

O A X A C A

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**UNA REVISIÓN DEL EFECTO AHARONOV-BOHM (À LA
SCHRÖDINGER Y À LA FEYNMAN) Y SUS APLICACIONES**

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA:
VÍCTOR EZEQUIEL MARTÍNEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ

Huajuapan de León, Oaxaca, Octubre de 2025

*Dedicado a mis padres y hermanos,
por ser quienes son y permitirme ser quien soy.*

Agradecimientos

El primer y más importante agradecimiento es para mis padres Víctor Juan Martínez Avendaño y Carmen Cruz Cortez por todo el inmenso amor y apoyo incondicional que me han brindado en mi vida; de la misma manera, agradezco a mis hermanos Norma, Gibran, Cristian, Karen y Daisy por estar siempre conmigo sin importar la distancia.

Le agradezco al Dr. Ricardo Rosas Rodríguez, mi director de tesis, por el apoyo y la paciencia que me ha tenido para poder completar este trabajo, a quien espero pronto llamar colega y amigo.

A Diego y Fernando, por ser los primeros en llegar y permanecer conmigo hasta este momento. Coincidir con ustedes ha sido un verdadero privilegio, y aquel saludo en el primer día de propedéutico marcó un antes y un después en mi vida.

A Aviyamil, Iván y Gabael por las incontables charlas sobre ciencia, música, cine y sobre la vida misma, que llenaron mis días de inspiración, risas y reflexión. No hay palabras suficientes para expresar lo mucho que atesoro su amistad.

A Erick, Omar, Nataly, Aracely, Mónica, Uriel y Esteban, porque, aunque no fueron los primeros en llegar, se volvieron igualmente especiales. Gracias por permitirme ser su compañero y amigo, y por regalarme momentos que siempre llevaré conmigo.

Tampoco quiero olvidar a los compañeros del IFA, de la estudiantina, del club de astronomía y de mi querida banda *El Fonógrafo*, quienes hicieron de esta etapa una experiencia inolvidable, en especial Eduardo, José Julio y Nohelia.

A todos los que de una u otra forma contribuyeron en este camino, les guardo un profundo agradecimiento.

Resumen

El efecto Aharonov-Bohm (A-B) [1] muestra dramáticamente que en la teoría cuántica los potenciales escalar (ϕ) y vectorial (\mathbf{A}) [i.e., el cuadripotencial $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$] adquieren significado físico, a diferencia del electromagnetismo clásico, donde éstos se introducen sólo como entes matemáticos para facilitar la descripción de los campos reales eléctrico (**E**) y magnético (**B**). El efecto fue verificado experimentalmente por primera vez por Chambers [2].

En este trabajo revisaremos el efecto A-B de dos maneras. La primera es en la forma tradicional, por medio de integrales de trayectoria de Feynman, la cual siguen muchos textos, como Sakurai [3] por ejemplo. La segunda, y la cual es el resultado de este trabajo, se basa en resolver directamente la ecuación de Schrödinger. En algunos textos (como Arfken [4] y Ryder [5]) es común que se proporcione la función de onda solución sin ninguna explicación de cómo se obtiene (sólo se sustituye y satisface la ecuación); aquí la construimos explícitamente.

Abstract

The Aharonov-Bohm (A-B) effect [1] demonstrates that within quantum theory, the scalar (ϕ) and vector (\mathbf{A}) potentials [i.e., the four-potential $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$] acquire a physical significance, in contrast to classical electromagnetism, where they are introduced merely as mathematical entities to facilitate the description of the physical electric (\mathbf{E}) and magnetic (\mathbf{B}) fields. The effect was first experimentally verified by Chambers [2].

In this work, we review the A-B effect in two distinct ways. The first is the traditional approach, employing Feynman path integrals, as followed in many textbooks such as that by Sakurai [3]. The second, which constitutes a result of the present work, is based on solving the Schrödinger equation directly. In some texts (e.g., Arfken [4] and Ryder [5]), the solution wavefunction is often provided without explanation of its derivation (it is merely verified by substitution); herein, we construct it explicitly.

Índice general

Introducción	1
1. Dinámica cuántica	7
1.1. Evolución temporal y la ecuación de Schrödinger	7
1.1.1. Operador de evolución temporal	7
1.1.2. La ecuación de Schrödinger	10
1.2. La imagen de Schrödinger vs la imagen de Heisenberg	10
1.2.1. Kets de estado y observables en las imágenes de Schrödinger y Heisenberg	11
1.2.2. La ecuación de movimiento de Heisenberg	12
1.2.3. Partículas libres; el teorema de Ehrenfest	13
1.2.4. Kets base y amplitudes de transición	16
2. Propagadores e integrales de trayectoria de Feynman	19
2.1. Propagadores en mecánica ondulatoria	19
2.2. Propagador como una amplitud de transición	21
2.3. Integrales de trayectoria y la suma sobre trayectorias	22
2.4. Formulación de Feynman	23
3. Potenciales y transformaciones de norma	27
3.1. Potencial constante	27
3.2. Transformaciones de norma en electromagnetismo	30

4. El efecto Aharonov-Bohm à la Feynman	37
4.1. Introducción	37
4.2. El efecto Aharonov-Bohm	38
5. El efecto Aharonov-Bohm à la Schrödinger	43
5.1. Introducción	43
5.2. Ausencia de B	46
5.3. Presencia de B	47
5.3.1. El efecto Aharonov-Bohm	51
5.3.2. Relación entre la fase cuántica y la topología	52
6. Conclusiones	53
A. El oscilador armónico simple	57
A.1. Eigenkets y eigenvalores de energía	57
A.2. Evolución temporal del oscilador	63
B. La ecuación de onda de Schrödinger	67
B.1. La ecuación de onda dependiente del tiempo	67
B.2. La ecuación de onda independiente del tiempo	68
B.3. Interpretaciones de la función de onda	69

Introducción

Consideré una batería del tipo que usted encuentra en la tienda de la esquina. Las letras sobre una batería típica AA establecen que proporciona electricidad a 1.5 Volts. Esto significa que hay una diferencia de potencial de 1.5 V entre las terminales de la batería (al menos cuando la batería está en condiciones normales). En dichas condiciones, si cada terminal está conectada con un alambre de cobre a una placa conductora y las placas están separadas 1 cm, entonces la batería dará lugar a un campo eléctrico de 1.5 V/cm entre las placas. Pero, ¿cuál será el potencial en cada placa? ¿Estará la terminal positiva a un potencial de +1.5 V, y la negativa a cero? ¿Estará la positiva a cero y la negativa a -1.5 V? ¿O qué sucede? Si estas son preguntas vagas, como parecen ser, es porque tienen una presuposición falsa: que hay algo como el valor absoluto del potencial eléctrico en un lugar, más allá de las diferencias de potencial entre tal lugar y otros. Rechazando dicha presuposición, uno es libre de asignar cualquier número real a una ubicación como su potencial eléctrico en volts, siempre que uno considere las diferencias de potencial reales entre dicho lugar y otros cuando uno les asigne potenciales eléctricos también. Las diferentes asignaciones estarían relacionadas por una simple transformación en el potencial eléctrico, la cual consiste en la adición del mismo número real al potencial en cada punto. Siguiendo la iniciativa de Weyl, ha llegado a ser una costumbre llamar a esto una **transformación de norma** [6].

Al parecer es un accidente histórico el que el término “Norma”¹ (*Gauge*, en inglés) se aplique a las teorías que sustentan al Modelo Estándar de Partículas [5, 9, 10, 11]. El término se originó como una traducción de la palabra alemana “eich”, la cual apareció por primera vez en el artículo mencionado en el párrafo anterior de Herman Weyl en 1918. En dicho

¹Algunos autores sudamericanos como Gambini y Pullin [7, 8] usan el término “calibre” en lugar de “norma”.

artículo, publicado después de la Teoría General de la Relatividad de Einstein [12, 13, 14, 15], Weyl propone una teoría unificada de gravedad y electromagnetismo, la cual resultó inadecuada. Las variables fundamentales de la teoría eran la métrica del espacio-tiempo y el potencial electromagnético. La teoría es invariante bajo ciertas transformaciones lineales que tienen que ver con un cambio en la escala de longitud y duraciones. El efecto de dichas transformaciones sobre el potencial electromagnético simplemente heredó el nombre. En un contexto completamente clásico [16, 17, 18], el electromagnetismo actúa sobre partículas cargadas solamente a través de un campo electromagnético que da lugar a la fuerza de Lorentz [$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$]: el potencial electromagnético [$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$] no tiene manifestaciones independientes y parece mejor considerarlo como *una estructura matemática superflua*, en el sentido de que no representa *algo físico* [4, 19, 20, 21, 22]. Pero la situación es diferente en el dominio cuántico. Los fenómenos tales como el **efecto Aharonov-Bohm** (A-B) proporcionan una ilustración real del hecho de que hay algo más para el electromagnetismo clásico que sólo el campo. Los efectos del electromagnetismo sobre la fase de partículas cargadas (y el subsecuente comportamiento observable) que pasan a través de una región del espacio no son siempre determinados completamente por el campo electromagnético en dicha región. Como lo señalaron Aharonov y Bohm en su artículo original de 1959 ² [1]: *en el dominio cuántico no es el campo \mathbf{B} sino el potencial electromagnético mismo \mathbf{A} el que parece dar lugar a estos efectos.*

La mecánica cuántica [3, 24, 25, 26, 27] predice que cuando un rayo de partículas *cargadas* ha pasado a través de una región del espacio en la cual no hay campo electromagnético, puede producirse o alterarse el patrón de interferencia por la presencia de un campo magnético estático. Esto fue confirmado experimentalmente por primera vez por Chambers en 1960 [2], y desde entonces ha sido demostrado repetidamente y de manera más convincente en una serie de experimentos que incluye el trabajo de Tonomura *et al* en 1986 [28]; Peskin y Tonomura proporcionaron en 1989 una revisión útil [29]. De acuerdo con la covarianza de Lorentz, hay también un efecto Aharonov-Bohm eléctrico. El patrón de interferencia producido por electrones que han pasado a través de una región en la cual no puede haber campo electromagnético sería diferente si el campo eléctrico fuera de dicha región se varía

²Esencialmente el mismo efecto fue discutido diez años antes por W. Ehrenberg y R. E. Siday [23].

adecuadamente sin afectar el campo electromagnético experimentado por los electrones. Pero este efecto es más difícil de demostrar experimentalmente. Más adelante daremos una breve descripción del efecto A-B magnético en la cual se hace uso de un solenoide muy delgado y muy largo. Este efecto es la base de la tecnología de los SQUID's (superconducting quantum interference device) los cuales se usan hoy en día para medir flujos magnéticos de manera muy precisa [7, 30]. Una revisión del efecto A-B es necesaria como un preludio para estudiar el efecto A-B *no* Abelian [31], donde son necesarias incluir teorías de Yang-Mills [32, 33, 34], además de que en años recientes se ha buscado estudiar la relación del efecto A-B con materiales de baja dimensión (unidimensionales, bidimensionales o cuánticos puntuales) con características topológicas (grafeno, por ejemplo) y con la materia condensada [35, 36].

La mecánica cuántica, construida a partir de contribuciones fundamentales de físicos como Einstein, Planck, Dirac, Heisenberg, Schrödinger, entre otros, encuentra en este trabajo un enfoque particular en dos formulaciones clave, la *mecánica cuántica ondulatoria* desarrollada por Erwin Schrödinger en 1926, y las *integrales de trayectoria* introducidas por Richard Feynman en 1948. El objetivo central de esta tesis es analizar el efecto Aharonov-Bohm desde ambas perspectivas, con dos propósitos específicos: establecer si estas formulaciones conducen a resultados equivalentes, y explorar interpretaciones físicas y geométricas del fenómeno, en particular el rol del potencial vectorial **A**.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. El primer capítulo aborda la dinámica cuántica, centrándose en la evolución temporal de los sistemas cuánticos y la ecuación de Schrödinger como herramienta fundamental para describir esta evolución. Se explican conceptos clave como la diferencia entre la imagen de Schrödinger, donde los estados cuánticos evolucionan con el tiempo, y la imagen de Heisenberg, donde son los operadores los que cambian con éste. Además, se introduce la ecuación de movimiento de Heisenberg y se discuten los kets de estado, las observables y las amplitudes de transición, que son esenciales para entender cómo se relacionan estas dos imágenes.

El segundo capítulo se enfoca en los propagadores y las integrales de trayectoria de Feynman. Se explica el concepto de propagador en mecánica ondulatoria y su interpretación como una amplitud de transición, el cual describe la probabilidad de que un sistema pase de un estado a otro. Se introduce la idea de sumar sobre todas las trayectorias posibles que

puede seguir un sistema, lo que lleva a la formulación de Feynman de la mecánica cuántica, donde la probabilidad de transición se calcula integrando sobre todas las posibles historias del sistema.

En el tercer capítulo, se exploran los potenciales y las transformaciones de norma, con un enfoque particular en los potenciales constantes y su impacto en la dinámica cuántica. Además, se muestran de forma concisa las transformaciones de norma en el contexto del electromagnetismo, destacando su importancia para entender cómo los campos electromagnéticos influyen en los sistemas cuánticos y cómo estas transformaciones afectan las ecuaciones que describen dichos sistemas.

El cuarto capítulo está dedicado al efecto Aharonov-Bohm, analizado desde la perspectiva de la formulación de Feynman, en donde, considerando aspectos vistos en los capítulos anteriores, se deduce la expresión que describe este efecto puramente cuántico.

Finalmente, el quinto capítulo aborda lo que es el núcleo de esta tesis, el efecto Aharonov-Bohm desde la perspectiva de la ecuación de Schrödinger; en primer lugar se resuelve la ecuación sin la presencia del solenoide para posteriormente considerar la presencia de éste y cómo se crea una interacción campo-partícula, llegando a una expresión que describa de la misma manera el efecto A-B y que nos brinde una comprensión mejor y quizás más completa del fenómeno.

En el último capítulo se presentan las conclusiones y se desarrolla un análisis que refuerza la idea de que los potenciales, y no sólo los campos, tienen un significado físico profundo en la mecánica cuántica, y proporciona una comprensión más completa de este efecto intrigante, además de las diferentes aplicaciones que tiene este (efecto) en áreas como la geometría diferencial, la topología y la teoría de grupos.

Conceptos tales como topología, grupo fundamental, holonomía, etc., se pueden revisar en las referencias [37, 38].

Planteamiento del problema

La idea general de este trabajo de tesis es hacer una revisión del efecto A-B a partir de dos enfoques y notar que, en efecto, se obtienen los mismos resultados. El primer enfoque es utilizando el método de integrales de trayectoria de Feynman [39]. El segundo enfoque es comparar las soluciones de la ecuación de Schrödinger en presencia y ausencia de un campo magnético **B**.

Justificación

Este trabajo de tesis está justificado porque hasta el momento no existe un estudio sistemático que aborde los dos puntos de vista del tratamiento del efecto A-B. Por ejemplo, Sakurai [3] hace el estudio mediante integrales de trayectoria de Feynman y solamente menciona que puede hacerse también mediante la ecuación de Schrödinger. Otra justificación de esta revisión del efecto A-B es que es necesaria como un preludio para estudiar el efecto A-B *no* Abeliano [31], donde son necesarias incluir teorías de Yang-Mills [32, 33], y el cual al parecer, tiene aplicaciones en cómputo cuántico [34], lo cual están desarrollando los países más avanzados desde que Feynman propuso la posibilidad de construir una computadora de este tipo [40].

Además de que en años recientes se ha buscado estudiar la relación del efecto A-B con materiales de baja dimensión(unidimensionales, bidimensionales o cuánticos puntuales) con características topológicas (grafeno, por ejemplo) y con la materia condensada [35, 36].

Hipótesis

Partiremos del hecho de que existen dos enfoques para la explicación del efecto A-B, el de comparar soluciones de la ecuación de Schrödinger y el de integrales de trayectoria de Feynman. En base a lo anterior veremos que ambos enfoques conducen al mismo resultado.

Objetivo General

El objetivo general es verificar que los dos enfoques mencionados (à la Schrödinger y à la Feynman) conducen al mismo efecto A-B, donde se deduce que a nivel cuántico es el potencial vectorial magnético (**A**) quien juega un papel más fundamental que el propio campo magnético (**B**).

Objetivos específicos

1. Revisar y desarrollar el primer enfoque mencionado (integrales de trayectoria de Feynman).
2. Desarrollar el segundo enfoque mencionado (ecuación de Schrödinger) y mostrar que conduce al mismo efecto A-B dado por el primer enfoque.
3. Lograr un mejor entendimiento de lo que realmente significa el potencial vectorial **A**.

