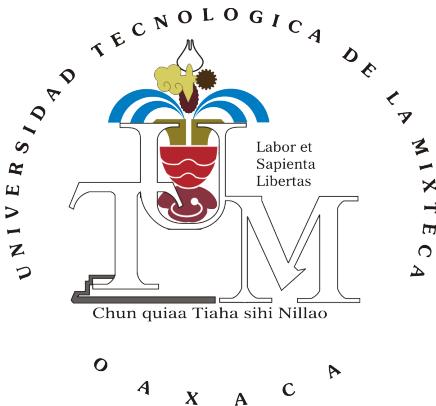


UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA



“DESARROLLO DE UN PROTOTIPO DE MUÑECA
ARTICULADA PARA UNA MANO ROBÓTICA UTILIZANDO
UN MANIPULADOR PARALELO ESFÉRICO COAXIAL RRR”

TESIS:

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ROBÓTICA

PRESENTA:

ING. FERRA GARCÍA EDUARDO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MANUEL ARIAS MONTIEL

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, AGOSTO DE 2025

Dedicatoria

Dedico este trabajo con todo mi corazón a las personas que han sido mi apoyo, mi fuerza y mi inspiración en cada paso de este camino:

A Dios, que me sostuvo cuando mis miedos me paralizaban y me dio valor para seguir adelante.

A mis padres, Lidia y Pascual, por su amor incondicional, por enseñarme a soñar y por estar siempre a mi lado, animándome, comprendiendo mis dificultades y guiándome con sus consejos y ejemplo.

A mi hermana Araceli, a mi hermano Mateo y a mis sobrinas, Luna y Paulina, quienes con su amor y energía me permiten olvidar las dificultades y simplemente disfrutar el presente, llenando cada momento compartido de felicidad y motivación.

A mi tía Silvia, a mi tío Néstor y a mi primo David, quienes con su afecto, apoyo y preocupación genuina me han dado fuerza, seguridad y motivación para seguir adelante, haciendo que cada desafío sea más fácil de afrontar.

A Karina, por su apoyo constante, su comprensión y su cariño, que me permiten cerrar cada jornada con una sonrisa, sentir nuevamente la alegría de vivir y valorar cada instante como algo realmente especial.

A mis amigos que han estado presentes desde la preparatoria, Jordan, Alan, Austin y Aylin, con quienes he compartido innumerables alegrías, risas y momentos inolvidables, y cuya amistad sincera siempre ha sido un refugio y un apoyo incondicional.

A mis amigos de maestría, Josué, Cano, Daysi, Mike, Perla y Kike, quienes con su amistad, apoyo y entusiasmo han llenado de alegría cada momento compartido, haciendo que cada paso de este proyecto sea más especial.

A mis amigos de licenciatura, Pavel, Julio, Josué Santiago, Isaías, Ferni y Arsenio, por su amistad sincera, solidaridad y fidelidad; aunque hoy nos encontramos en distintos lugares, los recuerdos y la huella de su compañía permanecen en mi corazón y mantienen viva nuestra amistad.

A todos quienes han estado conmigo en cada momento de mi vida, gracias por su apoyo, comprensión y cariño; cada paso que doy está lleno de lo que me han enseñado y compartido.

Agradecimientos

- Al **Dr. Manuel Arias Montiel**, director de esta tesis, por brindarme la oportunidad de desarrollar este proyecto bajo su guía y por su valiosa orientación a lo largo de todo el proceso.
- A la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por facilitar sus instalaciones, en especial al Laboratorio de Posgrado, así como a sus encargados, la **Ing. Karina Ramírez López** y el **M.C. Efrén López Jiménez**, por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo.
- Al **Dr. Jaime Gallardo Alvarado**, cuya asesoría y experiencia fueron determinantes para la culminación satisfactoria de este proyecto.
- Al **Dr. Óscar David Ramírez Cárdenas**, por el apoyo brindado en su función como coordinador de la maestría, contribuyendo al desarrollo académico y administrativo necesario para la realización de este trabajo.
- A la **Secretaría de Ciencia, Innovación y Humanidades del Estado de Oaxaca (SECIHTI)**, por el apoyo otorgado en forma de beca, el cual hizo posible la realización de este trabajo de investigación.

Índice

Índice general	VII
Índice de Figuras	XV
Índice de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.1.1. La relevancia de la movilidad de la muñeca en las prótesis de miembro superior	6
1.1.2. Prótesis comerciales	7
1.1.3. Mecanismos utilizados en la implementación de muñecas en manos robóticas	11
1.2. Planteamiento del problema	14
1.3. Justificación	15
1.4. Hipótesis	16
1.5. Objetivos	16
1.5.1. Objetivo general	16
1.5.2. Objetivos específicos	16
1.5.3. Metas	17
1.5.4. Delimitación del proyecto	17
1.6. Metodología de desarrollo	18
2. Marco Teórico	21
2.1. Muñeca y su anatomía	21
2.1.1. Huesos que conforman a la muñeca	21
2.1.2. Articulaciones que conforman la muñeca	24
2.1.3. Ligamentos de la muñeca	25
2.1.4. Tipos de movimientos de la muñeca	26
2.1.5. Rangos de movimiento de la muñeca	27
2.2. Conceptos de ingeniería	28
2.2.1. Máquina	28
2.2.2. Transmisión de potencia	29
2.3. Mecanismos manipuladores paralelos	32
2.3.1. Manipuladores paralelos esféricos	33
2.4. Análisis cinemático	36
2.4.1. Sistemas de referencia	36
2.4.2. Matrices de rotación	37

2.4.3. Método de Denavit-Hartenberg	37
2.4.4. Procedimiento para asignación del sistema de coordenadas de los elementos	38
2.4.5. Teoría de tornillos	41
2.4.6. Líneas en el espacio	42
2.4.7. Tornillos	43
2.4.8. Álgebra de tornillos	44
2.4.9. Forma de Klein	44
2.4.10. Tornillo recíproco	44
2.4.11. Tornillos de las juntas básicas	45
3. Diseño y Construcción del Prototipo	47
3.1. Sistemas fundamentales del prototipo	47
3.1.1. Estructura del sistema de transmisión de potencia	47
3.1.2. Estructura del mecanismo paralelo esférico	51
3.2. Construcción del dispositivo	56
4. Análisis Cinemático del Mecanismo	67
4.1. Definición del SPM	67
4.1.1. Marco de referencia global y configuración inicial del mecanismo	69
4.2. Análisis de posición del SPM	72
4.2.1. Cinemática directa de posición	72
4.3. Cinemática inversa de posición	88
4.4. Análisis de velocidad del SPM	90
4.4.1. Caso de análisis	90
4.4.2. Definición de tornillos	91
4.4.3. Base de tornillos recíprocos	93
4.4.4. Análisis directo de velocidad	95
4.4.5. Análisis inverso de velocidad	98
4.4.6. Relación entre velocidad angular y derivadas de los ángulos de Euler ZYX	99
4.5. Análisis de aceleración	100
4.5.1. Análisis directo de aceleración	100
4.5.2. Análisis inverso de aceleración	103
4.5.3. Relación entre la aceleración angular y las segundas derivadas de los ángulos de Euler ZYX	104
4.6. Espacio de configuración y espacio de trabajo	105
4.6.1. Detección de singularidades	106
4.6.2. Estrategia para evitar las singularidades	109
5. Validación Numérica del Modelo Matemático	111
5.1. Generación de trayectorias	111
5.2. Exportación y configuración del modelo de SolidWorks a Simulink	112
5.2.1. Preparación del modelo en SolidWorks	113
5.2.2. Exportación con Simscape Multibody Link	113
5.2.3. Configuración del modelo en Simulink	115
5.3. Proceso de validación del modelo matemático	118

5.3.1. Cinemática de posición	118
5.3.2. Cinemática de velocidad	121
5.3.3. Cinemática de aceleración	124
5.4. Resultados de la validación cinemática	128
5.4.1. Validación de la cinemática de posición	129
5.4.2. Validación de la cinemática de velocidad	132
5.4.3. Validación de la cinemática de aceleración	136
5.5. Construcción del espacio de configuración y del espacio de trabajo	139
5.5.1. Exportación del modelo CAD a CoppeliaSim	140
5.5.2. Generación y depuración del espacio de configuración	142
5.5.3. Obtención del espacio de trabajo mediante cinemática directa	144
6. Validación Experimental del Modelo Matemático	147
6.1. Instrumentación	147
6.1.1. Sensor de unidad de medición inercial (IMU)	148
6.1.2. Doble Puente H TB6612FNG	151
6.1.3. Convertidor de voltaje DC-DC Step-Down MP1584	152
6.1.4. Tarjeta de desarrollo ESP32 38 Pines	153
6.1.5. Fuente de alimentación DC 12V	154
6.1.6. Motorreductor con encoder integrado	155
6.1.7. Interfaz de operación	156
6.2. Validación experimental	158
6.2.1. Cinemática directa	161
6.2.2. Cinemática inversa	166
7. Conclusiones y trabajos futuros	173
7.1. Conclusión	173
7.2. Trabajos futuros	174
Referencias	175
A. Funciones implementadas en MATLAB para el cálculo de la cinemática del manipulador	185
B. Programas para la recolección de resultados	187
C. Código en Arduino para establecer la comunicación del sistema	191
D. Diagrama eléctrico del sistema	193
E. Contenido CAD, planos y videos del prototipo	195
F. Datasheets de componentes	197

Índice de figuras

1.1. Mano robótica IHY [3].	3
1.2. "Shadow Dexterous Hand [4]"	3
1.3. Brazo robótico Handroid [5].	4
1.4. Mano Blanda de PISA/IIT [6].	4
1.5. The University of Washington Hand [7].	5
1.6. AR10Hand [8].	5
1.7. Mano de Fabricación de Deposición de Formas (SDM) [9].	6
1.8. Movimientos de la muñeca de la prótesis i-Limb® Quantum [10].	7
1.9. Movimientos de la muñeca Axion Wrist de la prótesis Michelangelo® de Otto-bock [11].	9
1.10. Mecanismo de muñeca Bebionic® [12].	9
1.11. Muñecas adaptables de Vicent Evolution 3: a) VINCENTwrist quicksnap, b) VINCENTwrist quicksnap + VINCENTwrist flexión, c) VINCENTwrist short, d) VINCENTwrist short + VINCENTwrist flexión [13].	10
1.12. Mecanismos de muñeca protésica: (a) Trinquete de Otto Bock; (b) Muñeca rotacional HD; (c) i-Limb Quantum; (d) Muñeca HD sierra pasiva; (e) Muñeca de flexión TB; (f) Muñeca pasiva MC multi-flex [15].	12
1.13. Metodología de diseño mecatrónico. Fuente: Creación propia.	20
2.1. Filas de huesos que conforman a la articulación de la muñeca [39].	22
2.2. Huesos que conforman la muñeca [46].	23
2.3. Huesos radio y cubito [47].	24
2.4. Articulaciones de la muñeca [51].	25
2.5. Ligamentos de la muñeca [37].	26
2.6. Movimientos en la muñeca [37].	27
2.7. Partes de un engrane [56].	30
2.8. Circunferencia y diámetros de un engranaje [57].	31
2.9. Representación del espesor del diente de un engranaje. Fuente: Creación propia.	31
2.10. Representación del paso diametral de un engranaje. Fuente: Creación propia.	31
2.11. Representación del espesor del diente de un engranaje [58].	32
2.12. a) Diseño completo del agile eye, b) Prototipo completo del agile eye [35].	33
2.13. Elementos del manipulador paralelo esférico [62].	34
2.14. Modelo cinemático de un manipulador paralelo esférico: a) modelo general, b) caso $\gamma = 0^\circ$ [61].	35
2.15. Representación de un punto p en el espacio con respecto a dos sistemas de coordenada [64].	36

2.16. Asignación de parámetros cinemáticos según la metodología de Denavit-Hartenberg [64].	38
2.17. Representación de los ángulos de Euler [66].	40
2.18. Representación de una línea en el espacio [69].	43
2.19. Rotación de un objeto rígido [69].	46
2.20. Traslación de un cuerpo rígido [69].	46
3.1. Sistema de transmisión de potencia.	48
3.2. Soporte de motores.	48
3.3. Ensamble de los engranes piñones.	49
3.4. Ensamble del sistema de rotación multieje.	50
3.5. Ensamble completo del sistema de transmisión de potencia.	50
3.6. Ensamble del mecanismo paralelo esférico (enlaces distales, enlaces proximales y base móvil).	52
3.7. Diseño de enlaces con base en los parámetros de construcción $\alpha_1 = 60^\circ$ y $\alpha_2 = 90^\circ$	52
3.8. Diseño de enlaces con base en los parámetros de construcción $\gamma = 0^\circ$ y $\beta = 90^\circ$	53
3.9. Sistema completo del mecanismo.	54
3.10. Carcaza del mecanismo.	55
3.11. Ensamble final del mecanismo.	55
3.12. Analogía de movimientos del prototipo en contrate con los movimientos de la muñeca humana.	56
3.13. Construcción del sistema de rotación multi-eje, a) Corte de la varilla rectificada, b) corte de los tubulares, c) desbaste de la varilla rectificada, d) desbaste de los tubulares.	57
3.14. Armado del sistema multieje, a) introducción del rodamiento MR85zz, b) introducción del tubular 10x8, c) sistema de rotación multi-eje armado por completo.	58
3.15. Ejes de engranes piñones: a) fresado de los ejes, b) ejes maquinados.	59
3.16. Soporte de motorreductores	59
3.17. a) proceso de impresión de la pieza, b) Tapa terminada para los engranajes.	60
3.18. Ensamble del soporte de los motorreductores y los ejes de los engranajes. a) Ensamble de motorreductores y cople, b) Ensamble de los ejes de los piñones con los ejes de los motorreductores, c) presentación del sistema multi-eje con el soporte de los motorreductores.	61
3.19. Proceso de ensamblaje del sistema de movimiento multi-eje. a) ensamble de los engranes con el sistema multi-eje, b) ensamble de engranajes con sistema de movimiento, c) sistema de movimiento multi-eje terminado.	61
3.20. Varillas roscadas y dobladas para la construcción de los enlaces distales.	62
3.21. Ensamble de los enlaces distales.	62
3.22. Proceso de construcción de las abrazaderas del mecanismo. a) Impresión de las piezas en 3d, b) abrazadera #1, c) abrazadera #2, d) abrazadera #3.	63
3.23. Ensamble de los enlaces proximales.	64
3.24. Ensamble de los enlaces proximales y distales.	64

3.25. Proceso de Ensamblaje del Manipulador: (a) Orientación del manipulador, (b) Posición inicial del manipulador, (c) Manipulador instalado en su carcasa protectora, (d) prototipo completo.	65
4.1. Componentes de un SPM.	68
4.2. Modelo del manipulador paralelo esférico [74].	69
4.3. Sistema de referencia fijo del manipulador.	70
4.4. Posibles posiciones iniciales del manipulador.	71
4.5. Manipulador en su configuración inicial visto desde el plano YZ.	73
4.6. Relaciones del vector w_1^* con los vectores u_1 y v_1^*	75
4.7. Sistemas de referencia para la convención de Denavit-Hartenberg.	77
4.8. Pirámide regular de la plataforma móvil del manipulador.	81
4.9. Extracción de triángulos de la pirámide regular.	82
4.10. Relación de los vectores v_i con el sistema de referencia movido ($X'Y'Z'$).	87
4.11. a) Tornillos asociados a los pares cinemáticos del SPM, b) tornillos asociados a la cadena cinemática virtual.	92
5.1. Desactivación de la relación de engranajes.	113
5.2. Activación del complemento Simscape Multibody Link en Solidworks.	114
5.3. Exportación del modelo a archivo XML.	114
5.4. Bloque con el modelo del prototipo.	115
5.5. Configuración de las entradas del sistema: a) Propiedades de la junta de revoluta, b) Configuración del bloque Simulink-PS Converter.	116
5.6. Compensación de la relación de engranaje mediante ajuste de las entradas de posición, velocidad y aceleración.	116
5.7. Configuración de las juntas cinemáticas para lectura.	117
5.8. Implementación del <i>Transform Sensor</i> para las lecturas de la plataforma móvil.	118
5.9. Proceso de validación de la cinemática de posición.	119
5.10. Proceso de validación de la cinemática de posición mediante simulación.	121
5.11. Proceso de validación del modelo matemático de velocidad mediante la cinemática inversa y directa.	122
5.12. Proceso de validación de la cinemática de velocidad mediante simulación.	124
5.13. Proceso de validación de la cinemática de aceleración.	126
5.14. Proceso de validación de la cinemática de aceleración mediante simulación.	127
5.15. Análisis de cinemática de posición, funciones grado 5.	130
5.16. Comparación entre la cinemática directa de posición y los resultados obtenidos mediante simulación.	131
5.17. Comparación entre la cinemática inversa de posición y los resultados obtenidos mediante simulación.	132
5.18. Análisis de cinemática de velocidad, funciones grado 4.	133
5.19. Comparación entre la cinemática directa de velocidad y los resultados obtenidos mediante simulación.	134
5.20. Comparación de las velocidades generalizadas: cinemática inversa de velocidad vs. simulación.	135

5.21. Velocidades articulares en las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 mediante cinemática inversa y comparación de errores mediante simulación.	136
5.22. Análisis de cinemática de aceleración, funciones grado 3.	137
5.23. Comparación entre la cinemática directa de aceleración y los resultados obtenidos mediante simulación.	137
5.24. Comparación de las aceleraciones generalizadas: cinemática inversa de aceleración vs. simulación.	138
5.25. Aceleraciones articulares en las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 mediante cinemática inversa y comparación de errores mediante simulación.	139
5.26. Pasos previos para la exportación desde SolidWorks a CoppeliaSim: a) Establecimiento de los ejes de rotación de las juntas revolutas, b) Organización jerárquica de los <i>links</i>	141
5.27. Configuración del manipulador en CoppeliaSim. a) Cierre de las cadenas cinemáticas con <i>dummies</i> , b) Verificación de la convergencia de los ejes de rotación, c) Modelo final exportado.	142
5.28. Construcción del espacio de configuración: filtrado por límites articulares, singularidades y colisiones.	144
5.29. Representación del espacio de trabajo derivado del espacio de configuración. .	145
6.1. Vista general de la estructura del sistema y sus componentes.	148
6.2. Unidad de medición inercial WT901BLECL BLE 5.0.	150
6.3. Doble Puente H TB6612FNG.	152
6.4. Convertidor de voltaje DC-DC Step-Down MP1584.	153
6.5. Tarjeta de desarrollo ESP32 y distribución de pines (pinout).	154
6.6. Fuente de alimentación DC 12V.	155
6.7. Motorreductor con encoder integrado.	156
6.8. Interfaz de apoyo para la operación del prototipo.	157
6.9. Selección del tipo de señal a aplicar desde la interfaz.	157
6.10. Supervisión y control del estado del manipulador mediante la interfaz.	158
6.11. Proceso de adquisición y filtrado de las señales del prototipo físico.	159
6.12. Proceso de validación experimental de las cinemáticas directa e inversa mediante su implementación en el prototipo físico, incluyendo el cálculo del error entre las estimaciones y las mediciones reales.	160
6.13. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de posición, incluyendo el error absoluto.	161
6.14. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de velocidad, incluyendo el error absoluto.	163
6.15. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de aceleración, incluyendo el error absoluto.	164
6.16. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de posición, incluyendo el error absoluto.	167
6.17. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de velocidad, incluyendo el error absoluto.	168

6.18. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de aceleración, incluyendo el error absoluto.	170
A.1. Código QR para acceder a la carpeta digital con las funciones de MATLAB. .	186
B.1. Código QR para acceder a la carpeta digital con los programas para la recolección de resultados.	189
C.1. Código QR para acceder a la carpeta con el código en Arduino.	192
D.1. Código QR para acceder a los archivos del diseño electrónico del sistema. . .	194
E.1. Código QR para acceder al contenido CAD, planos y videos del prototipo. .	196
F.1. Código QR para acceder a los datasheets de los componentes principales del prototipo.	198

Índice de Tablas

2.1. Rangos de movilidad en la muñeca. Fuente: Creación propia.	27
4.1. Tabla de parametrización de Denavit-Hartenberg.	78
6.1. Comparativa de unidades de medición iniciales	150
6.2. Características principales del módulo TB6612FNG	151
6.3. Especificaciones técnicas del convertidor MP1584	152
6.4. Características principales de la tarjeta ESP32 (38 pines)	153
6.5. Especificaciones técnicas de la fuente de alimentación DC 12V	154
6.6. Especificaciones del motor DC 12V con reducción 210:1	155
6.7. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática directa – Posición . .	162
6.8. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática directa – Velocidad .	163
6.9. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática directa – Aceleración	165
6.10. Correlación - Cinemática Directa (Ángulos de Euler)	165
6.11. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Posición . .	167
6.12. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Velocidad .	169
6.13. Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Aceleración	170
6.14. Correlación - Cinemática Inversa (Ángulos de Motores)	171

Capítulo 1

Introducción

La amputación de un miembro superior es una de las discapacidades más significativas debido a su impacto en la vida cotidiana de las personas. El miembro superior es una herramienta esencial que permite a las personas llevar a cabo sus actividades diarias con autonomía, tanto en su entorno laboral como social. La pérdida de un miembro superior representa una limitación que afecta de manera significativa las rutinas laborales y sociales de quienes la experimentan. Lamentablemente, esta discapacidad a menudo conlleva la pérdida de empleo debido a la dificultad para realizar tareas laborales específicas [1].

Las repercusiones de esta discapacidad van más allá de las limitaciones físicas, ya que también afecta la igualdad social y las oportunidades laborales. La sociedad tiende a dar gran importancia a la función del miembro superior, lo que puede obstaculizar la igualdad de las personas con amputaciones en el ámbito social y laboral. Esta situación genera un desafío adicional, ya que las personas con esta discapacidad enfrentan barreras físicas y psicológicas que alteran profundamente su percepción del entorno y su interacción con la sociedad.

De esta forma, una de las causas por las cuales estas personas sufren de esos padecimientos es por la razón que están seguros de que su vida no volverá a ser la misma que antes, si bien esto es cierto, existen diversos dispositivos que ayudan a mejorar su calidad de vida, estos son las denominadas prótesis.

Las prótesis están formadas por mecanismos, actuadores y sensores que le permiten tener cierta libertad de movimiento para realizar tareas de la labor diaria. Además, psicológicamente hablando, estas herramientas crean en la persona afectada un ajuste psicosocial [2], que brinda una sensación de calma y aceptación de forma rápida y eficaz. Así mismo, estos dispositivos permiten disminuir la ansiedad ante su propia imagen corporal, ya que provoca una reacción de plenitud y evita el posible desarrollo de la sintomatología depresiva en la vida del paciente.

En la actualidad, se han logrado avances notables en el diseño y desarrollo de prótesis para miembros superiores que brindan una mayor movilidad y funcionalidad en los dedos de la mano. Estas soluciones han contribuido significativamente a mejorar la calidad de vida de las personas que han experimentado amputaciones de miembros superiores, permitiéndoles realizar una amplia gama de actividades diarias con un grado sorprendente de destreza. Sin embargo, a pesar de estos avances, un desafío que persiste de manera prominente en este campo es la limitada disponibilidad de prótesis que ofrecen movilidad de la muñeca.

La muñeca es una articulación fundamental en la extremidad superior, que desempeña

un papel crítico en la realización de tareas cotidianas. Desde el simple acto de girar la muñeca para abrir una puerta hasta tareas más complejas que involucran la coordinación precisa de la muñeca y la mano, esta articulación es esencial para lograr un rango completo de movimientos y funcionalidad. Lamentablemente, muchas de las prótesis disponibles en la actualidad se centran principalmente en la funcionalidad de los dedos, dejando de lado la movilidad de la muñeca.

Es precisamente en este contexto que cobra vital importancia la investigación y el desarrollo de mecanismos que permitan la implementación de movimientos de la muñeca en prótesis robóticas de miembros superiores. Esta necesidad se hace aún más evidente cuando se considera que las personas que han perdido un miembro superior dependen en gran medida de las prótesis para recuperar su independencia y llevar una vida normal.

1.1. Antecedentes

En las últimas décadas, el campo de las prótesis de miembro superior ha experimentado un avance constante, impulsado por el deseo de transmitir habilidades y capacidades humanas a estos dispositivos. Esta evolución ha llevado a la creación de prótesis cada vez más complejas, con mejoras en características como el peso, la potencia y la configuración.

Inicialmente, las prótesis de miembro superior carecían de sensores y actuadores, lo que limitaba significativamente su capacidad de movimiento. Prototipos tempranos, como las prótesis de gancho de garfio, se desarrollaron para abordar esta necesidad básica de agarre. Sin embargo, la falta de movilidad y destreza en estas prótesis impulsó la búsqueda de soluciones más avanzadas.

A medida que la tecnología y la electrónica avanzaban, surgió la oportunidad de dotar a las prótesis de un mayor grado de movimiento y funcionalidad. Uno de los avances más significativos fue el desarrollo de prótesis capaces de realizar un agarre preciso de objetos. Ejemplificando este progreso se encuentra la mano robótica IHY (véase la Figura 1.1) [3], desarrollada por las universidades de Yale y Harvard. Este dispositivo tenía como objetivo principal emular las capacidades de la mano humana y permitir el agarre de una amplia variedad de objetos, el diseño constaba de tres dedos, con el dedo pulgar equipado con dos motores para proporcionar una mayor destreza en el agarre. Además de contar con sensores de presión y sensores ópticos que mejoran su capacidad para interactuar de manera efectiva con objetos variados.



Figura 1.1: Mano robótica IHY [3].

Aunque la mano robótica IHY representó un avance significativo en el desarrollo de prótesis de miembro superior, su limitación de tres dedos no satisfizo completamente las necesidades de las personas con discapacidades en la extremidad superior. Estas personas anhelan dispositivos que se asemejen más a una mano humana completa.

Este deseo de una mayor semejanza a la mano humana dio lugar al desarrollo de prótesis como la "Shadow Dexterous Hand" (véase la Figura 1.2) [4]. Esta mano robótica, equipada con sensores de posición y de fuerza, es capaz de ofrecer una mayor destreza con 24 articulaciones y un total de cinco dedos.



Figura 1.2: "Shadow Dexterous Hand [4]".

Además de la mencionada mano robótica "Shadow Dexterous Hand", se han desarrollado otras prótesis de miembro superior que se esfuerzan por emular la funcionalidad y destreza de una mano humana completa. Estas innovaciones han impulsado la búsqueda de soluciones cada vez más sofisticadas y versátiles.

Una de estas prótesis es la "Handroid" (véase la Figura 1.3) [5], una mano construida con materiales duraderos y cinco dedos flexibles que le permiten doblarse gracias a la acción de los tendones. Lo más destacado de esta prótesis es su capacidad de control mediante señales mioeléctricas y ondas cerebrales, lo que brinda a los usuarios un mayor nivel de control y precisión. Su aplicación principal radica en entornos peligrosos, donde la seguridad es una preocupación primordial.



Figura 1.3: Brazo robótico Handroid [5].

Por otro lado, se encuentra la "Mano Blanda de PISA/IIT" (véase la Figura 1.4) [6], un enfoque diferente pero igualmente interesante en el diseño de prótesis de miembro superior. Esta mano robótica cuenta con una sorprendente libertad de movimiento, con hasta 19 grados de libertad controlados por un solo motor. Este diseño simple se basa en la sinergia suave, utilizando materiales flexibles y articulaciones ligamentosas. Esto le otorga a la prótesis la capacidad de un agarre efectivo de diversos objetos y la hace adecuada tanto para aplicaciones humanoides como protésicas.



Figura 1.4: Mano Blanda de PISA/IIT [6].

Otro avance significativo proviene de la Universidad de Washington, donde Emmanuel Todorov y Zhe Xu han trabajado en el desarrollo de una mano robótica que busca replicar la apariencia y el funcionamiento de una mano humana de manera casi idéntica (véase la Figura 1.5) [7]. Utilizando tecnología avanzada, como escaneo 3D de los huesos de la mano humana y 10 servomotores junto con un tendido de cables, lograron resultados sorprendentes en términos de destreza y capacidad para manipular objetos cotidianos.



Figura 1.5: The University of Washington Hand [7].

Por otro lado, la "Mano Humanoide AR10" (véase la Figura 1.6) [8] merece una mención especial, ya que fue diseñada como una unidad independiente con fines de investigación. Esta prótesis permite una personalización extensa a través de puntas de dedos intercambiables, lo que brinda a los usuarios la flexibilidad de adaptar la prótesis a sus necesidades específicas.

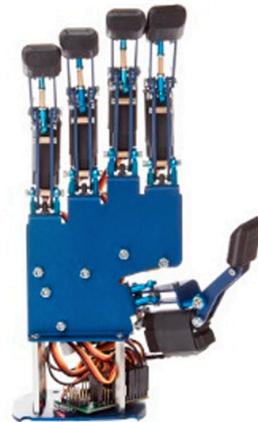


Figura 1.6: AR10Hand [8].

La "Mano de Fabricación de Depósito de Formas (SDM)" (véase la Figura 1.7) [9] representa un enfoque innovador en la creación de prótesis de miembro superior. Esta mano robótica se destaca por su capacidad para agarrar objetos de manera eficaz y su sencillo sistema de control. Esto se logra mediante la configuración de articulaciones pasivas y un mecanismo subactuado controlado por un solo motor.

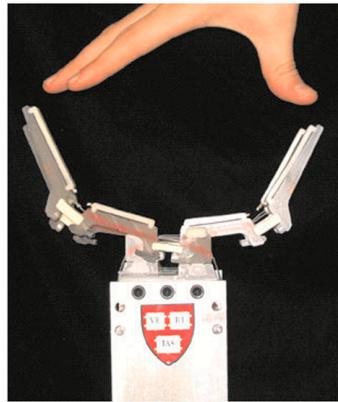


Figura 1.7: Mano de Fabricación de Deposición de Formas (SDM) [9].

1.1.1. La relevancia de la movilidad de la muñeca en las prótesis de miembro superior

Si bien los avances en las prótesis de miembro superior han sido notables en términos de replicar la funcionalidad de la mano humana, uno de los aspectos que ha recibido menos atención en la mayoría de los diseños es la movilidad de la muñeca. En muchos casos, los esfuerzos de diseño se han centrado considerablemente en la mejora de la destreza de los dedos y su capacidad de agarre, lo cual es esencial, pero se ha pasado por alto un elemento crucial: la capacidad de movimiento de la muñeca.

La muñeca no es simplemente una articulación que permite que la mano realice movimientos hacia arriba y abajo; su movilidad abarca una gama de movimientos que son esenciales en las actividades cotidianas y en la realización de tareas específicas. Desde girar la muñeca para ajustar la orientación de la mano hasta inclinarla para lograr la alineación adecuada en una actividad, la movilidad de la muñeca desempeña un papel crítico en la funcionalidad de la extremidad superior.

Es sorprendente que, a pesar de los avances en la tecnología de prótesis y la creciente sofisticación en la replicación de la mano humana, la implementación de un mecanismo que permita la movilidad de la muñeca haya sido relativamente pasada por alto en la mayoría de los diseños. Esta carencia de atención ha llevado a un problema importante: las personas que utilizan prótesis de miembro superior con muñecas fijas a menudo se ven obligadas a realizar movimientos compensatorios incómodos y, a veces, dolorosos para lograr la orientación deseada.

En un mundo en el que se ha buscado incansablemente la mejora de la calidad de vida de las personas con discapacidades, resulta crucial reconocer que la movilidad de la muñeca es un componente esencial para lograr una funcionalidad completa y efectiva en las prótesis de miembro superior. Afortunadamente, en paralelo con los desarrollos en otras áreas de la tecnología de prótesis, se están realizando esfuerzos para abordar esta importante limitación.

1.1.2. Prótesis comerciales

Prótesis i-Limb® Quantum

La prótesis biónica i-Limb® Quantum (Figura 1.8 y 1.12(c))[10] es una de las prótesis más comúnmente utilizadas en la actualidad, debido a su gran comodidad y diseño estético. Además, es uno de los dispositivos con mayor seguridad en el mercado, con una gran vida útil, controlado por 4 diferentes métodos que permiten su movilidad según lo deseé el usuario. Entre los métodos de control utilizados se encuentran el control por gesto, aplicación, músculo y proximidad [10].

Una de las partes más novedosas de este dispositivo es que contiene integrado el movimiento parcial de la muñeca, el cual es un mecanismo que permite el control rotacional de forma simultánea al control de la mano. Este mecanismo permite tener movimientos de extensión, flexión, pronación y supinación, sin embargo, no posee los movimientos básicos de abducción y aducción que permiten tener una mejor movilidad y libertad de movimiento para realizar cualquier tarea de la labor diaria. La falta de estos movimientos provoca que el usuario se vea obligado a solventar estas carencias apoyándose de otros movimientos generados por su cuerpo, como lo son los movimientos de pronación y supinación del brazo. Uno de los ejemplos más comunes en donde es posible visualizar esta carencia es en los movimientos generados para escribir en el teclado de una computadora o los movimientos realizados al momento de querer mover el *mouse* de un lado a otro. Así mismo, esta carencia recae en la capacidad de realizar tareas tan básicas como lo es el saludar a una persona con la mano, por lo que nuevamente estos usuarios deben de apoyarse de los movimientos del brazo, lo cual no debería ser la forma correcta de poder solventar estas carencias, ya que a futuro estos movimientos provocan una incomodidad en el usuario debido a que no poseen la capacidad de generar los movimientos naturales de la mano.



Figura 1.8: Movimientos de la muñeca de la prótesis i-Limb® Quantum [10].

Prótesis Michelangelo® de Ottobock

La prótesis Michelangelo® de Ottobock, es un dispositivo que ha logrado recrear muchas de las movilidades de la mano con ayuda de su sistema optimizado tecnológicamente llamado Axon-Bus® [11]. El uso de este sistema tiene diferentes ventajas, entre las que destaca su seguridad en transmisión de datos, ya que los componentes que integran al dispositivo se comunican de forma tan eficaz que no existen pérdidas en la transmisión de datos, ni siquiera en la velocidad del dispositivo. Claramente, este sistema de transmisión de datos es más seguro y funcional para los usuarios, los cuales se ven beneficiados por la capacidad del dispositivo.

Otro punto importante son los grados de libertad que provee el dispositivo, ya que los usuarios se benefician por el aumento de funcionalidad en la prótesis. Por esta razón, DynamicArm® y Ergo Arm® [11], están trabajando para implementar los movimientos de rotación y flexión eléctricas de la muñeca y de esta forma darle mayor funcionalidad al dispositivo. Actualmente, el dispositivo provee un sistema de muñeca que cumple movimientos tales como el movimiento de flexión y extensión de forma flexible (véase la Figura 1.9), este movimiento puede adaptarse con la ayuda del usuario por medio de una tecla de fijación, la cual le permite tener los modos flexible o rígido según se necesite. Además, tiene implementado el movimiento de pronación y supinación de forma pasiva.

La muñeca implementada es la llamada AxonWrist, la cual consta de dos módulos unidos físicamente con los que es posible realizar los movimientos de flexión - extensión y pronación-supinación, con lo cual se le brinda al usuario una mayor libertad de movimiento y se contribuye a minimizar los movimientos de compensación no naturales, así como a mantener una postura corporal lo más sanamente posible y de esta forma evitar contracturas en el cinturón escapular.

El movimiento de pronación y supinación es realizado de forma pasiva [11] gracias a un módulo que permite girar 360 grados, los cuales pueden ser alcanzados por medio de las 24 posiciones de encaje separado 15 grados cada una. Estos movimientos son controlados por medio de un mecanismo de bloqueo que impide que se esfuerce o se suelte la mano de forma accidental. De esta misma forma se encuentra un mecanismo encargado de los movimientos de flexión y extensión pasiva, los cuales permiten alcanzar 75 y 45 grados en el movimiento de flexión y extensión respectivamente por medio de 4 posiciones de encaje para el movimiento de flexión y 3 para el movimiento de extensión.

Una de las novedades que se puede encontrar en la muñeca Axon Wrist es su modo flexible, el cual imita la conducta natural de movimiento de la muñeca relajada. Esta libertad de movimiento permite alcanzar una gran similitud de la conducta fisiológica del movimiento de la mano y de la muñeca por medio de una tecla de fijación que se encuentra fácilmente accesible al usuario.



Figura 1.9: Movimientos de la muñeca Axion Wrist de la prótesis Michelangelo® de Ottobock [11].

Prótesis Bebionic®

La prótesis Bebionic® es una mano mioeléctrica articulada con múltiples agarres preprogramados [12], que permite al usuario tener el control del dispositivo. Esta prótesis se caracteriza por ser una de las prótesis más realistas del mundo de la empresa de Ottobock, además de ser un diseño resistente y duradero. Bebionic® está compuesto por motores individuales para dar movimiento controlado por medio de secuencias de control o por medio de los sensores mioeléctricos.

Una adaptación nueva en esta prótesis es la implementación de la muñeca Bebionic® (véase la Figura 1.10), la cual permite al usuario realizar movimientos de rotación, flexión y extensión [12] en la muñeca con un solo motor. Esta muñeca es capaz de generar 180 grados de rotación externa y 50 grados de rotación interna, además provee 30 grados de flexión y 30 grados de extensión.



Figura 1.10: Mecanismo de muñeca Bebionic® [12].

Vicent Evolution 3

Vicent Evolution 3 es una prótesis de mano que está construida de forma anatómica [13], que combina la funcionalidad con la alta calidad y bajo peso. Esta prótesis está formada y adaptada por medio de 4 muñecas diferentes: el sistema de cierre VINCENTwrisp quicksnap,

VicentTwist short, los cuales pueden combinarse con los sistemas de flexión VICENTTwrist el cual es un mecanismo que permite doblar la muñeca.

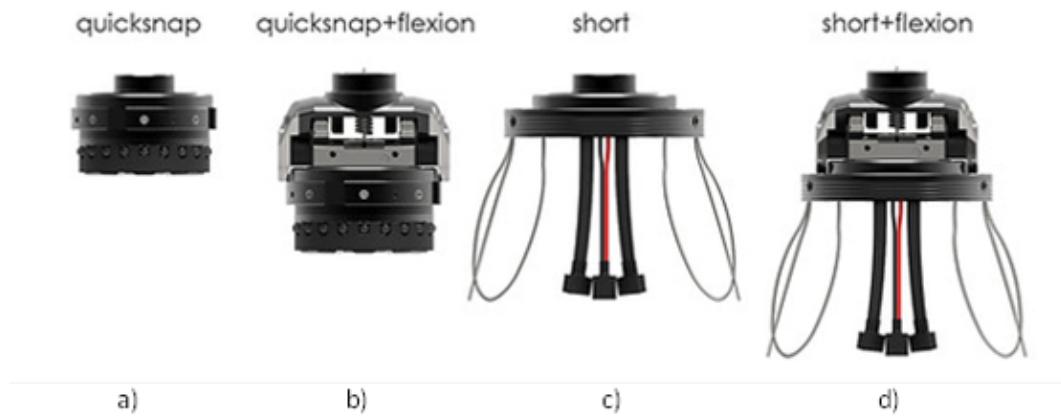


Figura 1.11: Muñecas adaptables de Vicent Evolution 3: a) VINCENTwrist quicksnap, b) VINCENTwrist quicksnap + VINCENTwrist flexión, c) VINCENTwrist short, d) VINCENTwrist short + VINCENTwrist flexión [13].

- El **VINCENTwrist quicksnap** (véase el inciso a) de la Figura 1.11) es un broche rápido de muñeca de forma estándar que permite poner y quitar la prótesis de mano de una forma rápida y sencilla [14], para adaptarse a otros sistemas de antebrazo como lo son DynamicArm o Boston Digital ARM™, además de poderse adaptar al sistema VINCENTwrist flexión (véase el inciso b) de la Figura 1.11), el cual le permite tener rangos de movilidad al dispositivo.
- La **VINCENTwrist short** (véase el inciso c) de la Figura 1.11) también es una adaptación de muñeca, con la diferencia que este dispositivo es más corto en comparación al VINCENTwrist quicksnap, con lo cual se logra una unión de la mano ideal para prótesis de muñones largos de miembros superiores. Esta muñeca permite la rotación silenciosa y continua [14] de forma manual y que además permite ser combinada con la VINCENTwrist flexión (véase el inciso d) de la Figura 1.11).
- El **VINCENTwrist flexión** (véase el inciso c) de la Figura 1.11) es una junta flexible, que se adapta a la prótesis de mano para darle movilidad con un amplio rango de movimiento de -54 a 54 grados, los cuales son ajustables. Esta muñeca es ideal para usuarios con amputaciones bilaterales [14], ya que no contiene interruptores especiales, sino que la posición es cambiada por medio de estiramiento, movimiento y liberación.

Estas opciones de muñeca de la marca Vicent Evolution 3 se caracterizan por su poca profundidad de instalación y bajo peso. Además, es uno de los sistemas más sencillos en cuanto

a la construcción de los mecanismos, por lo cual asegura una gran vida útil.

