

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**DEDUCCIÓN DEL HAMILTONIANO DE  
INTERACCIÓN EN LA APROXIMACIÓN  
DISPERSIVA PARA UN CAMPO CUANTIZADO  
INTERACTUANDO CON DOS ÁTOMOS DE DOS  
NIVELES**

**TESIS  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA**

**PRESENTA:  
EMILIANO PERALTA LÓPEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RAÚL JUÁREZ AMARO**

**HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO  
OCTUBRE DE 2025**

*Dedicado a  
mis padres  
y hermanos*

# Agradecimientos

*Agradezco a mis padres Eva Gisela y Jesús por apoyarme durante toda mi vida y especialmente ahora en mi formación profesional, por alentarme a seguir con las cosas que me apasionan y por mostrarme con su ejemplo que la disciplina y el trabajo constante son necesarios para alcanzar las metas propuestas.*

*A mis hermanos Roberto y Mariana por estar como un apoyo permanente, con quienes he podido compartir inquietudes, dudas de toda índole y una complicidad especial.*

*A mi abuela Evangelina por haberme cuidado durante mi niñez e incluso ahora, mostrando un aprecio especial como sólo una abuela puede tener.*

*A mi abuela María de Jesús por estar presente en mi vida aún a la distancia y quién siempre ha mostrado disposición para recibirme con calidez en su hogar.*

*A Apolo y Brandon por acompañarme en esta travesía por la universidad, sorteando los trabajos, proyectos y adversidades, así como por brindarme su amistad en el proceso.*

*Gracias al Dr. Raúl Juárez Amaro por guiarme en este trabajo y darme la oportunidad de mostrar lo aprendido durante la carrera.*

*Gracias a todos aquellos que aún sin haber sido mencionados explícitamente, han formado parte de mi vida. A la familia que ha estado presente mostrando su apoyo de diferentes maneras; a aquellos amigos que me acompañaron en los juegos, risas y horas de clase; a aquellos profesores que me enseñaron una verdadera pasión e interés por aprender. A todos ellos, gracias.*

# Resumen

El estudio de los sistemas que presentan interacción radiación-materia es fundamental para el área de óptica cuántica, dado que permite comprender diferentes fenómenos, calcular propiedades y fungir como base para la computación cuántica. Un modelo ampliamente utilizado es el de Jaynes-Cummings, que considera a un átomo de dos niveles en interacción con un campo electromagnético cuantizado.

En este trabajo, se estudia el sistema formado por dos átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado, con el objetivo de obtener la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo. Para lograrlo, se propusieron y aplicaron dos transformaciones unitarias, tomando como referencia las transformaciones unitarias para el caso de un solo átomo que permiten simplificar el modelo y alcanzar el resultado buscado. Como resultado principal, se obtuvo la expresión del Hamiltoniano buscado para el sistema de estudio. Además, se generaliza el cálculo para un sistema de  $k$  átomos de dos niveles, del cual se recuperan como casos particulares los correspondientes a uno y dos átomos.

# Abstract

The study of systems exhibiting radiation–matter interaction is fundamental in the field of quantum optics, as it allows one to understand different phenomena, calculate properties, and serve as a basis for quantum computation. A widely used model is the Jaynes–Cummings model, which describes a two-level atom interacting with a quantized electromagnetic field. In this work, we study the system formed by two two-level atoms interacting with a quantized electric field, with the objective of obtaining the expression for the interaction Hamiltonian in the dispersive limit. To this end, we propose and apply two unitary transformations, taking as reference those used in the single-atom case, which allow us to simplify the model and obtain the desired result.

As the main result, we obtain the expression for the interaction Hamiltonian in the dispersive limit for the studied system. Furthermore, we generalize the calculation to a system of  $k$  two-level atoms, from which the cases of one and two atoms are recovered as particular instances.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2. Justificación . . . . .	4
1.3. Hipótesis . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	4
1.4.1. Objetivo general . . . . .	4
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.5. Metas . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Fundamentos de la mecánica cuántica . . . . .	6
2.1.1. Conceptos fundamentales de la mecánica cuántica . . . . .	6
2.1.2. Imágenes de Schrödinger, Heisenberg y de interacción . . . . .	8
2.1.3. Matriz densidad . . . . .	9
2.2. El campo electromagnético . . . . .	9
2.2.1. Descripción clásica del campo electromagnético . . . . .	9
2.2.2. Cuantización del campo electromagnético . . . . .	10
2.3. El átomo de dos niveles . . . . .	13
2.4. Modelo con interacción átomo-campo . . . . .	14
2.5. Transformaciones para alcanzar el límite dispersivo . . . . .	15
2.5.1. Primera transformación . . . . .	15
2.5.2. Segunda transformación . . . . .	19
<b>3. Transformaciones para alcanzar el límite dispersivo</b>	<b>21</b>
3.1. Sistema de dos átomos de dos niveles . . . . .	21
3.1.1. Primera transformación . . . . .	22
3.1.2. Segunda transformación . . . . .	26
<b>4. Resultados y Conclusiones</b>	<b>31</b>
4.1. Resultados . . . . .	31
4.2. Conclusiones . . . . .	32
<b>Referencias</b>	<b>33</b>
<b>Apéndices</b>	

<b>A. Sistema de <math>k</math> átomos de dos niveles</b>	<b>35</b>
A.1. Primera transformación . . . . .	36
A.2. Segunda transformación . . . . .	39

# Índice de figuras

2.1. Esquema de un átomo de dos niveles, mostrando los estados con su energía correspondiente. . . . .	14
3.1. Sistema de estudio: dos átomos de dos niveles dentro de una cavidad donde existe un campo eléctrico cuantizado. . . . .	22

# Capítulo 1

## Introducción

La física pasó por dos grandes revoluciones científicas en la primera mitad del siglo XX, siendo estas la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Ambas teorías surgieron por la incapacidad de la mecánica newtoniana para explicar diferentes fenómenos físicos. Una de las fallas de la teoría clásica se presentó al buscar estudiar el cuerpo negro, lo que conllevó a la catástrofe ultravioleta. Fue gracias a Max Planck y a la idea que éste tuvo, la introducción del cuantum de energía, que se consiguió obtener una descripción teórica que concordaba con los resultados experimentales [1]; otros ejemplos de fallos clásicos son el efecto fotoeléctrico y el calor específico en los sólidos. La cuantización de la energía representó un cambio de paradigma en la física, el de considerar que las cantidades físicas son todas continuas; de tal manera que ahora un sistema no podía poseer valores continuos sino discretos, siendo múltiplos de la constante de Planck ( $\hbar$ ).

La cuantización no se limitó a la energía, sino que esto se daría con otras cantidades físicas como el momento angular; se hallarían otras nuevas cantidades siendo inherentemente discretas, como el espín [2]. También, este proceso continuó hacia otros aspectos de la física, como la cuantización del campo electromagnético [3] y cuyos cuantos reciben el nombre de fotones debido a Gilbert N. Lewis [1]. La formalización de la mecánica cuántica se consiguió con la mecánica ondulatoria de Schrödinger y la mecánica matricial de Heisenberg, las cuales son equivalentes entre sí.

El estudio de los sistemas cuánticos eventualmente llegó a la interacción radiación-materia, la cual se identificó como una interacción de especial interés para diferentes áreas de la física. Además de la cuantización del campo electromagnético, se requiere de una descripción cuántica de los átomos, ya que los niveles energéticos en los átomos son discretos; una primera aproximación para la descripción física se alcanza al considerar que un átomo posee sólo dos estados posibles, el estado base y el estado excitado, siendo entonces un átomo de dos niveles.

La descripción de la interacción radiación-materia se consolida con el trabajo publicado por Edwin Jaynes y Frederick Cummings, modelo que lleva su nombre, en donde no solamente se describe al sistema físico formado por un átomo de dos niveles en interacción con un campo electromagnético cuantizado, sino que se proporciona la solución analítica [4]. Pese a la simplicidad del modelo, éste permite comprender qué sucede en los fenómenos de inter-

acción entre radiación y materia; además, permite calcular propiedades de interés del sistema.

La importancia del modelo de Jaynes-Cummings no es sólo histórica para la física, sino que actualmente sigue siendo un punto de partida para los estudios que se realizan [5–15]. Sin embargo, el modelo posee una limitación crucial, considera un solo átomo de dos niveles, mientras que en la naturaleza los sistemas se componen de una cantidad mucho mayor de elementos. Debido a lo anterior, el siguiente paso para el estudio de la interacción radiación-materia debe considerar un segundo átomo de dos niveles como paso intermedio para alcanzar el modelo general para una cantidad  $k$  de átomos de dos niveles, siendo esto último una descripción más certera de la realidad física. Si bien existen modelos que consideran una cantidad arbitraria de átomos como el de Tavis-Cummings [16], estos no toman en cuenta el límite dispersivo, el cual se describe en el siguiente párrafo.

El Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings se halla constituido por tres términos, el Hamiltoniano del átomo de dos niveles que contiene la frecuencia de transición atómica, el Hamiltoniano del campo electromagnético que incluye la frecuencia de éste y un término de interacción de tipo dipolar. A partir de lo anterior, se puede suponer que la dinámica del sistema existe si las frecuencias del campo y del átomo son similares, fenómeno de resonancia; no obstante, la dinámica existe todo el tiempo, aunque no es tan significativa como cuando las frecuencias son muy similares. A la dinámica existente entre átomo y campo fuera de resonancia se le conoce como límite dispersivo y permite la simplificación del Hamiltoniano que describe al sistema.

Por lo tanto, el presente trabajo busca hallar la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para el sistema formado por dos átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado. Para alcanzar el objetivo se ha de establecer en primera instancia el Hamiltoniano del sistema sin tomar en cuenta aún el límite dispersivo, esto se consigue al sólo considerar la interacción átomo-campo y no la posible interacción átomo-átomo, puesto que tal interacción complica la descripción física incluso para un sistema tan pequeño como el que se busca estudiar. Una vez obtenido el Hamiltoniano base, se requiere hacer uso de las transformaciones unitarias para hallar el Hamiltoniano de interacción del sistema, donde una transformación unitaria permite una descripción equivalente del sistema físico y que preserva ciertos aspectos de interés físico como la preservación del producto interno y la norma entre vectores [17]. Sin embargo, la elección de la transformación unitaria no es trivial, pues no se cuenta con una metodología universal para hallarlas, lo cual representa un reto metodológico. Una vez se alcanza el Hamiltoniano de interacción, se aplica una segunda transformación unitaria que, bajo una cierta consideración, permite llegar al caso del límite dispersivo, concretando así el objetivo de la tesis.