Metas

Las metas son las siguientes:

1. Fortalecer conceptos vistos en mecánica cuántica y teoría electromagnética.
2. Desarrollar conocimientos nuevos sobre la electrodinámica, geometría diferencial, topología y teoría de grupos, los cuales son necesarios para la resolución del problema propuesto.
3. Solucionar el problema propuesto (i.e., mostrar explícitamente que tanto el enfoque de Schrödinger como el de Feynman conducen al mismo efecto A-B).
4. Realizar la redacción, revisión y defensa de la tesis.

Capítulo 1

Dinámica cuántica

1.1. Evolución temporal y la ecuación de Schrödinger

En la mecánica cuántica, el tiempo es un parámetro, no un operador; no tiene sentido hablar del operador de tiempo de la misma manera en que hablamos del operador de posición. Irónicamente, en el desarrollo histórico de la mecánica ondulatoria, tanto L. de Broglie como E. Schrödinger fueron guiados por una especie de analogía covariante entre energía y tiempo, por un lado, y momento y posición (coordenada espacial) por otro. Sin embargo, cuando observamos la mecánica cuántica en su forma final, no hay rastro de un tratamiento simétrico entre espacio y tiempo.

1.1.1. Operador de evolución temporal

¿Cómo cambia un ket de estado con el tiempo? Supongamos que tenemos un sistema físico cuyo ket de estado en t_0 está representado por $|\alpha\rangle$. En tiempos posteriores, en general, no esperamos que el sistema permanezca en el mismo estado $|\alpha\rangle$. Denotemos el ket correspondiente al estado en algún momento posterior por:

$$|\alpha, t_0; t\rangle, \quad (t > t_0), \quad (1.1.1)$$

donde hemos escrito α, t_0 para recordar que el sistema solía estar en el estado $|\alpha\rangle$ en algún tiempo de referencia anterior t_0 . Dado que se supone que el tiempo es un parámetro continuo,

esperamos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\alpha, t_0; t\rangle = |\alpha\rangle, \quad (1.1.2)$$

y también podemos usar una notación abreviada,

$$|\alpha, t_0; t\rangle = |\alpha, t_0\rangle. \quad (1.1.3)$$

La idea básica es estudiar la evolución temporal de un ket de estado, es decir, cómo cambia el ket de estado bajo un desplazamiento temporal $t_0 \rightarrow t$:

$$|\alpha, t_0\rangle \xrightarrow{\text{evolución temporal}} |\alpha, t\rangle. \quad (1.1.4)$$

Como en el caso de la traslación, los dos kets están relacionados por un operador al que llamamos **operador de evolución temporal** $\mathcal{U}(t, t_0)$:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (1.1.5)$$

Tenemos un par de propiedades que se deben atribuir al operador de evolución temporal:

1. La unitariedad,

$$\mathcal{U}^\dagger(t, t_0)\mathcal{U}(t, t_0) = 1. \quad (1.1.6)$$

2. La propiedad de composición:

$$\mathcal{U}(t_2, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{U}(t_1, t_0), \quad (t_2 > t_1 > t_0). \quad (1.1.7)$$

Consideremos también un operador de evolución temporal infinitesimal $\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0)$:

$$|\alpha, t_0; t_0 + dt\rangle = \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0)|\alpha, t_0\rangle, \quad (1.1.8)$$

Debido a la continuidad [véase la ec. (1.1.2)], el operador infinitesimal de evolución temporal debe reducirse al operador *identidad* cuando dt tiende a cero, i.e.,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1, \quad (1.1.9)$$

y, al igual que en el caso de la *traslación*, esperamos que la diferencia entre $\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0)$ y 1 sea de primer orden en dt .

Suponemos que todos estos requisitos se satisfacen mediante

$$\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1 - i\Omega dt, \quad (1.1.10)$$

donde Ω es un operador hermitiano,

$$\Omega^\dagger = \Omega. \quad (1.1.11)$$

Con la Ec. (1.1.10), el operador de desplazamiento temporal infinitesimal satisface la propiedad de composición

$$\mathcal{U}(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0) = \mathcal{U}(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0 + dt_1) \mathcal{U}(t_0 + dt_1, t_0), \quad (1.1.12)$$

la cual difiere del operador identidad por un término de orden dt .

La propiedad de unitariedad también se puede verificar de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}^\dagger(t_0 + dt, t_0) \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = (1 + i\Omega^\dagger dt)(1 - i\Omega dt) \approx 1, \quad (1.1.13)$$

donde los términos de orden $(dt)^2$ o superiores pueden despreciarse.

En la antigua teoría cuántica se postula que la frecuencia angular ω está relacionada con la energía mediante la relación de Planck-Einstein:

$$E = \hbar\omega. \quad (1.1.14)$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ es la constante de Dirac (h es la constante de Planck). Ahora, tomemos prestado de la mecánica clásica la idea de que el Hamiltoniano es el generador de la evolución temporal (Goldstein 2002 [17]). Entonces, es natural relacionar Ω con el operador Hamiltoniano H :

$$\Omega = \frac{H}{\hbar}. \quad (1.1.15)$$

Finalmente, el operador infinitesimal de evolución temporal se escribe como:

$$\mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H dt, \quad (1.1.16)$$

donde se supone que H , el operador Hamiltoniano, es hermitiano.

1.1.2. La ecuación de Schrödinger

Ahora estamos en posición de derivar la ecuación diferencial fundamental para el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t, t_0)$. Usamos la propiedad de composición de $\mathcal{U}(t, t_0)$ cambiando $t_1 \rightarrow t$ y $t_2 \rightarrow t + dt$ en la Ec. (1.1.7):

$$\mathcal{U}(t + dt, t_0) = \mathcal{U}(t + dt, t)\mathcal{U}(t, t_0) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}Hdt\right)\mathcal{U}(t, t_0), \quad (1.1.17)$$

donde hemos usado, además, la igualdad (1.1.16).

Así,

$$\mathcal{U}(t + dt, t_0) - \mathcal{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}Hdt\mathcal{U}(t, t_0), \quad (1.1.18)$$

lo cual se puede escribir en forma de ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}H\mathcal{U}(t, t_0). \quad (1.1.19)$$

Esta es la **ecuación de Schrödinger para el operador de evolución temporal**.

Ahora, si multiplicamos ambos lados de la Ec. (1.1.19) por $|\alpha, t_0\rangle$ a la derecha, obtenemos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle = H\mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (1.1.20)$$

Pero $|\alpha, t_0\rangle$ no depende de t , por lo que esto es equivalente a:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle = H|\alpha, t_0; t\rangle, \quad (1.1.21)$$

donde se ha utilizado la Ec. (1.1.5). Esta es la **ecuación de Schrödinger para un ket de estado**.

1.2. La imagen de Schrödinger vs la imagen de Heisenberg

Previamente se introdujo el concepto de desarrollo temporal al considerar el operador de evolución temporal que afecta a los kets de estado; este enfoque de la dinámica cuántica se conoce como **la imagen de Schrödinger**. Existe otra formulación de la dinámica cuántica

en la que los observables, en lugar de los ket de estado, varían con el tiempo; este segundo enfoque se conoce como **la imagen de Heisenberg**.

1.2.1. Kets de estado y observables en las imágenes de Schrödinger y Heisenberg

En la imagen de Schrödinger, los operadores correspondientes a observables como x , p_y y S_z están fijos en el tiempo, mientras que los kets de estado varían con el tiempo. En contraste, en la imagen de Heisenberg los operadores correspondientes a observables varían con el tiempo; los kets de estado están fijos en lo que eran en t_0 . Es conveniente establecer t_0 en $\mathcal{U}(t, t_0)$ como cero por simplicidad y trabajar con $\mathcal{U}(t)$, que se define por

$$\mathcal{U}(t, t_0 = 0) = \mathcal{U}(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right). \quad (1.2.1)$$

Definimos la observable en la imagen de Heisenberg por:

$$A^H(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) A^S U(t), \quad (1.2.2)$$

donde los superíndices H y S representan Heisenberg y Schrödinger respectivamente.

En $t = 0$, la observable en la imagen de Heisenberg y la correspondiente observable en la imagen de Schrödinger coinciden:

$$A^H(t = 0) = A^S. \quad (1.2.3)$$

Los kets de estado también coinciden en las dos imágenes en $t = 0$; en tiempos posteriores, el ket de estado en la imagen de Heisenberg está “congelado” en lo que era en $t = 0$:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle, \quad (1.2.4)$$

independiente de t . Esto contrasta con el ket de estado en la imagen de Schrödinger:

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle_S = \mathcal{U}(t)|\alpha, t_0 = 0\rangle. \quad (1.2.5)$$

El valor esperado $\langle A \rangle$ es obviamente el mismo en ambas imágenes:

$$\begin{aligned} s\langle\alpha, t_0 = 0; t | A^S | \alpha, t_0 = 0; t \rangle_S &= \langle\alpha, t_0 = 0 | \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U} | \alpha, t_0 = 0 \rangle \\ &=_H \langle\alpha, t_0 = 0; t | A^H(t) | \alpha, t_0 = 0; t \rangle_H. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

1.2.2. La ecuación de movimiento de Heisenberg

En lo que sigue suponemos que A^S no depende explícitamente del tiempo; al diferenciar la ec. (1.2.2) obtenemos:

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}^\dagger}{\partial t} A^S \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger A^S \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U}, \quad (1.2.7)$$

donde hemos usado [véase la Ec. (1.1.19)]

$$\frac{\partial \mathcal{U}^t}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H \mathcal{U}^t, \quad (1.2.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}^t}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^\dagger H. \quad (1.2.9)$$

Dado que H fue introducido originalmente en la imagen de Schrödinger, podríamos estar tentados a definir:

$$H^{(H)} = \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U}. \quad (1.2.10)$$

de acuerdo con (1.2.2). Pero en aplicaciones elementales donde \mathcal{U} viene dado por (1.2.1), \mathcal{U} y H obviamente comutan; como resultado,

$$\mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} = H, \quad (1.2.11)$$

por lo que es correcto escribir la ec. (1.2.7) como

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [A^{(H)}, H]. \quad (1.2.12)$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de movimiento de Heisenberg** (aunque fue Dirac quién la derivó por primera vez).

Es instructivo comparar la Ec. (1.2.12) con la ecuación de movimiento clásica en forma de paréntesis de Poisson. En la física clásica, para una función A de $q's$ y $p's$ que no involucra explícitamente el tiempo, tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = [A, H]_{\text{clásico}}. \quad (2.2.20)$$

Nuevamente, vemos que la regla de cuantización de Dirac conduce a la ecuación correcta en mecánica cuántica.

Para cantidades que poseen partes clásicas, la ecuación clásica correcta puede obtenerse a partir de la ecuación mecánico-cuántica correspondiente a través del ansatz

$$\frac{[,]}{i\hbar} \rightarrow [,]_{\text{clásico}}. \quad (1.2.13)$$

En general, podemos decir que la mecánica clásica puede ser derivada de la mecánica cuántica pero lo opuesto no es cierto.

1.2.3. Partículas libres; el teorema de Ehrenfest

Tanto si trabajamos en la imagen de Schrödinger como en la de Heisenberg, para poder utilizar las ecuaciones de movimiento primero debemos aprender a construir el operador Hamiltoniano apropiado. Para un sistema físico con análogos clásicos, asumimos que el Hamiltoniano tiene la misma forma que en la física clásica; simplemente reemplazamos las variables clásicas x_i y p_i por los correspondientes operadores en mecánica cuántica. Con este supuesto, podemos reproducir las ecuaciones clásicas correctas en el límite clásico.

Cuando surge una ambigüedad debido a observables que no commutan, intentamos resolverla requiriendo que H sea hermitiano; por ejemplo, escribimos el análogo mecánico-cuántico del producto clásico xp como $\frac{1}{2}(xp + px)$. Cuando el sistema físico en cuestión no tiene análogos clásicos, solo podemos postular la estructura del operador Hamiltoniano. Probamos varias formas hasta obtener el Hamiltoniano que produce resultados consistentes con observaciones empíricas.

En aplicaciones prácticas, es frecuente necesitar evaluar el commutador de x_i (o p_i) con

funciones de x_j y p_j . Para este fin, son útiles las siguientes fórmulas:

$$[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (1.2.14)$$

y

$$[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad (1.2.15)$$

donde F y G son funciones que pueden expandirse en potencias de p_j y x_j respectivamente.

Ahora estamos en condiciones de aplicar la ecuación de movimiento de Heisenberg a una partícula *libre* de masa m . Tomamos el Hamiltoniano con la misma forma que en mecánica clásica:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}. \quad (1.2.16)$$

Vemos las observables p_i y x_i , las cuales entendemos como los operadores momento y posición en la imagen de Heisenberg aunque omitimos el superíndice (H) . Dado que p_i commuta con cualquier función de p_j ¹, tenemos:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_i, H] = 0. \quad (1.2.17)$$

Por lo tanto, para una partícula libre, el operador momento es una constante del movimiento, lo que significa que $p_i(t)$ es igual a $p_i(0)$ para todo tiempo. En general, es evidente de la ecuación de movimiento de Heisenberg [Ec. (1.2.12)] que cuando $A^{(H)}$ commuta con el Hamiltoniano, $A^{(H)}$ es una constante del movimiento. Además,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i, H] = \frac{p_i(0)}{m} = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^3 p_j^2 \right) = \frac{p_i}{m} = \frac{p_i(0)}{m}, \quad (1.2.18)$$

donde hemos aprovechado (1.2.14), por lo que obtenemos la solución:

$$x_i(t) = x_i(0) + \left(\frac{p_i(0)}{m} \right) t, \quad (1.2.19)$$

que recuerda la ecuación clásica de trayectoria para movimiento rectilíneo uniforme. Es importante notar que, aunque se cumple:

¹Recuerde que las relaciones de commutación fundamentales son $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

$$[x_i(0), x_j(0)] = 0. \quad (1.2.20)$$

para tiempos iguales, el conmutador de las x_i 's en tiempos diferentes no se anula; específicamente:

$$[x_i(t), x_i(0)] = \left[\frac{p_i(0)t}{m}, x_i(0) \right] = -\frac{i\hbar t}{m}. \quad (1.2.21)$$

Aplicando la relación de incertidumbre a este conmutador, obtenemos:

$$\langle (\Delta x_i)^2 \rangle_t \langle (\Delta x_i)^2 \rangle_{t=0} \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}. \quad (1.2.22)$$

Entre otras cosas, esta relación implica que incluso si la partícula está bien localizada en $t = 0$, su posición se vuelve cada vez más incierta con el tiempo, conclusión que también puede obtenerse estudiando la evolución temporal de paquetes de onda en mecánica ondulatoria.

Ahora añadimos un potencial $V(\mathbf{x})$ a nuestro Hamiltoniano de partícula libre:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}). \quad (1.2.23)$$

Aquí $V(\mathbf{x})$ debe entenderse como función de los operadores x, y y z . Usando (1.2.15) obtenemos:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_i, V(\mathbf{x})] = -\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \quad (1.2.24)$$

Por otro lado, vemos que:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \quad (1.2.25)$$

puesto que x_i conmuta con el nuevo término $V(\mathbf{x})$. Podemos usar nuevamente la ecuación de movimiento de Heisenberg para deducir:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{dx_i}{dt}, H \right] = \left[\frac{p_i}{m}, H \right] = \frac{1}{m} \frac{dp_i}{dt}. \quad (1.2.26)$$

Combinando esto con la ec. (1.2.24), obtenemos finalmente en forma vectorial:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{x}). \quad (1.2.27)$$

Esta es la versión mecánico-cuántica de la segunda ley de Newton. Tomando los valores esperados de ambos lados respecto a un ket de estado de Heisenberg que no evoluciona en el tiempo, obtenemos:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{d \langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = -\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle. \quad (1.2.28)$$

Este resultado se conoce como **el teorema de Ehrenfest**, en honor a P. Ehrenfest, quien lo derivó en 1927 usando el formalismo de la mecánica ondulatoria. Cuando el teorema se escribe en esta forma de valores esperados, su validez es independiente de si usamos la imagen de Heisenberg o la de Schrödinger; después de todo, los valores esperados son iguales en ambas imágenes. En contraste, la forma operacional (1.2.27) solo tiene sentido si entendemos \mathbf{x} y \mathbf{p} como operadores en la imagen de Heisenberg.

Notemos que en la Ec. (1.2.28) la \hbar ha desaparecido completamente. Por lo tanto, no es sorprendente que el centro de un paquete de ondas se mueva como una partícula clásica sujeta a $V(\mathbf{x})$.

1.2.4. Kets base y amplitudes de transición

Una concepción errónea sobre cómo evolucionan los kets base con el tiempo es pensar que a medida que pasa el tiempo, todos los kets se mueven en la imagen de Schrödinger y son estacionarios en la imagen de Heisenberg, lo cual no es propiamente correcto; el punto importante es distinguir el comportamiento de los kets de estado del de los kets base.

