.9. En $\mathbb{R}^n$ definimos a la **orientación usual** como $[e_1, ..., e_n]$.

En $\mathbb{R}^n$ se usa al tensor det para definir una orientación en una base orientada.

Ejemplo 2.14. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Consideremos a las siguientes bases orientadas $\beta = (e_1, e_2)$ y $\beta' = (e_2, e_1)$ de $\mathbb{R}^2$. Luego,

$$\det(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ \det(e_2, e_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

con esto, β y β' pertenecen a diferentes orientaciones, las cuales se representan en la Figura 2.1.

(a) Orientación de β (b) Orientación de β'

Capítulo 3

Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se presentan la definición y las propiedades principales de las formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$, así mismo, se darán algunas definiciones necesarias para la demostración del **Teorema de Stokes**.

3.1. Espacio tangente

Definición 3.1. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los pares (p, v) con $v \in \mathbb{R}^n$, se denota como $\mathbb{R}^n_p$, y es llamado el **espacio tangente** de $\mathbb{R}^n$ en p.

Un vector $(p, v) \in \mathbb{R}^n_p = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$, se puede interpretar geométricamente como un vector que tiene la misma dirección y la misma longitud que v, pero con punto inicial p, es decir, este vector va del punto p al punto $p + v$. Se escribirá a (p, v) como v_p.

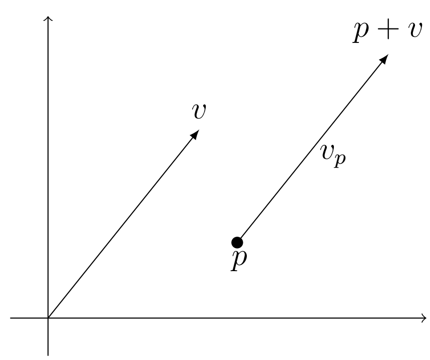

Figura 3.1: Espacio tangente de $\mathbb{R}^2$ en p

Proposición 3.1. El espacio tangente de $\mathbb{R}^n$ en p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(p,v)+(p,w)&=(p,v+w),\\ \alpha(p,v)&=(p,\alpha v).\end{aligned}$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sean $(p,v),(p,w),(p,u) \in \mathbb{R}^n_p$, con $v,w,u \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,

1. Cerradura sobre la suma.
   Tenemos que,

   $$(p,v)+(p,w)=(p,v+w),$$

   luego, dado que $v+w \in \mathbb{R}^n$, se sigue que $(p,v+w) \in \mathbb{R}^n_p$, con esto,

   $$(p,v)+(p,w) \in \mathbb{R}^n_p.$$

2. Conmutatividad de la suma.

   $$\begin{aligned}(p,v)+(p,w)=&(p,v+w)\\ =&(p,w+v)\\ =&(p,w)+(p,v).\end{aligned}$$

3. Asociatividad de la suma.

   $$\begin{aligned}(p,v)+((p,w)+(p,u))=&(p,v)+(p,w+u)\\ =&(p,v+w+u)\\ =&(p,(v+w)+u)\\ =&(p,v+w)+(p,u)\\ =&((p,v)+(p,w))+(p,u).\end{aligned}$$

4. Existencia de neutro aditivo.
   Sea o_n el vector nulo de $\mathbb{R}^n$, luego, $(p,o_n) \in \mathbb{R}^n_p$. Así,

   $$(p,v)+(p,o_n)=(p,v+o_n)=(p,v),$$

   con esto, existe un elemento neutro aditivo en $\mathbb{R}^n_p$.

5. Existencia de inverso aditivo.
   Dado $v \in \mathbb{R}^n$, se sigue que $-v \in \mathbb{R}^n$, y por ende $(p,-v) \in \mathbb{R}^n_p$, debido a que,

$$(p,v)+(p,-v)=(p,v-v)=(p,o_n),$$

   se puede asegurar la existencia de un inverso aditivo en $\mathbb{R}^n_p$.

6. Cerradura sobre el producto por un escalar.
   Tenemos que,

$$\alpha(p,v)=(p,\alpha v).$$

   Dado que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ se sigue que $\alpha v \in \mathbb{R}^n$, así, $(p,\alpha v) \in \mathbb{R}^n_p$, luego, $\alpha(p,v) \in \mathbb{R}^n_p$.

7. Asociatividad del producto de escalares.

$$\begin{aligned}\alpha\beta(p,v) &= (p,\alpha\beta v)\\ &= (p,\alpha(\beta v))\\ &= \alpha(p,\beta v)\\ &= \alpha(\beta(p,v)).\end{aligned}$$

8. Distribución de la suma escalar.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(p,v) =&(p,(\alpha+\beta)v)\\ =&(p,\alpha v+\beta v)\\ =&(p,\alpha v)+(p,\beta v)\\ =&\alpha(p,v)+\beta(p,v).\end{aligned}$$

9. Distribución de suma vectorial.

$$\begin{aligned}\alpha((p,v)+(p,w)) =&\alpha((p,v+w))\\ =&(p,\alpha(v+w))\\ =&(p,\alpha v+\alpha w)\\ =&(p,\alpha v)+(p,\alpha w).\end{aligned}$$

10. Unitaridad.

    Tenemos que $1 \in \mathbb{R}$, luego,

$$1 \cdot (p, v) = (p, 1 \cdot v) = (p, v).$$

Con esto, se concluye que $\mathbb{R}^n_p$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Dados n vectores de $\mathbb{R}^n$, $v_1, ..., v_n$, se cumple la siguiente igualdad,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)_p = \sum_{i=1}^{n} a_i (v_i)_p,$$

que es equivalente a

$$\left(p, \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i (p, v_i),$$

para cualesquiera escalares $a_i \in \mathbb{R}$. Así, si consideramos al conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ como la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se sigue que $\{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$ es una base de $\mathbb{R}^n_p$ conocida como la **base canónica** de $\mathbb{R}^n_p$.

Muchas de las estructuras en $\mathbb{R}^n$ tienen análogos en $\mathbb{R}^n_p$, en particular, el producto interno usual $<, >_p$ para $\mathbb{R}^n_p$ está definido como $< v_p, w_p >_p = < v, w >$ y la orientación usual para $\mathbb{R}^n_p$ es $[(e_1)_p, ..., (e_n)_p]$.

3.2. Campos vectoriales

Definición 3.2. Un **campo vectorial** en $\mathbb{R}^n$ es una función $F : \mathbb{R}^n \to \cup_{q \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_q$ tal que $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Para cada p existen $F_1(p), ..., F_n(p) \in \mathbb{R}$ tales que:

$$F(p) = (p, (F_1(p), ..., F_n(p))) = F_1(p)(e_1)_p + \cdots + F_n(p)(e_n)_p.$$

Esto define n funciones $F_1, ..., F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ llamadas **funciones componente** de F. Si para todo $i \in \{1, ..., n\}$ las funciones F_i son continuas o diferenciables, entonces diremos que F es un campo vectorial **continuo** o **diferenciable**, respectivamente.

En los libros de matemáticas, a los campos vectoriales se les define como una función $F : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que a cada punto $x \in X$ le asigna un vector $F(x) \in \mathbb{R}^n$

y que se representan de la siguiente manera

$$F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x)),$$

aun cuando ambas definiciones parecen muy distintas, en realidad representan lo mismo, y es que la única diferencia entre ambas definiciones es que la primera es más formal, ya que específica el punto de anclaje del vector que se está evaluando.

Ejemplo 3.1. Sean las funciones componente $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$ definidas como sigue,

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\ F_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2.$$

Con las funciones componente anteriores podemos definir un campo vectorial,

$$F : \mathbb{R}^2 \to \bigcup_{q \in \mathbb{R}^2} \mathbb{R}^2_q,$$

dado por, $F(p) = F_1(p)(e_1)_p + F_2(p)(e_2)_p$. A continuación se encontrará a $F(p)$, para algunos $p \in \mathbb{R}^2$.

1. Para $p = (3, 4)$,

$$\begin{aligned} F(3,4) &= F_1(3,4)(e_1)_{(3,4)} + F_2(3,4)(e_2)_{(3,4)} \\ &= 7(e_1)_{(3,4)} + 12(e_2)_{(3,4)}. \end{aligned}$$

2. Para $p = (1, 6)$,

$$\begin{aligned} F(1,6) &= F_1(1,6)(e_1)_{(1,6)} + F_2(1,6)(e_2)_{(1,6)} \\ &= 7(e_1)_{(1,6)} + 6(e_2)_{(1,6)}. \end{aligned}$$

3. Para $p = (5, -2)$,

$$\begin{aligned} F(5,-2) &= F_1(5,-2)(e_1)_{(5,-2)} + F_2(5,-2)(e_2)_{(5,-2)} \\ &= 3(e_1)_{(5,-2)} + -10(e_2)_{(5,-2)}. \end{aligned}$$

Para una mejor presentación visual, en la Figura 3.2 se muestran los vectores normalizados asociados a este campo vectorial.

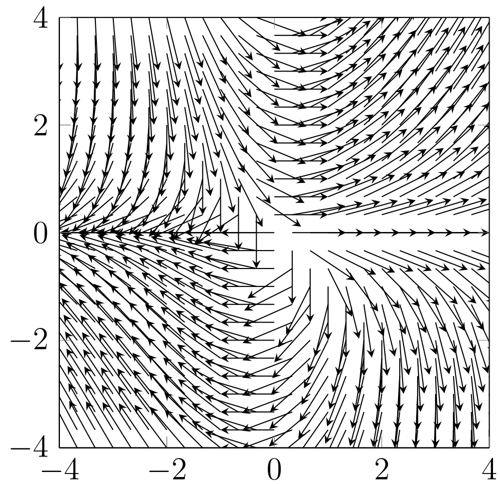

Figura 3.2: Campo vectorial $F(p)$

Definición 3.3. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$. Definimos la **divergencia**, $divF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, como $\sum_{i=1}^n D_i F_i$. Si introducimos el simbolismo formal,

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot e_i = (D_1, ..., D_n),$$

la podemos escribir de forma simbólica, $divF =< \nabla, F >$.

Definición 3.4. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. A partir de F, podemos definir un nuevo campo vectorial $\nabla \times F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, llamado **rotacional de** F, y denotado como $rotF$, el cual está dado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} rotF =&(\nabla \times F)(p) = \begin{vmatrix} (e_1)_p & (e_2)_p & (e_3)_p \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ =&(D_2F_3 - D_3F_2)(e_1)_p - (D_1F_3 - D_3F_1)(e_2)_p + (D_1F_2 - D_2F_1)(e_3)_p. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el campo vectorial dado por,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)(e_1)_{(x_1,x_2,x_3)} + (\tfrac{x_2}{10})(e_2)_{(x_1,x_2,x_3)} + (\text{sen}(x_3))(e_3)_{(x_1,x_2,x_3)},$$

luego,

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{x_2}{10},$$
$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{sen}(x_3),$$

con esto, la divergencia de F es,

$$\begin{aligned}
divF =& < \nabla, F > \\
=& (D_1, D_2, D_3) \cdot (F_1, F_2, F_3) \\
=& D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3 \\
=& D_1(x_1 + x_2 - x_3) + D_2(\tfrac{x_2}{10}) + D_3(\operatorname{sen}(x_3)) \\
=& 1 + \frac{1}{10} + \cos(x_3) \\
=& \frac{11}{10} + \cos(x_3),
\end{aligned}$$

y el rotacional de F es,

$$\begin{aligned}
rotF =&(\nabla \times F)(p) \\
=&\begin{vmatrix} (e_1)_{(x_1,x_2,x_3)} & (e_2)_{(x_1,x_2,x_3)} & (e_3)_{(x_1,x_2,x_3)} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \frac{x_2}{10} & \cos(x_3) \end{vmatrix} \\
=&(D_2(\cos(x_3)) - D_3(\tfrac{x_2}{10}))(e_1)_p + (D_3(x_1 + x_2 - x_3) - D_1(\cos(x_3)))(e_2)_p \\
&+ (D_1(\tfrac{x_2}{10}) - D_2(x_1 + x_2 - x_3))(e_3)_p \\
=&(0 - 0)(e_1)_p + (-1 - 0)(e_2)_p + (0 - 1)(e_3)_p \\
=&0(e_1)_p - (e_2)_p - (e_3)_p.
\end{aligned}$$

Los campos vectoriales se ocupan en muchas aplicaciones físicas, a continuación, se presentará una definición similar pero usando tensores alternantes.

3.3. K-formas

A partir de ahora, a menos que se especifique lo contrario, se considerará a $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, es decir, con la métrica Euclidiana.

Definición 3.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $\omega : A \to \cup_{q\in\mathbb{R}^n}\Lambda^k(\mathbb{R}^n_q)$ con $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$, es llamada **$k$-forma** o simplemente **forma diferencial** en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que $\omega(p)$ es un k-tensor alternante de $\mathbb{R}^n_p$, así, por el **Teorema 2.4** podemos ver a $\omega(p)$ de la siguiente manera,

$$\omega(p) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(p)\phi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}(p),$$

donde $\{\phi_1(p), \phi_2(p), ..., \phi_n(p)\}$ es la base dual correspondiente a $\{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$ y $\omega_{i_1,\ldots,i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para todo $i_l \in \{1, ..., n\}$ y para todo $l \in \{1, ..., k\}$.
Con base en la igualdad anterior podemos ver a la k-forma ω como sigue,

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k},$$

ω es llamada diferenciable, es decir que ω es de orden C^∞, o continua si las funciones $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ lo son.

Asumiremos que las formas y los campos vectoriales son diferenciables, y diferenciable significará C^∞. Además, su dominio puede ser un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, a partir de este punto, muchas de las definiciones que se darán a continuación también aplican a este caso. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se considera una 0-forma y $f\omega = f \wedge \omega$. Con esto, si una 0-forma f es diferenciable, entonces f es de clase C^∞ y por ende es continuamente diferenciable.

Proposición 3.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable, entonces,

$$Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, luego, por definición se tiene que $Df(p)$ es un operador lineal, como ya se explicó en el **Ejemplo 2.3**, $Df(p)$ es un 1-tensor, así, $Alt(Df(p)) = Df(p)$, por último, aplicando el **Teorema 2.2** 1) se concluye que $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Por una pequeña modificación obtenemos una 1-forma $df : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$, definida por,

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

Definición 3.6. Sea $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. La función $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\pi_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i, \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\},$$

es llamada **i-ésima función proyección**.

Es usual que se denote a la función π_i por x_i, con esto

$$dx_i(p)(v_p) = d\pi_i(p)(v_p).$$

Proposición 3.3. Sean $\mathbb{R}^n_p$, con $p \in \mathbb{R}^n$ y $\{dx_1(p), ..., dx_n(p)\}$ es la base dual de $\{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$.

Demostración: Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$, notemos que π_i es una transformación lineal, así, por **Teorema 1.10** se tiene que $D\pi_i(p) = \pi_i$, luego,

$$\begin{aligned} dx_i(p)((e_j)_p) =& d\pi_i(p)((e_j)_p) \\ =& D\pi_i(p)(e_j) \\ =& \pi_i(e_j) \\ =& \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, $\{dx_1(p), ..., dx_n(p)\}$ es la base dual de $\{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$. $\square$

De la proposición anterior se sigue que toda k-forma puede ser escrita de la siguiente manera,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Ejemplo 3.3. En $\mathbb{R}^4$ las 3-formas se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} \omega =& \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2>i_1}^{3} \sum_{i_3>i_2}^{4} \omega_{i_1,i_2,i_3} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \\ =& \omega_{1,2,3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{1,2,4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &+ \omega_{1,3,4} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \omega_{2,3,4} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4. En $\mathbb{R}^2$ las 1-formas son de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \omega =& \sum_{i_1=1}^{2} \omega_{i_1} dx_{i_1} \\ =& \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2, \end{aligned}$$

luego, sean $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, ω_1 y ω_2 dadas como sigue,

$$\omega_1(x_1, x_2) = \tfrac{x_1+x_2}{10},\ \omega_2(x_1, x_2) = x_1\cos(x_2),$$

así,

$$\begin{aligned}\omega(p) =&\omega_1(p)dx_1(p) + \omega_2(p)dx_2(p)\\ =&\frac{p_1+p_2}{10}dx_1(p) + p_1\cos(p_2)dx_2(p).\end{aligned}$$

Teorema 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable, entonces

$$df = D_1f \cdot dx_1 + \cdots + D_nf \cdot dx_n.$$

En notación clásica,

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Demostración: Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in \mathbb{R}^n$, luego,

$$\begin{aligned}df(p)(v_p) =&Df(p)(v)\\ =&(D_1f(p), ..., D_nf(p)) \cdot \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\\ =&\sum_{i=1}^n v_i \cdot D_if(p)\\ =&\sum_{i=1}^n D_if(p) \cdot dx_i(p)(v_p)\\ =&\left(\sum_{i=1}^n D_if(p) \cdot dx_i(p)\right)(v_p).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Recordemos que dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es posible definir una transformación lineal $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definición 3.7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Luego, con una modificación a $Df(p)$, podemos obtener una transformación lineal $f_* : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ definida por

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}.$$

La transformación lineal dada en la **Definición 3.7**, nos permite definir una segunda transformación lineal, tal como se explica a continuación.

Definición 3.8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. La transformación lineal, $f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$, transforma una k-forma ω en $\mathbb{R}^m$ en una k-forma $f^*\omega$ en $\mathbb{R}^n$. Esta transformación se define punto a punto de la siguiente manera: dados $p \in \mathbb{R}^n$ y $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n_p$, se tiene que,

$$f^*\omega(p)(v_1, ..., v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), ..., f_*(v_k)),$$

donde $f^*\omega(p)$ es un k-tensor alternante de $\mathbb{R}^n_p$ y $\omega(f(p))$ es un k-tensor alternante de $\mathbb{R}^m_{f(p)}$.

Ejemplo 3.5. En $\mathbb{R}$ las 1-formas se pueden escribir como,

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{1} \omega_{i_1} dx_{i_1} = \omega_1 dx_1.$$

Sean $p \in \mathbb{R}$ y $\omega_1(x) = \text{sen}(x)$, así,

$$\begin{aligned}\omega(p) =& \omega_1(p)dx_1(p)\\ =& \text{sen}(p)dx_1(p).\end{aligned}$$

Sean $f = x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la 3-ésima proyección y $p' = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$.Notemos que f es una función diferenciable. Tomando a $v_{p'} = (v_1, v_2, v_3)_{p'} \in \mathbb{R}^3_{p'}$, se sigue que:

$$\begin{aligned}f^*\omega(p')(v_{p'}) =& x_3^*\omega(p')(v_{p'})\\ =& \omega(x_3(p'))((x_3)_*(v_{p'}))\\ =& \omega(p_3)((Dx_3(p')(v))_{x_3(p')})\\ =& \omega(p_3)(\pi_3(v))_{p_3})\\ =& \omega(p_3)((v_3)_{p_3})\\ =& \text{sen}(p_3)dx_1(p_3)((v_3)_{p_3})\\ =& \text{sen}(p_3)Dx_1(p_3)(v_3)\\ =& \text{sen}(p_3)(\pi_1(v_3))\\ =& \text{sen}(p_3) \cdot (v_3).\end{aligned}$$

Debido a que no siempre es fácil hallar $f^*\omega$, nos apoyaremos del **Teorema 3.2** para realizar los cálculos de forma más directa.

Teorema 3.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable.

1. Si x_i es la i-ésima función proyección en $\mathbb{R}^m$, entonces,

$$f^*(dx_i) = \sum_{j=i}^{n} D_j f_i \cdot dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j.$$

2. Si ω_1, ω_2 son dos k-formas de $\mathbb{R}^m$, entonces,

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2).$$

3. Si g es una 0-forma, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, entonces,

$$f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*\omega.$$

4. Si ω es una k-forma y η es una l-forma, entonces,

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

5. Si g es una 0-forma, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, entonces,

$$\begin{aligned} g_* \circ f_* =& (g \circ f)_* \\ (g \circ f)^* =& f^* \circ g^*. \end{aligned}$$

Demostración: Sean $p \in \mathbb{R}^n$ y $(v_1)_p, ..., (v_k)_p, v_p \in \mathbb{R}^n_p$.

1. Sea x_i la i-ésima función proyección, recordemos que dx_i es una 1-forma,

$$\begin{aligned} f^*((dx_i)(p))(v_p) =& dx_i(f(p))(f_*(v_p)) \\ =& dx_i(f(p))(Df(p)(v))_{f(p)} \\ =& dx_i(f(p))(Df_1(p)(v), ..., Df_i(p)(v), ..., Df_n(p)(v))_{f(p)} \\ =& dx_i(f(p))\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_1(p), ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_i(p)\right. \\ & \left., ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_m(p)\right)_{f(p)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Dx_i(f(p))\Bigg(\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_1(p), ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_i(p)\\
&\quad , ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_m(p)\Bigg)\\
&= \pi_i\Bigg(\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_1(p), ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_i(p)\\
&\quad , ..., \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_m(p)\Bigg)\\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_i(p)\\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(p) dx_j(p)(v_p)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} D_j f_i(p) dx_j(p)\right)(v_p)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} dx_j(p))(v_p)\right).
\end{aligned}
$$

2. Sean ω_1 y ω_2 k-formas.

$$
\begin{aligned}
&f^*(\omega_1+\omega_2)(p)((v_1)_p, ..., (v_k)_p)\\
&\qquad =(\omega_1+\omega_2)(f(p))(f_*((v_1)_p), ..., f_*((v_k)_p))\\
&\qquad =\omega_1(f(p))(f_*((v_1)_p), ..., f_*((v_k)_p)) + \omega_2(f(p))(f_*((v_1)_p), ..., f_*((v_k)_p))\\
&\qquad =f^*(\omega_1)(p)((v_1)_p, ..., (v_k)_p) + f^*(\omega_2)(p)((v_1)_p, ..., (v_k)_p)\\
&\qquad =(f^*(\omega_1)+f^*(\omega_2))(p)((v_1)_p, ..., (v_k)_p).
\end{aligned}
$$

3. Sean g una 0-forma, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, y ω una k-forma. Dado que g y ω tienen el mismo dominio y $g(q)$ es un escalar para todo $q \in \mathbb{R}^m$, se cumple lo siguiente:

$$g \cdot \omega : \mathbb{R}^m \to \bigcup_{q \in \mathbb{R}^m} \Lambda^k(\mathbb{R}^m_q),$$

es decir, $g \cdot \omega$ es una k-forma de $\mathbb{R}^m$, además,

$$(g \cdot \omega)(q) = g(q) \cdot \omega(q), \text{ para todo } q \in \mathbb{R}^m,$$

así,

$$\begin{aligned} f^*(g\cdot\omega)(p)((v_1)_p,...,(v_k)_p) =&(g\cdot\omega)(f(p))(f_*((v_1)_p),...,f_*((v_k)_p))\\ =&(g\cdot\omega)(f(p))(f_*((v_1)_p),...,f_*((v_k)_p))\\ =&g(f(p))\cdot\omega(f(p))(f_*((v_1)_p),...,f_*((v_k)_p))\\ =&(g\circ f)(p)\cdot f^*((\omega)(p))((v_1)_p,...,(v_k)_p)\\ =&((g\circ f)\cdot f^*(\omega))(p)((v_1)_p,...,(v_k)_p). \end{aligned}$$

4. Sean ω una k-forma y η una l-forma dadas como sigue,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},\\ \eta &= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_l} \eta_{j_1,\dots,j_l} dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}. \end{aligned}$$

Para poder demostrar este inciso, primero se demostrará para 1-formas y posteriormente se demostrará de forma general.
Sean $\varphi_1,...,\varphi_k$ 1-formas de $\mathbb{R}^n$ y $v_1,...,v_k\in\mathbb{R}^n$, luego, por la **Proposición 2.7**:

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)&(p)((v_1)_p,...,(v_k)_p)\\ =&(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)(f(p))(f_*((v_1)_p),...,f_*((v_k)_p))\\ =&det(\varphi_i(f(p))(f_*((v_j)_p)))\\ =&det(f^*\varphi_i((v_j)_p))\\ =&(f^*\varphi_1\wedge\cdots\wedge f^*\varphi_k)(p)((v_1)_p,...,(v_k)_p). \end{aligned}$$

Con lo anterior demostrado, por 2) y 3), se tiene que,

$$\begin{aligned} f^*(\omega) =&f^*\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\\ =&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (\omega_{i_1,\dots,i_k}\circ f) f^*(dx_{i_1})\wedge\cdots\wedge f^*(dx_{i_k}), \end{aligned}$$

análogamente,

$$f^*(\eta) = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_l} (\eta_{j_1,\dots,j_l}\circ f) f^*(dx_{j_1})\wedge\cdots\wedge f^*(dx_{j_l}).$$

Para poder encontrar a $\omega\wedge\eta$, aplicaremos distintas propiedades del producto cuña: $\wedge$, vistas previamente,

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge \eta\\
&\quad=\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \wedge \left(\sum_{j_1<\cdots<j_l} \eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\right)\\
&\quad=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j_1<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge \eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&\quad=\sum_{i_1<\cdots<i_1,j_1<\cdots<j_l} (-1)^{k\cdot 0}\omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&\quad=\sum_{i_1<\cdots<i_1,j_1<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l},
\end{aligned}$$

con esto, y de nueva cuenta aplicando 2) y 3) y lo previamente ya demostrado,

$$\begin{aligned}
f^*(\omega\wedge\eta) =& f^*\Bigg(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_1,j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\\
&\wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\Bigg)\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_1,j_1<j_2<\cdots<j_l} (\omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l}\circ f) f^*(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{i_k})\\
&\wedge f^*(dx_{j_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{j_l})\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_1,j_1<j_2<\cdots<j_l} (\omega_{i_1,\ldots,i_k}\circ f)\cdot(\eta_{j_1,\ldots,j_l}\circ f) f^*(dx_{i_1})\\
&\wedge \cdots \wedge f^*(dx_{i_k}) \wedge f^*(dx_{j_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{j_l})\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_1,j_1<j_2<\cdots<j_l} (-1)^{k\cdot 0}(\omega_{i_1,\ldots,i_k}\circ f) f^*(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{i_k})\\
&\wedge (\eta_{j_1,\ldots,j_l}\circ f) f^*(dx_{j_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{j_l})\\
=&\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_1} (\omega_{i_1,\ldots,i_k}\circ f) f^*(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{i_k})\right)\\
&\wedge\left(\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_l} (\eta_{j_1,\ldots,j_l}\circ f) f^*(dx_{j_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_{j_l})\right)\\
=&f^*(\omega)\wedge f^*(\eta).
\end{aligned}$$

5. Sean g una 0-forma, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ y $v_p\in\mathbb{R}^n_p$, por definición de f_*, tenemos

que, $f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}$, así

$$\begin{aligned}(g_* \circ f_*)(v_p) =& g_*(f_*(v_p))\\ =& g_*((Df(p)(v))_{f(p)})\\ =& (Dg(f(p))(Df(p)(v)))_{g(f(p))}\\ =& ((Dg(f(p)) \circ Df(p))(v))_{g(f(p))},\end{aligned}$$

por otro lado,

$$(g \circ f)_*(p)(v_p) = (D(g \circ f)(p)(v))_{(g\circ f)(p)} = (Dg(f(p)) \circ Df(p)(v))_{g(f(p))},$$

así, $(g_* \circ f_*) = (g \circ f)_*$. Resolvamos ahora la segunda igualdad.