1.1.3. Mecanismos utilizados en la implementación de muñecas en manos robóticas

A lo largo del tiempo, se han considerado diversos aspectos al evaluar muñecas protésicas y robóticas, centrando la atención en cuatro indicadores esenciales: modalidad, estabilidad, capacidad de carga y flexibilidad [15]. Estas consideraciones han llevado a una clasificación de las muñecas protésicas en dos categorías distintas. La primera comprende las muñecas movidas de manera pasiva, mientras que la segunda abarca las muñecas movidas de manera activa.

Dentro de las muñecas protésicas pasivas, destaca la muñeca de fricción WE de Hosmer-Dorrance (HD) [16]. Este dispositivo permite la rotación de la muñeca protésica mediante la aplicación de fricción. La fricción constante se logra a través de un hilo de nylon comprimido con un tornillo prisionero, permitiendo al usuario ajustar y reemplazar la unidad de fricción según sea necesario. Un mecanismo similar se emplea en la muñeca desarrollada por Prot [17].

En el ámbito comercial, existen varios mecanismos pasivos diseñados para otorgar movilidad a la muñeca. Entre ellos, destaca el trinquete de Otto Bock (véase la Figura 1.12(a)) [18]. Este dispositivo emplea una palanca de bloqueo que permite fijar el efecto final en 12 posiciones discretas, desbloqueándose al presionar nuevamente la palanca para readaptar la posición del efecto final. Además, esta muñeca protésica incluye otra palanca de bloqueo que facilita la desconexión rápida de la mano protésica.

Un mecanismo similar se encuentra en la muñeca rotacional HD (véase la Figura 1.12(b)) [15], que utiliza un cable de desbloqueo para ejecutar el movimiento de rotación de la muñeca. Este mecanismo posibilita la liberación del efecto final para realizar movimientos de pronación y supinación con 18 posiciones de bloqueo y una rotación completa de 360º, característica poco común en las muñecas robóticas.

Otro ejemplo de mecanismos discretos de bloqueo en la muñeca se observa en la muñeca HD de Sierra pasiva (véase el inciso d) de la Figura 1.12) [19] y la muñeca HD FW flexión fricción [20], ambas permitiendo el bloqueo en tres posiciones de flexión, variando de 0 a 50 grados. Estos sistemas ofrecen soluciones efectivas para adaptar y bloquear la muñeca en diferentes configuraciones, brindando versatilidad a los usuarios de prótesis.

Adicionalmente, se encuentra el mecanismo implementado por la muñeca OB Myo Wrist 2 Act [21], que posibilita cinco posiciones discretas de desbloqueo en un rango de 40 a 20 grados de flexión y extensión. Este rango de movimiento se alinea con las recomendaciones para llevar a cabo actividades diarias.

En el ámbito de innovación en mecanismos pasivos, destaca la muñeca de flexión TB (véase la Figura 1.12(e)) [15], la cual logra ángulos de extensión y flexión mediante la implementación de flexibilidad con un resorte en modo desbloqueado. Esta característica proporciona un movimiento suave y absorción de impactos, así como una torsión beneficiosa para prevenir lesiones en los usuarios.

Otro enfoque novedoso se presenta en la muñeca pasiva MC multiflex (véase la Figura 1.12(f)) [22], que utiliza una articulación elástica y resortes en el centro del recorrido. Este



Figura 1.12: Mecanismos de muñeca protésica: (a) Trinquette de Otto Bock; (b) Muñeca rotacional HD; (c) i-Limb Quantum; (d) Muñeca HD sierra pasiva; (e) Muñeca de flexión TB; (f) Muñeca pasiva MC multi-flex [15].

diseño permite movimientos en diversas direcciones, ofreciendo una sensación más cómoda a los usuarios al posibilitar que las cargas sean desplazadas en cualquier dirección, a diferencia de las muñecas con mecanismos rígidos. Estos avances demuestran un progreso continuo en la búsqueda de soluciones que mejoren la funcionalidad y comodidad de las muñecas protésicas.

En la categoría de mecanismos compactos, destacan la OB Myolino Wrisp [23] y la OB Robo Wrist [24]. Ambas muñecas robóticas emplean una articulación esférica con una bola circunferencial que permite flexión y desviación radial cubital. Este mecanismo utiliza tornillos para ajustar la fricción entre la unión esférica y el brazo robótico. La distinción entre la OB Myolino Wrisp y la OB Robo Wrist radica en que la última permite una rotación completa de 360 grados y cuenta con un botón de bloqueo, además de que el ajuste de fricción se realiza mediante un collar giratorio.

Por otro lado, se encuentran mecanismos distintos, como los implementados por la muñeca HD de cuatro posiciones [25] y la muñeca OB MyoWrisp flex [26]. Estas muñecas son consideradas por su combinación en serie de la muñeca HD rotacional y la muñeca HD Sierra en configuración RR (véase la Figura 1.12(d)), permitiéndoles conservar la tracción corporal y la capacidad de bloqueo, lo que da como resultado la posibilidad de realizar movimientos de pronación y flexión.

En el ámbito de los mecanismos pasivos, se destaca una solución simple pero efectiva: el cable de Bowden [27]. Este mecanismo permite controlar el efecto final de forma directa mediante movimientos corporales brutos. Un extremo del cable se conecta al arnés, mientras que el otro se une a una adaptación en el hombro y la espalda del usuario. Esta implementación es especialmente útil en usuarios con amputación bilateral, ya que no requiere el uso de la mano para ajustar la orientación de la mano robótica. Estos avances muestran una diversidad de enfoques para mejorar la funcionalidad y la adaptabilidad de las muñecas protésicas y

robóticas.

En la categoría de muñecas activas, se destaca el sistema de prótesis desarrollado por Razak et al. [28]. Este sistema es impulsado por 2 servomotores conectados en serie mediante una conexión en cadena RR, lo que le permite realizar movimientos de pronación y flexión. Una característica notable de este sistema es su capacidad para generar pares de torsión comparables a los de una muñeca adulta sana.

Otro mecanismo de muñeca protésica es el desarrollado por Kyberd et al. [29]. Este sistema cuenta con dos actuadores colocados distalmente a la articulación de la muñeca. Su característica distintiva radica en su tamaño reducido, ya que utiliza una transmisión diferencial que le permite realizar movimientos de supinación, pronación, extensión y flexión. Esta muñeca puede generar un par de flexión de hasta 0.07 Nm y alcanzar una velocidad máxima de 250º/s, alimentado con un voltaje de 7 voltios.

Dentro de esta clasificación se encuentra también el mecanismo presentado en [30], el cual utiliza dos motores y una serie de engranajes para reducir el espacio y permitir los movimientos de pronación, supinación, flexión y extensión, otorgando así 2 grados de libertad al dispositivo. El mecanismo consta de una disposición en paralelo de los motores, donde cada salida del motor está conectada a un engranaje en los extremos medial y lateral de la muñeca. Estos engranajes, a su vez, están conectados a los extremos opuestos de un diferencial con una rueda centrada unida al encaje protésico. Al moverse los motores en sentidos opuestos, se genera el movimiento de pronación y supinación, mientras que los movimientos de flexión y extensión son generados cuando ambos motores giran en el mismo sentido. Esta acción se produce porque las transmisiones se oponen entre sí a través del diferencial, deteniendo la rotación del antebrazo y generando un par alrededor del eje de flexión y extensión. De esta manera, los movimientos pueden ser generados de forma independiente o combinada, según la combinación y diferencia de velocidades que tengan ambos motores en su salida.

Un mecanismo adicional de muñeca activo se encuentra en el brazo RIC [31], que presenta una configuración compuesta por una transmisión planetaria de una sola etapa, un embrague no retrocedible y una transmisión cicloidal para permitir movimientos de rotación y flexión. Destaca la implementación de un desconector rápido desarrollado por Motion Control Inc, lo cual es comúnmente utilizado en este tipo de sistemas. Este mecanismo logra una velocidad sin carga de 85 revoluciones por minuto, con un peso total de 142 g y dimensiones de 35 mm por 45 mm por 58 mm.

Otro sistema relevante es el descrito en [32], el cual está compuesto por un módulo de articulación proximal y un módulo de articulación distal. El módulo de articulación proximal es controlado por un actuador lineal conectado a un brazo de manivela, permitiendo movimientos de flexión y extensión al mover el actuador lineal hacia arriba y hacia abajo, respectivamente. Por otro lado, el módulo de articulación distal proporciona movimientos de desviación radial, cubital y rotación axial de la muñeca, controlados mediante dos actuadores lineales conectados a un sistema de poleas. Estos movimientos permiten lograr la desviación radial, cubital y rotacional de la muñeca, aportando una variedad de funciones para mejorar la destreza y versatilidad de la prótesis.

1.2. Planteamiento del problema

La pérdida de una extremidad superior es una condición que tiene un impacto profundo en la calidad de vida de las personas, afectando su capacidad para llevar a cabo actividades diarias y restringiendo su participación en la sociedad [33]. A lo largo del tiempo, se ha buscado el desarrollo de prótesis de miembros superiores que no solo sean funcionales, sino también capaces de replicar de manera eficiente los movimientos y la destreza de una mano humana, como se evidencia en estudios anteriores [3–14].

En la actualidad, la restauración de la movilidad para las personas que han sufrido la amputación de una extremidad se busca mediante prótesis diseñadas para facilitar la realización de actividades cotidianas. Sin embargo, esta solución se ve obstaculizada por las limitaciones intrínsecas de dichos dispositivos, agravadas por la escasez de profesionales capacitados para diseñar y adaptar extremidades artificiales [33]. Además de las dificultades físicas, la pérdida de una extremidad conlleva un impacto psicológico y emocional significativo, a menudo llevando a la separación de seres queridos debido a la ansiedad o la incapacidad física [33]. Este conjunto de obstáculos resulta en cambios drásticos en la calidad de vida de estas personas, a veces sumiéndolas en una negación de su propia situación.

A pesar de los esfuerzos actuales para emular algunos movimientos de la extremidad perdida a través de mecanismos, actuadores y sensores específicos para esta aplicación [3–14], las prótesis existentes no logran replicar por completo los movimientos naturales de la mano y la muñeca. Como resultado, su uso implica una fase de adaptación en la que los usuarios deben aprender a operar con movimientos limitados, lo que a menudo conduce a movimientos compensatorios. Estos ajustes compensatorios, con el tiempo, pueden ocasionar lesiones en la espalda, el cuello y la extremidad residual [34].

En el estado del arte, se destacan notables avances en el diseño de muñecas protésicas destinadas a superar las limitaciones mencionadas. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos en [15–32], ninguno de estos dispositivos logra replicar de manera efectiva los movimientos naturales de la muñeca.

Para abordar este desafío de manera efectiva, se ha seleccionado implementar un sistema basado en un manipulador paralelo esférico coaxial RRR. La decisión de utilizar este tipo específico de manipulador se basa en criterios cuidadosamente considerados: en primer lugar, su configuración distintiva ofrece una similitud notable con la dinámica de movimiento y la complejidad cinemática inherente a la muñeca humana. Esto permite una imitación precisa de movimientos fundamentales, tales como la flexión, extensión, abducción, aducción, así como las rotaciones características de pronación y supinación, abarcando de este modo los rangos de movimiento naturales de la muñeca. En segundo lugar, este manipulador destaca por su centro de rotación único, que emula de cerca el punto de giro central de la muñeca humana, un aspecto crucial para lograr movimientos auténticos y naturales. Tercero, se reconoce por su excepcional precisión y estabilidad en el control de movimientos, como se documenta en investigaciones previas [35], cualidades indispensables para el funcionamiento óptimo de una prótesis que busca restablecer no solo la movilidad sino también la sensación de normalidad en la vida de los usuarios.

1.3. Justificación

Frente a la lamentable realidad de las personas que han sufrido la amputación de sus extremidades superiores, surge la dificultad de reemplazar la extremidad perdida con un dispositivo que permita un control completo de los movimientos. Según las estadísticas del INEGI, en el año 2010 se registraron aproximadamente 785,000 personas con una o varias extremidades amputadas en México [33]. Aunque en años posteriores el INEGI ha continuado recopilando información sobre discapacidad, no se ha vuelto a reportar de manera específica la categoría de amputaciones en sus censos más recientes, como el de 2020. A nivel global, aproximadamente el 15 % de la población vive con alguna forma de discapacidad, dentro de la cual un 52 % corresponde a individuos que han experimentado la pérdida de una extremidad. De manera notable, las amputaciones de miembros superiores, especialmente el brazo derecho, predominan en este contexto [33].

La implementación de un sistema que permita los movimientos de la muñeca en una prótesis de miembro superior presenta una relevancia crucial al abordar los movimientos compensatorios que son comúnmente observados en usuarios de tales dispositivos. Estos movimientos no solo generan incomodidades y disminuyen la satisfacción al dificultar la realización de tareas cotidianas de manera normal, sino que también conllevan el riesgo de ocasionar problemas músculo esqueléticos a largo plazo, especialmente en la espalda y el hombro [34]. En este contexto, la incorporación de la muñeca actuada con tres grados de libertad se presenta como una solución fundamental para prevenir los movimientos compensatorios, los cuales son originados por la falta de estos grados de libertad y la consiguiente necesidad de compensarlos mediante otros movimientos.

La implementación de movimientos de muñeca se torna esencial al considerar su capacidad para mejorar la naturalidad de los movimientos de la mano, proporcionando así una apariencia más satisfactoria para el usuario. En contraste, las prótesis actuales, como la prótesis biónica i-Limb® Quantum [10] o la prótesis Michelangelo® de Ottobock con su dispositivo Axon-Bus® [11], presentan notables deficiencias en la articulación de la muñeca. Estas prótesis, orientadas manualmente y con una configuración pasiva en la muñeca, no abordan de manera adecuada las necesidades de las personas con amputaciones bilaterales. Este trabajo de investigación propone una solución, ya que una prótesis activa puede ser controlada de manera independiente a través de una activación manual, ofreciendo así una mejora sustancial en la funcionalidad y adaptabilidad para este grupo de usuarios.

El uso del mecanismo paralelo esférico coaxial RRR no solo representa un avance significativo en la funcionalidad de las prótesis de miembro superior, sino que también abre el camino hacia sistemas más avanzados, como la integración de señales mioeléctricas. Al posibilitar la ejecución de movimientos naturales, esenciales para llevar a cabo tareas diarias con eficacia y naturalidad, se optimiza la experiencia del usuario y se abre un nuevo espectro de posibilidades para la mejora continua del diseño y la funcionalidad de las prótesis. Se propone el uso de la teoría de tornillos para el análisis cinemático de orden superior dadas las ventajas que ésta representa para obtener de forma metodológica los estados de velocidad y de aceleración del efecto final de manipuladores paralelos que de otra forma, implican una tediosa y complicada manipulación matemática de las ecuaciones de cerradura de lazo.

1.4. Hipótesis

La muñeca articulada desarrollada mediante el uso del manipulador paralelo esférico coaxial RRR, emulará los movimientos inherentes de la muñeca humana, incluyendo flexión, extensión, abducción, aducción, pronación y supinación, mejorando así las capacidades funcionales de las prótesis.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Desarrollar un prototipo de muñeca robótica utilizando un mecanismo esférico coaxial RRR que sirva como base para manos robóticas.

1.5.2. Objetivos específicos

Para el logro del objetivo general se formulan los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Diseñar un mecanismo paralelo esférico capaz de emular con precisión los movimientos de la muñeca humana, incluyendo flexión, extensión, abducción, aducción y pronación, supinación.
- ✓ Construir un prototipo de muñeca, implementando un mecanismo paralelo esférico para reproducir los movimientos de la muñeca humana.
- ✓ Desarrollar la cinemática directa e inversa mediante ecuaciones de cerradura vectorial, aprovechando la convergencia de ejes de rotación en un punto común para precisar la posición y orientación del extremo del manipulador.
- ✓ Aplicar la teoría de tornillos para realizar un análisis cinemático de velocidad, asegurando la capacidad del manipulador para replicar los movimientos de la muñeca a diferentes velocidades.
- ✓ Validar el análisis cinemático del mecanismo, haciendo una comparativa entre dos conjuntos de resultados: uno obtenido de cálculos numéricos basados en teoría y otro proveniente de la simulación en un modelo gráfico, usando las mismas condiciones de entrada para ambos.
- ✓ Desarrollar una estrategia para minimizar la influencia de las singularidades del manipulador paralelo esférico.
- ✓ Validar los modelos cinemáticos directo e inverso del manipulador a partir de las lecturas experimentales obtenidas del prototipo físico.
- ✓ Documentar de manera integral y detallada el proceso de desarrollo, destacando los desafíos superados y las soluciones implementadas.

1.5.3. Metas

1. Diseñar y construir un prototipo de muñeca esférica basada en un mecanismo paralelo coaxial RRR para el 31 de agosto de 2024.
2. Desarrollar y validar experimentalmente un modelo cinemático de la muñeca esférica, empleando la teoría de tornillos, antes del 30 de febrero de 2025.
3. Preparar y someter un artículo detallando los resultados de la investigación sobre la muñeca esférica y su modelo cinemático para su publicación en un congreso nacional de robótica antes del 31 de junio de 2025.

1.5.4. Delimitación del proyecto

Este proyecto se enfoca en el desarrollo y análisis de un mecanismo destinado a generar los movimientos de la muñeca para un prototipo de prótesis de miembro superior. La investigación abordará el análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador paralelo esférico coaxial, así como el análisis de su velocidad mediante la implementación de la teoría de tornillos. Se llevarán a cabo simulaciones de los análisis cinemáticos mencionados utilizando simuladores matemáticos y modelos CAD como SolidWorks.

Las limitaciones de este trabajo de investigación se centran exclusivamente en el desarrollo del prototipo de la muñeca robótica, excluyendo otras áreas de las prótesis robóticas, como las articulaciones de la mano y de los dedos.

Es importante destacar que las pruebas se realizarán en condiciones controladas en lugar de condiciones reales. Asimismo, no se impondrá una limitación en cuanto al tamaño del prototipo, y no se garantizará su funcionalidad en personas con amputaciones de miembro superior.

Además, se aclara que no se garantiza la implementación de técnicas especializadas de control, aunque se explorarán algunas técnicas de control inteligente siempre que sea factible.

Una de las limitaciones más significativas en la implementación de una muñeca robótica, es el tipo y nivel de amputación del usuario. En este trabajo, se ha identificado la amputación proximal transradial como el nivel de amputación óptimo para la integración del mecanismo propuesto. La amputación proximal transradial se caracteriza por la remoción del antebrazo a una altura cercana al codo, dejando una longitud residual del antebrazo que varía de 2/3 a 1/3 de la longitud original. Esta especificación en el nivel de amputación es crucial, ya que proporciona el espacio necesario para acomodar los componentes mecánicos y electrónicos esenciales para el funcionamiento de la muñeca robótica.

Otro aspecto a considerar es la omisión de la batería en el diseño del prototipo, una decisión tomada por las restricciones de espacio disponibles. La investigación se centra, por ende, en evaluar la viabilidad y funcionalidad del manipulador paralelo esférico coaxial RRR como mecanismo de muñeca robótica.

1.6. Metodología de desarrollo

La metodología que guiará esta investigación se fundamenta en la reconocida "Metodología de Diseño Mecatrónico de Robots" [36]. Este enfoque ofrece un marco estructurado que facilita la consecución de los objetivos propuestos. Las fases de esta metodología se detallan a continuación y se visualizan de manera esquemática en la Figura 1.13:

- **Identificación de la necesidad.** Se llevará a cabo una exhaustiva revisión de trabajos previos y estudios relacionados tanto en el ámbito de prótesis como en el de manos robóticas. El enfoque se centrará en aquellos que hayan implementado, ya sea de manera parcial o completa, la funcionalidad de la muñeca robótica. Además, se realizará un análisis detallado de las limitaciones y desafíos actuales presentes en las muñecas articuladas para manos robóticas.

Para obtener una comprensión completa de las demandas prácticas y las expectativas de los usuarios finales, se llevarán a cabo consultas con expertos en los campos de la robótica y las prótesis. Esta interacción directa con profesionales permitirá una identificación precisa de las necesidades prácticas y ayudará a definir los objetivos de diseño de la muñeca articulada.

- **Diseño conceptual y especificaciones funcionales.** Con la comprensión de la necesidad establecida, se detallarán las especificaciones funcionales, enfocándose en los criterios obtenidos de la fase 1. Para ello, se definirán los intervalos y tipos de movimiento del mecanismo, así como las velocidades y rangos de posición del dispositivo a desarrollar. De igual forma, se deberá tener una aproximación de la estructura final.
- **Modelo matemático.** Para llevar a cabo esta fase de la metodología, se identificarán las variables clave que afectan el rendimiento de la muñeca articulada, tales como ángulos de articulación, fuerzas y velocidades. Asimismo, se emplearán principios físicos y mecánicos que derivarán ecuaciones fundamentales que describen el movimiento y la interacción de las articulaciones formadas por el mecanismo, considerando elementos como la cinemática del mecanismo.
- **Modelo y diseño estructural con sistema CAD y CAE.** En esta fase, se empleará un software CAD para crear el modelo tridimensional del mecanismo, incluyendo todas las partes y componentes que lo integran, asegurando la relación adecuada para generar los movimientos requeridos por el sistema. Una vez obtenido el modelo CAD con todas las consideraciones de las fases anteriores, se realizarán las simulaciones correspondientes de movimiento para verificar el funcionamiento del mecanismo. Además, se especificarán los materiales a utilizar y se llevará a cabo un análisis para evaluar la resistencia, deformación y otros comportamientos bajo diferentes condiciones.
- **Selección de actuadores y sensores.** En la implementación de esta fase, se consideran todos los requisitos del sistema, así como las especificaciones fundamentales para comprender las demandas específicas tanto de los actuadores como de los sensores. Un factor clave que influirá en esta selección son los rangos de movimiento, velocidad y fuerza que el sistema necesita proporcionar. Otro punto específico en esta fase es evaluar los

requisitos energéticos de todos los componentes electrónicos implementados en el prototipo. De igual forma, se asegurará la compatibilidad entre los diferentes dispositivos electrónicos y se adecuarán las señales para lograr un acople efectivo entre ellos.

- **Ampliación del modelo matemático.** Se identificarán las variables que puedan afectar el rendimiento de la muñeca articulada para establecer un punto de partida ante posibles variaciones en el prototipo físico. El objetivo es evitar cualquier condición que limite el funcionamiento del sistema, generando un modelo robusto que pueda hacer frente a diversas situaciones. Esta ampliación del modelo proporcionará pautas ante posibles optimizaciones futuras.
- **Diseño de estrategia de control.** En este punto, se implementará una estrategia de control considerando la precisión requerida para el sistema. Se evaluará la viabilidad de utilizar algún tipo de control inteligente.
- **Optimización del diseño.** En este punto, se llevará a cabo un análisis detallado del diseño para identificar áreas que puedan beneficiarse de mejoras, ya sea en términos de peso, tamaño, consumo de energía o rendimiento en general. Se evaluarán alternativas entre los diferentes componentes que conformarán el prototipo.
- **Simulación virtual.** Para esta fase, se hará uso de un software de modelado tridimensional que permita realizar simulaciones que reflejen fielmente la geometría y dinámica del diseño real. De ser posible, se definirán escenarios de simulación que representen situaciones típicas de la muñeca articulada, permitiendo así analizar la robustez del diseño y evaluar la capacidad del prototipo para llevar a cabo tareas específicas.
- **Simulación real.** En esta etapa, el prototipo físico deberá estar construido, sobre el cual se llevarán a cabo pruebas físicas y experimentos en un entorno controlado para validar y refinar aún más el diseño del prototipo. Se enfatiza que toda la instrumentación electrónica y de recopilación de datos deberá ser implementada y verificada para garantizar que los sensores proporcionen información detallada. Durante esta fase, se realizarán pruebas para evaluar la capacidad de la muñeca articulada, llevando a cabo movimientos de precisión, verificando el seguimiento de trayectoria y coordinación de los movimientos, así como pruebas de carga y resistencia que permitirán realizar mejoras continuas en el prototipo.
- **Optimización de funcionamiento.** En esta etapa, se revisarán detalladamente los datos recopilados durante las pruebas físicas y simulaciones, identificando áreas específicas que puedan beneficiarse de mejoras en términos de rendimiento y eficiencia. Se buscará refinar y optimizar los algoritmos implementados para la realización de los movimientos. Además, se tomará en cuenta la retroalimentación de expertos en la materia.

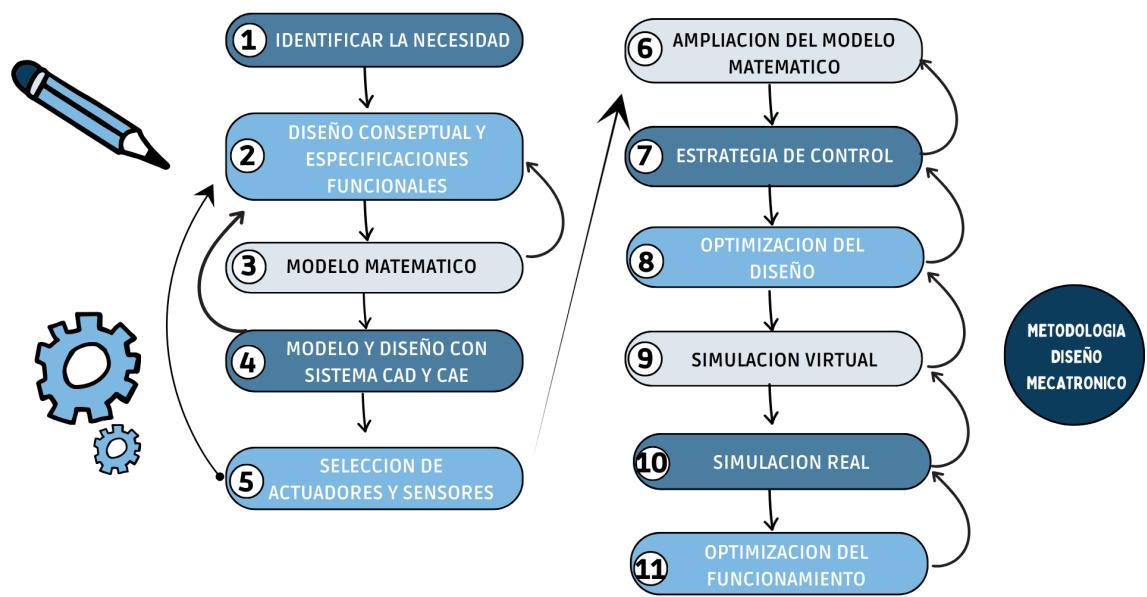


Figura 1.13: Metodología de diseño mecatrónico. Fuente: Creación propia.

Capítulo 2

Marco Teórico

Para el desarrollo del mecanismo resulta necesario analizar la anatomía de la muñeca para que se puedan comprender los movimientos realizados y la forma en que se realizan. Para ello, en esta sección se muestran los conceptos teóricos básicos que comprenden al área donde se generan los movimientos de la muñeca. Además, se muestran algunos conceptos básicos sobre mecanismos y electrónica que serán útiles a lo largo del desarrollo del documento. Posteriormente, se hace un recuento de los mecanismos que cumplen con los movimientos de muñeca para finalmente mostrar algunos conceptos sobre el mecanismo paralelo esférico.

2.1. Muñeca y su anatomía

La muñeca es el área anatómica que establece la correcta unión entre el antebrazo y la mano [37] por medio de diversos componentes como huesos y ligamentos y que cumple con la función de posicionar la mano en el espacio, permitiendo agarrar cualquier objeto de una manera más fácil y sencilla. Con ello, la muñeca cumple con su función de posicionar a la mano con respecto a la posición en que se encuentre el hombro y el codo. La muñeca se encuentra formada por tres grupos articulares [38] (radiocarpiano, mediocarpiano y radiocubital) y tres planos de movilidad (flexión – extensión, inclinación radial y cubital, y rotación) que le permiten moverse como si fuera una rótula entre la mano y el antebrazo, de esta forma le es posible posicionar a la mano en la ubicación óptima para realizar cualquier labor como tomar un objeto o realizar una tarea tan simple como mover el ratón de una computadora. Estos movimientos se llevan a cabo por medio de numerosas y pequeñas articulaciones que permiten combinar los movimientos de flexión- extensión, inclinación lateral y rotación, así como darle la capacidad a la muñeca de mostrar flexibilidad o garantizar la estabilidad de la mano con la fuerza necesaria para realizar tareas tales como el movimiento de pronosupinación con un desatornillador.

2.1.1. Huesos que conforman a la muñeca

La estructura ósea que conforma a la muñeca está formada por una diversa cantidad de huesos que le permiten crear una especie de armadura y sostén para los elementos más blandos,

así también esta estructura le permite dar una estabilidad a todo el complejo articular. Estos huesos se encuentran divididos en dos pequeños grupos denominados como fila proximal y fila distal (véase la Figura 2.1).

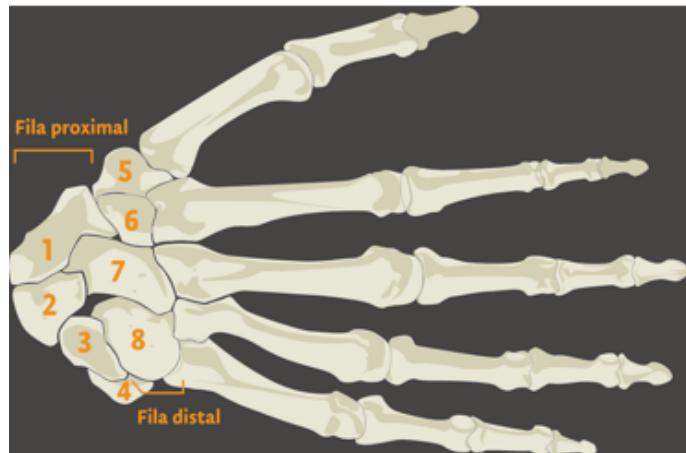


Figura 2.1: Filas de huesos que conforman a la articulación de la muñeca [39].

Fila proximal

La fila proximal está formada por los huesos escafoides(1), semilunar(2), piramidal(3) y pisiforme(4) (véase la Figura 2.2) [40]. La fila proximal se encuentra situada más cerca del antebrazo.

- El **hueso escafoides** forma parte del grupo de huesos carpianos de la muñeca que se encargan de darle movilidad y estabilidad a la articulación de la muñeca. Este hueso se encuentra ubicado a un costado del pulgar.
- El **hueso semilunar** se encuentra en el centro de la muñeca y su trabajo es darle el movimiento adecuado y el soporte a la articulación cuando la muñeca se encuentre en movimiento.
- El **hueso piramidal** es un hueso con forma esponjosa y piramidal que presenta 4 carillas articulares (una carilla superior, una carilla inferior y una carilla anterointerna) y 2 no articulares [41].
- El **hueso pisiforme** es un hueso pequeño con forma irregular y que forma relación con el hueso piramidal, la arteria cubital y algunos músculos para que la muñeca pueda realizar sus movimientos[42].

Fila distal

La fila distal se encuentra formada por los huesos trapecio(5), trapezoide(6), hueso grande(7) y hueso ganchoso(8) (véase la Figura 2.2)[40]. Esta fila distal se encuentra más alejada del antebrazo en comparación de la fila proximal, y se encuentra más cercana a la articulación de la mano.

- El **hueso trapecio** se encuentra articulado distalmente con el primer metacarpiano y proximalmente con el hueso escafoideas [43]. Además, está articulado con el hueso trapezoide y el segundo metacarpiano.
- El **hueso trapezoide** es un hueso pequeño encontrado a un costado del hueso trapecio y del hueso grande [44]. El hueso trapezoide está formado por 4 caras rugosas con la finalidad de permitir la correcta unión entre él y otros huesos carpianos.
- El **hueso grande** es el hueso más voluminoso de todos los huesos que conforman el carpo[45] y se encuentra formado por porciones superior, inferior y media, de las cuales la porción superior es la parte más redondeada, la parte inferior corresponde a la parte más voluminosa y finalmente la parte media hace referencia a la parte más estrecha del hueso.
- El **hueso ganchoso** es el último hueso de la segunda fila del carpo. Este hueso posee una forma ósea más ancha en la parte inferior que la parte superior[45] y se relaciona con el hueso piramidal, el hueso grande, el semilunar y los dos últimos huesos metacarpianos.

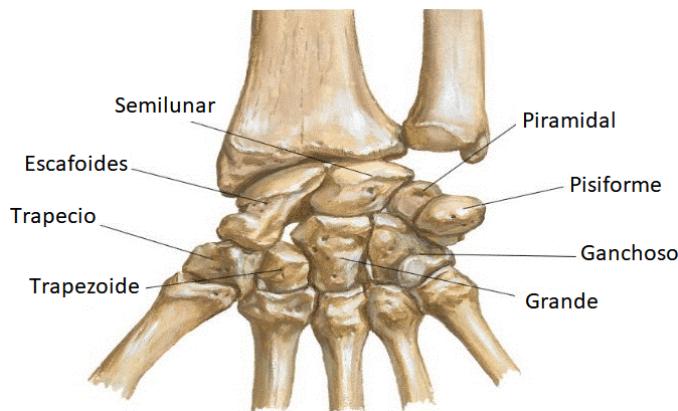


Figura 2.2: Huesos que conforman la muñeca [46].

Los huesos que conforman a los huesos del carpo se encuentran unidos por medio de los huesos radio y cúbito (véase la Figura 2.3), los cuales están diseñados para permitir los movimientos de supinación y pronación con ayuda de los músculos y ligamentos del antebrazo. Así mismo, estos huesos le dan soporte a la mano y son considerados esenciales para los movimientos funcionales de la mano.

- El **hueso cúbito** es un elemento óseo comúnmente conocido como ulna, este hueso se encuentra a un costado del radio y es el encargado de que la muñeca se curve hacia un costado, acercando el dedo meñique hacia el antebrazo.
- El **radio** es el hueso más grande del antebrazo, y es el encargado de darle el movimiento y la rigidez a la muñeca. El radio se encuentra a un costado del hueso cúbito para permitirle a la muñeca los movimientos de supinación y de pronación con ayuda de las articulaciones de la extremidad superior.

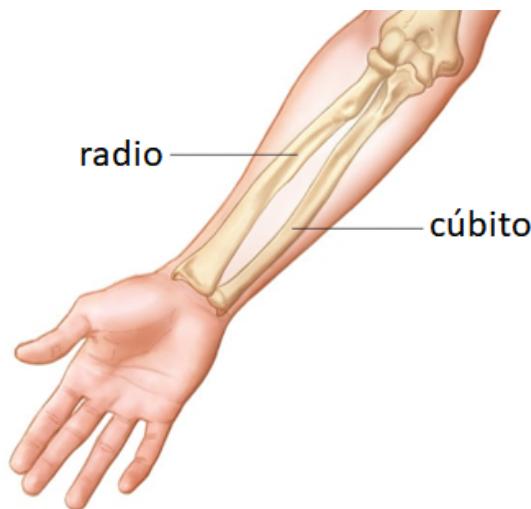


Figura 2.3: Huesos radio y cubito [47].

2.1.2. Articulaciones que conforman la muñeca

La articulación de la muñeca es una de las más complejas del sistema músculo esquelético [48] debido a su gran cantidad de estructuras óseas, musculares, tendinosas y ligamentosas de las cuales se encuentra formada. Su área anatómica incluye extremidades metaepifisarias distales de los huesos radio y cúbito, las dos hileras de hueso del carpo y las bases de los huesos metacarpianos [37]. Además, se encuentra formada por 2 articulaciones principales [49], la articulación radiocarpiana y la mediocarpiana (véase la Figura 2.4) que trabajan de forma conjunta para brindar una gran variedad de movimientos a la mano por medio de los movimientos de flexión, extensión, inclinación cubital o aducción e inclinación radial o abducción [48].

Articulación radiocarpiana

La articulación radiocarpiana es conocida como articulación de la muñeca, la cual es una articulación sinovial [50] formada por el radio, un disco articular y tres huesos carpianos (escafoides, semilunar y piramidal). Esta articulación se da entre una porción proximal formada por el ligamento triangular y la glenoide del radio. La articulación radiocarpiana es un elemento fundamental en la estructura de la extremidad superior y se encuentra ubicada entre la distal del radio y tres de los huesos carpianos proximales, que se encuentran unidos entre sí por los ligamentos escafolunar y piramidolunar, con lo cual es posible tener movilidad en la muñeca y al mismo tiempo mantener en su lugar a la mano por medio de los ligamentos interóseos.

Articulación Mediocarpiana

La articulación mediocarpiana se encuentra entre los huesos de la primera y segunda fila del carpo, los cuales se encuentran unidos por medio de artrodias y dos membranas interóseas con la finalidad de mejorar su movilidad [37]. La articulación mediocarpiana está dividida en superficie articular superior e inferior. La superficie articular superior está formada por la cara inferior del escafoides, semilunar y piramidal [49], mientras que la superficie articular inferior está formada por la cara superior del trapecio, trapecioide, hueso grande y hueso ganchoso [49].

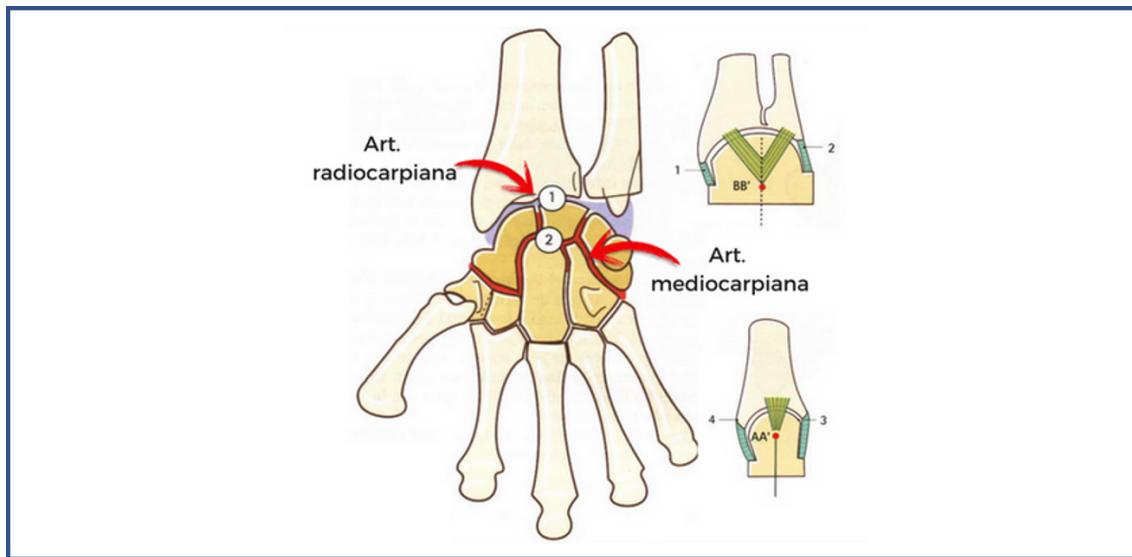


Figura 2.4: Articulaciones de la muñeca [51].

2.1.3. Ligamentos de la muñeca

Para comprender los aspectos biomecánicos de la muñeca, además del conjunto de huesos y articulaciones, debe tenerse en cuenta la estructura de ligamentos que los forman [37]. Para ello, es importante conocer que la muñeca está formada por dos conjuntos de ligamentos (véase la Figura 2.5), los ligamentos extrínsecos dorsales y palmares, los cuales son ligamentos con gran fuerza, que se encargan de unir los huesos del antebrazo (radio y cúbito) con el carpo; y los ligamentos intrínsecos, los cuales a diferencia de los ligamentos extrínsecos son ligamentos con menor fuerza, que se encargan de relacionar cada uno de los huesos del carpo entre sí.

- Los *ligamentos extrínsecos* son los ligamentos que unen los huesos del carpo con la extremidad distal del radio y el cúbito, pueden dividirse en volares y dorsales y favorecen de manera significativa la estabilidad de la muñeca [37]. Los ligamentos extrínsecos están compuestos por el ligamento intercarpiano dorsal y el ligamento radiocarpiano dorsal.
- Los *ligamentos intrínsecos* se encargan de limitar la movilidad y estabilizar la base de la mano [37]. Estos ligamentos unen los diferentes huesos del carpo y tienen forma de “U” con un componente dorsal, un componente volar y una porción central fibrocartilaginosa.