Los eigenkets de observables deben usarse como kets base. ¿Qué sucede con el tiempo al definir la ecuación de eigenvalores

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle? \quad (1.2.29)$$

En la imagen de Schrödinger, A no cambia, por lo que los kets base, obtenidos como soluciones a esta ecuación de eigenvalores en $t = 0$, por ejemplo, deben permanecer sin cambios. A diferencia de los kets de estado, los kets base no cambian en la imagen de Schrödinger.

La situación es muy diferente en la imagen de Heisenberg, donde la ecuación de eigenvalores que debemos estudiar es para el operador dependiente del tiempo:

$$A^H(t) = \mathcal{U}^\dagger A(0) \mathcal{U}. \quad (1.2.30)$$

A partir de la Ec. (1.2.29) evaluado en $t = 0$, cuando ambas imágenes coinciden, deducimos

$$\mathcal{U}^\dagger A(0) \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle = a' \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle. \quad (1.2.31)$$

lo que implica una ecuación de eigenvalores para A^H :

$$A^H(\mathcal{U}^\dagger |a'\rangle) = a'(\mathcal{U}^\dagger |a'\rangle). \quad (1.2.32)$$

Si seguimos manteniendo la visión de que los eigenkets de observables forman los kets base, entonces $\{\mathcal{U}(t)|a'\rangle\}$ deben usarse como kets base en la imagen de Heisenberg. A medida que pasa el tiempo, los kets base en la imagen de Heisenberg, denotados por $|a', t\rangle_H$, se mueven de la siguiente manera:

$$|a', t\rangle_H = \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle. \quad (1.2.33)$$

Debido a la aparición de \mathcal{U}^\dagger en lugar de \mathcal{U} en (1.2.33), los kets base en la imagen de Heisenberg giran en sentido opuesto en comparación con los kets de estado en la imagen de Schrödinger; específicamente, $|a', t\rangle_H$ satisface la “ecuación de Schrödinger con signo invertido”.

$$i \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle_H = -H |a', t\rangle_H. \quad (1.2.34)$$

En cuanto a los eigenvalores en sí, vemos en (1.2.32) que permanecen inalterados con el tiempo. Observamos también la siguiente expansión para $A^H(t)$ en términos de los kets y bras base de la imagen de Heisenberg:

$$A^H(t) = \sum_{a'} |a', t\rangle_H a' \langle a', t| = \sum_{a'} \mathcal{U}^\dagger |a'\rangle a' \langle a' | \mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \mathcal{U}. \quad (1.2.35)$$

lo que muestra que todo es bastante consistente, siempre que los kets base en la imagen de Heisenberg cambien como en (1.2.33). Vemos que los coeficientes de expansión de un ket de estado en términos de kets base son los mismos en ambas imágenes:

$$C_{a'}(t) = \langle a' | \cdot (\mathcal{U} | \alpha, t_0 = 0 \rangle) \quad (\text{Img. Schrödinger}), \quad (1.2.36)$$

$$C_{a'}(t) = (\langle a' | \mathcal{U} \cdot | \alpha, t_0 = 0 \rangle) \quad (\text{Img. Heisenberg}). \quad (1.2.37)$$

De manera pictórica, podríamos decir que el coseno del ángulo entre el ket de estado y el ket base es el mismo, ya sea que rotemos el ket de estado en sentido antihorario o el ket base en sentido horario. Estas consideraciones se aplican igualmente a los kets base que exhiben un espectro continuo; en particular, la función de onda $\langle x'|\alpha\rangle$ puede interpretarse ya sea como (1) el producto interno del eigenbra de posición estacionaria con el ket de estado móvil (la imagen de Schrödinger) o como (2) el producto interno del eigenbra de posición móvil con el ket de estado estacionario (la imagen de Heisenberg).

Para ilustrar aún más la equivalencia entre las dos imágenes, estudiamos las amplitudes de transición, que desempeñarán un papel fundamental en el capítulo 2. Supongamos que hay un sistema físico preparado en $t = 0$ para estar en un eigenestado del observable A con eigenvalor a' . En algún tiempo posterior t podríamos preguntar: ¿cuál es la amplitud de probabilidad, conocida como **amplitud de transición**, para que el sistema se encuentre en un eigenestado del observable B con eigenvalor b' ? Aquí A y B pueden ser iguales o diferentes. En la imagen de Schrödinger, el ket de estado en t está dado por $\mathcal{U}(t, 0)|a'\rangle$, mientras que los kets base $|a'\rangle$ y $|b'\rangle$ no varían con el tiempo; así que tenemos

$$\underbrace{\langle b'|}_{\text{bra base}} \cdot \underbrace{(\mathcal{U}|a'\rangle)}_{\text{ket de estado}} \quad (1.2.38)$$

para esta amplitud de transición. En contraste, en la imagen de Heisenberg el ket de estado es estacionario, es decir, permanece como $|a'\rangle$ en todo momento, pero los kets base evolucionan de manera opuesta. Así que la amplitud de transición es

$$\underbrace{(\langle b'|\mathcal{U})}_{\text{bra base}} \cdot \underbrace{|a'\rangle}_{\text{ket de estado}}. \quad (1.2.39)$$

Obviamente, (1.2.38) y (1.2.39) son iguales. Ambos pueden escribirse como

$$\langle b'|\mathcal{U}(t, 0)|a'\rangle. \quad (1.2.40)$$

En un sentido vago, esta es la amplitud de transición para “ir” del estado $|a'\rangle$ al estado $|b'\rangle$.

Capítulo 2

Propagadores e integrales de trayectoria de Feynman

2.1. Propagadores en mecánica ondulatoria

El problema de evolución temporal más general con un Hamiltoniano H independiente del tiempo puede resolverse una vez que expandemos el ket inicial $|\alpha, t_0\rangle$ en términos de los eigenkets $|a'\rangle$ de una observable que conmuta con H . Si trasladamos este enunciado al lenguaje de la mecánica ondulatoria, tenemos

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0; t\rangle &= \exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right] |\alpha, t_0\rangle \\ &= \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha, t_0\rangle \exp\left[\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right], \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde $E_{a'}$ denota los eigenvalores de los eigenkets de energía de H en la base de $|a'\rangle$.

Multiplicando ambos lados por $\langle \mathbf{x}'|$ a la izquierda, tenemos

$$\langle \mathbf{x}'|\alpha, t_0; t\rangle = \sum_{a'} \langle \mathbf{x}'|a'\rangle \langle a'|\alpha, t_0\rangle \exp\left[\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right], \quad (2.1.2)$$

lo cual es de la forma

$$\Psi(\mathbf{x}', t) = \sum_{a'} c_{a'}(t_0) u_{a'}(\mathbf{x}') \exp\left[\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right], \quad (2.1.3)$$

donde

$$u_{a'}(\mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}'|a'\rangle \quad (2.1.4)$$

representa la eigenfunción del operador A con eigenvalor a' . Notese también que

$$\langle a'|\alpha, t_0\rangle = \int d^3x \langle a'|\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha, t_0\rangle, \quad (2.1.5)$$

lo cual reconocemos como la regla usual en mecánica ondulatoria para obtener los coeficientes de expansión del estado inicial:

$$c_{a'} = \int d^3x u_{a'}^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t_0). \quad (2.1.6)$$

Ahora (2.1.2) junto con (2.1.5) pueden visualizarse también como algún tipo de operador integral que actúa sobre la función de onda inicial para llevar a la función de onda final:

$$\Psi(\mathbf{x}'', t) = \int d^3x' K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) \Psi(\mathbf{x}', t_0). \quad (2.1.7)$$

Aquí el kernel (núcleo) del operador integral, conocido como el **propagador** en mecánica ondulatoria, está dado por

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \sum_{a'} \langle \mathbf{x}'' | a' \rangle \langle a' | \mathbf{x}' \rangle \exp \left[\frac{-iE_{a'}(t - t_0)}{\hbar} \right]. \quad (2.1.8)$$

En cualquier problema dado, el propagador depende solamente del potencial y es independiente de la función de onda inicial. Puede construirse una vez que se dan las eigenfunciones de energía y sus eigenvalores.

Hay dos propiedades del propagador que vale la pena mencionar aquí:

I. Para $t > t_0$, $K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0)$ satisface la ecuación de onda dependiente del tiempo de Schrödinger en las variables \mathbf{x}'' y t , con \mathbf{x}' y t_0 fijos.

II.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \delta^3(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}). \quad (2.1.9)$$

Por estas dos propiedades, el propagador (2.1.8), considerado como una función de \mathbf{x}'' , es simplemente la función de onda en t de una partícula que estaba localizada *precisamente* en \mathbf{x}' en un tiempo anterior t_0 . En realidad, esta interpretación sigue, quizás de manera más elegante, de notar que (2.1.8) también puede escribirse como:

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \langle \mathbf{x}'' | \exp \left[\frac{-iH(t - t_0)}{\hbar} \right] | \mathbf{x}' \rangle, \quad (2.1.10)$$

donde el operador de evolución temporal que actúa sobre $|\mathbf{x}'\rangle$ da sólo el ket de estado en t de un sistema que estaba localizado precisamente en \mathbf{x}' al tiempo $t_0 (< t)$. Si deseamos resolver un problema más general donde la función de onda inicial se extiende sobre una región finita del espacio, todo lo que debemos hacer es multiplicar $\Psi(\mathbf{x}', t_0)$ por el propagador $K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0)$ e integrar sobre todo el espacio (esto es, sobre \mathbf{x}'). De esta manera podemos sumar las diferentes contribuciones desde diferentes posiciones (\mathbf{x}').

2.2. Propagador como una amplitud de transición

Recordando que la función de onda es el producto interno del bra de posición fijo $\langle \mathbf{x}' |$ con el ket de estado que se mueve $|\alpha, t_0; t\rangle$ puede considerarse también como el producto interno del bra de posición en la imagen de Heisenberg $\langle \mathbf{x}', t |$, el cual se mueve “opuestamente” en el tiempo, con el ket de estado $|\alpha, t_0\rangle$ en la imagen de Heisenberg, el cual está fijo en el tiempo. De esa manera, el propagador puede escribirse también como

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) &= \sum_{a'} \langle \mathbf{x}'' | a' \rangle \langle a' | \mathbf{x}' \rangle \exp \left[\frac{-iE_{a'}(t - t_0)}{\hbar} \right] \\ &= \sum_{a'} \langle \mathbf{x}'' | \exp \left(\frac{-iHt}{\hbar} \right) | a' \rangle \langle a' | \exp \left(\frac{iHt_0}{\hbar} \right) | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde $|\mathbf{x}', t_0\rangle$ y $\langle \mathbf{x}'', t |$ deben entenderse como un eigenket y un eigenbra del operador de posición en la imagen de Heisenberg. En la notación de la imagen de Heisenberg, $\langle b', t | a' \rangle$ es la amplitud de probabilidad para que un sistema originalmente preparado como un eigenestado de A con eigenvalor a' en algún tiempo inicial $t_0 = 0$ se encuentre más tarde en el tiempo t en un eigenestado de B con eigenvalor b' , y se denomina **la amplitud de transición** para ir del estado $|a'\rangle$ al estado $|b'\rangle$. En términos generales, $\langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle$ es la amplitud para que la partícula vaya del punto del espacio-tiempo (\mathbf{x}', t_0) a otro punto del espacio-tiempo (\mathbf{x}'', t) , por lo que el término *amplitud de transición* para esta expresión es muy apropiado.

Resulta ser conveniente usar una notación que trata las coordenadas de espacio y tiempo de manera más simétrica. Para este fin se escribe $\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle$ en lugar de $\langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle$. Ya

que en cualquier tiempo dado los kets de posición en la imagen de Heisenberg forman un conjunto completo, podemos insertar el operador identidad escrito como:

$$\int d^3x'' |\mathbf{x}'', t''\rangle \langle \mathbf{x}'', t''| = 1 \quad (2.2.2)$$

en cualquier lugar que deseemos. Por ejemplo, considérese la evolución temporal de t' a t''' ; dividiendo el intervalo temporal (t', t''') en dos partes, (t', t'') y (t'', t''') , tenemos

$$\langle \mathbf{x}''', t''' | \mathbf{x}', t' \rangle = \int d^3x'' \langle \mathbf{x}''', t''' | \mathbf{x}'', t'' \rangle \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle, \quad (t''' > t'' > t'). \quad (2.2.3)$$

Ésta es la **propiedad de composición** de la amplitud de transición. Claramente, podemos dividir el intervalo temporal en muchos subintervalos más pequeños tanto como deseemos.

Tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}''', t''' | \mathbf{x}', t' \rangle &= \int d^3x''' \int d^3x'' \langle \mathbf{x}''', t''' | \mathbf{x}''', t'' \rangle \langle \mathbf{x}''', t'' | \mathbf{x}'', t'' \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle, \quad (t'''' > t''' > t'' > t'), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

etc. Si de algún modo se obtiene la forma de $\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle$ para un intervalo de tiempo *infinitesimal* (entre t' y $t'' = t' + dt$), se puede obtener la amplitud $\langle \mathbf{x}'', t'' | \mathbf{x}', t' \rangle$ para un intervalo temporal finito componiendo las amplitudes de transición apropiadas para intervalos temporales infinitesimales de una manera análoga a (2.2.4).

2.3. Integrales de trayectoria y la suma sobre trayectorias

Sin pérdida de generalidad nos restringimos a problemas unidimensionales. También, evitamos expresiones inconvenientes como

$$x'''' \cdots x''' \quad \text{N veces}$$

usando la notación x_N . Con esta notación consideramos la amplitud de transición para una partícula que va del punto de espacio-tiempo inicial (x_1, t_1) al punto de espacio-tiempo final (x_N, t_N) . El intervalo temporal entero entre t_1 y t_N se divide en $N - 1$ partes iguales:

$$t_j - t_{j-1} = \Delta t = \frac{(t_N - t_1)}{N - 1}. \quad (2.3.1)$$

Explotando la propiedad de composición, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2 \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \\ &\quad \times \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Para visualizar esto gráficamente, considerese un plano de espacio-tiempo, como se muestra en la Figura 2.1. Los puntos de espacio-tiempo inicial y final se fijan como (x_1, t_1) y (x_N, t_N) , respectivamente. Para cada segmento de tiempo, digamos entre t_{n-1} y t_n , se nos instruye a considerar la amplitud de transición que va de (x_{n-1}, t_{n-1}) a (x_n, t_n) ; entonces integramos sobre x_2, x_3, \dots, x_{N-1} . Esto significa que debemos *sumar sobre todas las posibles trayectorias* en el plano de espacio-tiempo con los puntos extremos fijos.

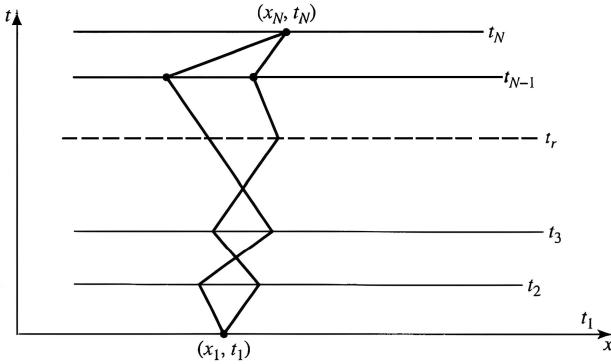


Figura 2.1: Trayectorias en el plano xt .

2.4. Formulación de Feynman

En mecánica clásica se asocia una trayectoria definida en el plano xt con el movimiento de la partícula; en contraste, en mecánica cuántica todas las trayectorias posibles deben jugar roles que incluyen aquellos que no tienen alguna semejanza con la trayectoria clásica. A pesar de todo debemos de algún modo poder reproducir la mecánica clásica de una manera suave en el límite $\hbar \rightarrow 0$. ¿Cómo vamos a lograr esto?

Como un joven estudiante graduado en la Universidad de Princeton, R. P. Feynman trató de atacar este problema. Al buscar una posible pista, él dijo que estaba intrigado por

una misteriosa nota en el libro de Dirac el cual, en nuestra notación, equivale al siguiente enunciado:

$$\exp \left[i \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt L_{\text{clásico}}(x, \dot{x})}{\hbar} \right] \text{ corresponde a } \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle,$$

donde $L_{\text{clásico}}$ se refiere al Lagrangiano clásico.

Feynman intentó buscarle sentido a esta nota. ¿“Corresponde a” es lo mismo que “es igual a” o que “es proporcional a”? Al hacerlo él fue llevado a formular un enfoque de espacio-tiempo para la mecánica cuántica basado en *integrales de trayectoria*.