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*\omega(p)(v_1, ..., v_k) =& \omega((g \circ f)(p))((g \circ f)_*(v_1), ..., (g \circ f)_*(v_k))\\ =& \omega((g \circ f)(p))((g_* \circ f_*)(v_1), ..., (g_* \circ f_*)(v_k))\\ =& \omega(g(f(p))(g_*(f_*(v_1)), ..., g_*(f_*(v_k)))\\ =& g^*\omega(f(p))(f_*(v_1), ..., f_*(v_k))\\ =& g^*(f^*\omega(p)(v_1, ..., v_k))\\ =& (g^* \circ f^*)\omega(p)(v_1, ..., v_k).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Teorema 3.3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable y $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función, entonces:

$$f^*(h \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (h \circ f)(\det f')dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Demostración: Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dado que $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ es una k-forma, por **Teorema 3.2**, 3) se sigue que:

$$f^*(h \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (h \circ f)f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n). \tag{3.1}$$

Por otro lado, sea $p \in \mathbb{R}^n$ y consideremos a la matriz $f'(p) = (a_{ij})$. Luego:

$$\begin{aligned}&f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(p))((e_1)_p, ..., (e_n)_p)\\ &\qquad = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))(f_*((e_1)_p), ..., f_*((e_n)_p))\\ &\qquad = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))((Df(p)(e_1))_{f(p)}, ..., (Df(p)(e_n))_{f(p)})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))((f'(p)\cdot e_1)^t_{f(p)}, ..., (f'(p)\cdot e_n)^t_{f(p)}) \\
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))((a_{11}, ..., a_{n1})_{f(p)}, ..., (a_{n1}, ..., a_{nn})_{f(p)}) \\
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))\left((\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i)_{f(p)}, ..., (\sum_{i=1}^{n} a_{in}e_i)_{f(p)}\right) \\
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(e_i)_{f(p)}, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}(e_i)_{f(p)}\right).
\end{aligned}
$$

Por el **Teorema 2.5**, se tiene la siguiente igualdad:

$$
\begin{aligned}
dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))&\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(e_i)_{f(p)}, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}(e_i)_{f(p)}\right) \\
&= det(a_{ij}) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))((e_i)_{f(p)}, ..., (e_i)_{f(p)}).
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(p))&((e_1)_p, ..., (e_n)_p) \\
&= det(a_{ij}) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p))((e_i)_{f(p)}, ..., (e_i)_{f(p)}).
\end{aligned}
$$

Dado que el producto cuña solo evalúa las entradas de los vectores y no sobre qué puntos se encuentran trasladados, podemos asegurar lo siguiente:

$$
f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(p)) = det(a_{ij}) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(f(p)). \tag{3.2}
$$

De (3.2) y (3.3) se concluye que,

$$
f^*(h \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (h \circ f)(\det f')dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
$$

Por lo tanto, queda demostrado el teorema. □

Ejemplo 3.6. Para este ejercicio obtendremos a $f^*(\omega)$ usando las propiedades vistas en el **Teorema 3.2**, y posteriormente lo encontraremos directamente con el **Teorema 3.3**.

Sean la 2-forma y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas como sigue

$$
\begin{aligned}
\omega &= x_1 * x_2 dx_1 \wedge dx_2, \\
f(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, x_1 - x_2),
\end{aligned}
$$

luego, por 3) y 4) del **Teorema 3.2**, y tomando $g(x_1, x_2) = x_1 * x_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) =& f^*(g dx_1 \wedge dx_2) \\ =& (g \circ f) f^*(dx_1 \wedge dx_2) \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) f^*(dx_1) \wedge f^*(dx_2), \end{aligned}$$

de aquí, por 1) del **Teorema 3.2**, se sigue que:

$$\begin{aligned} f^*(dx_1) =& \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 = dx_1 + dx_2, \\ f^*(dx_2) =& \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 = dx_1 - dx_2, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} f^*(\omega) =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(dx_1 + dx_2) \wedge (dx_1 - dx_2) \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(dx_1 \wedge dx_1 - dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 - dx_2 \wedge dx_2) \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(-dx_1 \wedge dx_2 + (-1)^{1 \cdot 1} dx_1 \wedge dx_2) \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(-dx_1 \wedge dx_2 - dx_1 \wedge dx_2) \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(-2) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando directamente el **Teorema 3.3** para encontrar a $f^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) =& f^*(g dx_1 \wedge dx_2) \\ =& (g \circ f) det(f') dx_1 \wedge dx_2 \\ =& (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) det(f') dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

tenemos que,

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

luego, $det(f') = -2$, con esto, $f^*(\omega) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(-2) dx_1 \wedge dx_2$.

3.4. Diferencial de una forma

Una construcción importante asociada con formas, es una generalización del operador d, la cual se explica a continuación.

Definición 3.9. Sea ω una k-forma en $\mathbb{R}^n$, dada como sigue,

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

definimos la $(k+1)$-forma $d\omega$, la **diferencial** de ω por,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7. Sea la 0-forma dada como sigue:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} df =& \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha (x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}) dx_\alpha \\ =& D_1(x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}) dx_1 + D_2(x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}) dx_2 \\ &+ D_3(x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}) dx_3 + D_4(x_1 + x_1 x_3 + \tfrac{x_4}{x_3}) dx_4 \\ =& (1 + x_3) dx_1 + 0 dx_2 + (x_1 - \tfrac{x_4}{x_3^2}) dx_3 + \tfrac{1}{x_3} dx_4. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8. Continuando con el **Ejemplo 3.3**, tenemos que:

$$\begin{aligned} d\omega =& \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2>i_1}^{3} \sum_{i_3>i_2}^{4} \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \omega_{i_1,i_2,i_3} dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \\ =& \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2>i_1}^{3} \sum_{i_3>i_2}^{4} D_\alpha \omega_{i_1,i_2,i_3} dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \\ =& \sum_{\alpha=1}^{4} [D_\alpha \omega_{1,2,3} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + D_\alpha \omega_{1,2,4} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &+ D_\alpha \omega_{1,3,4} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + D_\alpha \omega_{2,3,4} dx_\alpha \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4] \\ =& \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \omega_{1,2,3} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \omega_{1,2,4} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \omega_{1,3,4} dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \omega_{2,3,4} dx_\alpha \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&D_4\omega_{1,2,3}dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + D_3\omega_{1,2,4}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4\\
&+ D_2\omega_{1,3,4}dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + D_1\omega_{2,3,4}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,
\end{aligned}$$

debido a que $dx_i \wedge dx_i = O$, se tiene que solo un sumando de cada suma de la segunda igualdad va a ser diferente de O.

Ejemplo 3.9. Sea la 0-forma $\theta : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ y } x_2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definida como sigue,

$$\theta(x_1, x_2) = \begin{cases} \arctan(\frac{x_2}{x_1}), \text{ si } x_1, x_2 > 0, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ si } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \pi, \text{ si } x_1 < 0, x_2 \neq 0, \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ si } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + 2\pi, \text{ si } x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

- Caso $x_1 \neq 0$, aunque existen tres partes de θ donde $x_1 \neq 0$, solo habrá una sola $d\theta$, debido a que

$$\begin{aligned}
D_1(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})) =&D_1(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = D_1(\arctan(\frac{x_2}{x_1}) + 2\pi),\\
D_2(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})) =&D_2(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = D_2(\arctan(\frac{x_2}{x_1}) + 2\pi),
\end{aligned}$$

  así,

$$d\theta = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}dx_2.$$

- Caso $x_1 = 0$, en esto si $x_2 > 0$, al acercarnos a x_1 por la derecha debemos considerar a la función $\arctan(\frac{x_2}{x_1})$, mientras, que si $x_2 < 0$ se considera a la función $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) + 2\pi$, al acercarnos por la izquierda se debe tomar a la función $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \pi$ sin importar el valor de x_2, por lo tanto, debemos revisar los límites por la izquierda y por la derecha de esta funciones, para esto, haremos uso de la regla de L'Hopital.

  - $x_1, x_2 > 0$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\theta(x_1 + h, x_2) - \theta(0, x_2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\arctan(\frac{x_2}{h}) - \frac{\pi}{2}}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{-x_2}{h_1^2+x_2^2}}{1} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{-x_2}{h_1^2+x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}.
\end{aligned}
$$

- $x_1 > 0, x_2 < 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\theta(x_1+h,x_2)-\theta(0,x_2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arctan(\frac{x_2}{h}) - \frac{3\pi}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{-x_2}{h_1^2+x_2^2}}{1} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{-x_2}{h_1^2+x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}.
\end{aligned}
$$

- $x_1 < 0, x_2 > 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{\theta(x_1+h,x_2)-\theta(0,x_2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\arctan(\frac{x_2}{h}) + \pi - \frac{\pi}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\arctan(\frac{x_2}{h}) + \frac{\pi}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{-x_2}{h_1^2+x_2^2}}{1} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \tfrac{-x_2}{h_1^2+x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_2^2} \\
&= \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2},
\end{aligned}
$$

cuando $x_2 < 0$ la demostración es análoga. Así,

$$D_1\theta(0,x_2) = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}.$$

Notemos que debido a que $x_2 \neq 0$ no existe problema alguno al acercarnos a x_2 por la izquierda o por la derecha, así,

$$\begin{aligned}
D_2\theta(0,x_2) =& D_2(0,\tfrac{\pi}{2})\\
=& D_2(0,\tfrac{3\pi}{2})\\
=& 0\\
=& \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$d\theta = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}dx_2.$$

Para poder facilitar los cálculos de las diferenciales sobre k-formas, nos ayudaremos del siguiente teorema.

Teorema 3.4.

1. Si ω y μ son dos k-formas, entonces,

$$d(\omega+\mu) = d\omega + d\mu.$$

2. Si ω es una k-forma y η es una l-forma, entonces,

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta.$$

3. Si ω es una k-forma, entonces, $d(d\omega) = d^2(\omega) = O$, donde O denota a la $(k+2)$-forma nula.

4. Si ω es una k-forma en $\mathbb{R}^m$ y $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable, entonces $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Demostración: Sean ω y μ dos k-formas y η una l-forma dadas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},\\
\mu &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mu_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},\\
\eta &= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_l} \eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}.
\end{aligned}$$

1. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
d(\omega+\mu) =& d\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right.\\
&\left.+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mu_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\\
=&d\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (\omega_{i_1,\ldots,i_k}+\mu_{i_1,\ldots,i_k})\ dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d(\omega_{i_1,\ldots,i_k}+\mu_{i_1,\ldots,i_k}) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k}+\mu_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx_\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n} (D_\alpha\omega_{i_1,\ldots,i_k}+D_\alpha\mu_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx_\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha\omega_{i_1,\ldots,i_k}\wedge dx_\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha\mu_{i_1,\ldots,i_k}\wedge dx_\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
=&\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d\omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d\mu_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
=&d\omega+d\mu.
\end{aligned}
$$

2. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\omega\wedge\eta = &\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\\
&\wedge\cdots\wedge, dx_{j_l},
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta) = &\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} d(\omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k}\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \sum_{\alpha=1}^{n} (D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\eta_{j_1,\ldots,j_l} + \omega_{i_1,\ldots,i_k} D_\alpha(\eta_{j_1,\ldots,j_l})) \\
&\quad \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\eta_{j_1,\ldots,j_l} \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} D_\alpha(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \eta_{j_1,\ldots,j_l} d(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= d\omega \wedge \eta + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{i_1} \\
&\quad \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.
\end{aligned}
$$

Tenemos que $d(\eta_{j_1,\ldots,j_l})$ es una 1-forma y $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, es una k-forma, así, por la **Proposición 2.5**:

$$
\begin{aligned}
d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) &\wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= (-1)^{1 \cdot k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= (-1)^{k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l},
\end{aligned}
$$

con esto,

$$
\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) =& d\omega \wedge \eta + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} (-1)^k dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\wedge d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k, j_1<j_2<\cdots<j_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad \wedge d(\eta_{j_1,\ldots,j_l}) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.
\end{aligned}
$$

3. Primero se demostrará para $k = 0$, sea la 0-forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, luego, por **Teorema 3.1**, tenemos que: $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, así,

$$
\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_\alpha \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} dx_j \wedge dx_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j + O + \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j + \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j + \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j.
\end{aligned}
$$

Ahora se trabajará con uno de los dos sumandos anteriores, para esto, notemos que cuando $j = n$, no existirán términos debido a que α será igual a $n + 1$, esto ocurrirá más adelante cuando $j = 1$ y α tome el valor de $j - 1$

$$
\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j = \sum_{\alpha=j+1}^n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_1} dx_\alpha \wedge dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_2} dx_\alpha \wedge dx_2\right.
$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_3}dx_\alpha\wedge dx_3+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_n}dx_\alpha\wedge dx_n\Bigg]\\
=&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2\wedge dx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}dx_3\wedge dx_1\\
&+\frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_1}dx_4\wedge dx_1+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}dx_n\wedge dx_1\\
&+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}dx_3\wedge dx_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_2}dx_4\wedge dx_2\\
&+\frac{\partial^2 f}{\partial x_5 \partial x_2}dx_5\wedge dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}dx_n\wedge dx_2\\
&+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}dx_n\wedge dx_{n-1},
\end{aligned}$$

recordemos que $dx_\alpha\wedge dx_j=(-1)^{1\cdot 1}dx_j\wedge dx_\alpha=-dx_j\wedge dx_\alpha$, para $\alpha\neq j$, y además $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_\alpha}$, así,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=j+1}^{n}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j}dx_\alpha\wedge dx_j\\
=&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1\wedge dx_2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1\wedge dx_3\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}dx_1\wedge dx_4-\cdots-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1\wedge dx_n\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}dx_2\wedge dx_3-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4}dx_2\wedge dx_4\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_5}dx_2\wedge dx_5-\cdots-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2\wedge dx_n\\
&-\cdots-\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}dx_{n-1}\wedge dx_n\\
=&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1\wedge dx_2\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1\wedge dx_3-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}dx_2\wedge dx_3\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}dx_1\wedge dx_4-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4}dx_2\wedge dx_4\\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4}dx_3\wedge dx_4\\
&-\cdots-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1\wedge dx_n-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2\wedge dx_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} dx_3 \wedge dx_n - \cdots - \cdots - \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} \wedge dx_n \\
=&\sum_{\alpha=1}^{j-1} \Bigg[-\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_1} dx_\alpha \wedge dx_1 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_2} dx_\alpha \wedge dx_2 \\
&-\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_3} dx_\alpha \wedge dx_3 - \cdots - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_n} dx_\alpha \wedge dx_n \Bigg] \\
=&-\sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j,
\end{aligned}
$$

con esto,

$$
d(df) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_j} dx_\alpha \wedge dx_j = O.
$$

Sea ahora una k- forma ω con $k > 1$. Tenemos que,

$$
\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},
$$

luego,

$$
d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},
$$

aplicando ahora la diferencial a $d\omega$,

$$
\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} d(D_\alpha \omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_j(D_\alpha \omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx_j \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial x_j \partial x_\alpha} dx_j \wedge dx_\alpha \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} O \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= O.
\end{aligned}
$$

4. Primero se demostrará para una 0-forma. Sea $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función

diferenciable que asocia a cada $(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ el valor $g(y_1, ..., y_m)$. Luego:

$$\begin{aligned}
f^*(d(g)) =& f^*\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right)\\
=& \sum_{i=1}^{m} f^*\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right)\\
=& \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} f^*(dy_i)\\
=& \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\\
=& \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\\
=& \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\\
=& \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) dx_j\\
=& \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j\\
=& d(g \circ f)\\
=& d(f^* g).
\end{aligned}$$

Sea ahora la k- forma,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

así,

$$\begin{aligned}
d(f^*\omega) =& d\left(f^*\left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right)\right)\\
=& d\left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} f^*(\omega_{i_1, \ldots, i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\right)\\
=& d\left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} f^*(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) \cdot f^*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\cdot f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\right)\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d(f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\wedge f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}))\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (d(f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k}))\wedge f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\\
&\quad + (-1)^0 f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) d(f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})))\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (f^*(d(\omega_{i_1,\ldots,i_k}))\wedge f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\\
&\quad + f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) d(f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})))\\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (f^*(d(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\\
&\quad + f^*(\omega_{i_1,\ldots,i_k}) d(f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}))),
\end{aligned}
$$

tenemos que,

$$d(f^*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})) = d(d(f^*(x_{i_1}))\wedge\cdots\wedge d(f^*(x_{i_k}))) = O,$$

lo que implica lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
d(f^*\omega) = &\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} f^*(d(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\\
&= f^*\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} d(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\\
&= f^*(d(\omega)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Definición 3.10. Una k-forma w es llamada **cerrada** si $d\omega = O$.

Definición 3.11. Una k-forma w es llamada **exacta** si $\omega = d\eta$, para alguna $(k-1)$-forma η.

Proposición 3.4. Toda forma exacta es cerrada.

Demostración: Sea ω una k-forma exacta, así, existe alguna $(k-1)$-forma η tal que $\omega = d\eta$, luego, por el **Teorema 3.4**, 3) se tiene que $d\omega = d(d\eta) = O$, con esto, ω es una k-forma cerrada. □

En la **Proposición 3.4**, el dominio de ω es cualquier conjunto abierto, además el recíproco no siempre se cumple, a menos que el dominio satisfaga ciertas condiciones, tal como se demostrará más adelante.

3.5. Conjunto estelar

Definición 3.12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si para todo $x \in A$, el segmento de línea que va de 0 a x queda contenida en A (ver Figura 3.3), entonces, A es llamado **conjunto estelar** con respecto a 0.

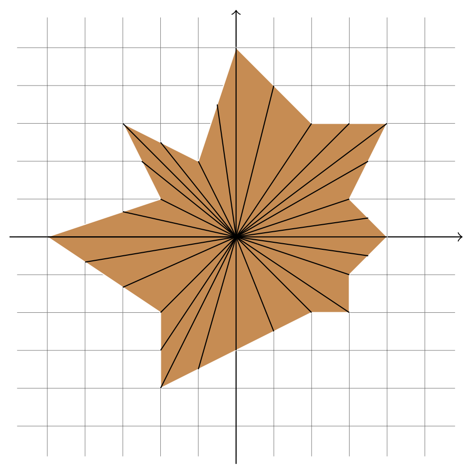

Figura 3.3: Conjunto estelar

Lema 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable y se cumple que $f(0) = 0$, entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$

Demostración: Sea $h_x(t) = f(tx)$. Luego:

$$\int_0^1 h'_x(t)dt = h_x(1) - h_x(0) = f(x) - f(0) = f(x),$$

así,

$$f(x) = \int_0^1 h'_x(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 f'(tx)dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(tx) \right) dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 D_i f(tx)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),
\end{aligned}
$$

donde $g_i = \int_0^1 D_f(tx)dt$. $\square$

Supongamos que $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ y $df = \sum_{i=1}^{n} D_i f \cdot dx_i$ son 1-formas en $\mathbb{R}^n$, tales que $\omega_i = D_i f$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, donde f es una función diferenciable y $f(0) = 0$, así, por el **Lema 3.1**, se tiene que:

$$f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i(tx) \right) dt.$$

Con esto, podemos definir una función $I(\omega)$, que nos permite encontrar a f dado una 1-forma ω, de la siguiente manera,

$$I(\omega(x)) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i(tx) \right) dt.$$

Una generalización para toda l-forma está dada en la siguiente definición.

Definición 3.13. Sea A un conjunto estelar y una l-forma,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \omega_{i_1, \ldots, i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.$$

La función $I : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define como:

$$
\begin{aligned}
&I(\omega(x)) \\
&\quad = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \ldots, i_l}(tx)dt \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l},
\end{aligned}
$$

el símbolo $\widehat{}$ sobre dx_{i_α} significa que este último será omitido. Si $\omega = O$, entonces, $I(\omega) = O$.

Ejemplo 3.10. Sea la 0-forma $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_1x_3 + \operatorname{sen}(x_4)$, luego:

$$\begin{aligned} df =& D_1f dx_1 + D_2f dx_2 + D_3f dx_3 + D_4f dx_4 \\ =&(1 + x_3)dx_1 + 0dx_2 + x_1dx_3 + \cos(x_4)dx_4, \end{aligned}$$

notemos que df es una 1-forma y que $f(0, 0, 0, 0) = 0$, así,

$$\begin{aligned} I(df(x)) =& \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^4 x_iD_if(tx)\right) dt \\ =&\sum_{i=1}^4 x_i \int_0^1 D_if(tx)dt \\ =&x_1 \int_0^1 (1 + tx_3)dt + x_2 \int_0^1 0dt + x_3 \int_0^1 tx_1dt \\ &+ x_4 \int_0^1 \cos(tx_4)dt \\ =&x_1 \left(t + \frac{t^2}{2}x_3\right)\Big|_0^1 + x_3\frac{t^2}{2}x_1\Big|_0^1 + x_4 \frac{\operatorname{sen}(tx_4)}{x_4}\Big|_0^1 \\ =&x_1 \left[1 + \frac{1^2}{2}x_3 - 0 - \frac{0^2}{2}x_3\right] + x_3 \left[\frac{1^2}{2}x_1 - \frac{0^2}{2}x_1\right] \\ &+ x_4 \left[\frac{\operatorname{sen}(1 \cdot x_4)}{x_4} - \frac{\operatorname{sen}(0 \cdot x_4)}{x_4}\right] \\ =&x_1 \left(1 + \tfrac{1}{2}x_3\right) + x_3 \left(\frac{1}{2}x_1\right) + x_4 \left(\frac{\operatorname{sen}(x_4)}{x_4}\right) \\ =&x_1 + \frac{2}{2}x_1x_3 + \operatorname{sen}(x_4) \\ =&x_1 + x_1x_3 + \operatorname{sen}(x_4) \\ =&f(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. En este ejemplo se calcularán $d(I(\omega))$ y $I(d\omega)$. Sea la 3-forma de $\mathbb{R}^4$ siguiente,

$$\omega = (x_1^2 + x_4)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_2 \cdot x_4)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

luego, por lo visto en el **Ejemplo 3.8**, se tiene que:

$$\begin{aligned} d\omega =& D_4(x_1^2 + x_4)dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ D_2(x_2 \cdot x_4)dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=1 \cdot dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + x_4 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&=1 \cdot (-1)^{1\cdot 3} \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&\quad + (-1)^{1\cdot 1} x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&=(-1) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&\quad - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&=(-1 - x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.
\end{aligned}
$$

Notemos que $d\omega$ es una 4-forma. Aplicando la función I a $d\omega$, resulta lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
I(d\omega) =& \sum_{\alpha=1}^{4} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1}(-1 - tx_4) dt \right) x_{i_\alpha} \\
& \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
=& (-1)^{1-1} \left(\int_0^1 t^{4-1}(-1 - tx_4) dt \right) x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& + (-1)^{2-1} \left(\int_0^1 t^{4-1}(-1 - tx_4) dt \right) x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& + (-1)^{3-1} \left(\int_0^1 t^{4-1}(-1 - tx_4) dt \right) x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
& + (-1)^{4-1} \left(\int_0^1 t^{4-1}(-1 - tx_4) dt \right) x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \left(\int_0^1 (-t^3 - t^4 x_4) dt \right) x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& - \left(\int_0^1 (-t^3 - t^4 x_4) dt \right) x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& + \left(\int_0^1 (-t^3 - t^4 x_4) dt \right) x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
& - \left(\int_0^1 (-t^3 - t^4 x_4) dt \right) x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \left[-\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} x_4 \right] \Bigg|_0^1 x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& - \left[-\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} x_4 \right] \Bigg|_0^1 x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& + \left[-\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} x_4 \right] \Bigg|_0^1 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[-\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} x_4 \right] \Big|_0^1 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= \left(-\frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{5} x_1 x_4 \right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+ \left(\frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{5} x_2 x_4 \right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+ \left(-\frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{5} x_3 x_4 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+ \left(\frac{1}{4} x_4 + \frac{1}{5} x_4^2 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}
$$

Ahora se calculará $d(I(\omega))$. Tenemos que,

$$
\omega_{i_1,i_2,i_3}(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_4 \text{ y } \omega_{i_1,i_3,i_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2 \cdot x_4,
$$

las demás funciones componente de ω son iguales a la función nula. Así,

$$
\begin{aligned}
I(\omega(x)) = &\sum_{\alpha=1}^{3} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{3-1}(t^2 x_1^2 + t x_4) dt \right) x_{i_\alpha} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{3} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{3-1}(t^2 x_2 \cdot x_4) dt \right) x_{i_\alpha} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}},
\end{aligned}
$$

para encontrar el valor de $I(\omega(x))$ primero encontraremos el valor de la primera sumatoria y posteriormente el valor de la segunda. Para la primera sumatoria tenemos que, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ e $i_3 = 3$, con esto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{3} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^2(t^2 x_1^2 + t x_4) dt \right) x_{i_\alpha} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \\
&= (-1)^{1-1} \left(\int_0^1 (t^4 x_1^2 + t^3 x_4) dt \right) x_1 dx_2 \wedge dx_3 \\
&+ (-1)^{2-1} \left(\int_0^1 (t^4 x_1^2 + t^3 x_4) dt \right) x_2 dx_1 \wedge dx_3 \\
&+ (-1)^{3-1} \left(\int_0^1 (t^4 x_1^2 + t^3 x_4) dt \right) x_3 dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left[\frac{t^5}{5} x_1^2 + \frac{t^4}{4} x_4 \right] \Big|_0^1 x_1 dx_2 \wedge dx_3 \\
&- \left[\frac{t^5}{5} x_1^2 + \frac{t^4}{4} x_4 \right] \Big|_0^1 x_2 dx_1 \wedge dx_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\frac{t^5}{5}x_1^2 + \frac{t^4}{4}x_4\right]\Bigg|_0^1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \\
=&\left(\frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 \\
&- \left(\frac{1}{5}x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \\
&+ \left(\frac{1}{5}x_1^2x_3 + \frac{1}{4}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}
$$

Para la segunda sumatoria, tenemos que, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ e $i_3 = 4$, luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{3}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^2(t^2x_2 \cdot x_4)dt\right)x_{i_\alpha}dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} & \\
=&(-1)^{1-1}\left(\int_0^1 t^4 \cdot x_2x_4 dt\right) x_1 dx_3 \wedge dx_4 \\
&+ (-1)^{2-1}\left(\int_0^1 t^4 \cdot x_2x_4 dt\right) x_3 dx_1 \wedge dx_4 \\
&+ (-1)^{3-1}\left(\int_0^1 t^4 \cdot x_2x_4 dt\right) x_4 dx_1 \wedge dx_3 \\
=& \left[\frac{t^5}{5}x_2x_4\right]\Bigg|_0^1 x_1 dx_3 \wedge dx_4 \\
&- \left[\frac{t^5}{5}x_2x_4\right]\Bigg|_0^1 x_3 dx_1 \wedge dx_4 \\
&+ \left[\frac{t^5}{5}x_2x_4\right]\Bigg|_0^1 x_4 dx_1 \wedge dx_3 \\
=&\frac{1}{5}x_1x_2x_4 dx_3 \wedge dx_4 \\
&- \frac{1}{5}x_2x_3x_4 dx_1 \wedge dx_4 \\
&+ \frac{1}{5}x_2x_4^2 dx_1 \wedge dx_3.
\end{aligned}
$$

Con esto,

$$
\begin{aligned}
I(\omega(x)) = &\left(\frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 - \left(\frac{1}{5}x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \\
&+ \left(\frac{1}{5}x_1^2x_3 + \frac{1}{4}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{1}{5}x_1x_2x_4\right) dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{1}{5}x_2x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_4 + \left(\frac{1}{5}x_2x_4^2\right) dx_1 \wedge dx_3 \\
= &\left(\frac{1}{5}x_1^2x_3 + \frac{1}{4}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&+ \left(-\frac{1}{5}x_1^2x_2 - \frac{1}{4}x_2x_4 + \frac{1}{5}x_2x_4^2\right) dx_1 \wedge dx_3 \\
&- \left(\frac{1}{5}x_2x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_4 \\
&+ \left(\frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 \\
&+ \left(\frac{1}{5}x_1x_2x_4\right) dx_3 \wedge dx_4.
\end{aligned}
$$

Luego, la diferencial de $I(\omega)$ es,

$$
\begin{aligned}
d(I(\omega)) = &\sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \left(\frac{1}{5}x_1^2x_3 + \frac{1}{4}x_3x_4\right) dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \left(-\frac{1}{5}x_1^2x_2 - \frac{1}{4}x_2x_4 + \frac{1}{5}x_2x_4^2\right) dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&- \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \left(\frac{1}{5}x_2x_3x_4\right) dx_\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_4 \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \left(\frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1x_4\right) dx_\alpha \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{4} D_\alpha \left(\frac{1}{5}x_1x_2x_4\right) dx_\alpha \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
= &\left(\frac{1}{5}x_1^2 + \frac{1}{4}x_4\right) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&+ \frac{1}{4}x_3 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&+ \left(-\frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{5}x_4^2\right) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&+ \left(-\frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{5}x_2x_4\right) dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&- \frac{1}{5}x_3x_4 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_4 \\
&- \frac{1}{5}x_2x_4 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{3}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+\frac{1}{4}x_1dx_4\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+\frac{1}{5}x_2x_4dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\frac{1}{5}x_1x_4dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
=&(-1)^{1\cdot 2}\left(\frac{1}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+(-1)^{1\cdot 2}\frac{1}{4}x_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&+(-1)^{1\cdot 1}\left(-\frac{1}{5}x_1^2-\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{5}x_4^2\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+(-1)^{1\cdot 2}\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{2}{5}x_2x_4\right)dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&-(-1)^{1\cdot 1}\frac{1}{5}x_3x_4dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&-(-1)^{1\cdot 1}\frac{1}{5}x_2x_4dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\left(\frac{3}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+(-1)^{1\cdot 2}\frac{1}{4}x_1dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\frac{1}{5}x_2x_4dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\frac{1}{5}x_1x_4dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
=&\left(\frac{1}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+\frac{1}{4}x_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&-\left(-\frac{1}{5}x_1^2-\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{5}x_4^2\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{2}{5}x_2x_4\right)dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\frac{1}{5}x_3x_4dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&+\frac{1}{5}x_2x_4dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\left(\frac{3}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\frac{1}{5}x_2x_4 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\frac{1}{5}x_1x_4 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
=&\left(\frac{1}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{5}x_4^2+\frac{3}{5}x_1^2+\frac{1}{4}x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{5}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{2}{5}x_2x_4+\frac{1}{5}x_2x_4+\frac{1}{5}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
=&\left(x_1^2+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{5}x_4^2\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{5}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{4}{5}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.
\end{aligned}
$$

Sumando $I(d(\omega))$ y $d(I(\omega))$ da como resultado,

$$
\begin{aligned}
I(d(\omega))+d(I(\omega)) =&\left(-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{5}x_1x_4\right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+\left(-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{5}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{5}x_4^2\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+\left(x_1^2+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{5}x_4^2\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+\left(\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{5}x_3x_4\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{4}{5}x_2x_4\right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_1x_4\right)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
=&\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{5}x_4^2+x_1^2+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{5}x_4^2\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+\left(-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{5}x_3x_4+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{5}x_3x_4\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&+\left(\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_2x_4-\frac{1}{4}x_2+\frac{4}{5}x_2x_4\right)dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+\left(-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{5}x_1x_4+\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_1x_4\right)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
=&(x_4+x_1^2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\
&+0\cdot dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4\\
&+x_2x_4dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
&+0\cdot dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
=&\omega.
\end{aligned}
$$

3.6. Lema de Poincaré

Para la siguiente demostración se hará uso de la función I dada en la **Definición 3.13**.