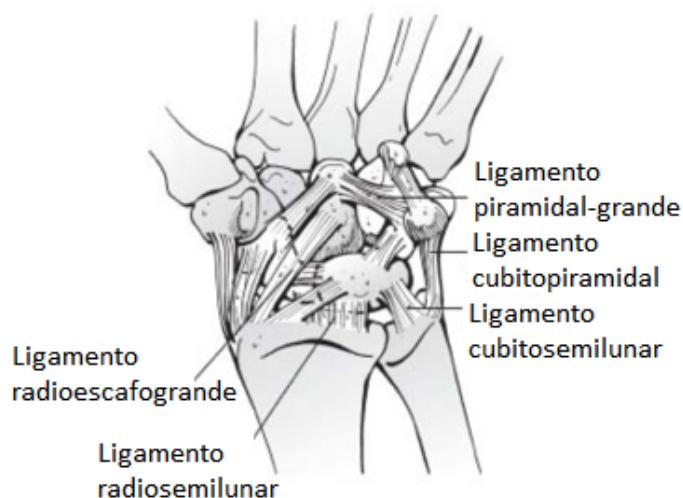


Figura 2.5: Ligamentos de la muñeca [37].

2.1.4. Tipos de movimientos de la muñeca

El complejo articular de la muñeca es visto de alguna manera como elementos biomecánicos que permiten estudiar sus movilidades, como organismos biológicos que comprende a los segmentos óseos como palancas, las articulaciones como punto de apoyo y los músculos como fuerzas de potencias [37]. El movimiento articular de la muñeca es provisto por el conjunto de huesos, articulaciones y músculos que la conforman, los cuales son la razón por la cual la muñeca puede generar distintos tipos de movimientos complejos (véase la Figura 2.6) que permiten posicionar a la mano en diferentes planos del espacio. Dicha movilidad es categorizada como movimientos de flexo-extensión, adducción-abducción y prono-supinación (comúnmente conocido como rotación axial).

Movimientos de flexión-Extensión

El movimiento de flexión de la muñeca es la inclinación de la palma de la mano hacia la cara anterior del antebrazo [37], el cual se da cuando los ligamentos de la articulación mediocarpiana se activan y provocan el movimiento en uno de los huesos de la muñeca llamado escafoides. Este movimiento varía en cada persona entre unos 70° y 90° , a partir de la posición neutra. El movimiento de extensión en la muñeca es el movimiento de aproximación de la cara dorsal de la mano hacia el dorso del antebrazo. Este movimiento es ocasionado fundamentalmente por la articulación radial externo y cubital posterior, las cuales le permiten tener un rango de movilidad de aproximadamente 68° a 85° .

Movimientos de abducción - aducción

El movimiento de abducción es la inclinación radial de la muñeca [37], este movimiento tiene un rango de movilidad de entre 15° y 25° cuando la muñeca se encuentra en el estado de supinación (tomando como referencia al radio), este movimiento se genera a partir de la segunda hilera del sistema de huesos del carpo, el cual se mueve aproximándose hacia el radio, mientras que la primera hilera se desplaza hacia el cubital.

El movimiento de aducción o también conocido como inclinación cubital es el movimiento

que genera que la mano se desplace hacia fuera, tomando como punto de referencia al cúbito [52]. Este movimiento tiene un rango aproximado de 60° .

Movimientos de prono-supinación

El movimiento de prono-supinación es el conocido movimiento de rotación del antebrazo, un movimiento que permite rotar a la mano en un eje imaginario creado en línea vertical del antebrazo. Este movimiento representa una herramienta esencial para el desarrollo de las diferentes actividades de los seres humanos [53] y es causado gracias a un músculo ejecutor llamado pronador redondo que se encuentra insertado en la zona media del radio y en la parte final del húmero (hueso encontrado en el brazo), que al contraerse provoca que el radio gire alrededor del cúbito, provocando así el movimiento de rotación de la extremidad superior.

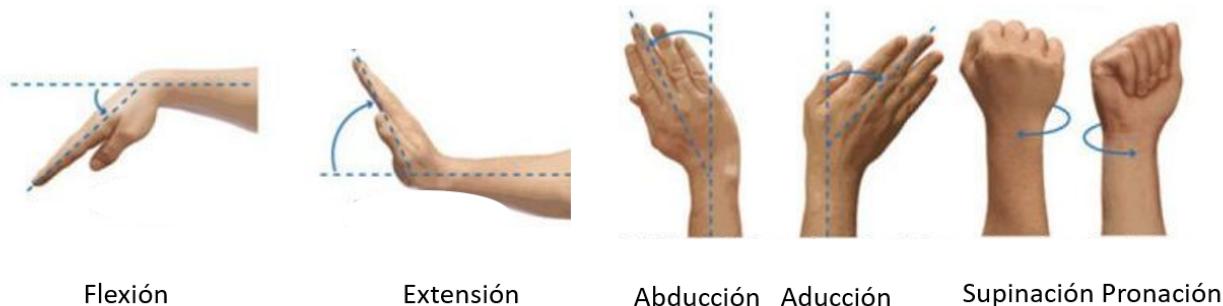


Figura 2.6: Movimientos en la muñeca [37].

2.1.5. Rangos de movimiento de la muñeca

Los rangos de movimiento de la muñeca son medidos a partir la posición neutra o anatómica [49], la cual es la posición en la que la mano se encuentra totalmente extendida con la palma hacia adelante. Para el movimiento de abducción, se tiene un rango de movilidad de 15° , mientras que para el movimiento de aducción el rango de movimiento es de 45° medidos desde la línea imaginaria que une el centro de la muñeca con la posición del dedo medio [49].

El rango del movimiento de flexo-extensión es medido a partir de la posición anatómica (la cual es cuando la muñeca se encuentra alineada, teniendo la cara dorsal de la mano alineada con la cara posterior del antebrazo). El rango de movilidad flexo-extensora de la muñeca es de 85° .

Finalmente en la Tabla 2.1, se proporciona una descripción detallada de los rangos de movilidad en la muñeca.

Tabla 2.1: Rangos de movilidad en la muñeca. Fuente: Creación propia.

	<i>Extensión</i>	<i>Flexión</i>	<i>aducción</i>	<i>abducción</i>	<i>Pronación</i>	<i>Supinación</i>
<i>Movilidad de la muñeca</i>	64° ($42-80^\circ$)	75° ($52^\circ-93^\circ$)	33° ($20^\circ - 55^\circ$)	$15^\circ - 20^\circ$	$50^\circ - 80^\circ$	$80^\circ - 90^\circ$

2.2. Conceptos de ingeniería

En el área de la ingeniería existen múltiples conceptos que son necesarios conocer para entender de mejor manera la forma en que se desarrollan las cosas. A continuación, se muestran algunos de los conceptos más importantes en esta área.

2.2.1. Máquina

Una máquina es una combinación de cuerpos rígidos [54] diseñada para realizar trabajo útil mediante una secuencia específica de movimientos. Dichos artefactos están formados por una diversidad de componentes, entre los que destacan elementos estructurales, dispositivos eléctricos, fuentes de energía y circuitos electrónicos. Además, están equipadas con sistemas mecánicos que les otorgan la capacidad de llevar a cabo las funciones para las que fueron diseñadas. Estos sistemas se estructuran a través de eslabones, pares giratorios y pares esféricos, facilitando así la realización de movimientos precisos y controlados.

Eslabones

Los eslabones son componentes rígidos que permiten la transmisión de fuerzas y movimientos en función de su forma y su estructura de la cual se encuentren diseñados. Estos elementos, al interconectarse, permiten construir una cadena cinemática para desarrollar una trayectoria definida.

Par cinemático

Un par cinemático es un enlace entre dos elementos de un mecanismo [54], que es causado por el contacto entre ellos. Estas uniones pueden estar construidas por dos o más elementos enlazados entre sí por medio de juntas o revolutas. Existen diversos tipos de estas, las cuales se encuentran clasificadas por el tipo de contacto entre elementos, ya sea puntual, lineal o superficial. Algunos de los más utilizados son: el par de revolución y el par esférico.

- El **par de revolución o articulación** permite la rotación de un elemento respecto de otro (elemento al cual se encuentre enlazado) alrededor de un eje común [54]. Para obtener un par de revolución, los elementos que lo conforman deben de estar unidos entre sí por medio de pivotes, muñones o espigas que le permitan tener una rotación libre alrededor del eje común.
- El **par esférico** está formado por la superficie de contactos esféricos, que le permiten tener la rotación de un elemento respecto de un punto de rotación, comúnmente llamado centro de rotación. Este par está constituido por 3 grados de libertad, los cuales le permiten tener la rotación esférica.

Cadena cinemática

Una cadena cinemática es un conjunto de elementos de un mecanismo que se encuentran enlazados entre sí. Una cadena cinemática puede ser cerrada o abierta.

- Una **cadena cinemática cerrada** es tal cadena donde los enlaces de los elementos se encuentran relacionados únicamente con dos miembros de la misma cadena.

- Una **cadena cinemática abierta** es una cadena cinemática que tiene mínimo un elemento que no se encuentra relacionado con dos miembros de la misma cadena.

Una vez que se ha definido una cadena cinemática, es posible mencionar que, para que una cadena cinemática sea convertida en un mecanismo, es necesario que un eslabón se encuentre fijo [54].

2.2.2. Transmisión de potencia

La transmisión de potencia puede darse mediante diferentes sistemas, algunos de los cuales son sistemas flexibles y algunos son sistemas rígidos. Otros transmiten su potencia a través del contacto directo entre sus elementos y son utilizados en un sinnúmero de maquinarias. Es por ello que el conocimiento sobre estos elementos es de gran utilidad para llevar a cabo cualquier movimiento en un mecanismo.

En la actualidad existen diversos sistemas de transmisión de potencia, entre los cuales se encuentran los engranajes, siendo estos unos de los más utilizados en diversas aplicaciones. Así mismo existen otros sistemas de transmisión de potencia como lo son las bandas transmisoras. A continuación, se explican la forma de funcionamiento de los sistemas de transmisión de potencia más comúnmente utilizados en aplicaciones prácticas.

Engranajes

Un engrane es un sistema de transmisión de potencia de interacción directa [55], es decir, que permite la transmisión de fuerza y movimiento rotativo gracias a la unión entre dos elementos. Esta transmisión se logra cuando las ruedas se entrelazan armónicamente gracias a configuraciones precisas en sus bordes. Las piezas se diferencian por el diseño de estas configuraciones, incluyendo variantes como los engranajes helicoidales, rectos (internos y externos), cónicos con configuraciones rectas, e inglete, entre otros.

Uno de los tipos más comunes es el recto, son particularmente valorados por su simplicidad y eficacia, ya que evitan la generación de empuje axial, simplificando así su integración y uso en diversas aplicaciones. Este modelo está compuesto por varias partes esenciales: tabique, corona, cubo, brazos, diente, cabeza, cara, flanco, fondo, circunferencia exterior, circunferencia interior, circunferencia primitiva, espesor de diente, anchura de hueco, paso circular, altura de la cabeza del diente, altura del pie del diente, altura del diente, número de dientes, módulo y ángulo de presión (véase las Figuras 2.7 y 2.11).

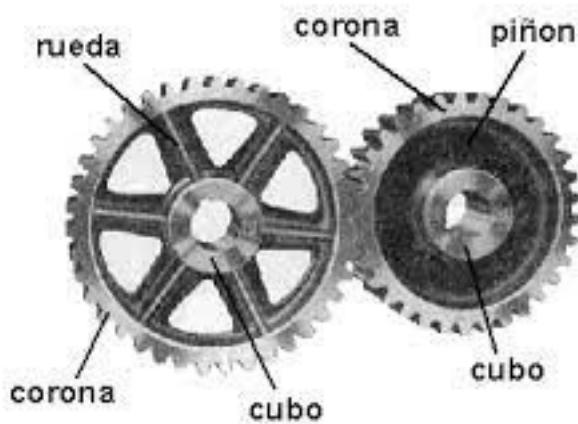


Figura 2.7: Partes de un engrane [56].

- **Circunferencia Exterior o de cabeza (Ce)**, es la circunferencia que limita la cabeza de los dientes [55].
- **Circunferencia primitiva (Cp)**, es la circunferencia localizada entre la circunferencia interior y exterior [55], siendo esta la circunferencia de contacto entre un par de engranajes.
- **Circunferencia Interior (Ci)**, es la circunferencia comúnmente conocida como pie o raíz [55] de los dientes.
- **Diámetro exterior (De)**, es el diámetro de la circunferencia exterior (véase la Figura 2.8) [55].
- **Diámetro primitivo (Dp)**, es el diámetro de la circunferencia primitiva (véase la Figura 2.8) [55].
- **Diámetro interior (Di)**, es el diámetro de la circunferencia interior (véase la Figura 2.8) [55].

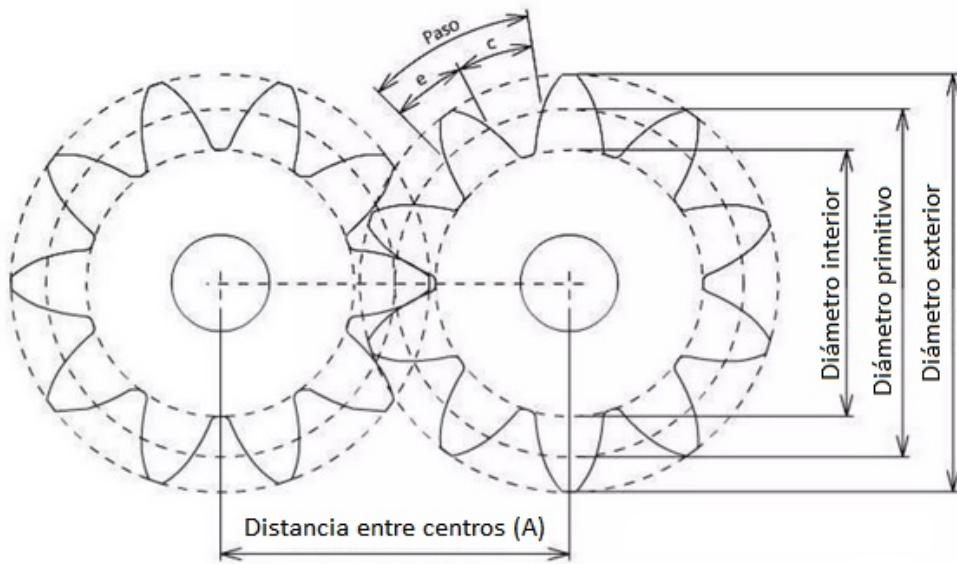


Figura 2.8: Circunferencia y diámetros de un engranaje [57].

- **Espesor del diente (E)**, es la longitud del arco de la circunferencia primitiva [55] comprendida entre sus perfiles laterales (véase la Figura 2.9).

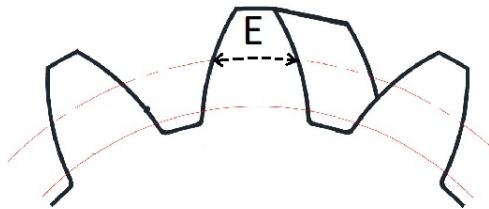


Figura 2.9: Representación del espesor del diente de un engranaje. Fuente: Creación propia.

- **Paso del engranaje (P)**, es la longitud entre los ejes de dos dientes consecutivos (véase la Figura 2.10) [55] medida sobre la circunferencia primitiva y que permiten el correcto acoplamiento entre dos engranes del mismo paso diametral.

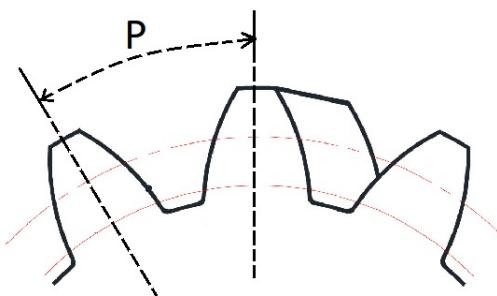


Figura 2.10: Representación del paso diametral de un engranaje. Fuente: Creación propia.

- **Módulo de engranaje (M)**, es un término utilizado en el sistema métrico para calcular las dimensiones de un engranaje [55] y que tiene una relación entre la longitud entre los ejes de dos dientes consecutivos (Paso diametral).
- **Distancia entre centros (L)**, es la distancia entre el eje de un engranaje y otro acoplado al mismo. Este parámetro sirve para conocer la distancia que debe existir entre el centro de cada engranaje para lograr un buen acoplamiento.
- **Número de dientes (Z)**, es el número total de los dientes en un engranaje.

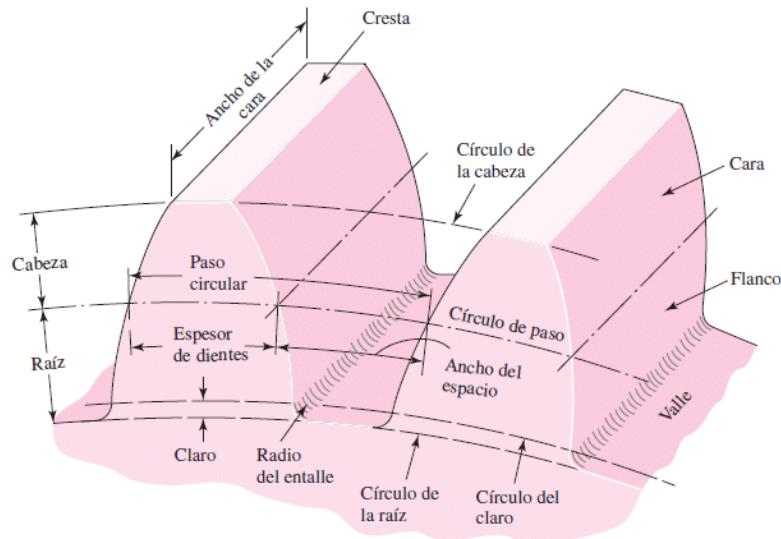


Figura 2.11: Representación del espesor del diente de un engranaje [58].

2.3. Mecanismos manipuladores paralelos

Los mecanismos manipuladores paralelos están compuestos por diversos elementos que confieren movilidad a lo que se conoce como plataforma móvil o, en algunos casos, como plataforma Gough-Stewart [59]. Las partes responsables de proporcionar movilidad a la plataforma varían según la clasificación del mecanismo. Asimismo, este tipo de mecanismos varía en el número de grados de libertad, lo cual está directamente relacionado con la configuración específica del mecanismo.

Dentro de los manipuladores paralelos con menos de seis grados de libertad, se encuentran los denominados manipuladores paralelos esféricos [59]. Este tipo de mecanismo se caracteriza por su capacidad para experimentar movimientos de rotación alrededor de un punto fijo en la plataforma móvil. Esto implica que la plataforma móvil puede mover las demás partes de la plataforma a través de esferas concéntricas en el punto fijo. Los manipuladores paralelos esféricos encuentran aplicaciones en diversas áreas, destacando la orientación de antenas de radar, telescopios y simuladores de vuelo.

Los manipuladores paralelos esféricos se clasifican según el tipo de configuración que se asigna a sus enlaces conectores. Un ejemplo de esta clasificación es el manipulador paralelo esférico coaxial, que se distingue por tener los tres ejes de rotación inferiores coincidentes. Esta configuración presenta varias ventajas, siendo notable su capacidad para rotar libre e ilimitadamente a lo largo del eje z. Esto implica que la plataforma móvil puede realizar rotaciones a lo largo del vector normal a la plataforma fija sin restricciones.

En el contexto de este trabajo, los manipuladores paralelos esféricos surgen como una opción prometedora para explorar como prototipos de prótesis en sustitución de la muñeca de la mano humana. Esto se debe a la versatilidad de movimientos que pueden experimentar este tipo de mecanismos.

2.3.1. Manipuladores paralelos esféricos.

Un manipulador paralelo esférico (SPM) posibilita la obtención de 3 grados de libertad y comúnmente se clasifican como mecanismos de tipo 3-RRR, donde R denota una articulación giratoria y la letra subrayada indica la junta accionada [60]. Entre los manipuladores paralelos esféricos, destaca el “Agile Eye” (ver Figura 2.12), reconocido por su aplicación principal en la orientación rápida de una cámara [35]. La arquitectura de este manipulador esférico permite alcanzar altas velocidades y aceleraciones, destacándose por su eficiencia en esta tarea específica.

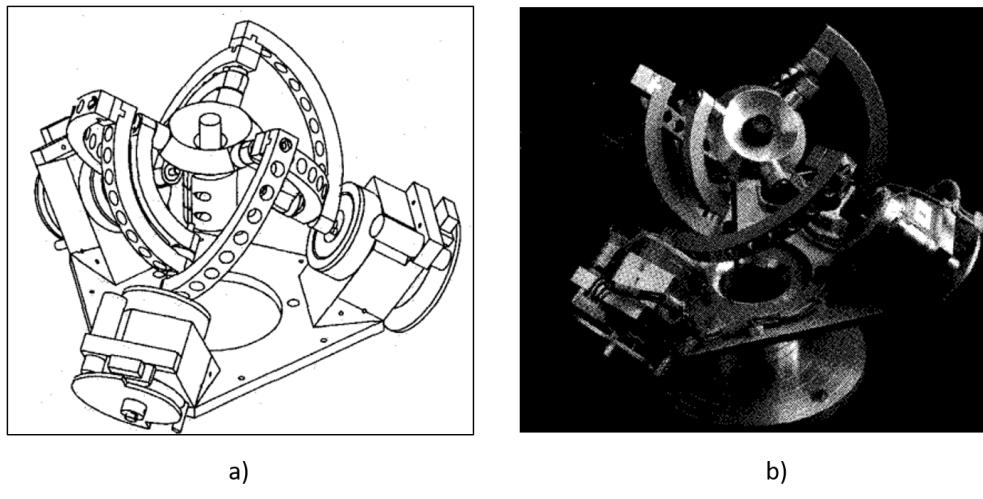


Figura 2.12: a) Diseño completo del agile eye, b) Prototipo completo del agile eye [35].

Además, un manipulador paralelo esférico se caracteriza por estar parametrizado a través de ángulos, los cuales describen tanto la arquitectura del mecanismo como sus dimensiones constructivas. Estos parámetros son fundamentales para comprender el funcionamiento del manipulador a través de su cinemática. Por ende, este trabajo incorpora a continuación una descripción detallada de la representación y construcción de los manipuladores paralelos esféricos.

Representación gráfica de un manipulador paralelo esférico.

Un manipulador paralelo esférico se encuentra formado por diversos componentes, entre los cuales se encuentra la plataforma móvil, la plataforma fija, los enlaces proximales y los enlaces distales (véase la Figura 2.13).

- La **plataforma móvil** es la plataforma que recibe todo el movimiento de los enlaces y por consecuencia provoca su movimiento esférico alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación [61].
- La **plataforma fija** es la plataforma compuesta por las juntas inferiores de los enlaces proximales. Esta plataforma suele no ser físicamente implementada, sin embargo, sirve como referencia de orientación de la plataforma móvil.
- Los **enlaces proximales** son elementos que unen la plataforma móvil, con los enlaces distales, y son los que permiten la movilidad de forma esférica alrededor del centro de rotación.
- Los **enlaces distales** son los elementos actuados que le proveen del movimiento al mecanismo, estos enlaces se encuentran en la parte inferior del manipulador y comúnmente puede ser conocido como la entrada del mecanismo, ya que es la parte del mecanismo que se encuentra con mayor contacto de la potencia del actuador.

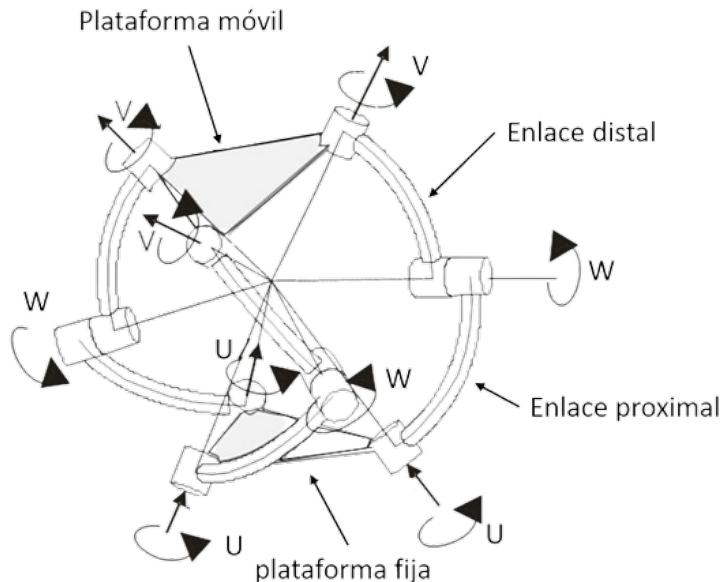


Figura 2.13: Elementos del manipulador paralelo esférico [62].

Una vez que se han definido las partes que conforman al mecanismo, es importante conocer los parámetros que definen su movimiento, para ello debe tomarse en cuenta que el manipulador paralelo esférico se encuentra representado por una serie de ángulos y vectores que caracterizan el tipo de mecanismo, así como la construcción de sus enlaces que lo conforman. Los vectores de orientación corresponden a los vectores unitarios nombrados como \mathbf{u}_i ,

\mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i , para $i = 1, 2, 3$. Estos vectores se encuentran localizados en los ejes de rotación de cada uno de los enlaces que forman el mecanismo (véase el inciso a) de la Figura 2.14 tomada de [61]), donde el vector \mathbf{u}_i es el vector correspondiente al eje de rotación del enlace proximal (enlace inferior), el vector \mathbf{w}_i es el vector correspondiente al eje de rotación formado en la unión del enlace proximal con el enlace distal y el vector \mathbf{v}_i es el vector correspondiente al eje de rotación del enlace distal (enlace superior).

Por otro lado, existen ángulos que son propios del tipo de mecanismo, los cuales son, γ y β . El ángulo γ representa el ángulo formado entre el vector normal de la plataforma fija y el vector \mathbf{u}_1 . Cabe mencionar que en ocasiones este ángulo puede llegar a $\gamma = 0^\circ$, lo cual representa la configuración coaxial como se muestra en el inciso b) de la Figura 2.14 tomada de [61].

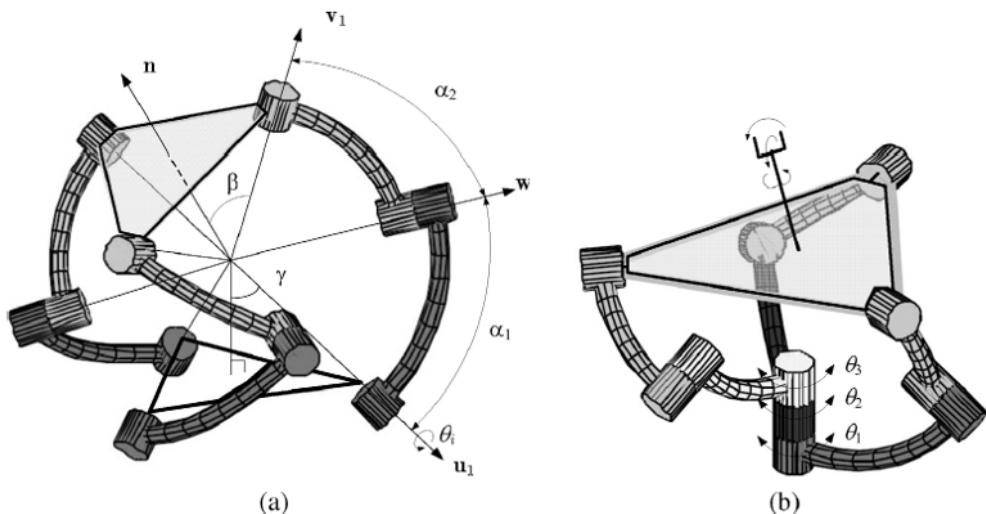


Figura 2.14: Modelo cinemático de un manipulador paralelo esférico: a) modelo general, b) caso $\gamma = 0^\circ$ [61].

Como se ha observado, un manipulador paralelo esférico está compuesto de diversos elementos, los cuales están formados por parámetros que caracterizan el mecanismo y su funcionamiento. Además, como se ha mencionado, existe un tipo de manipulador, clasificado como manipulador paralelo esférico coaxial, el cual es de interés en este trabajo debido a las cualidades que presenta.

Un **manipulador paralelo esférico coaxial** está formado por tres miembros idénticos, cada uno formando una cadena esférica abierta de cuatro eslabones [63], los cuales comparten una base común (base fija) y una plataforma móvil común. Además, al igual que todos los manipuladores paralelos esféricos, todos sus ejes de articulación se cruzan en un punto común, llamado centro de rotación. Se establece un sistema de coordenadas tal que el origen se encuentre ubicado en el centro de rotación, mientras que el eje z es normal al plano formado por la plataforma fija, apuntando hacia arriba. El eje y se encuentra ubicado en el plano formado por el eje z y el vector \mathbf{u}_1 , mientras que el eje x puede ser encontrado por medio de la regla

de la mano derecha.

2.4. Análisis cinemático

2.4.1. Sistemas de referencia

Cuando se requiere que un robot lleve a cabo una tarea determinada, es crucial entender el conjunto de puntos a lo largo de los cuales se moverá su efecto final. Para ello, se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas [64]. Al referirse a un punto P , se debe asignar un sistema de referencia, como los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ mostrados en la Figura 2.15. El punto P puede referenciarse con respecto a cualquiera de estos sistemas de coordenadas.

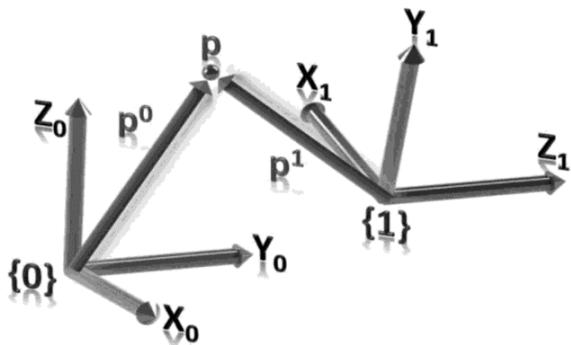


Figura 2.15: Representación de un punto p en el espacio con respecto a dos sistemas de coordenadas [64].

Se usará un superíndice para indicar el sistema de coordenadas respecto al cual se está referenciando. Por ejemplo, P^0 indica la ubicación del punto P con respecto al sistema de coordenadas $\{0\}$. P es simplemente una entidad geométrica, mientras que P^0 representa un vector. La diferencia radica en que P no depende de un sistema de coordenadas, mientras que el vector P^0 sí, ya que depende de $\{0\}$ [64].

Para realizar operaciones con vectores, es necesario que estos se encuentren expresados respecto al mismo sistema de referencia o que los sistemas de referencia sean paralelos, es decir, que sus ejes respectivos sean paralelos. Suponga que se tiene un conjunto de sistemas de referencia con orígenes no coincidentes y diferentes orientaciones entre sí. Si se tienen distintos vectores y cada uno se representa con respecto a un sistema de referencia específico, es posible llevar a cabo operaciones entre ellos siempre que todos se representen respecto a un sistema de referencia común. Esto se logra empleando matrices de rotación y matrices de transformación homogénea. Las matrices de rotación se utilizan cuando los sistemas de referencia solo difieren en su orientación, mientras que las matrices de transformación homogénea se emplean cuando los sistemas de referencia difieren tanto en la posición de su origen como en su orientación relativa.

2.4.2. Matrices de rotación

La matriz de rotación sirve para representar la orientación de los vectores base de un sistema de referencia a otro sistema de referencia. Es importante distinguir tres matrices de rotación básicas. Estas matrices son las que se obtienen cuando un sistema de coordenadas se rota con respecto a cualquiera de sus ejes principales, es decir, los ejes X, Y y Z [64]. Para simplificar la representación de los resultados, se empleará la notación siguiente: si la rotación se hace con respecto al eje Z en un ángulo θ , se representará dicha matriz mediante $R_z(\theta)$. De esta forma, las matrices de rotación básicas son:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, las matrices de rotación poseen las siguientes propiedades importantes (se indica que la propiedad es válida para cualquier eje):

$$R^T = R^{-1}R^T = R^{-1}$$

$$\det(R) = 1$$

Estas propiedades aseguran que las matrices de rotación son ortogonales y preservan las longitudes y ángulos de los vectores, siendo esenciales para las transformaciones en robótica y cinemática.

2.4.3. Método de Denavit-Hartenberg

Denavit y Hartenberg proponen un enfoque basado en matrices para establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas para cada elemento de una cadena articulada, vinculado al cuerpo del robot [64]. Este método, conocido como D-H, implica la creación de una matriz de transformación homogénea de 4x4 que describe la posición y orientación de cada elemento en relación con el elemento anterior. A través de una serie de transformaciones sucesivas, es posible convertir las coordenadas del efecto final, referidas a la mano, a las coordenadas de la base. La principal ventaja de este enfoque es su capacidad para derivar de manera algorítmica las ecuaciones cinemáticas de un brazo robótico.

Las directrices para establecer cada sistema son las siguientes:

- ✓ El eje z_{i-1} se ubica a lo largo del eje de la articulación.

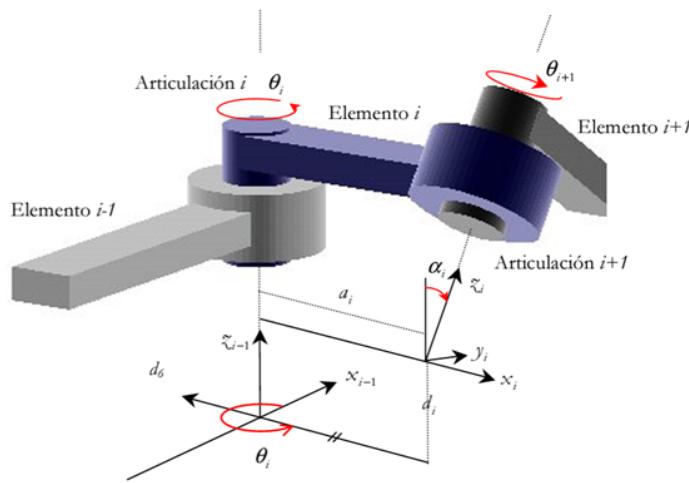


Figura 2.16: Asignación de parámetros cinemáticos según la metodología de Denavit-Hartenberg [64].

- ✓ El eje x_i es perpendicular al eje z_{i-1} y se orienta hacia afuera del mismo.
- ✓ El eje y_i se define para completar un sistema de coordenadas dextrógiro según sea necesario.

La representación D-H de un componente rígido se determina mediante cuatro parámetros geométricos específicos para cada elemento (véase la Figura 2.16):

- ✓ θ_i : Es el ángulo de rotación del eje x_{i-1} al eje x_i en relación con el eje z_{i-1} (RMD).
- ✓ d_i : Representa la distancia desde el origen del sistema de coordenadas $i - 1$ hasta el punto donde el eje z_{i-1} interseca el eje x_i a lo largo del eje z_{i-1} .
- ✓ a_i : Indica la distancia de separación desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema de coordenadas i a lo largo del eje x_i (o la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i cuando los ejes de articulación son paralelos).
- ✓ α_i : Se refiere al ángulo de separación del eje z_{i-1} al eje z_i respecto al eje x_i (RMD).

2.4.4. Procedimiento para asignación del sistema de coordenadas de los elementos

Para un brazo con n grados de libertad, este procedimiento asigna un sistema de coordenadas ortogonal a cada componente del brazo. La identificación de los sistemas de coordenadas comienza desde la base de soporte hasta el efecto final del brazo. Las relaciones entre los componentes adyacentes pueden ser expresadas mediante una matriz de transformación homogénea de 4×4 [64]. Es importante destacar que la asignación de los sistemas de coordenadas no es única.

1. Establecer el sistema de coordenadas de la base. Se define un sistema de coordenadas orthonormal dextrogíro (x_0, y_0, z_0) en la base, con el eje z_0 alineado con el eje de movimiento de la articulación 1 y apuntando hacia afuera del brazo.
2. Establecer los ejes de la articulación. Se alinea el eje z_i con el eje de movimiento de la articulación $i + 1$. Este proceso se repite para cada i , donde $i = 1, \dots, n - 1$.
3. Determinar el origen del sistema de coordenadas i -ésimo. Se ubica el origen del sistema de coordenadas i -ésimo en la intersección de los ejes z_i y z_{i-1} , o en la intersección de las normales comunes entre los ejes z_i y z_{i-1} y el eje z_i .
4. Establecer el eje x_i . Este eje se define como el producto cruz entre z_{i-1} y z_i , normalizado. Si los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, se establece el eje x_i a lo largo de la normal común entre ambos.
5. Establecer el eje y_i . Se define como el producto cruz entre z_i y x_i , normalizado, para completar el sistema de coordenadas dextrogíro. Se extienden los ejes z_i y x_i si es necesario para realizar los siguientes pasos.
6. Establecer el sistema de coordenadas del efecto final. Normalmente, la articulación n -ésima es de tipo giratorio. Se define z_n a lo largo del eje z_{n-1} , apuntando hacia afuera del robot, y x_n normal a ambos ejes z_{n-1} y z_n . Se asigna y_n para completar el sistema de coordenadas dextrogíro.
7. Determinar los parámetros de la articulación y del elemento. Para cada i , donde $i = 1, \dots, n$, se realizan los pasos del 8 al 11.
8. Determinar d_i , que es la distancia del origen del sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo a la intersección del eje z_{i-1} y el eje x_i , a lo largo del eje z_{i-1} .
9. Determinar a_i , que es la distancia del origen del sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo a la intersección del eje z_{i-1} y el eje x_i , a lo largo del eje x_i , o la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i cuando son paralelos.
10. Determinar θ_i , que es el ángulo de rotación desde el eje x_{i-1} hasta el eje x_i respecto al eje z_{i-1} . Es la variable de articulación si la articulación i es giratoria.
11. Determinar α_i , que es el ángulo de rotación desde el eje z_{i-1} hasta el eje z_i respecto al eje x_i .

Una vez definido el marco de coordenadas D-H para cada componente, se puede construir una matriz de transformación homogénea que relacione el marco de coordenadas i -ésimo con el marco $i - 1$ -ésimo. Esta matriz facilita la representación de cualquier punto en el marco de coordenadas i -ésimo en relación con el marco de coordenadas anterior [64]. A continuación se presentan las etapas sugeridas para lograr esta transición:

1. Rotar alrededor del eje z_{i-1} un ángulo θ_i para alinear el eje x_{i-1} con el eje x_i . (El eje x_{i-1} y x_i son paralelos y apuntan en la misma dirección).

2. Desplazar a lo largo del eje z_{i-1} una distancia de d_i para coincidir los ejes x_{i-1} y x_i .
3. Mover a lo largo del eje x_i una distancia a_i para también coincidir los dos orígenes de los ejes x .
4. Rotar en torno al eje x_i un ángulo α_i para alinear los sistemas de coordenadas.

Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler definen una orientación mediante tres coordenadas angulares, pudiendo haber hasta 12 tipos de representación. Los ángulos de Euler están representados a su vez por nomenclaturas de rotación, las cuales son leídas de izquierda a derecha, indicando una serie de rotaciones consecutivas sobre un sistema de referencia fijo, con el cual es posible diferenciar una primera y una última rotación, así como su orientación final. Otra representación de los ángulos de Euler son los conocidos ángulos de Tait-Bryan, los cuales aplican rotaciones en los tres ejes diferentes [65].

Los ángulos de Euler son una representación utilizada para describir la orientación de un objeto respecto a un sistema de coordenadas. Para este fin es necesario hacer uso de una terna de vectores, que representan los ejes de coordenadas que se le desea aplicar una rotación en el espacio. De esta forma, a medida que el cuerpo rote, la terna cambiará su orientación en el espacio, los cuales pueden ser descritos por medio de los ángulos de Euler.

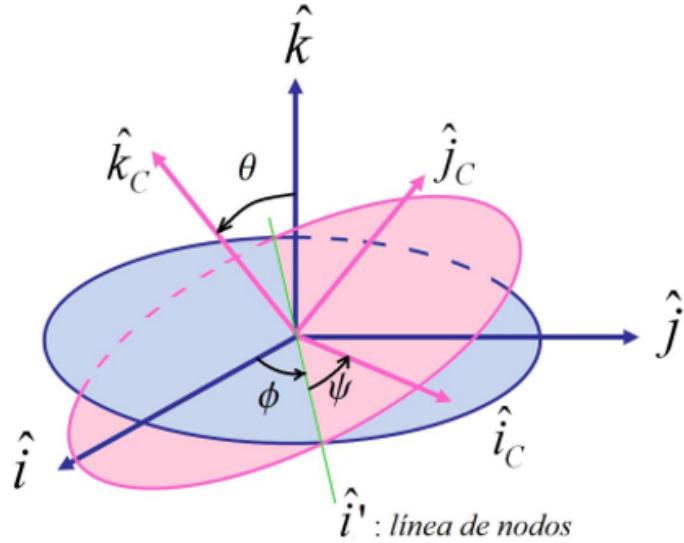


Figura 2.17: Representación de los ángulos de Euler [66].