La tesis se conforma por tres capítulos posteriores al presente, estructurados en la siguiente forma: el capítulo 2 comprende el marco teórico en que se sustenta el trabajo, por lo cual en 2.1 se mencionan los aspectos más fundamentales de la mecánica cuántica. En 2.2 se muestra el procedimiento seguido para realizar la cuantización del campo electromagnético y obtener así su Hamiltoniano; mientras que en 2.3 se describen las consideraciones necesarias para establecer el Hamiltoniano del átomo de dos niveles. Es en 2.4 donde se establece finalmente

el modelo de Jaynes-Cummings y en 2.5 se muestra el procedimiento necesario para alcanzar el límite dispersivo para el caso de un átomo de dos niveles. En el capítulo 3 se desarrolla el trabajo, donde se mencionan las consideraciones físicas tomadas y se divide conforme a cada una de las transformaciones unitarias aplicadas. El capítulo 4 engloba los resultados y conclusiones de la tesis. Finalmente, se incluye un apéndice que amplía el trabajo realizado, en el cual se desarrolla con detalle el caso general para  $k$  átomos de dos niveles en interacción con el campo eléctrico, calculando la expresión para el Hamiltoniano en el límite dispersivo. El resultado obtenido permite recuperar, como casos particulares, los Hamiltonianos para uno y dos átomos de dos niveles.

## 1.1. Planteamiento del problema

El desarrollo de la física como ciencia requiere de una continua investigación tanto en la parte teórica como en el área de la experimentación, buscando describir y explicar diferentes fenómenos físicos. En particular, el estudio de la interacción radiación-materia, así como de los diferentes sistemas físicos en que esta puede presentarse, es de especial interés para áreas como lo son la óptica cuántica, la física del estado sólido y la física atómica.

Un modelo de referencia para la interacción radiación-materia es el modelo de Jaynes-Cummings [4], propuesto en 1963, que describe a un sistema de un único átomo de dos niveles que interactúa con un campo electromagnético y el cual posee solución analítica. Dicho trabajo es de relevancia, puesto que a partir de este se han podido estudiar otras fenomenologías [5, 6], calcular propiedades de interés del sistema de estudio [7–10] e inclusive proponer algunos métodos para la computación cuántica [11].

Sin embargo, numerosos trabajos consideran la interacción radiación-materia con un solo átomo [12–15], al igual que en el modelo de Jaynes-Cummings; el problema radica entonces en que los sistemas físicos en la naturaleza no se hallan compuestos por un único átomo o elemento material, sino que se componen de una cantidad mayor de cuerpos, que para sistemas macroscópicos puede ser del orden del número de Avogadro.

Por lo anterior, el estudio de los sistemas en que se ve involucrado más de un átomo es de interés, siendo el siguiente paso un sistema formado por dos átomos de dos niveles que interactúan con un campo eléctrico cuantizado. Aunque el sistema de estudio no considera la interacción átomo-átomo, pues esta interacción puede ser de diferentes tipos, ni se considera que los átomos sean de especies químicas distintas, ya que esto complica el problema a estudiar. Además, se busca trabajar dentro del límite dispersivo, el cual se refiere a la existencia de dinámica en el sistema de estudio incluso cuando este se halla fuera de resonancia, es decir, la frecuencia de transición atómica difiere significativamente de la frecuencia del campo eléctrico, lo que se conoce como gran desintonía [18].

El trabajo pretende entonces hallar el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para el sistema de dos átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado. Para alcanzar este objetivo, se debe hacer uso de transformaciones unitarias, pero no se

cuenta con una metodología que garantice hallar la transformación unitaria apropiada para todo tipo de problema, lo cual constituye uno de los retos de la tesis.

## 1.2. Justificación

El estudio de los sistemas con interacción radiación-materia es de gran relevancia, ya que permite una mejor comprensión de este tipo de interacción, lo que a su vez facilita que el conocimiento obtenido pueda ser usado como base para investigaciones tanto en ciencia básica como en aplicaciones prácticas. Por ello, el presente trabajo busca aportar al área de la óptica cuántica, así como a campos relacionados, donde también se aborda el estudio de la interacción radiación-materia.

Por otra parte, los estudios previos en el área se han basado mayormente en el modelo de Jaynes-Cummings, que describe un sistema formado por un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético cuantizado. No obstante, la mayoría de los sistemas físicos de interés contienen más de un átomo, por lo que, aunque el modelo de Jaynes-Cummings proporciona una amplia información sobre la interacción radiación-materia, presenta una gran limitación al considerar sólo un átomo. Es así que este trabajo busca avanzar hacia un modelo más general al incorporar un segundo átomo de dos niveles en el sistema de estudio dentro del límite dispersivo, lo que servirá como base para futuras investigaciones orientadas a modelar sistemas con un número mayor de átomos, donde el caso general deberá incluir una cantidad  $k$  de átomos.

Finalmente, al ser una investigación de carácter teórico, no se requieren instalaciones de laboratorio ni equipo especializado, lo que permite realizar el trabajo de manera eficiente en la Universidad Tecnológica de la Mixteca, utilizando únicamente como recurso electrónico una computadora portátil para la consulta de bibliografía y artículos que fundamentarán el desarrollo de la investigación.

## 1.3. Hipótesis

Es posible hallar un conjunto de transformaciones sobre el Hamiltoniano de Interacción de dos átomos de dos niveles interactuando con un campo eléctrico cuantizado en el límite dispersivo que permita simplificar la expresión.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Obtener la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo en una cavidad cuántica en la que se tiene la interacción de un campo eléctrico cuantizado con dos átomos de dos niveles.

#### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Hallar las transformaciones necesarias para la obtención del Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para un campo eléctrico cuantizado con dos átomos de dos niveles.
- Obtener el Hamiltoniano de interacción como un aporte al área de la óptica cuántica.

#### **1.5. Metas**

- Estudiar los conceptos y principios de la mecánica cuántica necesarios para la descripción del sistema de interés.
- Realizar el análisis del campo electromagnético dentro del marco de la mecánica cuántica.
- Estudiar el átomo de dos niveles y obtener su Hamiltoniano.
- Realizar un análisis del modelo de Jaynes-Cummings que describe a un sistema formado por un átomo de dos niveles interactuante con un campo cuantizado.
- Hallar la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para un sistema de dos átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Fundamentos de la mecánica cuántica

Para la descripción de los sistemas a escalas aún más pequeñas que las micrométricas, como lo son las escalas atómicas y nucleares, es necesario abandonar la mecánica desarrollada por Newton y hacer uso de las herramientas que brinda la mecánica cuántica. Tales conceptos básicos se describen en la presente sección.

#### 2.1.1. Conceptos fundamentales de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica se consolida como una teoría física a partir de un conjunto de postulados que se toman como verdaderos y que parten de las observaciones experimentales; así como de una ecuación diferencial, la ecuación de Schrödinger, que da paso a la descripción de numerosos sistemas.

#### Postulados de la mecánica cuántica

Los postulados forman el marco de trabajo de la mecánica cuántica, los cuales son los siguientes [19, 20]:

- **Postulado 1. El estado de un sistema**

El estado de cualquier sistema físico está especificado, para cada tiempo  $t$ , por un vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  dentro de un espacio de Hilbert  $H$ ;  $|\psi(t)\rangle$  contiene toda la información necesaria acerca del sistema. Cualquier superposición de vectores de estado es también un vector de estado.

- **Postulado 2. Observables y operadores**

A cada cantidad física medible  $A$ , llamada observable, le corresponde un operador lineal Hermitiano  $\hat{A}$  cuyos eigenvectores forman una base completa.

- **Postulado 3. Mediciones y eigenvalores de operadores**

La medición de un observable  $A$  puede ser representada por la acción de  $\hat{A}$  sobre un vector de estado  $|\psi(t)\rangle$ . El único posible resultado de tal medición es uno de los eigenvalores  $a_n$  del operador  $\hat{A}$ . Si el resultado de la medición de  $\hat{A}$  sobre un estado

$|\psi(t)\rangle$  es  $a_n$ , entonces el estado del sistema, inmediatamente luego de la medición, cambia a  $|\psi_n\rangle$ , es decir,

$$\hat{A}|\psi(t)\rangle = a_n|\psi_n\rangle, \quad (2.1)$$

donde  $a_n = \langle\psi_n|\psi(t)\rangle$ .

■ **Postulado 4. Resultado probabilístico de las mediciones**

Si se cuenta con un caso discreto o uno continuo se tiene lo siguiente:

- **Espectro discreto**

Cuando se mide un observable  $A$  de un sistema en un estado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad de obtener uno de sus eigenvalores no degenerados (se dice que un eigenvalor es degenerado si diferentes eigenvectores poseen el mismo eigenvalor), está dado por

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}. \quad (2.2)$$

Si el eigenvalor es  $m$ -degenerado ( $m$  eigenvectores poseen el mismo eigenvalor), entonces

$$P_n(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle\psi_n^j|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^m |a_n^{(j)}|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}. \quad (2.3)$$

- **Espectro continuo**

Para determinar la densidad de probabilidad de que una medición de  $\hat{A}$  conduzca a un valor entre  $a$  y  $a+da$  para un sistema originalmente en el estado  $|\psi\rangle$  se cuenta con la relación dada por

$$\frac{dP(a)}{da} = \frac{|\psi(a)|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi(a)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(a')|^2 da'}. \quad (2.4)$$

■ **Postulado 5. La evolución temporal de un sistema**

La evolución temporal de un vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$  de un sistema está gobernado por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad (2.5)$$

donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía total del sistema.

### Ecuación de Schrödinger

La ecuación que describe a los sistemas cuánticos cerrados, es la ecuación de Schrödinger [1], introducida por primera vez por Erwin Schrödinger en 1926, está dada por

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \quad (2.6)$$

la cual en forma más general, al considerar la dependencia temporal, puede ser escrita como

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle. \quad (2.7)$$

## 2.1.2. Imágenes de Schrödinger, Heisenberg y de interacción

Para el estudio de la evolución temporal del sistema se cuenta con diferentes perspectivas, conocidas como imágenes, que abordan tal cuestión. Estas imágenes son equivalentes entre sí debido a que se hallan relacionados por transformaciones unitarias [2, 19].

### ■ Imagen de Schrödinger

En la imagen de Schrödinger, los vectores de estado muestran dependencia del tiempo, sin embargo los operadores no lo hacen, tal que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.8)$$

en particular esta imagen tiene utilidad cuando el operador Hamiltoniano no muestra dependencia del tiempo [1].

Se encuentra que la evolución temporal de un estado está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

donde  $\hat{U}(t, t_0)$  es el operador de evolución temporal, dado por

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\hat{H}/\hbar}.$$

### ■ Imagen de Heisenberg

En la imagen de Heisenberg, la dependencia temporal recae en los operadores [19]. La dependencia temporal de un operador  $\hat{A}$  en este esquema queda definido como

$$\hat{A}_H(t) = e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{A} e^{-it\hat{H}/\hbar}.$$

Así que la evolución temporal queda expresada en la ecuación de movimiento de Heisenberg, dada por

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H, \hat{H}]. \quad (2.9)$$

### ■ Imagen de Interacción

En la imagen de interacción, tanto los operadores como los vectores de estado evolucionan en el tiempo [19]. De lo anterior, surge la necesidad de tener una ecuación de movimiento para los vectores de estado y otra para los operadores.