En la formulación de Feynman la acción clásica juega un rol muy importante. Para abbreviar, se introduce una nueva notación:

$$S(n, n-1) \equiv \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt L_{\text{clásico}}(x, \dot{x}). \quad (2.4.1)$$

Ya que $L_{\text{clásico}}$ es una función de x y \dot{x} , $S(n, n-1)$ está definida solo después de que se especifica una trayectoria definida a lo largo de la cual se lleva a cabo la integración. Considerando un pequeño segmento a lo largo de una trayectoria preescrita, supóngase entre (x_{n-1}, t_{n-1}) y (x_n, t_n) . De acuerdo a Dirac, se instruye asociar $\exp[iS(n, n-1)/\hbar]$ con dicho segmento. Al ir a lo largo de la trayectoria definida a seguir, se multiplican sucesivamente expresiones de este tipo para obtener

$$\prod_{n=2}^N \exp \left[\frac{iS(n, n-1)}{\hbar} \right] = \exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \sum_{n=2}^N S(n, n-1) \right] = \exp \left[\frac{iS(N, 1)}{\hbar} \right]. \quad (2.4.2)$$

Esto no da aún $\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle$; más bien, esta ecuación es la contribución a $\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle$ que surge de la trayectoria particular que se ha considerado, aún se debe integrar sobre x_2, x_3, \dots, x_N . Al mismo tiempo, explotando la propiedad de composición, se permite que el intervalo temporal entre t_{n-1} y t_n sea infinitesimalmente pequeño. Así nuestra expresión candidata para $\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle$ puede escribirse, en cierto sentido aproximado, como:

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle \sim \sum_{\text{todas las trayectorias}} \exp \left[\frac{iS(N, 1)}{\hbar} \right], \quad (2.4.3)$$

donde la suma debe tomarse sobre un conjunto de trayectorias innumerablemente infinito.

Para formular la conjetura de Feynman de manera más precisa, tenemos que regresar a $\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle$, donde se supone que la diferencia temporal $t_n - t_{n-1}$ es infinitesimalmente pequeña. Sea,

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \left[\frac{1}{w(\Delta t)} \right] \exp \left[\frac{iS(n, n-1)}{\hbar} \right], \quad (2.4.4)$$

donde $S(n, n-1)$ es evaluada en un momento en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ y donde se ha insertado un factor de peso, $1/w(\Delta t)$, el cual se supone que depende sólo del intervalo temporal $t_n - t_{n-1}$ y no de $V(x)$.

Debido a que el intervalo temporal es muy pequeño, es legítimo hacer una aproximación de línea recta para la trayectoria que une (x_{n-1}, t_{n-1}) y (x_n, t_n) como sigue:

$$\begin{aligned} S(n, n-1) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right] \\ &= \Delta t \left\{ \left(\frac{m}{2} \right) \left[\frac{(x_n - x_{n-1})}{\Delta t} \right]^2 - V \left(\frac{(x_n + x_{n-1})}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Como el factor de peso $1/w(\Delta t)$ que aparece en (2.4.4) es independiente de $V(x)$, y notando la ortonormalidad en el sentido de la función δ , de los eigenkets de posición en la imagen de Heisenberg a tiempos iguales,

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle|_{t_n=t_{n-1}} = \delta(x_n - x_{n-1}), \quad (2.4.6)$$

obtenemos

$$\frac{1}{w(\Delta t)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}, \quad (2.4.7)$$

Así, conforme $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left[\frac{iS(n, n-1)}{\hbar} \right]. \quad (2.4.8)$$

La expresión final para la amplitud de transición con $t_N - t_1$ finito es

$$\begin{aligned}\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{(N-1)/2} \\ &\times \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2 \prod_{n=2}^N \exp \left[\frac{iS(n, n-1)}{\hbar} \right],\end{aligned}\quad (2.4.9)$$

donde el límite $N \rightarrow \infty$ se toma con x_N y t_N fijos. Se define ahora un nuevo tipo de operador integral multidimensional (de hecho, infinito-dimensional)

$$\int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{(N-1)/2} \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2 \quad (2.4.10)$$

Así (2.4.9) se puede reescribir como:

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{L_{\text{clásico}}(x, \dot{x})}{\hbar} \right]. \quad (2.4.11)$$

Esta expresión se conoce como la **integral de trayectoria de Feynman**. Su significado como suma sobre todas las trayectorias posibles debería ser evidente a partir de la ecuación (2.4.9).

Los pasos que nos condujeron a la ecuación (2.4.9) no deben interpretarse como una derivación formal. Más bien, nosotros (o Feynman) hemos intentado una nueva formulación de la mecánica cuántica basada en el concepto de trayectorias, motivados por el enigmático comentario de Dirac. Las únicas ideas que tomamos prestadas de la formulación convencional de la mecánica cuántica son: (1) el principio de superposición (utilizado al sumar las contribuciones de las diversas trayectorias alternativas), (2) la propiedad de composición de la amplitud de transición, y (3) la correspondencia con la física clásica en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

Los métodos que emplean integrales de trayectoria han resultado ser herramientas sumamente poderosas en diversas áreas de la física moderna, como la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística. En el capítulo 4, retomaremos este enfoque para deducir el efecto Aharonov–Bohm.

Capítulo 3

Potenciales y transformaciones de norma

3.1. Potencial constante

En mecánica clásica es bien conocido que el punto cero de la energía potencial no tiene significado físico. El desarrollo temporal de variables dinámicas como $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{L}(t)$ es independiente de si usamos $V(\mathbf{x})$ o $V(\mathbf{x}) + V_0$ con V_0 constante en el espacio y en el tiempo. La fuerza que aparece en la segunda ley de Newton depende únicamente del gradiente del potencial, una constante aditiva es claramente irrelevante. ¿Cuál es la situación análoga en mecánica cuántica? Para entenderlo hay que ver la evolución temporal del ket de estado (en la imagen de Schrödinger) sujeto a un potencial.

Sea $|\alpha, t_0; t\rangle$ un ket de estado en presencia de $V(\mathbf{x})$ y sea $\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle}$ el ket de estado apropiado para

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + V_0. \quad (3.1.1)$$

Las condiciones iniciales son tales que ambos kets coinciden con $|\alpha\rangle$ en $t = t_0$. Recordando que el ket de estado en t puede obtenerse aplicando el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t, t_0)$ al ket de estado en t_0 , obtenemos:

$$\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = \exp \left[-i \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + V_0 \right) \frac{(t - t_0)}{\hbar} \right] |\alpha\rangle = \exp \left[\frac{-iV_0(t - t_0)}{\hbar} \right] |\alpha, t_0; t\rangle, \quad (3.1.2)$$

i.e., el ket calculado bajo la influencia de \tilde{V} tiene una dependencia del tiempo sólo por un factor de fase $\exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right]$. Para estados estacionarios esto significa que si la dependencia del tiempo calculada con $V(\mathbf{x})$ es $\exp\left[\frac{-iE(t-t_0)}{\hbar}\right]$, entonces la correspondiente dependencia temporal calculada con $V(\mathbf{x}) + V_0$ es $\exp\left[\frac{-i(E+V_0)(t-t_0)}{\hbar}\right]$, es decir, el uso de \tilde{V} en lugar de V sólo nos lleva al cambio:

$$E \rightarrow E + V_0. \quad (3.1.3)$$

Los efectos observables tales como la evolución temporal de los valores esperados de $\langle \mathbf{x} \rangle$ y $\langle \mathbf{S} \rangle$ dependen siempre de *diferencias* de energía; las frecuencias de Bohr que caracterizan la dependencia sinusoidal en el tiempo de los valores esperados son las mismas, ya sea que usemos $V(\mathbf{x})$ o $V(\mathbf{x}) + V_0$. En general, no hay diferencia en los valores esperados de las observables si cada ket de estado es multiplicado por un factor común $\exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right]$. Este es un primer ejemplo de una clase de transformaciones conocidas como **transformaciones de norma**. El cambio en nuestra convención para el punto cero de la energía potencial

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{x}) + V_0 \quad (3.1.4)$$

debe acompañarse de un cambio en el ket de estado:

$$|\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow \exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right] |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (3.1.5)$$

Por supuesto, este cambio implica un cambio en la función de onda:

$$\Psi(\mathbf{x}', t) \rightarrow \exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right] \Psi(\mathbf{x}', t). \quad (3.1.6)$$

Ahora, considérese un V_0 que es espacialmente uniforme pero dependiente del tiempo. En este caso, el análogo de la ecuación (3.1.5) es:

$$|\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow \exp\left(-i \int_{t_0}^t dt' \frac{V_0(t')}{\hbar}\right) |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (3.1.7)$$

Físicamente, usar $V(\mathbf{x}) + V_0(t)$ en lugar de $V(\mathbf{x})$ significa simplemente que estamos eligiendo un nuevo punto cero de la escala de energía en cada instante de tiempo. Aunque la elección de la escala absoluta del potencial es arbitraria, las diferencias de potencial tienen una

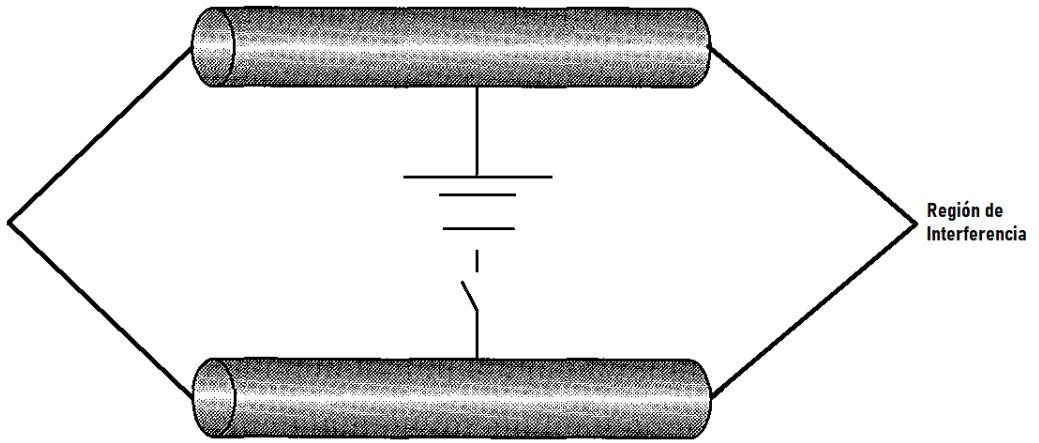


Figura 3.1: Interferencia cuántica para detectar una diferencia de potencial

importancia física *no trivial* y, de hecho, pueden detectarse de manera sorprendente. Para ilustrar este punto, consideremos el arreglo mostrado en la Figura 3.1

Un haz de partículas cargadas se divide en dos partes, cada una de las cuales entra en una jaula metálica. Si lo deseamos, podemos mantener una diferencia de potencial finita entre las dos jaulas activando un interruptor, como se muestra. Una partícula en el haz puede visualizarse como un paquete de ondas cuya dimensión es mucho menor que la dimensión de la jaula. Supongamos que activamos la diferencia de potencial sólo después de que los paquetes de ondas entran en las jaulas y la desactivamos antes de que los paquetes de ondas salgan de las jaulas.

La partícula dentro de la jaula no experimenta *ninguna fuerza* porque, dentro de la jaula, el potencial es espacialmente uniforme; por lo tanto, no hay un campo eléctrico presente. Ahora, recombinemos los dos componentes del haz de tal manera que se encuentren en la región de interferencia de la Figura 3.1. Debido a la existencia del potencial, cada componente sufre un cambio de fase, como se indica en la ecuación (3.1.7). Como resultado, hay un término observable de interferencia en la intensidad del haz en la región de interferencia, a saber:

$$\cos(\phi_1 - \phi_2), \quad \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (3.1.8)$$

donde

$$\phi_1 - \phi_2 = \left(\frac{1}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t [V_2(t') - V_1(t')] dt'. \quad (3.1.9)$$

Por lo tanto, a pesar de que la partícula no experimenta ninguna fuerza, hay un efecto observable que depende de si se ha aplicado o no $V_2(t) - V_1(t)$. Obsérvese que este efecto es *puramente cuántico*; en el límite $\hbar \rightarrow 0$, el efecto de interferencia desaparece porque la oscilación del coseno se vuelve infinitamente rápida.

3.2. Transformaciones de norma en electromagnetismo

Pasemos ahora a los potenciales que aparecen en electromagnetismo. Consideramos un campo eléctrico y un campo magnético derivables del potencial escalar $\phi(\mathbf{x})$ y del potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, independientes del tiempo :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.2.1)$$

El Hamiltoniano para una partícula con carga eléctrica e ($e < 0$ para el electrón) sometida a un campo electromagnético se toma de la física clásica como:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi. \quad (3.2.2)$$

En mecánica cuántica, ϕ y \mathbf{A} se entienden como funciones del operador de posición \mathbf{x} de la partícula cargada. Dado que \mathbf{p} y \mathbf{A} no conmutan, es necesario interpretar (3.2.2) con cuidado. Lo más seguro es escribir:

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2. \quad (3.2.3)$$

En esta forma el Hamiltoniano es obviamente hermitiano.

Para estudiar la dinámica de una partícula cargada sometida a ϕ y \mathbf{A} , procedemos en la representación de Heisenberg. Podemos evaluar la derivada temporal de \mathbf{x} de manera directa:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{[x_i, H]}{i\hbar} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right). \quad (3.2.4)$$

Esto muestra que el operador \mathbf{p} , definido como el generador de traslaciones, no es lo mismo que $m \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. A menudo, \mathbf{p} se llama **momento canónico**, para distinguirlo del **momento cinemático** (o mecánico), denotado por $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{\Pi} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (3.2.5)$$

Aunque tenemos

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (3.2.6)$$

para el momento canónico, el commutador análogo no se anula para el momento mecánico. En su lugar, obtenemos

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] &= \left[p_i - \frac{eA_i}{c}, p_j - \frac{eA_j}{c} \right] = \left[p_i, p_j - \frac{eA_j}{c} \right] + \left[\frac{-eA_i}{c}, p_j - \frac{eA_j}{c} \right] \\ &= - \left[p_i, \frac{eA_i}{c} \right] - \left[\frac{eA_i}{c}, p_j \right] \\ &= -p_i \frac{eA_j}{c} + \frac{eA_j}{c} p_i - \frac{eA_i}{c} p_j + p_j \frac{eA_i}{c}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

donde se ha usado (3.2.6) y que $[A_i, A_j] = 0$.

Aplicando a una función Ψ , ordenando, y recordando que $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ tenemos:

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] \Psi &= \left(-p_i \frac{eA_j}{c} + p_j \frac{eA_i}{c} - \frac{eA_j}{c} p_i + \frac{eA_i}{c} p_j \right) \Psi \\ &= \frac{i\hbar e}{c} (\partial_i A_j \Psi - \partial_j A_i \Psi) - \frac{i\hbar e}{c} (A_j \partial_i \Psi - A_i \partial_j \Psi) \\ &= \frac{i\hbar e}{c} (\Psi \partial_i A_j + A_j \partial_i \Psi - \Psi \partial_j A_i - A_i \partial_j \Psi) - \frac{i\hbar e}{c} (A_j \partial_i \Psi - A_i \partial_j \Psi) \\ &= \frac{i\hbar e}{c} (\Psi \partial_i A_j - \Psi \partial_j A_i). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Ya que $B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$, tenemos:

$$\frac{i\hbar e}{c} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \Psi = \left(\frac{i\hbar e}{c} \right) \epsilon_{ijk} B_k \Psi. \quad (3.2.9)$$

Por lo tanto,

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \left(\frac{i\hbar e}{c} \right) \epsilon_{ijk} B_k. \quad (3.2.10)$$

Además, reescribiendo el hamiltoniano como:

$$H = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + e\phi, \quad (3.2.11)$$

y usando la relación de conmutación fundamental, podemos derivar la versión cuántica de la fuerza de Lorentz:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{2c} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right]. \quad (3.2.12)$$

Este es el teorema de Ehrenfest, escrito en la representación de Heisenberg, para una partícula cargada en presencia de \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Ahora discutimos las transformaciones de norma en electromagnetismo. Considerérese primero:

$$\phi \rightarrow \phi + \lambda, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}, \quad (3.2.13)$$

con λ constante, es decir, independiente de \mathbf{x} y t . Tanto \mathbf{E} como \mathbf{B} permanecen sin cambios, obviamente. Esta transformación simplemente equivale a un cambio en el punto cero de la escala de energía, una posibilidad tratada al comienzo de este capítulo; simplemente reemplazamos V por $e\phi$.

Es mucho más interesante la transformación:

$$\phi \rightarrow \phi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad (3.2.14)$$

donde Λ es una función de \mathbf{x} . Los campos electromagnéticos estáticos \mathbf{E} y \mathbf{B} no cambian bajo (3.2.14). Tanto (3.2.13) como (3.2.14) son casos especiales de:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad (3.2.15)$$

los cuales dejan \mathbf{E} y \mathbf{B} , dados por:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.2.16)$$

sin cambios, pero en lo que sigue no consideramos campos ni potenciales dependientes del tiempo. En el resto de este capítulo, el término *transformación de norma* se refiere a (3.2.14).