Teorema 3.5. (Lema de Poincaré) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto estelar con respecto a 0, entonces, toda forma cerrada en A es exacta.

Demostración: Para esta demostración se probará que $d(I(\omega)) + I(d\omega) = \omega$, y con base a eso probaremos lo que se nos pide. Primero encontraremos a $d(I(\omega))$, sea,

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l},$$

una l-forma, luego,

$$I(\omega(x)) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt\right) x_{i_\alpha}$$
$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l},$$

así,

$$\begin{aligned}
d(I(\omega)) &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} d\left(\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)x_{i_\alpha}\right) \\
&\quad dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}d\left(\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)x_{i_\alpha}\right) \\
&\quad dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left[d\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)x_{i_\alpha}\right. \\
&\quad \left.+\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)dx_{i_\alpha}\right]dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}d\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)x_{i_\alpha} \\
&\quad dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l} \\
&\quad +\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)dx_{i_\alpha} \\
&\quad dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}.
\end{aligned}$$

Sea $g=\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt$, aplicando el **Teorema 1.15**, se sigue que,

$$\begin{aligned}
d(g) &= d\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right) \\
&= \int_0^1 d(t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx))dt \\
&= \int_0^1 t^{l-1}d(\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx))dt \\
&= \int_0^1 t^{l-1}\left(\sum_{j=1}^{n}D_j\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)t\,dx_j\right)dt \\
&= \int_0^1 t^{l}\left(\sum_{j=1}^{n}D_j\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dx_j\right)dt \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 t^{l}D_j\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)dx_j,
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
d(I(\omega)) = & \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) dx_{i_\alpha} \\
& dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
= & \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{l} \sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) D_j x_{i_\alpha} \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
= & \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) \\
& \left(\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \right).
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1} dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} & \\
= & (-1)^{1-1} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& + (-1)^{2-1} dx_{i_2} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& \qquad \vdots \\
& + (-1)^{l-1} dx_{i_l} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{l-1}} \\
= & dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (-1)(-1)^{1\cdot 1} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ (-1)^{l-1}(-1)^{1\cdot(l-1)} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
=& dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&+ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&+ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
=& l \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l},
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
d(I(\omega)) = & \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
& + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt \right) l \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Ahora encontraremos a $I(d\omega)$. Tenemos que,

$$
d\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l},
$$

luego, intercambiando al 1-tensor dx_j con el l-tensor $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$ en el producto cuña resulta lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l\cdot 1} D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l} D_j \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j,
\end{aligned}
$$

más adelante se revertirá lo anterior hecho, así, aplicando I a $d\omega$,

$$
\begin{aligned}
I(d\omega) = & \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l+1} (-1)^{\alpha-1}(-1)^{l} \left(\int_0^1 t^{(l+1)-1} D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\
& dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l+1} (-1)^{\alpha-1}(-1)^l \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j,$$

notemos que cuando $\alpha \in \{1, ..., l\}$ se tiene que $i_\alpha \in \{i_1, i_2, ..., i_l\}$, así, cuando $\alpha = l + 1$, se cumple que $i_\alpha = j$, con esto, separando del resto al último término de la suma,

$$\begin{aligned}
I(d\omega) =& \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1}(-1)^l \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\
& dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j \\
&+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(l+1)-1}(-1)^l \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_{l+1}} \\
& dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_{l+1}}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j \\
=& \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1}(-1)^l(-1)^{(l-1)\cdot 1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^l(-1)^l \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_j \\
& dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge dx_j \\
=&(-1)^{2l-1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2l} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
=& - \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_{i_\alpha} \\
& dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \\
&+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_k})(tx)dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sumando (3.4) y (3.5), obtenemos,

$$\begin{aligned}
&d(I(\omega)) + I(d\omega)\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right) l\cdot dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\qquad+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l x_j D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_k})(tx)dt\right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right) l\cdot dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\qquad+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^l \sum_{j=1}^{n}(x_j D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_k})(tx))dt\right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right) l\cdot dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\qquad+ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^l \frac{d}{dt}(\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx))dt\right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}[t^l\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)]dt\right)\cdot dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \left[1^l\omega_{i_1,\ldots,i_k}(1\cdot x) - 0^l\omega_{i_1,\ldots,i_k}(0\cdot x)\right] dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}\\
&\quad= \omega.
\end{aligned}$$

Sea ω una k-forma cerrada, así, $d\omega = O$, luego, por la igualdad mostrada anteriormente,

$$\begin{aligned}
\omega &= d(I\omega) + I(d\omega)\\
&= d(I(\omega)) + I(O)\\
&= d(I(\omega)).
\end{aligned}$$

Con esto, ω es una k-forma exacta. $\square$

Capítulo 4

Integración de formas sobre cadenas

En este capítulo se presentan la definición y las propiedades principales de los m-cubos singulares y las m-cadenas en $\mathbb{R}^n$, con las cuales se podrá demostrar el **Teorema de Stokes**.
Para este capítulo, $[0,1]^m$ denotará el m-producto cartesiano de $[0,1]$ m veces. Esto es: $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$.

4.1. M-cubo singular

Definición 4.1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$. Un m**-cubo singular** en A es una función continua $c : [0,1]^m \to A$.

Ejemplo 4.1. La función $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como sigue,

$$c(x) = 5,$$

es un 1-cubo singular. Además, la imagen de c es un punto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.2. Sean $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$,con $\beta \neq 0$. La función $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como sigue,

$$c(x) = \beta x + \alpha.$$

es un 1-cubo singular. Además, la imagen de c es un segmento de recta en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3. Sean $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. La función $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como sigue,

$$c(x_1, x_2) = (\beta \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, x_2),$$

es un 2-cubo singular. Además, si β y α son iguales a 0, entonces la imagen de c es un segmento de recta, mientras que si solo uno de los dos es igual a 0, entonces la imagen de c sería un plano.
Cuando $\beta = 4$ y $\alpha = 2$ se obtiene la superficie mostrada en la figura 4.1.

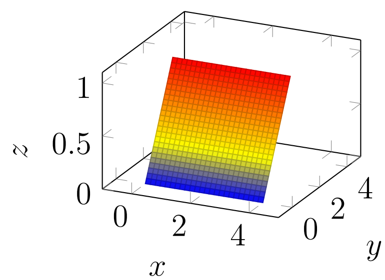

Figura 4.1: Superficie generada por c

Ejemplo 4.4. Sean $\beta \in \mathbb{R}$. La función $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ definido como:

$$c(x_1, x_2, x_3) = (\text{sen}(x_1), \beta \cdot x_2, x_3),$$

es un 3-cubo singular, además, si β es igual a 0, entonces la imagen de c es un plano. En caso contrario, la imagen de c es un rectángulo.

Ejemplo 4.5. En $\mathbb{R}^n$, para $n \leq 2$, las curvas $c_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ son 1-cubos singulares y las superficies $c_2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^n$ son 2-cubos singulares.

Dos ejemplos simples, pero particulares de n-cubos singulares en $\mathbb{R}^n$, son el **n-cubo estándar** $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ y el **n-cubo nulo** $o : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ definidos por

$$\begin{aligned} I^n(x) &= x, \\ o(x) &= (0, ..., 0), \end{aligned}$$

para cada $x \in [0,1]^n$, respectivamente.

4.2. M-cadenas

Definición 4.2. Denotemos por S_m al conjunto de todos los m-cubos singulares en $A \subset \mathbb{R}^n$. Una m**-cadena** es una función $f : S_m \to \mathbb{Z}$, tal que $f(c) = 0$ para todo $c \in S_m$ a excepción de un conjunto finito $\{c_1, ..., c_l\} \subset S_m$, con $l \in \mathbb{N}$. Al conjunto de m-cadenas en $A \subset \mathbb{R}^n$ se denotará como $C_m(A)$.

Sea f una m-cadena no nula, así, existen m-cubos singulares $c_1, ..., c_l$ tales que,

$$f(c_i) = a_i \neq 0, \text{ para todo } i \in \{1, ..., l\}, \tag{4.1}$$

por otro lado, tomando $c \in S_m$, definimos a la función $f_c : S_m \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera,

$$f_c(c') = \begin{cases} 1, & \text{si } c' = c \\ 0, & \text{si } c' \neq c, \end{cases}$$

con esto, se puede representar a f como sigue,

$$f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_{c_i}.$$

Proposición 4.1. Sean f y g m-cadenas. Definiendo a $f + g$ y a lf, con $l \in \mathbb{Z}$, de la siguiente manera,

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c),$$
$$lf(c) = l \cdot f(c),$$

se tiene que $f + g$ y lf son m-cadenas.

Demostración: Sean f y g m-cadenas.
Sea $c \in \{c : (f+g)(c) \neq 0\} = \{c : f(c)+g(c) \neq 0\}$, luego, dado que $f(c)+g(c) \neq 0$, se deduce que o bien $f(c) \neq 0$ o $g(c) \neq 0$, así,

$$c \in \{c : f(c) \neq 0\} \text{ o } c \in \{c : g(c) \neq 0\},$$

con esto,

$$\{c : (f + g)(c) \neq 0\} \subset \{c : f(c) \neq 0\} \cup \{c : g(c) \neq 0\},$$

debido a que $\{c : f(c) \neq 0\}$ y $\{c : g(c) \neq 0\}$ son conjuntos finitos, se sigue que, $\{c : (f+g)(c) \neq 0\}$ es un conjunto finito, por ende, $f+g$ es una m-cadena.
Por otro lado, sea $c \in \{c : lf(c) \neq 0\} = \{c : l \cdot f(c) \neq 0\}$, dado que $lf(c) \neq 0$, se sigue que $f(c) \neq 0$, así $c \in \{c : f(c) \neq 0\}$ y por ende,

$$\{c : lf(c) \neq 0\} \subset \{c : f(c) \neq 0\},$$

de aquí se sigue que $\{c : lf(c) \neq 0\}$ es un conjunto finito, y por ende, lf es una m-cadena. $\square$

Ejemplo 4.6. Sean S_m el conjunto de los m-cubos singulares y $c \in S_m$ arbitrario, consideremos ahora a la función f_c, es claro que el conjunto de m-cubos singulares donde f_c no se anula es $\{c\}$, cuya cardinalidad es 1, en otras palabras, es un conjunto finito, así, f_c es una m-cadena. Diremos que f_c es la **función asociada a** c.

4.3. Frontera de una cadena

Para cada m-cadena f en A definiremos una $(m-1)$-cadena en A llamada la **frontera** de f y denotada como ∂f, para dar la definición de ∂f se requiere presentar algunos conceptos preliminares.

Definición 4.3. Para todo $m \in \mathbb{N}$, definimos dos $(m-1)$-cubos singulares

$$I^m_{(i,0)}, I^m_{(i,1)} : [0,1]^{m-1} \to \mathbb{R}^m,$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$, como se explica a continuación. Dado $x \in [0,1]^{m-1}$,

$$I^m_{(i,0)}(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_{m-1}),$$
$$I^m_{(i,1)}(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_{m-1}).$$

Llamaremos a $I^m_{(i,0)}(x)$ la $(i,0)$**-cara** de I^m y a $I^m_{(i,1)}(x)$ la $(i,1)$**-cara** de I^m.

Definición 4.4. Definimos a la $m-1$-cadena $\partial I^m : S_{m-1} \to \mathbb{Z}$ como sigue:

$$\partial I^m(I^m_{(i,\alpha)}) = (-1)^{i+\alpha},$$

con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $\alpha \in \{0, 1\}$, así,

$$\partial I^m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} f_{(i,\alpha)},$$

donde $f_{(i,\alpha)}$ es la función asociada a $I^m_{(i,\alpha)}$.

Ejemplo 4.7. Sea $x \in \mathbb{R}$. Las $(i, 0)$-caras y las $(i, 1)$-caras de I^2, con $i \in \{1, 2\}$, son,

$$\begin{aligned} I^2_{(1,0)}(x) =& (0, x), \\ I^2_{(1,1)}(x) =& (1, x), \\ I^2_{(2,0)}(x) =& (x, 0), \\ I^2_{(2,1)}(x) =& (x, 1), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \partial I^2 =& \sum_{i=1}^{2} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} f_{(i,\alpha)} \\ =& \sum_{i=1}^{2} \left((-1)^i f_{(i,0)} + (-1)^{i+1} f_{(i,1)} \right) \\ =& (-1)^1 f_{(1,0)} + (-1)^{1+1} f_{(1,1)} + (-1)^2 f_{(2,0)} + (-1)^{2+1} f_{(2,1)} \\ =& - f_{(1,0)} + f_{(1,1)} + f_{(2,0)} - f_{(2,1)}. \end{aligned}$$

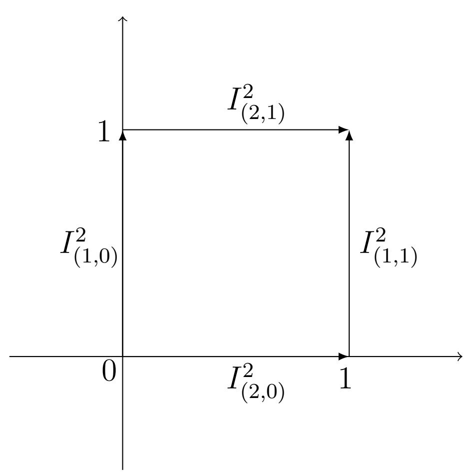

Figura 4.2: $(i, 0)$-caras y $(i, 1)$-caras de I^2, $i \in \{1, 2\}$

Ejemplo 4.8. Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Las $(i, 0)$-caras y las $(i, 1)$-caras de I^3, con $i \in \{1, 2, 3\}$, son,

$$
\begin{aligned}
I^3_{(1,0)}(x_1, x_2) =&(0, x_1, x_2),\\
I^3_{(1,1)}(x_1, x_2) =&(1, x_1, x_2),\\
I^3_{(2,0)}(x_1, x_2) =&(x_1, 0, x_2),\\
I^3_{(2,1)}(x_1, x_2) =&(x_1, 1, x_2),\\
I^3_{(3,0)}(x_1, x_2) =&(x_1, x_2, 0),\\
I^3_{(3,1)}(x_1, x_2) =&(x_1, x_2, 1),
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
\partial I^3 =&\sum_{i=1}^{3}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha} f_{(i,\alpha)}\\
=&\sum_{i=1}^{3}\Big((-1)^i f_{(i,0)} + (-1)^{i+1} f_{(i,1)}\Big)\\
=&(-1)^1 f_{(1,0)} + (-1)^{1+1} f_{(1,1)} + (-1)^2 f_{(2,0)}\\
&+ (-1)^{2+1} f_{(2,1)} + (-1)^3 f_{(3,0)} + (-1)^{3+1} f_{(3,1)}\\
=&- f_{(1,0)} + f_{(1,1)} + f_{(2,0)} - f_{(2,1)} - f_{(3,0)} + f_{(3,1)}.
\end{aligned}
$$

Definición 4.5. Para un m-cubo singular arbitrario $c : [0, 1]^m \to A$, definimos la (i, α)**-cara**, como siguiente composición,

$$
c_{(i,\alpha)} = c \circ (I^m_{(i,\alpha)}),
$$

con $\alpha \in \{0, 1\}$, notemos que $c_{(i,\alpha)} : [0, 1]^{m-1} \to A$, es decir, $c_{(i,\alpha)}$ es un $(m-1)$-cubo singular, luego, la frontera de c está definida de la siguiente manera,

$$
\partial c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha} f_{c_{(i,\alpha)}},
$$

con esto, podemos definir la frontera de una m-cadena $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_{c_i}$ como:

$$
\partial f = \sum_{i=1}^{l} a_i \partial c_i.
$$

Ejemplo 4.9. Consideremos al 3-cubo singular dado en el **Ejemplo 4.4**, para poder encontrar a ∂c primero debemos encontrar a las (i,α)-caras de c, $i \in \{1,2,3\}$ y $\alpha \in \{0,1\}$. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
I^3_{(1,0)}(x) =&(0, x_1, x_2),\\
I^3_{(2,0)}(x) =&(x_1, 0, x_2),\\
I^3_{(2,0)}(x) =&(x_1, x_2, 0),\\
I^3_{(1,1)}(x) =&(1, x_1, x_2),\\
I^3_{(2,1)}(x) =&(x_1, 1, x_2),\\
I^3_{(2,1)}(x) =&(x_1, x_2, 1),
\end{aligned}
$$

con esto, las (i,α)-caras de c son,

$$
\begin{aligned}
c_{(1,0)}(x) =&(c \circ I^3_{(1,0)})(x) = (\mathrm{sen}(0), \beta \cdot x_1, x_2) = (0, \beta \cdot x_1, x_2),\\
c_{(2,0)}(x) =&(c \circ I^3_{(2,0)})(x) = (\mathrm{sen}(x_1), \beta \cdot 0, x_2) = (\mathrm{sen}(x_1), 0, x_2),\\
c_{(3,0)}(x) =&(c \circ I^3_{(3,0)})(x) = (\mathrm{sen}(x_1), \beta \cdot x_2, 0),\\
c_{(1,1)}(x) =&(c \circ I^3_{(1,1)})(x) = (\mathrm{sen}(1), \beta \cdot x_1, x_2),\\
c_{(2,1)}(x) =&(c \circ I^3_{(2,1)})(x) = (\mathrm{sen}(x_1), \beta \cdot 1, x_2) = (\mathrm{sen}(x_1), \beta, x_2),\\
c_{(3,1)}(x) =&(c \circ I^3_{(3,1)})(x) = (\mathrm{sen}(x_1), \beta \cdot x_2, 1),
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
\partial c =& \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} f_{c_{(i,\alpha)}}\\
=& \sum_{i=1}^{3} \Big((-1)^i f_{c_{(i,0)}} + (-1)^{i+1} f_{c_{(i,1)}} \Big)\\
=& (-1)^1 f_{c_{(1,0)}} + (-1)^{1+1} f_{c_{(1,1)}}\\
&+ (-1)^2 f_{c_{(2,0)}} + (-1)^{2+1} f_{c_{(2,1)}}\\
&+ (-1)^3 f_{c_{(3,0)}} + (-1)^{3+1} f_{c_{(3,1)}}\\
=& - f_{c_{(1,0)}} + f_{c_{(1,1)}} + f_{c_{(2,0)}} - f_{c_{(2,1)}} - f_{c_{(3,0)}} + f_{c_{(3,1)}}.
\end{aligned}
$$

Teorema 4.1. Si c es una m-cadena en A, entonces $\partial(\partial c) = 0$.

Demostración: Sean c un m-cubo singular y $i, j \in \{1, ..., m\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i \leq j$. Sea $x \in [0,1]^{m-2}$, luego, la (j,β)-cara de $I^m_{i,\alpha}$, con $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, es,

$$\begin{aligned}(I^m_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) =& I^m_{(i,\alpha)}(I^{m-1}_{(j,\beta)}(x))\\ =& I^m_{(i,\alpha)}(x_1,...,x_{j-1},\beta,x_j,...,x_{m-2})\\ =& (x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_i,...,x_{j-1},\beta,x_j,...,x_{m-2}),\end{aligned}$$

análogamente, la (i,α)-cara de $I^m_{j,\beta}$ es,

$$\begin{aligned}(I^m_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(x) =& I^m_{(j,\beta)}(I^{m-1}_{(i,\alpha)}(x))\\ =& I^m_{(j,\beta)}(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_i,...,x_{m-2})\\ =& (x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_i,...,x_j,\beta,x_{j+1},...,x_{m-2}),\end{aligned}$$

la última igualdad se debe a que la $j+1$ entrada de $(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_i,...,x_{m-2})$ es x_j, con esto, podemos decir que $(I^m_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^m_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$, además,

$$\begin{aligned}(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} =& c_{(i,\alpha)}(I^{m-1}_{(j,\beta)})\\ =& (c(I^m_{(i,\alpha)}))(I^{m-1}_{(j,\beta)})\\ =& c(I^m_{(i,\alpha)}(I^{m-1}_{(j,\beta)}))\\ =& c((I^m_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)})\\ =& c((I^m_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)})\\ =& c(I^m_{(j+1,\beta)}(I^{m-1}_{(i,\alpha)}))\\ =& (c(I^m_{(j+1,\beta)}))(I^{m-1}_{(i,\alpha)})\\ =& c_{(j+1,\beta)}(I^{m-1}_{(i,\alpha)})\\ =& (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)},\end{aligned}$$

con esto,

$$\begin{aligned}\partial(\partial c)) =& \partial\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}f_{c_{(i,\alpha)}}\right)\\ =& \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}\partial(c_{(i,\alpha)})\\ =& \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\beta=0}^{1}(-1)^{j+\beta}f_{(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\beta=0}^{1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta} f_{(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta} f_{(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}\Big[(-1)^{i+0+j+0} f_{(c_{(i,0)})_{(j,0)}} + (-1)^{i+0+j+1} f_{(c_{(i,0)})_{(j,1)}} \\
&\quad + (-1)^{i+1+j+0} f_{(c_{(i,1)})_{(j,0)}} + (-1)^{i+1+j+1} f_{(c_{(i,1)})_{(j,1)}}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}\Big[(-1)^{i+j} f_{(c_{(i,0)})_{(j,0)}} + (-1)^{i+j+1} f_{(c_{(i,0)})_{(j,1)}} \\
&\quad + (-1)^{i+j+1} f_{(c_{(i,1)})_{(j,0)}} + (-1)^{i+j+2} f_{(c_{(i,1)})_{(j,1)}}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{i+j} f_{(c_{(i,0)})_{(j,0)}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}\Big[(-1)^{i+j+1} f_{(c_{(i,0)})_{(j,1)}} \\
&\quad + (-1)^{i+j+1} f_{(c_{(i,1)})_{(j,0)}}\Big] + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{i+j+2} f_{(c_{(i,1)})_{(j,1)}}.
\end{aligned}
$$

De la igualdad anterior resultaron tres sumandos, primero se trabajará con el primer sumando, el cual al tener una forma similar al tercer sumando nos ayudará a demostrarlo y por último se trabajará con el segundo sumando. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{i+j} f_{(c_{(i,0)})_{(j,0)}} &= \sum_{i=1}^{m}\Big[(-1)^{i+1} f_{(c_{(i,0)})_{(1,0)}} + (-1)^{i+2} f_{(c_{(i,0)})_{(2,0)}} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{i+m-1} f_{(c_{(i,0)})_{(-1,0)}}\Big] \\
&= \Big[(-1)^{1+1} f_{(c_{(1,0)})_{(1,0)}} + (-1)^{1+2} f_{(c_{(1,0)})_{(2,0)}} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{1+m-1} f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,0)}}\Big] \\
&\quad + \Big[(-1)^{2+1} f_{(c_{(2,0)})_{(1,0)}} + (-1)^{2+2} f_{(c_{(2,0)})_{(2,0)}} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{2+m-1} f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[(-1)^{3+1}f_{(c_{(3,0)})_{(1,0)}}+(-1)^{3+2}f_{(c_{(3,0)})_{(2,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{2+m-1}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}\Big]+\cdots+\\
&+\Big[(-1)^{m+1}f_{(c_{(m,0)})_{(1,0)}}+(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,0)})_{(2,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+m-1}f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
=&\Big[f_{(c_{(1,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(1,0)})_{(2,0)}}+f_{(c_{(1,0)})_{(3,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\Big[-f_{(c_{(2,0)})_{(1,0)}}+f_{(c_{(2,0)})_{(2,0)}}-f_{(c_{(2,0)})_{(3,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+1}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\Big[f_{(c_{(3,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(3,0)})_{(2,0)}}+f_{(c_{(3,0)})_{(3,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+2}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}\Big]+\cdots+\\
&+\Big[(-1)^{m+1}f_{(c_{(m,0)})_{(1,0)}}+(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,0)})_{(2,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{2m-1}f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
=&\Big[f_{(c_{(1,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(2,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(1,0)})_{(2,0)}}+f_{(c_{(3,0)})_{(1,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,0)}}+(-1)^{m+1}f_{(c_{(m,0)})_{(1,0)}}\Big]\\
&+\Big[f_{(c_{(2,0)})_{(2,0)}}-f_{(c_{(3,0)})_{(2,0)}}-f_{(c_{(2,0)})_{(3,0)}}+f_{(c_{(4,0)})_{(2,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+1}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}+(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,0)})_{(2,0)}}\Big]\\
&+\cdots+\Big[(-1)^{2m-1}f_{(c_{(m,0)})_{m-1,0)}}+(-1)^{2m-2}f_{(c_{(m-1,0)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
=&\Big[f_{(c_{(1,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(1,0)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(1,0)})_{(2,0)}}+f_{(c_{(1,0)})_{(2,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,0)}}-(-1)^{m}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,0)}}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[f_{(c_{(2,0)})_{(2,0)}} - f_{(c_{(2,0)})_{(2,0)}} - f_{(c_{(2,0)})_{(3,0)}} + f_{(c_{(2,0)})_{(3,0)}} \\
&+\cdots+(-1)^{m+1}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}} - (-1)^{m+1}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,0)}}\Big] \\
&+\cdots+\Big[-(-1)^{2m-2}f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,0)}} + (-1)^{2m-2}f_{(c_{(m-1,0)})_{(m-1,0)}}\Big] \\
=&0.
\end{aligned}
$$