La ecuación para los vectores de estado es

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle_I}{dt} = \hat{V}_I |\psi(t)\rangle_I, \quad (2.10)$$

donde  $\hat{V}$  es un operador de interés y en la imagen de interacción queda definido como

$$\hat{V}_I = e^{it\hat{H}_0/\hbar} \hat{V} e^{-it\hat{H}_0/\hbar}. \quad (2.11)$$

Por su parte, la ecuación de movimiento para los operadores es

$$\frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0], \quad (2.12)$$

donde  $\hat{A}_I(t)$  se halla usando la ecuación (2.11).

### 2.1.3. Matriz densidad

A diferencia de los sistemas de estudio más simples donde es posible tener un estado del sistema bien definido, en la realidad no es frecuente conocer con exactitud el estado de un sistema físico [20]. No obstante, el problema anterior se ve resuelto con la introducción del operador o matriz densidad  $\hat{\rho}$ , el cual queda definido como

$$\hat{\rho} = \sum_j \rho_j |j\rangle\langle j|,$$

donde  $|j\rangle$  refiere a alguna base que cumpla la propiedad de ser ortogonal y que no necesariamente es aquella formada por los eigenestados del sistema de estudio.

La ecuación que describe la evolución temporal de  $\hat{\rho}$  se muestra a continuación

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (2.13)$$

la cual es conocida como la ecuación de von Neumann [1].

## 2.2. El campo electromagnético

Para un adecuado estudio del sistema de interés, es necesario conocer cómo es que el campo electromagnético se expresa dentro del marco de la mecánica cuántica. En primera instancia, se ha de tratar el campo electromagnético descrito con las ecuaciones de Maxwell, para luego hallar el Hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado.

### 2.2.1. Descripción clásica del campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell, en su forma diferencial, se hallan dadas por las siguientes expresiones [21, 22]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

donde  $\vec{H}$  es el vector de campo magnético,  $\vec{J}$  es la densidad de corriente,  $\vec{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico,  $\vec{E}$  es el vector de campo eléctrico,  $\vec{B}$  es el vector de inducción magnética y  $\rho$  es la densidad de carga. Es a partir de estas ecuaciones que se consigue una descripción completa del campo electromagnético de forma clásica, en particular si estas ecuaciones son usadas en ausencia de cargas o corrientes, estas pueden reducirse a las ecuaciones de Maxwell en el vacío [23]:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

### 2.2.2. Cuantización del campo electromagnético

Para realizar la cuantización del campo electromagnético se sigue el procedimiento de la cuantización monomodal descrito por [24, 25], entonces se toma una cavidad de volumen  $V$  encerrado por espejos perfectamente reflejantes. En este espacio se cumplen las ecuaciones de Maxwell para el vacío listadas previamente y para un campo electromagnético monomodo y monocromático (i.e. una única frecuencia), el campo eléctrico y magnético pueden ser expresados en la forma

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} \sqrt{\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}} q(t) \sin(kz), \quad (2.14)$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{\hat{y}}{c^2 k} \sqrt{\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (2.15)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del campo,  $k$  es el número de onda,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y  $q(t)$  está dado como

$$q(t) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}} E_0 \sin(\omega t),$$

con  $E_0$  la amplitud del campo eléctrico.

Se cuenta además, con las siguientes relaciones,

$$B_0 = \frac{E_0}{c},$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0},$$

$$k = \frac{\omega}{c},$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.

Este campo se propaga en la dirección  $z$  del sistema de referencia que se establece adecuadamente, además de que se trata de un campo polarizado, por lo cual  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se hallan en una única dirección. Por otra parte, de la descripción clásica [26], se conoce que las densidades de energía de campo eléctrico y magnético ( $u_E$  y  $u_B$  respectivamente) están dadas en la forma

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Entonces, la densidad de energía del campo electromagnético es

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right).$$

Si la expresión anterior es integrada sobre todo el volumen, es posible expresar el Hamiltoniano clásico del campo electromagnético como sigue

$$H_F = \frac{1}{2} \int_V dV \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right). \quad (2.16)$$

En este Hamiltoniano se sustituyen las expresiones (2.14) y (2.15). Luego de realizar la integral correspondiente se consigue reducir al Hamiltoniano a

$$H_F = \frac{1}{2} \left( \omega^2 q^2 + p^2 \right), \quad (2.17)$$

donde se usó la relación

$$p = \dot{q}.$$

### Operadores de creación, aniquilación y de número

Se definen a continuación los operadores de creación, aniquilación y de número, los cuales actúan sobre estados dados en la base de número [2] o también conocidos como estados de Fock.

■ **Operador de creación**

Se denota por  $\hat{a}^\dagger$  y actúa en la forma

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle.$$

■ **Operador de aniquilación**

Es denotado como  $\hat{a}$  y cumple con

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

■ **Operador de número**

Se define como  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , de forma que

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle.$$

Es útil mencionar que los operadores de creación y aniquilación cumplen la siguiente relación de conmutación, siempre que sean aplicados a bosones

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Retornando a la cuantización del campo electromagnético, se promueve a  $H$ ,  $p$  y  $q$  en la ecuación (2.17) a operadores

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2} \left( \omega^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2 \right), \quad (2.18)$$

y se encuentra que la relación entre los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  con  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  es la siguiente:

$$\hat{q} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$

$$\hat{p} = \frac{\sqrt{2}\hbar\omega}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

tal que luego de introducir las expresiones, la ecuación obtenida es esencialmente la ecuación para el oscilador armónico [27], la cual puede entonces expresarse en la forma

$$\hat{H}_F = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right),$$

donde se hizo uso de la definición para el operador de número y de la relación de conmutación de los operadores de creación y de aniquilación.

Así pues, los eigenestados del campo electromagnético cuantizado están dados en la base de número (estados de Fock), tal que

$$\hat{H}_F |n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (2.19)$$

Dado que se trata de una ecuación de eigenvalores, la ecuación previa puede ser expresada como

$$\hat{H}_F|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle. \quad (2.20)$$

### 2.3. El átomo de dos niveles

La importancia del estudio del átomo de dos niveles está justificado por la amplia variedad de fenómenos que pueden comprenderse al considerar la interacción de un campo quasi-monocromático y un átomo de dos niveles, de ahí que definir el Hamiltoniano que describe al sistema se vuelve crucial. Se entiende por átomo de dos niveles a aquel en que el átomo puede hallarse en uno de dos estados, en el estado base, que en adelante será denotado como  $|g\rangle$  (debido a la palabra en inglés *ground*), o en el estado excitado, en adelante denotado por  $|e\rangle$  (de la palabra en inglés *excited*).

#### Hamiltoniano del átomo de dos niveles

Del esquema que se muestra en la figura 2.1, se observa que al estado  $|e\rangle$  le corresponde una energía  $\frac{\hbar\omega_a}{2}$  ( $\omega_a$  es la frecuencia de transición entre los estados  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ ), y al estado  $|g\rangle$  le corresponde una energía  $-\frac{\hbar\omega_a}{2}$ , de acuerdo a cómo se definió el 0 de la energía, de lo cual es sencillo verificar que la diferencia energética entre ambos niveles es simplemente

$$E_e - E_g = \frac{\hbar\omega_a}{2} - \left(-\frac{\hbar\omega_a}{2}\right) = \hbar\omega_a.$$

De acuerdo al formalismo de la mecánica cuántica, un operador  $\hat{A}$  puede ser escrito en la siguiente forma:

$$\hat{A} = \sum_a a|a\rangle\langle a|,$$

con  $a$  el eigenvalor del operador en el estado  $|a\rangle$  y  $|a\rangle\langle a|$  el operador de proyección [2]. Así, para un átomo de dos niveles aislado, es decir sin interacción, su Hamiltoniano puede ser escrito en la forma

$$\hat{H}_A = \frac{\hbar\omega_a}{2}|e\rangle\langle e| - \frac{\hbar\omega_a}{2}|g\rangle\langle g|. \quad (2.21)$$

#### Matrices de Pauli y operadores de subida y bajada atómicos

A continuación se definen las matrices de Pauli [2], las cuales serán utilizadas para el Hamiltoniano del átomo de dos niveles:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por su parte, los operadores de subida y bajada atómicos están expresados en términos de las matrices de Pauli y se definen como



Figura 2.1: Esquema de un átomo de dos niveles, mostrando los estados con su energía correspondiente.

$$\hat{\sigma}_+ \equiv \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y); \quad \hat{\sigma}_- \equiv \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y).$$

Ahora, se hace uso de la representación matricial que tienen los estados  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$ , tal que

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se recurre a la definición dada para la matriz de Pauli  $\hat{\sigma}_z$ , de forma que el Hamiltoniano del átomo de dos niveles sin interacción se reduce a

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z. \quad (2.22)$$

## 2.4. Modelo con interacción átomo-campo

El estudio de los sistemas en donde la luz y la materia interaccionan es amplio; no obstante, un primer acercamiento se consigue al estudiar la interacción entre un campo electromagnético cuantizado y un sistema atómico, particularmente un átomo de dos niveles. Pese a la simplicidad del modelo, resulta interesante y esclarecedor el modelo propuesto originalmente por Edwin Thompson Jaynes y Fred Cummings en 1963 [28], de ahí que se haga énfasis en dicho modelo; de hecho, este modelo cuenta con solución analítica y existen diferentes formas de resolverlo [29].

## Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings propone un Hamiltoniano para la interacción entre un campo electromagnético cuantizado y un átomo de dos niveles en la forma

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_I, \quad (2.23)$$

donde  $\hat{H}_F$  es el Hamiltoniano para el campo electromagnético cuantizado desarrollado en la sección 2.2.2,  $\hat{H}_A$  es el Hamiltoniano para el átomo de dos niveles sin interacción y  $\hat{H}_I$  es el término que indica la interacción existente entre átomo y campo, tal interacción se debe al dipolo eléctrico del átomo [4]. De forma que el Hamiltoniano resultante está dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.24)$$

donde

$$\Omega = \frac{d\varepsilon_w}{\epsilon_0 V} \sin(\kappa z), \quad (2.25)$$

es la frecuencia de Rabi para el modo del campo de la cavidad.  $V$  es el volumen de la cavidad usada para la cuantización del campo electromagnético,  $d$  es la matriz de dipolo eléctrico y  $\varepsilon_w$  es la magnitud del campo eléctrico.

En la ecuación (2.24), el último término correspondiente a la interacción representa los dos procesos que pueden llevarse a cabo,  $\hat{\sigma}_+\hat{a}$  puede ser entendido como el proceso en que un fotón es aniquilado y el átomo sube un nivel de energía, o de forma equivalente, la absorción de un fotón del campo electromagnético por el átomo implica la excitación de éste último tal que pasa del estado base  $|g\rangle$  al estado excitado  $|e\rangle$ . Por su parte, el término  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$  indica lo opuesto, es decir, el decaimiento del átomo al estado base y la emisión de un fotón.