En la Figura 2.17 se observa la rotación de un sistema de coordenadas móvil alrededor de un sistema de coordenadas fijo utilizado para representar la orientación del cuerpo en el espacio, mediante los tres ángulos de Euler. Estos ángulos sirven para poder representar las rotaciones sucesivas que sufre el sistema móvil con respecto a un sistema que posiblemente ya

sufrió de alguna rotación en sí mismo. Para obtener los ángulos de Euler es importante observar y ubicar el eje donde se esté realizando la rotación del sistema móvil, esto es precisamente para conocer la combinación de rotaciones que se está efectuando. Cabe mencionar que en los sistemas de 3 dimensiones existen hasta 24 combinaciones posibles.

Para familiarizarse con los ángulos de Euler se debe pensar cómo debe rotar el cuerpo para que cada uno de los ángulos varíen y los demás permanezcan fijos [66]. Para esto puede ayudarse de la Figura 2.17, donde debe observarse que para existir una rotación alrededor del vector k_c , debe variar el ángulo, ψ mientras que los ángulos ϕ y θ deben permanecer fijos. Así mismo, para que rote el cuerpo alrededor de un vector fijo, debe existir un ángulo variante y otros dos que se mantengan fijos, dichos ángulos son los conocidos como ángulos de Euler. Dada cualquier rotación, existe una determinada matriz de rotación, la cual es la matriz que conecta el sistema de coordenadas fijo con el sistema de coordenadas móvil del cuerpo que está siendo representado.

2.4.5. Teoría de tornillos

Un tornillo puede ser comprendido como 2 vectores concatenados. El primer vector es nombrado como la parte primaria del tornillo, siendo este un vector unitario a lo largo del eje del tornillo, mientras que el segundo vector, es nombrado como el vector dual, el cual representa el momento producido por la parte primaria sobre un punto llamado punto de referencia [67].

La teoría de tornillos sirve para expresar desplazamientos, velocidades, fuerzas y pares en tres dimensiones en el espacio, basado en la idea de que cualquier movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una unión inseparable de una rotación sobre un eje y una traslación a lo largo de ese eje, donde el eje es coincidente con el objeto o partícula sufriendo desplazamiento.

La teoría de tornillos es un teorema viejo que fue iniciada por Chasles y Poinsot's. Sin embargo la teoría de tornillos es acreditada a Ball (1900), quien basó su monumental trabajo en las investigaciones realizadas por Plucker sobre la geometría de líneas.

Tiempo después, la teoría de tornillos fue implementada para la realización de cálculos en los mecanismos por Dimentbeg en 1965. Años después, la teoría de tornillos es utilizada por Davis y Primrose para representar las articulaciones de los mecanismos. Siendo Sugimoto y Duffy quienes abordaron el análisis de velocidad de un mecanismo utilizando álgebra lineal y la teoría de tornillos [67].

Actualmente la teoría de tornillos es utilizada no solo para resolver el análisis de velocidad de los robots, sino también para resolver el análisis dinámico de los mismos [67].

La teoría de tornillos se presenta como una herramienta poderosa para el análisis de mecanismos espaciales [68]. Su aplicación presenta múltiples ventajas como la aclaración de conceptos geométricos y simplificación de cálculos algebraicos. Además, es conveniente al ser utilizada en el análisis cinemático y dinámico de mecanismos, con requerimientos previos como el conocimiento del álgebra lineal y dinámica básica [69].

2.4.6. Líneas en el espacio

Para dar inicio a la teoría de tornillos, se comienza con la ecuación de una línea en el espacio tridimensional. Se considera una línea que pasa por dos puntos, A y B, con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , respectivamente (véase la Figura 2.18). Se denota a \mathbf{S} como el vector dirección de la línea, expresándolo como:

$$\mathbf{S} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$$

Aquí, \mathbf{i} , \mathbf{j} , y \mathbf{k} son los vectores unitarios correspondientes a los ejes de coordenadas, y L , M , y N se definen como:

$$L = (x_2 - x_1)$$

$$M = y_2 - y_1$$

$$N = z_2 - z_1$$

Los cosenos directores de la línea se expresan como:

$$l = \frac{L}{|\mathbf{S}|}$$

$$m = \frac{M}{|\mathbf{S}|}$$

$$n = \frac{N}{|\mathbf{S}|}$$

mientras que \hat{s} denota el vector dirección de línea unitario

$$\hat{s} = \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}$$

donde $|\mathbf{S}| = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$.

Cabe destacar que cualquier línea puede representarse mediante su dirección y un punto sobre ella. La ecuación general de una línea en forma vectorial es:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{S} = 0$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S} = \mathbf{S}_0$$

Donde \mathbf{S}_0 es el momento de la línea con respecto al origen O, definido como:

$$\mathbf{S}_0 = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

$$P = y_1N - z_1M$$

$$Q = z_1L - x_1N$$

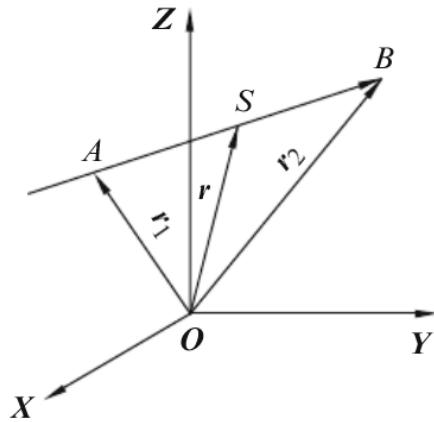


Figura 2.18: Representación de una línea en el espacio [69].

$$R = x_1M - y_1L$$

Las coordenadas de Plücker de la línea se expresan como $(\mathbf{S}; \mathbf{S}_0)$, proporcionando una representación compacta y eficiente de la geometría y posición de la línea en el espacio tridimensional [69].

2.4.7. Tornillos

En el marco de la teoría de tornillos, un elemento fundamental es el concepto de tornillo, denotado por el símbolo $\$$ [70]. En general un tornillo es un vector de seis dimensiones con una componente primaria, $P(\$) = \hat{s}$, que representa la velocidad lineal así como una componente dual, $D(\$) = \mathbf{s}^0$ que representa la velocidad angular. De esta forma un tornillo es un caso general de los vectores lineales, en el cual los dos vectores del vector dual no satisfacen la condición de ortogonalidad, es decir que

$$\$ = (\hat{s}; \mathbf{s}^0), \hat{s} \bullet \mathbf{s}^0 \neq 0$$

El vector unitario \hat{s} indica la dirección a lo largo del eje del tornillo, mientras que el vector \mathbf{s}^0 representa el momento producido por la parte primaria de $\$$ con respecto a un punto “O” fijo en el sistema de referencia. Por otro lado, \mathbf{s}^0 se determina en términos del paso h del tornillo como

$$\mathbf{s}^0 = h\hat{s} + \mathbf{r} \times \hat{s} \quad (2.1)$$

Donde “ r ” es un vector que comienza en un punto del eje instantáneo del tornillo que une a ambos cuerpos y se extiende hasta el punto O , mientras que “ \times ” denota el producto cruz convencional en el ámbito del álgebra vectorial tridimensional. Siendo h definido como

$$h = \frac{\hat{s} \bullet \mathbf{s}^0}{\hat{s} \bullet \hat{s}}$$

2.4.8. Álgebra de tornillos

Los tornillos son operados algebraicos con las siguientes operaciones [69]:

Suma

Sean dos tornillos $\$1 = (\hat{s}_1; \mathbf{s}_1^0)$, y $\$2 = (\hat{s}_2; \mathbf{s}_2^0)$, la suma entre ellos es definida como sigue:

$$\$1 + \$2 = (\hat{s}_1 + \hat{s}_2; \mathbf{s}_1^0 + \mathbf{s}_2^0)$$

Producto de un escalar y un tornillo

Sea λ un escalar y $\$1 = (\hat{s}_1; \mathbf{s}_1^0)$ un tornillo, el producto de un escalar y un tornillo es definido por

$$\lambda \$1 = (\lambda \hat{s}_1; \lambda \mathbf{s}_1^0)$$

2.4.9. Forma de Klein

La forma de Klein es una operación bilineal simétrica que, dados dos tornillos $\$1 = (\hat{s}_1; \mathbf{s}_1^0)$ y $\$2 = (\hat{s}_2; \mathbf{s}_2^0)$, donde \hat{s} representa la dirección unitaria del eje del tornillo y \mathbf{s}^0 su momento, permite calcular un escalar mediante la expresión

$$\{\$1, \$2\} = \hat{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2^0 + \hat{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1^0,$$

en la cual el símbolo \cdot denota el producto interno entre vectores en \mathbb{R}^3 . Esta forma produce un valor escalar que resulta fundamental para establecer relaciones geométricas entre tornillos [67].

Una propiedad importante de la forma de Klein es que se anula cuando se evalúa entre dos tornillos recíprocos, es decir,

$$\{\$1, \$2\} = 0$$

si $\$1$ y $\$2$ son recíprocos [71].

2.4.10. Tornillo recíproco

Un tornillo recíproco es aquel que, respecto a otro tornillo, no realiza trabajo cuando ambos interactúan. Específicamente, se dice que dos tornillos son recíprocos si la forma de Klein entre el tornillo que representa una fuerza y el que representa un movimiento permitido es igual a cero ($\{\$1; \$2\} = 0$). Esta operación, permite establecer la compatibilidad entre fuerzas aplicadas y movimientos posibles. En otras palabras, si un cuerpo rígido está restringido a moverse según cierto tornillo, cualquier fuerza aplicada a lo largo de un tornillo recíproco no generará desplazamiento alguno, sin importar la magnitud de dicha fuerza [71].

Este principio tiene aplicaciones fundamentales en el análisis de manipuladores robóticos, ya que permite eliminar las contribuciones cinemáticas asociadas a articulaciones pasivas y centrarse únicamente en los movimientos generalizados. Determinar una base adecuada de tornillos recíprocos correspondiente a las restricciones de un manipulador facilita el planteamiento

de las ecuaciones de velocidad y aceleración, así como el desarrollo de análisis posteriores. Sin embargo, encontrar dicha base no siempre es una tarea sencilla. Aunque existen métodos algebraicos tradicionales, como el uso de coordenadas de Plücker, estos procedimientos suelen involucrar manipulaciones algebraicas complejas y tediosas. En contraste, existe un método que evita la manipulación simbólica explícita y permite identificar los tornillos recíprocos mediante una inspección directa de la estructura cinemática del manipulador. Este enfoque, conocido como método geométrico [72], se basa en tres observaciones que describen las relaciones geométricas entre tornillos de paso cero y tornillos de paso infinito, las cuales son las siguientes:

- ✓ **Dos vectores línea:** Dos vectores de línea son recíprocos entre sí si y solo si son coplanares.
- ✓ **Dos vectores par:** Dos vectores de par son siempre recíprocos entre sí.
- ✓ **Un vector línea y un vector de par:** Un vector de línea es recíproco a un vector de par si y solo si son perpendiculares entre sí.

En este contexto, un vector de línea representa el tornillo asociado a una junta revoluta, mientras que un vector de par corresponde al tornillo relacionado con una junta prismática.

2.4.11. Tornillos de las juntas básicas

Las juntas básicas de rotación y translación de un objeto rígido pueden ser descritos por los movimientos de un tornillo en condiciones especiales.

Rotación de un objeto rígido

En la Figura 2.19 se presenta la representación del movimiento de rotación de un cuerpo rígido nombrado por 2 respecto a otro cuerpo rígido nombrado por 1. En este caso, \mathbf{s} representa el eje de rotación, para el cual las coordenadas de Plucker de una rotación de cuerpo rígido es descrito por

$$\omega\$ = \omega(\mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = (\omega\mathbf{s}; \omega\mathbf{s}_0) = (\omega; v_0)$$

donde ω es la velocidad angular, y v_0 la velocidad lineal del punto coincidente con el origen. Noteese que cuando el eje rotacional pasa a través del origen, las coordenadas de Plucker se reducen a $\omega\$ = (\omega; 0)$ [69].

Traslación de un objeto rígido

Una manera de representar la translación entre dos cuerpos rígidos es conectarlos mediante un par prismático o deslizante, como se muestra en la Figura 2.20. La velocidad de translación v se puede representar como un múltiplo escalar del desplazamiento lineal instantáneo v y un vector unitario S paralelo al movimiento. A pesar de que el vector S se desplaza paralelamente a sí mismo, todos los puntos en el cuerpo en movimiento mantienen la misma velocidad lineal, lo que significa que un desplazamiento autónomo de S no afecta el movimiento. De esta forma

las coordenadas de Plucker de estos ejes son $(0; S)$ y la rotación sobre este eje puede ser representado por $v(0; S)$ [69].

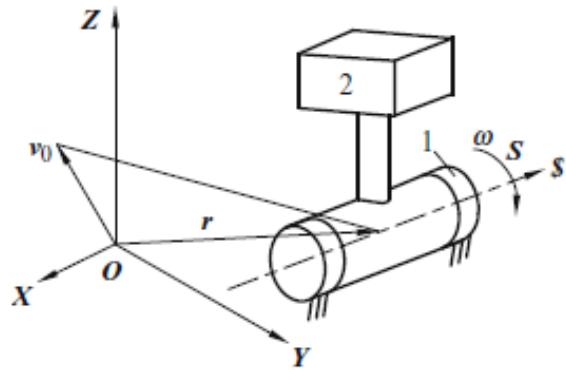


Figura 2.19: Rotación de un objeto rígido [69].

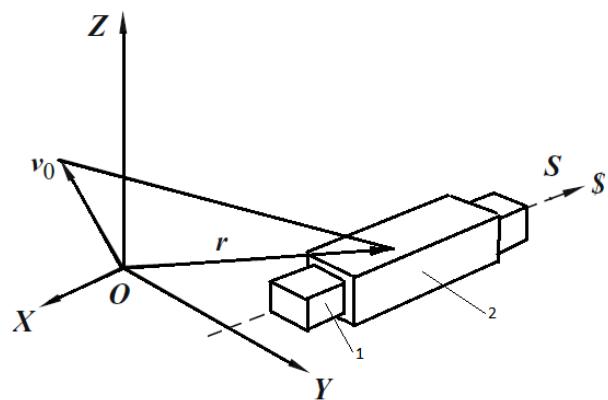


Figura 2.20: Traslación de un cuerpo rígido [69].

Capítulo 3

Diseño y Construcción del Prototipo

3.1. Sistemas fundamentales del prototipo

En este capítulo se muestra el desarrollo del mecanismo de muñeca esférica. La innovación de este diseño radica en su capacidad para ofrecer un espectro ampliado de grados de libertad en comparación con la mayoría de las muñecas robóticas existentes, respondiendo así a las exigencias críticas en términos de movilidad, economía de espacio y, primordialmente, funcionalidad.

El diseño propuesto se articula en torno a dos sistemas fundamentales. El sistema de transmisión de potencia integrado por engranajes para una transferencia de movimiento precisa, rodamientos que minimizan la fricción, y estructuras tubulares que permiten transmitir la potencia hacia el sistema de orientación. Este sistema es basado en un manipulador paralelo esférico y se encuentra formado por varillas roscadas, tuercas y juntas de rótula que posibilitan la movilidad del efecto final.

3.1.1. Estructura del sistema de transmisión de potencia

Basándose en las especificaciones antropométricas pertinentes a la población mexicana y los requisitos dimensionales para prótesis de miembros superiores, se diseñó el sistema de transmisión de potencia. Este sistema incorpora una configuración de engranajes simples diseñada para redirigir eficazmente los movimientos rotacionales de los motores hacia los ejes principales. A su vez, esta configuración amplifica el par torsional de salida de los motores, lo cual es fundamental para facilitar la movilidad de los segmentos proximales del mecanismo. Para lograr esta funcionalidad, el diseño se basa en una relación de transmisión de 3:1, alcanzada mediante un piñón de 10 dientes que engrana con una rueda mayor de 30 dientes, como se ilustra en la Figura 3.1.

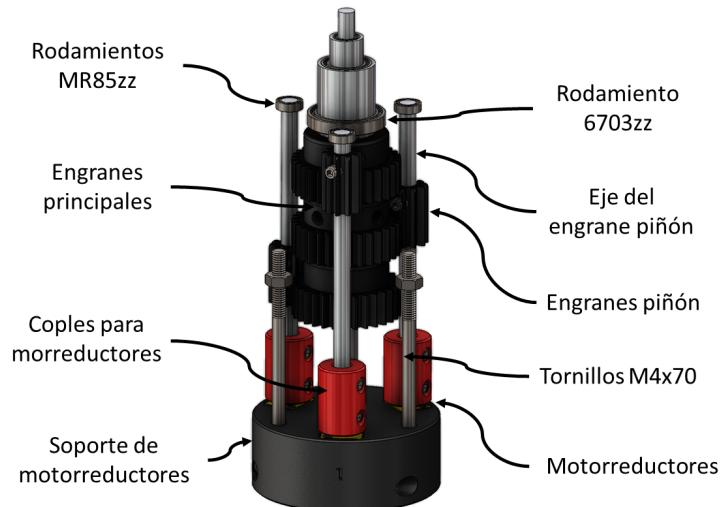


Figura 3.1: Sistema de transmisión de potencia.

Como se ilustra en la Figura 3.1, el diseño incorpora motorreductores seleccionados específicamente por su tamaño y la potencia suministrada, adecuados para activar el mecanismo de manera eficiente. Estos están montados sobre soportes precisamente perforados para asegurar la alineación y separación adecuadas entre el piñón y la rueda dentada mayor. La fijación de los motorreductores al soporte se realiza mediante tornillos prisioneros, situados lateralmente respecto a cada motor, como se detalla en la Figura 3.2.

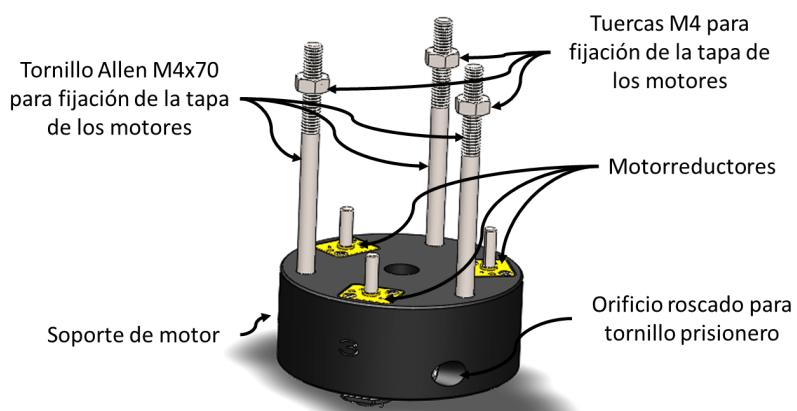


Figura 3.2: Soporte de motores.

Luego de completar la construcción de la base del mecanismo, el enfoque se dirigió hacia la elaboración de los componentes específicos del sistema de transmisión, iniciando con el diseño y ensamblaje de los engranajes piñones, esenciales para la distribución adecuada del movimiento. Se elaboró un diseño detallado en CAD, visible en la Figura 3.3, que ilustra la configuración precisa de estos elementos.

Un aspecto crucial en el ensamblaje es la implementación de coples. Estos elementos conectan el eje de salida de los motorreductores con varillas rectificadas, las cuales a su vez son conectadas a los engranes piñón y de esta forma permitirles transmitir la potencia otorgada. La correcta alineación y fijación de estos ejes son fundamentales para garantizar una rotación suave y alineada de los piñones. Para ello, se utilizan rodamientos que se aseguran en la estructura de montaje de los motorreductores, así como en la tapa superior, proporcionando así la estabilidad y precisión necesarias en el giro.

Es relevante mencionar que se optó por una selección estratégica de componentes comerciales en el diseño, lo que permite una fácil sustitución de partes en caso necesario, mejorando así la durabilidad del sistema y su proceso de mantenimiento. La disposición geométrica de los engranes piñones también juega un papel vital; se colocan de tal manera que forman ángulos de 120 grados entre sí, optimizando la distribución del movimiento. La altura a la que se montan los piñones en relación con los soportes de los motorreductores es determinante para la asignación de movimiento a los distintos enlaces del mecanismo.

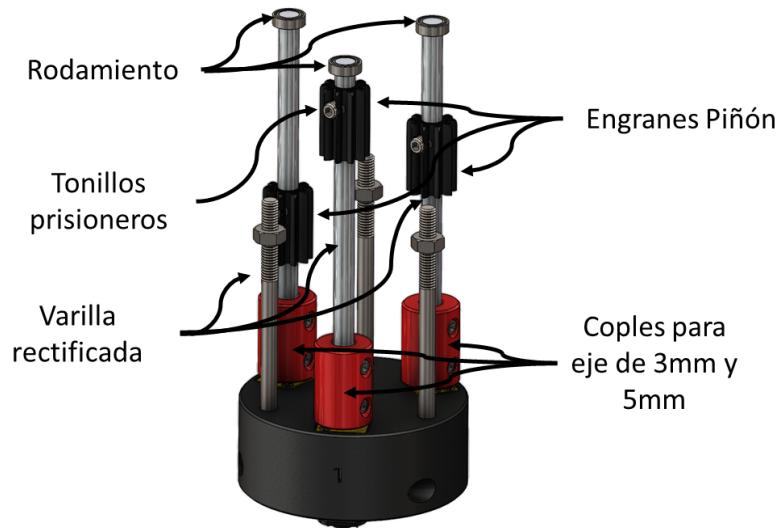


Figura 3.3: Ensamble de los engranes piñones.

Una vez finalizada la disposición y fijación de los piñones, el paso siguiente fue el ensamblaje completo del sistema de transmisión. Para esto, se incorporó un diseño multieje que utiliza componentes tubulares y rodamientos específicamente seleccionados para facilitar un movimiento preciso y eficiente. El resultado de este ensamblaje puede apreciarse en la Figura 3.4. El sistema consta de dos componentes tubulares, una varilla rectificada y varios rodamientos: tres del tipo MR85ZZ, dos 6700ZZ y un 6703ZZ.

Este conjunto multieje está diseñado para facilitar la transmisión del movimiento y la fuerza de torsión a lo largo de un eje de rotación central, permitiendo que cada tubular opere de manera independiente. La correcta integración y funcionalidad del sistema dependen en gran medida de los rodamientos, que juegan un papel crucial en la suavidad del movimiento y la prevención de fricciones indeseadas o colisiones entre los componentes móviles. Los rodamientos no solo ayudan a mantener la alineación y distribución del movimiento sino que

también aseguran la integridad estructural y operativa del ensamblaje.

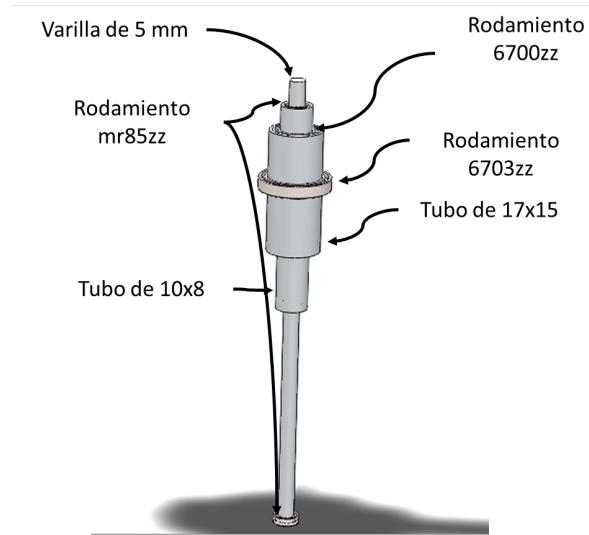


Figura 3.4: Ensamblaje del sistema de rotación multieje.

Tras completar la instalación del sistema de rotación multieje, se procedió con el montaje de los engranajes principales, cuya configuración puede ser visualizada en la Figura 3.1. Durante este proceso, fue crucial asegurar una correcta ubicación de los engranajes para facilitar un acoplamiento efectivo entre el engranaje principal y el piñón. Con los engranajes principales ya en su lugar, el sistema de transmisión se situó en la posición ideal para la instalación de la tapa del sistema. Esta tapa es esencial para mantener los rodamientos correctamente alineados y asegurados, como se muestra en la Figura 3.5. Esta etapa del montaje asegura que el sistema de transmisión funcione de manera eficiente y sin interrupciones, protegiendo los componentes internos y manteniendo la integridad estructural del ensamblaje.

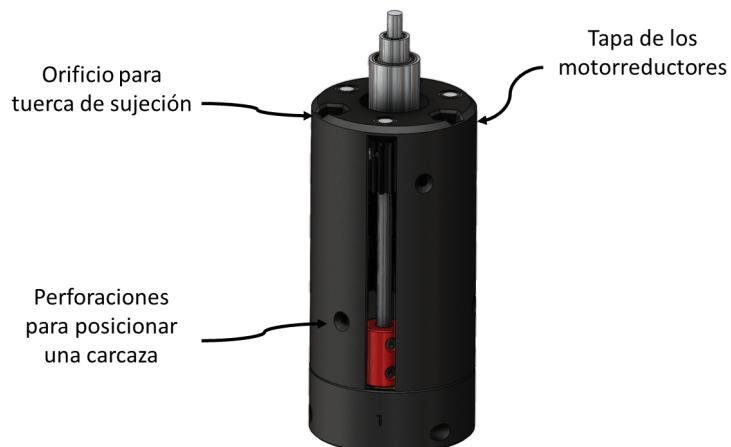


Figura 3.5: Ensamblaje completo del sistema de transmisión de potencia.

3.1.2. Estructura del mecanismo paralelo esférico

En el diseño de un mecanismo paralelo esférico, la precisión en la definición de los parámetros de construcción es crucial, pues estos influyen directamente en el comportamiento y la capacidad de movimiento del sistema. Por esta razón, esta sección del documento se dedicará a detallar los aspectos fundamentales del mecanismo y las bases de su selección. Basados en los resultados reportados en [49] y en los datos presentados en la Tabla 2.1, se observa que los rangos de movimiento varían entre 15 y 80 grados. Esta información es esencial para establecer un espacio de trabajo aproximado para el mecanismo, garantizando así su efectividad y eficiencia en aplicaciones prácticas.

En este proyecto, el espacio de trabajo es una limitación crucial, dado que el mecanismo debe ajustarse al antebrazo del prototipo sin exceder los 60 milímetros de diámetro. Este requisito ha guiado la elección de un manipulador paralelo esférico coaxial, que aprovecha mejor el espacio limitado en comparación con otras configuraciones de manipuladores paralelos esféricos, que tienden a ocupar más espacio lateralmente.

De acuerdo con lo reportado en [60], se determinó que un rango de movimiento de 0 a 60 grados es ideal para el manipulador. Extender el espacio de trabajo más allá de este rango puede reducir la uniformidad del mismo, afectando la precisión en ciertos ángulos de rotación. Con base en la investigación y las necesidades del proyecto, se establecieron 60 grados como el ángulo óptimo para el enlace distal y 90 grados para el enlace proximal. Estos ángulos son reconocidos por proporcionar el máximo espacio de trabajo regular.

Siguiendo estos parámetros de diseño, se procedió con el montaje de los enlaces distales, que incluyen rodamientos de brida para pistones neumáticos, tuercas, varillas roscadas y abrazaderas especiales, diseñados para ensamblarse eficientemente con el sistema de transmisión de potencia ya establecido.

La Figura 3.6 ilustra el montaje del manipulador paralelo esférico, compuesto por tres elementos principales: el enlace proximal, el enlace distal y la plataforma móvil. Cada enlace proximal se ensambla utilizando varillas roscadas y uniones de brida, que son aseguradas con tuercas para mantener la integridad estructural del mecanismo. Este ensamblaje es crucial para la funcionalidad del dispositivo, ya que define los movimientos posibles dentro del rango de diseño especificado.

Para adaptarse a las especificaciones de las juntas de bridas comerciales y mantener coherencia con los parámetros de diseño, se utilizan abrazaderas especiales que facilitan la conexión de los componentes. Estas abrazaderas no solo aseguran una unión robusta, sino que también permiten ajustes precisos necesarios para el correcto funcionamiento del mecanismo.

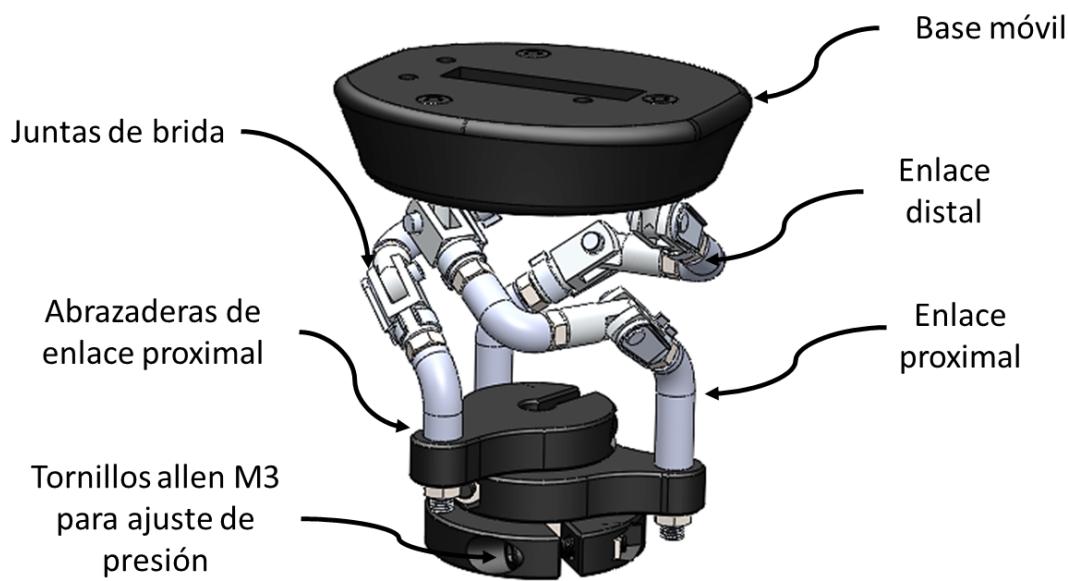


Figura 3.6: Ensamblaje del mecanismo paralelo esférico (enlaces distales, enlaces proximales y base móvil).

Es importante destacar que en los manipuladores paralelos esféricos, todos los ejes de rotación deben intersectarse en un único punto, conocido como el centro de rotación. Este es un principio crítico que influye en el diseño y la operación del mecanismo. Con el fin de proporcionar una visión más clara de este aspecto, en la Figura 3.7 se presenta una vista detallada de un enlace proximal y un enlace distal por separado, mostrando cómo se alinean con los parámetros de diseño y construcción establecidos.

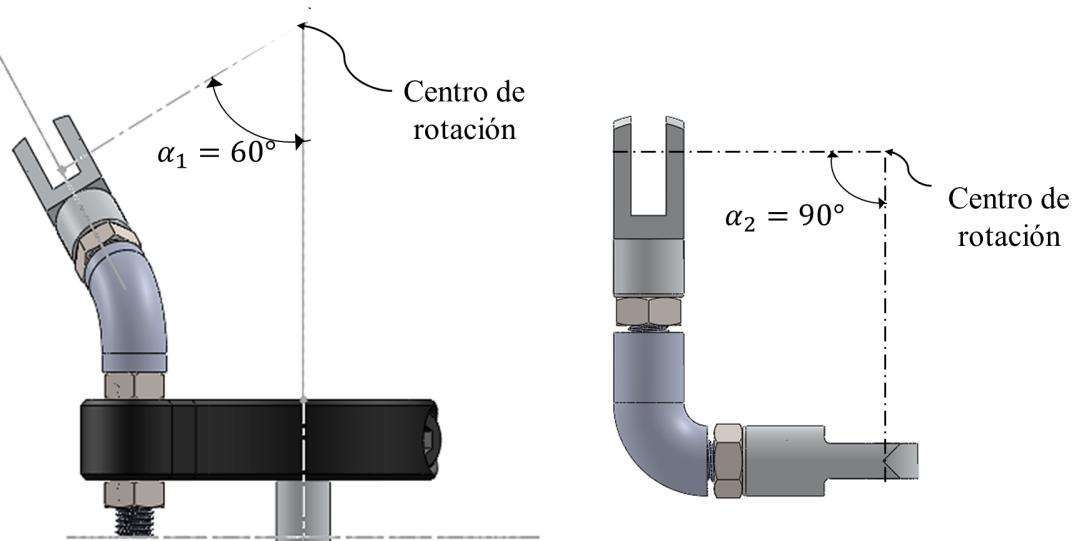


Figura 3.7: Diseño de enlaces con base en los parámetros de construcción $\alpha_1 = 60^\circ$ y $\alpha_2 = 90^\circ$.

Los enlaces proximales del manipulador están configurados con ángulos específicos para optimizar el espacio de trabajo y la eficiencia del movimiento. En particular, se establecen los parámetros $\alpha_1 = 60^\circ$ y $\alpha_2 = 90^\circ$. Estos ángulos han sido seleccionados porque permiten maximizar el área en la que la plataforma puede operar de manera constante y fluida [73]. Es crucial mencionar que estos ángulos representan las orientaciones entre los ejes de rotación de los enlaces, los cuales convergen en el centro de rotación del sistema.

Además, este diseño utiliza una configuración coaxial para los enlaces proximales, lo que significa que los ejes de rotación principales son coincidentes, manteniendo un ángulo $\gamma = 0^\circ$. Este ángulo se refiere a la orientación entre el vector normal a la plataforma fija y el vector u_i que representa los enlaces proximales. Asimismo, se ha seleccionado un ángulo $\beta = 90^\circ$ para la plataforma móvil. Este ángulo es crucial ya que define la relación entre la plataforma móvil y el vector v_i del enlace distal, facilitando así el correcto alineamiento y operatividad del sistema. Esta configuración está detallada en la Figura 3.8, donde se puede apreciar la alineación y orientación de estos componentes críticos del manipulador.

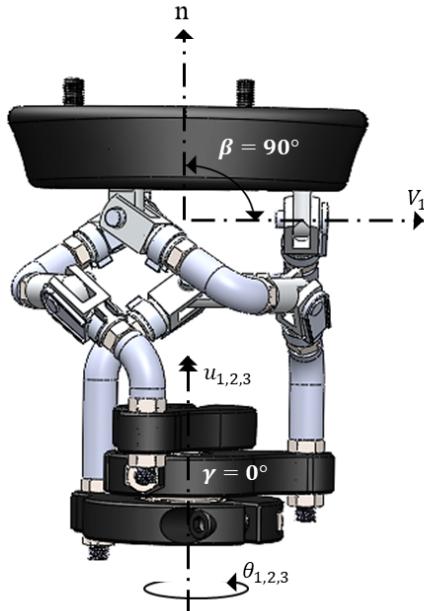


Figura 3.8: Diseño de enlaces con base en los parámetros de construcción $\gamma = 0^\circ$ y $\beta = 90^\circ$.

Una vez completado el diseño y configuración, se procedió con el ensamblaje del mecanismo y del sistema de potencia, tal como se muestra en la Figura 3.8. Este ensamblaje culminó en el sistema completo visible en la Figura 3.9, que integra todos los subsistemas y componentes, facilitando la comprensión del funcionamiento general desde la potencia entregada por los motorreductores hasta el movimiento de la plataforma móvil. Para consultar los planos técnicos, modelos de las piezas diseñadas y videos explicativos —como la animación tipo explosivo y las demostraciones de movimiento—, se puede recurrir al Apéndice E, donde se reúne toda la documentación digital del prototipo.



Figura 3.9: Sistema completo del mecanismo.

Este sistema está conformado por un conjunto de engranajes y ejes tubulares soportados por rodamientos que permiten una rotación suave y minimizan el rozamiento entre componentes. El diseño modular del mecanismo permite la fácil sustitución de piezas, lo cual es una ventaja considerable para el mantenimiento y la durabilidad del sistema. La mayoría de estas piezas son comerciales, lo que facilita su adquisición y reemplazo, asegurando la disponibilidad y accesibilidad para los usuarios.

Después de asegurar la funcionalidad del sistema, se avanzó con el desarrollo de una carcasa protectora diseñada a semejanza de un antebrazo humano. La carcasa se fabricó en dos partes separadas para simplificar la integración del mecanismo. También se añadieron orificios para tornillos que facilitan tanto el ajuste del mecanismo dentro de la carcasa como la unión de las dos mitades.

Como se puede apreciar en la Figura 3.10, la carcasa está diseñada para encapsular completamente el mecanismo. Una parte importante a destacar es el diseño abocardado en ambos extremos: el abocardado superior tiene la función de garantizar suficiente espacio y evitar contactos con las partes móviles del mecanismo, mientras que el abocardado inferior sirve asegurar un acople correcto entre el prototipo y el muñón del usuario.

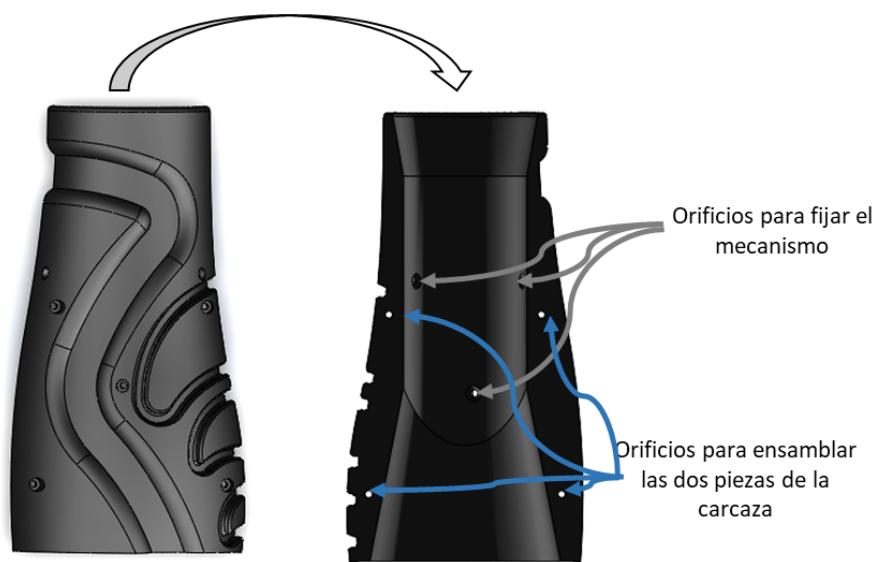


Figura 3.10: Carcaza del mecanismo.

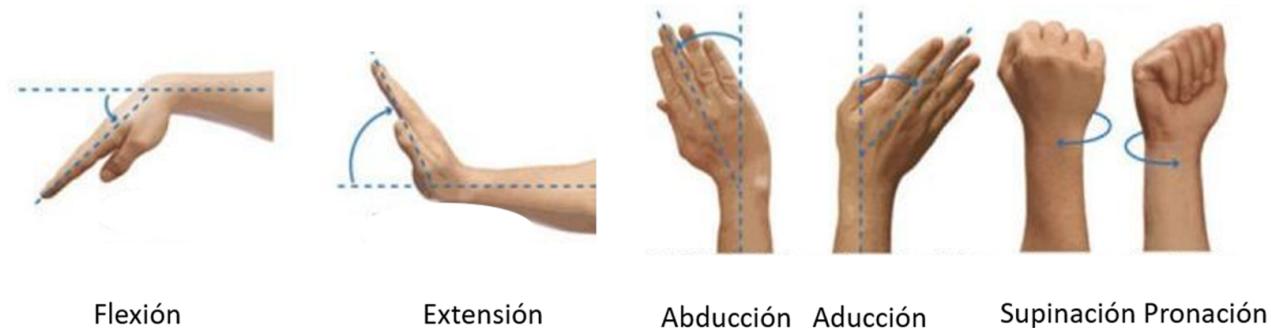
Con todos los elementos finalizados se procedió con el ensamble final de todo el mecanismo, el cual se muestra en la Figura 3.11. Para la unión entre la carcasa y el sistema del mecanismo se propuso tornillería allen M3 x 25, lo cual permite un ensamblaje relativamente sencillo de realizar.



Figura 3.11: Ensamble final del mecanismo.

En última instancia, la Figura 3.12 ilustra la analogía de movimientos permitidos por el mecanismo paralelo esférico en contraste con los movimientos de la muñeca humana. En ella se puede observar una representación visual de una mano montada en el mecanismo. A pesar de que esta mano no se utilizará en el prototipo físico, ayuda a entender el objetivo final, que es albergar una mano robótica en su plataforma móvil, otorgándole así las habilidades de orientación que son necesarias para darle más funcionalidad a las prótesis de este tipo.