La demostración de que,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{i+j+2}f_{(c_{(i,1)})_{(j,1)}} = 0,$$

es análoga a la demostración realizada anteriormente. Ahora solo resta trabajar con el segundo sumando, para esto, recordemos que $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$, solo cuando $i \leq j$, así,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}\Big[(-1)^{i+j+1}f_{(c_{(i,0)})_{(j,1)}} + (-1)^{i+j+1}f_{(c_{(i,1)})_{(j,0)}}\Big] \\
&\quad=\sum_{i=1}^{m}\Big[(-1)^{i+1+1}f_{(c_{(i,0)})_{(1,1)}} + (-1)^{i+1+1}f_{(c_{(i,1)})_{(1,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{i+2+1}f_{(c_{(i,0)})_{(2,1)}} + (-1)^{i+2+1}f_{(c_{(i,1)})_{(2,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{i+3+1}f_{(c_{(i,0)})_{(3,1)}} + (-1)^{i+3+1}f_{(c_{(i,1)})_{(3,0)}} \\
&\qquad+\cdots+(-1)^{i+m-1+1}f_{(c_{(i,0)})_{(m-1,1)}} + (-1)^{i+m-1+1}f_{(c_{(i,1)})_{(m-1,0)}}\Big] \\
&\quad=\Big[(-1)^{1+2}f_{(c_{(1,0)})_{(1,1)}} + (-1)^{1+2}f_{(c_{(1,1)})_{(1,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{1+3}f_{(c_{(1,0)})_{(2,1)}} + (-1)^{1+3}f_{(c_{(1,1)})_{(2,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{1+4}f_{(c_{(1,0)})_{(3,1)}} + (-1)^{1+4}f_{(c_{(1,1)})_{(3,0)}} \\
&\qquad+\cdots+(-1)^{m+1}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,1)}} + (-1)^{m+1}f_{(c_{(1,1)})_{(m-1,0)}}\Big] \\
&\qquad+\Big[(-1)^{2+2}f_{(c_{(2,0)})_{(1,1)}} + (-1)^{2+2}f_{(c_{(2,1)})_{(1,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{2+3}f_{(c_{(2,0)})_{(2,1)}} + (-1)^{2+3}f_{(c_{(2,1)})_{(2,0)}} \\
&\qquad+(-1)^{2+4}f_{(c_{(2,0)})_{(3,1)}} + (-1)^{2+4}f_{(c_{(2,1)})_{(3,0)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(-1)^{m+2}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,1)}}+(-1)^{m+2}f_{(c_{(2,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\Big[(-1)^{3+2}f_{(c_{(3,0)})_{(1,1)}}+(-1)^{3+2}f_{(c_{(3,1)})_{(1,0)}}\\
&+(-1)^{3+3}f_{(c_{(3,0)})_{(2,1)}}+(-1)^{3+3}f_{(c_{(3,1)})_{(2,0)}}\\
&+(-1)^{3+4}f_{(c_{(3,0)})_{(3,1)}}+(-1)^{3+4}f_{(c_{(3,1)})_{(3,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+3}f_{(c_{(3,0)})_{(m-1,1)}}+(-1)^{m+3}f_{(c_{(3,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\cdots+\Big[(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,0)})_{(1,1)}}+(-1)^{m+2}f_{(c_{(n,1)})_{(1,0)}}\\
&+(-1)^{m+3}f_{(c_{(i,0)})_{(2,1)}}+(-1)^{m+3}f_{(c_{(m,1)})_{(2,0)}}\\
&+(-1)^{m+4}f_{(c_{(m,0)})_{(3,1)}}+(-1)^{m+4}f_{(c_{(m,1)})_{(3,0)}}\\
&+\cdots+(-1)^{m+m}f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,1)}}+(-1)^{m+m}f_{(c_{(m,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
=&\Big[-f_{(c_{(1,0)})_{(1,1)}}-f_{(c_{(1,1)})_{(1,0)}}+f_{(c_{(1,0)})_{(2,1)}}+f_{(c_{(1,1)})_{(2,0)}}\\
&-f_{(c_{(1,0)})_{(3,1)}}-f_{(c_{(1,1)})_{(3,0)}}+\cdots+(-1)^{m+1}f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,1)}}\\
&+(-1)^{m+1}f_{(c_{(1,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\Big[f_{(c_{(2,0)})_{(1,1)}}+f_{(c_{(2,1)})_{(1,0)}}-f_{(c_{(2,0)})_{(2,1)}}-f_{(c_{(2,1)})_{(2,0)}}\\
&+f_{(c_{(2,0)})_{(3,1)}}+f_{(c_{(2,1)})_{(3,0)}}+\cdots+(-1)^{m+2}f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,1)}}\\
&+(-1)^{m+2}f_{(c_{(2,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\Big[-f_{(c_{(3,0)})_{(1,1)}}-f_{(c_{(3,1)})_{(1,0)}}+f_{(c_{(3,0)})_{(2,1)}}+f_{(c_{(3,1)})_{(2,0)}}\\
&-f_{(c_{(3,0)})_{(3,1)}}-f_{(c_{(3,1)})_{(3,0)}}+\cdots+(-1)^{m+3}f_{(c_{(3,0)})_{(m-1,1)}}\\
&+(-1)^{m+3}f_{(c_{(3,1)})_{(m-1,0)}}\Big]\\
&+\cdots+\Big[(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,0)})_{(1,1)}}+\\
&(-1)^{m+2}f_{(c_{(m,1)})_{(1,0)}}+(-1)^{m+3}f_{(c_{(m,0)})_{(2,1)}}\\
&+(-1)^{m+3}f_{(c_{(m,1)})_{(2,0)}}+(-1)^{m+4}f_{(c_{(m,0)})_{(3,1)}}\\
&+(-1)^{m+4}f_{(c_{(m,1)})_{(3,0)}}+\cdots+(-1)^{2m}f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,1)}}\\
&+(-1)^{2m-1}f_{(c_{(m,1)})_{(m-1,0)}}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=& - f_{(c_{(1,0)})_{(1,1)}} + f_{(c_{(2,1)})_{(1,0)}} - f_{(c_{(1,1)})_{(1,0)}} + f_{(c_{(2,0)})_{(1,1)}} \\
&+ f_{(c_{(1,0)})_{(2,1)}} - f_{(c_{(3,1)})_{(1,0)}} + f_{(c_{(1,1)})_{(2,0)}} - f_{(c_{(3,0)})_{(1,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m+1} f_{(c_{(1,0)})_{(m-1,1)}} + (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,1)})_{(1,0)}} \\
&+ (-1)^{m+1} f_{(c_{(1,1)})_{(m-1,0)}} + (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,0)})_{(1,1)}} \\
&- f_{(c_{(2,0)})_{(2,1)}} + f_{(c_{(3,1)})_{(2,0)}} - f_{(c_{(2,1)})_{(2,0)}} + f_{(c_{(3,0)})_{(2,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m+2} f_{(c_{(2,0)})_{(m-1,1)}} + (-1)^{m+3} f_{(c_{(m,1)})_{(2,0)}} \\
&+ (-1)^{m+2} f_{(c_{(2,1)})_{(m-1,0)}} + (-1)^{m+3} f_{(c_{(m,0)})_{(2,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m-1,1)})_{(m-1,0)}} + (-1)^{2m} f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,1)}} \\
&+ (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m-1,0)})_{(m-1,1)}} + (-1)^{2m} f_{(c_{(m,1)})_{(m-1,0)}} \\
=& - f_{(c_{(2,1)})_{(1,0)}} + f_{(c_{(2,1)})_{(1,0)}} - f_{(c_{(2,0)})_{(1,1)}} + f_{(c_{(2,0)})_{(1,1)}} \\
&+ f_{(c_{(3,1)})_{(1,0)}} - f_{(c_{(3,1)})_{(1,0)}} + f_{(c_{(3,0)})_{(1,1)}} - f_{(c_{(3,0)})_{(1,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m+1} f_{(c_{(m,1)})_{(1,0)}} - (-1)^{m+1} f_{(c_{(m,1)})_{(1,0)}} \\
&+ (-1)^{m+1} f_{(c_{(m,0)})_{(1,1)}} - (-1)^{m+1} f_{(c_{(m,0)})_{(1,1)}} \\
&- f_{(c_{(3,1)})_{(2,0)}} + f_{(c_{(3,1)})_{(2,0)}} - f_{(c_{(3,0)})_{(2,1)}} + f_{(c_{(3,0)})_{(2,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,1)})_{(2,0)}} - (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,1)})_{(2,0)}} \\
&+ (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,0)})_{(2,1)}} - (-1)^{m+2} f_{(c_{(m,0)})_{(2,1)}} \\
&+ \cdots + (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,1)}} - (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m,0)})_{(m-1,1)}} \\
&+ (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m,1)})_{(m-1,0)}} - (-1)^{2m-1} f_{(c_{(m,1)})_{(m-1,0)}} \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

De aquí se concluye que $\partial(\partial c) = 0$. Sea una m-cadena $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_{c_i}$, luego,

$$
\begin{aligned}
\partial(\partial f) =& \partial\left(\sum_{i=1}^{l} a_i \partial c_i\right) \\
=& \sum_{i=1}^{l} a_i \partial(\partial c_i) \\
=& \sum_{i=1}^{l} a_i \cdot 0 \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, queda demostrado el teorema. $\square$

4.4. Integración sobre cubos singulares

A partir de aquí solo se trabajará con k-cubos singulares diferenciables. Sea ω una k-forma en $[0,1]^k$, con $k \in \mathbb{N}$, luego,

$$\begin{aligned}\omega =& \sum_{i_1=1}^{1} \sum_{i_2>i_1}^{2} \cdots \sum_{i_k>i_{k-1}}^{k} \omega_{i_1,i_2,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ =& \omega_{1,2,\dots,k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,\end{aligned}$$

para fines prácticos denotaremos a $\omega_{1,2,\dots,k}$ como g.

Definición 4.6. Definimos la integral de una k-forma ω sobre $[0,1]^k$ como sigue,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^k} \omega &= \int_{[0,1]^k} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \int_{[0,1]^k} g(x_1, ..., x_k) dx_1 \cdots dx_k.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.10. Sea la 3-forma definida como sigue

$$\omega = (2x_1 + \operatorname{sen}(x_2) + e^{x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

luego,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^3} \omega &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (2x_1 + \operatorname{sen}(x_2) + e^{x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x_1 + \operatorname{sen}(x_2) + e^{x_3}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2x_1^2}{2} + \operatorname{sen}\,(x_2) x_1 + e^{x_3} x_1 \right) \Bigg|_0^1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 + \operatorname{sen}(x_2) + e^{x_3} \right) dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \left(x_2 - \cos(x_2) + e^{x_3} x_2 \right)\big|_0^1 dx_3 \\ &= \int_0^1 (1 - \cos(1) + \cos(0) + e^{x_3}) dx_3 \\ &= \int_0^1 (2 - \cos(1) + e^{x_3}) dx_3 \\ &= [(2 - \cos(1)) x_3 + e^{x_3}]\big|_0^1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2-\cos(1)+e^1-e^0\\
&=1-\cos(1)+e.
\end{aligned}
$$

Definición 4.7. Si ω es una k-forma sobre $A\subset\mathbb{R}^k$ y c es un k-cubo singular sobre A, definimos la integral de ω sobre c como sigue,

$$\int_c \omega=\int_{[0,1]^k} c^*\omega.$$

En particular, cuando ω es una $0-$forma y $c:\{0\}\to A$ es un 0-cubo singular la integral de ω sobre c se define de la siguiente manera,

$$\int_c \omega=\omega(c(0)).$$

Otro caso particular ocurre cuando consideramos la integral de una k-forma ω de $\mathbb{R}^k$ sobre el k-cubo estándar $I^k:[0,1]^k\to\mathbb{R}^k$, cuyo resultado es el siguiente,

$$\int_{I^k}\omega=\int_{I^k} gdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k=\int_{[0,1]^k}(I^k)^*(gdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k), \tag{4.2}$$

por **Teorema 3.3**, tenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{[0,1]^k}(I^k)^*(gdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k)=\int_{[0,1]^k}(g\circ I^k)det((I^k)')dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k. \tag{4.3}$$

Primero demostraremos que $g\circ I^k=g$ y posteriormente encontraremos el valor de $det((I^k)')$.
Sea $(x_1,...,x_k)\in[0,1]^k$, luego,

$$(g\circ I^k)(x_1,...,x_k)=g(I^k(x_1,...,x_k))=g(x_1,...,x_k), \tag{4.4}$$

con esto, $g\circ I^k=g$. Por otro lado, recordemos que $I^k(x_1,...,x_k)=(x_1,...,x_k)$, por ende, $I^k_i=x_i$, para todo $i\in\{1,...,k\}$, así,

$$(I^k)'=\begin{pmatrix} D_1I^k_1 & D_2I^k_1 & \cdots & D_kI^k_1\\ D_1I^k_2 & D_2I^k_2 & \cdots & D_kI^k_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ D_1I^k_k & D_2I^k_k & \cdots & D_kI^k_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $det((I^k)')=1$, de (4.2), (4.3) y (4.4) se concluye que

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^k}(I^k)^*(gdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k)&=\int_{[0,1]^k}gdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k\\&=\int_{[0,1]^k}g(x_1,...,x_k)dx_1\cdots dx_k.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.11. Tomemos a la 3-forma dada en el **Ejemplo 4.10**, y al 3-cubo singular dado en el **Ejemplo 4.4**, luego, aplicando **Teorema 3.3**

$$\begin{aligned}\int_c\omega&=\int_{[0,1]^3}c^*\omega\\&=\int_{[0,1]^3}c^*\Big(gdx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\Big)\\&=\int_{[0,1]^3}(g\circ c)det(c')dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\&=\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(2\text{sen}(x_1)+\text{sen}(\alpha x_2)+e^{x_3})det(c')dx_1dx_2dx_3,\end{aligned}$$

tenemos que,

$$c'=\begin{pmatrix}\cos(x_1)&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

así, $det(c')=\alpha\cos(x_1)$, con esto,

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(2\,\text{sen}(x_1)+\text{sen}(\alpha x_2)+e^{x_3})det(c')dx_1dx_2dx_3\\&=\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(2\text{sen}(x_1)+\text{sen}(\alpha x_2)+e^{x_3})\alpha\cos(x_1)dx_1dx_2dx_3\\&=\alpha\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(2\text{sen}(x_1)\cos(x_1)+\text{sen}(\alpha x_2)\cos(x_1)+e^{x_3}\cos(x_1))dx_1dx_2dx_3\\&=\alpha\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(\text{sen}(2x_1)+\text{sen}(\alpha x_2)\cos(x_1)+e^{x_3}\cos(x_1))dx_1dx_2dx_3\\&=\alpha\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\left(-\frac{\cos(x_1)}{2}+\text{sen}(\alpha x_2)\text{sen}(x_1)+e^{x_3}\text{sen}(x_1)\right)\Bigg|_0^1dx_2dx_3\\&=\alpha\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\left(-\frac{\cos(1)}{2}+\frac{1}{2}+\text{sen}(\alpha x_2)\text{sen}(1)+e^{x_3}\text{sen}(1)\right)dx_2dx_3\\&=\alpha\int_{[0,1]}\left(\left(-\frac{\cos(1)}{2}+\frac{1}{2}\right)x_2-\cos(\alpha x_2)\text{sen}(1)+e^{x_3}\text{sen}(1)x_2\right)\Bigg|_0^1dx_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha \int_{[0,1]} \left(-\frac{\cos(1)}{2} + \frac{1}{2} - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(1) + \mathrm{sen}(1) + e^{x_3}\mathrm{sen}(1)\right) dx_3 \\
&= \alpha\left(\left(-\frac{\cos(1)}{2} + \frac{1}{2} - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(1) + \mathrm{sen}(1)\right)x_3 + e^{x_3}\mathrm{sen}(1)\right)\Bigg|_0^1 \\
&=\alpha\left(-\frac{\cos(1)}{2} + \frac{1}{2} - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(1) + \mathrm{sen}(1) + e^1\mathrm{sen}(1) - \mathrm{sen}(1)\right) \\
&=\alpha\left(-\frac{\cos(1)}{2} + \frac{1}{2} - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(1) + e\mathrm{sen}(1)\right).
\end{aligned}
$$

4.5. Integración sobre cadenas

Definición 4.8. Sea $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_{c_i}$ una k-cadena. La integral de una k-forma ω sobre f se define por,

$$\int_f \omega = \sum_{i=1}^{l} a_i \int_{c_i} \omega.$$

Ejemplo 4.12. Sean la 2-cadena f y la 2-forma ω en $[0,1]^2$ dadas como sigue,

$$
\begin{aligned}
\omega =&(x_1 - x_2)dx_1 \wedge dx_2, \\
f =&5f_{c_1} + f_{c_2} - 9f_{c_3},
\end{aligned}
$$

donde, $g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ y

$$
\begin{aligned}
c_1(x_1, x_2) =&(x_1 + x_2, x_2 - x_1), \\
c_2(x_1, x_2) =&(x_1x_2, x_2 - 2), \\
c_3(x_1, x_2) =&(x_2, x_1).
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\int_f \omega =&5\int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega - 9\int_{c_3} \omega \\
=&5\int_{[0,1]^2} c_1^*\omega + \int_{[0,1]^2} c_2^*\omega - 9\int_{[0,1]^2} c_3^*\omega \\
=&5\int_{[0,1]^2} (g \circ c_1)det(c_1')dx_1 \wedge dx_2 + \int_{[0,1]^2} (g \circ c_2)det(c_2')dx_1 \wedge dx_2 \\
&- 9\int_{[0,1]^2} (g \circ c_3)det(c_3')dx_1 \wedge dx_2,
\end{aligned}
$$

tenemos que,

$$det(c_1') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ det(c_2') = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_2,\ det(c_3') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_f \omega =& 10\int_{[0,1]^2} (g\circ c_1)dx_1\wedge dx_2 + \int_{[0,1]^2} (g\circ c_2)x_2dx_1\wedge dx_2 \\
&+ 9\int_{[0,1]^2} (g\circ c_3)dx_1\wedge dx_2 \\
=& 10\int_{[0,1]^2} 2x_1dx_1dx_2 + \int_{[0,1]^2} (x_1x_2 - x_2 + 2)x_2dx_1dx_2 \\
&+ 9\int_{[0,1]^2} (x_2 - x_1)dx_1dx_2 \\
=& 20\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} x_1dx_1dx_2 + \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (x_1x_2^2 - x_2^2 + 2x_2)dx_1dx_2 \\
&+ 9\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (x_2 - x_1)dx_1dx_2 \\
=& 20\int_{[0,1]} \left[\frac{x_1^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 dx_2 + \int_{[0,1]} \left(x_2^2\frac{x_1^2}{2} - (x_2^2 + 2x_2)x_1\right)\Bigg|_0^1 dx_2 \\
&+ 9\int_{[0,1]} \left(x_2x_1 - \frac{x_1}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx_2 \\
=& 20\int_{[0,1]} \frac{1}{2}dx_2 + \int_{[0,1]} \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2^2 + 2x_2\right)dx_2 \\
&+ 9\int_{[0,1]} \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)dx_2 \\
=& 10x_2|_0^1 + \left(-\frac{x_2^3}{6} + 2\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + 9\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{2}x_2\right)\Bigg|_0^1 \\
=& 10 - \frac{1}{6} + 1 + 9\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{65}{6}.
\end{aligned}$$

Definición 4.9. La integral de una 1-forma en $\mathbb{R}^2$ sobre un 1-cubo singular en $\mathbb{R}^2$ de es llamada **integral de línea**.

Sean $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un 1-cubo singular dado como sigue, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, para todo $t \in [0,1]$, y $Pdx_1 + Qdx_2$ una 1-forma de $\mathbb{R}^2$, donde $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces, por 2) y 3) del **Teorema 3.2**,

$$\begin{aligned}\int_c [Pdx_1 + Qdx_2] &= \int_0^1 c^*[Pdx_1 + Qdx_2] \\ &= \int_0^1 [c^*(Pdx_1) + c^*(Qdx_2)] \\ &= \int_0^1 [(P \circ c)c^*(dx_1) + (Q \circ c)c^*(dx_2)],\end{aligned}$$

notemos que c solo depende de la variable t, así, por **Teorema 3.2**, 1) se cumple la siguiente igualdad,

$$c^*(dx_1) = \sum_{l=1}^{1} \frac{\partial c_1}{\partial x_l} dx_l = \frac{dc_1}{dt} dt,$$

análogamente,

$$c^*(dx_2) = \frac{dc_2}{dt} dt,$$

con esto,

$$\begin{aligned}\int_c [Pdx_1 + Qdx_2] &= \int_0^1 \left[(P \circ c)\frac{dc_1}{dt}dt + (Q \circ c)\frac{dc_2}{dt}dt\right] \\ &= \int_0^1 \left[(P \circ c)\frac{dc_1}{dt} + (Q \circ c)\frac{dc_2}{dt}\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[P(c(t))\frac{dc_1(t)}{dt} + Q(c(t))\frac{dc_2(t)}{dt}\right] dt \\ &= \int_0^1 (P(c(t)), Q(c(t))) \cdot \left(\frac{dc_1(t)}{dt}, \frac{dc_2(t)}{dt}\right) dt,\end{aligned}$$

considerando al campo vectorial $F = (P, Q)$, se sigue que:

$$\int_0^1 (P(c(t)), Q(c(t))) \cdot \left(\frac{dc_1(t)}{dt}, \frac{dc_2(t)}{dt}\right) dt = \int_0^1 F(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} dt.$$

Con esto,

$$\int_c [Pdx_1 + Qdx_2] = \int_0^1 F(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} dt.$$

Análogamente a la **Definición 4.9**, podemos dar la relación entre la integral de superficie e integrales sobre formas.

Definición 4.10. A la integral de una 2-forma sobre un 2-cubo en $\mathbb{R}^3$ singular es llamada **integral de superficies.**

Sean la 2-forma $\omega = Pdx_1 \wedge dx_2 + Qdx_1 \wedge dx_3 + Rdx_2 \wedge dx_3$ de $\mathbb{R}^3$ y el 2-cubo singular $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ dado como sigue,

$$c(u,v) = (c_1(u,v), c_2(u,v), c_3(u,v)),$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_c \Big[Pdx_1 \wedge dx_2 + Qdx_1 \wedge dx_3 + Rdx_2 \wedge dx_3 \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} c^* \Big[Pdx_1 \wedge dx_2 + Qdx_1 \wedge dx_3 + Rdx_2 \wedge dx_3 \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} \Big[c^*(Pdx_1 \wedge dx_2) + c^*(Qdx_1 \wedge dx_3) + c^*(Rdx_2 \wedge dx_3) \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} \Big[(P \circ c) c^*(dx_1 \wedge dx_2) + (Q \circ c) c^*(dx_1 \wedge dx_3) + (R \circ c) c^*(dx_2 \wedge dx_3) \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} \Big[(P \circ c) c^*(dx_1) \wedge c^*(dx_2) + (Q \circ c) c^*(dx_1) \wedge c^*(dx_3) \\
&+ (R \circ c) c^*(dx_2) \wedge c^*(dx_3) \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} \Big[(P \circ c) \left(\tfrac{\partial c_1}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_1}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\tfrac{\partial c_2}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_2}{\partial v} dv \right) \\
&+ (Q \circ c) \left(\tfrac{\partial c_1}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_1}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\tfrac{\partial c_3}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_3}{\partial v} dv \right) \\
&+ (R \circ c) \left(\tfrac{\partial c_2}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_2}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\tfrac{\partial c_3}{\partial u} du + \tfrac{\partial c_3}{\partial v} dv \right) \Big] \\
&= \int_{[0,1]^2} \Big[(P \circ c) \Big(\tfrac{\partial c_1}{\partial u} \tfrac{\partial c_2}{\partial u} du \wedge du + \tfrac{\partial c_1}{\partial u} \tfrac{\partial c_2}{\partial v} du \wedge dv + \tfrac{\partial c_1}{\partial v} \tfrac{\partial c_2}{\partial u} dv \wedge du \\
&+ \tfrac{\partial c_1}{\partial v} \tfrac{\partial c_2}{\partial v} dv \wedge dv \Big) \\
&+ (Q \circ c) \left(\tfrac{\partial c_1}{\partial u} \tfrac{\partial c_3}{\partial u} du \wedge du + \tfrac{\partial c_1}{\partial u} \tfrac{\partial c_3}{\partial v} du \wedge dv + \tfrac{\partial c_1}{\partial v} \tfrac{\partial c_3}{\partial u} dv \wedge du + \tfrac{\partial c_1}{\partial v} \tfrac{\partial c_3}{\partial v} dv \wedge dv \right) \\
&+ (R \circ c) \left(\tfrac{\partial c_2}{\partial u} \tfrac{\partial c_3}{\partial u} du \wedge du + \tfrac{\partial c_2}{\partial u} \tfrac{\partial c_3}{\partial v} du \wedge dv + \tfrac{\partial c_2}{\partial v} \tfrac{\partial c_3}{\partial u} dv \wedge du + \tfrac{\partial c_2}{\partial v} \tfrac{\partial c_3}{\partial v} dv \wedge dv \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$= \int_{[0,1]^2} \Bigg[(P\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v} du\wedge dv - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u} du\wedge dv \Bigg)$$

$$+ (Q\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} du\wedge dv - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} du\wedge dv \Bigg)$$

$$+ (R\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} du\wedge dv - \tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} du\wedge dv \Bigg)\Bigg]$$

$$= \int_{[0,1]^2} \Bigg[(P\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v} - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u} \Bigg) du\wedge dv + (Q\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} \Bigg) du\wedge dv$$

$$+ (R\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} - \tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} \Bigg) du\wedge dv\Bigg]$$

$$= \int_{[0,1]^2} \Bigg[(R\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} - \tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} \Bigg) - (Q\circ c)\Bigg(-\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} + \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} \Bigg)$$

$$+ (P\circ c)\Bigg(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v} - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u} \Bigg)\Bigg] du\wedge dv$$

$$= \int_{[0,1]^2} (R\circ c, -Q\circ c, P\circ c)\cdot \Bigg(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} - \tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u}, \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} - \tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v},$$

$$\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v} - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u} \Bigg) du\wedge dv$$

$$= \int_{[0,1]^2} (R(c(u,v)), -Q(c(u,v)), P(c(u,v)))\cdot \Bigg(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v} - \tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u}, \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u} - \tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v},$$

$$\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v} - \tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u} \Bigg) dudv,$$

sea el campo vectorial $F = (R, -Q, P)$, luego,

$$F(c(u,v)) = (R(c(u,v)), -Q(c(u,v)), P(c(u,v))),$$

por otro lado, dado que la imagen de c es una superficie, podemos encontrar al vector normal de dicha superficie como sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial u}\times\frac{\partial \sigma}{\partial v} =& (\tfrac{\partial c_1}{\partial u}, \tfrac{\partial c_2}{\partial u}, \tfrac{\partial c_3}{\partial u}) \times (\tfrac{\partial c_1}{\partial v}, \tfrac{\partial c_2}{\partial v}, \tfrac{\partial c_3}{\partial v}) \\
=& \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial c_1}{\partial u} & \frac{\partial c_2}{\partial u} & \frac{\partial c_3}{\partial u} \\ \frac{\partial c_1}{\partial v} & \frac{\partial c_2}{\partial v} & \frac{\partial c_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\
=& \hat{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial c_2}{\partial u} & \frac{\partial c_3}{\partial u} \\ \frac{\partial c_2}{\partial v} & \frac{\partial c_3}{\partial v} \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial u} & \frac{\partial c_3}{\partial u} \\ \frac{\partial c_1}{\partial v} & \frac{\partial c_3}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial u} & \frac{\partial c_2}{\partial u} \\ \frac{\partial c_1}{\partial v} & \frac{\partial c_2}{\partial v} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$=\hat{i}(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v}-\tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u})-\hat{j}(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v}-\tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u})+\hat{k}(\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v}-\tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u})$$
$$=(\tfrac{\partial c_2}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v}-\tfrac{\partial c_2}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u},\tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_3}{\partial u}-\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_3}{\partial v},\tfrac{\partial c_1}{\partial u}\tfrac{\partial c_2}{\partial v}-\tfrac{\partial c_1}{\partial v}\tfrac{\partial c_2}{\partial u}),$$

así,

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^2} F(c(u,v)) \cdot \overrightarrow{n},$$

lo cual coincide con la **Definición 1.22.**

4.6. Teorema de Stokes

Teorema 4.2. (Teorema de Stokes) Si ω es una $(k-1)$-forma en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^k$ y f es una k-cadena en A, entonces:

$$\int_f d\omega = \int_{\partial f} \omega.$$

Demostración: Sean $c = I^k$ y ω una $(k-1)$-forma en $\mathbb{R}^k$, podemos ver a ω como sigue,

$$\begin{aligned}\omega =& \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}} \omega_{i_1,\dots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}\\ =& \sum_{i_1=1}^{k-(k-1-1)} \sum_{i_2>i_1}^{k-(k-1-2)} \cdots \sum_{i_{k-1}>i_{k-2}}^{k} \omega_{i_1,\dots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}\\ =& \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2>i_1}^{3} \cdots \sum_{i_{k-1}>i_{k-2}}^{k} \omega_{i_1,\dots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}},\end{aligned}$$

apoyándonos del **Ejemplo 3.3**, podemos decir que ω es el resultado de sumar $(k-1)$-formas del siguiente tipo:

$$\omega_{1,\dots,k-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

recordemos que el símbolo $\widehat{\ }$ sobre dx_i significa que este último será omitido, para todo $i \in \{1, ..., k-1\}$, así, es suficiente demostrar el Teorema para cada uno de los elementos de la suma. Primero encontraremos la integral de un sumando arbitrario sobre $I^k_{(j,\alpha)}$, con $j \in \{1, ..., k-1\}$ y $\alpha \in \{0, 1\}$, para fines prácticos denotaremos a