## 2.5. Transformaciones para alcanzar el límite dispersivo

La presente sección busca mostrar el proceso establecido para obtener el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para un sistema formado por un átomo de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado, lo cual se consigue a través de la aplicación de dos transformaciones unitarias.

### 2.5.1. Primera transformación

En la sección del modelo de Jaynes-Cummings, se estableció que el Hamiltoniano que describe a un átomo de dos niveles interactuante con un campo eléctrico cuantizado, se halla descrito por la siguiente expresión:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{N} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.26)$$

donde se define  $\lambda = \hbar\Omega$  para simplificar la notación.

Por otro lado, la evolución temporal del sistema se encuentra descrita por la expresión

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] = \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}\hat{H} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho}.. \quad (2.27)$$

Para continuar, se define la transformación unitaria

$$\hat{U}_1 = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}, \quad (2.28)$$

y su adjunto Hermitiano dado por

$$\hat{U}_1^\dagger = e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}. \quad (2.29)$$

Ahora, se define un nuevo operador  $\hat{\rho}_I$  expresado por

$$\hat{\rho}_I = \hat{U}_1 \hat{\rho} \hat{U}_1^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}, \quad (2.30)$$

donde a  $\hat{\rho}_I$  se le calculará su evolución temporal de forma análoga a la ecuación (2.27), tal que se busca llegar a una expresión como la siguiente:

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I, \hat{\rho}_I],$$

en donde  $\hat{H}_I$  es el Hamiltoniano de interacción del sistema.

Para esto, se desarrolla la derivada temporal como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_I}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \right), \\ \frac{d\hat{\rho}_I}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \right) \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \frac{d\hat{\rho}}{dt} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \\ &\quad + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} \frac{d}{dt} \left( e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \right), \\ \frac{d\hat{\rho}_I}{dt} &= i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \frac{d\hat{\rho}}{dt} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \\ &\quad + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \left( -i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) \right). \end{aligned}$$

Se hace uso de la definición dada por la ecuación (2.30) y se ordenan los términos, tal que

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) \hat{\rho}_I - i\omega \hat{\rho}_I \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \frac{d\hat{\rho}}{dt} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}.$$

Se introduce la ecuación (2.27) en la expresión previa,

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) \hat{\rho}_I - i\omega \hat{\rho}_I \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \left( \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}\hat{H} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho} \right) e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}.$$

Se distribuyen los términos y se introduce el operador identidad  $\hat{I}$  como se muestra,

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) \hat{\rho}_I - i\omega \hat{\rho}_I \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) + \frac{i}{\hbar} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} \hat{I} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}$$

$$-\frac{i}{\hbar} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} \hat{I} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}.$$

Se elige al operador identidad en la forma

$$\hat{I} = e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}. \quad (2.31)$$

Se sustituyen y agrupan los primeros términos en forma de un commutador,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_I}{dt} &= i\omega \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_I \right] + \frac{i}{\hbar} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}. \end{aligned}$$

Se hace uso nuevamente de la definición dada por (2.30),

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_I \right] + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_I e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} - \frac{i}{\hbar} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\rho}_I.$$

Es posible simplificar la expresión anterior en la forma de un segundo commutador,

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_I \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}, \hat{\rho}_I \right]. \quad (2.32)$$

Entonces se busca calcular la transformación sobre el Hamiltoniano  $\hat{H}$  identificada en adelante por  $\hat{H}'$ ,

$$\hat{H}' = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{H} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)},$$

donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings denotado por la ecuación (2.26), es decir,

$$\hat{H}' = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \left( \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{N} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \right) e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)}. \quad (2.33)$$

Es conveniente realizar la transformación término a término, pero primero se establecerán las relaciones de commutación entre los operadores involucrados.

- $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1;$
- $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a};$
- $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger;$
- $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+] = 2\hat{\sigma}_+;$
- $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_-] = -2\hat{\sigma}_-;$
- $[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z.$

Cualquier otra relación de commutación posible entre los operadores involucrados da como resultado que dichos operadores commutan entre sí.

Se procede a mostrar el cálculo de la transformación sobre el primer término de  $\hat{H}'$ , dado que el procedimiento es análogo para los demás términos y sólo se mostrará el resultado de estos.

Para el primer término identificado como  $\hat{H}'_1$ ,

$$\hat{H}'_1 = \frac{\hbar\omega_a}{2} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\sigma}_z e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)},$$

se hace uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [30],

$$e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\sigma}_z e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} = \hat{\sigma}_z + i\omega t \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z \right] + \frac{1}{2!} (i\omega t)^2 \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z \right] \right] + \dots,$$

pero

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{\sigma}_z] &= 0; \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z] &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que

$$e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{\sigma}_z e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} = \hat{\sigma}_z,$$

y por consiguiente

$$\hat{H}'_1 = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z.$$

Luego

$$\hat{H}'_2 = \hbar\omega e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{N} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} = \hbar\omega \hat{N}.$$

Se ha de notar que para realizar la transformación en los casos donde aparecen  $\hat{a}\hat{\sigma}_+$  y  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$  es necesario introducir al operador identidad en el medio de estos, tal como se expresa en (2.31). Entonces se obtiene como resultado:

$$\hat{H}'_3 = \lambda e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} = \lambda\hat{a}\hat{\sigma}_+;$$

$$\hat{H}'_4 = \lambda e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z)} = \lambda\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-.$$

Se introducen estos resultados en (2.33),

$$\hat{H}' = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{N} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.34)$$

donde se aprecia que (2.26) y (2.34) son idénticas. Se introduce a (2.34) en (2.32),

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = i\omega \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_I \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{N} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \hat{\rho}_I \right]$$

Se une a los conmutadores y se agrupan términos comunes,

$$\frac{d\hat{\rho}_I}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar(\omega_a - \omega)}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \hat{\rho}_I \right].$$

De la ecuación previa se puede identificar al Hamiltoniano de interacción dado por

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar(\omega_a - \omega)}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (2.35)$$

Se define

$$\Delta = \omega_a - \omega,$$

tal que

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.36)$$

es entonces la expresión para el Hamiltoniano de interacción del sistema de un átomo de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado.

### 2.5.2. Segunda transformación

La segunda transformación unitaria es aquella que permite obtener al Hamiltoniano del sistema en el límite dispersivo. Se propone al siguiente operador unitario:

$$\hat{U}_2 = e^{\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}, \quad (2.37)$$

y su adjunto Hermitiano

$$\hat{U}_2^\dagger = e^{-\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}, \quad (2.38)$$

donde  $\eta$  debe determinarse.

A continuación, se define el Hamiltoniano efectivo o de interacción en el límite dispersivo dado por

$$\hat{H}_{eff} = \hat{U}_2 \hat{H}_I \hat{U}_2^\dagger = e^{\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)} \hat{H}_I e^{-\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}.$$

Se sustituye en la expresión previa el resultado hallado en la ecuación (2.36)

$$\hat{H}_{eff} = e^{\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)} \left\{ \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \right\} e^{-\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}.$$

De manera análoga a la sección anterior, se desarrolla la transformación unitaria, pero bajo la condición de que

$$\eta \ll 1,$$

por lo que se despreciarán los términos con  $\eta^2$  y potencias mayores en  $\eta$ , tal que

$$\hat{H}_{eff} = (\lambda - \hbar\Delta\eta) (\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) + \left(\frac{\hbar\Delta}{2} + \lambda\eta\right) \hat{\sigma}_z + 2\lambda\eta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z + \lambda\eta. \quad (2.39)$$

Ahora, si se cumple la condición dada por

$$(\lambda - \hbar\Delta\eta) = 0 \Leftrightarrow \eta = \frac{\lambda}{\hbar\Delta},$$

entonces la ecuación (2.39) se reduce a

$$\hat{H}_{eff} = \left(\frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}\right) \hat{\sigma}_z + \frac{2\lambda^2}{\hbar\Delta} \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}. \quad (2.40)$$

Se define lo siguiente:

$$\Delta_D = \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta},$$

$$\chi = \frac{2\lambda^2}{\hbar\Delta}..$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \Delta_D \hat{\sigma}_z + \chi \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}, \\ \hat{H}_{eff} &= \Delta_D \hat{\sigma}_z + \chi \hat{N} \hat{\sigma}_z + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Donde (2.41) es el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para un átomo de dos niveles interactuando con un campo eléctrico cuantizado.

# Capítulo 3

## Transformaciones para alcanzar el límite dispersivo para el caso de dos átomos

### 3.1. Sistema de dos átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado

Para llevar a cabo el trabajo de la presente tesis, se establece en primera instancia el sistema a estudiar. Se considera que el sistema involucra a dos átomos de dos niveles, por lo que los Hamiltonianos de los átomos serán idénticos, salvo por una etiqueta que identifica a los operadores de cada uno; cada átomo posee interacción con el campo eléctrico cuantizado, pero no se considera que exista interacción del tipo átomo-átomo. La justificación física de no tomar en cuenta la interacción átomo-átomo es que estos se hallan a una distancia suficientemente lejana entre sí como para que ningún átomo “note” la presencia del otro. A partir de lo anterior, el Hamiltoniano que describe al sistema está dado por la siguiente expresión:

$$\hat{H}_2 = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}), \quad (3.1)$$

en donde los superíndices usados en los operadores permiten identificar si un operador se corresponde con uno u otro de los dos átomos involucrados. En las subsecciones siguientes se mostrará el desarrollo para obtener el Hamiltoniano en el límite dispersivo para este sistema. Se ha de notar que ambos átomos poseen la misma frecuencia de transición  $\omega_a$ , dado que se trata de la misma especie química; además, lo anterior conlleva a que la interacción átomo-campo sea del mismo tipo y se denote únicamente por  $\lambda$ .

Antes de desarrollar las transformaciones, es necesario notar que las reglas de commutación establecidas para el caso de un átomo se siguen manteniendo para el caso presente. Para los operadores del campo:

- $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ;

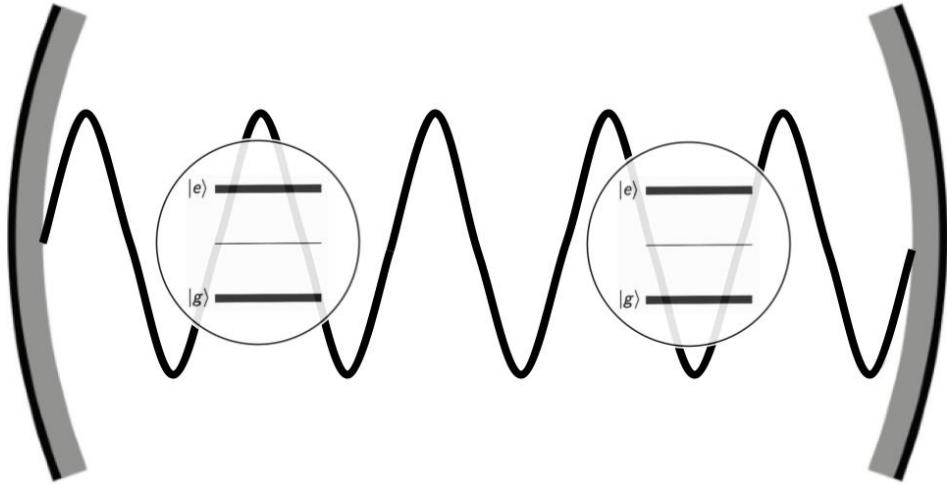


Figura 3.1: Sistema de estudio: dos átomos de dos niveles dentro de una cavidad donde existe un campo eléctrico cuantizado.