En física clásica, los efectos observables como la trayectoria de una partícula cargada son independientes de la norma utilizada, es decir, de la elección particular de Λ que adoptemos. Consideremos una partícula cargada en un campo magnético uniforme en la dirección z , $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Este campo magnético puede derivarse de:

$$A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0 \quad (3.2.17)$$

o también de:

$$A_x = -By, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0 \quad (3.2.18)$$

La segunda forma se obtiene de la primera mediante:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \left(\frac{Bxy}{2} \right) \quad (3.2.19)$$

que corresponde precisamente a la forma de (3.2.14). Independientemente de qué \mathbf{A} usemos, la trayectoria de la partícula cargada con un conjunto dado de condiciones iniciales es la misma: simplemente una hélice (movimiento circular uniforme cuando se proyecta en el plano xy superpuesto con un movimiento rectilíneo uniforme en la dirección z). Sin embargo, si examinamos p_x y p_y , los resultados son muy diferentes. En particular, p_x es una constante de movimiento cuando se usa (3.2.18) pero no cuando se usa (3.2.17).

Recordemos las ecuaciones de movimiento de Hamilton:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \quad (3.2.20)$$

En general, el momento canónico \mathbf{p} no es una cantidad invariante bajo transformaciones de norma; su valor numérico depende de la norma particular utilizada, incluso cuando nos referimos a la misma situación física. En contraste, el momento cinemático $\mathbf{\Pi}$, o $m \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, que traza la trayectoria de la partícula, es una cantidad invariante bajo transformaciones de norma.

En la mecánica cuántica es razonable exigir que los valores esperados se comporten de manera similar a las cantidades clásicas correspondientes bajo transformaciones de norma, de modo que $\langle \mathbf{x} \rangle$ y $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ no cambien bajo transformaciones de norma, mientras que se espera que $\langle \mathbf{p} \rangle$ cambie.

Denotemos por $|\alpha\rangle$ el ket de estado en presencia de \mathbf{A} ; el ket de estado para la misma situación física cuando se utiliza:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (3.2.21)$$

en lugar de \mathbf{A} se denota por $|\tilde{\alpha}\rangle$. Aquí Λ , al igual que \mathbf{A} , es una función del operador de posición \mathbf{x} . Los requisitos básicos son:

$$\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{x} | \tilde{\alpha} \rangle \quad (3.2.22)$$

y

$$\langle \alpha | \mathbf{\Pi} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\mathbf{\Pi}} | \tilde{\alpha} \rangle. \quad (3.2.23)$$

Además, requerimos, como es habitual, que la norma del ket de estado se preserve:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle. \quad (3.2.24)$$

Debemos construir un operador \mathcal{G} que relacione $|\tilde{\alpha}\rangle$ con $|\alpha\rangle$:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathcal{G}|\alpha\rangle. \quad (3.2.25)$$

Las propiedades de invariancia (3.2.22) y (3.2.23) están garantizadas si:

$$\mathcal{G}^\dagger \mathbf{x} \mathcal{G} = \mathbf{x} \quad (3.2.26)$$

y

$$\mathcal{G}^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} - \frac{e\nabla\Lambda}{c} \right) \mathcal{G} = \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c}. \quad (3.2.27)$$

Afirmamos que:

$$\mathcal{G} = \exp \left(\frac{ie\Lambda(\mathbf{x})}{\hbar c} \right) \quad (3.2.28)$$

hará el trabajo. Primero, \mathcal{G} es unitario, por lo que la Ec. (3.2.24) es correcta. Segundo, (3.2.26) se satisface obviamente porque \mathbf{x} conmuta con cualquier función de \mathbf{x} . En cuanto a (3.2.27), basta notar que:

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) \mathbf{p} \exp \left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) &= \exp \left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) \left[\mathbf{p}, \exp \left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) \right] + \mathbf{p} \\ &= -\exp \left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) i\hbar \nabla \left[\exp \left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c} \right) \right] + \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p} + \frac{e\nabla\Lambda}{c}, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

donde hemos usado $[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar\partial_i G$.

La invariancia de la mecánica cuántica bajo transformaciones de norma también puede demostrarse directamente mirando la ecuación de Schrödinger. Sea $|\alpha, t_0; t\rangle$ una solución a la ecuación de Schrödinger en presencia de \mathbf{A} :

$$\left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2}{2m} + e\phi \right] |\alpha, t_0; t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (3.2.30)$$

La solución correspondiente en presencia de $\tilde{\mathbf{A}}$ debe satisfacer:

$$\left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c - e\nabla\Lambda/c)^2}{2m} + e\phi \right] \widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle}. \quad (3.2.31)$$

Vemos que si el nuevo ket se toma como:

$$\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) |\alpha, t_0; t\rangle, \quad (3.2.32)$$

de acuerdo con (3.2.28), entonces la nueva ecuación de Schrödinger (3.2.31) se satisface; todo lo que debemos notar es que:

$$\exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} - \frac{e\nabla\Lambda}{c} \right)^2 \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) = \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2, \quad (3.2.33)$$

lo cual sigue de aplicar (3.2.29) dos veces.

La ecuación (3.2.32) también implica que las correspondientes funciones de onda están relacionadas mediante:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}', t) = \exp\left(\frac{ie\Lambda(\mathbf{x}')}{\hbar c}\right) \Psi(\mathbf{x}', t), \quad (3.2.34)$$

donde $\Lambda(\mathbf{x}')$ es ahora una función real del valor propio del operador de posición \mathbf{x}' . Esto puede, por supuesto, verificarse también sustituyendo directamente (3.2.34) en la ecuación de onda de Schrödinger con \mathbf{A} reemplazado por $\mathbf{A} + \nabla\Lambda$.

Cuando se utilizan potenciales vectoriales en diferentes normas para la misma situación física, los correspondientes kets de estado (o funciones de onda) deben ser necesariamente diferentes. Sin embargo, solo se necesita un cambio simple; podemos pasar de una norma especificada por \mathbf{A} a otra especificada por $\mathbf{A} + \nabla\Lambda$ simplemente multiplicando el ket antiguo (o la función de onda antigua) por $\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)$. El **momento canónico**, definido como el generador de traslaciones, es manifiestamente dependiente de la norma en el sentido de que su valor esperado depende de la norma particular elegida, mientras que el **momento cinemático** y el flujo de probabilidad son *invariantes de norma*.

Es natural preguntarse por qué la invariancia bajo (3.2.28) se llama *invariancia de norma* (*gauge* en inglés). Esta palabra es la traducción del alemán *Eichinvarianz*, donde *Eich* significa “norma” y cuyo origen se comenta en lo que sigue.

Consideremos primero alguna función de posición en \mathbf{x} : $F(\mathbf{x})$. En un punto vecino, obviamente tenemos:

$$F(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \simeq F(\mathbf{x}) + (\nabla F) \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.2.35)$$

Pero suponga que aplicamos un cambio de escala a medida que pasamos de \mathbf{x} a $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$:

$$1 \Big|_{\text{en } \mathbf{x}} \rightarrow [1 + \Sigma(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}] \Big|_{\text{en } \mathbf{x} + d\mathbf{x}}. \quad (3.2.36)$$

Entonces debemos reescalar $F(\mathbf{x})$ de la siguiente manera:

$$F(\mathbf{x} + d\mathbf{x})_{\text{reescalado}} \simeq F(\mathbf{x}) + [(\nabla + \Sigma)F] \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.2.37)$$

en lugar de (3.2.35). La combinación $\nabla + \Sigma$ es similar a la combinación invariante de norma:

$$\nabla - \frac{ie\mathbf{A}}{\hbar c}, \quad (3.2.38)$$

Históricamente, en 1918 H. Weyl propuso una teoría en la que el electromagnetismo y la gravitación podrían unificarse mediante una simetría local de cambio de escala, que llamó *Eichinvarianz* [6]. En su teoría, el potencial vectorial electromagnético \mathbf{A} estaba relacionado con un cambio de escala local en la métrica del espacio-tiempo. Sin embargo, esta idea fue criticada por Einstein (en el mismo artículo) y otros físicos, ya que predecía efectos no observados, como cambios en las líneas espectrales de los átomos. Con el nacimiento de la mecánica cuántica, V. Fock y F. London se dieron cuenta de la importancia de la combinación invariante de norma (3.2.38), y recordaron el trabajo anterior de Weyl comparando Σ con i veces \mathbf{A} . Estamos atascados con el término *invariancia de norma* aunque el análogo en mecánica cuántica de (3.2.36),

$$1 \Big|_{\text{en } \mathbf{x}} \rightarrow \left[1 - \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right] \Big|_{\text{en } \mathbf{x} + d\mathbf{x}} \quad (3.2.39)$$

correspondería en realidad a un “cambio de fase” y no a un “cambio de escala”.

Capítulo 4

El efecto Aharonov-Bohm à la Feynman

4.1. Introducción

El uso del potencial vectorial \mathbf{A} en mecánica cuántica tiene consecuencias profundas, algunas de las cuales exploraremos a continuación. Comenzamos con un problema que, a primera vista, parece relativamente inofensivo. Consideremos primero una situación aparentemente sencilla: una partícula cargada confinada en el interior de una cáscara cilíndrica hueca, cuyas paredes son rígidas, como se muestra en la Figura 4.1a. La función de onda debe anularse en las superficies interna y externa del cilindro, así como en sus extremos. Este es un problema típico de valores en la frontera, donde se pueden obtener los eigenestados de energía de forma directa.

Ahora bien, si introducimos un campo magnético confinado en la región interior inaccesible, como se muestra en la Figura 4.1b (específicamente, podemos imaginar un solenoide muy largo insertado en el orificio central, de tal forma que ningún campo magnético se filtre hacia la región $\rho \geq \rho_a$). Las condiciones de frontera para la función de onda se toman iguales que antes; se asume que las paredes siguen siendo igualmente rígidas. De manera intuitiva, podríamos conjutar que el espectro de energía no cambia, ya que la región con $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ es completamente inaccesible para la partícula cargada confinada dentro de la cáscara. Sin embargo, la mecánica cuántica nos indica que esta conjuta es incorrecta. Esto se debe a

que la función de onda adquiere un factor de fase dependiente del potencial vectorial \mathbf{A} , a pesar de que la partícula no experimenta fuerza de Lorentz.

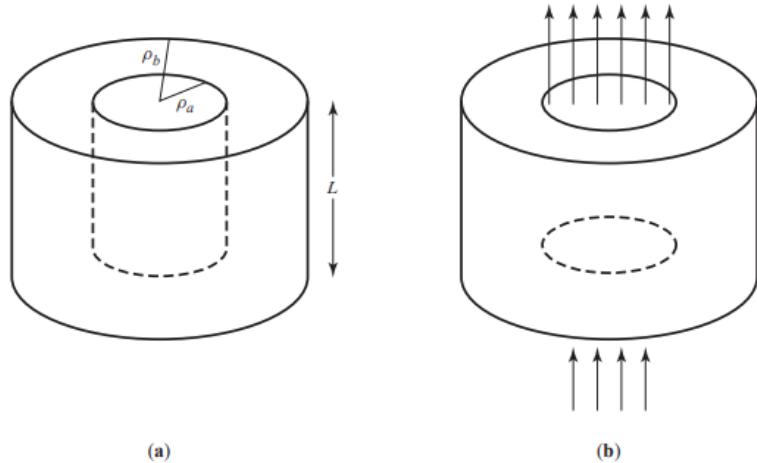


Figura 4.1: Cascara cilíndrica hueca: (a) sin campo magnético, (b) con un campo magnético uniforme.

4.2. El efecto Aharonov-Bohm

Consideremos una partícula de carga e que pasa por encima o por debajo de un cilindro muy largo e impenetrable, como se muestra en la Figura 4.2. Dentro del cilindro hay un campo magnético paralelo al eje del cilindro, tomado como normal al plano de la Figura 4.2. Por lo tanto, las trayectorias de la partícula por encima y por debajo encierran un flujo magnético. Nuestro objetivo es estudiar cómo la probabilidad de encontrar a la partícula en la región de interferencia B depende del flujo magnético.

Sean x_1 y x_n puntos típicos en la región fuente A y la región de interferencia B, respectivamente; recordamos de la mecánica clásica que el Lagrangiano en presencia del campo magnético se puede obtener a partir del Lagrangiano en ausencia del campo magnético, denominado como $L_{\text{clásico}}^0$, de la siguiente manera:

$$L_{\text{clásico}}^{(0)} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 \longrightarrow L_{\text{clásico}}^{(0)} + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.2.1)$$

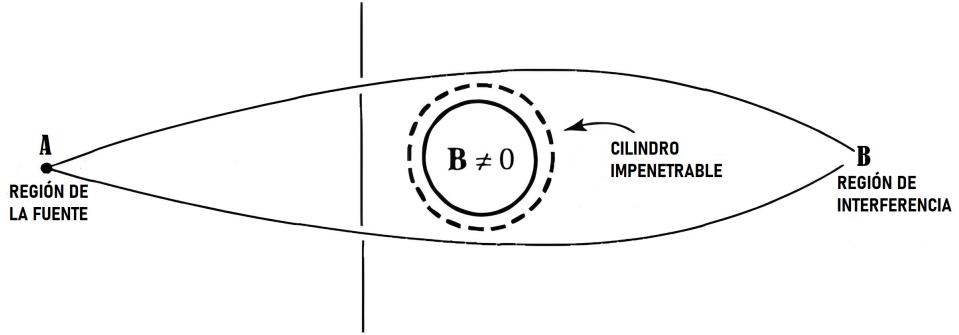


Figura 4.2: Efecto Aharonov-Bohm.

El correspondiente cambio en la acción para algún segmento de trayectoria definido que va desde $(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1})$ hasta (\mathbf{x}_n, t_n) se expresa de la siguiente manera:

$$S^{(0)}(n, n-1) \longrightarrow S^{(0)}(n, n-1) + \frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{A}. \quad (4.2.2)$$

Pero esta última integral puede expresarse como:

$$\frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{A} = \frac{e}{c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.2.3)$$

donde $d\mathbf{l}$ es el elemento de línea diferencial a lo largo del segmento de la trayectoria, por lo que cuando consideramos la contribución completa desde \mathbf{x}_1 hasta \mathbf{x}_n , tenemos el siguiente cambio:

$$\prod \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \longrightarrow \left\{ \prod \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \right\} \exp \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right). \quad (4.2.4)$$

Esto es válido para una trayectoria específica, como la que va por encima del cilindro. Aún debemos sumar sobre todas las trayectorias posibles, lo cual puede parecer una tarea formidable. Afortunadamente, sabemos por la teoría de electromagnetismo que la integral de línea $\int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ es independiente de las trayectorias; es decir, depende sólo de los puntos extremos, siempre y cuando el bucle formado por un par de trayectorias diferentes no encierre un flujo magnético.

Como resultado, las contribuciones debidas a $\mathbf{A} \neq 0$ para todas las trayectorias que pasan

por encima del cilindro están dadas por un factor de fase común; de manera similar, las contribuciones de todas las trayectorias que pasan por debajo del cilindro se multiplican por otro factor de fase común. En la notación de la integral de trayectoria, tenemos, para la amplitud de transición completa:

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{encima}} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] + \int_{\text{debajo}} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \\
& \rightarrow \int_{\text{encima}} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \left\{ \exp \left[\left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] \right\} \\
& + \int_{\text{debajo}} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \left\{ \exp \left[\left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] \right\}. \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

La probabilidad de encontrar la partícula en la región de interferencia B depende del módulo al cuadrado de la amplitud de transición completa y, por lo tanto, de la diferencia de fase entre la contribución de las trayectorias que van por encima y por debajo. La diferencia de fase debido a la presencia de \mathbf{B} es simplemente:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{e}{\hbar c} \right) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\text{encima}} - \left[\left(\frac{e}{\hbar c} \right) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\text{debajo}} = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\
& = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \Phi_B. \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

donde Φ_B representa el flujo magnético dentro del cilindro impenetrable. Esto significa que, al variar la intensidad del campo magnético, aparece una componente sinusoidal en la probabilidad de observar la partícula en la región B, con un período determinado por una *unidad fundamental de flujo magnético*, a saber:

$$\frac{2\pi\hbar c}{|e|} = 4,135 \times 10^{-7} \text{ Gauss} \cdot \text{cm}^2. \tag{4.2.7}$$

Debemos enfatizar que el efecto de interferencia discutido aquí es puramente mecánico-cuántico. Clásicamente, el movimiento de una partícula cargada está determinado únicamente por la segunda ley de Newton junto con la ley de fuerza de Lorentz. En este caso, la

partícula nunca puede ingresar a la región donde el campo **B** es distinto de cero; la fuerza de Lorentz es idénticamente nula en todas las regiones donde la función de onda de la partícula es distinta de cero. Sin embargo, se observa un notable patrón de interferencia que depende de la presencia o ausencia de un campo magnético en el interior del cilindro impenetrable. Este hecho ha llevado a algunas personas a concluir que, en la mecánica cuántica, el potencial vectorial **A** es más fundamental que el campo **B**. Cabe señalar, no obstante, que el efecto observable depende únicamente de Φ_B , el cual puede expresarse directamente en términos de **B**. Se han realizado experimentos para verificar el efecto Aharonov–Bohm utilizando un fino filamento de hierro magnetizado, conocido como *whisker*¹.