$\omega_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ como g, con esto,

$$\int_{I^k_{(j,\alpha)}} g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^*(g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k),$$

luego, por 3) del **Teorema 3.2**, se cumple que,

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^*(g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k)$$
$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k),$$

por último, aplicando 4) del **Teorema 3.2**, se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k)$$
$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_i)} \wedge \cdots \wedge (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_k),$$

para poder trabajar con la integral anterior, encontraremos una igualdad para $(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_m)$, donde $m \in \{1, ..., k\}\backslash\{i\}$, para esto recordaremos que la función $I^k_{(j,\alpha)}$ está definida de la siguiente manera, dado $(x_1, ..., x_{k-1}) \in [0, 1]^{k-1}$,

$$(I^k_{(j,\alpha)})(x_1, ..., x_{k-1}) = (x_1, ..., x_{j-1}, \alpha, x_j, ..., x_{k-1}).$$

- Si $j \neq i$, tenemos que,

  $$(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_j) = \sum_{l=1}^{k-1} D_l((I^k_{(j,\alpha)})_j) dx_l = \sum_{l=1}^{k-1} D_l(\alpha) dx_l = \sum_{l=i}^{k-1} 0 \cdot dx_l = O,$$

  recordemos que O denota a la forma diferencial nula, con la igualdad anterior se sigue que,

  $$\int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_j) \wedge \cdots \wedge \widehat{(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_i)}$$
  $$\wedge \cdots \wedge (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_k)$$
  $$= \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge O \wedge \cdots \wedge \widehat{(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_i)}$$
  $$\wedge \cdots \wedge (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)}) O \\
&= \int_{[0,1]^{k-1}} O \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- Si $i = j$, entonces para todo $m \in \{1, ..., k-1\} \backslash \{i\}$:

$$
\begin{aligned}
(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_m) =& \sum_{l=i}^{k-1} D_l (I^k_{(j,\alpha)})_m dx_l \\
=& 0 \cdot dx_1 + \cdots + 1 \cdot dx_m + \cdots 0 \cdot + dx_{k-1} \\
=& dx_m.
\end{aligned}
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)}) (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{(I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_i)} \wedge \cdots \wedge (I^k_{(j,\alpha)})^*(dx_k) \\
&\qquad = \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)}) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\qquad = \int_{[0,1]^{k-1}} (g \circ I^k_{(j,\alpha)})(x_1, ..., x_{k-1}) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = \int_{[0,1]^{k-1}} (g(I^k_{(j,\alpha)}(x_1, ..., x_{k-1}) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = \int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1, ..., \alpha, ..., x_{k-1}) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial I^k} g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^k_{(j,\alpha)}} g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^*(g dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\
&\qquad = \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1, ..., \alpha, ..., x_{k-1}) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1,...,1,...,x_{k-1})dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k\\&+(-1)^{i}\int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1,...,0,...,x_{k-1})dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Debido a que $g(x_1,...,1,...,x_{k-1})$ y $g(x_1,...,0,...,x_{k-1})$ son funciones constantes respecto a la variable x_i se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x_1,...,1,...,x_{k-1})dx_i &= g(x_1,...,1,...,x_{k-1})(x_i)\big|_0^1\\&=g(x_1,...,1,...,x_{k-1})[1-0]\\&=g(x_1,...,1,...,x_{k-1}),\\\int_0^1 g(x_1,...,0,...,x_{k-1})dx_i &=g(x_1,...,0,...,x_{k-1}).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Este razonamiento se usará de nuevo más adelante. Sustituyendo (4.6) en (4.5) y aplicando el **Teorema 1.16**,

$$\begin{aligned}&\int_{\partial I^k} g dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\\&\qquad=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^{k-1}}\int_0^1 g(x_1,...,1,...,x_{k-1})dx_i dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k\\&\qquad+(-1)^{i}\int_{[0,1]^{k-1}}\int_0^1 g(x_1,...,0,...,x_{k-1})dx_i dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k\\&\qquad=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^{k}} g(x_1,...,1,...,x_{k-1})dx_1\cdots dx_k\\&\qquad+(-1)^{i}\int_{[0,1]^{k}} g(x_1,...,0,...,x_{k-1})dx_1\cdots dx_k.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{I^k} dg dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k &= \int_{[0,1]^k}(I^k)^* d(g dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k)\\&=\int_{[0,1]^k} dg dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\\&=\int_{[0,1]^k}\sum_{j=1}^{k-1} D_j g dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^k} D_i g dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_k \qquad (4.8) \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i g(x_1, ..., x_k) dx_1 \cdots dx_k.
\end{aligned}
$$

Por el **Teorema 1.16** se cumple que,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i g(x_1, ..., x_k) dx_1 \cdots dx_k \\
&\qquad = (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 D_i g(x_1, ..., x_k) dx_i \right) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

luego, por el **Teorema 1.17** se tiene la siguiente igualdad,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 D_i g(x_1, ..., x_k) dx_i \right) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 [g(x_1, ..., 1, ..., x_k) \\
&\qquad\quad - g(x_1, ..., 0, ..., x_k)] x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, ..., 1, ..., x_k) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad\quad - (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, ..., 0, ..., x_k) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1, ..., 1, ..., x_k) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad\quad + (-1)^{i} \int_{[0,1]^{k-1}} g(x_1, ..., 0, ..., x_k) x_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&\qquad = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} g(x_1, ..., 1, ..., x_k) x_1 \cdots dx_k \\
&\qquad\quad + (-1)^{i} \int_{[0,1]^k} g(x_1, ..., 0, ..., x_k) x_1 \cdots dx_k.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Notemos que $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$, así, por $(4.7), (4.8), (4.9)$ y (4.10) se tiene que:

$$
\int_{\partial I^k} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{I^k} dg dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,
$$

luego, considerando a la $(k-1)$-forma dada al inicio de la demostración, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I^k} \omega &= \int_{\partial I^k} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}} \omega_{i_1,\ldots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}} \int_{\partial I^k} \omega_{i_1,\ldots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}} \int_{I^k} d\omega_{i_1,\ldots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \qquad (4.11) \\
&= \int_{I^k} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}} d\omega_{i_1,\ldots,i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\
&= \int_{I^k} d\omega.
\end{aligned}$$

La igualdad anterior se cumple cuando tomamos $c = I^k$, consideramos a c como un k-cubo singular arbitrario.
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) \\
&= \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(c^*(d\omega)) \\
&= \int_{I^k} c^*(d\omega).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando **Teorema 3.2**, 5)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \omega &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{(i,\alpha)}} \omega \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} c^*_{(i,\alpha)} \omega \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (c \circ I^k_{(i,\alpha)})^* \omega \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(i,\alpha)})^* (c^* \omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^k_{(i,\alpha)}} c^* \omega \\
&= \int_{\partial I^k} c^* \omega,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

luego, por **Teorema 3.4**, 4), (4.11) y (4.12) se cumple lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
\int_{I^k} c^*(d\omega) &= \int_{I^k} d(c^*\omega) \\
&= \int_{\partial I^k} c^* \omega \\
&= \int_{\partial c} \omega.
\end{aligned}
$$

Por último, si tomamos una k-cadena arbitraria $f = \sum_{i=1}^{l} a_i f_{c_i}$ y una $(k-1)$-forma ω, se concluye que,

$$
\begin{aligned}
\int_f d\omega &= \sum_{i=1}^{l} a_i \int_{c_i} d\omega \\
&= \sum_{i=1}^{l} a_i \int_{\partial c_i} \omega \\
&= \int_{\partial f} \omega.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. □

Capítulo 5

Variedades en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se introducirá el concepto de variedades. La importancia de este concepto, junto con sus relacionados, radica en las aplicaciones que se mostrarán en el último capítulo de esta tesis.

5.1. Variedades

Definición 5.1. Sean U, V conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $h : U \to V$. Diremos que h es un **difeomorfismo** si es diferenciable y tiene inversa diferenciable $h^{-1} : V \to U$.

Definición 5.2. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $M \subset \mathbb{R}^n$. El subconjunto M es llamado **variedad de dimensión** k si para cada punto $x \in M$ se cumple que:
(M) Existen un conjunto abierto U que contiene a x, un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

$$\begin{aligned} h(U \cap M) =& V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}) \\ =& \{y \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}. \end{aligned}$$

donde $\{0\}_{n-k}$ denota al conjunto cuyo único elemento es el vector nulo de $\mathbb{R}^{n-k}$. Si $k = n$, se denotará a $\mathbb{R}^n \times \{0\}_0$ como $\mathbb{R}^n$. Cuando $n = 0$, se tendrá que $\mathbb{R}^0 = \{0\}_0$.

Ejemplo 5.1. $M = \{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión 0 de $\mathbb{R}^n$.
Debido a que $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe algún abierto U tal que $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $h : U \to \mathbb{R}^n$ dada como sigue,

$$h(x) = x - x_0.$$

Primero se demostrará que h es continuamente diferenciable en x_0 y posteriormente se demostrará que es un difeomorfismo.
Tenemos que,

$$D_j h_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j h_i(x)$ existe para toda $x \in U$, además, dado que $D_j h_i(x)$ es constante, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, se sigue que es continua en x_0, por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que h es continuamente diferenciable en x_0. Por otro lado,

$$h(x) = x - x_0 = (x_1 - (x_0)_1, ..., x_n - (x_0)_n),$$

luego,

$$h'(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica que $det(h'(x_0)) = 1 \neq 0$. Con lo anterior visto y por **Teorema 1.12**, existen conjuntos abiertos $V, W \subset \mathbb{R}^n$ tales que $x_0 \in V$, $h(x_0) \in W$ y $h : V \to W$ tiene inversa continua y diferenciable $h^{-1} : W \to V$, en otras palabras, h es un difeomorfismo, así,

$$\begin{aligned} h(V \cap M) =& h(V \cap \{x_0\}) \\ =& h(\{x_0\}) \\ =& \{h(x_0)\} \\ =& \{0\}_n \subset W, \end{aligned}$$

adicionalmente, $\{0\}_n = \{0\}_0 \times \{0\}_n = \mathbb{R}^0 \times \{0\}_n$, así, $h(V \cap M) \subset W \cap (\mathbb{R}^0 \times \{0\}_n)$. Sea $z \in W \cap (\mathbb{R}^0 \times \{0\}_n)$, luego, $h^{-1}(z) \in V$, debido a que h es sobreyectiva y $z = 0$, se concluye que $h^{-1}(z) = x_0$, con esto, $h^{-1}(z) \in V \cap M$, lo que implica que $z \in h(V \cap M)$, así, $W \cap (\mathbb{R}^0 \times \{0\}_n) \subset h(V \cap M)$. Con esto,

$$h(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^0 \times \{0\}_n).$$

Con lo cual, M es una variedad de dimensión 0 en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.2. Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión n en $\mathbb{R}^n$.

Sean un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A$, luego, existe algún $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$. Definamos a $h : B(x_0, r) \to B(0, 1)$ dada por,

$$h(x) = \frac{x - x_0}{r}.$$

Se demostrará que h es invertible y que es un difeomorfismo. Sean $y, z \in B(x_0, r)$, supongamos que $h(z) = h(y)$, es decir,

$$\frac{z - x_0}{r} = \frac{y - x_0}{r},$$

lo que implica que $z - x_0 = y - x_0$, y por ende, $z = y$, con esto, h es inyectiva. Sea ahora $z \in B(0, 1)$, esto implica que $\|z\| < 1$, así,

$$\begin{aligned} \|x_0 - (rz + x_0)\| =& \|x_0 - rz - x_0\| \\ =& \| - rz\| \\ =& r\|z\| \\ <& r \cdot 1 \\ =& r, \end{aligned}$$

con esto, $rz + x_0 \in B(x_0, r)$, por consiguiente,

$$\begin{aligned} h(rz + x_0) =& \frac{rz + x_0 - x_0}{r} \\ =& \frac{rz}{r} \\ =& z, \end{aligned}$$

con esto se concluye que h es sobreyectiva. Así, h es biyectiva, por lo tanto, h es invertible. Tenemos que, $h(x) = (\frac{x_1 - (x_0)_1}{r}, ..., \frac{x_n - (x_0)_n}{r})$, luego

$$D_j h_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j h_i(x)$ existe para toda $x \in B(x_0, r)$, además, dado que $D_j h_i(x)$ es constante, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, se sigue que es continua en x', para todo $x' \in B(x_0, r)$, por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que h es continuamente diferenciable, análogamente, $h^{-1}(y) = ry + x_0 = (ry_1 + (x_0)_1, ..., ry_n + (x_0)_n)$, luego,

$$D_j(h^{-1})_i(y) = \begin{cases} r, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si otro caso,} \end{cases}$$

así, existe $D_j(h^{-1})_i(y)$, para todo $y \in B(0,1)$, además, dado que para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $D_j(h^{-1})_i(x)$ es constante, se sigue que es continua en y', para todo $y' \in B(0,1)$, por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que h^{-1} es continuamente diferenciable, y por ende, h y h^{-1} son diferenciables y por ende h es un difeomorfismo, además,

$$\begin{aligned} h(B(x_0, r) \cap A) =& h(B(x_0, r)) \\ =& B(0,1) \\ =& B(0,1) \cap \mathbb{R}^n \\ =& B(0,1) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}_0). \end{aligned}$$

Se concluye que A es una variedad de dimensión n de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.3. $M = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ es una variedad de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$.
Sea $(x,x) \in M$, luego, existe algún abierto U tal que $(x,x) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Sea $h : U \to \mathbb{R}^2$ dada como sigue,

$$h(x,y) = (x, y - x).$$

Primero se demostrará que h es continuamente diferenciable en (x,x) y posteriormente se demostrará que es un difeomorfismo.
Tenemos que,

$$D_j h_i(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si } i = 2 \text{ y } j = 1, \\ 0, & \text{si otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j h_i(x)$ existe para toda $x \in U$, además, dado que $D_j h_i$ es constante, para todo $i, j \in \{1, 2\}$, se sigue que es continua en (x', y'), para todo $(x', y') \in U$, por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que h es continuamente diferenciable en (x, x). Por otro lado,

$$h'(x, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

así, $det(h'(x, x)) = 1 \neq 0$. Con lo anterior y por **Teorema 1.12**, existen conjuntos abiertos $V, W \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(x, x) \in V$, $h(x, x) = (x, 0) \in W$ y $h : V \to W$ tiene inversa continua y diferenciable $h^{-1} : W \to V$, en otras palabras, h es un difeomorfismo, así,

$$\begin{aligned} h(V \cap M) =& h(\{(z, z) : z \in \mathbb{R} \wedge (z, z) \in V\}) \\ =& \{h(z, z) : z \in \mathbb{R} \wedge (z, z) \in V\} \\ =& \{(z, 0) : (z, 0) \in W \wedge z \in \mathbb{R}\} \\ \subset& W \cap (\mathbb{R} \times \{0\}_1). \end{aligned}$$

Sea $(z, 0) \in W \cap (\mathbb{R} \times \{0\}_1)$, luego, $h^{-1}(z, 0) \in V$, debido a que h es sobreyectiva y $z - z = 0$, se concluye que $h^{-1}(z, 0) = (z, z)$, con esto, $h^{-1}(z, 0) \in V \cap M$, luego, $(z, 0) \in h(V \cap M)$, así,

$$W \cap (\mathbb{R} \times \{0\}_1) \subset h(V \cap M).$$

Con esto,

$$h(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R} \times \{0\}_1).$$

Con lo cual, M es una variedad de dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $g : A \to \mathbb{R}^p$ una función diferenciable tal que $g'(x)$ tiene rango p siempre que $g(x) = (0, ..., 0)$, con $n, p \in \mathbb{N}$ y $p \leq n$, entonces, $g^{-1}(0)$ es una variedad de dimensión $(n - p)$ en $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $g : A \to \mathbb{R}^p$ una función diferenciable. Sea $x \in g^{-1}(0)$, por hipótesis se cumple que $g'(x)$ tiene rango p, así, por el **Teorema 1.13**, existen conjuntos abiertos $U, W \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x y una función diferenciable $h : W \to U$ con inversa f diferenciable (es decir, f es un difeomorfismo) tal que

$$\begin{aligned}(g \circ h)(y) =&(g \circ h)(y_1, ..., y_n)\\ =&(y_{n-p+1}, ..., y_n),\end{aligned}$$

para todo $y \in W$. Sea $z \in U \cap g^{-1}(0)$, luego, $g(z) = 0$ y $f(z) \in W$, así,

$$0 = g(z) = g(h(f(z))) = (g \circ h)(f(z)) =(f(z)_{n-p+1}, ..., f(z)_n),$$

por ende, $f(z)_i = 0$, para todo $i \in \{n-p+1, ..., n\}$. Con esto,

$$f(z) \in W \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}_p),$$

lo cual implica la siguiente contención,

$$f(U \cap g^{-1}(0)) \subset W \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}_p).$$

Sea ahora $z \in W \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}_p)$, luego,

$$h(z) = f^{-1}(z) \in U,$$

por otro lado,

$$g(f^{-1}(z)) = g(h(z)) = (g \circ h)(z) =(z_{n-p+1}, ..., z_n) = 0,$$

así, $f^{-1}(z) \in g^{-1}(0)$, con esto, $f^{-1}(z) \in U \cap g^{-1}(0)$ lo que significa que z es un elemento de $f(U \cap g^{-1}(0))$, así, $W \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}_p) \subset f(U \cap g^{-1}(0))$, con lo que implica la siguiente igualdad: $f(U \cap g^{-1}(0)) = W \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}_p)$. Con esto, se concluye que $g^{-1}(0)$ es una variedad de dimensión $n-p$ en $\mathbb{R}^n$. □

5.2. Sistema coordenado

Teorema 5.2. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión k si y solo si para cada $x \in M$ las siguientes condiciones coordenadas se cumplen:
(C) Existe un conjunto abierto U que contiene a x, un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^k$, y una función inyectiva y diferenciable $f : W \to \mathbb{R}^n$ tales que,

1) $f(W) = M \cap U$.

2) $f'(y)$ tiene rango k para cada $y \in W$.

3) $f^{-1} : f(W) \to W$ es continua.

f es llamada **sistema coordenado alrededor de** x.

Demostración:
Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión k, luego, para cada $x \in M$ existen un conjunto abierto U que contiene a x, un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

$$\begin{aligned} h(U \cap M) =& V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}) \\ =& \{y \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}. \end{aligned}$$

Sea $W = \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in h(M)\}$, notemos que 0 denota al vector nulo de $\mathbb{R}^{n-k}$, y definamos $f : W \to \mathbb{R}^n$ como sigue, $f(a) = h^{-1}(a, 0)$. En este caso 0 denota al vector nulo de $\mathbb{R}^{n-k}$. Notemos que $f^{-1} = h$, dado que h es una función diferenciable, entonces es continua y por lo tanto, también f^{-1} lo es, con esto, se cumple 3). Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(W) =& \{f(a) : a \in \mathbb{R}^k \wedge (a, 0) \in h(M)\} \\ =& \{h^{-1}(a, 0) : (a, 0) \in h(M) \subset V\} \\ =& M \cap U. \end{aligned}$$

Se cumple 1). Sea $H : U \to \mathbb{R}^k$ definida como sigue,

$$H(z) = (h_1(z), ..., h_k(z)),$$

dado $y \in W$ se cumple que

$$\begin{aligned} H(f(y)) =& (h_1(f(y)), ..., h_k(f(y))) \\ =& (h_1(h^{-1}(y, 0)), ..., h_k(h^{-1}(y, 0)) \\ =& (y_1, ..., y_k) \\ =& y, \end{aligned}$$

con esto, $(H(f(y)))' = (y)'$, luego, $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$, dado que $f'(y)$ es una

matriz invertible, por **Teorema 1.5**, se concluye que tiene rango k, con esto se cumple 2) y por ende se cumple (C).
Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ se cumple (C). Sea $x \in M$, así, existe un conjunto abierto U que contiene a x, un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^k$, y una función inyectiva y diferenciable $f : W \to \mathbb{R}^n$ tales que,

1) $f(W) = M \cap U$.

2) $f'(y)$ tiene rango k, para cada $y \in W$.

3) $f^{-1} : f(W) \to W$ es continua.

debido a que $x \in U$ y $x \in M$, se cumple que $x \in M \cap U = f(W)$ por 1) de las hipótesis, así, existe algún $y \in W$ tal que $x = f(y)$. Supongamos que la matriz $(D_j f_i(y))$, con $i, j \in \{1, ..., k\}$ tiene determinante diferente de cero y definamos a la función $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ como sigue, $g(a, b) = f(a) + T(b)$, donde $T(b) = (0, b)$, a continuación se demostrará que T es diferenciable, tenemos que para cada$(a', b') \in W \times \mathbb{R}^{n-k}$,

$$D_j T_i(a', b') = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \text{ y } i, j > k, \\ 0, \text{ otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j T_i(x)$ existe para toda $(a', b') \in W \times \mathbb{R}^{n-k}$, además, dado que $D_j T_i$ es constante, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, se sigue que es continua en (a', b'), por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que f es continuamente diferenciable y por ende es diferenciable, luego, g también es diferenciable, además,

$$g'(a, b) = (D_j f_i(a)) + (0, ..., 0, b_1, ..., b_{n-k})',$$

luego,

$$\begin{aligned} det(g'(a, b)) =& det(D_j f_i(a)) + det(0, ..., 0, b_1, ..., b_{n-k})' \\ =& det(D_j f_i(a)) + 0 \\ =& det(D_j f_i(a)) \\ \neq& 0, \end{aligned}$$

por **Teorema 1.12**, existe un conjunto abierto $V_1' \in \mathbb{R}^n$ que contiene a $(y, 0)$ y un conjunto abierto $V_2' \in \mathbb{R}^n$ que contiene a

$$g(y,0) = f(y) + (0,0) = f(y) = x,$$

tal que $g : V_1' \to V_2'$ tiene inversa diferenciable $g^{-1} : V_2' \to V_1'$, con lo cual podemos decir que g y g^{-1} son difeomorfismos.

Sea $a' \in \{a : (a,0) \in V_1'\} \subset \mathbb{R}^k$, luego $(a',0) \in V_1'$ dado que V_1' es abierto existe un rectángulo abierto R tal que $a' \in R \subset V_1'$, notemos que a R lo podemos ver como el producto cartesiano de un rectángulo $R_1 \subset \mathbb{R}^k$ con un rectángulo $R_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, luego, por **Teorema 1.6**, R_1 es abierto, además, $a' \in R_1$, por otro lado, dado $r \in R_1$ se sigue que $(r,0) \in V_1'$, así, $r \in \{a : (a,0) \in V_1'\}$ y por ende $R_1 \subset \{a : (a,0) \in V_1'\}$, es decir, $\{a : (a,0) \in V_1'\}$ es un conjunto abierto, con esto, y debido a que $f^{-1} : f(W) \to W \subset \mathbb{R}^k$ es continua, por **Teorema 1.7**, se cumple que:

$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1}(\{a : (a,0) \in V_1'\}) &= \{f(a) : (a,0) \in V_1'\} \\ &= V \cap f(W), \end{aligned} \tag{5.1}$$

para algún conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Como $(y,0) \in V_1'$ se sigue que $x = f(y) \in \{f(a) : (a,0) \in V_1'\}$ y por ende $x \in V$.

Sean $V_2 = V_2' \cap V \cap U$ y $V_1 = g^{-1}(V_2)$, debido a que V_2', V y U son conjuntos abiertos que además contienen a x, V_2 es un conjunto abierto que contiene a x. Además, dado que $V_2 = V_2' \cap V \cap U$, se sigue que $V_2 \subset V_2'$, con esto, $g^{-1}(V_2) \subset g^{-1}(V_2')$, en otras palabras, $V_1 \subset V_1'$, con esto, y aplicando (5.1) y 1) se tiene que:

$$\begin{aligned} V_2 \cap M &= V_2' \cap V \cap U \cap M \\ &= V_2' \cap V \cap U \cap V \cap U \cap M \\ &= (V_2' \cap V \cap U) \cap V \cap (U \cap M) \\ &= (V_2' \cap V \cap U) \cap V \cap f(W) \\ &= (V_2' \cap V \cap U) \cap \{f(a) : (a,0) \in V_1'\} \\ &= (V_2' \cap V \cap U) \cap \{g(a,0) : (a,0) \in V_1'\} \\ &= \{g(a,0) \in V_2' \cap V \cap U : (a,0) \in V_1'\} \\ &= \{g(a,0) : (a,0) \in V_1' \cap g^{-1}(V_2' \cap V \cap U)\} \\ &= \{g(a,0) : (a,0) \in V_1' \cap g^{-1}(V_2)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\{g(a,0) : (a,0) \in V_1' \cap V_1\} \\
&=\{g(a,0) : (a,0) \in V_1\} \\
&=g(\{(a,0) \in V_1\}).
\end{aligned}
$$

De donde, $g^{-1}(V_2 \cap M) = \{(a,0) \in V_1\} = V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$. Debido a que V_1 y V_2 son conjuntos abiertos y g^{-1} es un difeomorfismo, se concluye que M es una variedad de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. □

5.3. Variedades con frontera

Definición 5.3. El **semiespacio** $H^k \subset \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, se define como

$$\{x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}.$$

Definición 5.4. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una **variedad con frontera de dimensión** k si para todo $x \in M$ se cumple la condición (M) o si se cumple la siguiente condición:
(M') Existe un conjunto abierto U que contiene a x, un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^n$, y un difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

$$
\begin{aligned}
h(U \cap M) =& V \cap (H^k \times \{0\}_{n-k}) \\
&=\{y \in V : y_k \geq 0 \wedge y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\},
\end{aligned}
$$

y la k-ésima componente de $h(x)$ es igual a 0.

Ejemplo 5.4. $M = H^k \times \{0\}_{n-k}$ es una variedad con frontera de dimensión k en $\mathbb{R}^n$.
Sea $x \in M$, luego, existe algún conjunto abierto U que contiene a x, y consideremos a $I : U \to U$ como la función identidad, claramente I es un difeomorfismo, luego,

$$
\begin{aligned}
I(U \cap M) =& U \cap M \\
&=\{y \in U : y_k \geq 0 \wedge y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\},
\end{aligned}
$$

si $I(x)_k = x_k > 0$, entonces se cumple la condición (M) para x, en caso contrario se estaría cumpliendo la condición (M'), así, M es una variedad con frontera de dimensión k en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a < b$. $M = \{(x, y) : x \in [a, b] \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$ es una variedad con frontera de dimensión 2 en $\mathbb{R}^2$.
Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (y, \alpha(x - \beta))$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Dado que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe algún abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in U$, a continuación se demostrará que f es un difeomorfismo.
Tenemos que,

$$D_j f_i(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } i = j, \\ \alpha, \text{ si } i = 2, j = 1, \\ 1, \text{ otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j f_i(x)$ existe para toda $(x, y) \in U$, además, dado que $D_j f_i(x)$ es constante, para todo $i, j \in \{1, 2\}$, se sigue que es continua en (x_0, y_0), por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que f es continuamente diferenciable en (x_0, y_0), así, f es diferenciable. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, luego, $(y_1, \alpha(x_1 - \beta)) = (y_2, \alpha(x_2 - \beta))$, lo que implica que $y_1 = y_2$ y $x_1 = x_2$, es decir, f es una función inyectiva. Por otro lado, tomando $(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, se sigue que $\frac{y_3}{\alpha} + \beta \in \mathbb{R}$ y por ende $(\frac{y_3}{\alpha} + \beta, x_3) \in \mathbb{R}^2$, con esto, $f(\frac{y_3}{\alpha} + \beta, x_3) = (x_3, y_3)$, lo que implica que f es sobreyectiva y además es invertible. Tenemos que $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada como sigue,

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{\alpha} + \beta, x \right).$$

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que existe algún abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in U$, a continuación se demostrará que f^{-1} es diferenciable.
Tenemos que,

$$D_j(f^{-1})_i(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } i = j, \\ \frac{1}{\alpha}, \text{ si } i = 1, j = 2, \\ 1, \text{ otro caso,} \end{cases}$$

luego, $D_j(f^{-1})_i(x)$ existe para toda $(x, y) \in U$, además, dado que $D_j(f^{-1})_i(x)$ es constante, para todo $i, j \in \{1, 2\}$, se sigue que es continua en (x_0, y_0), por **Teorema 1.11**, podemos asegurar que f^{-1} es continuamente diferenciable en (x_0, y_0), así, f^{-1} es diferenciable. Debido a que tanto f como f^{-1} son diferenciables se tiene que f es un difeomorfismo. Sea $(x', y') \in M$.