- $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a};$
- $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger.$

Para cada uno de los átomos, se cumplen las siguientes relaciones de commutación:

- $[\hat{\sigma}_z^{(i)}, \hat{\sigma}_+^{(i)}] = 2\hat{\sigma}_+^{(i)};$
- $[\hat{\sigma}_z^{(i)}, \hat{\sigma}_-^{(i)}] = -2\hat{\sigma}_-^{(i)};$
- $[\hat{\sigma}_+^{(i)}, \hat{\sigma}_-^{(i)}] = \hat{\sigma}_z^{(i)},$

donde  $i = 1, 2$ .

Por su parte, los operadores del átomo 1 commutan con los operadores del átomo 2 puesto que realizar una medición sobre el átomo 1 y luego sobre el átomo 2 es completamente equivalente a realizar primero la medición sobre el átomo 2 y luego sobre el átomo 1. Esto último es análogo a lo que sucede en el caso de un átomo, donde los operadores del campo y del átomo commutan entre sí, dado que los eigenvectores de estos operadores corresponden a espacios vectoriales diferentes; lo cual se sustenta en el uso del producto directo de vectores [30]. Entonces, todos los commutadores no mostrados explícitamente, dan como resultado cero.

### 3.1.1. Primera transformación

De igual manera al caso de un átomo, se ha de proponer la transformación unitaria, la cual se halla expresada de la siguiente forma:

$$\hat{U}_3 = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})}, \quad (3.2)$$

y su adjunto Hermitiano dado por

$$\hat{U}_3^\dagger = e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})}. \quad (3.3)$$

Se recuerda que el operador densidad contiene toda la información del sistema, para el sistema de dos átomos será denotado por  $\hat{\rho}_2$  y su evolución temporal expresada como

$$\frac{d\hat{\rho}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}_2\hat{H}_2 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_2\hat{\rho}_2. \quad (3.4)$$

Se sigue el procedimiento para el caso de un átomo, por lo que se aplica la transformación a  $\hat{\rho}_2$ , es decir,

$$\hat{\rho}_{2,I} = \hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger, \quad (3.5)$$

donde los subíndices en  $\hat{\rho}_{2,I}$  refieren a que se trata de la matriz de densidad para dos átomos de dos niveles y que dicho operador se halla descrito en la imagen de interacción. Luego, se calcula su evolución temporal,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} &= \frac{d\hat{U}_3}{dt}\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger + \hat{U}_3\frac{d\hat{\rho}_2}{dt}\hat{U}_3^\dagger + \hat{U}_3\hat{\rho}_2\frac{d\hat{U}_3^\dagger}{dt}, \\ \frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} &= i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right) \hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger + \hat{U}_3\frac{d\hat{\rho}_2}{dt}\hat{U}_3^\dagger \\ &\quad + \hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger \left( -i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right) \right). \end{aligned}$$

Se usan las relaciones dadas por las ecuaciones (3.4) y (3.5),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} &= i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right) \hat{\rho}_{2,I} + \hat{U}_3 \left( \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}_2\hat{H}_2 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_2\hat{\rho}_2 \right) \hat{U}_3^\dagger \\ &\quad - \hat{\rho}_{2,I} \left( i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right) \right). \end{aligned}$$

Se simplifica la expresión anterior y se introduce el operador identidad  $\hat{I}$ ,

$$\frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = \left[ i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right), \hat{\rho}_{2,I} \right] + \frac{i}{\hbar}\hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{I}\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger - \frac{i}{\hbar}\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{I}\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger.$$

Se elige que el operador identidad tome la siguiente forma  $\hat{I} = \hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3$ ,

$$\frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = \left[ i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right), \hat{\rho}_{2,I} \right] + \frac{i}{\hbar}\hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger - \frac{i}{\hbar}\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3\hat{\rho}_2\hat{U}_3^\dagger.$$

Se usa nuevamente la relación dada por (3.5) y se simplifica la expresión,

$$\frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ -\hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} \right), \hat{\rho}_{2,I} \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger, \hat{\rho}_{2,I} \right]. \quad (3.6)$$

Ahora, se busca calcular la transformación  $\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger$ , tal que

$$\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger = \hat{U}_3 \left( \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) \right)$$

$$+ \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)})\right)\hat{U}_3^\dagger.$$

Se distribuye la transformación entre los términos del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}\hat{U}_3\hat{H}_2\hat{U}_3^\dagger &= \hbar\omega\hat{U}_3\hat{N}\hat{U}_3^\dagger + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{U}_3^\dagger + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(2)}\hat{U}_3^\dagger \\ &+ \lambda(\hat{U}_3\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{U}_3^\dagger + \hat{U}_3\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}\hat{U}_3^\dagger) + \lambda(\hat{U}_3\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{U}_3^\dagger + \hat{U}_3\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}\hat{U}_3^\dagger).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Se aplica la transformación término a término:

- Para el primer término,

$$\hat{U}_3\hat{N}\hat{U}_3^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})}\hat{N}e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})}.$$

Se utiliza la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorff,

$$\hat{U}_3\hat{N}\hat{U}_3^\dagger = \hat{N} + i\omega t\left[\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{N}\right] + \dots,$$

pero  $\hat{N}$  commuta con  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$ ,  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  y consigo mismo, por lo que

$$\hat{U}_3\hat{N}\hat{U}_3^\dagger = \hat{N}.$$

- Posteriormente,

$$\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{U}_3^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})}\hat{\sigma}_z^{(1)}e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})},$$

$$\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{U}_3^\dagger = \hat{N} + i\omega t\left[\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)}\right] + \dots$$

Pero  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$  commuta con los operadores presentes, tal que

$$\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_z^{(1)}.$$

- De forma similar al término previo,

$$\hat{U}_3\hat{\sigma}_z^{(2)}\hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_z^{(2)}.$$

- Para los términos que involucran a dos operadores, se introduce el operador identidad entre estos en la forma  $\hat{I} = \hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3$ ,

$$\hat{U}_3\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{U}_3^\dagger = \hat{U}_3\hat{a}\hat{I}\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{U}_3^\dagger = \hat{U}_3\hat{a}\hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{U}_3^\dagger.$$

Por propiedades de los operadores, se puede calcular la transformación sobre  $\hat{a}$  y la transformación para  $\hat{\sigma}_+^{(1)}$  por separado y luego conjuntar los resultados, por lo que

- $$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})} \hat{a} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})},$$

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} + i\omega t \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{a} \right] + \dots,$$

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} + i\omega t \left\{ [\hat{N}, \hat{a}] + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_z^{(1)}, \hat{a}] + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{a}] \right\} + \dots.$$

Se usan las relaciones de conmutación, obteniendo

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} + i\omega t \{-\hat{a} + 0 + 0\} + \dots = \hat{a} + (-i\omega t)\hat{a} + \frac{(-i\omega t)^2}{2!}\hat{a} + \dots,$$

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} \left( 1 + (-i\omega t) + \frac{(-i\omega t)^2}{2!} + \dots \right),$$

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} e^{-i\omega t}.$$

- Mientras que

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})} \hat{\sigma}_+^{(1)} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})},$$

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(1)} + i\omega t \left[ \hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \dots,$$

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(1)} + i\omega t \left\{ [\hat{N}, \hat{\sigma}_+^{(1)}] + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_z^{(1)}, \hat{\sigma}_+^{(1)}] + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_z^{(2)}, \hat{\sigma}_+^{(1)}] \right\} + \dots$$

Se utilizan las relaciones de conmutación, tal que

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(1)} + i\omega t \left\{ 0 + \frac{1}{2}(2\hat{\sigma}_+^{(1)}) + 0 \right\} + \dots = \hat{\sigma}_+^{(1)} + (i\omega t)\hat{\sigma}_+^{(1)} + \frac{(i\omega t)^2}{2!}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \dots,$$

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(1)} \left( 1 + (i\omega t) + \frac{(i\omega t)^2}{2!} + \dots \right),$$

$$\hat{U}_3 \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(1)} e^{i\omega t}.$$

Entonces,

$$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} e^{-i\omega t} \hat{\sigma}_+^{(1)} e^{i\omega t} = \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)}.$$

De forma similar, se encuentran las transformaciones restantes, obteniendo lo siguiente:

- $$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)};$$
- $$\hat{U}_3 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)};$$
- $$\hat{U}_3 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{U}_3^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}.$$

Se introducen estos resultados en (3.7),

$$\hat{U}_3 \hat{H}_2 \hat{U}_3^\dagger = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}).$$

De igual manera que en el caso de un átomo, la transformación unitaria aplicada al Hamiltoniano del sistema lo deja inalterado, tal que

$$\hat{U}_3 \hat{H}_2 \hat{U}_3^\dagger = \hat{H}_2.$$

Se sustituyen estos resultados en (3.6),

$$\frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ -\hbar\omega \hat{N} - \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z^{(1)} - \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{H}_2, \hat{\rho}_{2,I} \right].$$

Se simplifica y reescribe la última expresión,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} & \left[ \frac{(\omega_a - \omega)}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{(\omega_a - \omega)}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}), \hat{\rho}_{2,I} \right] \\ & - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar\omega}{2}, \hat{\rho}_{2,I} \right]. \end{aligned}$$

Se observa que el segundo conmutador debe ser cero, ya que es el conmutador de una constante y un operador. Además, según la definición dada en el capítulo anterior, se tiene  $\Delta = \omega_a - \omega$ , de modo que

$$\frac{d\hat{\rho}_{2,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\Delta}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Delta}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}), \hat{\rho}_{2,I} \right].$$

Así, se identifica al Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{2,I}$  como

$$\hat{H}_{2,I} = \frac{\Delta}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Delta}{2} \hbar\hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}). \quad (3.8)$$

### 3.1.2. Segunda transformación

Para hallar el Hamiltoniano en el límite dispersivo, se requiere de una segunda transformación unitaria, la cual se propone en la forma

$$\hat{U}_4 = e^{\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)})}, \quad (3.9)$$

y su adjunto Hermitiano

$$\hat{U}_4^\dagger = e^{-\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)})}. \quad (3.10)$$

Se define  $\hat{H}_{2,eff} = \hat{U}_4 \hat{H}_2 \hat{U}_4^\dagger$  como el Hamiltoniano en el límite dispersivo para el sistema de dos átomos de dos niveles. Para aplicar la transformación, se toma en cuenta la condición  $\eta \ll 1$ , por lo que se desprecian términos de orden cuadrático y superiores para  $\eta$ .