Movimientos de la muñeca humana



Movimientos del prototipo de muñeca

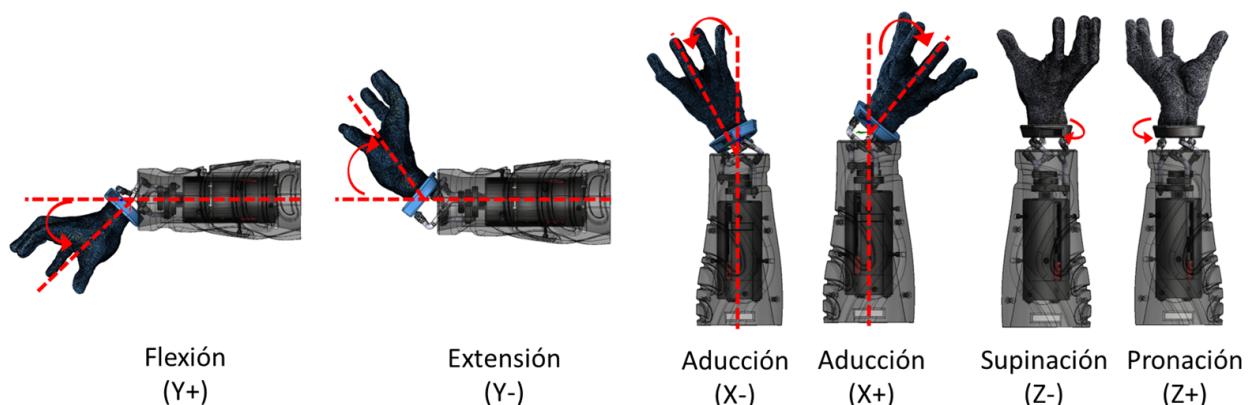


Figura 3.12: Analogía de movimientos del prototipo en contrate con los movimientos de la muñeca humana.

3.2. Construcción del dispositivo

En esta sección se describe el proceso de manufactura de las piezas mecánicas para el prototipo del manipulador paralelo esférico coaxial, diseñado para su aplicación en una muñeca robótica. El proceso se divide en dos etapas principales: fabricación de las piezas mecánicas y la integración de las mismas.

La fabricación de las piezas mecánicas se llevó a cabo mediante diferentes técnicas, como

la impresión 3D, el mecanizado en fresadora y el proceso de torneado. La elección de la técnica de fabricación para cada pieza se basó en su complejidad, material y requisitos de precisión.

Las piezas impresas en 3D se fabricaron utilizando una impresora de filamento fundido (FDM) de la marca creality. El material utilizado fue PLA, debido a su resistencia, durabilidad y facilidad de impresión.

El proceso de construcción del sistema multi-eje del manipulador paralelo esférico coaxial comenzó con una etapa crucial: el dimensionamiento y la preparación meticulosa de sus componentes. Durante esta fase, se realizaron cortes y desbastes en los diversos tubos y varillas rectificadas que componen el sistema, transformando estos elementos para la incorporación de rodamientos que permiten un movimiento suave y sin holguras. Es importante destacar que el desbaste se llevó a cabo en un torno y se verificó con un micrómetro para asegurar una correcta colocación de los componentes, como se muestra en la Figura 3.13.

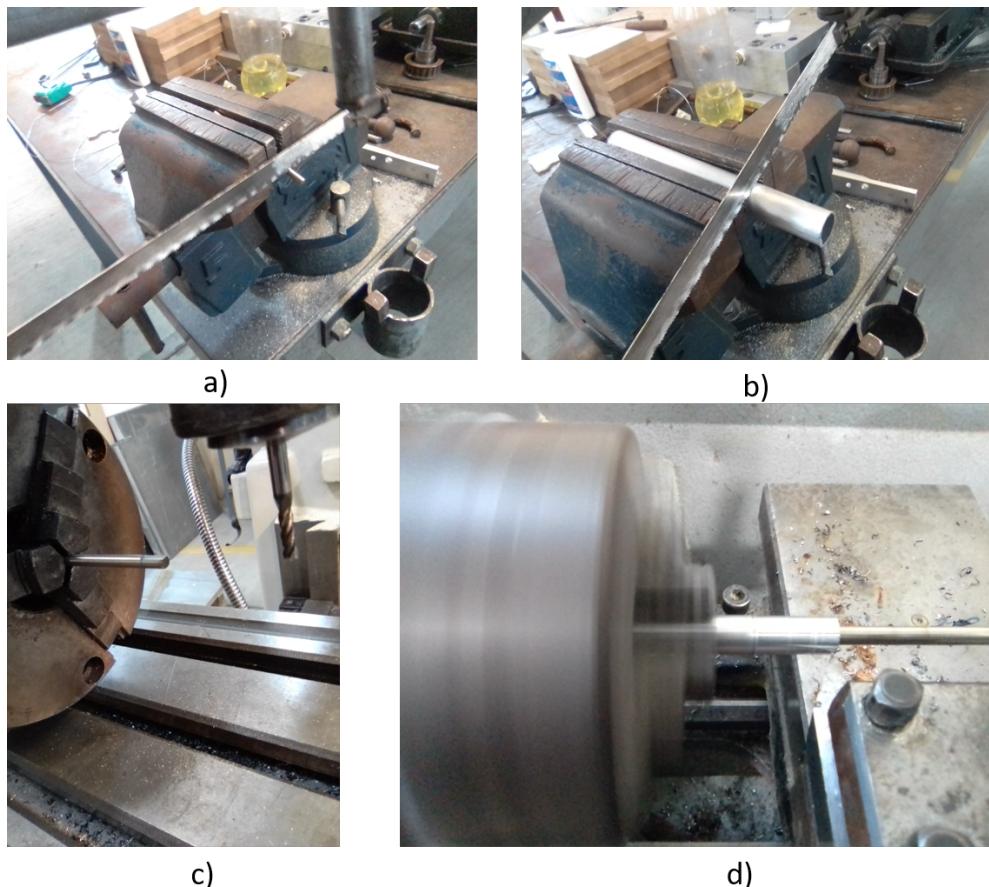


Figura 3.13: Construcción del sistema de rotación multi-eje, a) Corte de la varilla rectificada, b) corte de los tubulares, c) desbaste de la varilla rectificada, d) desbaste de los tubulares.

Con los tubulares y varillas rectificadas en condiciones óptimas para la inserción de los rodamientos, se procedió al ensamblaje del sistema multi-eje. La introducción de los rodamientos, que se mantienen en su posición mediante presión, requirió una aplicación moderada de fuerza. Es fundamental asegurar la alineación precisa de estos elementos, ya que una ligera

desviación podría afectar seriamente el movimiento de rotación, generando una afectación en todo el sistema. Este aspecto se tuvo en cuenta durante la construcción, por lo que el rectificado de los componentes se realizó en un torno, garantizando un desbaste cilíndrico preciso.

El ensamblaje comenzó con la inserción de un rodamiento MR85zz en la varilla rectificada de 5 milímetros. A continuación, se introdujo el tubular 10x8 por un extremo, seguido del segundo rodamiento, asegurando así el tubular 10x8 con la varilla rectificada de 5 mm. De manera similar, se colocaron los rodamientos 6700zz en los tubulares 10x8, con el tubular 17x15 en su posición correspondiente. La Figura 3.14 ilustra el proceso de armado del sistema multi-eje, resaltando la precisión en la alineación de los componentes.

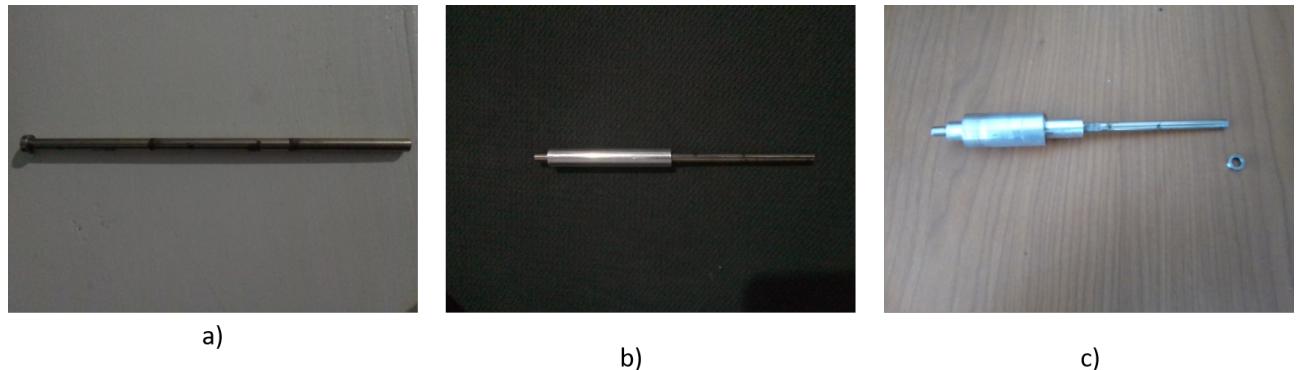


Figura 3.14: Armado del sistema multieje, a) introducción del rodamiento MR85zz, b) introducción del tubular 10x8, c) sistema de rotación multi-eje armado por completo.

Con el sistema multi-eje construido y ensamblado, se procedió a realizar los ejes de los engranes piñones. Estos ejes fueron construidos a partir de una varilla rectificada de 5 mm de diámetro y recortadas a la medida correspondiente por medio de una segueta con arco. Enseguida se realizó un rectificado de las puntas de las varillas para garantizar un mejor acabado, como consiguiente se realizaron los desbastes para la ubicación de los engranes, los cuales son fijados por medio de tornillos prisioneros. Es importante recordar que al tratarse de la colocación de los engranes que controlan los diferentes enlaces, los ejes correspondientes no son idénticos entre sí, ya que las ranuras para los tornillos prisioneros no se encuentran a la misma distancia entre cada uno de ellos. El desbaste para la colocación de los tornillos prisioneros, fue realizada por medio de la fresadora y un cortador vertical de $5/32"$, para lo cual fue necesario realizar varias pasadas y con ello conseguir la longitud y profundidad establecida en los planos de construcción. Así mismo es importante recalcar que estos ejes deben estar construidos de tal forma que sea fácil introducirlos en los rodamientos de la tapa de engranajes, es por ello que se procedió a realizar un desbaste por medio de un torno manual. En la figura 3.15 inciso a), puede observarse la operación de desbaste por medio de la fresadora manual, mientras que la figura 3.15 inciso b) se muestran los ejes completamente maquinados.

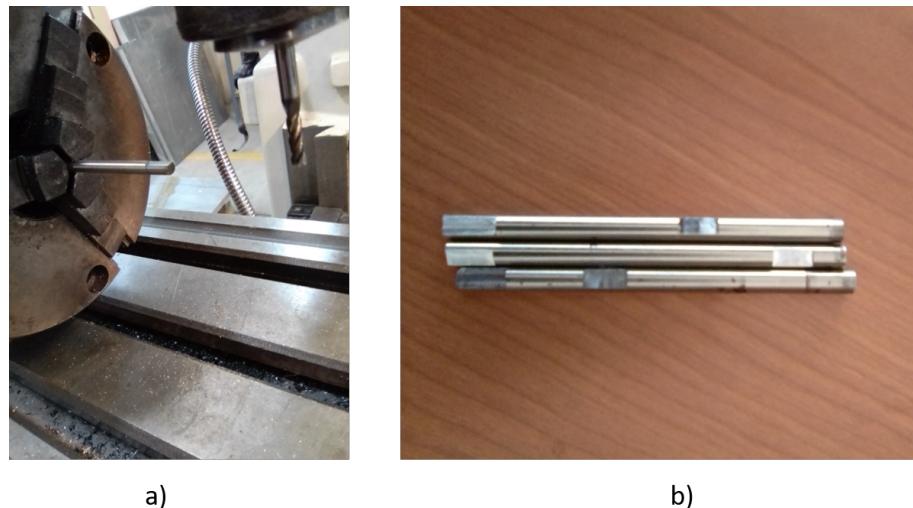


Figura 3.15: Ejes de engranes piñones: a) fresado de los ejes, b) ejes maquinados.

Tras finalizar la construcción del sistema multi-eje, se procedió a fabricar la base para los motorreductores utilizando una impresora 3D Creality[®], configurada con el programa Ultimaker Cura[®]. Los parámetros de impresión fueron ajustados con una densidad de relleno del 60 %, velocidad de impresión de 60 mm/s y un espesor de capa de 0.5 mm. Esta base fue diseñada específicamente para evitar desajustes causados por el movimiento de los motorreductores, asegurando un ajuste preciso mediante tornillos prisioneros.

Dado que la operación de roscado para la inserción de los tornillos prisioneros no es posible con la impresora 3D, se incorporaron tuercas de inserto caliente, las cuales se fijaron mediante calor para proporcionar una rosca firme y segura en la pieza impresa.

Es fundamental destacar que esta base debe integrarse con el rodamiento MR85zz para conectarla al sistema multi-eje mencionado anteriormente. Este rodamiento en el soporte de motorreductores no solo brinda soporte al sistema multi-eje, sino que también permite la rotación libre del eje central del sistema, facilitando un montaje eficiente y efectivo.

La Figura 3.16 ilustra el soporte de motorreductores completamente ensamblado y listo para su integración en el mecanismo.



Figura 3.16: Soporte de motorreductores

El proceso de fabricación de la tapa de engranajes se llevó a cabo de manera similar al soporte de motorreductores, utilizando una impresora 3D y el programa Ultimaker Cura® para la configuración. Esta pieza está equipada con rodamientos que permiten un movimiento libre dentro del sistema multi-eje, al tiempo que restringen el desplazamiento a lo largo de los tubulares. Esto asegura que los rodamientos reduzcan el desgaste por fricción entre los materiales, contribuyendo así a una mayor vida útil del dispositivo. La Figura 3.17 muestra la pieza terminada.

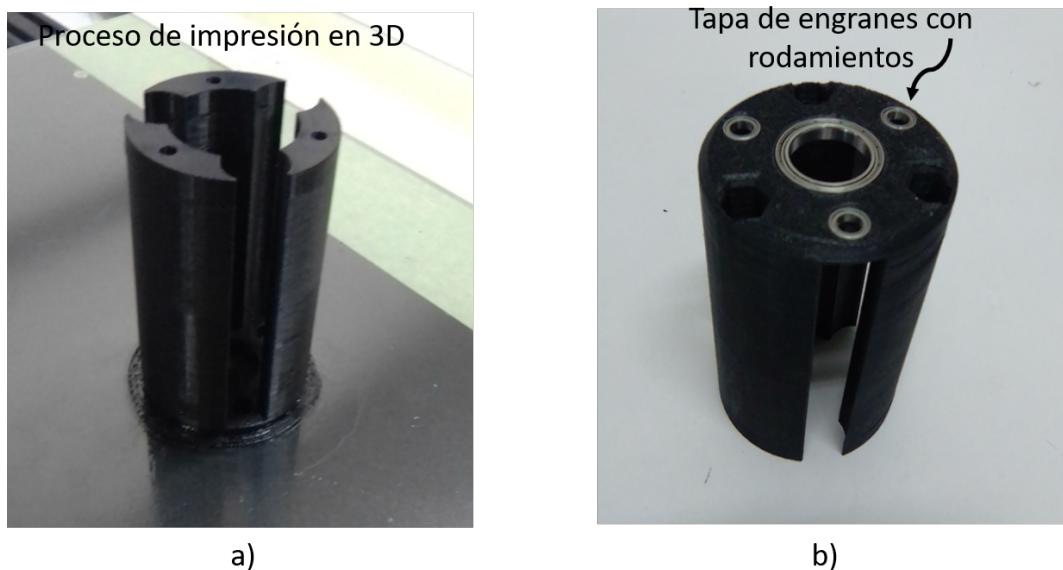


Figura 3.17: a) proceso de impresión de la pieza, b) Tapa terminada para los engranajes.

La siguiente fase consistió en fabricar la tapa de engranajes mediante impresión 3D, utilizando el mismo proceso que para las demás piezas. Esta componente desempeña un papel crucial en el sistema de transmisión de potencia al proteger los engranajes y servir como soporte para el extremo de los ejes de cada engranaje.

Para asegurar un soporte adecuado a los engranajes, la tapa incluye rodamientos estratégicamente ubicados, como se muestra en la Figura 3.17.

Debido a que los engranajes de empuje (piñones) tienen un eje de 5 mm de diámetro y los motorreductores cuentan con un eje de 3 mm de diámetro, es necesario realizar un acoplamiento entre estos ejes. Este proceso se lleva a cabo utilizando el cople de motorreductores, diseñado para unir eficazmente ambos ejes (véase la Figura 3.15). Es importante destacar que este cople incluye orificios roscados para tornillos prisioneros, los cuales garantizan una unión segura entre la varilla rectificada y el eje del motorreductor. El ensamblaje de estos elementos se ilustra en la Figura 3.18 b.

La unión entre la tapa de engranajes y el soporte de los motorreductores se realiza mediante tornillos y tuercas M4, como se muestra en la Figura 3.18 a.

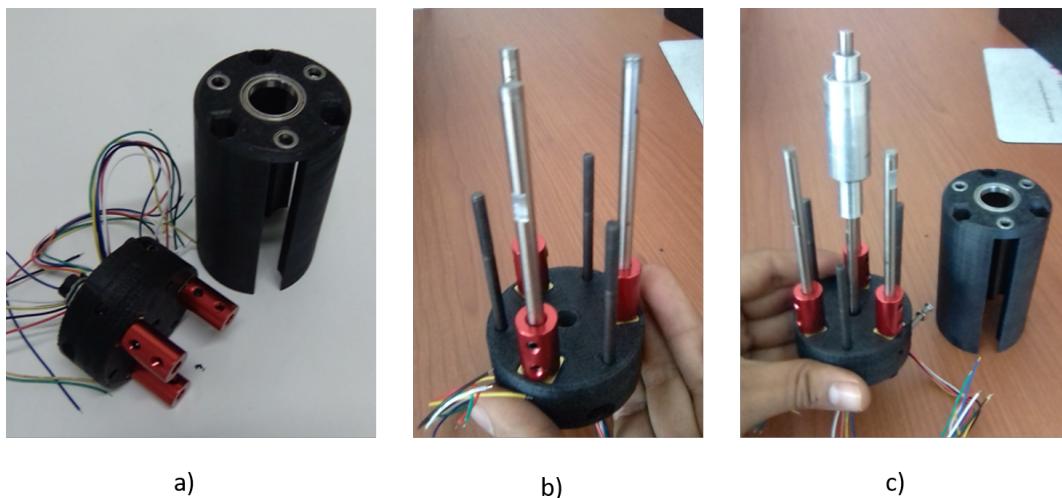


Figura 3.18: Ensamble del soporte de los motorreductores y los ejes de los engranajes. a) Ensamble de motorreductores y cople, b) Ensamble de los ejes de los piñones con los ejes de los motorreductores, c) presentación del sistema multi-eje con el soporte de los motorreductores.

Después de completar la construcción del sistema multi-eje y asegurar los ejes de los engranajes en su lugar, se procedió al ensamblaje de los propios engranajes. Este paso es crucial para finalizar el sistema de movimiento, el cual permite al mecanismo controlar sus operaciones a través de los motorreductores y la tarjeta de control.

Durante el ensamblaje, se prestó especial atención a la distancia entre centros de los engranajes. Esta medida fue meticulosamente calculada y configurada previamente en el diseño tanto del soporte de los motorreductores como de la tapa de engranajes, asegurando un ajuste perfecto entre ellos.

El proceso consistió en colocar cada engrane en su posición correspondiente dentro de los tubulares designados y luego asegurarlos con tornillos prisioneros. En la Figura 3.19 a), se muestra el ensamblaje de los engranajes con el sistema multi-eje. La Figura 3.19 b) ilustra el sistema de movimiento sin la tapa de engranajes ensamblada, mientras que la Figura 3.19 c) presenta el sistema de movimiento completo y funcional.

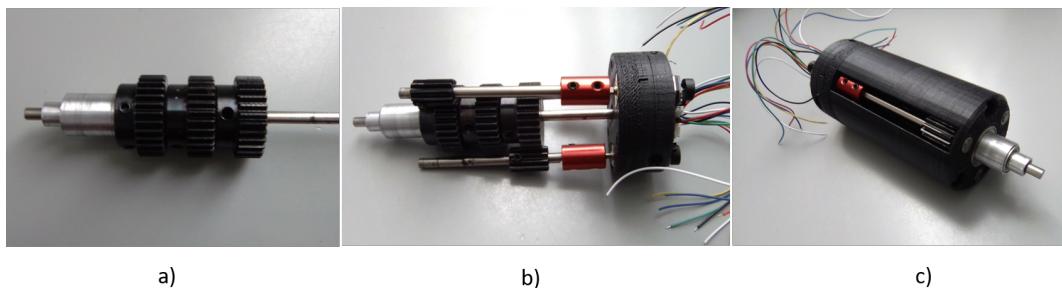


Figura 3.19: Proceso de ensamblaje del sistema de movimiento multi-eje. a) ensamble de los engranajes con el sistema multi-eje, b) ensamble de engranajes con sistema de movimiento, c) sistema de movimiento multi-eje terminado.

El ensamblaje y construcción de los enlaces del mecanismo comenzó con el doblado de pequeñas varillas roscadas M3 utilizando una prensa y una pinza. Durante este proceso, se verificó cuidadosamente el ángulo de flexión para evitar deformaciones que pudieran comprometer la integridad de la pieza. Los enlaces se doblaron según los ángulos especificados en el diseño. Además del doblado, se realizaron cortes precisos en cada una de las piezas para obtener la longitud adecuada, como se muestra detalladamente en la figura 3.20.



Figura 3.20: Varillas roscadas y dobladas para la construcción de los enlaces distales.

Una vez que las varillas roscadas fueron dobladas y cortadas a la medida correspondiente, se procedió a realizar el ensamblaje de las juntas revolutas, las cuales permiten el movimiento adecuado entre los enlaces correspondientes. De esta forma es posible el movimiento entre los elementos, creando un movimiento en cadena ocasionado por el movimiento de los motorreductores. Es importante recordar que al ser éste un elemento roscado, la unión entre cada uno de los elementos está generada por la fuerza de fricción creada por las contratuerzas, fuerza que permite que los elementos se queden fijos temporalmente, a menos hasta que se le provea una fuerza contraria que logre vencer la fuerza de fricción entre las dos tuercas.

Utilizando herramientas precisas como escuadras y reglas, se calibraron y ensamblaron cada uno de los elementos que conforman los enlaces distales y proximales, como se detalla en la Figura 3.21. Este proceso aseguró que cada junta y enlace esté ajustado según las especificaciones del diseño.



Figura 3.21: Ensamble de los enlaces distales.

Para la construcción de los enlaces proximales del mecanismo, se empleó nuevamente la impresora 3D de Creality®. El objetivo principal fue fabricar abrazaderas que aseguraran el soporte y la fijación de las barras roscadas de estos enlaces. Estas abrazaderas fueron

diseñadas específicamente para integrarse correctamente con el sistema multi-eje, por lo que se imprimieron con una densidad del 100 % para garantizar resistencia suficiente a las fuerzas de compresión necesarias para su fijación.

El proceso de impresión de las abrazaderas se detalla en la Figura 3.22 a), mientras que las piezas completamente impresas se muestran en las Figuras 3.22 b, c y d. Cada abrazadera diseñada para los enlaces proximales cuenta con diferentes medidas de orificio, adaptadas específicamente para su sujeción a los tubulares correspondientes del sistema de rotación multi-eje. Estas abrazaderas se aseguran mediante el uso de tornillos tipo allen M3 y tuercas, como se ilustra en la Figura 3.23.

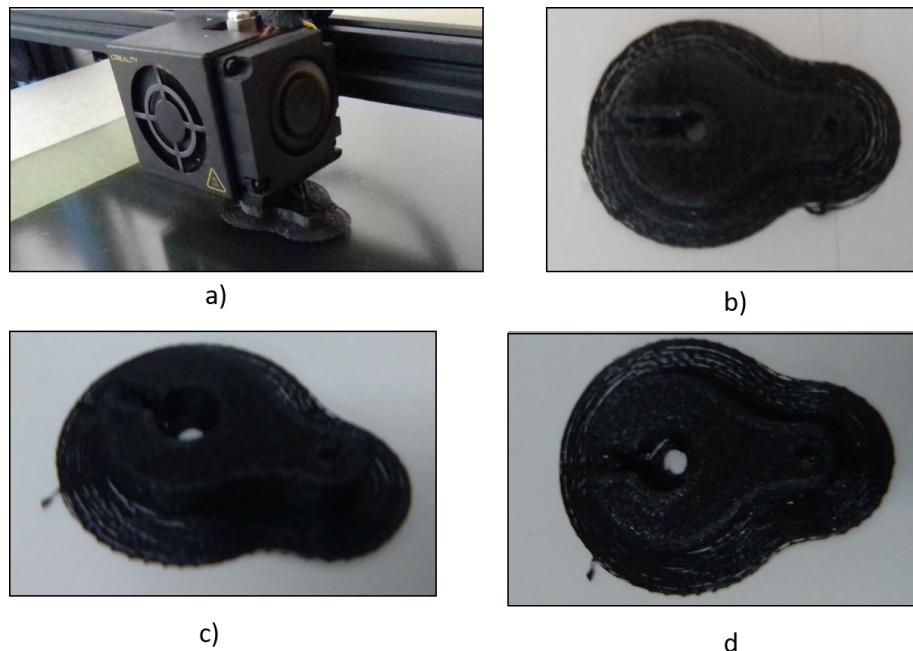


Figura 3.22: Proceso de construcción de las abrazaderas del mecanismo. a) Impresión de las piezas en 3d, b) abrazadera #1, c) abrazadera #2, d) abrazadera #3.

El ensamblaje de las diversas piezas que componen los enlaces proximales se realiza utilizando tuercas M3, las cuales permiten ajustar con precisión la ubicación y orientación de cada componente según el diseño. La correcta colocación de estos componentes es crucial para el buen funcionamiento del mecanismo, ya que cualquier desviación, por mínima que sea, puede desalinear los ejes de rotación y causar un mal funcionamiento del manipulador.

Para asegurar la precisión en el montaje, es indispensable seguir el diseño detalladamente. El uso de herramientas específicas como el Vernier y el transportador es fundamental para medir y ajustar los enlaces exactamente como lo requiere el diseño. Estas herramientas permiten verificar que las piezas estén alineadas correctamente y que los ángulos y distancias cumplan con las especificaciones.

Además, la construcción de los enlaces proximales requiere una atención meticulosa a los detalles, como el aseguramiento adecuado de las tuercas para mantener la posición de las piezas durante el funcionamiento del mecanismo. La resistencia y estabilidad de los enlaces se

garantizan mediante el uso de materiales adecuados y técnicas de ensamblaje precisas.

En la Figura 3.23, se puede observar el proceso de construcción y ensamblaje de los enlaces proximales, mostrando cómo cada componente se integra en el sistema para asegurar una operación fluida y eficiente del manipulador.

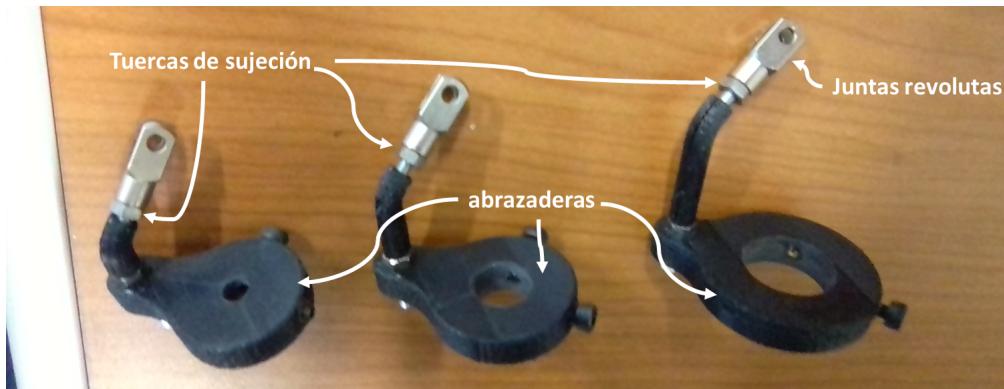


Figura 3.23: Ensamble de los enlaces proximales.

Con los enlaces proximales construidos, se procedió a realizar el ensamblaje de los enlaces distales con la plataforma móvil. Este ensamblaje se realiza mediante tornillos que permiten la unión firme entre la plataforma móvil y las juntas revolutas que conectan los enlaces distales.

Las juntas revolutas juegan un papel crucial en este proceso, ya que permiten la rotación de los enlaces en su eje de acción, asegurando un movimiento libre y preciso. Estas juntas facilitan tanto la instalación como el ensamblaje de los componentes, garantizando la funcionalidad adecuada del sistema.

En la Figura 3.24, se puede observar el ensamblaje entre la plataforma móvil y los enlaces distales, así como los enlaces proximales ya construidos. La figura destaca cómo las juntas revolutas proporcionan libertad de movimiento a cada uno de los enlaces, además de permitir una instalación y ensamblaje sencillo de estos componentes.

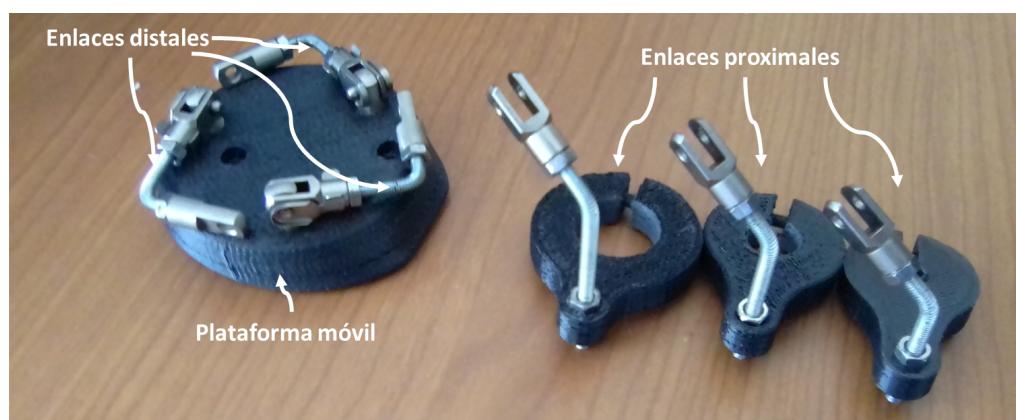


Figura 3.24: Ensamble de los enlaces proximales y distales.

Finalmente, la Figura 3.25 presenta distintas vistas del manipulador en diversas etapas

del ensamblaje. En la subfigura 3.25a se muestra una orientación particular del mecanismo. La subfigura 3.25b ilustra la posición inicial del manipulador, donde se destacan los enlaces y juntas ya ensamblados. En la subfigura 3.25c se observa el manipulador completamente instalado dentro de su carcasa protectora, lo cual permite apreciar claramente cómo se integra y asegura el mecanismo en su estructura final. Finalmente, la subfigura 3.25d exhibe el prototipo completamente ensamblado, con la cubierta externa colocada y los componentes necesarios para establecer su posición inicial debidamente instalados.

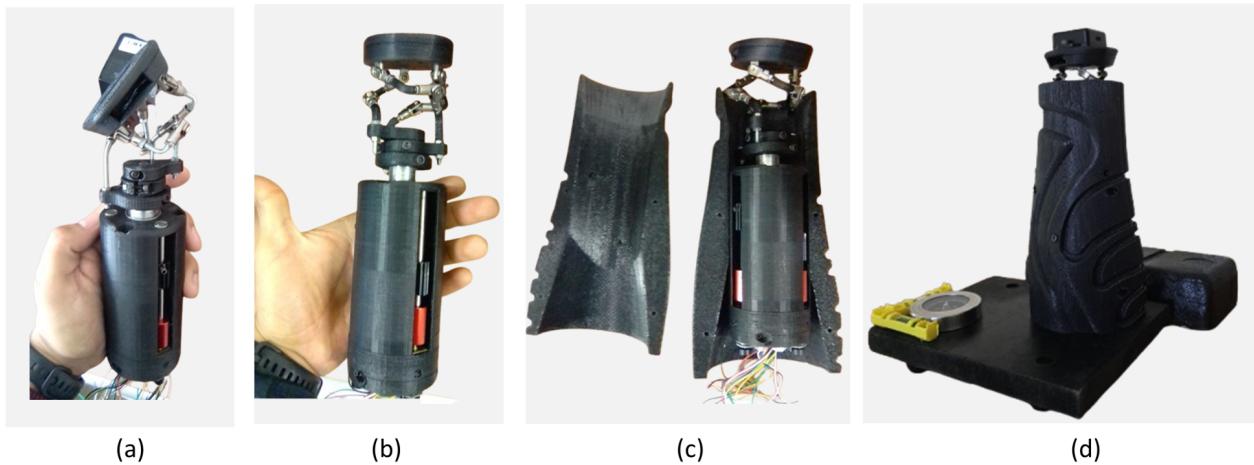


Figura 3.25: Proceso de Ensamblaje del Manipulador: (a) Orientación del manipulador, (b) Posición inicial del manipulador, (c) Manipulador instalado en su carcasa protectora, (d) prototipo completo.

Capítulo 4

Análisis Cinemático del Mecanismo

4.1. Definición del SPM

El mecanismo bajo análisis es un manipulador paralelo esférico tipo 3RRR, el cual está compuesto por una plataforma móvil conectada a una base fija mediante tres cadenas cinemáticas. Cada una de estas cadenas consta de tres articulaciones rotativas (R), de las cuales dos son articulaciones pasivas (denotadas como P en la Figura 4.1), es decir, no son accionadas directamente por un actuador, sino que se mueven en respuesta a las interacciones mecánicas con los demás componentes del mecanismo. La tercera articulación es activa (denotada como A), lo que significa que es controlada directamente por un actuador para proporcionar el movimiento necesario a la plataforma.

Cada cadena cinemática está compuesta por un enlace distal y un enlace proximal, los cuales conectan la plataforma móvil con la base fija. Estos componentes también se pueden observar en la Figura 4.1, lo que permite una mejor comprensión de la configuración del manipulador.

Las cadenas cinemáticas permiten que la plataforma se oriente en el espacio mediante el movimiento de los actuadores ubicados en las juntas actuadas. Este diseño proporciona movimientos de rotación alrededor de un punto fijo, el cual es un punto común en el que convergen los ejes de rotación de todas las articulaciones, tanto pasivas como activas. Es importante destacar que el espacio de trabajo del mecanismo está determinado únicamente por parámetros angulares, ya que no se permite traslación de la plataforma.

Por convención, se utilizan cuatro parámetros angulares que describen la configuración del sistema, los cuales son medidos de forma idéntica en cada una de las cadenas cinemáticas. Cada cadena está dispuesta equidistantemente alrededor de la normal a la plataforma fija en su configuración inicial. Esta disposición asegura que cada una de las cadenas cinemáticas esté distribuida a 120 grados respecto a las demás.

En este tipo de manipulador, los parámetros angulares que describen la configuración del sistema corresponden a los ángulos medidos en cada cadena cinemática. Estos ángulos influyen directamente en la orientación de la plataforma móvil en respuesta al movimiento de las juntas actuadas. Es decir, la definición precisa de estos parámetros afectará de manera significativa el comportamiento del mecanismo ante una entrada proporcionada por los actuadores. Por

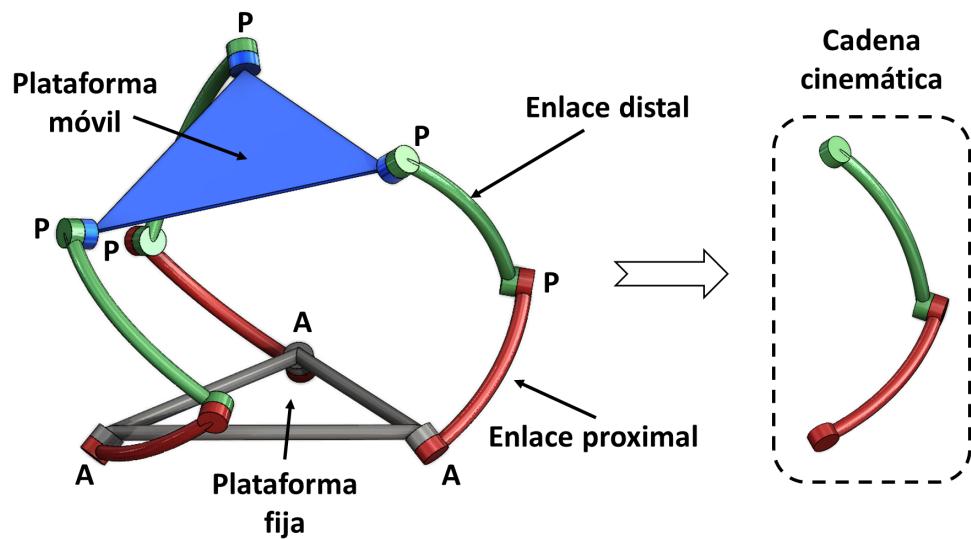


Figura 4.1: Componentes de un SPM.

convención, los parámetros angulares utilizados en este análisis se denotan como γ , β , α_1 y α_2 . Estos ángulos se definen de la siguiente manera:

γ : Ángulo comprendido entre la normal de la plataforma fija y el vector \mathbf{u}_i .

β : Ángulo entre la normal de la plataforma móvil y el vector \mathbf{v}_i .

α_1 : Ángulo entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{w}_i .

α_2 : Ángulo entre los vectores \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i .

En la Figura 4.2, se presentan los parámetros de construcción del modelo del manipulador paralelo esférico en su configuración general. Aunque el presente trabajo se centra en una configuración coaxial, se ha decidido utilizar una representación más general para que los resultados puedan ser aplicables a una variedad de configuraciones. Esta decisión permite que el análisis presentado aquí tenga un valor más amplio, más allá de la configuración específica tratada en este proyecto.

Los vectores que describen los ejes de rotación de cada una de las juntas (tanto activas como pasivas) son los siguientes:

\mathbf{u}_i : Vector que representa el eje de rotación de la junta actuada (B_i), que une la plataforma fija con el eslabón proximal de la i -ésima cadena.

\mathbf{w}_i : Vector que representa el eje de rotación de la junta pasiva (C_i), que conecta el eslabón proximal con el eslabón distal de la i -ésima cadena.

\mathbf{v}_i : Vector que representa el eje de rotación de la junta pasiva (A_i), que conecta el eslabón distal con la plataforma móvil.

n: Vector normal a la plataforma móvil.

Es importante resaltar cómo se numeran las cadenas cinemáticas. En este caso, las cadenas se enumeran en sentido antihorario tomando como referencia el vector **n** (normal a la plataforma móvil). Esta convención será crucial al momento de formular las ecuaciones que describen el movimiento del mecanismo, ya que influirá en el orden y la secuencia en que se aplican las matrices de rotación en las diferentes cadenas.

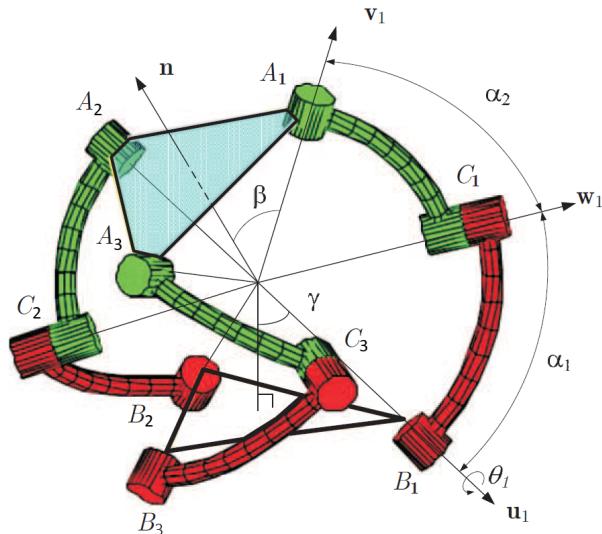


Figura 4.2: Modelo del manipulador paralelo esférico [74].

4.1.1. Marco de referencia global y configuración inicial del mecanismo

Para describir el comportamiento cinemático del manipulador paralelo esférico, es esencial definir un marco de referencia global asociado a la plataforma fija. Este sistema de referencia servirá como base para analizar los movimientos del mecanismo y calcular la orientación de la plataforma móvil durante su operación.

En todo momento, el eje Z del marco de referencia global se define como la normal de la plataforma fija, es decir, es perpendicular al plano de la plataforma y apunta hacia la parte superior del mecanismo. Este eje vertical se utiliza como referencia principal para analizar las rotaciones del sistema, proporcionando un punto fijo para medir los desplazamientos angulares de la plataforma móvil.

El eje Y del marco de referencia se encuentra contenido en el plano formado por el eje Z y el vector **u**₁, el cual corresponde al vector de rotación de la primera cadena cinemática en la junta actuada. La elección del eje Y en esta dirección establece una referencia clara con respecto a la primera cadena del mecanismo, proporcionando un eje ortogonal en el plano de referencia que facilita la descripción de la orientación de los demás elementos.

Finalmente, el eje X se define como perpendicular tanto al eje Z como al eje Y, completando así un sistema de coordenadas ortonormal dextrógiro que se empleará para la representación cinemática del manipulador.

La definición precisa de este marco de referencia global no solo facilita el análisis de las orientaciones de la plataforma móvil, sino también la orientación de los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i . Al contar con un sistema de coordenadas fijo en la plataforma base, es posible realizar un seguimiento detallado de las rotaciones y movimientos relativos de todos los elementos del mecanismo en el espacio tridimensional, simplificando así el análisis de su cinemática.