- Caso 1. $x' \in (a, b)$. Tomemos $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, luego, $f(x, y) = (y, x)$. Sea $R = (\frac{x'+a}{2}, \frac{b+x'}{2}) \times (y'-1, y'+1)$, notemos que $(x', y') \in R \subset M$, además,

$$f(R) = (y'-1, y'+1) \times (\frac{x'+a}{2}, \frac{b+x'}{2}),$$

notemos que $f(R)$ es un rectángulo abierto, aunado a lo anterior, se tiene que

$$f(R \cap M) = f(R) = f(R) \cap \mathbb{R}^2 = f(R) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}_0).$$

Se cumple la condición M para (x', y').

- Caso 2. $x' = a$. Tomemos $\alpha = 1$ y $\beta = a$, luego, $f(x, y) = (y, x - a)$. Sea $R = (\frac{x'}{2}, \frac{b+x'}{2}) \times (y'-1, y'+1)$, notemos que $(x', y') \in R \subset M$, además,

$$f(R) = (y'-1, y'+1) \times (\frac{x'}{2} - a, \frac{b+x'}{2} - a),$$

notemos que $f(R)$ es un rectángulo abierto. Sea $(x_0, y_0) \in R \cap M$, luego, $f(x_0, y_0) \in f(R)$, además, como $x_0 \geq a$, se sigue que $x_0 - a \geq 0$, así, $f(x_0, y_0) = (y_0, x_0 - a) \in H^2$, con esto,

$$f(R \cap M) \subset f(R) \cap H^2.$$

Sea ahora $(x_0, y_0) \in f(R) \cap H^2$, luego, $f^{-1}(x_0, y_0) \in R$, aunado a esto, $0 \leq y_0 \leq b - a$, así, $a \leq y_0 + a \leq b$, con esto, $f^{-1}(x_0, y_0) = (y_0 + a, x_0) \in M$, así, $f^{-1}(x_0, y_0) \in R \cap M$, y por ende, $(x_0, y_0) \in f(R \cap M)$, con lo cual se concluye que $f(R) \cap H^2 \subset f(R \cap M)$.
Así, $f(R \cap M) = f(R) \cap H^2 = f(R) \cap (H^2 \times \{0\}_0)$.
Por otro lado, $f(x', y') = (y', x' - a) = (y', a - a) = (y', 0)$, se cumple la condición M' para (x', y').

- Caso 3. $x' = b$. Este caso es análogo al caso 2, solo basta tomar $\alpha = -1$ y $\beta = b$.

Por lo tanto, se concluye que M es una variedad con frontera de dimensión 2 de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 5.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : A \to \mathbb{R}^n$. Si A es abierto y f es continuamente diferenciable, inyectiva y cumple que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in A$, entonces, $f(A)$ es un conjunto abierto y que $f^{-1} : f(A) \to A$ es diferenciable. Además, si $B \subset A$ es abierto, entonces $f(B)$ también es abierto.

Demostración: Notemos que se cumplen todas la hipótesis del **Teorema 1.12**. Sea $y \in f(A)$, así, existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$, luego, por el **Teorema 1.12** y debido a que el dominio de f es A, existen abiertos V, W tales que:

$$y \in W \subset f(A) \text{ y } x \in V \subset A,$$

además, f tiene inversa $(f^{-1})|_W : W \to V$ que es continua y diferenciable. Por otro lado, dado que f es inyectiva, $f^{-1} : f(A) \to A$ existe, y por ende

$$f^{-1}(z) = (f^{-1})|_W(z), \text{ para todo } z \in W,$$

en especial cuando $z = y$ se sigue que f^{-1} es continua y diferencia en y, y debido a que y es arbitrario, se concluye que f^{-1} es diferenciable en $f(A)$. Además, ya que W es abierto, existe algún rectángulo abierto R tal que $y \in R \subset W \subset f(A)$, y como y es un elemento arbitrario se concluye que $f(A)$ es un conjunto abierto. La demostración de que $f(B)$ es abierto es análoga. $\square$

Proposición 5.2. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad. Dado $x \in M$, las condiciones (M) y (M') no se pueden cumplir a la vez para x.

Demostración: Supongamos que (M) y (M') se cumplen a la vez para x. Luego, existen $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y difeomorfismos $h_1 : U_1 \to V_1, h_2 : U_2 \to V_2$ tales que

$$\begin{aligned} h_1(U_1 \cap M) =& V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}), \\ h_2(U_2 \cap M) =& V_2 \cap (H^k \times \{0\}_{n-k}). \end{aligned}$$

Dado que h_2 y h_1 son difeomorfismo, se sigue que h_1^{-1} existe y también es un difeomorfismo, con esto, $h_2 \circ h_1^{-1} : V_1 \to V_2$ existe y también es un difeomorfismo. Por otro lado, notemos que $h_1(x) \in V_1$, luego,

$$(h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(x)))_i =h_2(x)_i = 0,$$

para todo $i \in \{k, ..., n\}$, además, debido a que U_1 y U_2 son conjuntos abiertos, entonces $U_1 \cap U_2$ también es abierto, así, como $x \in U_1 \cap U_2$, existe algún rectángulo abierto R tal que $x \in R \subset U_1 \cap U_2$.
A continuación se demostrará que $h(R \cap M) = h(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$.
Sea $z \in R \cap M \subset U_1 \cap M$, esto implica que $h_1(z) \in V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, así,

$$h_1(z)_l = 0, \text{ para todo } l \in \{k+1, ..., n\},$$

además, $h_1(z) \in h_1(R)$, así, $h_1(z) \in h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$,lo que significa que $h_1(R \cap M) \in h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$.
Sea ahora $y \in h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$, luego, $y \in V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$, con esto, $h_1^{-1}(y) \in U_1 \cap M$, aunado a lo anterior, debido a que $y \in h_1(R)$ se sigue que $h_1^{-1}(y) \in R$, con lo cual, $h_1^{-1}(y) \in R \cap U_1 \cap M = R \cap M$, así $y \in h(R \cap M)$, de aquí se concluye que,

$$h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}) \subset h_1(R \cap M).$$

Con lo cual se concluye que $h_1(R \cap M) = h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$.
Definamos ahora al conjunto V' como sigue, $V' = \{v \in \mathbb{R}^k : (v, 0) \in h_1(R)\}$, en este caso 0 denota al vector nulo de $\mathbb{R}^{n-k}$, debido a que $h_1(R)$ es abierto, podemos afirmar por la demostración del **Teorema 5.2**, que V' también es abierto. Notemos que $h_1(x) \in h_1(R) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k})$, luego,

$$x' = (h_1(x)_1, ..., h_1(x)_k) \in V',$$

además, dado $(v, 0) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}$, se sigue que,

$$h_1^{-1}(v, 0) \subset R \cap M \subset U_1 \cap U_2 \cap M \subset U_2 \cap M,$$

lo que implica que:

$$h_2 \circ h_1^{-1}(v, 0) = h_2(h_1^{-1}(v, 0)) \in h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap (H^k \times \{0\}_{n-k}).$$

Sea $f : V' \to \mathbb{R}^k$ definida por $f(v) = v'$, donde $h_2(h_1^{-1}(v, 0)) = (v', 0)$, dado que $(v', 0) \in H^k \times \{0\}_{n-k}$, se sigue que $v' \in H^k$, en otras palabras, $f(V') \subset H^k$. Debido a que $h_2 \circ h_1^{-1}$ es un difeomorfismo se cumple lo siguiente,

1) $h_2 \circ h_1^{-1}$ es diferenciable y por ende es continuamente diferenciable.

2) $(h_2 \circ h_1^{-1})^{-1}$ existe y es diferenciable en $h_2 \circ h_1^{-1}(z)$, para todo $z \in V_1$.

Tomando 1) se sigue que las funciones $D_j(h_2 \circ h_1^{-1})_i$ existen y son continuas en z, para todo $z \in V_1$, para todo $j, i \in \{1, ..., n\}$, así, como $D_j f_i = D_j(h_2 \circ h_1^{-1})_i$, para todo $j, i \in \{1, ..., k\}$, se tiene que f es continuamente diferenciable. Por 2) tenemos que $h_2 \circ h_1^{-1}$ es inyectiva, luego, cada función $(h_2 \circ h_1^{-1})_i$ también es inyectiva para todo $i \in \{1, ..., n\}$, de aquí se sigue que f es inyectiva. Con esto se tiene que también es invertible. Por último, como $(h_2 \circ h_1^{-1})^{-1}$ es diferenciable, es continuamente diferenciable y por ende f^{-1} también lo es, así, f^{-1} es diferenciable. Dado que f cumple las hipótesis del **Corolario 1.2**, se sigue que $det(f'(a)) \neq 0$, para todo $a \in V'$, con esto, f cumple las hipótesis de la **Proposición 5.1**, así, como V' es abierto, se concluye que $f(V')$ es abierto.
Recordemos que $x' \in V'$, luego,

$$\begin{aligned} f(x') =& ((h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(x))_1, ..., (h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(x))_k) \\ =& (h_2(x)_1, ..., h_2(x)_k) \\ =& (h_2(x)_1, ..., h_2(x)_{k-1}, 0), \end{aligned}$$

además, como $f(x') \in f(V')$ y este último es un conjunto abierto, existe algún rectángulo abierto R' tal que $f(x') \in R' \subset f(V')$, donde a R' lo podemos ver de la siguiente manera,

$$R' = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k),$$

luego, debido a que $h_2(x)_k = 0$, se sigue que $a_k < 0$, así, sea $y \in R'$ tal que $y_k = \frac{a_k}{2} < 0$, con esto, $y \notin H^k$, pero, $y \in f(V') \subset H^k$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, las condiciones M y M' no se pueden cumplir a la vez para un mismo x. □

5.4. Frontera de una variedad

Definición 5.5. Sea M una variedad. El conjunto de todos los puntos $x \in M$ para los cuales se cumple la condición (M') se llama **frontera** de M y se denota como ∂M.

Proposición 5.3. Si M es una variedad de dimensión k con frontera, entonces ∂M es una variedad de dimensión $k - 1$.

Capítulo 6

Formas diferenciales sobre variedades

En este capítulo se retomarán definiciones presentadas anteriormente, ahora reformuladas en el contexto de las variedades. Asimismo, se presentará también una versión del **Teorema de Stokes** en este contexto.

6.1. Espacio tangente de una variedad

Definición 6.1. Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si T es sobreyectiva e inyectiva, diremos que T es un **isomorfismo** (Hoffman & Kunze, 1971).

Sean M una variedad de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, $x \in M$ y $f : W \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ un sistema coordenado alrededor de $x = f(a)$, con $a \in W$. Dado que $f'(a)$ tiene rango k, la transformación lineal $f_* : \mathbb{R}^k_a \to \mathbb{R}^n_x$ es inyectiva, con esto, $f_*^{-1} : f_*(\mathbb{R}^k_a) \to \mathbb{R}^k_a$, existe y es inyectiva, cabe recalcar que f_*^{-1} no es la inversa de f_*, además, $f_*(\mathbb{R}^k_a)$ es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n_x$. Sea $g : V \to \mathbb{R}^n$ otro sistema coordenado con $x = g(b)$, luego, $f_*^{-1} \circ g_* : \mathbb{R}^k_b \to \mathbb{R}^k_a$ es una transformación lineal inyectiva, en otras palabras, $f_*^{-1} \circ g_*$ es un isomorfismo, así,

$$\begin{aligned} g_*(\mathbb{R}^k_b) =& f_*(f_*^{-1}(g_*(\mathbb{R}^k_b))) \\ =& f_*((f_*^{-1} \circ g_*)(\mathbb{R}^k_b)) \\ =& f_*(\mathbb{R}^k_a). \end{aligned}$$

Con esto, el subespacio $f_*(\mathbb{R}^k_a)$ no depende del sistema coordenado f, además, tiene dimensión k.

Definición 6.2. Sean M una variedad de dimensión k, $x \in M$ y f el sistema coordenado alrededor de x. El subespacio $f_*(\mathbb{R}^k_a)$ es denotado como M_x y es llamado **espacio tangente de M en x**.

Ejemplo 6.1. Consideremos a la variedad M de dimensión 1 y al difeomorfismo h dados en el **Ejemplo 5.3**. Luego, dado $(x,x) \in M$ y basándonos por la demostración del **Teorema 5.2**, sabemos que $f : W \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(z) = h^{-1}(z,0) = (z,z),$$

es un sistema coordenado alrededor de (x,x), donde $W = \{z \in \mathbb{R} : (z,0) \in h(M)\}$. Notemos que f es una transformación lineal, con esto, $Df(z) = f$. Además,

$$h(x,x) = (x, x - x) = (x,0) \in h(M),$$

es decir, $x \in W$. Consideremos ahora al espacio tangente $\mathbb{R}$ en x y a $v_x \in \mathbb{R}_x$, luego,

$$\begin{aligned} f_*(v_x) =& (Df(x)(v))_{f(x)} \\ =& f(v)_{(x,x)} \\ =& (v,v)_{(x,x)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2. Consideremos a la circunferencia $S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Primero demostraremos que S es una variedad de dimensión 1 y posteriormente encontraremos al espacio tangente de S dado algún x. Sean $x \in S \backslash \{(1,0)\}$ y $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, así, existe algún $t \in (0, 2\pi)$ tal que $f(t) = x$, para poder demostrar que S es una variedad se demostrará que f es un sistema coordenado alrededor de x.

- Inyectividad y diferenciabilidad de f.
  Supongamos que existen $a, b \in (0, 2\pi)$ tales que $f(a) = f(b)$, así,

$$\cos(a) = \cos(b) \text{ y } \operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}(b),$$

luego,

$$\begin{aligned}\cos(a-b) =& \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\\ =& \cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a)\\ =& 1,\end{aligned}$$

con lo cual se tiene que $a - b = \arccos(1) = 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$, dado que $0 < a, b < 2\pi$, se sigue que $-2\pi < -a < 0$, así, $-2\pi < b - a < 2\pi$, lo que implica que el único valor posible para k es 0 y por ende $a - b = 0$, de donde se concluye que $a = b$.
Así, f es una función inyectiva en el intervalo $(0, 2\pi)$ y por ende en cualquier subintervalo. Por otro lado, sea $c \in (0, 2\pi)$, con esto,

$$D_1 f_1(c) = -\operatorname{sen}(c),\ D_1 f_2(c) = \cos(c),$$

con lo cual, las derivadas parciales de f existen en $(0, 2\pi)$ y son continuas en c, así, f es continuamente diferenciable y por ende es diferenciable.

- Sea $(x_1, x_2) \in S\backslash\{(1, 0)\} = f(0, 2\pi)$, luego, existe algún $t \in (0, 2\pi)$ tal que $x = f(t)$, tomemos a $d = \min\{t, 2\pi - t\}$, con esto, podemos definir al conjunto abierto $U = (t - \frac{d}{2}, t + \frac{d}{2}) \subset \mathbb{R}$ que contiene a t pero no a 0 o 2π. Sean ahora $(x'_1, x'_2) = f(t + \frac{d}{2})$ y $d' = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$, con esto, $B((x_1, x_2), d')$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ que contiene a x, además, $f(U) = S \cap B(x, d')$.

- Tenemos que,

$$f'(y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix},$$

  debido a que no existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(y) = \operatorname{sen}(y) = 0$, se concluye que $f'(y)$ tiene rango 1.

- Sea $(x_1, x_2) \in S\backslash(1, 0)$. Luego, existe $t \in (0, 2\pi)$ tal que $\cos(t) = x_1$ y $\operatorname{sen}(t) = x_2$. Para poder encontrar el valor exacto de t podemos apoyarnos de la función arctan tal como se explica a continuación,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} = \tan(t),$$

lo que implica que

$$t = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Debido a que $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) = \arctan(\frac{-x_2}{-x_1})$, $\arctan(\frac{-x_2}{x_1}) = \arctan(\frac{x_2}{-x_1})$, se tomará el valor de t de acuerdo al cuadrante al que pertenezcan x_1 y x_2.

1. $x_1, x_2 > 0$, en este caso, $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, luego, como necesitamos que $\cos(t), \mathrm{sen}(t) > 0$, basta tomar $t = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$.
2. $x_1 < 0, x_2 > 0$, en este caso, $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, luego, como necesitamos que $\cos(t) < 0, \mathrm{sen}(t) > 0$, basta tomar $t = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \pi$.
3. $x_1, x_2 < 0$, en este caso, $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, luego, como necesitamos que $\cos(t), \mathrm{sen}(t) < 0$, basta tomar $t = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \pi$.
4. $x_1 > 0, x_2 < 0$, en este caso, $\arctan(\frac{x_2}{x_1}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, luego, como necesitamos que $\cos(t) > 0, \mathrm{sen}(t) < 0$, basta tomar $t = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + 2\pi$.

En el caso $x_1 = 0$ tenemos que $\cos(t) = 0$, esto implica que $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$, con lo cual $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ y $\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$. Otro caso particular es cuando $x_2 = 0$, en este caso se cumple que $\mathrm{sen}(t) = 0$, debido a que $t \in (0, 2\pi)$, se tiene que $t = \pi$. Con esto, sea $h : S \backslash \{(1,0)\} \to (0, 2\pi)$, definida como sigue,

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{si } x_1, x_2 > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x_1 = 0, x_2 = 1, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{si } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ \pi, & \text{si } x_1 = -1, x_2 = 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{si } x_1, x_2 < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } x_1 = 0, x_2 = -1, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + 2\pi, & \text{si } x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

A continuación se comprobará que $h = f^{-1}$. Primero se demostrará que $f \circ h = i$. Sea $(x_1, x_2) \in S \backslash \{(1,0)\}$, recordemos que $\sqrt{x_2^2 + x_1^2} = 1$. Para este propósito, se hará uso de las distintas propiedades trigonométricas que se muestran en la **Sección 1.9**.

- Caso $x_1, x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})) \\ =& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})), \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))) \\ =& \left(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}, \frac{|x_1|x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\right) \\ =& \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}, \frac{x_1x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\right) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

- Caso $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\tfrac{\pi}{2}) \\ =& (\cos(\tfrac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2})) \\ =& (0,1) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

- Caso $x_1 < 0, x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})+\pi) \\ =& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})+\pi), \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})+\pi)) \\ =& (-\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})), -\operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))) \\ =& \left(-\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}, \frac{-|x_1|x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\right) \\ =& \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}, \frac{x_1x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\right) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

- Caso $x_1 = -1, x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\pi) \\ =& (\cos(\pi)), \operatorname{sen}(\arctan(\pi)) \\ =& (-1,0) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

- Caso $x_1, x_2 < 0$. Es análogo al caso $x_1 < 0, x_2 > 0$.
- Caso $x_1 = 0, x_2 = -1$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\tfrac{3\pi}{2}) \\ =& (\cos(\tfrac{3\pi}{2}), \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2})) \\ =& (0,-1) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

- Caso $x_1 > 0, x_2 < 0$.

$$\begin{aligned} f(h(x_1,x_2)) =& f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi) \\ =& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi), \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi)) \\ =& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})), \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))) \\ =& \left(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}}, \frac{|x_1| x_2}{x_1\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \right) \\ =& \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}}, \frac{x_1 x_2}{x_1\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \right) \\ =& (x_1,x_2). \end{aligned}$$

Ahora se demostrará que $h \circ f = i$. Sea $t \in (0, 2\pi)$.

- Caso $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Notemos que $\cos(t), \operatorname{sen}(t) > 0$, así,

$$\begin{aligned} h(f(t)) =& h(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \\ =& \arctan(\tfrac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}) \\ =& \arctan(\tan(t)) \\ =& t. \end{aligned}$$

- Caso $t = \frac{\pi}{2}$. Notemos que $\cos(t) = 0, \operatorname{sen}(t) = 1$, así,

$$h(f(t)) = h(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = h(0,1) = t.$$

- Caso $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Notemos que $\cos(t) < 0, \operatorname{sen}(t) > 0$, además, existe $t' \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $t = t' + \pi$, así, $\tan(t) = \tan(t' + \pi) = \tan(t')$, con esto,

$$\begin{aligned} h(f(t)) =& h(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \\ =& \arctan(\tfrac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}) + \pi \\ =& \arctan(\tan(t)) + \pi \\ =& \arctan(\tan(t')) + \pi \\ =& t' + \pi \\ =& t. \end{aligned}$$

- Los casos $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = \pi$ son análogos al caso $t = \frac{\pi}{2}$, de igual manera, los casos cuando $t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ y $t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ son análogos al caso $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Así, $h = f^{-1}$. Por último, se comprobará que h es una función continua, para esto, se comprobará que h es continua en aquellos puntos donde ocurren saltos.

- $x = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1,x_2)\to(0,1)} \arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) =& \tfrac{\pi}{2}, \text{ cuando } x_1, x_2 > 0, \\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,1)} (\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = -\tfrac{\pi}{2} + \pi =& \tfrac{\pi}{2}, \text{ cuando } x_1 < 0, x_2 > 0, \end{aligned}$$

dado que $h(0, 1) = \frac{\pi}{2}$ se sigue que h es continua en x.

- $x = (-1, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1,x_2)\to(-1,0)} (\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = 0 + \pi = \pi, \text{ cuando } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ \lim_{(x_1,x_2)\to(-1,0)} (\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = 0 + \pi =\pi, \text{ cuando } x_1, x_2 < 0, \end{aligned}$$

dado que $h(-1, 0) = \pi$ se sigue que h es continua en x.

- $x = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1,x_2)\to(0,1)} (\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) = \tfrac{\pi}{2} + \pi =& \tfrac{3\pi}{2}, \text{ cuando } x_1, x_2 < 0, \\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,1)} (\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi) = -\tfrac{\pi}{2} + 2\pi =& \tfrac{3\pi}{2}, \text{ cuando } x_1 > 0, x_2 < 0, \end{aligned}$$

dado que $h(0, -1) = \frac{3\pi}{2}$ se sigue que h es continua en x, con cual se tiene que $h = f^{-1}$ es continua en $S\backslash\{(1,0)\}$, más aún, es continua en $f(U)$, donde U ya se había definido previamente, y por ende se concluye que f es un sistema coordenado.

En el caso $x = (1,0)$, podemos considerar a $g : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada como

$$g(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t)),$$

cuya demostración de que es un sistema coordenado para todo $x \in S\backslash\{(-1,0)\}$ es análoga a la demostración de f.
Por otro lado, sea $x \in S\backslash\{(1,0)\}$, así, existe $t \in (0, 2\pi)$ tal que $x = f(t)$ y consideremos al espacio tangente $\mathbb{R}$ en t y a $v_t \in \mathbb{R}_t$, luego,

$$\begin{aligned} f_*(v_t) =& (Df(t)(v))_{f(t)} \\ =& (Df_1(t)(v), Df_2(t)(v))_x \\ =& (-\operatorname{sen}(t) \cdot v, \cos(t) \cdot v)_x \\ =& v(-\operatorname{sen}(t), \cos(t))_x. \end{aligned}$$

Si $x = (1,0)$, entonces, $g_*(v_t) = v(-\cos(t), -\operatorname{sen}(t))_x$.

Ejemplo 6.3. Consideremos ahora a la esfera S^2.
Sean $x \in S^2\backslash\{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\} = S_2^2$ y $f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$f(u, v) = (\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v)),$$

así, existe algún $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ tal que $f(u, v) = x$, para poder demostrar que S es una variedad se demostrará que f es un sistema coordenado alrededor de x.

- Inyectividad y diferenciabilidad de f.
  Supongamos que existen $a = (u_1, v_1), b = (u_2, v_2) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ tales que, $f(a) = f(b)$, así,

  1) $\cos(u_1)\operatorname{sen}(v_1) = \cos(u_2)\operatorname{sen}(v_2)$.

  2) $\operatorname{sen}(u_1), \operatorname{sen}(v_1) = \operatorname{sen}(u_2)\operatorname{sen}(v_2)$.

  3) $\cos(v_1) = \cos(v_2)$.

De 3) se sigue que $v_1 = v_2 + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Dado que $v_1, v_2 \in (0, \pi)$ se sigue que $k = 0$, de aquí, se sigue que $v_1 = v_2$, luego, $\operatorname{sen}(v_1) = \operatorname{sen}(v_2)$, con lo cual podemos ver a 1) y 2) como sigue,

1) $\cos(u_1) = \cos(u_2)$.
2) $\operatorname{sen}(u_1) = \operatorname{sen}(u_2)$.

Por lo visto en el **Ejemplo 6.2**, podemos asegurar que $u_1 = u_2$. Así, f es inyectiva en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Por otro lado, sea $(c, d) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, con esto, las derivadas parciales de $f_1(u, v) = \cos(u)\operatorname{sen}(v)$ son:

$$D_1 f_1(c) = -\operatorname{sen}(c)\operatorname{sen}(d),\ D_2 f_1(c) = \cos(c)\cos(d),$$

las derivadas parciales de $f_2(u, v) = \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)$ son:

$$D_1 f_2(c) = \cos(c)\operatorname{sen}(d),\ D_2 f_2(c) = \operatorname{sen}(c)\cos(d),$$

y las derivadas parciales de $f_3(u, v) = \cos(v)$ son:

$$D_1 f_3(c) = 0,\ D_2 f_3(c) = -\cos(d),$$

con lo cual, las derivadas parciales de f existen en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y son continuas en (c, d), así, f es continuamente diferenciable y por ende es diferenciable.

- Sea $x \in S_2^2$ tal que $x_1, x_2, x_3 > 0$, así, existen algunos $u_0, v_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tales que $x = f(u_0, v_0)$, sean $d_1 = \min\{u_0, \frac{\pi}{2} - u_0\}$ y $d_2 = \min\{v_0, , \frac{\pi}{2} - v_0\}$, luego, los conjuntos $I = (u_0 - \frac{d_1}{2}, u_0 + \frac{d_1}{2})$ y $J = (v_0 - \frac{d_2}{2}, v_0 + \frac{d_2}{2})$ son abiertos en $\mathbb{R}$, con esto, $W = I \times J$ es un conjunto abierto que contiene a x, definamos ahora el siguiente conjunto

$$U = \{(\rho\cos(u)\operatorname{sen}(v), \rho\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \rho\cos(v)) : u \in I, v \in J, \rho > 0\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) =& (\cos(u_0)\operatorname{sen}(v_0), \operatorname{sen}(u_0)\operatorname{sen}(v_0), \cos(v_0)) \\ =& (1 \cdot \cos(u_0)\operatorname{sen}(v_0), 1 \cdot \operatorname{sen}(u_0)\operatorname{sen}(v_0), 1 \cdot \cos(v_0)), \end{aligned}$$

notemos que $\rho = 1 > 0$, asimismo, por la construcción de I y de J, se sigue que $u_0 \in I$ y de $v_0 \in J$, con esto, $f(x) \in U$, lo que induce a la siguiente igualdad:

$$f(W) = S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\} \cap U.$$

Si se toma a x en cualquier otro cuadrante de $\mathbb{R}^3$ se sigue un proceso análogo para encontrar a los abiertos U y W, si $x_3 = 0$ se puede tomar a $J = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, por otro lado, si $x_1 = 0$, se puede tomar a $I = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ cuando $x_2 > 0$ y $I = (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ en caso contrario, por último, si $x_2 = 0$ se toma $I = (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$.

- Tenemos que,

$$f'(y, z) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z) & \cos(y)\cos(z) \\ \cos(y)\operatorname{sen}(z) & \operatorname{sen}(y)\cos(z) \\ 0 & -\cos(z) \end{pmatrix},$$

supongamos que existe $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z) \cdot k &= \cos(y)\operatorname{sen}(z), \\ \cos(y)\cos(z) \cdot k &= \operatorname{sen}(y)\cos(z), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}(y) \cdot k &= \cos(y), \\ \cos(y) \cdot k &= \operatorname{sen}(y), \end{aligned}$$

con lo cual se tiene que $-\operatorname{sen}(y) \cdot k \cdot k = \operatorname{sen}(y)$, así, $k^2 = -1$, lo cual es una contradicción, así, las filas 1 y 2 de $f'(y, z)$ son linealmente independientes, así, $f'(y, z)$ tiene rango 2.