Entonces,

$$\hat{H}_{2,eff} = \hat{U}_4 \left( \frac{\Delta}{2} \hbar \hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}) \right) \hat{U}_4^\dagger.$$

Se distribuye la transformación entre los términos del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2,eff} = & \frac{\Delta \hbar}{2} \hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger + \frac{\Delta \hbar}{2} \hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(2)} \hat{U}_4^\dagger + \lambda (\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger + \hat{U}_4 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{U}_4^\dagger) \\ & + \lambda (\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{U}_4^\dagger + \hat{U}_4 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{U}_4^\dagger). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se calcula la transformación término a término:

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger = \hat{\sigma}_z^{(1)} + \eta \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] + \dots,$$

con la condición para  $\eta$  basta considerar los primeros dos términos

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(1)} + \eta \left\{ \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] + \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \right\}.$$

Se expanden los commutadores,

$$\begin{aligned} \hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx & \hat{\sigma}_z^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(1)} \right\} \\ & + \eta \left\{ \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_+^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}, \end{aligned}$$

y se dejan sólo los commutadores que no son cero,

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] - \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{\sigma}_z^{(1)} \right] \right\}.$$

Se hace uso de las relaciones de commutación,

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a} \left( -2 \hat{\sigma}_+^{(1)} \right) - \hat{a}^\dagger \left( 2 \hat{\sigma}_-^{(1)} \right) \right\}.$$

Por lo que,

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(1)} - 2\eta \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \right).$$

■ Se sigue un procedimiento similar para el segundo término

$$\hat{U}_4 \hat{\sigma}_z^{(2)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(2)} - 2\eta \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \right).$$

■ Para los términos con dos operadores, primero se expande la transformación con ayuda de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger = \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \eta \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \dots.$$

Se hace uso de la condición, se corta la expansión hasta el término lineal en  $\eta$  y se expanden los commutadores,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \eta \left\{ \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \right\}.$$

El primer y tercer commutador son cero, pues en el primero se cuenta con los mismos operadores; mientras que en el tercero todos los operadores involucrados commutan. Entonces esto reduce la expresión como se muestra,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \right\}.$$

Se expande a los commutadores restantes,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(2)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}.$$

El tercer commutador es cero y no es necesario expandirlo, puesto que los operadores involucrados commutan entre sí,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(1)} + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}.$$

Una vez más, se expande a los commutadores obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger &\approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a} \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(1)} \right\} \\ &\quad - \eta \left\{ \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] \hat{\sigma}_-^{(2)} + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}. \end{aligned}$$

Se elimina a los commutadores que son cero al usar las relaciones de commutación,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_-^{(1)}, \hat{\sigma}_+^{(1)} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}.$$

Se aplican las relaciones de commutación en los commutadores restantes,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \left( -\hat{\sigma}_z^{(1)} \right) + (-1) \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + (-1) \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}.$$

Entonces,

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\}.$$

A través de procedimientos análogos, se pueden calcular las tres transformaciones que hacen falta, cuyos resultados se muestran a continuación:

$$\hat{U}_4 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} \right\};$$

$$\hat{U}_4 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\};$$

$$\hat{U}_4 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{U}_4^\dagger \approx \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + \eta \left\{ \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\sigma}_+^{(2)} \right\}.$$

Se introducen estos resultados en (3.11),

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2,eff} &= \frac{\Delta \hbar}{2} \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} - 2\eta \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \right) \right) + \frac{\Delta \hbar}{2} \left( \hat{\sigma}_z^{(2)} - 2\eta \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \right) \right) \\ &\quad + \lambda \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left( \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \eta \left\{ \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\sigma}_+^{(2)} \right\} \right) \\
& + \lambda \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \eta \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\} \right) \\
& + \lambda \left( \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + \eta \left\{ \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\sigma}_+^{(2)} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Se agrupan los términos comunes,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{2,eff} = & \frac{\Delta \hbar}{2} \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + (\lambda - \hbar \Delta \eta) \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \right) \\
& + \lambda \eta \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + \lambda \eta \left( \left\{ \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{\sigma}_-^{(1)} \right\} + \left\{ \hat{\sigma}_+^{(2)}, \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\} \right) \\
& + \lambda \eta \left( \left\{ \hat{\sigma}_+^{(1)}, \hat{\sigma}_-^{(2)} \right\} + \left\{ \hat{\sigma}_+^{(2)}, \hat{\sigma}_-^{(1)} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Donde los únicos anticonmutadores diferentes de cero son aquellos que tienen superíndices iguales, es decir,

$$\left\{ \hat{\sigma}_+^{(i)}, \hat{\sigma}_-^{(i)} \right\} = \hat{I}.$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{2,eff} = & \frac{\Delta \hbar}{2} \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + (\lambda - \hbar \Delta \eta) \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \right) \\
& + \lambda \eta \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + 2 \lambda \eta \hat{I} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la relación de commutación para los operadores de creación y aniquilación del campo se cumple que

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}.$$

Por lo que

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger = 2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1.$$

Se sustituye la expresión previa en (3.12) y se agrupan términos,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{2,eff} = & \left( \frac{\Delta \hbar}{2} + 2 \lambda \eta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda \eta \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + 2 \lambda \eta \\
& + (\lambda - \hbar \Delta \eta) \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} \right). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Si se cumple la condición dada por

$$\lambda - \hbar \Delta \eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \frac{\lambda}{\hbar \Delta},$$

implica que (3.13) se reduce a

$$\hat{H}_{2,eff} = \left( \frac{\Delta \hbar}{2} + \frac{2 \lambda^2}{\hbar \Delta} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\lambda^2}{\hbar \Delta} \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + 2 \frac{\lambda^2}{\hbar \Delta}. \tag{3.14}$$

Se define

$$\chi = \frac{2\lambda^2}{\hbar\Delta}; \quad \Delta_D = \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}.$$

Su sustituyen las definiciones, que son las mismas que para el caso de un átomo, en (3.14),

$$\hat{H}_{2,eff} = \left( \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_D \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + 2 \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}. \quad (3.15)$$

Que es equivalente a

$$\hat{H}_{2,eff} = \left( \chi \hat{N} + \Delta_D \right) \left( \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \right) + 2 \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}. \quad (3.16)$$

Siendo la expresión (3.16) el Hamiltoniano en el límite dispersivo para el sistema de dos átomos de dos niveles interactuando con un campo eléctrico.

# Capítulo 4

## Resultados y Conclusiones

### 4.1. Resultados

Los resultados obtenidos en el presente trabajo apuntan al hallazgo de las transformaciones unitarias apropiadas para obtener las expresiones para el Hamiltoniano de interacción y el Hamiltoniano en el límite dispersivo para el sistema de dos átomos de dos niveles en interacción con el campo eléctrico.

Entonces, el primer resultado se refiere a la transformación unitaria denotada por

$$\hat{U}_3 = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)})},$$

la cual es similar al caso de un único átomo de dos niveles y que involucra únicamente a tres operadores, justamente aquellos que son necesarios para la escritura de los Hamiltonianos del campo eléctrico y de cada uno de los átomos sin que se considere aún el término de interacción.

El segundo resultado refiere a la identificación adecuada del Hamiltoniano de interacción del sistema, expresado como

$$\hat{H}_{2,I} = \frac{\Delta}{2}\hbar\hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z^{(2)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)}) + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)}),$$

el cual muestra similitud al caso de referencia de un solo átomo.

La proposición de la segunda transformación unitaria quedó definida como

$$\hat{U}_4 = e^{\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(1)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{a}\hat{\sigma}_+^{(2)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(2)})},$$

de lo cual se aprecia que esta transformación involucra a los operadores necesarios para describir el término de interacción en el Hamiltoniano del sistema.

Finalmente, el resultado principal de esta tesis refiere a la obtención del Hamiltoniano en el límite dispersivo para el sistema de estudio, el cual es:

$$\hat{H}_{2,eff} = (\chi\hat{N} + \Delta_D)(\hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}) + 2\frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}.$$

## 4.2. Conclusiones

Se alcanzó el objetivo de la tesis al hallar la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para el sistema de dos átomos de dos niveles en interacción con el campo eléctrico. El conjunto de resultados señalados en la sección previa son bastante similares al caso de un solo átomo de dos niveles, salvo las etiquetas que permiten distinguir a los operadores propios de cada uno de los átomos en el sistema de estudio.

Por un lado, la primera transformación unitaria hallada  $\hat{U}_3$  es idéntica a la transformación unitaria  $\hat{U}_1$  excepto por el hecho del término añadido del segundo átomo y que, como se mencionó en la sección previa, basta con tomar en consideración a los operadores involucrados en los Hamiltonianos del campo y de los átomos cuando estos se hallan sin interacción. Lo anterior sugiere entonces que una transformación unitaria apropiada para un sistema con más átomos necesita adicionar el operador  $\hat{\sigma}_z$ , con su respectiva etiqueta, tantas veces como átomos sean considerados. La segunda transformación unitaria mostró ser análoga a la primera transformación unitaria en el sentido de que se requirió solamente añadir los operadores para el caso de un átomo y etiquetarlos para tomar en cuenta a los dos átomos del sistema.

Por otro lado, el Hamiltoniano de interacción hallado muestra términos idénticos a excepción de la etiqueta para cada uno de los átomos, lo cual nuevamente sugiere que el Hamiltoniano de interacción para una cantidad  $k$  de átomos de dos niveles podría ser escrito simplemente como la suma de  $k$  veces el Hamiltoniano de interacción para el caso de un átomo de dos niveles y cuyas etiquetas cubran la totalidad de átomos involucrados. Asimismo, la expresión para el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo mostró que este se halla compuesto por la suma de los Hamiltonianos de interacción en el límite dispersivo para el caso de un átomo de dos niveles, con la distinción correspondiente para cada átomo.

Finalmente, en el apéndice A se muestran los cálculos realizados para hallar las expresiones de los Hamiltonianos de interacción y de interacción en el límite dispersivo para un sistema de  $k$  átomos, siendo esto una extensión de los propósitos de la tesis; además de la proposición de las transformaciones unitarias necesarias para alcanzar tales expresiones. Los resultados logrados no solamente reproducen los del caso de un átomo de dos niveles y el del sistema de estudio, sino que también verifican la suposición que surge del trabajo presente, es decir, que para cada uno de los Hamiltonianos de interés es suficiente con sumar  $k$  veces los Hamiltonianos respectivos para el caso de un átomo de dos niveles y etiquetarlos.