En su configuración inicial, el manipulador se encuentra en una posición neutra, donde las tres cadenas cinemáticas están distribuidas simétricamente alrededor del eje Z. Esta simetría se manifiesta en que cada cadena está separada por un ángulo de 120 grados con respecto a las demás, formando una distribución equilátera alrededor de la plataforma fija. Esta disposición es especialmente útil para el análisis cinemático del mecanismo, ya que se parte de una configuración equilibrada y geométricamente simétrica, lo que simplifica los cálculos y la comprensión del comportamiento del sistema.

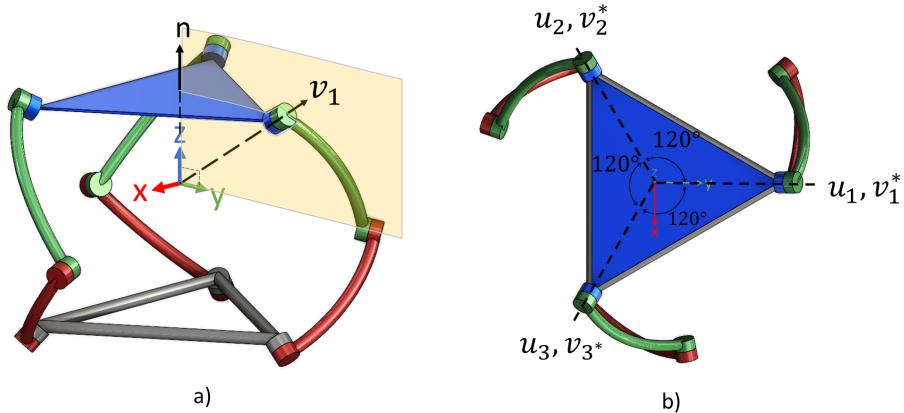


Figura 4.3: Sistema de referencia fijo del manipulador.

Un aspecto crucial en esta configuración es la relación entre los ejes de rotación \mathbf{v}_i de las cadenas cinemáticas y el sistema de coordenadas móviles. Aunque el sistema de referencia móvil ($\mathbf{X}'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}'$) no se presenta en la Figura 4.3, es importante tener en cuenta que en la configuración inicial, este sistema coincide con el sistema de referencia fijo. Por convención, el sistema de coordenadas móviles se establece de modo que su eje Z sea colineal con la normal de la plataforma móvil, apuntando hacia la parte superior del mecanismo. Además, el eje Y se define de tal manera que se encuentra contenido en el plano formado por la normal de la plataforma móvil y el vector \mathbf{v}_1 . Finalmente, el eje X es perpendicular tanto al eje Z como al eje Y, completando el sistema de coordenadas ortonormal dextrógiro que se empleará para describir los movimientos de la plataforma móvil.

En la Figura 4.3(b) se muestra una vista superior del mecanismo, donde se puede apreciar la disposición inicial de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i . Tal como se mencionó, los vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , y \mathbf{u}_3 están separados entre sí por 120 grados, y lo mismo ocurre con los vectores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 . Es importante destacar que las proyecciones de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i en el plano XY son colineales

en esta configuración inicial, lo que proporciona un punto de partida ordenado y claro para el análisis de la posición del mecanismo.

Otro factor relevante en esta configuración inicial es la posición de los vectores \mathbf{w}_i , que definen la orientación de las juntas pasivas entre los enlaces proximales y distales. Según la definición de los sistemas de coordenadas de las plataformas fija y móvil, existen dos maneras de orientar el vector \mathbf{w}_i en cada cadena cinemática, lo que da lugar a ocho configuraciones posibles para el mecanismo en su estado inicial. Estas configuraciones están representadas en la Figura 4.4, desde el inciso (a) hasta el inciso (h), y describen las diferentes posiciones de las juntas pasivas.

Las dos formas principales de orientar el vector \mathbf{w}_i son las siguientes:

- ✓ Forma 1: El vector \mathbf{w}_i está dirigido en sentido antihorario con respecto al eje \mathbf{n} , lo que se conoce como la configuración en posición derecha.
- ✓ Forma 2: El vector \mathbf{w}_i está dirigido en sentido horario con respecto al eje \mathbf{n} , conocido como la configuración en posición izquierda.

Este tipo de orientación es comparable a las configuraciones de codo arriba y codo abajo en manipuladores seriales, que en este contexto son denominadas codo derecho y codo izquierdo. Para el presente análisis, se ha optado por utilizar la Forma 1, donde todos los vectores \mathbf{w}_i están en la posición derecha, como se muestra en la Figura 4.4(a).

La elección de esta convención no es arbitraria. Se ha seleccionado la configuración más simétrica para simplificar el análisis cinemático del mecanismo. Si bien es posible elegir cualquier otra combinación de las configuraciones de los vectores \mathbf{w}_i , la simetría que ofrece esta disposición facilita la resolución de las ecuaciones y la comprensión general del comportamiento del sistema.

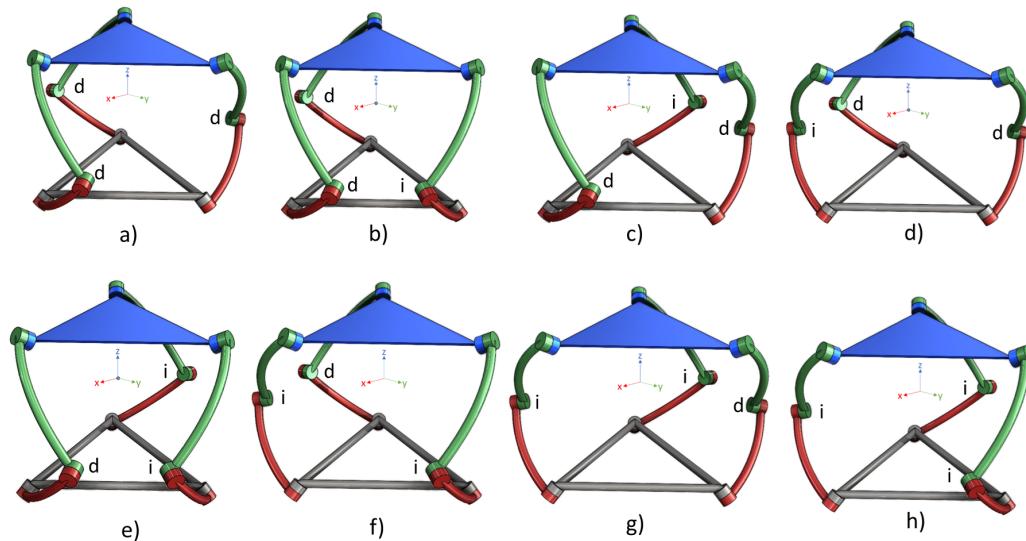


Figura 4.4: Posibles posiciones iniciales del manipulador.

En este marco de referencia, el análisis de posición directa y el estudio de las trayectorias de la plataforma móvil se llevarán a cabo en términos de rotaciones alrededor de los ejes definidos. Las rotaciones se describirán utilizando ángulos de Euler, que proporcionan una representación matemática precisa de la orientación de la plataforma en cualquier momento.

4.2. Análisis de posición del SPM

El análisis de posición es una etapa esencial en el estudio cinemático de los mecanismos, ya que describe la disposición espacial y orientación de sus componentes en diversas configuraciones. Este análisis establece la relación entre los movimientos de las juntas activas y la posición final de los componentes del sistema, determinando cómo cada movimiento influye en la orientación y disposición de las distintas partes del mecanismo.

Para el manipulador paralelo esférico, el análisis se basa en las contribuciones de [35] y [74]. Se comienza con el cálculo de los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i en sus configuraciones iniciales, fundamentales para describir el comportamiento cinemático del mecanismo y establecer las relaciones geométricas entre los componentes y el sistema de referencia.

Definir la posición inicial del mecanismo es crucial, ya que proporciona una referencia clara sobre su disposición antes de aplicar cualquier movimiento. Esta referencia facilita el estudio de las trayectorias posteriores y las configuraciones del sistema en el espacio tridimensional.

En el caso de la **cinemática directa**, el análisis parte de las entradas del mecanismo, como los desplazamientos de las juntas activas, para determinar la salida en términos de los ángulos de Euler. Este proceso permite relacionar las entradas del sistema con la orientación final de la plataforma móvil. Por otro lado, la **cinemática inversa** realiza el proceso inverso, comenzando con los ángulos de Euler y encontrando las entradas del mecanismo que resultan en una orientación específica de la plataforma.

4.2.1. Cinemática directa de posición

Definición de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i^*

Para establecer el vector \mathbf{u}_1 en términos de sus componentes cartesianas, se parte del sistema de referencia fijo. En la Figura 4.5 se presenta una vista del manipulador en el plano YZ, donde los ejes del sistema de referencia se han trasladado a lo largo de los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* , siendo \mathbf{v}_1^* la configuración inicial de \mathbf{v}_1 .

En la Figura 4.5, se observa que los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* se encuentran en el plano YZ, lo que implica que sus componentes a lo largo del eje X son nulas. Además, se identifican los ángulos β y γ , que son fundamentales para describir la orientación de los vectores en este plano.

A partir de esta disposición geométrica y aplicando las relaciones trigonométricas pertinentes, los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_1 = 0i + \sin(\gamma)j - \cos(\gamma)k$$

y

$$\mathbf{v}_1^* = 0i + \sin(\beta)j + \cos(\beta)k$$

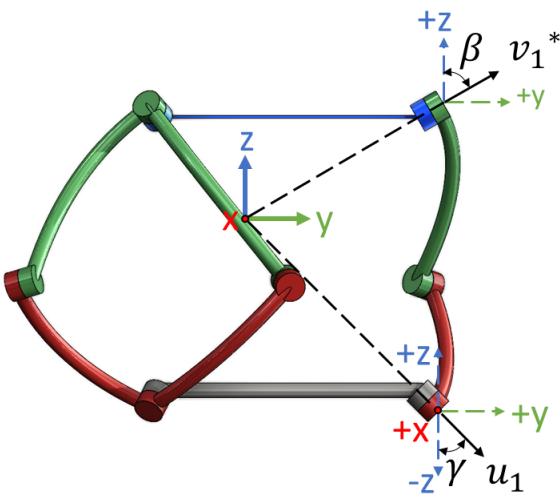


Figura 4.5: Manipulador en su configuración inicial visto desde el plano YZ.

Con estas expresiones, se determinan las componentes de los vectores en su configuración inicial, lo cual resulta fundamental para el posterior análisis cinemático del manipulador.

En la Figura 4.3, inciso b, se muestra la configuración inicial del manipulador en el plano XY. En esta representación se puede observar la distribución uniforme de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i^* , donde cada cadena cinemática presenta una rotación de $2\pi/3$ (120 grados) respecto a la anterior. Esta distribución regular permite determinar los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i^* para las cadenas restantes a partir de los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* previamente calculados.

Para obtener los vectores de las otras cadenas, basta con aplicar una rotación alrededor del eje Z con un ángulo de $2\pi/3$ entre cada cadena cinemática, de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{u}_2 = \text{Rot}_z(\mathbf{u}_1, 2\pi/3) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = \text{Rot}_z(\mathbf{u}_1, 4\pi/3), \quad \mathbf{v}_2^* = \text{Rot}_z(\mathbf{v}_1^*, 2\pi/3)y \quad \mathbf{v}_3^* = \text{Rot}_z(\mathbf{v}_1^*, 4\pi/3)$$

Realizando estas rotaciones, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , \mathbf{v}_2^* y \mathbf{v}_3^* :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2\pi/3) \sin(\gamma) \\ \cos(2\pi/3) \sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{bmatrix} \cos(4\pi/3) & -\sin(4\pi/3) & 0 \\ \sin(4\pi/3) & \cos(4\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(4\pi/3) \sin(\gamma) \\ \cos(4\pi/3) \sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_2^* &= \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2\pi/3) \sin(\beta) \\ \cos(2\pi/3) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_3^* = \begin{bmatrix} \cos(4\pi/3) & -\sin(4\pi/3) & 0 \\ \sin(4\pi/3) & \cos(4\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(4\pi/3)\sin(\beta) \\ \cos(4\pi/3)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que es posible expresar de manera más compacta las componentes de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i^* utilizando la siguiente notación:

$$\mathbf{u}_i = [-\sin(\eta_i)\sin(\gamma)\cos(\eta_i)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)]^T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{v}_i^* = [-\sin(\eta_i)\sin(\beta)\cos(\eta_i)\sin(\beta)\cos(\beta)]^T \quad (4.2)$$

donde el ángulo η_i está definido como:

$$\eta_i = 2(i-1)\frac{\pi}{3} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Estas expresiones permiten describir de manera general las posiciones de los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i^* para las tres cadenas cinemáticas del manipulador, facilitando su análisis en el contexto de la configuración inicial.

Definición de los vectores \mathbf{w}_i

Para proceder a determinar \mathbf{w}_1^* , se tomará como referencia la Figura 4.6 en la que se observa que el vector \mathbf{w}_1^* no se encuentra en un plano definido únicamente por dos componentes unitarias del sistema de referencia, a diferencia de los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* . Debido a esta particularidad, la determinación de \mathbf{w}_1^* resulta más compleja y no tan directa como en el caso de los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1 .

Es importante destacar que existen ciertas relaciones geométricas entre el vector \mathbf{w}_1^* y los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1 . En primer lugar, los vectores \mathbf{w}_1^* y \mathbf{u}_1 forman un ángulo α_1 entre ellos. Además, los vectores \mathbf{w}_1^* y \mathbf{v}_1^* están separados por un ángulo correspondiente al parámetro α_2 . Con base en estas relaciones, y recordando que el vector \mathbf{w}_1^* es unitario, se pueden establecer las siguientes ecuaciones matemáticas:

$$\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{w}_1^* = \cos(\alpha_2)$$

$$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{w}_1^* = \cos(\alpha_1)$$

$$\|\mathbf{w}_1^*\| = 1$$

donde \mathbf{w}_1^* puede descomponerse en sus componentes unitarias de la siguiente manera:

$$\mathbf{w}_1^* = [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]^T$$

De esta forma, al sustituir lo encontrado para los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* se obtiene lo siguiente:

$$[0, \sin(\beta), \cos(\beta)]^T \cdot [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]^T = \cos(\alpha_2)$$

$$[0, \sin(\gamma), -\cos(\gamma)]^T \cdot [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]^T = \cos(\alpha_1)$$

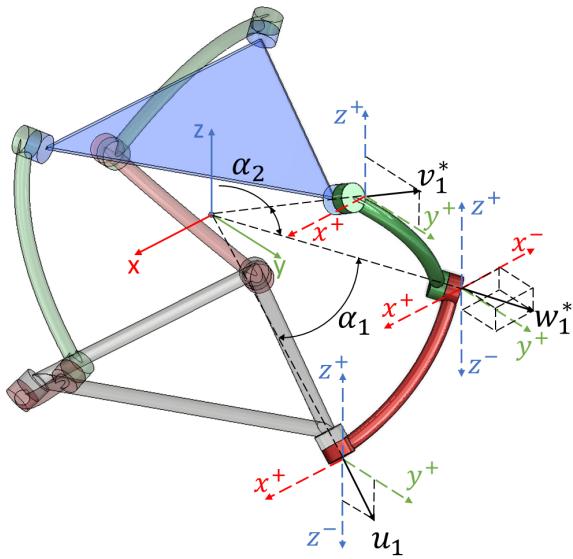


Figura 4.6: Relaciones del vector \mathbf{w}_1^* con los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1^* .

$$\| [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]^T \| = 1$$

Al llevar a cabo las operaciones de producto punto y calcular la norma del vector, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} w_{1y}^* \sin(\beta) + w_{1z}^* \cos(\beta) &= \cos(\alpha_2) \\ w_{1y}^* \sin(\gamma) - w_{1z}^* \cos(\gamma) &= \cos(\alpha_1) \\ (w_{1x}^*)^2 + (w_{1y}^*)^2 + (w_{1z}^*)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Se observa que se dispone de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (w_{1y}^* y w_{1z}^*), las cuales pueden resolverse mediante métodos sencillos, como el método de Cramer [75]. Por otro lado, se cuenta con una ecuación no lineal en términos de tres variables, que puede resolverse en función de w_{1x}^* una vez que se obtenga la solución del sistema lineal. Esta solución puede sustituirse para simplificar la ecuación y obtener un polinomio de segundo grado en función de la variable a determinar (w_{1x}^*).

Una vez resuelto el sistema, se obtienen las siguientes soluciones:

$$w_{1z}^* = \frac{\sin(\gamma)\cos(\alpha_2) - \sin(\beta)\cos(\alpha_1)}{\sin(\beta + \gamma)} \quad (4.4)$$

$$w_{1y}^* = \frac{\cos(\alpha_1)\cos(\beta) + \cos(\alpha_2)\cos(\gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \quad (4.5)$$

$$w_{1x}^* = \pm \sqrt{1 - \frac{(\cos(\alpha_1)\cos(\beta) + \cos(\alpha_2)\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma)\cos(\alpha_2) - \sin(\beta)\cos(\alpha_1))^2}{\sin(\beta + \gamma)^2}} \quad (4.6)$$

Se observa que la razón por la cual w_{1x}^* presenta dos posibles valores se debe a que la junta pasiva asociada a dicho vector puede posicionarse en la configuración de codo derecho o codo

izquierdo, tal como se mencionó anteriormente. En este contexto, se seleccionará como solución el caso correspondiente al discriminante negativo, dado que se ha establecido la configuración de codo derecho desde un principio.

Para determinar todos los vectores \mathbf{w}_i^* , es suficiente aplicar una rotación alrededor del eje z , al igual que se realizó con los vectores \mathbf{v}_1^* y \mathbf{u}_1^* , para obtener así los vectores restantes. Una vez completado este proceso, es posible calcular \mathbf{w}_i^* de la siguiente manera:

$$\mathbf{w}_i^* = [w_{ix}^*, w_{iy}^*, w_{iz}^*]^T$$

donde:

$$w_{ix}^* = \cos(\eta_i)w_{1x}^* - \sin(\eta_i)w_{1y}^* \quad (4.7)$$

$$w_{iy}^* = \sin(\eta_i)w_{1x}^* + \cos(\eta_i)w_{1y}^* \quad (4.8)$$

$$w_{iz}^* = w_{1z}^* \quad (4.9)$$

Cálculo de la Posición del Vector \mathbf{w}_i

Para iniciar este análisis, es fundamental destacar que, tal como se mencionó en la etapa de obtención de la posición inicial, el vector \mathbf{u}_i permanece invariable con respecto al sistema de referencia fijo. Esto implica que su posición no se verá afectada en ningún momento, independientemente de los movimientos aplicados en las juntas activas. Sin embargo, los vectores \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i sí experimentarán cambios en su posición con respecto al sistema de referencia fijo cuando se introduzca movimiento en dichas juntas.

Con esta aclaración en mente, el análisis de posición se enfocará en estudiar el comportamiento del vector \mathbf{w}_i bajo la influencia de los movimientos generados por las juntas activas, los cuales serán denotados como θ_i . Este enfoque permitirá comprender cómo se modifica la ubicación y orientación de los vectores involucrados en función de las variaciones en las entradas de control.

Para llevar a cabo el análisis de posición del vector \mathbf{w}_i , se empleará el método de Denavit-Hartenberg [64], el cual es ampliamente utilizado en el estudio de mecanismos debido a su simplicidad y eficacia en la representación de transformaciones entre sistemas de referencia. Este método permite describir la relación entre las juntas y los eslabones de un mecanismo mediante una secuencia de transformaciones homogéneas.

Es fundamental recordar los pasos clave del método, siendo uno de los más importantes la correcta asignación de los sistemas de referencia a cada eslabón y junta. Para este análisis, se construirá la tabla completa de parámetros de Denavit-Hartenberg, abarcando desde el sistema de referencia fijo hasta el sistema móvil. Aunque se desarrollará la tabla en su totalidad para demostrar el procedimiento, en este caso particular, solo se utilizarán los primeros dos renglones, ya que son suficientes para determinar la posición del vector \mathbf{w}_i .

En la Figura 4.7a), se muestra el mecanismo en su configuración inicial, visualizado desde el plano XZ , con los correspondientes sistemas de referencia asignados a cada junta de la primera cadena cinemática. En la Figura 4.7b), se presenta la configuración vista desde el plano YZ . En ambas representaciones, se destacan principalmente los ejes z_{ij} de los sistemas de coordenadas, donde i denota la cadena i -ésima y j la j -ésima junta de dicha cadena. Estos

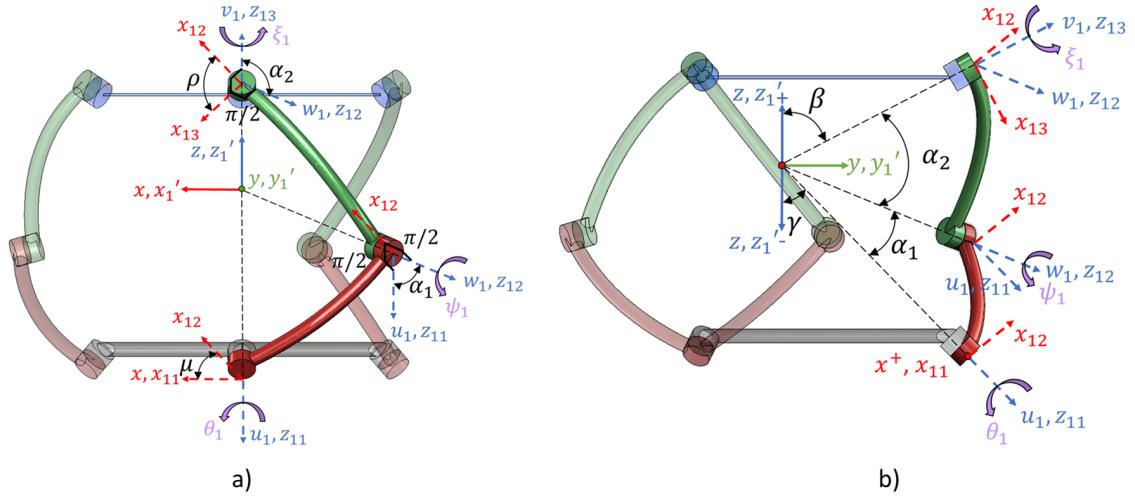


Figura 4.7: Sistemas de referencia para la convención de Denavit-Hartenberg.

ejes han sido establecidos directamente sobre los ejes de rotación de las diferentes juntas, conforme lo indica el método de Denavit-Hartenberg.

Asimismo, se incluyen los ejes x de los distintos sistemas de referencia. Es importante señalar que para llevar a cabo este proceso es necesario seguir los pasos del método de Denavit-Hartenberg, de manera meticolosa. Además, se ha definido un sistema de referencia adicional cuyo eje y'_i se sitúa en el plano formado por Z' y z_{i3} , mientras que el eje z'_i siempre coincide con el eje Z' del sistema de coordenadas móviles ($X'Y'Z'$).

La introducción de este sistema de referencia adicional permite analizar cada cadena cinemática del manipulador como si fuera un manipulador serial independiente. Conociendo los desplazamientos angulares correspondientes a cada una de las juntas de una cadena cinemática (θ_i , ψ , y ξ), es posible determinar la orientación final del manipulador sin necesidad de considerar las demás cadenas. Sin embargo, aunque este enfoque podría simplificar el análisis, el objetivo es derivar ecuaciones que relacionen las entradas del manipulador con el sistema de referencia móvil en su totalidad.

Por esta razón, el análisis independiente de cada cadena cinemática solo sería útil en dos situaciones específicas: la primera, si se conocieran los desplazamientos angulares tanto de las juntas activas como de las pasivas; la segunda, si se seleccionaran todas las juntas de una cadena como actuadas, lo cual implicaría conocer todos los desplazamientos angulares de esa cadena. Dado que estas condiciones no se cumplen en este caso, el presente trabajo se limitará a utilizar únicamente una parte de la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg para determinar la posición de los vectores w_i en función de las variables de entrada del mecanismo (θ_i) y los parámetros constantes del mismo.

De esta manera, se han establecido cuatro sistemas de referencia para cada cadena cinemática, además del sistema de referencia fijo y el sistema de referencia móvil. Es importante aclarar que el sistema de referencia móvil no ha sido representado en los incisos de la Figura 4.3, con el objetivo de evitar una sobrecarga de información en la visualización. No obstante,

debe recordarse que este sistema de referencia está adherido a la plataforma móvil, tal como se mencionó anteriormente. Este sistema resulta esencial para el análisis cinemático, ya que permite describir la orientación final del mecanismo en función de las entradas activas del sistema.

Tabla 4.1: Tabla de parametrización de Denavit-Hartenberg.

j	z		x	
	θ_j	d_j	a_j	α_j
1	η_i	0	0	$\gamma - \pi$
2	$\theta_i - \mu$	0	0	α_1
3	$\psi_i + \rho$	0	0	α_2
4	$\xi_i - \sigma$	0	0	β
5	$-\eta_i$	0	0	0

En la Tabla 4.1 se presentan los parámetros de Denavit-Hartenberg, junto con los sistemas de referencia correspondientes. Es importante señalar que, para pasar del sistema de referencia fijo XYZ al sistema $X_{i1}Y_{i1}Z_{i1}$, se debe utilizar la primera fila de la tabla de parámetros. Asimismo, para pasar del sistema $X_{i1}Y_{i1}Z_{i1}$ al sistema $X_{i2}Y_{i2}Z_{i2}$, se siguen los pasos indicados en la segunda fila de la tabla de Denavit-Hartenberg.

En dicha tabla, todos los parámetros son conocidos, excepto los ángulos μ , ρ y σ . Estos ángulos representan las relaciones angulares iniciales entre un sistema de referencia y otro, en su configuración inicial. Los ángulos μ y ρ están señalados en la Figura 4.7, mientras que el ángulo σ también es un parámetro fijo que se establece desde la configuración inicial. Estos ángulos fijos son esenciales para definir la configuración del sistema en su estado inicial.

A continuación, se detallan las definiciones de los ángulos μ , ρ y σ para una mayor comprensión:

μ : Ángulo medido desde el eje x_{11} al eje x_{12} en la configuración inicial.

ρ : Ángulo medido desde el eje x_{12} al eje x_{13} en la configuración inicial.

σ : Ángulo medido desde el eje x_{13} al eje x'_1 en la configuración inicial.

Es relevante destacar que los ángulos μ , ρ y σ pueden ser medidos en cualquier cadena cinemática, ya que se trata de cadenas cinemáticas homogéneas. Sin embargo, por motivos de practicidad, en este análisis se ha utilizado la primera cadena cinemática como referencia.

Con el objetivo de determinar la matriz de rotación que relaciona el sistema $X_{i2}Y_{i2}Z_{i2}$ con el sistema de referencia fijo XYZ , se utilizarán las primeras dos filas de la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. A partir de ello, se pueden construir las matrices de rotación Q_{i1} y Q_{i2} , las cuales están definidas de la siguiente manera:

$$Q_{i1} = \begin{bmatrix} \cos(\eta_i) & \cos(\gamma) \sin(\eta_i) & -\sin(\gamma) \sin(\eta_i) \\ \sin(\eta_i) & -\cos(\gamma) \cos(\eta_i) & \cos(\eta_i) \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$Q_{i2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i - \mu) & -\cos(\alpha_1) \sin(\theta_i - \mu) & \sin(\alpha_1) \sin(\theta_i - \mu) \\ \sin(\theta_i - \mu) & \cos(\alpha_1) \cos(\theta_i - \mu) & -\sin(\alpha_1) \cos(\theta_i - \mu) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}$$

Al multiplicar estas matrices de rotación de la forma:

$$Q_i = Q_{i1}Q_{i2}$$

se obtiene la matriz de rotación Q_i , la cual se puede utilizar para calcular el vector \mathbf{w}_i . Este vector se encuentra multiplicando Q_i por el vector e , donde e representa el eje de rotación del vector \mathbf{w}_i visto desde el sistema $X_{i2}Y_{i2}Z_{i2}$. Cabe destacar que el vector e es simplemente el vector unitario alineado con el eje Z_{i2} , definido como:

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se puede encontrar el vector \mathbf{w}_i mediante la siguiente operación:

$$\mathbf{w}_i = Q_i \cdot e$$

Al realizar la multiplicación anterior, se obtiene el vector \mathbf{w}_i en términos de los parámetros del sistema:

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} -\sin(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) + (\cos(\eta_i) \sin(\theta_i - \mu) - \sin(\eta_i) \cos(\gamma) \cos(\theta_i - \mu)) \sin(\alpha_1) \\ \cos(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) + (\sin(\eta_i) \sin(\theta_i - \mu) + \cos(\eta_i) \cos(\gamma) \cos(\theta_i - \mu)) \sin(\alpha_1) \\ -\cos(\gamma) \cos(\alpha_1) + \sin(\gamma) \cos(\theta_i - \mu) \sin(\alpha_1) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Determinación del ángulo μ

Hasta este punto, solo falta calcular el ángulo μ para determinar el vector \mathbf{w}_i . Para lograr esto, es útil observar nuevamente la Figura 4.7, en la cual el ángulo μ corresponde al ángulo formado entre los ejes x_{11} y x_{12} cuando el sistema está en su configuración inicial. Además, como puede apreciarse en la misma Figura, el eje x_{11} coincide con el eje x del sistema de coordenadas fijo en su configuración inicial. Por lo tanto las incógnitas resultan ser el ángulo μ y la dirección del eje x_{12} .

Se sabe también que el eje x_{12} es perpendicular tanto al eje z_{12} como al eje z_{11} . Esta condición se deriva de la convención de Denavit-Hartenberg, la cual establece que el eje x_i debe cumplir las condiciones de perpendicularidad con respecto a los ejes z_i y z_{i-1} . De igual forma, es conocido que el eje $z_{11} = \mathbf{u}_1$, mientras que $z_{12} = \mathbf{w}_1$, el cual, en su configuración inicial, se convierte en $z_{12} = \mathbf{w}_1^*$.

Con estas definiciones, el eje x_{12} puede expresarse de la siguiente manera:

$$x_{12} = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{w}_1^*}{|\mathbf{u}_1| |\mathbf{w}_1^*| \sin(\alpha_1)}$$

Considerando que tanto \mathbf{u}_1 como \mathbf{w}_1^* son vectores unitarios, y sustituyendo los vectores $\mathbf{u}_1 = [0, \sin(\gamma), -\cos(\gamma)]^T$ y $\mathbf{w}_1^* = [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]^T$, se obtiene lo siguiente:

$$x_{12} = \frac{[0, \sin(\gamma), -\cos(\gamma)] \times [w_{1x}^*, w_{1y}^*, w_{1z}^*]}{\sin(\alpha_1)}$$

Al desarrollar el producto cruz, el resultado es:

$$x_{12} = \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \begin{bmatrix} \sin(\gamma)w_{1z}^* + \cos(\gamma)w_{1y}^* \\ -\cos(\gamma)w_{1x}^* \\ -\sin(\gamma)w_{1x}^* \end{bmatrix}$$

Como se mencionó anteriormente, el ángulo μ es el ángulo comprendido entre los ejes x_{11} y x_{12} . Para calcularlo, se puede usar la definición del producto punto:

$$x_{11} \cdot x_{12} = |x_{11}| |x_{12}| \cos(\mu)$$

Dado que ambos vectores son unitarios, se puede simplificar la ecuación de la siguiente manera:

$$\cos(\mu) = \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\gamma)w_{1z}^* + \cos(\gamma)w_{1y}^* \\ -\cos(\gamma)w_{1x}^* \\ -\sin(\gamma)w_{1x}^* \end{bmatrix}$$

Finalmente, desarrollando el producto punto y despejando el ángulo μ , se obtiene:

$$\mu = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sin(\alpha_1)} (\cos(\gamma)w_{1y}^* + \sin(\gamma)w_{1z}^*) \right) \quad (4.11)$$

Determinación del ángulo α_3

Ahora se procede a determinar el ángulo α_3 , definido como el ángulo entre los vectores \mathbf{v}_i correspondientes a cada cadena cinemática. Para ello, se recomienda observar la Figura 4.8, en la que se ilustra en color amarillo una pirámide regular generada por la plataforma móvil y los vectores \mathbf{v}_i . Es relevante señalar que, debido a la configuración del manipulador, esta pirámide mantiene su forma independientemente de la orientación de la plataforma móvil. Esta propiedad geométrica simplifica considerablemente la tarea de encontrar el ángulo α_3 , ya que es posible aprovechar ciertas características geométricas para obtener una solución en función del parámetro de construcción β . Aunque el valor del ángulo α_3 ha sido reportado en trabajos previos, como en [76], normalmente se presenta directamente como un resultado conocido, sin detallar el razonamiento geométrico detrás de su obtención. Por este motivo, en el presente trabajo se aborda la resolución de este problema, con el objetivo de ofrecer una explicación clara.

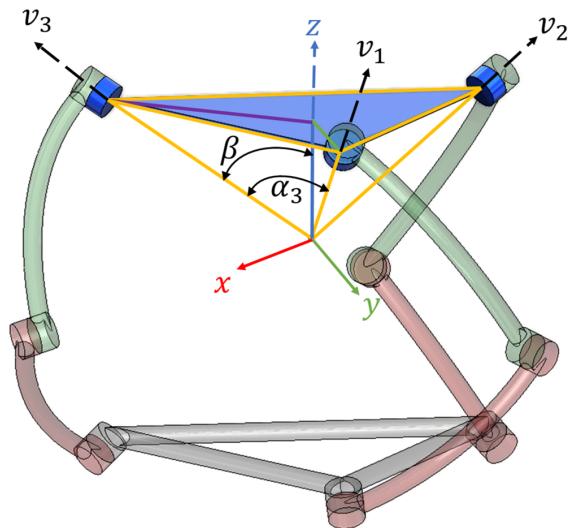


Figura 4.8: Pirámide regular de la plataforma móvil del manipulador.

Existen varias maneras de abordar el problema de la pirámide regular. En este trabajo, se empleará un enfoque geométrico con el objetivo de proporcionar una alternativa al método de las relaciones vectoriales. Para comenzar el análisis, se aislará la pirámide formada por la plataforma móvil y el centro de rotación, como se muestra en la Figura 4.9, en la que se observa tanto la pirámide regular completa como una sección de la misma, representando un tercio de la pirámide y los triángulos que la componen. Debido a la simetría de la pirámide, es posible considerar una tercera parte sin pérdida de información.

A partir de la sección de la pirámide, se puede establecer la relación entre el ángulo de construcción β y el ángulo α_3 . Esta relación se obtiene separando tres de los triángulos que forman la pirámide, como se ilustra en la Figura 4.9. Nótese que cada triángulo está identificado por los colores de sus aristas, lo que facilita su ubicación dentro de la pirámide regular y permite posicionar adecuadamente los ángulos β y α_3 . Estos ángulos se encuentran en los triángulos 1 y 3 de la Figura 4.9. Además, el triángulo 2 presenta un ángulo de $2\pi/3$ entre las aristas de color morado y verde, dado que representa un tercio de la pirámide regular.

Con los ángulos identificados, se pueden completar los ángulos restantes de los triángulos mediante las siguientes consideraciones:

- El triángulo 1 es un triángulo rectángulo, con un ángulo recto entre las aristas morada y azul, ya que la arista azul corresponde a la normal de la plataforma móvil. Por lo tanto, las aristas verde y morada forman un ángulo recto con respecto a la arista azul. El ángulo restante se calcula fácilmente considerando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a π radianes.

- Los triángulos 2 y 3 son isósceles, debido a la simetría de la pirámide. Ambos tienen dos ángulos idénticos que pueden calcularse a partir del ángulo conocido y la suma de los ángulos internos.

De esta manera, es posible representar todos los ángulos internos de los triángulos, como se muestra en la Figura 4.9. Además, se indican las distancias l , que representan las longitudes de las aristas de los triángulos, con el objetivo de relacionar un triángulo con otro. A través

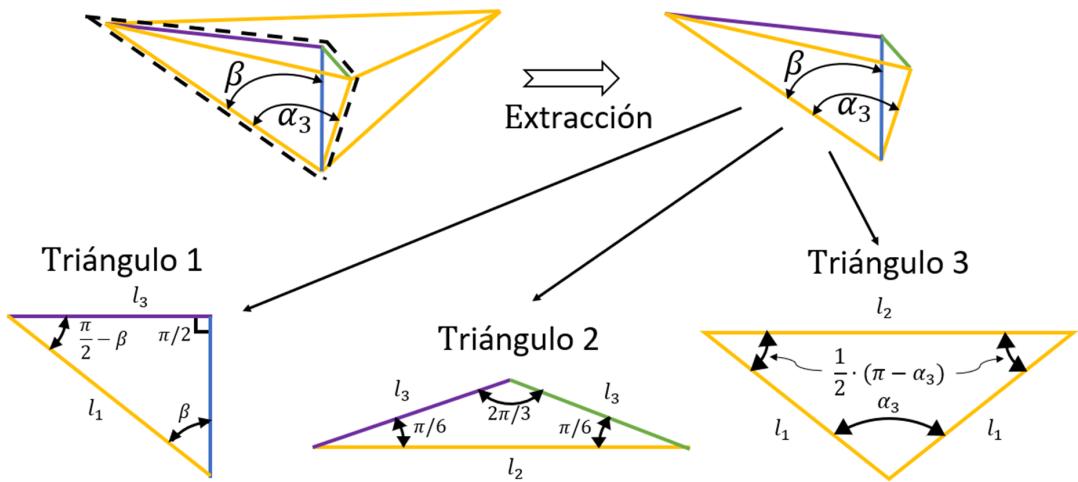


Figura 4.9: Extracción de triángulos de la pirámide regular.

de estas longitudes, se puede aplicar la ley de senos para obtener un sistema de ecuaciones que permita relacionar los ángulos β y α_3 . Al aplicar la ley de senos en los triángulos 1, 2 y 3, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{l_3}{\sin(\beta)} &= \frac{l_1}{\sin(\pi/2)} \\ \frac{l_2}{\sin(\frac{2}{3}\pi)} &= \frac{l_3}{\sin(\pi/6)} \\ \frac{l_2}{\sin(\alpha_3)} &= \frac{l_1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_3}{2})}\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene como incógnitas a las variables β y α_3 , por lo que es posible eliminar las longitudes l y obtener una única ecuación que relacione ambos ángulos de la siguiente manera:

$$\sin(\alpha_3) = \sqrt{3} \sin(\beta) \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

En este punto, ya se dispone de una ecuación que relaciona los ángulos β y α_3 . Sin embargo, esta expresión no es del todo útil, ya que el objetivo es encontrar el valor de α_3 en función de un parámetro dado β . Para simplificar la ecuación, es conveniente aplicar la identidad del ángulo doble para el seno:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

Sustituyendo $x = \frac{\alpha_3}{2}$, se obtiene:

$$\sin\left(2\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

Ahora es posible aplicar esta identidad en la ecuación obtenida anteriormente, recordando que $\sin(\alpha_3) = \sin(2(\frac{\alpha_3}{2}))$. Al realizar la sustitución, se obtiene:

$$2 \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) = \sqrt{3} \sin(\beta) \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

Finalmente, al despejar α_3 , se obtiene la expresión deseada:

$$\alpha_3 = 2 \sin^{-1}(\sin(\beta) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)) \quad (4.12)$$

Con esta ecuación, es posible calcular el ángulo α_3 en función de β .

Derivación de los vectores \mathbf{v}_i a partir de las ecuaciones de cerradura vectorial

Para el análisis del mecanismo, es fundamental establecer relaciones geométricas entre los vectores que describen la orientación de los brazos y el sistema de referencia. El *producto punto* puede aplicarse para obtener las ecuaciones de cerradura vectorial, ya que este permite relacionar el ángulo entre dos vectores mediante dicho producto. En este caso, los vectores involucrados son unitarios —es decir, tienen una magnitud de 1— lo que simplifica las expresiones resultantes. Para ello, recuérdese que el producto punto entre dos vectores a y b está relacionado con el ángulo θ que existe entre ellos mediante la expresión:

$$a \cdot b = |a||b| \cos(\theta)$$

Dado que los vectores involucrados son unitarios, esta fórmula se simplifica a $a \cdot b = \cos(\theta)$, lo que permite relacionar directamente el ángulo entre los vectores y sus componentes en el sistema de referencia.

En este análisis, los vectores de interés son los vectores $\mathbf{v}_i = [v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}]$, que describen la orientación de las juntas pasivas entre los enlaces distales y la plataforma móvil de cada brazo del manipulador en el espacio. Estos vectores son constantes cuando se observan desde el sistema de referencia móvil, ya que describen la orientación relativa entre los brazos y la plataforma móvil. Sin embargo, al analizar estos vectores desde el sistema de referencia fijo, es posible obtener relaciones que permitan determinar cómo se orienta el sistema móvil respecto al sistema fijo. Con esto en mente, el objetivo es encontrar las componentes v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} de los vectores \mathbf{v}_i , que darán la solución al problema de orientación.