¹Uno de los experimentos más recientes es el realizado por Tonomura *et al* [28].

Capítulo 5

El efecto Aharonov-Bohm à la Schrödinger

5.1. Introducción

En la física clásica, la fuerza sobre una partícula con carga e en un campo electromagnético está dada por la fórmula de Lorentz:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.1.1)$$

\mathbf{E} y \mathbf{B} son el campo eléctrico y la inducción magnética, relacionados con el potencial vectorial \mathbf{A} y el potencial escalar ϕ por:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.1.2)$$

Como vimos anteriormente, \mathbf{A} y ϕ no son únicos; pueden ser cambiados por una transformación de norma bajo la cual \mathbf{E} y \mathbf{B} son invariantes. En este contexto, es común afirmar que el único efecto físico de un campo electromagnético sobre una carga es la fuerza de Lorentz, y esto solo existe en regiones donde \mathbf{E} y/o \mathbf{B} son distintos de cero. El efecto Aharonov-Bohm demuestra que esto no es así en la mecánica cuántica; existen efectos físicos en regiones donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son ambos cero, pero A_μ no lo es. Por lo tanto, A_μ tiene más significado físico del que se pensaba.

El efecto se refiere al experimento prototípico de la mecánica cuántica: el experimento de doble rendija con electrones, mostrado en la Figura 5.1. Debido a la naturaleza ondulatoria

de los electrones, siempre que no se detecte por qué rendija pasan, producen un patrón de interferencia característico. Si la longitud de onda del electrón es λ , la diferencia de fase entre las ondas de las dos rendijas es:

$$\delta = 2\pi \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}.$$

Si $x \ll L$, entonces $a = (x/L)d$, por lo que:

$$\delta = \frac{x}{L\lambda} d; \quad x = \frac{L\lambda}{d} \delta. \quad (5.1.3)$$

Los máximos ocurren en $\delta = 2n\pi$ y los mínimos en $(2n+1)\pi$, por lo que esta fórmula describe el patrón de interferencia.

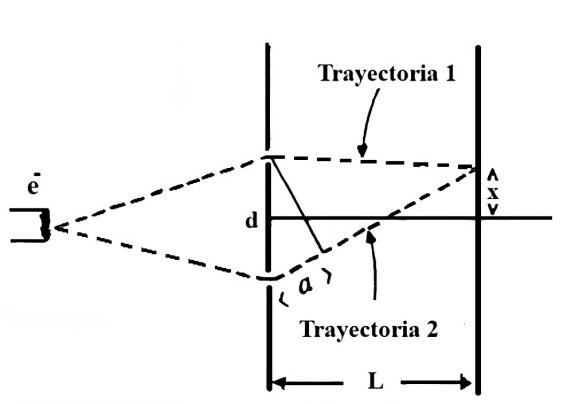


Figura 5.1: El experimento de interferencia de doble rendija con electrones.

La idea de Aharonov y Bohm (1959) fue introducir un pequeño solenoide detrás de la pared entre las rendijas, como se muestra en la Figura 5.2. Hay líneas de inducción magnética **B** dentro del solenoide, pero no fuera, por lo que, siempre que el solenoide sea lo suficientemente pequeño, los electrones siempre se mueven en una región libre de campo. Es fácil escribir la forma de **A** que produce un campo magnético solenoidal. Se muestra esquemáticamente en la Figura 5.3. En coordenadas cilíndricas polares, **A** solo tiene una componente ϕ , dada por:

$$\text{Dentro: } A_r = A_z = 0, \quad A_\phi = \frac{Br}{2}, \quad (5.1.4)$$

$$\text{Fuera: } A_r = A_z = 0, \quad A_\phi = \frac{BR^2}{2r}, \quad (5.1.5)$$

donde R es el radio del solenoide. Dado que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, tenemos, en coordenadas cilíndricas polares:

$$B_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right],$$

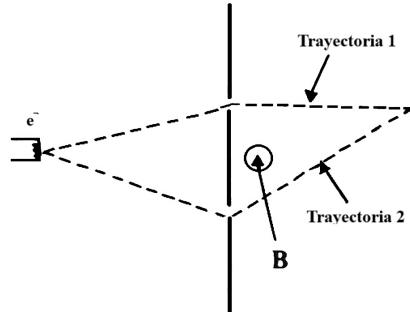


Figura 5.2: El efecto A-B; un solenoide es colocado entre las rendijas.

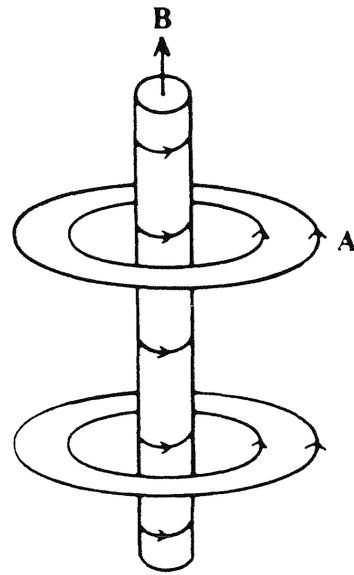


Figura 5.3: \mathbf{A} y \mathbf{B} en un solenoide

y fórmulas similares para B_r y B_ϕ , dando::

$$\text{Dentro: } B_r = B_\phi = 0, \quad B_z = B, \quad (5.1.6)$$

$$\text{Fuera: } \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (5.1.7)$$

como se requiere.

Ahora buscamos la solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético. Autores como Arfken [4] y Ryder [5] proponen como tal la solución, pero no explican cómo es que surge ésta, a continuación se desarrolla el cómo surge esta expresión.

5.2. Ausencia de \mathbf{B}

Como previamente se ha mencionado, sin la presencia del solenoide, tanto el potencial vectorial \mathbf{A} como el campo magnético \mathbf{B} son nulos; considerando además que el potencial escalar $\phi(\mathbf{x}) = 0$ (i.e., $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ también), la ecuación de Schrödinger es la de una partícula libre, i.e.,

$$\hat{H}_0 \Psi_0(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x}) = E \Psi_0(\mathbf{x}), \quad (5.2.1)$$

La ecuación se resuelve utilizando el método de separación de variables. Suponemos que la función de onda $\Psi_0(\mathbf{x})$ puede escribirse como:

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = \Psi_0(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (5.2.2)$$

Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger, obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2X(x)}{dx^2} Y(y)Z(z) + X(x) \frac{d^2Y(y)}{dy^2} Z(z) + X(x)Y(y) \frac{d^2Z(z)}{dz^2} \right) = EX(x)Y(y)Z(z). \quad (5.2.3)$$

Dividiendo ambos lados por $\Psi_0(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} \right) = E. \quad (5.2.4)$$

Cada término en la ecuación anterior debe ser igual a una constante, por lo que definimos:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k_z^2, \quad (5.2.5)$$

donde $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Cada una de estas ecuaciones es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general es:

$$X(x) = A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}, \quad (5.2.6)$$

$$Y(y) = A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y}, \quad (5.2.7)$$

$$Z(z) = A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}, \quad (5.2.8)$$

donde $A_x, B_x, A_y, B_y, A_z, B_z$ son constantes de integración.

La solución completa de la función de onda en tres dimensiones es:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\mathbf{x}) &= (A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}) (A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y}) (A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}) \\ &= |\Psi_0| e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

En esta solución la energía de la partícula está relacionada con los números de onda k_x, k_y y k_z mediante:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (5.2.10)$$

5.3. Presencia de \mathbf{B}

Es necesario recordar que al incluir un solenoide el campo magnético $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ dentro y $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ fuera del solenoide, sin embargo, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ fuera del solenoide, por lo que es fundamental considerar esta interacción. Así, el operador Hamiltoniano en este caso se expresa como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi. \quad (5.3.1)$$

Así, la ecuación de Schrödinger para esta \hat{H} está dada por:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \right] \Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}). \quad (5.3.2)$$

Proponemos una solución $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}$, donde Ψ_0 es solución de la ecuación en ausencia de \mathbf{A} (i.e., $\hat{H}_0 \Psi_0 = E\Psi_0$), $\gamma(\mathbf{x})$ representa una fase, la cual hallaremos directamente sin suponer su forma (ya conocida). En lo que sigue, consideraremos $\phi(\mathbf{x}) = 0$, como es usual.

Aplicando el operador Hamiltoniano a la solución propuesta, tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Consideremos primero sólo la aplicación del operador $(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})$ sobre $\Psi(\mathbf{x})$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} &= -i\hbar\nabla [\Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}] - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&= -i\hbar\Psi_0(\mathbf{x}) \nabla e^{i\gamma(\mathbf{x})} - i\hbar e^{i\gamma(\mathbf{x})} \nabla \Psi_0(\mathbf{x}) - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&= -i^2\hbar\Psi_0(\mathbf{x}) \nabla \gamma(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} - i\hbar e^{i\gamma(\mathbf{x})} \nabla \Psi_0(\mathbf{x}) - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&= e^{i\gamma(\mathbf{x})} \left(\hbar\Psi_0(\mathbf{x}) \nabla \gamma(\mathbf{x}) - i\hbar \nabla \Psi_0(\mathbf{x}) - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Ahora, se aplica nuevamente el operador $(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A})$ en ambos lados de la ecuación (5.3.4); se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} &= \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left[e^{i\gamma(\mathbf{x})} \left(\hbar\Psi_0(\mathbf{x}) \nabla \gamma(\mathbf{x}) - i\hbar \nabla \Psi_0(\mathbf{x}) - \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) \right) \right] \\
&= -i\hbar^2 \nabla \cdot [\Psi_0(\mathbf{x}) \nabla \gamma(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}] - \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + i^2\hbar^2 \nabla \cdot [e^{i\gamma(\mathbf{x})} \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + i\hbar \frac{e}{c} \nabla \cdot (\mathbf{A} \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}) + \left(\frac{e}{c} \right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} &= -i\hbar^2 \nabla \cdot [\nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla e^{i\gamma(\mathbf{x})}] \Psi_0(\mathbf{x}) - \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad - \hbar^2 \nabla \cdot [\nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} - \hbar^2 [\nabla e^{i\gamma(\mathbf{x})} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] \\
&\quad + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} + i\hbar \frac{e}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} + i\hbar \frac{e}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla e^{i\gamma(\mathbf{x})}) \Psi_0(\mathbf{x}) \\
&\quad + \left(\frac{e}{c} \right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} &= -i\hbar^2 \nabla^2 \gamma(\mathbf{x}) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad - i^2 \hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} - \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad - \hbar^2 \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} + i\hbar \frac{e}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] e^{i\gamma(\mathbf{x})} + i^2 \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} \\
&\quad + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \Psi_0(\mathbf{x}) e^{i\gamma(\mathbf{x})} &= e^{i\gamma(\mathbf{x})} \left\{ -i\hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) \nabla^2 \gamma(\mathbf{x}) - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] \right. \\
&\quad + \hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) [\nabla \gamma(\mathbf{x})]^2 - \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) - \hbar^2 \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x}) \\
&\quad - i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + i\hbar \frac{e}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi_0(\mathbf{x}) \\
&\quad \left. + i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] - \hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) \right\}. \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

Sumando términos semejantes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2m} e^{i\gamma(\mathbf{x})} \left\{ -\hbar^2 \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x}) + i\hbar \frac{e}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi_0(\mathbf{x}) - i\hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) \nabla^2 \gamma(\mathbf{x}) \right. \\
&\quad - 2i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + 2i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] \\
&\quad \left. + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) + \hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) [\nabla \gamma(\mathbf{x})]^2 - 2\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) \right\}. \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

Para que $\Psi_0 e^{i\gamma(\mathbf{x})}$ sea solución de la ecuación de Schrödinger (en presencia de \mathbf{A}) solo el primer término de la derecha deberá preservarse, i.e., el resto de términos deben sumar cero, ya que $-\hbar^2 \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x}) = E\Psi_0(\mathbf{x})$ y solo así tenemos $\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\gamma(\mathbf{x})} E\Psi_0(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x})$.

Debemos recordar que aquí la idea es hallar $\gamma(\mathbf{x})$, la cual satisface que la suma de los 7 términos entre llaves en la Ec. (5.3.6) [sin el término $-\hbar^2 \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{x})$] sumen cero. La clave nos la dan los términos (“cuadráticos”) \mathbf{A}^2 y $[\nabla \gamma(\mathbf{x})]^2$ y el término con $-2\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})$, los cuales sugieren que $\nabla \gamma(\mathbf{x}) \propto \mathbf{A}$.

Por tanto, para tener

$$\left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) = \hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) [\nabla \gamma(\mathbf{x})]^2, \quad (5.3.7)$$

debemos proponer:

$$\nabla \gamma(\mathbf{x}) = \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}. \quad (5.3.8)$$

Lo cual nos lleva a que:

$$\gamma(\mathbf{x}) = \left(\frac{e}{\hbar c}\right) \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.3.9)$$

porque \mathbf{A} es prácticamente el gradiente de $\gamma(\mathbf{x})$. Esta fase $\gamma(\mathbf{x})$ es lo que se conoce en la literatura como la fase de la holonomía¹ o fase del factor de fase de Wu-Yang [41].

Es con esta expresión para $\gamma(\mathbf{x})$ con la cual inician textos como el de Arfken [4] y Ryder [5] sin mencionar su origen. Aquí vemos que surge claramente de la necesidad de anular los 7 términos en la Ec. (5.3.6). Con la elección de la Ec. (5.3.8) los tres términos del último renglón de la Ec. (5.3.6) suman cero:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \Psi_0(\mathbf{x}) + \hbar^2 \Psi_0(\mathbf{x}) [\nabla \gamma(\mathbf{x})]^2 - 2\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x})] \Psi_0(\mathbf{x}) \\ &= \Psi_0(\mathbf{x}) \left[\left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 + \hbar^2 \left(\frac{e}{\hbar c}\right)^2 \mathbf{A}^2 - 2\hbar \frac{e}{c} \left(\mathbf{A} \cdot \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}\right) \right] \\ &= \Psi_0(\mathbf{x}) \left[\left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 - 2 \left(\frac{e}{c}\right)^2 \mathbf{A}^2 \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Los otros cuatro términos entre llaves en la Ec. (5.3.6) se anulan por pares, i.e.,

$$\begin{aligned} -2i\hbar^2 [\nabla \gamma(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + 2i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] &= -2i\hbar^2 \left[\frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x}) \right] + 2i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] \\ &= -2i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] + 2i\hbar \frac{e}{c} [\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{x})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

¹Fase geométrica adquirida por un sistema al ser transportado a lo largo de un camino cerrado; refleja la estructura del campo de norma. Una definición más completa de holonomía para campos de norma no abelianos puede revisarse en [30].

y [los términos con el laplaciano de $\gamma(\mathbf{x})$]

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{e}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi_0(\mathbf{x}) - i\hbar^2\Psi_0(\mathbf{x})\nabla^2\gamma(\mathbf{x}) &= i\hbar\frac{e}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi_0(\mathbf{x}) - i\hbar^2\Psi_0(\mathbf{x})\nabla \cdot [\nabla\gamma(\mathbf{x})] \\
&= i\hbar\frac{e}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi_0(\mathbf{x}) - i\hbar^2\Psi_0(\mathbf{x})\nabla \cdot \left(\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}\right) \quad (5.3.12) \\
&= i\hbar\frac{e}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi_0(\mathbf{x}) - i\hbar\frac{e}{c}\Psi_0(\mathbf{x})(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5.3.1. El efecto Aharonov-Bohm

Tal y como se requiere los 7 términos suman cero y sólo el término $-\hbar^2\nabla^2\Psi_0(\mathbf{x})e^{i\gamma(\mathbf{x})}$ se conserva en la Ec. (5.3.6) y $\Psi(\mathbf{x})$ satisface la Ec. de Schrödinger $\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x})$ con $\Psi(\mathbf{x})$ dado por $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x})e^{i\gamma(\mathbf{x})}$ siempre que $\Psi_0(\mathbf{x})$ satisfaga la Ec. $\hat{H}_0\Psi_0(\mathbf{x}) = E\Psi_0(\mathbf{x})$. Así de (5.3.8) tenemos que:

$$\nabla\gamma(\mathbf{x}) = \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}. \quad (5.3.13)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{x}) &= \frac{e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar c} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{e}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B. \quad (5.3.14)
\end{aligned}$$

donde hemos considerado una integral cerrada porque el mismo efecto lo requiere, además de aplicar el teorema de Stokes. De la Ec. (5.3.14) tenemos que Φ_B es el flujo a través del solenoide. Por lo tanto, el patrón de interferencia se desplaza hacia arriba en una cantidad

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{2\pi d}\delta = \frac{L\lambda}{d} \frac{e}{\hbar c} \Phi_B. \quad (5.3.15)$$

El efecto neto es que *la presencia del solenoide causa un desplazamiento en el patrón de interferencia, a pesar de que los electrones solo se mueven a través de regiones donde no hay campo magnético.*

5.3.2. Relación entre la fase cuántica y la topología

La expresión fundamental para la fase adquirida obtenida mediante la ecuación de Schrödinger [ver Ec. (5.3.14)], revela una conexión profunda entre la mecánica cuántica y la geometría del espacio. Esta relación cuantitativa, que muestra la dependencia directa con el flujo magnético Φ_B , adquiere su pleno significado al examinar las propiedades del potencial vectorial en la región exterior al solenoide.