# Referencias

- [1] L. de la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*. FCE, UNAM, 3 ed., 2006. Quinta reimpresión, 2023.
- [2] J. J. Sakurai and J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 3 ed., 2020.
- [3] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the emission and absorption of radiation,” *Proceedings of the Royal Society of London Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 114, pp. 243–265, 3 1927.
- [4] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89–109, 1963.
- [5] H. Moya-Cessa and A. Vidiella-Barranco, “On the interaction of two-level atoms with superpositions of coherent states of light,” *Journal of Modern Optics*, vol. 42, no. 7, pp. 1547–1552, 1995.
- [6] J. R. Kukliński and J. L. Madańczyk, “Strong squeezing in the jaynes-cummings model,” *Phys. Rev. A*, vol. 37, pp. 3175–3178, Apr 1988.
- [7] M.-F. Fang, P. Zhou, and S. Swain, “Entropy squeezing for a two-level atom,” *Journal of Modern Optics*, vol. 47, no. 6, pp. 1043–1053, 2000.
- [8] R. Juárez-Amaro and H. M. Moya-Cessa, “Linear entropy in the atom-field interaction at finite temperature,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 70, no. 3, 2024.
- [9] A. Zúñiga-Segundo, R. Juárez-Amaro, O. Aguilar-Loreto, and H. M. Moya-Cessa, “Field’s entropy in the atom–field interaction: Statistical mixture of coherent states,” *Annals of Physics*, vol. 379, pp. 150–158, 2017.
- [10] J. D. Cresser and M. Hillery, “Time-averaged properties of the jaynes-cummings model,” *Phys. Rev. A*, vol. 40, pp. 1464–1473, Aug 1989.
- [11] H. Azuma, “Quantum computation with the jaynes-cummings model,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 126, pp. 369–385, 09 2011.
- [12] R. Juárez-Amaro and H. M. Moya-Cessa, “Measuring the quantum state of the electro-magnetic field at finite temperature,” *Physica Scripta*, vol. 99, no. 1, 2023.

- [13] N. Yazdanpanah, M. Tavassoly, R. Juárez-Amaro, and H. Moya-Cessa, “Reconstruction of quasiprobability distribution functions of the cavity field considering field and atomic decays,” *Optics Communications*, vol. 400, pp. 69–73, 2017.
- [14] R. Juárez-Amaro, H. Moya-Cessa, and I. Ricárdez-Vargas, “Direct measurement of the q-function in a lossy cavity,” *Physics Letters A*, vol. 307, no. 4, pp. 179–182, 2003.
- [15] R. Juárez-Amaro and H. Moya-Cessa, “Direct measurement of quasiprobability distributions in cavity qed,” *Phys. Rev. A*, vol. 68, p. 023802, Aug 2003.
- [16] M. Tavis and F. W. Cummings, “Exact solution for an n-molecule—radiation-field hamiltonian,” *Physical Review*, vol. 170, no. 2, p. 379, 1968.
- [17] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer, 4 ed., 2024.
- [18] J. P. de Faria and M. Nemes, “Dissipative dynamics of the jaynes-cummings model in the dispersive approximation: Analytical results,” *Physical Review A*, vol. 59, no. 5, pp. 3918–3925, 1999.
- [19] N. Zettili, *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. John Wiley and Sons, 2 ed., 2009.
- [20] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume I: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley-VCH, 2 ed., 2020.
- [21] J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison-Wesley, 4 ed., 2001.
- [22] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, 3 ed., 1998.
- [23] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 5 ed., 2024.
- [24] P. Meystre, *Quantum Optics: Taming the Quantum*. Springer, 2021.
- [25] P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*. Springer, 4 ed., 2007.
- [26] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, *Fundamentos de Física, Volumen 2*. Grupo Editorial Patria, 8 ed., 2018.
- [27] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer, 1996.
- [28] B. W. Shore and P. L. Knight, “The jaynes-cummings model,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, no. 7, pp. 1195–1238, 1993.
- [29] R. Juárez-Amaro, H. M Moya-Cessa, *et al.*, “Several ways to solve the jaynes-cummings model,” *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 9, no. 1, pp. 299–303, 2015.
- [30] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Academic Press, 6 ed., 2005.

# Apéndice A

## Sistema de $K$ átomos de dos niveles en interacción con un campo eléctrico cuantizado

Es posible realizar un desarrollo más general que involucre a una cantidad arbitraria  $k$  de átomos de dos niveles que interaccionen con el campo eléctrico cuantizado, pero que no exista la interacción átomo-átomo. Se busca entonces mostrar que el siguiente procedimiento permite obtener una descripción más general y que permite recuperar los resultados obtenidos para el caso de uno y dos átomos de dos niveles.

El Hamiltoniano  $\hat{H}_K$  de tal sistema se halla descrito por la siguiente expresión

$$\hat{H}_K = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda \sum_{m=1}^k (\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)}). \quad (\text{A1})$$

Se procede a buscar el Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{K,I}$ , para lo cual se parte de lo siguiente:

- Los operadores  $\hat{N}$ ,  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  actúan sólo sobre el campo eléctrico.
- Los operadores  $\hat{\sigma}_z^{(m)}$ ,  $\hat{\sigma}_+^{(m)}$  y  $\hat{\sigma}_-^{(m)}$  actúan únicamente sobre el  $m$ -ésimo átomo.

Es de interés establecer los siguientes conmutadores, los cuales son los únicos diferentes de cero:

- $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ;
- $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ ;
- $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ ;
- $[\hat{\sigma}_z^{(i)}, \hat{\sigma}_+^{(j)}] = 2\hat{\sigma}_+^{(j)}\delta_{ij}$ ;
- $[\hat{\sigma}_z^{(i)}, \hat{\sigma}_-^{(j)}] = -2\hat{\sigma}_-^{(j)}\delta_{ij}$ ;
- $[\hat{\sigma}_+^{(i)}, \hat{\sigma}_-^{(j)}] = \hat{\sigma}_z^{(j)}\delta_{ij}$ .

Además del anticomutador

- $\{\hat{\sigma}_+^{(m)}, \hat{\sigma}_-^{(j)}\} = \hat{I}\delta_{im}$ ,

donde el símbolo  $\delta_{i,j}$  se refiere a la delta de Kronecker [30], descrita por lo siguiente:

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} &= 1, & \text{si } i = j, \\ \delta_{i,j} &= 0, & \text{si } i \neq j.\end{aligned}$$

## A.1. Primera transformación

La transformación unitaria que habrá de aplicarse, se define con base al caso de un átomo, de modo que

$$\hat{U}_5 = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})}, \quad (\text{A2})$$

y su adjunto Hermitiano

$$\hat{U}_5^\dagger = e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})}. \quad (\text{A3})$$

La ecuación de movimiento del sistema se halla dada por

$$\frac{d\hat{\rho}_K}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_K, \hat{\rho}_K] = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_K \hat{\rho}_K + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_K \hat{H}_K. \quad (\text{A4})$$

Se aplica la transformación unitaria a  $\hat{\rho}_K$  en la forma  $\hat{\rho}_{K,I} = \hat{U}_5 \hat{\rho}_K \hat{U}_5^\dagger$ ; y se desarrolla su ecuación de movimiento para hallar a  $\hat{H}_{K,I}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} &= \frac{d(e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})})}{dt} \hat{\rho}_K e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} \frac{d\hat{\rho}_K}{dt} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} \\ &\quad + e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} \hat{\rho}_K \frac{d(e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})})}{dt}.\end{aligned}$$

Se deriva respecto del tiempo y se usan las definiciones de las ecuaciones (A2), (A3) y (A4)

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} &= i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) \hat{U}_5 \hat{\rho}_K \hat{U}_5^\dagger - \hat{U}_5 \hat{\rho}_K \hat{U}_5^\dagger i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \hat{U}_5 \hat{H}_K \hat{\rho}_K \hat{U}_5^\dagger + \frac{i}{\hbar} \hat{U}_5 \hat{\rho}_K \hat{H}_K \hat{U}_5^\dagger.\end{aligned}$$

Se usa la definición dada para  $\hat{\rho}_{K,I}$  y se introduce al operador identidad en la forma conveniente dada por  $\hat{I} = \hat{U}_5^\dagger \hat{U}_5$ ,

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) \hat{\rho}_{K,I} - \hat{\rho}_{K,I} i\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)} \right)$$

$$-\frac{i}{\hbar}\hat{U}_5\hat{H}\hat{U}_5^\dagger\hat{U}_5\hat{\rho}\hat{U}_5^\dagger + \frac{i}{\hbar}\hat{U}_5\hat{\rho}\hat{U}_5^\dagger\hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger. \quad (\text{A5})$$

Se simplifica a (A5) con la notación de commutadores,

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[-\hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)}\right), \hat{\rho}_{K,I}\right] - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger, \hat{\rho}_{K,I}\right].$$

Que a su vez puede escribirse como:

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[-\hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^k\hat{\sigma}_z^{(m)}\right) + \hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger, \hat{\rho}_{K,I}\right].$$

Ahora se calcula la transformación  $\hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger$ , donde  $\hat{H}_K$  está dado por (A1),

$$\hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger = \hat{U}_5\left(\hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sum_{m=1}^k\hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda\sum_{m=1}^k(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)})\right)\hat{U}_5^\dagger.$$

Se distribuye la transformación entre los términos de  $\hat{H}_K$  y se introduce el operador identidad en la forma  $\hat{I} = \hat{U}_5^\dagger\hat{U}_5$ ,

$$\begin{aligned} \hat{U}_5\hat{H}_K\hat{U}_5^\dagger &= \hbar\omega\hat{U}_5\hat{N}\hat{U}_5^\dagger + \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sum_{m=1}^k\hat{U}_5\hat{\sigma}_z^{(m)}\hat{U}_5^\dagger \\ &+ \lambda\sum_{m=1}^k(\hat{U}_5\hat{a}\hat{U}_5^\dagger\hat{U}_5\hat{\sigma}_+^{(m)}\hat{U}_5^\dagger + \hat{U}_5\hat{a}^\dagger\hat{U}_5^\dagger\hat{U}_5\hat{\sigma}_-^{(m)}\hat{U}_5^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Se calculan las transformaciones sobre cada término:

- Se sabe que  $\hat{N}$  commuta con los operadores de la transformación,

$$\hat{U}_5\hat{N}\hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})}\hat{N}e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})} = \hat{N}.$$

- De forma análoga para  $\hat{\sigma}_z^{(m)}$ ,

$$\hat{U}_5\hat{\sigma}_z^{(m)}\hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})}\hat{\sigma}_z^{(m)}e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})} = \hat{\sigma}_z^{(m)}.$$

- Por otro lado,

$$\hat{U}_5\hat{a}\hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})}\hat{a}e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)})},$$

puesto que los operadores de la transformación commutan entre sí, es posible lo siguiente:

$$\hat{U}_5\hat{a}\hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t\hat{N}}e^{i\omega t\frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)}}\hat{a}e^{-i\omega t\frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\hat{\sigma}_z^{(j)}}e^{-i\omega t\hat{N}} = e^{i\omega t\hat{N}}\hat{a}e^{-i\omega t\hat{N}}.$$