Las **ecuaciones de cerradura vectorial** que surgen de este análisis son las siguientes:

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i = \cos(\alpha_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \cos(\alpha_3), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i \neq j \quad (4.14)$$

$$|\mathbf{v}_i| = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

Las ecuaciones de cerradura vectorial describen la relación geométrica entre los vectores unitarios \mathbf{v}_i , que representan la orientación de los brazos del manipulador, y los vectores \mathbf{w}_i , que dependen de los ángulos de entrada del mecanismo. Estas ecuaciones no solo imponen restricciones sobre los ángulos entre los vectores, sino que también incorporan la condición de que los vectores \mathbf{v}_i son unitarios, es decir, que su magnitud es $|\mathbf{v}_i| = 1$. La combinación de estas

dos relaciones —la angular y la de magnitud— permite formular un sistema de ecuaciones que define completamente la orientación del sistema móvil en función de sus parámetros de entrada.

Clasificación del sistema

El conjunto de ecuaciones de cerradura vectorial conforma un *sistema de 9 ecuaciones no lineales con 9 incógnitas*, que son las componentes v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} de los vectores \mathbf{v}_i . Este sistema se desglosa de la siguiente manera:

- ✓ **3 ecuaciones lineales**, que provienen de las restricciones $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i = \cos(\alpha_2)$.
- ✓ **6 ecuaciones no lineales**, que corresponden a las relaciones $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \cos(\alpha_3)$ y $|\mathbf{v}_i| = 1$.

Este sistema se considera un **sistema de ecuaciones no lineales de 9x9**. Tal como se menciona en [74], este sistema tiene un *número de Bézout* de 64, lo que implica que puede haber hasta 64 soluciones algebraicas posibles. Resolver este sistema es un desafío computacional significativo, dado el número elevado de soluciones potenciales y la complejidad de las ecuaciones no lineales.

Resolución numérica del sistema

Para resolver este sistema no lineal, se pueden aplicar técnicas numéricas avanzadas, tales como el método de Homotopía de Euler [77]. Este método es particularmente adecuado para este tipo de sistemas ya que permite explorar las diferentes soluciones posibles y converger a una de ellas. El sistema presenta 8 posibles soluciones, y la elección de la solución correcta dependerá de la configuración inicial del mecanismo y por ende de las condiciones iniciales que se elijan para el método numérico.

Dado que solo una de estas soluciones es la correcta para una configuración específica, las otras 7 soluciones deben ser descartadas. La selección de la solución física válida se realiza con base en las condiciones iniciales utilizadas para la implementación del método numérico. Por esta razón, el método de Homotopía de Euler es preferido, ya que permite guiar la solución hacia la raíz deseada mediante la elección apropiada de dichas condiciones iniciales.

Representación polinómica y método de eliminación dialítica

Este sistema de ecuaciones no lineales también puede ser representado por medio de una única ecuación de cerradura, un polinomio en términos de una sola variable cuyas soluciones corresponden a las posibles configuraciones del mecanismo. Esta ecuación de cerradura puede derivarse utilizando el método de eliminación dialítica de Sylvester [77], el cual permite eliminar variables y reducir el sistema a un único polinomio. Sin embargo, la aplicación de este método resulta en polinomios de grado elevado, lo que genera la aparición de soluciones espurias (soluciones no físicas) que deben ser descartadas en el proceso de resolución.

Este enfoque con el método de eliminación dialítica es particularmente costoso computacionalmente debido al grado elevado de los polinomios resultantes. Además, el proceso de eliminación introduce complejidad adicional, lo cual incrementa el tiempo de cómputo y hace

que este método no sea tan eficiente como otros enfoques numéricos. En resumen, aunque el método de Sylvester puede ser útil en teoría, su implementación en sistemas como este resulta en una técnica engorrosa y computacionalmente cara.

Relación entre los vectores \mathbf{v}_i y el sistema de referencia móvil ($\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$)

El sistema de referencia móvil ($\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$), que está fijado a la plataforma móvil, coincide inicialmente con el sistema de referencia fijo, proporcionando así una referencia común entre ambos sistemas en ese momento. A medida que la plataforma móvil se desplaza, el sistema móvil rota junto con ella, manteniendo su orientación relativa a la plataforma durante todo el movimiento. Del mismo modo, los vectores \mathbf{v}_i permanecen invariables cuando se observan desde el sistema de referencia móvil, ya que están dispuestos de acuerdo con la geometría de la plataforma. Por lo tanto, el sistema de referencia móvil puede definirse a partir de la relación que guarda con los vectores \mathbf{v}_i .

Definición del eje \mathbf{Z}'

El eje \mathbf{Z}' del sistema móvil se define como el vector normal al plano formado por los puntos finales de los vectores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 . Para encontrar la normal a dicho plano, se construyen dos vectores en el plano por medio de la resta de los vectores \mathbf{v}_i (véase la Figura 4.10), de la forma:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}_{13} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \quad (4.17)$$

A partir de estos dos vectores, es posible calcular la normal al plano utilizando el producto cruz, lo que permite determinar la dirección del eje \mathbf{Z}' . Esta normal, denotada como \mathbf{N} , se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{N} = \mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{13} \quad (4.18)$$

El vector \mathbf{N} debe ser normalizado para obtener un vector unitario que represente el eje \mathbf{Z}' del sistema móvil. Esta normalización se lleva a cabo dividiendo \mathbf{N} por su magnitud $\|\mathbf{N}\|$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \quad (4.19)$$

En algunas fuentes bibliográficas como [78], se propone calcular el vector \mathbf{N} como la suma de las correspondientes componentes de los vectores \mathbf{v}_i :

$$\mathbf{N} = [v_{1x} + v_{2x} + v_{3x}, v_{1y} + v_{2y} + v_{3y}, v_{1z} + v_{2z} + v_{3z}]$$

No obstante, esta aproximación presenta problemas cuando el ángulo $\beta = 90^\circ$, ya que en ese caso los vectores \mathbf{v}_i están situados en el mismo plano. Dado que estos vectores están distribuidos de manera equidistante alrededor de la normal de la plataforma y tienen magnitud unitaria, su promedio resulta en un vector \mathbf{N} nulo, es decir, de magnitud cero. Esto genera un

vector indefinido para $\mathbf{n} = \mathbf{Z}'$. Por esta razón, es más adecuado calcular \mathbf{N} como la normal al plano, utilizando el producto cruz descrito anteriormente.

Definición del eje \mathbf{X}'

Dado que el sistema de referencia móvil coincide con el sistema de referencia fijo en la configuración inicial del manipulador paralelo esférico (SPM), es posible definir el eje \mathbf{X}' como un vector perpendicular a \mathbf{Z}' . Este eje corresponde a la normal unitaria del plano formado por el vector \mathbf{Z}' y el vector \mathbf{v}_1 . Para obtener el eje \mathbf{X}' , se utiliza el producto cruz entre el vector \mathbf{v}_1 y el eje \mathbf{Z}' , expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}' = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{Z}'}{\sin(\beta)} \quad (4.20)$$

El denominador $\sin(\beta)$ ajusta la magnitud del vector resultante para que sea unitario, dado que el ángulo entre los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{Z}' es precisamente el parámetro de construcción β . Este procedimiento asegura que \mathbf{X}' no solo sea perpendicular a \mathbf{Z}' , sino también unitario, cumpliendo con los requisitos necesarios para la correcta definición del sistema de referencia.

Definición del eje \mathbf{Y}'

El eje \mathbf{Y}' se define completando el sistema ortonormal dextrógiro. Para ello, \mathbf{Y}' se obtiene como la normal unitaria del plano formado por los ejes \mathbf{Z}' y \mathbf{X}' , y se calcula a partir del producto cruz entre estos dos vectores:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Z}' \times \mathbf{X}' \quad (4.21)$$

De esta manera, se asegura que los tres ejes \mathbf{X}' , \mathbf{Y}' y \mathbf{Z}' conformen un sistema de referencia ortogonal y unitario, adecuado para describir la orientación de la plataforma móvil en cualquier instante de su movimiento.

Matriz de rotación y ángulos de Euler

Como se menciona en [79], un sistema de referencia móvil puede representarse mediante una matriz de rotación que describe su orientación relativa a un sistema de referencia fijo. En este caso, una vez determinados los ejes del sistema móvil ($\mathbf{X}'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}'$), es posible construir la matriz de rotación que relaciona dicho sistema con el sistema fijo (\mathbf{XYZ}).

Esta matriz de rotación permite expresar la orientación del sistema móvil respecto al sistema fijo en función de los ángulos de Euler. Dicha matriz, representada como $R_{ZYX}(\theta_z, \theta_y, \theta_x)$, se define como:

$$R_{ZYX}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) = [\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'] \quad (4.22)$$

Donde (\mathbf{X}'), (\mathbf{Y}'), y (\mathbf{Z}') corresponden a los vectores unitarios que describen los ejes del sistema móvil en relación con los ejes del sistema fijo. Tal matriz está asociada a los ángulos

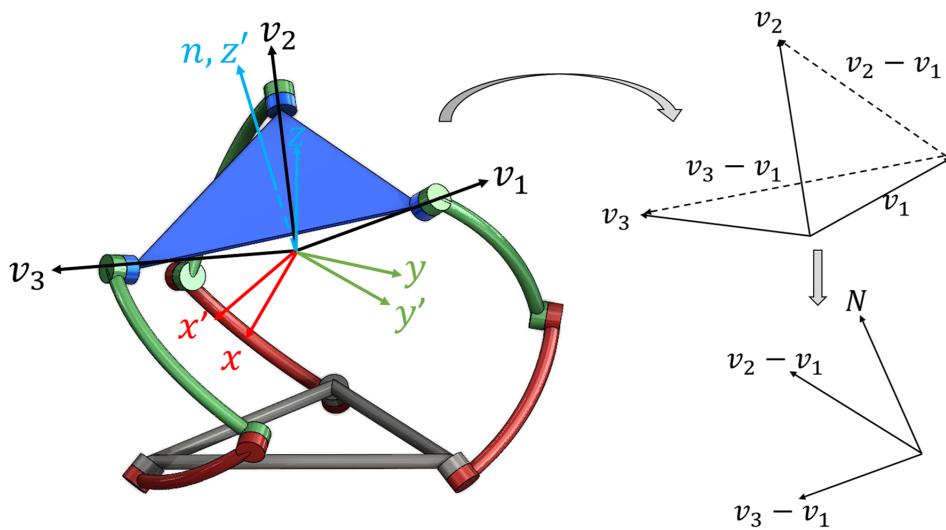


Figura 4.10: Relación de los vectores \mathbf{v}_i con el sistema de referencia movido ($\mathbf{X}'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}'$).

de Euler en la convención ZYX , como se describe en [80], y permite obtener las rotaciones secuenciales alrededor de los ejes (**X**), (**Y**), y (**Z**), respectivamente.

Los elementos de la matriz de rotación se pueden expresar como:

$$R_{ZYX}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Estos componentes r_{ij} representan los cosenos directores de los ejes del sistema móvil con respecto al sistema fijo. Cada elemento de la matriz se puede descomponer en términos de las rotaciones realizadas alrededor de los respectivos ejes, lo que facilita la interpretación geométrica del movimiento de la plataforma móvil en relación con el sistema de referencia fijo. Este enfoque es útil para determinar los ángulos de Euler necesarios para describir completamente la orientación del sistema móvil en cualquier instante del movimiento.

A partir de la matriz de rotación $R_{ZYX}(\theta_z, \theta_y, \theta_x)$, y siguiendo lo propuesto en [80], es posible calcular los ángulos de Euler utilizando las siguientes expresiones:

$$\theta_y = \text{atan2}(-r_{31}, r_{11}^2 + r_{21}^2) \quad (4.24)$$

$$\theta_z = \text{atan2}(r_{21} \cos(\theta_y), r_{11} \cos(\theta_y)) \quad (4.25)$$

$$\theta_x = \text{atan2}(r_{32} \cos(\theta_y), r_{33} \cos(\theta_y)) \quad (4.26)$$

En este trabajo, se ha avanzado hasta la obtención de los ángulos de Euler, lo cual representa un paso adicional en comparación con muchos otros estudios sobre manipuladores paralelos esféricos. En investigaciones previas, como las de [74], [78], [81] y [82], el análisis generalmente se limita a la determinación de la posición de los vectores \mathbf{v}_i . La obtención de los ángulos de Euler en este trabajo no solo permite describir la orientación completa de la plataforma móvil, sino que también proporciona una representación más detallada y precisa de la configuración del sistema.

4.3. Cinemática inversa de posición

El análisis de la cinemática inversa de posición resulta más sencillo en comparación con el análisis directo, ya que aprovecha algunas de las ecuaciones previamente obtenidas. El objetivo principal de la cinemática inversa es determinar las posiciones de las juntas activas del mecanismo a partir de una orientación específica de la plataforma móvil, descrita mediante los ángulos de Euler en la secuencia ZYX ($\theta_z, \theta_y, \theta_x$). Para ello, se emplea la matriz de rotación que describe la orientación de la plataforma con respecto al marco de referencia fijo. Esta matriz de rotación se puede obtener utilizando la expresión proporcionada por [80].

$$R_{ZYX} = \begin{bmatrix} c_z c_y & c_z s_y s_x - s_z c_x & c_z s_y c_x + s_z s_x \\ s_z c_y & s_z s_y s_x + c_z c_x & s_z s_y c_x - c_z s_x \\ -s_y & c_y s_x & c_y c_x \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

donde:

$$c_x = \cos(\theta_x), \quad c_y = \cos(\theta_y), \quad c_z = \cos(\theta_z)$$

$$s_x = \sin(\theta_x), \quad s_y = \sin(\theta_y), \quad s_z = \sin(\theta_z)$$

Con la matriz de rotación R_{ZYX} calculada, es posible determinar los vectores \mathbf{v}_i a partir de sus correspondientes vectores \mathbf{v}_i^* en la configuración inicial, los cuales han sido descritos en el análisis de posición directa en la ecuación (4.2). Al multiplicar la matriz de rotación R_{ZYX} por los vectores en la configuración inicial, se obtiene la posición final de los vectores, reflejando cómo la orientación de la plataforma afecta la disposición espacial de los elementos del mecanismo. Esta relación se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_i = R_{ZYX} \cdot \mathbf{v}_i^* \quad (4.28)$$

De este modo, es posible definir a los vectores \mathbf{v}_i en término de sus componentes de la forma:

$$\mathbf{v}_i = [v_{i_x}, v_{i_y}, v_{i_z}]$$

Con los términos de los vectores \mathbf{v}_i ya conocidos es posible hacer una manipulación de la ecuación de cerradura (4.13) para dejarla en la forma de una ecuación cuadrática como en [83]. Para esto, es necesario hacer uso de las componentes del vector \mathbf{w}_i de la ecuación (4.10) y sustituirlas en la ecuación (4.13) como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) + (\cos(\eta_i) \sin(\theta_i - \mu) - \sin(\eta_i) \cos(\gamma) \cos(\theta_i - \mu)) \sin(\alpha_1) \\ \cos(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) + (\sin(\eta_i) \sin(\theta_i - \mu) + \cos(\eta_i) \cos(\gamma) \cos(\theta_i - \mu)) \sin(\alpha_1) \\ -\cos(\gamma) \cos(\alpha_1) + \sin(\gamma) \cos(\theta_i - \mu) \sin(\alpha_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{i_x} \\ v_{i_y} \\ v_{i_z} \end{bmatrix} = \cos(\alpha_2)$$

Al realizar la operación de producto punto y agrupar en un lado de la ecuación los términos correspondientes a las entradas del mecanismo, se obtiene una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned}
& [\cos(\eta_i) \sin(\alpha_i) v_{i_x} + \sin(\eta_i) \sin(\alpha_1) v_{i_y}] \sin(\theta_i - \mu) \\
& + [-\sin(\eta_i) \cos(\gamma) \sin(\alpha_1) v_{i_x} + \cos(\eta_i) \cos(\gamma) \sin(\alpha_1) v_{i_y} + \sin(\gamma) \sin(\alpha_1) v_{i_z}] \cos(\theta_i - \mu) \\
& = \cos(\alpha_2) + \sin(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) v_{i_x} - \cos(\eta_i) \sin(\gamma) \cos(\alpha_1) v_{i_y} + \cos(\gamma) \cos(\alpha_1) v_{i_z}
\end{aligned}$$

A esta ecuación se le puede aplicar la identidad de los ángulos dobles mediante la sustitución correspondiente, lo que facilita la simplificación de los términos trigonométricos y permite obtener una forma más manejable de la ecuación a través de la siguiente sustitución:

$$\sin(\theta_i - \mu) = \frac{2T_i}{1 + T_i^2} \quad , \quad \cos(\theta_i - \mu) = \frac{1 - T_i^2}{1 + T_i^2}$$

donde:

$$T_i = \tan\left(\frac{\theta_i - \mu}{2}\right) \quad (4.29)$$

Con dicha sustitución y el ordenamiento de los términos, es posible expresar la ecuación en la forma descrita por:

$$A_i T_i^2 + 2B_i T_i + C_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

Donde los coeficientes A_i , B_i y C_i se definen como:

$$\begin{aligned}
A_i &= (s_{\eta_i} c_{\gamma} s_{\alpha_1} - s_{\eta_i} s_{\gamma} c_{\alpha_1}) v_{i_x} + (c_{\eta_i} s_{\gamma} c_{\alpha_1} - c_{\eta_i} c_{\gamma} s_{\alpha_1}) v_{i_y} + (-c_{\gamma} c_{\alpha_1} - s_{\gamma} s_{\alpha_1}) v_{i_z} - c_{\alpha_2} \\
B_i &= c_{\eta_i} s_{\alpha_1} v_{i_x} + s_{\eta_i} s_{\alpha_1} v_{i_y} \\
C_i &= (-s_{\eta_i} s_{\gamma} c_{\alpha_1} - s_{\eta_i} c_{\gamma} s_{\alpha_1}) v_{i_x} + (c_{\eta_i} s_{\gamma} c_{\alpha_1} + c_{\eta_i} c_{\gamma} s_{\alpha_1}) v_{i_y} + (-c_{\gamma} c_{\alpha_1} + s_{\gamma} s_{\alpha_1}) v_{i_z} - c_{\alpha_2}
\end{aligned}$$

La ecuación cuadrática (4.30) puede resolverse utilizando la fórmula general en términos de T_i , como se muestra a continuación:

$$T_i = \frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4A_i C_i}}{2A_i} \quad (4.31)$$

Despejando θ_i en función de T_i , de acuerdo con la relación establecida en la ecuación (4.29), y sustituyendo T_i según lo encontrado en la ecuación (4.31), se obtiene la siguiente expresión:

$$\theta_i = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4A_i C_i}}{2A_i} \right) + \mu \quad (4.32)$$

Es importante señalar que, al igual que ocurre en la cinemática directa, se presentan dos posibles soluciones para cada una de las cadenas cinemáticas, lo que se evidencia en el discriminante positivo y negativo de la raíz cuadrada de la ecuación (4.32).

En el presente trabajo, se ha conseguido completar la cinemática inversa, abarcando el recorrido desde los ángulos de Euler hasta las entradas del mecanismo. Este enfoque es frecuentemente pasado por alto en diversos artículos, como [74], [78], [81] y [82], donde se omite la consideración de los ángulos de Euler y se hace uso exclusivo de los vectores v_i como salidas del mecanismo.

4.4. Análisis de velocidad del SPM

El análisis de velocidad del SPM se realizará empleando la teoría de tornillos, que ofrece una ventaja significativa al eliminar la necesidad de calcular las velocidades articulares pasivas. Estas velocidades, presentes en las articulaciones no activas del manipulador, son intermedias y no resultan de interés directo para el análisis, ya que el objetivo es comprender la relación entre las velocidades de entrada, correspondientes a las articulaciones activas, y las velocidades de salida del mecanismo. Ante esto, la teoría de tornillos es particularmente útil, ya que a diferencia de los enfoques convencionales basados en derivadas, la implementación de esta teoría permite obtener de manera más directa y eficiente las relaciones de velocidad sin recurrir a cálculos diferenciales complejos. Esto simplifica el proceso analítico y proporciona una herramienta más poderosa para el estudio de sistemas con múltiples cadenas cinemáticas, como es el caso del SPM.

Para desarrollar este análisis, es necesario definir los tornillos asociados a cada una de las cadenas cinemáticas del manipulador y establecer un polo de referencia. Este punto de referencia se selecciona generalmente por conveniencia matemática, y en este caso se ubicará en el sistema de coordenadas global. Elegir el polo de referencia en este punto permite simplificar los cálculos, ya que todos los ejes de rotación de las articulaciones —tanto activas como pasivas— coinciden en un único centro de rotación que se alinea con el origen del sistema de referencia.

Gracias a esta configuración, los tornillos asociados a cada eslabón de las cadenas cinemáticas presentan una parte nula (ya sea la primaria o la dual), lo que facilita aún más el desarrollo matemático del análisis.

4.4.1. Caso de análisis

Para iniciar el análisis cinemático infinitesimal, es fundamental establecer los tornillos correspondientes a cada una de las cadenas cinemáticas, los cuales conformarán la base necesaria para describir las velocidades y aceleraciones presentes en el manipulador. En este caso, el manipulador en estudio es un SPM en configuración coaxial. Sin embargo, como se ha mencionado desde el inicio, el análisis se abordará de manera general, de modo que pueda ser útil para otros manipuladores y permita comprender las interacciones entre los diferentes elementos del sistema y los parámetros de construcción involucrados. Esto facilitará la formulación de ecuaciones que incluyan estos parámetros, los cuales podrán ser adaptados posteriormente a las especificaciones del SPM coaxial utilizado en este trabajo.

Con este enfoque, se procede a identificar los elementos del manipulador, así como las juntas de revoluta que forman cada cadena cinemática. En cada una de las cadenas, se pue-

den identificar cuatro elementos: la plataforma fija, el enlace proximal, el enlace distal y la plataforma móvil. Asimismo, se reconocen tres juntas de revoluta en cada cadena, que son las encargadas de unir estos elementos mediante los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i .

4.4.2. Definición de tornillos

Dada la cantidad de elementos en cada cadena cinemática y los grados de libertad del manipulador, no se completan los seis tornillos linealmente independientes necesarios para formar una matriz jacobiana directa de dimensión 6. Por ello, es necesario optar por dos alternativas: completar la matriz jacobiana como se propone en [84], o realizar una reducción de la matriz jacobiana directa, según lo indicado en [85]. Ambas opciones son viables, pero como se expone en [84], completar la matriz permite aplicar el álgebra de Lie $se(3)$ del grupo euclíadiano $SE(3)$ sin restricciones, lo que ofrece una ventaja significativa. Por esta razón, en el presente trabajo se utilizará el método descrito en [84], en el cual se completa la matriz jacobiana directa modelando el manipulador como un sistema de 6 grados de libertad mediante la incorporación de pares cinemáticos ficticios que conectan los eslabones con la plataforma fija, junto con una cadena cinemática virtual. Bajo este enfoque:

- ✓ Las extremidades del manipulador están conectadas a la plataforma fija mediante pares prismáticos ficticios, formando cadenas $(P)(P)(P)RRR$. Aquí, (P) representa un par prismático ficticio que no aporta velocidad ni aceleración al sistema.
- ✓ Una cadena cinemática virtual pasiva $PPPS$ (tres prismáticos y un esférico) conecta la plataforma fija con la móvil.

Estas suposiciones permiten tratar el manipulador como un sistema de 6 GDL, compuesto por cuatro cadenas cinemáticas. Donde cada una de estas cadenas tiene seis pares cinemáticos inferiores, siendo el par esférico equivalente a tres pares cilíndricos que convergen en el centro de rotación del mecanismo.

Para una mejor visualización de ello, en la Figura 4.11 se muestran todos los tornillos asociados al mecanismo, donde el subíndice denota el número de la cadena cinemática y los superíndices izquierdo y derecho denotan los objetos que son unidos por medio de ese par cinemático inferior. En dicha figura, puede observarse que los tornillos asociados a ${}^3\4_i , ${}^4\5_i , y ${}^5\6_i para $i = 1, 2, 3$ corresponden a los pares de revoluta de cada una de las cadenas cinemáticas del SPM, mientras que los tornillos ${}^0\1_i , ${}^1\2_i , y ${}^2\3_i para $i = 1, 2, 3$ corresponden a los pares prismáticos ficticios de las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3. Estos pares ficticios no fueron establecidos al azar, sino bajo la consideración de que todos los tornillos establecidos en una cadena cinemática deben ser linealmente independientes entre sí y que, además, estos pares cinemáticos ficticios no deben afectar el funcionamiento normal del mecanismo analizado.

Dado que las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 originalmente poseen pares de revoluta que intersectan en el centro de rotación, un conjunto de 3 pares prismáticos perpendiculares entre sí, que pasan por los ejes X, Y, Z del sistema de referencia fijo, resultan ser pares cinemáticos inferiores que no afectan el funcionamiento del manipulador. Es decir, al implementar estos pares cinemáticos, no se estarán agregando más grados de libertad al mecanismo, y su

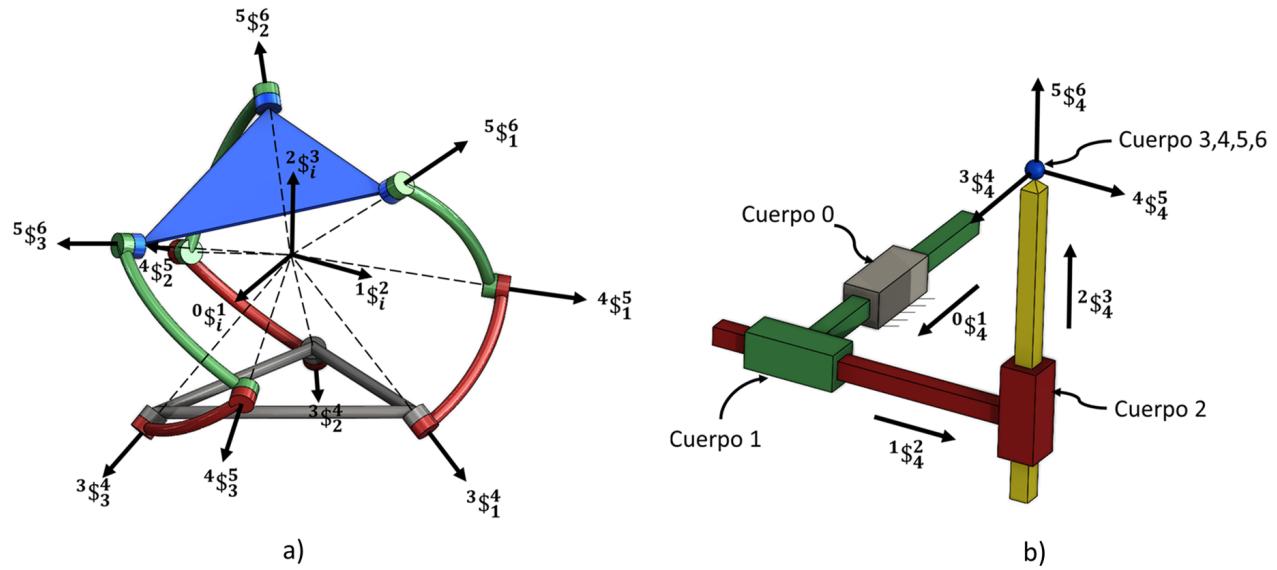


Figura 4.11: a) Tornillos asociados a los pares cinemáticos del SPM, b) tornillos asociados a la cadena cinemática virtual.

velocidad y aceleración en estos pares cinemáticos serán nulos, por lo que la cinemática del manipulador no se verá modificada.

Por otro lado, la cadena cinemática virtual, formada por 3 pares prismáticos y 3 pares de revoluta, une la plataforma fija con la plataforma móvil. Al observar esta cadena cinemática de forma aislada, pueden verse movimientos de traslación y rotación de forma libre, pero al momento de verla acoplada con los objetos 0 y 6 (plataforma fija y plataforma móvil) del mecanismo, esta cadena cinemática se restringe únicamente a los movimientos de rotación que puede generar el mecanismo, por lo que los pares prismáticos de esta cadena cinemática virtual tendrán velocidad nula, consideración importante para el análisis.

Con el centro de rotación como polo de referencia, el vector $r_{o/p}$, que representa la distancia entre los puntos o y p , es nulo porque ambos coinciden en el origen del sistema de referencia fijo. Esto simplifica el cálculo de los tornillos correspondientes a las juntas cilíndricas, ya que su parte dual, $D(^A\$^B) = ^A\$^B \times r_{o/p}$, se anula cuando $r_{o/p} = 0$. Sin embargo, este no es el caso para las juntas prismáticas, en las que la parte dual sigue siendo relevante. Ante esto, todos los tornillos de este análisis pueden ser representados por medio de su vector de dirección $^A\B , dependiendo del tipo de par cinemático que se esté representando. Para las juntas de revoluta, el tornillo correspondiente puede expresarse únicamente con su vector de dirección de la siguiente manera:

$$^A\$^B = \begin{bmatrix} {}^A\$^B \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

Mientras que, para una junta prismática, el tornillo asociado toma la forma:

$$^A\$^B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ {}^A\$^B \end{bmatrix}$$

Así, los tornillos correspondientes a las cadenas $i = 1, 2, 3$ se representan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} {}^0\$^1_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}, & {}^1\$^2_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, & {}^2\$^3_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \\ {}^3\$^4_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & {}^4\$^5_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & {}^5\$^6_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mientras que para la cadena cinemática virtual ($i = 4$), los tornillos se describen de la forma:

$$\begin{aligned} {}^0\$^1_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}, & {}^1\$^2_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, & {}^2\$^3_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \\ {}^3\$^4_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & {}^4\$^5_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & {}^5\$^6_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}' \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Para clarificar, los vectores se definen como sigue:

- ✓ $\mathbf{X} = [1 \ 0 \ 0]^T$: representa el eje del sistema de referencia fijo en la dirección x .
- ✓ $\mathbf{Y} = [0 \ 1 \ 0]^T$: representa el eje del sistema de referencia fijo en la dirección y .
- ✓ $\mathbf{Z} = [0 \ 0 \ 1]^T$: representa el eje del sistema de referencia fijo en la dirección z .
- ✓ $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$: representan los ejes del sistema de referencia móvil.

Es importante destacar que en la sección de cinemática de posición ya se han definido los ejes del sistema de referencia móvil, así como los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i , lo que proporciona un contexto para la representación actual de los tornillos.

Nótese que los tornillos de la cadena cinemática ficticia están compuestos únicamente por componentes de los sistemas de referencia fijo y móvil, dado que esta cadena simula la conexión física entre las dos plataformas. En este sentido, la parte primaria de los tornillos ${}^3\4_4 , ${}^4\5_4 y ${}^5\6_4 coincide puntualmente con los ejes del sistema móvil, lo que permite que esta cadena presente movimientos pasivos que corresponden a los movimientos propios del SPM, sin afectar su cinemática original. Cabe mencionar que esta cadena cinemática virtual puede ser implementada en cualquier manipulador en análisis, ya que corresponde a una cadena con 6 GDL, formada por juntas cinemáticas pasivas. Esto proporciona la libertad de movimientos de translación y orientación que puede presentar cualquier manipulador, a pesar de las restricciones que pueda tener, como es el caso del SPM en análisis.

4.4.3. Base de tornillos recíprocos

En el análisis de manipuladores robóticos por medio de la teoría de tornillos, los tornillos recíprocos desempeñan un papel fundamental, permitiendo la eliminación de las juntas pasivas para concentrar el análisis únicamente en las velocidades y aceleraciones de las juntas activas y de salida del manipulador. En particular, en el caso del análisis del SPM, la implementación de la base de tornillos recíprocos permite eliminar todos aquellos movimientos que no son

cruciales en el análisis tanto de las cadenas cinemáticas que incluyen pares ficticios como de la cadena cinemática virtual.

En ciertas ocasiones, encontrar una base de tornillos recíprocos se convierte en una tarea laboriosa que implica resolver un sistema de ecuaciones con múltiples incógnitas. A medida que aumenta la cantidad de tornillos a los que se debe aplicar reciprocidad, la complejidad del sistema se incrementa, lo que dificulta el análisis, este método es mostrado a detalle en [71]. Este proceso puede volverse extremadamente denso y poco eficiente cuando se trata de encontrar la base de tornillos recíprocos asociados a un mecanismo.

Sin embargo, este no es el único método para determinar una base de tornillos recíprocos, ni es necesariamente el más eficiente. Existen métodos alternativos más simples y efectivos, como el método geométrico propuesto por [72].

La ventaja clave del método geométrico sobre el tradicional método de coordenadas de Plücker radica en su simplicidad y efectividad, ya que no requiere de manipulaciones algebraicas complejas para obtener los tornillos recíprocos, sino que son obtenidos a través de una simple inspección de la estructura del manipulador. En lugar de enfrentarse a la resolución de sistemas de ecuaciones, el método geométrico se basa en tres observaciones fundamentales que describen las relaciones entre tornillos de paso cero y tornillos de paso infinito. Estas observaciones permiten encontrar una base de tornillos recíprocos de manera directa.

Debido a la simplicidad y efectividad del método geométrico, se utilizará en este trabajo para encontrar los tornillos recíprocos, que son esenciales en la resolución del análisis de velocidad y aceleración del SPM.

De acuerdo con las observaciones del método, es posible establecer un conjunto de tornillos recíprocos para todas las juntas articulares pasivas en las cadenas 1, 2 y 3. Cabe destacar que un tornillo recíproco, ${}^3\$^4_{ri}$, para ${}^0\1_i , ${}^1\2_i y ${}^2\3_i (donde $i = 1, 2, 3$) no puede ser un vector línea (par de revoluta), ya que, según la observación 3, este vector debería ser perpendicular a esos tornillos, lo cual no es factible en \mathbb{R}^3 .

Por lo tanto, el conjunto de tornillos recíprocos para las juntas articulares pasivas de las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 debe consistir exclusivamente en vectores par (par prismático). De acuerdo con la observación 2, un vector par ya es recíproco a los tornillos ${}^0\1_i , ${}^1\2_i y ${}^2\3_i , independientemente de la dirección de estos tornillos recíprocos. Sin embargo, según la observación 3, para los tornillos ${}^4\5_i y ${}^5\6_i (con $i = 1, 2, 3$), es necesario que sean perpendiculares al tornillo recíproco ${}^3\$^4_{ri}$. Esto implica que el vector de dirección del tornillo ${}^3\$^4_{ri}$ debe ser perpendicular a los vectores de dirección de ${}^4\5_i y ${}^5\6_i .

Para encontrar estos tornillos recíprocos, se puede utilizar la definición del producto cruzado, de modo que:

$${}^3\$^4_{ri} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) / \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad \text{para } i=1,2,3 \quad (4.35)$$

Es importante señalar que esos tornillos recíprocos se establecen en relación con todas las articulaciones pasivas de sus respectivas cadenas para $i = 1, 2, 3$. De este modo, se cuenta con un conjunto de tornillos recíprocos para las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3; sin embargo, este conjunto no completa los seis tornillos necesarios para formar una base de tornillos recíprocos. En este contexto, la cadena ficticia planteada en el SPM adquiere una relevancia crucial, ya

que permite identificar los tres tornillos recíprocos restantes que son necesarios para completar dicha base.

Estos tornillos deben ser recíprocos a todas las juntas de la cadena cinemática virtual, exceptuando a cada una de las juntas prismáticas. Por lo tanto, es necesario encontrar un tornillo recíproco ${}^0\$_{r4}^1$ que sea recíproco a todos los tornillos de la cadena cinemática ficticia, excepto al tornillo ${}^0\$_{4}^1$. De manera análoga, se debe identificar un tornillo recíproco ${}^1\$_{r4}^2$ que sea recíproco a todos los tornillos de la cadena, excluyendo el tornillo ${}^1\$_{4}^2$, así como un tornillo recíproco ${}^2\$_{r4}^3$ que cumpla la misma condición respecto al tornillo ${}^2\$_{4}^3$.

La selección de estos tornillos recíprocos es fundamental, ya que permiten obtener las magnitudes de velocidad que no son recíprocas a los tornillos mencionados. En este caso, esto genera la representación de las velocidades ${}^0\omega_1^4$, ${}^1\omega_2^4$ y ${}^2\omega_3^4$, que corresponden a las velocidades nulas conocidas, derivadas de las restricciones de grados de libertad que presenta el mecanismo en análisis.

Es importante señalar que los tornillos recíprocos ${}^0\$_{r4}^1$, ${}^1\$_{r4}^2$ y ${}^2\$_{r4}^3$ no pueden ser representados por vectores pares, dado que esta condición generaría una reciprocidad no deseada con los tornillos ${}^0\$_{4}^1$, ${}^1\$_{4}^2$ y ${}^2\$_{4}^3$, respectivamente. Ante esto, los tornillos ${}^0\$_{r4}^1$, ${}^1\$_{r4}^2$ y ${}^2\$_{r4}^3$ deben ser representados por vectores línea.

Por otro lado, se requiere que estos tornillos recíprocos mantengan la reciprocidad con los tornillos ${}^3\$_{4}^4$, ${}^4\$_{4}^5$ y ${}^5\$_{4}^6$. Según la observación 1, al estar representados por vectores línea, esto implica que los tornillos recíprocos ${}^0\$_{r4}^1$, ${}^1\$_{r4}^2$ y ${}^2\$_{r4}^3$ deben ser coplanares con los vectores de dirección de los tornillos ${}^3\$_{4}^4$, ${}^4\$_{4}^5$ y ${}^5\$_{4}^6$. Esta coplanaridad solo puede lograrse si los vectores línea que representan a los tornillos recíprocos pasan por el centro de rotación del SPM.

Por lo tanto, se establece que los tornillos recíprocos deben ser representados como vectores línea y atravesar el centro de rotación del SPM para garantizar su reciprocidad con los tornillos ${}^3\$_{4}^4$, ${}^4\$_{4}^5$ y ${}^5\$_{4}^6$. Dado que estos tornillos deben ser recíprocos a todas las juntas de la cadena cinemática ficticia, excepto a las juntas ${}^0\$_{4}^1$, ${}^1\$_{4}^2$ y ${}^2\$_{4}^3$ correspondientes a los tornillos recíprocos ${}^0\$_{r4}^1$, ${}^1\$_{r4}^2$ y ${}^2\$_{r4}^3$, la observación 3 indica que la única opción viable para cumplir con estas condiciones es que los tornillos recíprocos ${}^0\$_{r4}^1$, ${}^1\$_{r4}^2$ y ${}^2\$_{r4}^3$ mantengan la misma dirección que los tornillos ${}^0\$_{4}^1$, ${}^1\$_{4}^2$ y ${}^2\$_{4}^3$, respectivamente, respetando la restricción de ser vectores línea que atraviesan el centro de rotación.

Ante todo esto, los vectores recíprocos de la cadena cinemática ficticia resultan ser:

$${}^0\$_{r4}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad {}^1\$_{r4}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_{r4}^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

4.4.4. Análisis directo de velocidad

El análisis directo de velocidad se enfoca en determinar la velocidad de salida de la plataforma en función de la velocidad de entrada. Tradicionalmente, esta relación puede establecerse mediante la derivada temporal de las posiciones, un método adecuado en manipuladores sin articulaciones pasivas. Sin embargo, en manipuladores que incluyen articulaciones pasivas, como el SPM, este enfoque es limitado, ya que derivar la cinemática de posición requeriría conocer las velocidades de todas las articulaciones pasivas, lo cual resulta inviable.

Para superar esta dificultad, se emplea el Álgebra de Lie, que en el marco de la teoría

de tornillos permite eliminar las velocidades de las articulaciones pasivas. Así, es posible establecer una relación directa entre la velocidad de entrada y la de salida del manipulador sin depender de los efectos específicos de las articulaciones pasivas.

En el análisis específico del SPM, la velocidad de la plataforma móvil, ${}^B\mathbf{V}_o^P$, puede representarse en forma de tornillo a través de cualquiera de sus cadenas cinemáticas, como se muestra en trabajos previos [84], [85], [67]. Esta representación permite expresar el estado de velocidad de la plataforma de la siguiente manera:

$${}^B\mathbf{V}_o^P = {}_0\omega_1^{i0}\$_i^1 + {}_1\omega_2^{i1}\$_i^2 + {}_2\omega_3^{i2}\$_i^3 + {}_3\omega_4^{i3}\$_i^4 + {}_4\omega_5^{i4}\$_i^5 + {}_5\omega_6^{i5}\$_i^6 \quad \text{para } i=1,2,3,4 \quad (4.37)$$

Donde ${}_j\omega_{j+1}^i$, para $j = 0, \dots, 5$ y $i = 1, \dots, 4$, representan las velocidades correspondientes a las articulaciones que conectan el objeto j con el objeto $j + 1$ en la cadena cinemática i .