- Sea $(x_1, x_2, x_3) \in S_2^2$. Luego, existe $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ tal que,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v)),$$

de aquí, se tiene que $v = \arccos(x_3)$. Sea

$$h : S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\} \to (0, 2\pi) \times (0, \pi),$$

definida como sigue,

$$h(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1,x_2>0,\\ \left(\frac{\pi}{2},\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1=0,x_2>0,\\ \left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\pi,\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1<0,x_2>0,\\ \left(\pi,\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1<0,x_2=0,\\ \left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\pi,\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1,x_2<0,\\ \left(\frac{3\pi}{2},\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1=0,x_2<0,\\ \left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+2\pi,\arccos(x_3)\right), & \text{si } x_1>0,x_2<0.\end{cases}$$

A continuación se comprobará que $h=f^{-1}$. Primero se demostrará que $f\circ h=i$. Sea $(x_1,x_2,x_3)\in S_2^2$.

- Caso $x_1,x_2>0$.

$$\begin{aligned}f(h(x_1,x_2,x_3)) =&f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}),\arccos(x_3))\\ =&(\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))\operatorname{sen}(\arccos(x_3)),\\ &\operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))\operatorname{sen}(\arccos(x_3)),\cos(\arccos(x_3)))\\ =&\left(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{1-x_3^2},\frac{|x_1|x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{1-x_3^2},x_3\right)\\ =&\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{x_2^2+x_1^2},\frac{x_1x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{x_2^2+x_1^2},x_3\right)\\ =&(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

- Caso $x_1=0,x_2>0$.

$$\begin{aligned}f(h(x_1,x_2,x_3)) =&f(\tfrac{\pi}{2},\arccos(x_3))\\ =&(\cos(\tfrac{\pi}{2})\operatorname{sen}(\arccos(x_3)),\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2})\operatorname{sen}(\arccos(x_3)),\\ &\cos(\arccos(x_3)))\\ =&\left(0\cdot\operatorname{sen}(\arccos(x_3)),1\cdot\sqrt{1-x_3^2},x_3\right)\\ =&\left(0,\sqrt{x_2^2+x_1^2},x_3\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(0, \sqrt{x_2^2}, x_3\right) \\
&=(0, |x_2|, x_3) \\
&=(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
$$

- Caso $x_1 < 0, x_2 > 0$.

$$
\begin{aligned}
f(h(x_1, x_2, x_3)) =& f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi, \arccos(x_3)) \\
=& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + \pi) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \cos(\arccos(x_3))) \\
=& (-\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& -\operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1})) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \cos(\arccos(x_3))) \\
=& \left(-\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \sqrt{1 - x_3^2}, \frac{-|x_1| x_2}{x_1 \sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \sqrt{1 - x_3^2}, x_3\right) \\
=& \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \sqrt{x_2^2 + x_1^2}, \frac{x_1 x_2}{x_1 \sqrt{x_2^2 + x_1^2}} \sqrt{x_2^2 + x_1^2}, x_3\right) \\
=& (x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
$$

- Caso $x_1 < 0, x_2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(h(x_1, x_2, x_3)) =& f(\pi, \arccos(x_3)) \\
=& (\cos(\pi) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \operatorname{sen}(\arctan(\pi)) \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& \cos(\arccos(x_3))) \\
=& (-\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), 0 \cdot \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), x_3) \\
=& \left(-\sqrt{1 - x_3^2}, 0, x_3\right) \\
=& \left(-\sqrt{x_2^2 + x_1^2}, 0, x_3\right) \\
=& \left(-\sqrt{x_1^2}, 0, x_3\right) \\
=& (-|x_1|, 0, x_3) \\
=& (x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
$$

- Caso $x_1, x_2 < 0$. Es análogo al caso $x_1 < 0, x_2 > 0$.

- Caso $x_1 = 0, x_2 < 0$.

$$
\begin{aligned}
f(h(x_1,x_2,x_3)) =& f(\tfrac{3\pi}{2}, \arccos(x_3)) \\
=& (\cos(\tfrac{3\pi}{2})\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2})\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& \cos(\arccos(x_3))) \\
=& \left(0 \cdot \operatorname{sen}(\arccos(x_3)), -1 \cdot \sqrt{1-x_3^2}, x_3\right) \\
=& \left(0, -\sqrt{x_2^2+x_1^2}, x_3\right) \\
=& \left(0, -\sqrt{x_2^2}, x_3\right) \\
=& (0, -|x_2|, x_3) \\
=& (x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
$$

- Caso $x_1 > 0, x_2 < 0$.

$$
\begin{aligned}
f(h(x_1,x_2,x_3)) =& f(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi, \arccos(x_3)) \\
=& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi)\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}) + 2\pi)\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \cos(\arccos(x_3))) \\
=& (\cos(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \\
& \operatorname{sen}(\arctan(\tfrac{x_2}{x_1}))\operatorname{sen}(\arccos(x_3)), \cos(\arccos(x_3))) \\
=& \left(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{1-x_3^2}, \frac{|x_1|x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{1-x_3^2}, x_3\right) \\
=& \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{x_2^2+x_1^2}, \frac{x_1x_2}{x_1\sqrt{x_2^2+x_1^2}}\sqrt{x_2^2+x_1^2}, x_3\right) \\
=& (x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
$$

Ahora se demostrará que $h \circ f = i$. Sea $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

- Caso $u \in (0, \frac{\pi}{2})$. Notemos que $\cos(u), \operatorname{sen}(u) > 0$, así,

$$
\begin{aligned}
h(f(u,v)) =& h(\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v)) \\
=& (\arctan(\tfrac{\cos(u)\operatorname{sen}(v)}{\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)}), \arccos(\cos(v))) \\
=& (\arctan(\tfrac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}), v)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&=(\arctan(\tan(u)), v)\\
&=(u, v).
\end{aligned}$$

- Caso $u = \frac{\pi}{2}$. Notemos que $\cos(u) = 0, \operatorname{sen}(u) = 1 > 0$, así,

$$\begin{aligned}
h(f(u,v)) =&h(\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v))\\
=&h(0, \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v))\\
=&(\tfrac{\pi}{2}, \arccos(v))\\
=&(u, v).
\end{aligned}$$

- Caso $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Notemos que $\cos(u) < 0, \operatorname{sen}(u) > 0$, además, existe $u' \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $u = u' + \pi$, así, $\tan(u) = \tan(u' + \pi) = \tan(u')$, con esto,

$$\begin{aligned}
h(f(u,v)) =&h(\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v))\\
=&(\arctan(\tfrac{\cos(u)\operatorname{sen}(v)}{\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)}) + \pi, \arccos(\cos(v)))\\
=&(\arctan(\tfrac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}) + \pi, v)\\
=&(\arctan(\tan(u)) + \pi, v)\\
=&(\arctan(\tan(u')) + \pi, v)\\
=&(u' + \pi, v)\\
=&(u, v).
\end{aligned}$$

- Los casos $u = \frac{3\pi}{2}$ y $u = \pi$ son análogos al caso $u = \frac{\pi}{2}$, de igual manera, los casos cuando $u \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ y $u \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ son análogos al caso $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Así, $h = f^{-1}$. La demostración de que h es una función continua en el conjunto $S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\}$ es análoga a la demostración hecha en el **Ejemplo 6.2**, esto debido a que h solo presenta saltos respecto a las variables x_1 y x_2 en los mismos valores que la función h definida en el ejemplo ya mencionado. Con esto se concluye que f es un sistema coordenado.

Cuando $x \in \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \leq 0\}$, podemos considerar a la función

$g : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ dada como sigue,

$$g(u, v) = (-\cos(u)\operatorname{sen}(v), -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v)),$$

debido a que $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$ no pertenecen a los conjuntos

$$S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\},$$
$$S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \leq 0\},$$

debemos considerar a una tercera función $j : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definida como sigue,

$$j(u, v) = (\cos(u)\operatorname{sen}(v), \cos(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)),$$

las demostraciones de que las funciones g y j son sistemas coordenados son análogas a la demostración de f.

Por otro lado, sea $x \in S^2 \backslash \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\}$, así, existen $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, \pi)$ tales que $x = f(u, v)$, y consideremos al espacio tangente $\mathbb{R}^2$ en (u, v) y a $w_{(u,v)} \in \mathbb{R}^2_{(u,v)}$, luego,

$$\begin{aligned} f_*(w_{(u,v)}) =& (Df(u, v)(w))_{f(u,v)} \\ =& (Df_1(u, v)(w), Df_2(u, v)(w), Df_3(u, v)(w))_x, \end{aligned}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} Df_1(u, v)(w) =& (-\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), \cos(u)\cos(v)) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ =& -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)w_1 + \cos(u)\cos(v)w_2, \\ Df_2(u, v)(w) =& (\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\cos(v)) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ =& \cos(u)\operatorname{sen}(v)w_1 + \operatorname{sen}(u)\cos(v)w_2, \\ Df_3(u, v)(w) =& (0, -\operatorname{sen}(v)) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ =& -\operatorname{sen}(v)w_2, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} f_*(w_{(u,v)}) =&(-\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)w_1+\cos(u)\cos(v)w_2,\\ &\cos(u)\operatorname{sen}(v)w_1+\operatorname{sen}(u)\cos(v)w_2,-\operatorname{sen}(v)w_2)_x, \end{aligned}$$

Si $x\in\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_3^2=1 \text{ y } x_1>0\}$, entonces,

$$\begin{aligned} g_*(w_{(u,v)}) =&(\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)w_1-\cos(u)\cos(v)w_2,\\ &-\cos(u)\operatorname{sen}(v)w_1-\operatorname{sen}(u)\cos(v)w_2,-\operatorname{sen}(v)w_2)_x, \end{aligned}$$

en el caso de que $x=(0,0,1)$ o $x=(0,0,-1)$, se sigue que,

$$\begin{aligned} j_*(w_{(u,v)}) =&(-\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)w_1+\cos(u)\cos(v)w_2,\\ &-\operatorname{sen}(v)w_2,\cos(u)\operatorname{sen}(v)w_1+\operatorname{sen}(u)\cos(v)w_2)_x. \end{aligned}$$

6.2. Campos vectoriales sobre variedades

Definición 6.3. Sea M una variedad. Un **campo vectorial** en M es una función

$$F: M\to\bigcup_{z\in M} M_z,$$

tal que $F(x)\in M_x$, para todo $x\in M$. Para cada x existen $F_1(x),...,F_n(x)\in\mathbb{R}$ tales que:

$$F(x)=(x,(F_1(x),...,F_n(x)))=F_1(x)(e_1)_x+\cdots+F_n(x)(e_n)_x.$$

Esto define n funciones $F_1,...,F_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ llamadas **funciones componente** de F.

Ejemplo 6.4. Continuemos con el espacio tangente $M_{(x,x)}$ dado en el **Ejemplo 6.1**. Sean las funciones componente $F_i: M\to\mathbb{R}$, para todo $i\in\{1,2\}$ definidas como sigue,

$$F_1(x_1,x_2)=F_2(x_1,x_2)=x_1+x_2.$$

Con las funciones componente anteriores podemos definir un campo vectorial,

$$F: M\to\bigcup_{(z,z)\in M} M_{(z,z)},$$

dado por,

$$F(x,x) = F_1(x,x)(e_1)_{(x,x)} + F_2(x,x)(e_2)_{(x,x)}.$$

A continuación se encontrará a $F(x,x)$, para algunos $(x,x) \in M$.

1. Para $(x,x) = (3,3)$,

$$\begin{aligned} F(3,3) &= F_1(3,3)(e_1)_{(3,3)} + F_2(3,3)(e_2)_{(3,3)} \\ &= 6(e_1)_{(3,3)} + 6(e_2)_{(3,3)}. \end{aligned}$$

2. Para $(x,x) = (1,1)$,

$$\begin{aligned} F(1,1) &= F_1(1,1)(e_1)_{(1,1)} + F_2(1,1)(e_2)_{(1,1)} \\ &= 2(e_1)_{(1,1)} + 2(e_2)_{(1,1)}. \end{aligned}$$

En general, basta que $F_1 = F_2$ para que F sea un campo vectorial.

6.3. P-formas sobre variedades

Definición 6.4. Sea M una variedad de dimensión k. Diremos que una función $\omega : M \to \cup_{z\in M}\Lambda^p(M_z)$ con $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$, es una p**-forma** o simplemente **forma diferencial** en $\mathbb{R}^n$.

Una p-forma en M puede ser escrita como

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

En esta definición, las funciones $\omega_{i_1,\ldots,i_p}$ están definidas sobre M.

Teorema 6.1. Existe una única $(p+1)$-forma $d\omega$ en M tal que para cada sistema coordenado $f : W \to \mathbb{R}^n$ tenemos

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Ejemplo 6.5. Sean la variedad $M \subset \mathbb{R}^2$ y el difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados en el **Ejemplo 5.5**, apoyándonos de la demostración del **Teorema 5.2**, sabemos que

$$h(x_1, x_2) = f^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{\alpha} + \beta, x_1\right),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, es un sistema coordenado. Definamos ahora a la 1-forma diferencial $\omega = g(x_1, x_2)dx_1 = x_1 dx_1$, luego, por **Teorema 3.3**:

$$h^*(\omega) = h^*(x_1 dx_1) = \left(\frac{x_2}{\alpha} + \beta\right) det(h')dx_1,$$

donde,

$$h' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

así, $det(h') = -\frac{1}{\alpha}$

$$h^*(\omega) = -\left(\frac{x_2}{\alpha} + \beta\right)\frac{1}{\alpha}dx_1,$$

dado que $\frac{x_2}{\alpha}+\beta$ es una función definida en un conjunto abierto, es posible encontrar a $d(h^*(\omega))$,

$$\begin{aligned} d(h^*(\omega)) =& d\left(-\left(\frac{x_2}{\alpha} + \beta\right)\tfrac{1}{\alpha}dx_1\right) \\ =& -\sum_{j=1}^{2} D_j\left(\frac{x_2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}\right)dx_j \wedge dx_1 \\ =& -\left(0dx_1 \wedge dx_1 + \frac{1}{\alpha^2}dx_2 \wedge dx_1\right) \\ =& -\frac{1}{\alpha^2}dx_2 \wedge dx_1 \\ =& \frac{1}{\alpha^2}dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

definamos ahora a la 2-forma $d\omega = -\frac{1}{\alpha}dx_1 \wedge dx_2$, luego,

$$\begin{aligned} h^*(d\omega) =& \frac{1}{\alpha}h^*(dx_1) \wedge h^*(dx_2) \\ =& -\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}dx_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_j}dx_j\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{\alpha}\left(0dx_1 + \tfrac{1}{\alpha}dx_2\right) \wedge \left(1dx_1 + 0dx_2\right)\\
&= -\tfrac{1}{\alpha}\tfrac{1}{\alpha}dx_2 \wedge dx_1\\
&= -\tfrac{1}{\alpha^2}dx_2 \wedge dx_1\\
&= \tfrac{1}{\alpha^2}dx_1 \wedge dx_2\\
&= d(h^*(\omega)).
\end{aligned}$$

6.4. Orientaciones de una variedad

Definición 6.5. Una **orientación** de una variedad M de dimensión k, es una función μ que a cada elemento x de M le asigna una orientación del espacio tangente M_x, esta función está dada de la siguiente manera,

$$\mu(x) = [(v_1)_x, ..., (v_k)_x],$$

donde $((v_1)_x, ..., (v_k)_x)$ es una base orientada arbitraria de M_x. A $\mu(x)$ lo denotaremos como μ_x.

Definición 6.6. Sean M una variedad de dimensión k, $x \in M$ y μ una orientación de M. A la función μ la llamaremos **consistente** si para todo sistema coordenado $f : W \to \mathbb{R}^n$ alrededor de y $a, b \in W$ la relación

$$[f_*((e_1)_a), ..., f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)},$$

se cumple si y solo si

$$[f_*((e_1)_b), ..., f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}.$$

Definición 6.7. Sean M una variedad, $x \in M$, μ una orientación consistente de M y $f : W \to \mathbb{R}^n$ un sistema coordenado alrededor de x. Si se cumple que

$$[f_*((e_1)_a), ..., f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)},$$

para todo $a \in W$ y por consiguiente para todo elemento de W, entonces se dice que f **preserva la orientación**.

Proposición 6.1. Sean M una variedad de dimensión k, $x \in M$ y f y g dos orientaciones preservadoras alrededor de x. Si se cumple que $x = f(a) = g(b)$, con $x \in M$, entonces, $det((g^{-1} \circ f)'(a)) > 0$.

Demostración: Tenemos que,

$$[f_*((e_1)_a), ..., f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)} = \mu_x, [g_*((e_1)_b), ..., g_*((e_k)_b)] = \mu_{g(b)} = \mu_x,$$

así, $[f_*((e_1)_a), ..., f_*((e_k)_a)] = [g_*((e_1)_b), ..., g_*((e_k)_b)]$, sabemos que $\{(e_1)_a, ..., (e_k)_a\}$ y $\{(e_1)_b, ..., (e_k)_b\}$ son bases de $\mathbb{R}^k_a$ y $\mathbb{R}^k_b$ respectivamente, luego, dado que f_* y g_* son transformaciones inyectivas, se sigue que tanto $\{f_*((e_1)_a), ..., f_*((e_k)_a)\}$ como $\{g_*((e_1)_b), ..., g_*((e_k)_b)\}$ son bases de M_x, así, por la **Definición 2.8**, la matriz $A = (c_{ij})$, donde:

$$f_*((e_i)_a) = \sum_{j=i}^{n} c_{ij} g_*((e_j)_b), \text{ para todo } i \in \{1, ..., k\},$$

tiene determinante positivo. Por otro lado, recordemos que $f_*(\mathbb{R}^k_a) = g_*(\mathbb{R}^k_b) = M_x$, luego, como g_* es un isomorfismo, es posible aplicar g_*^{-1} a los vectores $f_*((e_i)_a)$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, con lo cual:

$$\{g_*^{-1}(f_*((e_1)_a)), ..., g_*^{-1}(f_*((e_k)_a))\} = \{(g^{-1} \circ f)_*(((e_1)_a)), ..., (g^{-1} \circ f)_*(((e_k)_a))\},$$

es una base de $\mathbb{R}^k_b$. Aunado a esto:

$$\begin{aligned} g_*^{-1}(f_*((e_i)_a)) =& g_*^{-1}\left(\sum_{j=i}^{n} c_{ij} g_*((e_j)_b)\right) \\ =& \sum_{j=i}^{n} g_*^{-1}(c_{ij} g_*((e_j)_b)) \\ =& \sum_{j=i}^{n} c_{ij} g_*^{-1}(g_*((e_j)_b)) \\ =& \sum_{j=i}^{n} c_{ij}(e_j)_b, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Notemos que A también es la matriz de cambio de base entre $\{(e_1)_b), ..., (e_k)_b)\}$ y $\{g_*^{-1}(f_*((e_1)_a)), ..., g_*^{-1}(f_*((e_k)_a))\}$, lo cual implica que:

$$[(e_1)_b), ..., (e_k)_b)] = [g_*^{-1}(f_*((e_1)_a)), ..., g_*^{-1}(f_*((e_k)_a))].$$

Por otro lado, para todo $i \in \{1,...,k\}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g_*^{-1}(f_*((e_i)_a)) =& (g^{-1}\circ f)_*(((e_i)_a)) \\ =& (D(g^{-1}\circ f)(a)(e_i))_{g^{-1}\circ f(a)} \\ =& (D(g^{-1}\circ f)(a)(e_i))_b, \\ g_*^{-1}(f_*((e_i)_a)) =& \sum_{j=i}^{n} c_{ij}(e_j)_b \\ =& \left(\sum_{j=i}^{n} c_{ij}e_j\right)_b, \end{aligned} \tag{6.1}$$

lo que implica que $(D(g^{-1}\circ f)(a)(e_i))_b = \left(\sum_{j=i}^{n} c_{ij}e_j\right)_b$, dado que ambos vectores son igual al estar trasladados en b, entonces $D(g^{-1}\circ f)(a)(e_i) = \sum_{j=i}^{n} c_{ij}e_j$. Por **Teorema 1.10**, se sigue que:

$$\begin{aligned} D(g^{-1}\circ f)(a)(e_i) =& (D(g^{-1}\circ f)_1(a)(e_i),...,D(g^{-1}\circ f)_k(a)(e_i)) \\ =& ((g^{-1}\circ f)_1'(a)\cdot(e_i)^t,...,(g^{-1}\circ f)_k'(a)\cdot(e_i)^t) \\ =& (D_i(g^{-1}\circ f)_1(a),...,D_i(g^{-1}\circ f)_k(a)) \\ =& \sum_{j=i}^{n} D_i(g^{-1}\circ f)_j(a)e_j, \end{aligned} \tag{6.2}$$

de (6.1) y (6.2) resulta que $c_{ij} = D_i(g^{-1}\circ f)_j(a)$. Así, $A = (g^{-1}\circ f)'(a)$, con lo cual, se concluye que $det((g^{-1}\circ f)'(a)) > 0$. □

Definición 6.8. Una variedad M de dimensión k cuyas orientaciones μ_x pueden ser escogidas consistentemente es llamada **orientable** y una elección particular de μ_x es llamada **orientación μ de M**. Una variedad junto a una orientación μ es llamada una **variedad orientada**.

Si M es una variedad de dimensión k con frontera y $x \in \partial M$, entonces por **Proposición 5.3**, se sigue que $(\partial M)_x$ es un subespacio de dimensión $(k-1)$ del espacio vectorial M_x de dimensión k. Luego, el complemento ortogonal de $(\partial M)_x$ tiene dimensión 1, es decir, $(\partial M)_x^{\perp}$ es una recta, y dado que toda recta tiene dos direcciones se puede asegurar que existen exactamente dos vectores unitarios en M_x que son perpendiculares a $(\partial M)_x$, cada vector unitario corresponde a cada las direcciones ya mencionadas.

Definición 6.9. Sea $f : W \to \mathbb{R}^n$ un sistema coordenado con $W \subset H^k$, donde H^k es el semiespacio explicado en la **Definición 5.3**, y $f(0) = x$. Uno de los dos vectores unitarios mencionados anteriormente es $f_*(v_0) \in M_x$, para algún v_0 cuya k-ésima entrada es negativa. Este vector unitario es llamado **vector unitario normal exterior** y denotado por $n(x)$.

Proposición 6.2. Sea μ_x una orientación de una variedad con frontera M de dimensión k. Dado $x \in \partial M$ podemos escoger a una base $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ de $(\partial M)_x$ tal que

$$[n(x), v_1, ..., v_{k-1}] = \mu_x,$$

si se cumple que

$$[n(x), w_1, ..., w_{k-1}] = \mu_x,$$

donde $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ es otra base de $(\partial M)_x$, entonces, tanto $[v_1, ..., v_{k-1}]$ como $[w_1, ..., w_{k-1}]$ son la misma orientación para $(\partial M)_x$. Esta orientación es denotada como $(\partial \mu)_x$.

Demostración: Sea $x \in \partial M$ y $\{v_1, ..., v_{k-1}\}, \{w_1, ..., w_{k-1}\}$ dos bases de $(\partial M)_x$, dado que $n(x)$ es un vector normal a $(\partial M)_x$, se sigue que es ortogonal a ambas bases ya mencionadas, así, $\{n(x), v_1, ..., v_{k-1}\}$ y $\{n(x), w_1, ..., w_{k-1}\}$ son bases de M_x, supongamos que,

$$[n(x), v_1, ..., v_{k-1}] = \mu_x = [n(x), w_1, ..., w_{k-1}],$$

así, debido a que $n(x) = 1 \cdot n(x)$ y a que $v_1, ..., v_{k-1}, w_1, ..., w_{k-1}$ son elementos de $(\partial M)_x$ y por ende no pueden ser escritos como combinación lineal de $n(x)$, se sigue que la matriz de cambio entre ambas bases de M_x es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix},$$

sea ahora la matriz $A' = (a_{ij})$, así, $det(A) = 1 \cdot det(A') = det(A')$, luego, dado que A tiene determinante positivo, se sigue que A' también tiene determinante positivo, además, como A' es la matriz de cambio de las bases de $(\partial M)_x$ dadas previamente, se concluye que $[v_1, ..., v_{k-1}]$ y $[w_1, ..., w_{k-1}]$ son la misma orientación para $(\partial M)_x$. $\square$

Proposición 6.3. Las orientaciones $(\partial\mu)_x$, para todo $x \in \partial M$ son consistentes en ∂M.

Con esto, dada M una variedad, si M es orientable, entonces ∂M también es orientable, y una orientación μ para M determina una orientación $\partial(\mu)_x$ para ∂M.

Definición 6.10. $(\partial\mu)_x$ es llamada la **orientación inducida**.

Proposición 6.4. Consideremos a la variedad $M = H^k$ con la orientación usual, la orientación inducida en $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} = \{x \in H^k : x_k = 0\}$ es $(-1)^k$ veces la orientación usual.

Si M es una variedad de dimensión $n-1$ es posible definir un vector unitario normal exterior sin la necesidad de que M sea la frontera de una variedad de dimensión n.

Definición 6.11. Sean M una variedad de dimensión $n-1$, $x \in M$ y una orientación μ_x. Si $[v_1, ..., v_{n-1}] = \mu_x$, entonces, escogemos a un vector unitario $n(x) \in \mathbb{R}^n_x$ que sea perpendicular a M_x tal que $[n(x), v_1, ..., v_{n-1}]$ es la orientación usual de $\mathbb{R}^n_x$. A $n(x)$ se le llama **vector unitario normal exterior a** M. Esta definición es válida incluso si M no es la frontera de alguna variedad de dimensión n.

Definición 6.12. Sean $p, n \in \mathbb{N}$, con $p \leq n$ y $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad. Un p**-cubo singular** sobre la variedad M es una función continua $c : [0,1]^p \to M$.

Si ω es una p-forma en una variedad M con frontera de dimensión k y c es un p-cubo singular en M, entonces:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega.$$

Cuando tomamos a un k-cubo singular c sobre una variedad M con frontera de dimensión k, existen un conjunto abierto W que contiene a $[0,1]^k$ y un sistema coordenado $f : W \to \mathbb{R}^n$ tal que $c(x) = f(x)$, para todo $x \in [0,1]^k$.

Definición 6.13. Sea M una variedad con frontera de dimensión k y un k-cubo c sobre M. Si M es orientada, entonces c **preserva la orientación** si f lo hace.