De lo cual se obtiene finalmente que

$$\hat{U}_5\hat{a}\hat{U}_5^\dagger = \hat{a}e^{-i\omega t}.$$

- De forma similar,

$$\hat{U}_5 \hat{a}^\dagger \hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} = e^{i\omega t\hat{N}} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t\hat{N}} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}.$$

- En las últimas dos transformaciones a calcular, se hace uso de la delta de Kronecker como se muestra a continuación:

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})} \hat{\sigma}_+^{(m)} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)})},$$

pero  $\hat{\sigma}_+^{(m)}$  commuta con  $\hat{N}$ ,

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = e^{i\omega t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)}} \hat{\sigma}_+^{(m)} e^{-i\omega t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)}}.$$

Se hace uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(m)} + i\omega t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k [\hat{\sigma}_z^{(j)}, \hat{\sigma}_+^{(m)}] + \dots = \hat{\sigma}_+^{(m)} + i\omega t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (2\hat{\sigma}_+^{(m)} \delta_{mj}) + \dots$$

Posteriormente

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(m)} + i\omega t \hat{\sigma}_+^{(m)} + \frac{1}{2} \left[ i\omega t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_z^{(j)}, i\omega t \hat{\sigma}_+^{(m)} \right] + \dots$$

Que se reduce finalmente a

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = \hat{\sigma}_+^{(m)} \left( 1 + i\omega t + \frac{1}{2} (i\omega t)^2 + \dots \right) = \hat{\sigma}_+^{(m)} e^{i\omega t}.$$

- A partir de un proceso equivalente se encuentra que

$$\hat{U}_5 \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{U}_5^\dagger = \hat{\sigma}_-^{(m)} e^{-i\omega t}.$$

Se sustituyen en la ecuación (A6) los resultados hallados,

$$\hat{U}_5 \hat{H}_K \hat{U}_5^\dagger = \hbar\omega \hat{N} + \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda \sum_{m=1}^k (\hat{a} e^{-i\omega t} \hat{\sigma}_+^{(m)} e^{i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \hat{\sigma}_-^{(m)} e^{-i\omega t}).$$

Se simplifica la expresión previa,

$$\hat{U}_5 \hat{H}_K \hat{U}_5^\dagger = \hbar\omega \hat{N} + \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda \sum_{m=1}^k (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(m)}). \quad (\text{A7})$$

Se sustituye a (A7) en (A.1) y se reduce la expresión a lo siguiente:

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ -\frac{\hbar\omega}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda \sum_{m=1}^k (\hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(m)}), \hat{\rho}_{K,I} \right].$$

Se escribe la expresión anterior en la forma:

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar(\omega_a - \omega)}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda \sum_{m=1}^k (\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)}), \hat{\rho}_{K,I} \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{1}{2}\hbar\omega, \hat{\rho}_{K,I} \right].$$

En el primer conmutador se define  $\Delta = \omega_a - \omega$ , mientras que se observa que el segundo conmutador es cero,

$$\frac{d\hat{\rho}_{K,I}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)}) \right), \hat{\rho}_{K,I} \right].$$

Por lo que el Hamiltoniano de interacción para el sistema que involucra a  $K$  átomos queda expresado como:

$$\hat{H}_{K,I} = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)}) \right). \quad (\text{A8})$$

## A.2. Segunda transformación

Para la segunda transformación se propone que esta tome la siguiente forma:

$$\hat{U}_6 = e^{\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})}, \quad (\text{A9})$$

y su adjunto Hermitiano

$$\hat{U}_6^\dagger = e^{-\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})}. \quad (\text{A10})$$

Así, se define al Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}_{K,eff} = \hat{U}_6 \hat{H}_{K,I} \hat{U}_6^\dagger$ ,

$$\hat{H}_{K,eff} = e^{\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})} \left( \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^{(m)} + \lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)}) \right) \right) e^{-\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})}.$$

Se distribuye la transformación entre los términos del Hamiltoniano de interacción,

$$\hat{H}_{K,eff} = \frac{\hbar\Delta}{2} \sum_{m=1}^k \hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger + \lambda \sum_{m=1}^k \hat{U}_6 \hat{a}\hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger + \lambda \sum_{m=1}^k \hat{U}_6 \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{U}_6^\dagger. \quad (\text{A11})$$

Se aplica la transformación término a término y se toma en cuenta la condición  $\eta \ll 1$ , de forma que se pueden despreciar términos de orden cuadrático y superiores para  $\eta$ .

- Para el primer término

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger = e^{\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})} \hat{\sigma}_z^{(m)} e^{-\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)})},$$

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger = \hat{\sigma}_z^{(m)} + \left[ \eta \sum_{j=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^{(j)}), \hat{\sigma}_z^{(m)} \right] + \dots$$

Se hace uso de la condición,

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ \left[ \hat{a} \sigma_+^{(j)}, \hat{\sigma}_z^{(m)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)}, \hat{\sigma}_z^{(m)} \right] \right\},$$

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ \hat{a} \left[ \sigma_+^{(j)}, \hat{\sigma}_z^{(m)} \right] - \hat{a}^\dagger \left[ \hat{\sigma}_-^{(j)}, \hat{\sigma}_z^{(m)} \right] \right\}.$$

Se aplican los conmutadores establecidos previamente

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ \hat{a} (-2 \sigma_+^{(j)} \delta_{jm}) - \hat{a}^\dagger (2 \sigma_-^{(j)} \delta_{jm}) \right\}.$$

Finalmente,

$$\hat{U}_6 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{\sigma}_z^{(m)} - 2\eta \left( \hat{a} \sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(m)} \right).$$

- Para el segundo término se tiene lo siguiente:

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger = e^{\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a} \sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)})} \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} e^{-\eta \sum_{j=1}^k (\hat{a} \sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)})},$$

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger = \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \left[ \eta \sum_{j=1}^k (\hat{a} \sigma_+^{(j)} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)}), \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \right] + \dots$$

Se aplica la condición tal que

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ \left[ \hat{a} \sigma_+^{(j)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \right] \right\}.$$

El primer conmutador es siempre cero, por lo que

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} - \eta \sum_{j=1}^k \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)}, \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \right].$$

Se expande el conmutador y se conservan los términos que no se anulan,

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ -\hat{a}^\dagger \hat{a} \left[ \hat{\sigma}_-^{(j)}, \hat{\sigma}_+^{(m)} \right] - \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} \right\}.$$

Se usan las relaciones de conmutación,

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \left\{ -\hat{a}^\dagger \hat{a} (-\hat{\sigma}_z^{(j)} \delta_{jm}) + \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} \right\}.$$

Por lo que

$$\hat{U}_6 \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \eta \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)}.$$

- A través de un proceso análogo al anterior se encuentra que:

$$\hat{U}_6 \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{U}_6^\dagger \approx \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(m)} + \eta \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{\sigma}_+^{(j)}.$$

Se sustituyen los resultados obtenidos en la ecuación (A11),

$$\begin{aligned} \hat{H}_{K,eff} &= \frac{\hbar\Delta}{2} \sum_{m=1}^k \left( \hat{\sigma}_z^{(m)} - 2\eta \left( \hat{a} \sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) \right) + \lambda \sum_{m=1}^k \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+^{(m)} + \eta \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} \right) \\ &\quad + \lambda \sum_{m=1}^k \left( \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(m)} + \eta \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z^{(m)} + \eta \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{\sigma}_+^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Se agrupan los términos,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{K,eff} &= \frac{\hbar\Delta}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k \left( \hat{a} \sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} \\ &\quad + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \left( \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} + \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{\sigma}_+^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Dado que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , entonces  $\hat{a} \hat{a}^\dagger = (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a})$ . De tal forma que  $(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = (2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{K,eff} &= \frac{\hbar\Delta}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k \left( \hat{a} \sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \left( 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} \\ &\quad + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \left( \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} + \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{\sigma}_+^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(m)} \hat{\sigma}_+^{(j)} \equiv \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(m)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H}_{K,eff} &= \frac{\hbar\Delta}{2} \sum_{m=1}^k \hat{\sigma}_z^{(m)} + (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k \left( \hat{a} \sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \left( 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} \\ &\quad + \lambda \eta \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \left( \hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(m)} \right), \end{aligned} \tag{A12}$$

donde

$$\hat{\sigma}_+^{(m)} \hat{\sigma}_-^{(j)} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(m)} = \left\{ \hat{\sigma}_+^{(m)}, \hat{\sigma}_-^{(j)} \right\} = \hat{I} \delta_{jm}.$$

De esta forma, la ecuación (A12) se reduce a

$$\hat{H}_{K,eff} = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} + \lambda\eta (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} + (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\sigma_-^{(m)}) + \lambda\eta \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \hat{I}\delta_{jm}.$$

Se simplifica nuevamente esta última expresión, tal que

$$\hat{H}_{K,eff} = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} + \lambda\eta (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} + (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\sigma_-^{(m)}) + \lambda\eta \sum_{m=1}^k \hat{I}.$$

En donde la última sumatoria puede ser reducida a un único término,

$$\hat{H}_{K,eff} = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} + \lambda\eta (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} + (\lambda - \hbar\Delta\eta) \sum_{m=1}^k (\hat{a}\sigma_+^{(m)} + \hat{a}^\dagger\sigma_-^{(m)}) + \lambda\eta k. \quad (\text{A13})$$

Si se cumple la condición dada por

$$\lambda - \hbar\Delta\eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \frac{\lambda}{\hbar\Delta},$$

entonces (A13) se reduce a

$$\hat{H}_{K,eff} = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{2\lambda^2}{\hbar\Delta} \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} \right) \hat{\sigma}_z^{(m)} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} k. \quad (\text{A14})$$

Se define

$$\chi = \frac{2\lambda^2}{\hbar\Delta}; \quad \Delta_D = \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta}.$$

Estas definiciones son sustituidas en la expresión (A14), obteniendo finalmente

$$\hat{H}_{K,eff} = \sum_{m=1}^k (\Delta_D + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a}) \hat{\sigma}_z^{(m)} + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} k. \quad (\text{A15})$$

La expresión anterior es justamente el Hamiltoniano de interacción en el límite dispersivo para un sistema de  $k$  átomos de dos niveles. Se puede verificar fácilmente que si  $k = 1$ , se recupera la ecuación (2.41); asimismo, si  $k = 2$  se recupera la expresión (3.16), como se espera de un modelo más general que se reduce a los casos más sencillos.

NO REPRODUCIR

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de este Trabajo Profesional puede reproducirse o transmitirse bajo forma o por ningún medio, electrónico ni mecánico, incluyendo fotocopiado o grabación, ni por ningún sistema de almacenamiento y recuperación de información, sin permiso por escrito del autor.