En coordenadas cilíndricas, el potencial \mathbf{A} presenta una componente ϕ no nula tanto dentro como fuera del solenoide:

$$A_\phi = \begin{cases} \frac{Br}{2}, & \text{dentro del solenoide.} \\ \frac{BR^2}{2r}, & \text{fuera del solenoide.} \end{cases}$$

Esta configuración genera un campo magnético \mathbf{B} puramente axial dentro del solenoide, mientras que en el exterior se cumple exactamente $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, sin embargo, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, por lo que el vacío tiene una *estructura*. Dado que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, podemos escribir $\mathbf{A} = \nabla\chi$ para alguna función χ . Fuera del solenoide, esta función toma la forma:

$$\chi = \frac{BR^2}{2}\phi.$$

La función χ no es univaluada, ya que aumenta en $\pi R^2 B$ cuando $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$, es decir: cada vuelta completa alrededor del solenoide incrementa χ en $\pi R^2 B$, cantidad directamente proporcional al flujo magnético encerrado.

Las funciones regulares no univaluadas como χ solo pueden existir en espacios no simplemente conexos. Un espacio simplemente conexo es aquel en el que todas las curvas cerradas pueden contraerse continuamente a un punto. El espacio relevante en este problema es el espacio del vacío, es decir, el espacio fuera del solenoide, y este no es simplemente conexo. Esta característica topológica se manifiesta físicamente en la fase $\gamma(\mathbf{x})$ de la Ec. (5.3.14), que resulta ser sensible al número de vueltas que la trayectoria del electrón da alrededor del solenoide.

La invariancia de norma del efecto queda garantizada por la naturaleza cerrada de la integral en la Ec. (5.3.14), que solo depende del flujo Φ_B a través del solenoide.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo, se ha obtenido el mismo resultado para el efecto Aharonov-Bohm (A-B) mediante dos enfoques distintos: la formulación de integrales de trayectoria de Feynman y la resolución de la ecuación de Schrödinger considerando la interacción con el campo magnético **B**. Este resultado, representado en las ecuaciones (4.2.6) y (5.3.14), no solo valida la consistencia de ambos métodos, sino que también resalta la profundidad y coherencia de la mecánica cuántica.

La formulación de Feynman proporciona una perspectiva particularmente esclarecedora del efecto A-B, mostrando que surge de la interferencia entre las fases acumuladas por las partículas al recorrer diferentes trayectorias alrededor de una región con potencial vectorial $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Este enfoque subraya la necesidad de considerar todas las trayectorias posibles, pues el cambio de patrón no se puede explicar sin considerar todas las trayectorias y la fase que cada una acumula, ofreciendo una interpretación geométrica del efecto en la que la fase cuántica está intrínsecamente ligada a la topología del espacio.

Por otro lado, al resolver la ecuación de Schrödinger, el efecto A-B se manifiesta a través del acoplamiento mínimo, donde el potencial vectorial **A** modifica el momento cinemático de la partícula y, como se observó en el capítulo 5, la ecuación de Schrödinger en presencia de **B** se extendió a tal punto que se tuvo que desarrollar detalladamente para justificar la expresión que nos lleva al efecto. Este enfoque demuestra que la ecuación de Schrödinger es invariante bajo transformaciones de norma, lo que implica que el efecto observable depende únicamente de cantidades invariantes de norma, como la integral de línea $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. Esta

invariancia de norma es crucial para entender por qué el potencial vectorial, y no solo los campos electromagnéticos, desempeña un papel fundamental en la mecánica cuántica. En el lenguaje de la teoría de grupos, las transformaciones de norma corresponden a acciones del grupo de norma $U(1)$ ¹, y la invariancia bajo estas transformaciones refleja la simetría del sistema.

Un aspecto intrigante del efecto A-B es su relación con la localidad. En su artículo *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory* [1], Aharonov y Bohm argumentaron que los potenciales electromagnéticos tienen un significado físico más profundo en la teoría cuántica que los propios campos. Esto sugiere que, en el contexto cuántico, los potenciales no son meros artificios matemáticos, sino entidades físicas con las que las partículas interactúan directamente. En el caso del efecto A-B, el potencial vectorial **A** adquiere un significado físico tangible, ya que es el único concepto con el que las partículas parecen interactuar. Sin embargo, esta interpretación no está exenta de controversia ya que al aplicar el teorema de Stokes a la ecuación (5.3.14), se observa que la partícula también puede interactuar indirectamente con el campo **B** dentro del solenoide, lo que cuestiona la idea de localidad estricta y ofrece una perspectiva alternativa sobre el fenómeno.

El efecto A-B nos obliga a reinterpretar el espacio no como un simple fondo vacío, sino como una estructura con propiedades topológicas relevantes: el hecho de que una partícula cargada pueda adquirir una fase observable al rodear una región inaccesible con campo magnético (como el interior de un solenoide) implica que el espacio tiene una topología no trivial (no es simplemente conexo) ya que permite la existencia de lazos cerrados que no pueden deformarse continuamente a un punto sin cruzar la región prohibida. Esto muestra que el vacío, lejos de ser trivial, tiene una estructura matemática rica que afecta directamente al comportamiento cuántico de las partículas, y que la electrodinámica, al ser una teoría *de norma*, es sensible no solo a la curvatura local (el campo electromagnético), sino también a las propiedades globales del espacio, codificadas en la holonomía del cuadri potencial A_μ .

El efecto A-B no solo es fundamental en la comprensión de los fenómenos cuánticos asociados a potenciales electromagnéticos, sino que también constituye la base tecnológica de

¹El grupo de norma $U(1)$ describe transformaciones de fase locales en electrodinámica cuántica, y es la simetría de norma detrás del electromagnetismo.

dispositivos como los SQUID's (superconducting quantum interference devices), empleados en la medición precisa de flujos magnéticos [7, 30]. Además, una revisión de este efecto resulta esencial como preludio al estudio de su generalización no Abeliana [31], donde entran en juego teorías de Yang-Mills [32, 33]. En años recientes, el efecto A-B ha cobrado relevancia en el estudio de materiales de baja dimensión (como el grafeno) y sistemas con propiedades topológicas, abriendo nuevas perspectivas en materia condensada [35, 36]. Estos avances reflejan la vigencia del efecto A-B como puente entre la teoría cuántica fundamental y sus aplicaciones en sistemas físicos complejos.

Debemos comentar también que, cuando tratamos de eliminar los potenciales en teoría clásica y cuántica de campos (para manejar cantidades invariantes de norma) nos encontramos con ciertos obstáculos que impiden un tratamiento claro y consistente, como en el estudio de la relatividad general [42] y las teorías de Yang-Mills [43]. Otro enfoque que permitiría el tratamiento con cantidades invariantes de norma (físicos) sería el uso del grupo extendido de lazos; sin embargo, su estudio es incompleto (aún) [7].

Finalmente, el hecho de que ambos enfoques conduzcan al mismo resultado refuerza la coherencia interna de la mecánica cuántica. Este trabajo no solo confirma la validez de ambas formulaciones, sino que también profundiza en la comprensión del efecto A-B, un fenómeno que continúa desafiando nuestra intuición y enriqueciendo nuestra comprensión de la interacción entre la mecánica cuántica y el electromagnetismo.

Apéndice A

El oscilador armónico simple

El oscilador armónico simple es uno de los problemas más importantes en mecánica cuántica. No sólo ilustra muchos de los conceptos básicos y métodos de la mecánica cuántica, sino que además tiene un gran valor práctico. Esencialmente, cualquier pozo de potencial puede aproximarse mediante un oscilador armónico simple, por lo que describe fenómenos que van desde vibraciones moleculares hasta la estructura nuclear. Además, dado que el Hamiltoniano es básicamente la suma de los cuadrados de dos variables canónicamente conjugadas, constituye también un punto de partida importante para gran parte de la teoría cuántica de campos.

A.1. Eigenkets y eigenvalores de energía

Comenzamos nuestro análisis con el elegante método de operadores de Dirac, basado en trabajos previos de M. Born y N. Wiener, para determinar los eigenkets de energía (estados propios) y los eigenvalores de energía del oscilador armónico simple. El hamiltoniano fundamental es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (\text{A.1.1})$$

donde ω representa la frecuencia angular del oscilador clásico, relacionada con la constante elástica k (Ley de Hooke) mediante $\omega = \sqrt{k/m}$. Los operadores posición x y momento p son, evidentemente, hermitianos.

Resulta conveniente introducir dos operadores no hermitianos:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (\text{A.1.2})$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (\text{A.1.3})$$

denominados respectivamente **operador de aniquilación** y **operador de creación**. Utilizando las relaciones de conmutación canónicas, obtenemos directamente:

$$[a, a^\dagger] = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right) (-i[x, p] + i[p, x]) = 1. \quad (\text{A.1.4})$$

Definimos además el **operador número**:

$$N = a^\dagger a, \quad (\text{A.1.5})$$

que es claramente hermitiano. Un cálculo directo muestra que:

$$a^\dagger a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right) \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \frac{i}{2\hbar} [x, p] = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}. \quad (\text{A.1.6})$$

Por lo tanto, tenemos una relación importante entre el operador número y el operador hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.1.7})$$

Dado que H es una función lineal de N , N puede diagonalizarse simultáneamente con H . Denotamos un autoestado de energía de N por su eigenvalor n , así:

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (\text{A.1.8})$$

Debido a la Ec. (A.1.7) tenemos:

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega|n\rangle, \quad (\text{A.1.9})$$

lo que significa que los eigenvalores de energía están dados por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (\text{A.1.10})$$

Para apreciar el significado físico de a , a^\dagger y N , primero observemos que

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a]a = -a, \quad (\text{A.1.11})$$

donde hemos usado (A.1.4). De manera similar, podemos derivar

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (\text{A.1.12})$$

Como resultado, tenemos

$$Na^\dagger|n\rangle = ([N, a^\dagger] + a^\dagger N)|n\rangle = (n + 1)a^\dagger|n\rangle, \quad (\text{A.1.13})$$

y

$$Na|n\rangle = ([N, a] + aN)|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle. \quad (\text{A.1.14})$$

Estas relaciones implican que $a^\dagger|n\rangle$ ($a|n\rangle$) es también un eigenestado de N con valor propio incrementado (decrementado) en uno. Dado que el aumento (disminución) de n en uno equivale a la creación (aniquilación) de una unidad cuántica de energía $\hbar\omega$, el término *operador de creación (operador de aniquilación)* para a^\dagger (a) es apropiado.

La ecuación (A.1.14) implica que $a|n\rangle$ y $|n - 1\rangle$ son iguales salvo por una constante multiplicativa. Escribimos

$$a|n\rangle = c|n - 1\rangle, \quad (\text{A.1.15})$$

donde c es una constante numérica que debe determinarse a partir del requisito de que tanto $|n\rangle$ como $|n - 1\rangle$ estén normalizados. Primero, observamos que

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2. \quad (\text{A.1.16})$$

Podemos evaluar el lado izquierdo de (A.1.16) observando que $a^\dagger a$ es el operador número, por lo que

$$n = |c|^2. \quad (\text{A.1.17})$$

Tomando c como real y positivo por convención, finalmente obtenemos

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle. \quad (\text{A.1.18})$$

De manera similar, es fácil mostrar que

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle. \quad (\text{A.1.19})$$

Supongamos que seguimos aplicando el operador de aniquilación a a ambos lados de (A.1.18):

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n(n - 1)}|n - 2\rangle, \quad (\text{A.1.20})$$

$$a^3|n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle, \quad (\text{A.1.21})$$

$$\vdots \quad (\text{A.1.22})$$

Podemos obtener eigenestados del operador número con valores de n cada vez más pequeños hasta que la secuencia termine, lo que debe ocurrir siempre que comencemos con un entero positivo n . Podría argumentarse que si comenzamos con un n no entero, la secuencia no terminaría, llevando a eigenestados con valores negativos de n . Pero también tenemos

$$n = \langle n|N|n\rangle = (\langle n|a\rangle^\dagger \cdot (a|n\rangle)) \geq 0, \quad (\text{A.1.23})$$

lo que implica que n nunca puede ser negativo. Por lo tanto, concluimos que la secuencia debe terminar con $n = 0$ y que los valores permitidos de n son enteros no negativos.

Como el valor más pequeño posible de n es cero, el estado fundamental del oscilador armónico tiene

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{A.1.24})$$

Ahora podemos aplicar sucesivamente el operador de creación a^\dagger al estado fundamental $|0\rangle$.

Usando (A.1.19), obtenemos:

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad (\text{A.1.25})$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\right]|0\rangle, \quad (\text{A.1.26})$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\right)|2\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3!}}\right]|0\rangle, \quad (\text{A.1.27})$$

$$\vdots \quad (\text{A.1.28})$$

$$|n\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\right]|0\rangle, \quad (\text{A.1.29})$$

De esta manera hemos logrado construir eigenestados simultáneos de N y H con eigenvalores de energía:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{A.1.30})$$

A partir de (A.1.18), (A.1.19) y el requisito de ortonormalidad para $\{|n\rangle\}$, obtenemos los elementos de la matriz:

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad \langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}. \quad (\text{A.1.31})$$

Usando estos resultados junto con

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^\dagger), \quad (\text{A.1.32})$$

derivamos los elementos de matriz de los operadores x y p :

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}), \quad (\text{A.1.33})$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}). \quad (\text{A.1.34})$$

El método de operadores también puede usarse para obtener las eigenfunciones de energía en el espacio de posiciones. Comencemos con el estado fundamental definido por

$$a|0\rangle = 0, \quad (\text{A.1.35})$$

que, en la representación de x , se lee:

$$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)|0\rangle = 0. \quad (\text{A.1.36})$$

Podemos considerar esto como una ecuación diferencial para la función de onda del estado fundamental $\langle x'|0\rangle$:

$$\left(x' + x_0^2 \frac{d}{dx'}\right) \langle x'|0\rangle = 0, \quad (\text{A.1.37})$$

donde hemos introducido

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (\text{A.1.38})$$

que establece la escala de longitud del oscilador. Vemos que la solución normalizada a la ec. (A.1.37) es

$$\langle x'|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{x_0}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right]. \quad (\text{A.1.39})$$

También podemos obtener las eigenfunciones de energía para estados excitados evaluando:

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}x_0}\right) \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right) \langle x'|0\rangle, \quad (\text{A.1.40})$$

$$\langle x'|2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \langle x'|(a^\dagger)^2|0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2!}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}x_0}\right)^2 \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)^2 \langle x'|0\rangle, \quad \dots \quad (\text{A.1.41})$$

En general, obtenemos:

$$\langle x' | n \rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \right) \left(\frac{1}{x_0^{n+1/2}} \right) \left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x'}{x_0} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.1.42})$$

Es instructivo examinar los valores esperados de x^2 y p^2 para el estado fundamental.

Primero, notemos que:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger). \quad (\text{A.1.43})$$

Cuando tomamos el valor esperado de x^2 , sólo el último término en (A.1.43) aporta una contribución no nula:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{x_0^2}{2}. \quad (\text{A.1.44})$$

Igualmente,

$$\langle p^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}. \quad (\text{A.1.45})$$

Se tiene así que los valores esperados de las energías cinética y potencial son, respectivamente:

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\langle H \rangle}{2} \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\langle H \rangle}{2}, \quad (\text{A.1.46})$$

como se espera del teorema del virial. De (A.1.33) y (A.1.34), sigue que:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad (\text{A.1.47})$$

lo que también se cumple para los estados excitados. Por lo tanto, tenemos:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}, \quad (\text{A.1.48})$$

y vemos que la relación de incertidumbre se satisface en la forma de producto mínimo de incertidumbre:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (\text{A.1.49})$$

Esto no es sorprendente porque la función de onda del estado fundamental tiene forma gaussiana. En contraste, los productos de incertidumbre para los estados excitados son mayores:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \hbar^2. \quad (\text{A.1.50})$$

A.2. Evolución temporal del oscilador

Hasta ahora no hemos discutido la evolución temporal de los kets de estado del oscilador o de observables como x y p . Todo lo que hemos hecho se supone que es válido en algún instante de tiempo, digamos en $t = 0$; los operadores x , p , a y a^\dagger deben considerarse ya sea como operadores en la imagen de Schrödinger (para todo t) o como operadores en la imagen de Heisenberg en $t = 0$. En la parte restante de esta sección, trabajaremos exclusivamente en la imagen de Heisenberg, lo que significa que x , p , a y a^\dagger son todos dependientes del tiempo aunque no escribamos explícitamente $x^{(H)}(t)$, etcétera.