Teorema 6.2. Sean $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ dos k-cubos singulares y M una variedad orientada de dimensión k. Si c_1 y c_2 preservan la orientación en M y ω es una k-forma en M tal que $\omega = 0$ fuera de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$, entonces:

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Sea ω una k-forma en una variedad orientada M de dimensión k, si existe un k-cubo singular c que preserva la orientación tal que $w = 0$ fuera de $c([0,1]^k)$ se define a la integral de ω sobre M como:

$$\int_M \omega = \int_c \omega.$$

Por **Teorema 6.2**, es fácil ver que la integral de ω sobre M no depende de c. Por otro lado, dada una k-forma en una variedad M, se sigue que existe una cubierta abierta $\mathbb{O}$ de M tal que para cada $U \in \mathbb{O}$ existe un k-cubo singular c que preserva la orientación, tal que $U \in c([0,1]^k)$. Sea Φ la partición de la unidad para M subordinada a la cubierta $\mathbb{O}$, así, la integral de ω sobre M se define como:

$$\int_M \omega = \sum_{\phi \in \Phi} \int_M \phi \cdot \omega.$$

Todas las definiciones pueden ser dadas para una variedad M de dimensión k que posea frontera y una orientación μ_x. Sean ∂M la frontera de M, $\partial\mu$ su orientación inducida y c un k-cubo singular que preserva la orientación en M tal que $c_{(k,0)}$ yace sobre ∂M y es la única cara que tiene puntos interiores en ∂M. Recordemos que $c_{(k,0)}$ preserva la orientación si k es par, pero no si k es impar, luego, si ω es una $(k-1)$-forma en M tal que $\omega = 0$ fuera de $c([0,1]^k)$, tenemos

$$\int_{c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega.$$

Por otro lado, $c_{(k,0)}$ aparece con coeficiente $(-1)^k$ en ∂c, así,

$$\begin{aligned}\int_{\partial c} \omega &= \int_{(-1)^k c_{(k,0)}} \omega \\ &= (-1)^k \int_{c_{(k,0)}} \omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{2k} \int_{\partial M} \omega \\ &= \int_{\partial M} \omega. \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.5. Teorema de Stokes

Teorema 6.3. (Teorema de Stokes) Sea M una variedad orientada con frontera de dimensión k. Si M es compacta y ω es una $(k-1)$-forma en M, entonces:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demostración: Sean M una variedad orientada con frontera de dimensión k y ω una $(k-1)$-forma en M. Supongamos que existe un k-cubo c que preserva la orientación en $M \backslash \partial M$, tal que $\omega = 0$ fuera de $c([0,1]^k)$, por continuidad de ω, se cumple que ω es 0 en ∂c. Por la definición de $d\omega$, (4.11) y (4.12) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) \\ &= \int_{[0,1]^k} d(c^*(\omega)) \\ &= \int_{[0,1]^k} I^*(d(c^*(\omega))) \\ &= \int_{I^k} d(c^*(\omega)) \\ &= \int_{\partial I^k} c^*(\omega) \\ &= \int_{\partial c} \omega. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0,$$

ya que ω es 0 en ∂c, por otro lado, $\int_{\partial M} \omega = 0$ ya que c está contenida en $M \backslash \partial M$ y por ende $\omega = 0$ en ∂M. Supongamos ahora que existe un k-cubo singular c que preserva la orientación tal que $c_{(k,0)}$ es la única cara de c que permanece en ∂M y

$\omega = 0$ fuera $c([0,1]^k)$, entonces, por (6.3) se sigue que

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Si consideramos ahora el caso general, existe una cubierta abierta $\mathbb{O}$ de M y una partición de la unidad Φ para M subordinada a $\mathbb{O}$ tal que para cada $\phi \in \Phi$ la forma $\phi \cdot \omega$ pertenece a alguno de los dos tipos de formas considerados previamente, tenemos que,

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\phi \in \Phi} \phi\right) = \sum_{\phi \in \Phi} d(\phi),$$

lo que implica que:

$$0 = \left(\sum_{\phi \in \Phi} d(\phi)\right) \wedge \omega = \sum_{\phi \in \Phi} (d(\phi) \wedge \omega).$$

Dado que M es compacto, la suma es finita, así,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M 0 \\ &= \int_M \sum_{\phi \in \Phi} (d(\phi) \wedge \omega) \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_M (d(\phi) \wedge \omega), \end{aligned}$$

con esto, y aplicando **Teorema 3.4**, 2) se tiene que,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_M \phi \cdot d\omega \\ &= 0 + \sum_{\phi \in \Phi} \int_M \phi \cdot d\omega \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_M (d(\phi) \wedge \omega) + \sum_{\phi \in \Phi} \int_M \phi \cdot d\omega \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_M (d(\phi) \wedge \omega + \phi \cdot d\omega) \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_M (d(\phi) \wedge \omega + (-1)^0 \phi \wedge d\omega) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\phi\in\Phi} \int_M d(\phi \wedge \omega) \\
&= \sum_{\phi\in\Phi} \int_M d(\phi \cdot \omega) \\
&= \sum_{\phi\in\Phi} \int_{\partial M} \phi \cdot \omega \\
&= \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}
$$

Con lo cual, se da por demostrado el teorema. □

Capítulo 7

Aplicaciones de las formas diferenciales

Teorema 7.1. Sean $R \in \mathbb{R}+$ y $n \in \mathbb{N}$. Dada la función $c_{R,n} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definida como sigue,

$$c_{R,n}(t) = (R\cos(2\pi nt), R\operatorname{sen}(2\pi nt)),$$

con $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente igualdad,

$$\int_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n,$$

donde $d\theta$ es la 1-forma encontrada en el **Ejemplo 3.9**, además, $f_{c_{R,n}} \neq \partial c$ para cualquier 2-cadena en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Demostración: Aplicando la definición de integral sobre cubos singulares y el **Teorema 3.2**, 2) y 3), se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_{c_{R,n}} d\theta &= \int_{c_{R,n}} \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \right) \\
&= \int_{[0,1]} c_{R,n}^* \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \right) \\
&= \int_{[0,1]} \left(\frac{-R\operatorname{sen}(2\pi nt)}{(R\cos(2\pi nt))^2 + (R\operatorname{sen}(2\pi nt))^2} c_{R,n}^*(dx_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{R\cos(2\pi nt)}{(R\cos(2\pi nt))^2 + (R\operatorname{sen}(2\pi nt))^2} c_{R,n}^*(dx_2) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]} \left(\frac{-R\operatorname{sen}(2\pi nt)}{R^2(\cos^2(2\pi nt) + \operatorname{sen}^2(2\pi nt))} c^*_{R,n}(dx_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{R\cos(2\pi nt)}{R^2(\cos^2(2\pi nt) + \operatorname{sen}^2(2\pi nt))} c^*_{R,n}(dx_2) \right) \\
&= \int_{[0,1]} \left(\frac{-\operatorname{sen}(2\pi nt)}{R(1)} c^*_{R,n}(dx_1) + \frac{\cos(2\pi nt)}{R(1)} c^*_{R,n}(dx_2) \right) \\
&= \int_{[0,1]} \tfrac{1}{R}(-\operatorname{sen}(2\pi nt) c^*_{R,n}(dx_1) + \cos(2\pi nt) c^*_{R,n}(dx_2)),
\end{aligned}
$$

por otro lado, por **Teorema 3.2**, 1) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
c^*_{R,n}(dx_1) =& - R2\pi n \operatorname{sen}(2\pi nt) dt, \\
c^*_{R,n}(dx_2) =& R2\pi n \cos(2\pi nt) dt,
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]} \tfrac{1}{R}(-\operatorname{sen}(2\pi nt) c^*_{R,n}(dx_1) + \cos(2\pi nt) c^*_{R,n}(dx_2)) \\
&\qquad = \int_{[0,1]} \tfrac{1}{R}(-\operatorname{sen}(2\pi nt)(-R2\pi n \operatorname{sen}(2\pi nt)dt) + \cos(2\pi nt) R2\pi n \cos(2\pi nt) dt) \\
&\qquad = \int_{[0,1]} \tfrac{R}{R} 2\pi n (\operatorname{sen}^2(2\pi nt) + \cos^2(2\pi nt)) dt \\
&\qquad = 2\pi n \int_{[0,1]} 1 dt \\
&\qquad = 2\pi nt|_0^1 \\
&\qquad = 2\pi n(1-0) \\
&\qquad = 2\pi n.
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que existe alguna 2-cadena c tal que $f_{c_{R,n}} = \partial c$, así, por el **Teorema 4.2** se tiene que:

$$
\int_{f_{c_{R,n}}} d\theta = \int_{\partial c} d\theta = \int_c d(d\theta) = \int_c O = 0.
$$

Por otro lado,

$$
\int_{f_{c_{R,n}}} d\theta = \int_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n,
$$

así, $2\pi n = 0$, lo cual es una contradicción, y por ende no existe alguna 2-cadena c tal que $f_{c_{R,n}} = \partial c$. $\square$

Teorema 7.2. (Independencia de parametrización) Sea c un k-cubo singular de $\mathbb{R}^k$ y $p : [0,1]^k \to [0,1]^k$ una función inyectiva tal que $p([0,1]^k) = [0,1]^k$ y $det(p'(x)) > 0$, para todo $x \in [0,1]^k$. Si ω es una k-forma de $\mathbb{R}^k$, entonces:

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega.$$

Demostración: Sean c un k-cubo singular y ω una k-forma en $\mathbb{R}^k$, luego, se cumple la siguiente igualdad $\omega = \omega_{1,\ldots,k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, denotemos a $\omega_{1,\ldots,k}$ como f, luego, por **Teorema 3.3**,

$$c^*(\omega) = (f \circ c) det(c') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

tomemos a $g = (f \circ c) det(c')$, así, $c^*(\omega) = g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, por otro lado, notemos que $(c \circ p) : [0,1]^k \to [0,1]^k$, además, denotemos a la frontera de $[0,1]^k$ como $\partial [0,1]^k$, así, $[0,1]^k = (0,1)^k \cup \partial [0,1]^k$, con esto y aplicando el **Teorema 3.2**, 5) y el **Teorema 3.3**, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{c \circ p} \omega &= \int_{[0,1]^k} (c \circ p)^* \omega \\
&= \int_{[0,1]^k} p^*(c^* \omega) \\
&= \int_{[0,1]^k} p^*(g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) \\
&= \int_{[0,1]^k} (g \circ p) det(p') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{(0,1)^k \cup \partial [0,1]^k} (g \circ p) det(p') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{(0,1)^k} (g \circ p) det(p') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k + \int_{\partial [0,1]^k} (g \circ p)) det(p') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,
\end{aligned}$$

debido a que se cumplen todas las hipótesis del **Teorema 1.14**, la primera integral de la suma cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{(0,1)^k} (g \circ p) det(p') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{p((0,1)^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

respecto a la segunda integral de la suma, recordemos que $\partial[0,1]^k$ tiene medida cero, y por **Teorema 1.19** esta integral es igual a cero. Por otro lado, por **Teorema 1.18** se tiene que $p(\partial[0,1]^k)$ tiene medida cero. Luego, por **Teorema 1.19**, se sigue que:

$$\int_{p(\partial[0,1]^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = 0,$$

con esto,

$$\begin{aligned}
\int_{p((0,1)^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k &= \int_{p((0,1)^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k + 0 \\
&= \int_{p((0,1)^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\quad + \int_{p(\partial[0,1]^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{p((0,1)^k) \cup p(\partial[0,1]^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{p((0,1)^k \cup \partial[0,1]^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{p([0,1]^k)} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{[0,1]^k} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,
\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_{[0,1]^k} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_c \omega.$$

Por lo tanto, se da por demostrado el teorema. $\square$

Teorema 7.3. Si c es un 1-cubo singular en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ con $c(0) = c(1)$, entonces existe un único n tal que $f_c - f_{c_{1,n}} = \partial c^2$, para alguna 2-cadena c^2 de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Demostración: Supongamos ahora que existen $n, m \in \mathbb{N}$ para los cuales se cumplen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
f_c - f_{c_{1,n}} =& \partial c_1^2, \\
f_c - f_{c_{1,m}} =& \partial c_2^2,
\end{aligned}$$

donde c_1^2 y c_2^2 son 2-cadenas de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Sea ahora $f = f_{c_2^2} - f_{c_1^2}$, luego,

$$\begin{aligned}\partial f =&\partial f_{c_2^2} - \partial f_{c_1^2}\\ =&f_c - f_{c_{1,m}} - f_c + f_{c_{1,n}}\\ =&f_{c_{1,n}} - f_{c_{1,m}},\end{aligned}$$

luego, aplicando el **Teorema 4.2**, se tiene que:

$$\int_{f_{c_{1,n}}-f_{c_{1,m}}} d\theta = \int_{\partial f} d\theta = \int_f d(d\theta) = \int_f O = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{f_{c_{1,n}}-f_{c_{1,m}}} d\theta =&\int_{f_{c_{1,n}}} d\theta - \int_{f_{c_{1,m}}} d\theta\\ =&2\pi n - 2\pi m\\ =&2\pi(n-m).\end{aligned}$$

Así, $2\pi(n-m) = 0$, lo que implica que $n = m$ y por ende se concluye que el entero que cumple la igualdad es único. $\square$

Para el siguiente teorema, veremos a $\mathbb{C}$ de la siguiente manera,

$$\mathbb{C} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones:

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) =&(a+c, b+d),\\ (a,b)\cdot(c,d) =&(ac-bd, ad+bc).\end{aligned}$$

Teorema 7.4. Sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y definamos a la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada como:

$$g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Definamos ahora al 1-cubo singular $c_{R,g} : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0+0i\}$ como $c_{R,g} = g \circ c_{R,1}$, con $R > 0$ y al 2-cubo singular c como $c(s,t) = t\cdot c_{R,n}(s) + (1-t)c_{R,g}(s)$.

a) Se cumple que $\partial c = f_{c_{R,g}} - f_{c_{R,n}}$, además, $c([0,1]\times[0,1]) \subset \mathbb{C}\backslash\{0+0i\}$ si R es muy grande.

b) Todo polinomio $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, con $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostración:

a) Tenemos que,

$$\begin{aligned}
c_{(2,0)}(s,t) =&(c \circ I^2_{(2,0)})(s,t) = c(s,0) = c_{R,g}(s),\\
c_{(2,1)}(s,t) =&(c \circ I^2_{(2,1)})(s,t) = c(s,1) = c_{R,n}(s),\\
c_{(1,0)}(s,t) =&(c \circ I^2_{(1,0)})(s,t)\\
=&c(0,t)\\
=&tc_{R,n}(0) + (1-t)c_{R,g}(0)\\
=&t(R\cos(2\pi n \cdot 0), R\,\mathrm{sen}(2\pi n \cdot 0)) + (1-t)g(c_{R,1}(0))\\
=&t(R,0) + (1-t)g(R\cos(2\pi \cdot 0), R\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0))\\
=&t(R,0) + (1-t)g(R,0),\\
c_{(1,1)}(s,t) =&(c \circ I^2_{(1,1)})(s,t)\\
=&c(1,t)\\
=&tc_{R,n}(1) + (1-t)c_{R,g}(1)\\
=&t(R\cos(2\pi n \cdot 1), R\,\mathrm{sen}(2\pi n \cdot 1)) + (1-t)g(c_{R,1}(1))\\
=&t(R,0) + (1-t)g(R\cos(2\pi \cdot 1), R\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1))\\
=&t(R,0) + (1-t)g(R,0),
\end{aligned}$$

notemos que $c_{(1,0)} = c_{(1,1)}$, así,

$$\begin{aligned}
\partial c =& \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha} f_{c_{i,\alpha}}\\
=&-f_{c_{(1,0)}} + f_{c_{(1,1)}} + f_{c_{(2,0)}} - f_{c_{(2,1)}}\\
=&-f_{c_{(1,0)}} + f_{c_{(1,0)}} + f_{c_{R,g}} - f_{c_{(R,n)}}\\
=&f_{c_{R,g}} - f_{c_{R,n}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(z) =&z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\\
=&z^n\left(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right),
\end{aligned}$$

además, si $z = R\cos(2\pi s) + R\,\mathrm{sen}(2\pi s)i$, entonces:

$$\begin{aligned} z^n =& (R\cos(2\pi s) + R\,\mathrm{sen}(2\pi s)i)^n \\ =& (R\cos(2\pi s), R\,\mathrm{sen}(2\pi s))^n \\ =& R^n(\cos(2\pi ns), \mathrm{sen}(2\pi ns)), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, así,

$$\begin{aligned} g(z) =& g(R\cos(2\pi s), R\,\mathrm{sen}(2\pi s)) \\ =& R^n(\cos(2\pi ns), \mathrm{sen}(2\pi ns))\Bigg(1 + \frac{a_1}{R(\cos(2\pi s), \mathrm{sen}(2\pi s))} \\ &+ \cdots + \frac{a_n}{R^n(\cos(2\pi ns), \mathrm{sen}(2\pi ns))}\Bigg) \\ =& g(c_{R,1}(s)). \end{aligned}$$

Luego, si R es muy grande, se sigue que

$$g(c_{R,1}(s)) \approx R^n(\cos(2\pi ns), \mathrm{sen}(2\pi ns)) = R^{n-1}c_{R,n}(s),$$

supongamos ahora que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$c(s,t_0) \approx t_0 c_{R,n}(s) + (1-t_0)R^{n-1}c_{R,n}(s) = (0,0),$$

en otras palabras,

$$((t_0 + (1-t_0)R^{n-1})\cos(2\pi ns), (t_0 + (1-t_0)R^{n-1})\,\mathrm{sen}(2\pi ns)) = (0,0),$$

dado que no existe valor para s tal que $\cos(2\pi ns)$ y $\mathrm{sen}(2\pi ns)$ sean iguales a 0, se sigue que $t_0 + (1-t_0)R^{n-1} = 0$, con lo cual, $R^{n-1} = \frac{-t_0}{1-t_0}$, dado que $t_0 \in [0,1]$, se sigue que R^{n-1} es negativo, lo cual es una contradicción, y por ende se concluye que $(0,0) \notin c([0,1]\times[0,1])$.

b) Supongamos que g no tiene raíces en $\mathbb{C}$. De a) del **teorema 7.4**, tenemos que $f_{c_{R,g}} = \partial c + f_{c_{R,n}}$, así, apoyándonos del **Ejemplo 3.9**, de la **Teorema 7.1** y del **Teorema 4.2** se tiene que,

$$\int_{f_{c_{R,g}}} d\theta = \int_{\partial c + f_{c_{R,n}}} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&=\int_{\partial c} d\theta + \int_{f_{c_{R,n}}} d\theta \\
&=\int_{c} d(d\theta) + \int_{c_{R,n}} d\theta \\
&=\int_{c} O + 2\pi n \\
&=0 + 2\pi n \\
&=2\pi n.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Por otro lado, sea el 2-cubo singular c' de $\mathbb{R}^2$ dado como sigue,

$$c'(s,t) = c_{tR,f}(s) = g(tR\cos(2\pi s), tR\,\mathrm{sen}(2\pi s)).$$

Luego, apoyándonos de **teorema 7.4**, a), se sigue que,

$$\begin{aligned}
c'_{(1,0)}(s,t) &= c'(0,t) \\
&= g(tR, 0), \\
c'_{(1,1)}(s,t) &= c'(1,t) \\
&= g(tR, 0), \\
c'_{(2,0)}(s,t) &= c'(s,0) \\
&= g(0,0) \\
&= 0^n + a_1 0^{n-1} + \cdots + a_n \\
&= a_n, \\
c'_{(2,1)}(s,t) &= c'(s,1) \\
&= g(R\cos(2\pi s), R\,\mathrm{sen}(2\pi s)) \\
&= c_{R,f}(s),
\end{aligned}$$

notemos que $a_n \neq 0 + i0$ ya que g no tiene raíces, y debido a que a_n es un valor fijo, $c'_{(2,0)}$ es una 2-cadena constante, además, $c'_{(1,0)} = c'_{(1,1)}$, así,

$$\begin{aligned}
\partial c' &= - f_{c'_{(1,0)}} + f_{c'_{(1,1)}} + f_{c'_{(2,0)}} - f_{c'_{(2,1)}} \\
&= - f_{c'_{(1,0)}} + f_{c'_{(1,0)}} + f_{c'_{(2,0)}} - f_{c_{R,g}} \\
&= f_{c'_{(2,0)}} - f_{c_{R,g}},
\end{aligned}$$

así, y guiándonos por lo visto en (7.1)

$$\begin{aligned}\int_{c'_{(2,0)}} d\theta =& \int_{f_{c'_{(2,0)}}} d\theta\\ =& \int_{\partial c' + f_{c_{R,g}}} d\theta\\ =& \int_{\partial c'} d\theta + \int_{f_{c_{R,g}}} d\theta\\ =& 2\pi,\end{aligned}$$

pero, por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned}\int_{c'_{(2,0)}} d\theta =& \int_{c'_{(2,0)}} \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}dx_2\right)\\ =& \int_{[0,1]^2} \left(\frac{-a_{n,2}}{a_{n,1}^2+a_{n,2}^2}det(a_n')dx_1 + \frac{a_{n,1}}{a_{n,1}^2+a_{n,2}^2}det(a_n')dx_2\right)\\ =& \int_{[0,1]^2} (0dx_1 + 0dx_2)\\ =& 0,\end{aligned}$$

que el resultado anterior sea igual a cero, se debe a que al ser $c'_{(2,0)} = a_n$ constante se sigue que $det(a_n') = 0$, y por ende se llega a una contradicción, ya que $2\pi \neq 0$, con lo cual se concluye que g tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$. $\square$

Teorema 7.5. Sean $R \subset \mathbb{R}^3$ tal que $R = T \times [0, b]$, con $T \subset \mathbb{R}^2$ y $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una solución de la ecuación parabólica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Si se cumple que $u = 0$ en $T \times \{0\}$ y en $(\partial T) \times [0, b]$, entonces $u = 0$ en todo R (Flandres, 1989).

Demostración: Consideremos a la ecuación parabólica siguiente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial u}{\partial x_3},$$

y supongamos que u es una solución de la ecuación previa, la cual es válida en una región en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los conjuntos R y ∂R. Supongamos que existe

3-cubo singular $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $c([0,1]^3) = R$. Sea la 2-forma siguiente,

$$\beta = 2uD_1udx_2 \wedge dx_3 - 2uD_2udx_1 \wedge dx_3 - u^2dx_1 \wedge dx_2,$$

luego,

$$\begin{aligned}
d\beta =& d(2uD_1udx_2 \wedge dx_3 - 2uD_2udx_1 \wedge dx_3 - u^2dx_1 \wedge dx_2) \\
=& d(2uD_1udx_2 \wedge dx_3) - d(2uD_2udx_1 \wedge dx_3) - d(u^2dx_1 \wedge dx_2) \\
=& (2D_1uD_1u + 2uD_1(D_1u))dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
& - (2D_2uD_2u + 2uD_2(D_2u))dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
& - 2uD_3udx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
=& \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
& - (-1)^{1\cdot 1}\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
& - (-1)^{1\cdot 2}2u\frac{\partial u}{\partial x_3}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + 2u\frac{\partial u}{\partial x_3} - 2u\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,
\end{aligned}$$

con esto, y aplicando el **Teorema 4.2**, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \beta =& \int_c \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
=& \int_c \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2dx_3.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Debido a que a R lo podemos ver como el producto cartesiano de conjunto T de $\mathbb{R}^2$ con $[0,b]$, existen $c_1, c_2, c_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cubos singulares tales que,

$$\begin{aligned}
c_1([0,1]^3) =& (\partial T) \times [0,b], \\
c_2([0,1]^3) =& T \times \{b\}, \\
c_3([0,1]^3) =& T \times \{0\},
\end{aligned}$$

así, $\partial c = f_{c_1} + f_{c_2} - f_{c_3}$, luego,

$$\begin{aligned}\int_{\partial c} \beta &= \int_{f_{c_1}+f_{c_2}-f_{c_3}} \beta \\ &= \int_{f_{c_1}} \beta + \int_{f_{c_2}} \beta - \int_{f_{c_3}} \beta \\ &= \int_{c_1} \beta + \int_{c_2} \beta - \int_{c_3} \beta \\ &= \int_{(\partial T)\times[0,b]} \beta + \int_{T\times\{0\}} \beta - \int_{T\times\{b\}} \beta,\end{aligned}$$

dado que u es igual a 0 en $T \times \{0\}$ y en $(\partial T) \times [0, b]$ se sigue que,

$$\int_{(\partial T)\times[0,b]} \beta = \int_{T\times\{0\}} \beta = 0,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{T\times\{b\}} \beta &= \int_{T\times\{b\}} [2uD_1udx_2 \wedge dx_3 - 2uD_2udx_1 \wedge dx_3 - u^2dx_1 \wedge dx_2] \\ &= \int_{T\times\{b\}} 2uD_1udx_2 \wedge dx_3 - \int_{T\times\{b\}} 2uD_2udx_1 \wedge dx_3 - \int_{T\times\{b\}} u^2dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_T \int_b 2uD_1udx_2dx_3 - \int_T \int_b 2uD_2udx_1dx_3 - \int_{T\times\{b\}} u^2dx_1dx_2 \\ &= -\int_{T\times\{b\}} u^2dx_1dx_2,\end{aligned}$$

las primeras dos integrales desaparecen debido a que la integral respecto a la variable x_3 es sobre un punto, de aquí, y retomando a la igualdad dada en (7.2), se tiene que,

$$-\int_{T\times\{b\}} u^2dx_1dx_2 = \int_c \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2dx_3,$$

visto de otra forma,

$$\int_{T\times\{b\}} u^2dx_1dx_2 + \int_c \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

notemos que las integrales son con funciones positivas, luego, $u^2 = 0$ en $T \times \{b\}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ en R, debido a que las derivadas de u respecto a las variables x_1

y x_2 son iguales a 0 se tiene que u es una función que depende exclusivamente de la variable x_3, así, podemos decir que $u(x_1, x_2, x_3) = v(x_3)$, para alguna función v que dependa solo de x_3.
Aunado a lo anterior, también tenemos que $u = 0$ en $T \times \{b\}$, así, $v(b) = 0$, por otro lado, dado que u es una solución a la ecuación de calor, se cumple que,

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx_3} =& \frac{\partial u}{\partial x_3} \\
=& \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\
=& 0 + 0 \\
=& 0,
\end{aligned}$$

con lo cual v es una función contante en R, así, como $v(b) = 0$, luego $v(t) = 0$, para todo $t \in [0, b]$, con lo cual se concluye que $u = 0$ en R. $\square$

Conclusiones

Originalmente, este trabajo de tesis iba dirigido a estudiantes de Matemáticas Aplicadas, no obstante, durante la redacción de los últimos capítulos se decidió por ampliar este enfoque, y actualmente, alumnos de Física Aplicada también pueden hacer uso de este trabajo. Aunque otro de los objetivos de redactar este escrito era el que los lectores no tuvieran gran dificultad para entender y utilizar conceptos, teoremas o proposiciones referentes a las formas diferenciales, es necesario que estos lectores posean conocimientos en distintas áreas de las matemáticas, siendo las más importantes: Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables y Álgebra lineal.
Por otro parte, la mayoría de las demostraciones aquí presentadas ya existían en libros, aunque no eran mostradas por completo, por lo que una de las aportaciones de esta tesis es justamente dar explicaciones detalladas de dichas demostraciones. Algunos de los teoremas cuyas demostraciones han sido explicadas minuciosamente son: Lema de Poincaré, Teorema de Stokes (tanto la versión para variedades como la versión para cadenas singulares), etc. Asimismo, todas las explicaciones de los ejemplos mostrados son completamente de mi autoría.
De igual manera, yo realicé la mayoría de las explicaciones y comentarios sobre las principales definiciones como: tensores, orientación, formas diferenciales, cubos singulares, variedades, entre otros.
Si bien las aplicaciones de las formas diferenciales son muchas tanto en el área de las matemáticas como en el área de la física, no fue posible agregar más de las aquí mostradas debido a limitaciones de tiempo, a que muchas de ellas ya fueron descritas en otros trabajos de tesis y a que este escrito ya es muy extenso, sin embargo, algunas ramas donde podemos aplicar a las formas diferenciales son: Electromagnetismo (Ecuaciones de Maxwell), Análisis Complejo, Álgebra lineal, Geometría diferencial, entre otras.

Bibliografía

Apostol, T. M. (2006). *Análisis Matemático* (2.ª ed.). Editorial Reverté.

Cárdenas, J. P. (2012). *Cálculo integral en varias variables* (1.ª ed.). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Flandres, H. (1989). *Differential Forms with Applications to the Physycal Sciences* (1.ª ed.). Dover Publications, Inc.

Fraleigh, J. B. (1987). *Álgebra abstracta* (3.ª ed.). Sistemas Técnicos de Edición.

Gualtieri, M. (2017). *Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos*. https://www.math.toronto.edu/mgualt/courses/17-1300/docs/17-1300-notes-8.pdf

Hoffman, K., & Kunze, R. (1971). *Linear Algebra* (2.ª ed.). Prentice-Hall, Inc.

Hunter, J. K. (2007). *Measure Theory* (2.ª ed.). Department of Mathematics, University of California at Davis.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra Lineal* (8.ª ed.). Pearson.

Lipschutz, S., & Lipson, M. (2009). *Linear Algebra* (4.ª ed.). Mc Graw Hill.

Maximenko, E. (2020a). *Base dual*. https://esfm.egormaximenko.com/linalg/dual_base_es.pdf

Maximenko, E. (2020b). *Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos*. https://esfm.egormaximenko.com/linalg/decomposition%5C_of%5C_permutations%5C_in%5C_disjoint%5C_cycles%5C_es.pdf

Maximenko, E. (2020c). *Espacio dual*. https://esfm.egormaximenko.com/linalg/dual_vector_space_es.pdf

Maximenko, E. (2023a). *Descomposición de permutaciones en productos de transposiciones*. https://esfm.egormaximenko.com/linalg/decomposition%5C_of%5C_permutations%5C_in%5C_transpositions%5C_es.pdf

Maximenko, E. (2023b). *Matrices de permutación*. https://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/permutation%5C_matrices%5C_es.pdf

Maximenko, E. (2023c). *Permutaciones.* https://esfm.egormaximenko.com/linalg/permutations%5C_es.pdf

Maximenko, E. (2023d). *Producto (composición) de permutaciones.* https://esfm.egormaximenko.com/linalg/permutations%5C_product%5C_es.pdf

Maximenko, E. (2023e). *Signo de una permutación.* https://esfm.egormaximenko.com/linalg/permutation%5C_sign%5C_es.pdf

Meyer, C. D. (2001). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM.

Spivak, M. (1995). *Calculus on Manifolds* (24.ª ed.). Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (2017). *Calculus* (3.ª ed.). Editorial Reverté.

Stewart, J. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (2.ª ed.). Cengace Learning Editores.