Las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para p y x son, de la Ec. (1.2.24) y la Ec. (1.2.25):

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x, \quad (\text{A.2.1})$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (\text{A.2.2})$$

Este par de ecuaciones diferenciales acopladas es equivalente a dos ecuaciones diferenciales no acopladas para a y a^\dagger , a saber:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{p}{m} - i\omega x \right) = -i\omega a, \quad (\text{A.2.3})$$

y

$$\frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger, \quad (\text{A.2.4})$$

cuyas soluciones son:

$$a(t) = a(0) \exp(-i\omega t), \quad (\text{A.2.5})$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0) \exp(i\omega t). \quad (\text{A.2.6})$$

Estas relaciones muestran explícitamente que N y H son *operadores independientes del tiempo* incluso en la imagen de Heisenberg, como debe ser. En términos de x y p , podemos reescribir (A.2.5) y (A.2.6) como:

$$x(t) + \frac{ip(t)}{m\omega} = x(0) \exp(-i\omega t) + i \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \exp(-i\omega t), \quad (\text{A.2.7})$$

y

$$x(t) - \frac{ip(t)}{m\omega} = x(0) \exp(i\omega t) - i \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \exp(i\omega t). \quad (\text{A.2.8})$$

Igualando las partes hermitianas y anti-hermitianas de ambos lados por separado, deducimos:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \left[\frac{p(0)}{m\omega} \right] \sin \omega t, \quad (\text{A.2.9})$$

y

$$p(t) = -m\omega x(0) \sin \omega t + p(0) \cos \omega t. \quad (\text{A.2.10})$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones clásicas de movimiento. Vemos así que los operadores x y p “oscilan” exactamente como sus análogos clásicos.

De (A.2.9) y (A.2.10), uno podría tentarse a concluir que $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$ siempre oscilan con frecuencia angular ω . Sin embargo, esta inferencia no es correcta. Tomemos cualquier eigenestado de energía caracterizado por un valor definido de n ; el valor esperado $\langle n | x(t) | n \rangle$ se anula porque los operadores $x(0)$ y $p(0)$ cambian n por ± 1 , y $|n\rangle$ y $|n \pm 1\rangle$ son ortogonales.

Para observar oscilaciones que recuerden al oscilador clásico, debemos considerar una superposición de eigenestados de energía como:

$$|\alpha\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle. \quad (\text{A.2.11})$$

El valor esperado de $x(t)$ tomado con respecto a (A.2.11) sí oscila.

Hemos visto que un eigenestado de energía no se comporta como el oscilador clásico – en el sentido de valores esperados oscilantes para x y p – no importa cuán grande sea n . Lógicamente podemos preguntar: ¿Cómo podemos construir una superposición de eigenestados de energía que imite más de cerca al oscilador clásico? En lenguaje de funciones de onda, queremos un paquete de ondas que oscile sin dispersarse en forma. Resulta que un *estado coherente* definido por la ecuación de eigenvalores para el operador de aniquilación no-hermitiano a :

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad (\text{A.2.12})$$

con, en general, un eigenvalor complejo λ , cumple este propósito. El estado coherente tiene muchas otras propiedades notables:

1. Cuando se expresa como superposición de eigenestados de energía (o de N):

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle, \quad (\text{A.2.13})$$

la distribución de $|f(n)|^2$ con respecto a n es de tipo Poisson alrededor de algún valor medio \bar{n} :

$$|f(n)|^2 = \left(\frac{\bar{n}^n}{n!}\right) \exp(-\bar{n}). \quad (\text{A.2.14})$$

2. Puede obtenerse trasladando el estado fundamental del oscilador por alguna distancia finita.
3. Satisface la relación de producto mínimo de incertidumbre en todo tiempo.

Apéndice B

La ecuación de onda de Schrödinger

B.1. La ecuación de onda dependiente del tiempo

Regresamos ahora hacia la imagen de Schrödinger y examinamos la evolución temporal en la representación de x . En otras palabras, nuestra tarea es estudiar el comportamiento de la función de onda

$$\Psi(\mathbf{x}', t) = \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle \quad (\text{B.1.1})$$

como función del tiempo, donde $|\alpha, t_0; t\rangle$ es un ket de estado en la imagen de Schrödinger en el tiempo t , y $\langle x' |$ es un eigenbra de posición independiente del tiempo con valor propio \mathbf{x}' . El operador Hamiltoniano se toma como:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1.2})$$

El potencial $V(\mathbf{x})$ es un operador hermitiano; además, es local en el sentido que en la representación de x tenemos:

$$\langle \mathbf{x}'' | V(\mathbf{x}) | \mathbf{x}' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \quad (\text{B.1.3})$$

donde $V(\mathbf{x}')$ es una función real de \mathbf{x}' .

Ahora derivamos la ecuación de onda dependiente del tiempo de Schrödinger. Primero escribimos la ecuación de Schrödinger para un ket de estado (1.1.21) en la representación de x :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle = \langle \mathbf{x}' | H | \alpha, t_0; t \rangle \quad (\text{B.1.4})$$

donde hemos usado el hecho de que los eigenbras de posición en la imagen de Schrödinger no cambian con el tiempo. También podemos escribir la contribución de la energía cinética al lado derecho de (B.1.4) como:

$$\left\langle \mathbf{x}' \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right| \alpha, t_0; t \right\rangle = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle \quad (\text{B.1.5})$$

Para $V(\mathbf{x})$, simplemente usamos

$$\langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}'),$$

donde $V(\mathbf{x}')$ ya no es un operador. Combinando todo, deducimos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle + V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle, \quad (\text{B.1.6})$$

que reconocemos como la *ecuación de onda dependiente del tiempo de E. Schrödinger*, usualmente escrita como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}', t) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla'^2 \Psi(\mathbf{x}', t) + V(\mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}', t). \quad (\text{B.1.7})$$

La mecánica cuántica basada en la ecuación de onda (B.1.7) se conoce como **mecánica ondulatoria**.

B.2. La ecuación de onda independiente del tiempo

Ahora derivamos la ecuación diferencial parcial satisfecha por las eigenfunciones de energía. La dependencia temporal de un estado estacionario está dada por $\exp(-iE_{a'}t/\hbar)$. Esto nos permite escribir su función de onda como:

$$\langle \mathbf{x}' | a', t_0; t \rangle = \langle \mathbf{x}' | a' \rangle \exp \left(\frac{-iE_{a'}t}{\hbar} \right), \quad (\text{B.2.1})$$

donde se entiende que inicialmente el sistema se prepara en un eigenestado simultáneo de A y H con eigenvalores a' y $E_{a'}$, respectivamente. Sustituyamos ahora (B.2.1) en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (B.1.6). Esto nos lleva a:

$$- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla'^2 \langle \mathbf{x}' | a' \rangle + V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | a' \rangle = E_{a'} \langle \mathbf{x}' | a' \rangle. \quad (\text{B.2.2})$$

Esta ecuación diferencial parcial es satisfecha por la eigenfunción de energía $\langle \mathbf{x}' | a' \rangle$ con eigenvalor de energía $E_{a'}$. En realidad, en la mecánica ondulatoria donde el operador hamiltoniano se da como función de \mathbf{x} y \mathbf{p} , como en (B.1.2), no es necesario referirse explícitamente al observable A que commuta con H , porque siempre podemos elegir A como aquella función de los observables \mathbf{x} y \mathbf{p} que coincide con H mismo. Por lo tanto, podemos omitir la referencia a a' y simplemente escribir (B.2.2) como la ecuación diferencial parcial que debe satisfacer la eigenfunción de energía $u_E(\mathbf{x}')$:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla'^2u_E(\mathbf{x}') + V(\mathbf{x}')u_E(\mathbf{x}') = Eu_E(\mathbf{x}'). \quad (\text{B.2.3})$$

Esta es la **ecuación de onda independiente del tiempo** de E. Schrödinger, anunciada en la primera de cuatro monumentales publicaciones, todas escritas en la primera mitad de 1926, que sentaron los fundamentos de la mecánica ondulatoria.

B.3. Interpretaciones de la función de onda

La interpretación probabilística de $|\Psi|^2$ se deduce del hecho de que $\langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$ debe considerarse como un coeficiente de expansión de $|\alpha, t_0; t\rangle$ en términos de los eigenkets de posición $\{|\mathbf{x}'\rangle\}$. La cantidad $\rho(\mathbf{x}', t)$ definida por

$$\rho(\mathbf{x}', t) = |\Psi(\mathbf{x}', t)|^2 = |\langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle|^2. \quad (\text{B.3.1})$$

se considera por tanto como la **densidad de probabilidad** en la mecánica ondulatoria. Específicamente, cuando usamos un detector que comprueba la presencia de la partícula dentro de un pequeño elemento de volumen $d^3\mathbf{x}'$ alrededor de \mathbf{x}' , la probabilidad de registrar un resultado positivo en el tiempo t viene dada por $\rho(\mathbf{x}', t)d^3\mathbf{x}'$.

En el resto de esta sección usaremos \mathbf{x} en lugar de \mathbf{x}' ya que el operador posición no aparecerá. Usando la ecuación de onda dependiente del tiempo de Schrödinger, es directo derivar la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (\text{B.3.2})$$

donde $\rho(\mathbf{x}, t)$ representa $|\Psi|^2$ como antes, y $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, conocido como el **flujo de probabilidad**, viene dado por

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = -\left(\frac{i\hbar}{2m}\right)[\Psi^*\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\Psi] = \left(\frac{\hbar}{m}\right)\text{Im}(\Psi^*\nabla\Psi). \quad (\text{B.3.3})$$

La realidad del potencial V (o la hermiticidad del operador V) ha jugado un papel crucial en la obtención de este resultado. Por el contrario, un potencial complejo puede dar cuenta fenomenológicamente de la desaparición de una partícula; tal potencial se usa a menudo para reacciones nucleares donde partículas incidentes son absorbidas por núcleos. Podemos intuir que el flujo de probabilidad \mathbf{j} está relacionado con el momento. Esto es efectivamente cierto para \mathbf{j} integrado sobre todo el espacio. De (B.3.3) obtenemos:

$$\int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle_t}{m}, \quad (\text{B.3.4})$$

donde $\langle \mathbf{p} \rangle_t$ es el valor esperado del operador momento en el tiempo t . La ecuación (B.3.2) recuerda a la ecuación de continuidad en dinámica de fluidos que caracteriza el flujo hidrodinámico en una región sin fuentes ni sumideros. Históricamente, Schrödinger interpretó inicialmente $|\Psi|^2$ como la densidad de materia real, o $e|\Psi|^2$ como la densidad de carga eléctrica real. Sin embargo, adoptar esta visión conduce a consecuencias paradójicas.

Un argumento típico para una medición de posición podría ser: Un electrón atómico se considera como una distribución continua de materia que llena una región finita alrededor del núcleo; sin embargo, al realizar una medición que localiza el electrón en un punto específico, esta distribución continua colapsa abruptamente a una partícula puntual sin extensión espacial. La *interpretación estadística* más satisfactoria de $|\Psi|^2$ como densidad de probabilidad fue propuesta por primera vez por M. Born.

Para entender el significado físico de la función de onda, escribámosla como:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} \exp\left[\frac{iS(\mathbf{x}, t)}{\hbar}\right], \quad (\text{B.3.5})$$

con S real y $\rho > 0$, lo que siempre es posible para cualquier función compleja de \mathbf{x} y t . El significado de ρ ya se ha dado. ¿Cuál es la interpretación física de S ? Notando que:

$$\Psi^*\nabla\Psi = \sqrt{\rho}\nabla(\sqrt{\rho}) + \left(\frac{i}{\hbar}\right)\rho\nabla S, \quad (\text{B.3.6})$$

podemos escribir el flujo de probabilidad [ver la ec. (B.3.3)] como:

$$\mathbf{j} = \frac{\rho \nabla S}{m}. \quad (\text{B.3.7})$$

Vemos ahora que la función de onda contiene más información que el simple hecho de que $|\Psi|^2$ sea la densidad de probabilidad; el gradiente de la fase S contiene información crucial. De (B.3.7) observamos que la *variación espacial de la fase* de la función de onda caracteriza el flujo de probabilidad: cuanto más fuerte es la variación de fase, más intenso es el flujo. La dirección de \mathbf{j} en un punto \mathbf{x} es normal a la superficie de fase constante que pasa por ese punto. En el caso particularmente simple de una onda plana (eigenfunción del momento):

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \propto \exp \left[\frac{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} - \frac{i E t}{\hbar} \right], \quad (\text{B.3.8})$$

donde \mathbf{p} representa el eigenvalor del operador momento. Esto es evidente porque:

$$\nabla S = \mathbf{p}. \quad (\text{B.3.9})$$

De manera más general, resulta tentador definir $\frac{\nabla S}{m}$ como un tipo de “velocidad”

$$\text{"v"}'' = \frac{\nabla S}{m}, \quad (\text{B.3.10})$$

y escribir la ecuación de continuidad (B.3.2) como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho'' \mathbf{v}'') = 0, \quad (\text{B.3.11})$$

al igual que en dinámica de fluidos. Sin embargo, es erróneo plantear una interpretación demasiado literal de \mathbf{j} como ρ multiplicado por una velocidad definida en cada punto del espacio, ya que una medición simultánea precisa de posición y velocidad necesariamente violaría el principio de incertidumbre.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1959).
- [2] R. G. Chambers, “Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux”, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 3-5 (1960).
- [3] J. J. Sakurai and J Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading MA (2011).
- [4] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th Edition, Elsevier Academic Press, Amsterdan (2005).
- [5] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, UK (1985).
- [6] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Preussische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte , 465-478 (1918).
- [7] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [8] R. Gambini y J. Pullin, *Un Primer Curso en Gravedad Cuántica de Lazos*, Reverté, España (2012).
- [9] J. D. Bjorken and S. D. Dell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [10] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading MA (1967).

- [11] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Prees (1995).
- [12] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton (1921).
- [13] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [14] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [16] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, (1687), English traslation, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, University of California Press, California (1999).
- [17] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Addison-Wesley, San Francisco (2002).
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, New York (1975).
- [19] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 Vols., (1873), reprint, Dover, New York (1954).
- [20] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th Edition. Adisson-Wesley, Reading MA (1993).
- [21] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Edition, Wiley, New York (1975).
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York (1975).
- [23] W. Ehrenberg and R. E. Siday, “The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics”, *Proc. Phys. Soc. B* **62**, 8 (1949).
- [24] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Yeshiva University, Belfer Graduate School of Science Monograph Series, No. 2 (1964).

- [25] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition, Oxford University Press, New York (1982).
- [26] N. Zettili, *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*, 2nd Edition, Wiley, UK (2009).
- [27] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2nd Edition, Pearson Prentince Hall, New Jersey (1994).
- [28] A. Tonomura *et al*, “Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electrons”, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792-795 (1986).
- [29] M. Peskin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, New York (1989).
- [30] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore (1994).
- [31] P. A. Horváthy, “Non-Abelian Aharonov-Bohm Effect”, *Phys. Rev. D* **33**, 407-414 (1986).
- [32] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [33] R. Jackiw, “Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory”, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661 (1980).
- [34] Y. Yang, “Synthesis and Observation of Non-Abelian Gauge Fields in Real Space”, *Science* **355**, 1021-1025 (2019).
- [35] F. de Juan, A. Cortijo, M.A.H. Vozmediano and A. Cano, “Aharonov-Bohm interferences from local deformations in graphene”, *Nature Phys.* **7**, 810 (2011).
- [36] J. S. C. Hoyos, *El Efecto Aharonov-Bohm en Materiales Semiconductores de Carácter Topológico Analizado desde la Ecuación de Dirac-Weyl*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2020).
- [37] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd Ed. Springer, New York (2011).

- [38] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol (2003).
- [39] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [40] R. P. Feynman, “Quantum Mechanical Computers”, *Optics News* **11**, 11 (1985).
- [41] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields”, *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975).
- [42] R. Rosas Rodríguez, “Alternative Variables for the Dynamics of General Relativity”, *Int. J. Mod. Phys. A* **23** (6), 895–908 (2008).
- [43] J. I. Sanchez Sanchez, *Teorías de Yang Mills en términos de Variables de Curvatura y su Cuantización*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca (2015).