Es importante señalar que, en esta representación inicial, se requiere conocer las velocidades de todas las articulaciones, tanto activas como pasivas. Sin embargo, al aplicar la forma de Klein con la base de tornillos recíprocos de cada cadena cinemática, es posible eliminar aquellas velocidades que no son de interés, como las velocidades de las articulaciones pasivas de las cadenas 1, 2 y 3, así como las velocidades de las articulaciones pasivas de la cadena ficticia ${}_3\omega_4^4$, ${}_4\omega_5^4$ y ${}_5\omega_6^4$. Esto permite obtener una expresión simplificada que incluye únicamente las velocidades de interés: el estado de velocidad de la plataforma móvil, las velocidades de las articulaciones activas y las velocidades asociadas a los movimientos restringidos del manipulador, es decir, ${}_0\omega_1^4$, ${}_1\omega_2^4$ y ${}_2\omega_3^4$, que representan las velocidades de traslación, conocidas por ser nulas en este sistema.

De este modo, es posible reformular la ecuación (4.37) como:

$$\begin{aligned} \{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^3\$_{ri}^4\} &= \underbrace{\{{}_0\omega_1^{i0}\$_i^1, {}^3\$_{ri}^4\}}_{\cancel{+ \{{}_1\omega_2^{i1}\$_i^2, {}^3\$_{ri}^4\} + \{{}_2\omega_3^{i2}\$_i^3, {}^3\$_{ri}^4\}}} + \underbrace{\{{}_3\omega_4^{i3}\$_i^4, {}^3\$_{ri}^4\}}_{\cancel{+ \{{}_4\omega_5^{i4}\$_i^5, {}^3\$_{ri}^4\} + \{{}_5\omega_6^{i5}\$_i^6, {}^3\$_{ri}^4\}}} \quad \text{para } i=1,2,3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

y para la cadena cinemática ficticia, se expresa como:

$$\begin{aligned} \{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^0\$_{r4}^1\} &= \underbrace{\{{}_0\omega_1^{40}\$_4^1, {}^0\$_{r4}^1\}}_{\cancel{+ \{{}_3\omega_4^{43}\$_4^4, {}^0\$_{r4}^1\}}} + \underbrace{\{{}_1\omega_2^{41}\$_4^2, {}^0\$_{r4}^1\}}_{\cancel{+ \{{}_4\omega_5^{44}\$_4^5, {}^0\$_{r4}^1\}}} + \underbrace{\{{}_2\omega_3^{42}\$_4^3, {}^0\$_{r4}^1\}}_{\cancel{+ \{{}_5\omega_6^{45}\$_4^6, {}^0\$_{r4}^1\}}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^1\$_{r4}^2\} &= \underbrace{\{{}_0\omega_1^{40}\$_4^1, {}^1\$_{r4}^2\}}_{\cancel{+ \{{}_3\omega_4^{43}\$_4^4, {}^1\$_{r4}^2\}}} + \underbrace{\{{}_1\omega_2^{41}\$_4^2, {}^1\$_{r4}^2\}}_{\cancel{+ \{{}_4\omega_5^{44}\$_4^5, {}^1\$_{r4}^2\}}} + \underbrace{\{{}_2\omega_3^{42}\$_4^3, {}^1\$_{r4}^2\}}_{\cancel{+ \{{}_5\omega_6^{45}\$_4^6, {}^1\$_{r4}^2\}}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^2\$_{r4}^3\} &= \underbrace{\{{}_0\omega_1^{40}\$_4^1, {}^2\$_{r4}^3\}}_{\cancel{+ \{{}_3\omega_4^{43}\$_4^4, {}^2\$_{r4}^3\}}} + \underbrace{\{{}_1\omega_2^{41}\$_4^2, {}^2\$_{r4}^3\}}_{\cancel{+ \{{}_4\omega_5^{44}\$_4^5, {}^2\$_{r4}^3\}}} + \underbrace{\{{}_2\omega_3^{42}\$_4^3, {}^2\$_{r4}^3\}}_{\cancel{+ \{{}_5\omega_6^{45}\$_4^6, {}^2\$_{r4}^3\}}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Las ecuaciones (4.38), (4.39), (4.40) y (4.41) se pueden simplificar desarrollando la forma de Klein, resultando en las siguientes expresiones:

$$\{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^3\$_{ri}^4\} = {}_0\omega_1^i \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) / \sin(\alpha_2) \quad \text{para } i=1,2,3 \quad (4.42)$$

$$\{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^0\$\mathbf{r}_4^1\} = {}_0\omega_1^4 = 0 \quad (4.43)$$

$$\{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^1\$\mathbf{r}_4^2\} = {}_1\omega_2^4 = 0 \quad (4.44)$$

$$\{{}^B\mathbf{V}_o^P, {}^2\$\mathbf{r}_4^3\} = {}_2\omega_3^4 = 0 \quad (4.45)$$

Nótese que las ecuaciones (4.42), (4.43), (4.44) y (4.45) conforman un sistema de ecuaciones que puede resolverse en términos de las componentes del estado de velocidad ${}^B\mathbf{V}_o^P$ al desarrollar la forma de Klein en el lado izquierdo de estas ecuaciones. Sin embargo, una forma más compacta y elegante de determinar el estado de velocidad es a través de su representación matricial, lo que conduce a la formulación de la ecuación de entrada-salida de velocidad del manipulador. Esta ecuación se presenta en la siguiente forma:

$$\mathbf{A} {}^B\mathbf{V}_o^P = \mathbf{B} \mathbf{q}_v \quad (4.46)$$

Donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices de orden 6x6 denotadas por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^T \Delta \quad (4.47)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[\frac{\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)}{\sin(\alpha_2)}, \frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)}{\sin(\alpha_2)}, \frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)}{\sin(\alpha_2)}, 1, 1, 1 \right] \quad (4.48)$$

Aquí, \mathbf{J} es la matriz extendida de orden 6x6, que se compone de los tornillos recíprocos correspondientes a las cadenas cinemáticas del manipulador.

$$\mathbf{J} = [{}^3\$\mathbf{r}_1^4, {}^3\$\mathbf{r}_2^4, {}^3\$\mathbf{r}_3^4, {}^0\$\mathbf{r}_4^1, {}^1\$\mathbf{r}_4^2, {}^2\$\mathbf{r}_4^3] \quad (4.49)$$

Por otro lado, Δ denota el operador de polaridad, que está constituido por submatrices nulas $\mathbf{0}_{3x3}$ y la matriz identidad \mathbf{I}_3 de orden 3x3.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3x3} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Ademas, \mathbf{q}_v es el vector actuador de primer orden que contiene las velocidades de entrada del manipulador.

$$\mathbf{q}_v = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, 0, 0, 0]^T \quad (4.51)$$

El análisis directo de velocidad concluye con el despeje del estado de velocidad ${}^B\mathbf{V}_o^P$, tal como se muestra en la ecuación (4.52).

$${}^B\mathbf{V}_o^P = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{q}_v \quad (4.52)$$

4.4.5. Análisis inverso de velocidad

El análisis inverso de velocidad se enfoca en obtener una expresión que permita calcular las velocidades de entrada del mecanismo en función del estado de velocidad de la plataforma de salida. Este análisis puede realizarse de manera directa al despejar el vector de velocidades de entrada, \mathbf{q}_v , en la ecuación de entrada-salida de velocidad, representada en la ecuación (4.46). El resultado es la ecuación (4.53), la cual relaciona de forma explícita las velocidades de entrada con el estado de velocidad deseado de la plataforma.

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^B \mathbf{V}_o^P \quad (4.53)$$

Nótese que la ecuación (4.53) establece una relación directa entre la velocidad de salida y la velocidad de entrada del manipulador sin proporcionar información sobre las velocidades de las articulaciones pasivas. Si bien esta información no es relevante para el análisis de velocidad, resulta fundamental para el análisis de aceleración del mecanismo. En dicho análisis, es necesario conocer las velocidades de las articulaciones pasivas además de las activas, ya que estas contribuyen al cálculo de las aceleraciones del sistema completo. En este contexto, si el objetivo es únicamente realizar el análisis de velocidad, la ecuación (4.53) es suficiente; sin embargo, para el análisis de aceleración se requiere una formulación más amplia que permita determinar todas las velocidades involucradas en el mecanismo. Por esta razón, en el presente trabajo se derivarán las ecuaciones necesarias para calcular tanto las velocidades de las articulaciones activas como las pasivas del sistema.

En consecuencia, es necesario recurrir a la ecuación (4.37), ya que esta conserva todas las velocidades involucradas en el análisis, a diferencia de las ecuaciones (4.42), (4.43), (4.44) y (4.45), en las cuales se han eliminado las velocidades de varias articulaciones mediante la implementación de la forma de Klein. Por lo tanto, al expresar la ecuación (4.37) en su forma matricial, como se muestra en la ecuación (4.54), es posible determinar todas las velocidades relevantes en el análisis.

$${}^B \mathbf{V}_o^P = \mathbf{J}_i \boldsymbol{\Omega}_i \quad \text{para } i=1 \dots 4 \quad (4.54)$$

Donde J_i representa el Jacobiano de la i -ésima cadena cinemática, de acuerdo con la forma establecida en la ecuación (4.55).

$$\mathbf{J}_i = [{}^0 \mathbf{\$}_i^1, {}^1 \mathbf{\$}_i^2, {}^2 \mathbf{\$}_i^3, {}^3 \mathbf{\$}_i^4, {}^4 \mathbf{\$}_i^5, {}^5 \mathbf{\$}_i^6] \quad (4.55)$$

Por su parte, $\boldsymbol{\Omega}_i$ representa la matriz de las tasas de velocidad de las articulaciones en todas las cadenas cinemáticas empleadas en el análisis, incluyendo tanto las cadenas con juntas ficticias como la cadena cinemática virtual.

$$\boldsymbol{\Omega}_i = [{}^0 \omega_1^i, {}^1 \omega_2^i, {}^2 \omega_3^i, {}^3 \omega_4^i, {}^4 \omega_5^i, {}^5 \omega_6^i]^T \quad (4.56)$$

La ecuación (4.54) contiene todas las velocidades del manipulador, que pueden determinarse al despejar J_i , como se muestra en la ecuación (4.57).

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{J}_i^{-1} {}^B \mathbf{V}_o^P \quad \text{para } i=1 \dots 4 \quad (4.57)$$

Nótese que la ecuación (4.57) es válida para las cuatro cadenas cinemáticas del modelo en análisis. Por lo tanto, para determinar todas las velocidades involucradas en el modelo, es necesario aplicar dicha ecuación cuatro veces, lo que permite calcular las 24 velocidades articulares presentes en las cadenas cinemáticas. Es importante destacar que, al implementar los pares ficticios y la cadena cinemática virtual, se encontrarán velocidades ${}_0\omega_1^i$, ${}_1\omega_2^i$, ${}_2\omega_3^i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ que serán nulas, ya que corresponden a juntas prismáticas propuestas para completar la base de tornillos recíprocos. Estas juntas no pueden presentar velocidad alguna debido a las restricciones de movilidad del mecanismo que limitan sus traslaciones. La existencia de una velocidad distinta de cero en estas juntas indicaría un análisis incorrecto del mecanismo, implicando una modificación en su cinemática. Por consiguiente, en el capítulo siguiente se verificará que estas velocidades sean nulas para corroborar la validez del análisis.

4.4.6. Relación entre velocidad angular y derivadas de los ángulos de Euler ZYX

En este análisis, se busca establecer una relación matemática entre el vector de velocidad angular ${}^B\omega^P = [\omega_X, \omega_Y, \omega_Z]^T$ y las derivadas en el tiempo de los ángulos de Euler en la secuencia ZYX ($\dot{\theta}_Z, \dot{\theta}_Y, \dot{\theta}_X$). A su vez, también se pretende encontrar la relación inversa, es decir, expresar las derivadas de los ángulos de Euler en función de las componentes del vector de velocidad angular. Este enfoque se fundamenta en el trabajo presentado en [80], donde se establece que la velocidad angular puede representarse en términos de los ángulos de Euler mediante una matriz de transformación conocida como el Jacobiano $\mathbf{E}_{Z'Y'X'}$.

La representación de la velocidad angular ${}^B\omega^P$ está directamente vinculada con la derivada de la matriz de rotación \mathbf{R}_{ZYX} asociada a la secuencia ZYX. Según [80], la relación entre la derivada de la matriz de rotación y el vector de velocidad angular se da a través de una matriz antisimétrica, como se muestra en la ecuación (4.58).

$$\dot{\mathbf{R}}_{ZYX} \mathbf{R}_{ZYX}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

De esta relación, es posible extraer tres ecuaciones independientes que describen cada componente del vector ${}^B\omega^P$ en términos de las entradas de la matriz de rotación \mathbf{R}_{ZYX} y su derivada temporal, como se muestra en la ecuación (4.59).

$$\begin{aligned} \omega_X &= \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23}, \\ \omega_Y &= \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33}, \\ \omega_Z &= \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Aquí, r_{ij} y \dot{r}_{ij} son las entradas de la matriz de rotación \mathbf{R}_{ZYX} y su derivada temporal. La matriz de rotación y su derivada se expresan como se muestra en la ecuación (4.60).

$$\mathbf{R}_{ZYX} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{R}}_{ZYX} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Además, la relación entre el vector de velocidad angular y las derivadas de los ángulos de Euler está gobernada por el Jacobiano $\mathbf{E}_{Z'Y'X'}$, que depende únicamente de los ángulos de Euler. Esta relación está dada por la ecuación (4.61).

$${}^B\omega^P = \mathbf{E}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) \dot{\theta}_{Z'Y'X'}, \quad (4.61)$$

donde $\dot{\theta}_{Z'Y'X'} = [\dot{\theta}_Z, \dot{\theta}_Y, \dot{\theta}_X]^T$. A partir de esta ecuación y de las sustituciones necesarias, se obtiene la ecuación (4.62).

$$\begin{aligned} \omega_X &= \dot{\theta}_x c_y c_z - \dot{\theta}_y s_z \\ \omega_Y &= \dot{\theta}_y c_z + \dot{\theta}_x c_y s_z, \\ \omega_Z &= \dot{\theta}_z - \dot{\theta}_x s_y \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde $c_y = \cos(\theta_y)$, $c_z = \cos(\theta_z)$, $s_y = \sin(\theta_y)$, y $s_z = \sin(\theta_z)$.

El Jacobiano $\mathbf{E}_{Z'Y'X'}$ puede obtenerse calculando las derivadas parciales de ω_X , ω_Y , y ω_Z respecto a las derivadas de los ángulos de Euler como en la ecuación (4.63).

$$\mathbf{E}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_z} & \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_y} & \frac{\partial \omega_X}{\partial \theta_x} \\ \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_z} & \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial \omega_Y}{\partial \theta_x} \\ \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_z} & \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial \omega_Z}{\partial \theta_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & c_y c_z \\ 0 & c_z & c_y s_z \\ 1 & 0 & -s_y \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Finalmente, es posible invertir la relación para obtener las derivadas de los ángulos de Euler en función de ${}^B\omega^P$, como se muestra en la ecuación (4.64).

$$\dot{\theta}_{Z'Y'X'} = \mathbf{E}_{Z'Y'X'}^{-1}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) {}^B\omega^P \quad (4.64)$$

Esta relación es fundamental, ya que vincula los ángulos de Euler con el estado de velocidad del sistema, lo que tiene importantes implicaciones en la planificación de trayectorias del manipulador. Al establecer una correspondencia entre las derivadas de los ángulos de Euler y el vector de velocidad angular, es posible determinar el estado de velocidad del sistema en función de una configuración angular específica.

El estado de velocidad obtenido establece una conexión directa con las velocidades articulares (representadas por las derivadas de los ángulos de Euler). Esto permite diseñar trayectorias de manera coherente con los requisitos de movimiento del manipulador, integrando la representación angular y el análisis de velocidades de forma precisa. En este sentido, esta relación actúa como un puente entre la trayectoria en ángulos de Euler y el estado de velocidad en un instante de tiempo dado, siendo esencial para la operación del manipulador.

4.5. Análisis de aceleración

4.5.1. Análisis directo de aceleración

El análisis de aceleración mediante la teoría de tornillos se realiza utilizando los mismos tornillos definidos en el análisis de velocidad, así como la misma base de tornillos recíprocos

empleada en dicho análisis. Esto es posible porque los tornillos que describen las juntas y su base recíproca no dependen del estado cinemático analizado, manteniéndose inalterados entre el análisis de velocidad y el de aceleración.

Adicionalmente, se emplea nuevamente la forma de Klein para simplificar las ecuaciones, eliminando así las componentes desconocidas. Sin embargo, a diferencia del análisis de velocidad, el estado de aceleración no puede determinarse de manera directa debido a la aparición de términos relacionados con la aceleración complementaria.

El estado de aceleración reducido del manipulador bajo análisis, expresado en forma de tornillo, se describe mediante la ecuación (4.65).

$${}^B\mathbf{A}_o^P = {}_0\dot{\omega}_1^i\$^1_i + {}_1\dot{\omega}_2^i\$^2_i + {}_2\dot{\omega}_3^i\$^3_i + {}_3\dot{\omega}_4^i\$^4_i + {}_4\dot{\omega}_5^i\$^5_i + {}_5\dot{\omega}_6^i\$^6_i + \$_{\text{LIE}-i} \quad \text{para } i=1,2,3,4 \quad (4.65)$$

donde $\$_{\text{LIE}-i}$ es el tornillo de Lie asociado a la i -ésima cadena cinemática y se calcula como:

$$\$_{\text{LIE}-i} = \sum_{k=0}^4 \left[{}_k\omega_{k+1}^i {}^k\$^{k+1}_i, \sum_{r=k+1}^5 {}_r\omega_{r+1}^i {}^r\$^{r+1}_i \right] \quad (4.66)$$

Donde $[\ast, \ast]$ representa el operador de producto de Lie.

Al desarrollar la ecuación (4.66), considerando que el manipulador no presenta movimientos de traslación, es decir, que las velocidades ${}_0\omega_1^i = {}_1\omega_2^i = {}_2\omega_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, 4$, y aplicando la propiedad distributiva inherente al producto de Lie, se obtiene la siguiente expresión:

$$\$_{\text{LIE}-i} = {}_3\omega_4^i\omega_5^i [{}^3\$^4_i, {}^4\$^5_i] + {}_3\omega_4^i\omega_6^i [{}^3\$^4_i, {}^5\$^6_i] + {}_4\omega_5^i\omega_6^i [{}^4\$^5_i, {}^5\$^6_i] \quad (4.67)$$

La ecuación (4.67) destaca la importancia de haber obtenido previamente las velocidades articulares, tanto activas como pasivas, durante el análisis de velocidad inversa del manipulador. Esto se debe a que dichas velocidades son necesarias para evaluar los términos que aparecen en el cálculo del tornillo de Lie. En este sentido, las únicas incógnitas restantes en la ecuación (4.65) corresponden a las aceleraciones de las juntas pasivas, ya que las aceleraciones de las juntas activas son conocidas a partir del control de los actuadores.

Para resolver este sistema de ecuaciones y obtener todas las aceleraciones involucradas en el manipulador, se aplica nuevamente la forma de Klein junto con la base de tornillos recíprocos. Este procedimiento permite reducir la ecuación (4.65) a un sistema simplificado que describe el estado de aceleración completo del mecanismo.

De este modo, es posible reformular la ecuación (4.65) como:

$$\begin{aligned} \{ {}^B\mathbf{A}_o^P, {}^3\$^4_{ri} \} &= \underbrace{\{ {}_0\dot{\omega}_1^i\$^1_i, {}^3\$^4_{ri} \}}_{\cancel{\{ {}_0\dot{\omega}_1^i\$^1_i, {}^3\$^4_{ri} \}}} + \underbrace{\{ {}_1\dot{\omega}_2^i\$^2_i, {}^3\$^4_{ri} \}}_{\cancel{\{ {}_1\dot{\omega}_2^i\$^2_i, {}^3\$^4_{ri} \}}} + \underbrace{\{ {}_2\dot{\omega}_3^i\$^3_i, {}^3\$^4_{ri} \}}_{\cancel{\{ {}_2\dot{\omega}_3^i\$^3_i, {}^3\$^4_{ri} \}}} \\ &+ \{ {}_3\dot{\omega}_4^i\$^4_i, {}^3\$^4_{ri} \} + \underbrace{\{ {}_4\dot{\omega}_5^i\$^5_i, {}^3\$^4_{ri} \}}_{\cancel{\{ {}_4\dot{\omega}_5^i\$^5_i, {}^3\$^4_{ri} \}}} + \underbrace{\{ {}_5\dot{\omega}_6^i\$^6_i, {}^3\$^4_{ri} \}}_{\cancel{\{ {}_5\dot{\omega}_6^i\$^6_i, {}^3\$^4_{ri} \}}} \quad \text{para } i=1,2,3 \\ &+ \{ \$_{\text{LIE}-i}, {}^3\$^4_{ri} \} \end{aligned} \quad (4.68)$$

y para la cadena cinemática ficticia, se expresa como:

$$\begin{aligned} \{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^0 \$_{r4}^1 \} &= \{ {}_0 \dot{\omega}_1^{40} \$_{r4}^1, {}^0 \$_{r4}^1 \} + \{ {}_1 \dot{\omega}_2^{41} \$_{r4}^2, {}^0 \$_{r4}^1 \} + \{ {}_2 \dot{\omega}_3^{42} \$_{r4}^3, {}^0 \$_{r4}^1 \} \\ &+ \{ {}_3 \dot{\omega}_4^{43} \$_{r4}^4, {}^0 \$_{r4}^1 \} + \{ {}_4 \dot{\omega}_5^{44} \$_{r4}^5, {}^0 \$_{r4}^1 \} + \{ {}_5 \dot{\omega}_6^{45} \$_{r4}^6, {}^0 \$_{r4}^1 \} \\ &+ \{ \$_{LIE-4}, {}^0 \$_{r4}^1 \} \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^1 \$_{r4}^2 \} &= \{ {}_0 \dot{\omega}_1^{40} \$_{r4}^1, {}^1 \$_{r4}^2 \} + \{ {}_1 \dot{\omega}_2^{41} \$_{r4}^2, {}^1 \$_{r4}^2 \} + \{ {}_2 \dot{\omega}_3^{42} \$_{r4}^3, {}^1 \$_{r4}^2 \} \\ &+ \{ {}_3 \dot{\omega}_4^{43} \$_{r4}^4, {}^1 \$_{r4}^2 \} + \{ {}_4 \dot{\omega}_5^{44} \$_{r4}^5, {}^1 \$_{r4}^2 \} + \{ {}_5 \dot{\omega}_6^{45} \$_{r4}^6, {}^1 \$_{r4}^2 \} \\ &+ \{ \$_{LIE-4}, {}^1 \$_{r4}^2 \} \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^2 \$_{r4}^3 \} &= \{ {}_0 \dot{\omega}_1^{40} \$_{r4}^1, {}^2 \$_{r4}^3 \} + \{ {}_1 \dot{\omega}_2^{41} \$_{r4}^2, {}^2 \$_{r4}^3 \} + \{ {}_2 \dot{\omega}_3^{42} \$_{r4}^3, {}^2 \$_{r4}^3 \} \\ &+ \{ {}_3 \dot{\omega}_4^{43} \$_{r4}^4, {}^2 \$_{r4}^3 \} + \{ {}_4 \dot{\omega}_5^{44} \$_{r4}^5, {}^2 \$_{r4}^3 \} + \{ {}_5 \dot{\omega}_6^{45} \$_{r4}^6, {}^2 \$_{r4}^3 \} \\ &+ \{ \$_{LIE-4}, {}^2 \$_{r4}^3 \} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Las ecuaciones (4.68), (4.69), (4.70) y (4.71) se pueden simplificar desarrollando la forma de Klein, resultando en las siguientes expresiones:

$$\{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^3 \$_{ri}^4 \} = {}_0 \dot{\omega}_1^i \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) / \sin(\alpha_2) + \{ \$_{LIE-i}, {}^3 \$_{ri}^4 \} \quad \text{para } i=1,2,3 \quad (4.72)$$

$$\{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^0 \$_{r4}^1 \} = {}_0 \dot{\omega}_1^4 + \{ \$_{LIE-4}, {}^0 \$_{r4}^1 \} = 0 \quad (4.73)$$

$$\{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^1 \$_{r4}^2 \} = {}_1 \dot{\omega}_2^4 + \{ \$_{LIE-4}, {}^1 \$_{r4}^2 \} = 0 \quad (4.74)$$

$$\{ {}^B \mathbf{A}_o^P, {}^2 \$_{r4}^3 \} = {}_2 \dot{\omega}_3^4 + \{ \$_{LIE-4}, {}^2 \$_{r4}^3 \} = 0 \quad (4.75)$$

donde

$$\begin{aligned} \{ \$_{LIE-i}, {}^3 \$_{ri}^4 \} &= ({}_3 \omega_{44}^i \omega_5^i \mathbf{u}_i \times \mathbf{w}_i + {}_3 \omega_{45}^i \omega_6^i \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i \\ &+ {}_4 \omega_{55}^i \omega_6^i \mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \quad \text{para } i=1,2,3 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Las ecuaciones (4.72), (4.73), (4.74) y (4.75) constituyen un sistema de ecuaciones que permite determinar las componentes del estado de aceleración ${}^B \mathbf{A}_o^P$ mediante el desarrollo de la forma de Klein en el lado izquierdo de dichas ecuaciones. Sin embargo, es posible obtener una representación más compacta y eficiente del estado de aceleración utilizando su forma matricial, lo que conduce a la formulación de la ecuación de entrada-salida de aceleración del manipulador, tal como se representa en la ecuación (4.77).

$$\mathbf{A} {}^B \mathbf{A}_o^P = \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_v + \mathbf{C} \quad (4.77)$$

En esta representación, las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se determinan según las ecuaciones (4.47) y (4.48), respectivamente, mientras que el vector \mathbf{C} , de dimensión 6×1 es definido como:

$$\mathbf{C} = [c_1, c_2, c_3, 0, 0, 0]^T \quad (4.78)$$

donde los términos c_i se calculan como:

$$c_i = \{\$_{\text{LIE}-i}, {}^3\$_{ri}^4\}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (4.79)$$

Por su parte, $\dot{\mathbf{q}}_v$ es el vector actuador de primer orden que contiene las aceleraciones de entrada del manipulador, definido como:

$$\mathbf{q}_v = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, 0, 0, 0]^T. \quad (4.80)$$

El análisis directo de aceleración concluye resolviendo para ${}^B\mathbf{A}_o^P$ a partir de la ecuación de entrada-salida de aceleración, dada por la ecuación (4.77), siempre y cuando la matriz transpuesta del Jacobiano, \mathbf{J}^T , sea invertible y el manipulador no se encuentre en una configuración singular. Bajo estas condiciones, el estado de aceleración se expresa de acuerdo con la ecuación (4.81).

$${}^B\mathbf{A}_o^P = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_v + \mathbf{C}) \quad (4.81)$$

4.5.2. Análisis inverso de aceleración

El análisis inverso de aceleración, de manera similar al análisis de velocidad, permite determinar las aceleraciones de las juntas activas del manipulador. A partir de la ecuación de entrada-salida de aceleración, es posible expresar directamente las aceleraciones activas sin necesidad de conocer las aceleraciones de las juntas pasivas. Esto se logra mediante el despeje del vector $\dot{\mathbf{q}}_v$ en la ecuación (4.77), lo que da lugar a la ecuación (4.82).

$$\dot{\mathbf{q}}_v = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}^B \mathbf{A}_o^P - \mathbf{C}) \quad (4.82)$$

Aunque la ecuación (4.82) es suficiente para determinar el estado de aceleración en las juntas activas, no permite conocer las aceleraciones en las juntas pasivas. Si bien estas últimas no son esenciales para el análisis básico de aceleración, pueden ser relevantes para estudios adicionales, como el análisis de jerk, que examina los cambios en la aceleración a lo largo del tiempo. A pesar de que este trabajo no aborda dicho análisis, es importante proporcionar una formulación completa que contemple todas las aceleraciones involucradas en el sistema.

Por ello, se recurre a la representación general de la ecuación de entrada-salida de aceleración provista por la ecuación (4.77), que incluye tanto las aceleraciones activas como pasivas. Esta representación, expresada en términos matriciales, está dada por la ecuación (4.83).

$${}^B\mathbf{A}_o^P = \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i + \$_{\text{LIE}-i} \quad \text{para } i = 1 \dots 4 \quad (4.83)$$

En esta ecuación, ${}^B\mathbf{A}_o^P$ representa el estado de aceleración del sistema, mientras que $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i$ es el vector que contiene todas las aceleraciones de las articulaciones en la i -ésima cadena cinemática:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i = [{}_0\dot{\omega}_1^i, {}_1\dot{\omega}_2^i, {}_2\dot{\omega}_3^i, {}_3\dot{\omega}_4^i, {}_4\dot{\omega}_5^i, {}_5\dot{\omega}_6^i]^T \quad (4.84)$$

Despejando $\dot{\Omega}_i$ de la ecuación (4.83), se obtiene la expresión necesaria para calcular todas las aceleraciones de las articulaciones en la cadena analizada, como se muestra en la ecuación (4.85).

$$\dot{\Omega}_i = \mathbf{J}_i^{-1} \left({}^B \mathbf{A}_o^P - \$_{\text{LIE-i}} \right) \quad \text{para } i = 1 \dots 4 \quad (4.85)$$

Esta expresión permite calcular las aceleraciones de todas las articulaciones en una cadena cinemática específica. Al aplicar este procedimiento a las cuatro cadenas del manipulador, es posible determinar de manera integral las aceleraciones de todas las juntas, tanto activas como pasivas.

Cabe resaltar que las juntas prismáticas ficticias, incluidas únicamente como parte de la construcción matemática del modelo, siempre presentan aceleraciones nulas. Esto se debe a que el manipulador carece de capacidad para generar movimientos de traslación. Este comportamiento refleja las restricciones propias del diseño y será corroborado durante la validación del modelo matemático, asegurando la consistencia entre las predicciones teóricas y los resultados obtenidos en simulaciones y experimentos prácticos.

4.5.3. Relación entre la aceleración angular y las segundas derivadas de los ángulos de Euler ZYX

Dado que el análisis de aceleración del manipulador depende directamente del estado de aceleración del sistema, es esencial establecer una relación coherente entre el vector de aceleración angular y las aceleraciones definidas mediante los ángulos de Euler. Esta conexión permite unificar las representaciones cinemáticas del sistema, de modo que una trayectoria definida en términos de orientación, utilizando ángulos de Euler, sea consistente con el estado de aceleración angular requerido. Por esta razón, este trabajo establece la conexión entre el vector de aceleración angular ${}^B \alpha^P = [\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z]^T$ y las segundas derivadas temporales de los ángulos de Euler $\ddot{\theta}_{Z'Y'X'} = [\ddot{\theta}_Z, \ddot{\theta}_Y, \ddot{\theta}_X]^T$. Esta relación es fundamental para asegurar que el estado de aceleración del manipulador sea consistente con las trayectorias definidas, lo que permite cumplir simultáneamente con las especificaciones cinemáticas del sistema y garantizar la coherencia entre las trayectorias de posición, velocidad y aceleración.

Para establecer esta relación, es necesario derivar la ecuación (4.59) respecto al tiempo. De esta manera, se obtiene la conexión entre las componentes de la aceleración angular y las derivadas de los ángulos de Euler, tal como se muestra en la ecuación (4.86).

$$\begin{aligned} \alpha_X &= \dot{\omega}_X = \ddot{\theta}_x c_y c_z - \ddot{\theta}_y s_z - \dot{\theta}_z (\dot{\theta}_y c_z + \dot{\theta}_x c_y s_z) - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y c_z s_y, \\ \alpha_Y &= \dot{\omega}_Y = \ddot{\theta}_y c_z - \dot{\theta}_z (\dot{\theta}_y s_z - \dot{\theta}_x c_y c_z) + \ddot{\theta}_x c_y s_z - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y s_y s_z, \\ \alpha_Z &= \dot{\omega}_Z = \ddot{\theta}_z - \ddot{\theta}_x s_y - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y c_y. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Las ecuaciones (4.86) pueden expresarse mediante el vector de aceleración angular y las derivadas de segundo orden de los ángulos de Euler, separando los términos lineales y no lineales en una forma matricial, tal como se muestra en la ecuación (4.87).

$${}^B \alpha^P = \mathbf{E}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) \ddot{\theta}_{Z'Y'X'} + \mathbf{F}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x, \dot{\theta}_z, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_x), \quad (4.87)$$

donde:

$$\ddot{\theta}_{Z'Y'X'} = [\ddot{\theta}_Z, \ddot{\theta}_Y, \ddot{\theta}_X]^T.$$

En esta expresión, la matriz $\mathbf{E}_{Z'Y'X'}$ corresponde al Jacobiano descrito previamente en la ecuación (4.63), mientras que el vector $\mathbf{F}_{Z'Y'X'}$ agrupa los términos no lineales que dependen de los ángulos de Euler y sus derivadas de primer orden, como se muestra en la ecuación (4.88).

$$\mathbf{F}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x, \dot{\theta}_z, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_x) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z(\dot{\theta}_y c_z + \dot{\theta}_x c_y s_z) - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y c_z s_y \\ -\dot{\theta}_z(\dot{\theta}_y s_z - \dot{\theta}_x c_y c_z) - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y s_y s_z \\ -\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y c_y \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

De esta manera, se dispone de una ecuación que permite determinar el vector de aceleración angular a partir de los ángulos de Euler y sus derivadas. Por otro lado, para calcular las derivadas de segundo orden de los ángulos de Euler a partir de las componentes de la aceleración angular, es necesario invertir la relación dada en la ecuación (4.87), lo que conduce a la ecuación (4.89).

$$\ddot{\theta}_{Z'Y'X'} = \mathbf{E}_{Z'Y'X'}^{-1}(\theta_z, \theta_y, \theta_x) \left({}^B \alpha^P - \mathbf{F}_{Z'Y'X'}(\theta_z, \theta_y, \theta_x, \dot{\theta}_z, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_x) \right). \quad (4.89)$$

Esta relación es de particular interés en el estudio de la cinemática de aceleración, ya que permite determinar las aceleraciones articulares necesarias para generar un estado específico de aceleración angular. Su desarrollo es esencial para garantizar una conexión coherente entre las trayectorias de posición, velocidad y aceleración del manipulador. De este modo, se puede establecer el estado de aceleración correspondiente a una trayectoria definida y aplicar, de manera precisa, la cinemática de aceleración previamente desarrollada en este trabajo.

4.6. Espacio de configuración y espacio de trabajo

El análisis cinemático de un manipulador paralelo implica la identificación y estudio de dos espacios fundamentales que describen su comportamiento: el espacio de configuración y el espacio de trabajo. Estos conceptos permiten establecer los límites físicos y funcionales del sistema, facilitando la evaluación de su capacidad para ejecutar tareas específicas en un entorno tridimensional. El espacio de configuración se entiende como el conjunto de todas las combinaciones posibles que pueden adoptar las variables articulares generalizadas del manipulador, y puede visualizarse como una nube de puntos en un espacio multidimensional que cumple con ciertas restricciones indispensables. En primer lugar, cada configuración debe evitar condiciones de singularidad, ya que estas afectan negativamente la movilidad y el control del sistema; en segundo lugar, debe garantizarse la ausencia de colisiones o interferencias entre los elementos que componen la estructura del manipulador, lo cual implica respetar las restricciones geométricas impuestas por el diseño mecánico. Por su parte, el espacio de trabajo está estrechamente vinculado al espacio de configuración, ya que representa el conjunto de posiciones y orientaciones que puede adoptar la plataforma móvil como resultado de las configuraciones articulares viables. Aunque ambos espacios comparten las mismas restricciones,

su representación difiere: mientras el espacio de configuración se expresa en términos de variables articulares, el espacio de trabajo se describe comúnmente en coordenadas cartesianas o ángulos de orientación. En esencia, el espacio de trabajo constituye una proyección física del espacio de configuración sobre el entorno tridimensional donde opera el manipulador. El conocimiento detallado de ambos espacios resulta fundamental para la validación funcional del diseño, ya que permite identificar zonas accesibles, evitar configuraciones no deseadas, y garantizar un funcionamiento seguro y eficiente del sistema. La omisión de este análisis podría derivar en fallos operativos o daños estructurales, especialmente en mecanismos de alta complejidad como los manipuladores paralelos esféricos coaxiales.

En el caso particular del manipulador paralelo esférico coaxial desarrollado en este trabajo, se llevó a cabo la caracterización del espacio de configuración y del espacio de trabajo mediante simulaciones cinemáticas basadas en el modelo CAD del mecanismo. Para ello, se utilizó el entorno de simulación CoppeliaSim, al cual se exportó el modelo previamente diseñado en SolidWorks. El proceso de exportación seguido se fundamenta en el procedimiento descrito por Tursynbek et al. [86], en el que se detallan las consideraciones necesarias para la correcta representación de manipuladores con cadenas cinemáticas cerradas. En este contexto, resulta imprescindible la inclusión de elementos auxiliares conocidos como Dummies, acompañados de restricciones de superposición, los cuales permiten establecer las relaciones geométricas entre los componentes móviles del mecanismo. Esta implementación garantiza que el modelo en CoppeliaSim reproduzca la dinámica estructural del manipulador, respetando así las cadenas cinemáticas cerradas que caracterizan a este tipo de manipuladores. Uno de los aspectos más relevantes de la simulación en este entorno es su capacidad para la detección de colisiones, lo cual resulta fundamental para la obtención precisa de los espacios de configuración y de trabajo, al permitir descartar configuraciones que impliquen interferencias entre partes del mecanismo. Además, CoppeliaSim ofrece la posibilidad de establecer comunicación directa con MATLAB, una funcionalidad particularmente útil para la automatización del análisis de estos espacios y el procesamiento de resultados.

La metodología adoptada para la caracterización del espacio de configuración y del espacio de trabajo se fundamenta en el enfoque propuesto por Tursynbek et al. [73], en el cual se plantea un procedimiento sistemático basado en simulaciones cinemáticas que integran el uso de los entornos MATLAB y Simulink. Este método permite explorar de forma automatizada las configuraciones articulares del manipulador, verificando en cada caso la viabilidad física y geométrica de la estructura, así como su capacidad para adoptar determinadas posiciones y orientaciones sin incurrir en colisiones o singularidades. Siguiendo este enfoque, se realizó una exploración de ambos espacios en el manipulador desarrollado, con el propósito de evaluar su desempeño cinemático y establecer las regiones del espacio tridimensional que puede cubrir de manera efectiva.

4.6.1. Detección de singularidades

Tal como se expone en [73], el análisis de singularidades constituye un paso esencial antes de poner en operación el manipulador paralelo esférico coaxial, ya que permite identificar configuraciones conflictivas que podrían comprometer la funcionalidad o el control del sistema. En dicha referencia se describen tres tipos de singularidades, las cuales están asociadas a

cambios en el número de grados de libertad del mecanismo. Asimismo, se señala que, en condiciones normales, el número de entradas y salidas independientes se mantiene constante, y que cualquier alteración en esta correspondencia indica la presencia de una singularidad. Por esta razón, los vectores de velocidad articular \mathbf{q}_v y de velocidad de la plataforma ${}^B\mathbf{V}_o^P$ son de la misma dimensión, y están relacionados mediante la ecuación (4.46), la cual vincula el espacio articular con el movimiento de salida del manipulador. Las singularidades se manifiestan cuando se anula el determinante de alguna de las matrices Jacobianas involucradas: $\det(\mathbf{A}) = 0$, $\det(\mathbf{B}) = 0$, o ambos simultáneamente. Cada una de estas condiciones da lugar a un tipo específico de singularidad, lo que hace necesario su estudio para garantizar un funcionamiento seguro y estable. El análisis detallado de estas situaciones ha sido abordado en trabajos como [73] y [87], los cuales se toman como referencia para el estudio realizado en este trabajo. En particular, se emplean las matrices Jacobianas obtenidas en el análisis de velocidad para detectar dichas condiciones.

Singularidad tipo 1

La singularidad de tipo 1 ocurre cuando:

$$\det(\mathbf{B}) = 0 \rightarrow \det \left(\text{diag} \left[\frac{\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)}{\sin(\alpha_2)}, \frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)}{\sin(\alpha_2)}, \frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)}{\sin(\alpha_2)}, 1, 1, 1 \right] \right) = 0$$

Dado que la matriz \mathbf{B} es diagonal, puede aplicarse la propiedad del determinante para matrices diagonales, la cual establece que el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal. Por lo tanto, la condición de singularidad se expresa como:

$$\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)}{\sin(\alpha_2)} \right) \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)}{\sin(\alpha_2)} \right) \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)}{\sin(\alpha_2)} \right) = 0$$

Para que esto ocurra, al menos uno de los productos escalares debe ser igual a cero:

$$\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \text{ y/o } 3 \quad (4.90)$$

La ecuación (4.90) debe cumplirse para que se dé la singularidad de tipo 1, lo cual implica que los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i son linealmente dependientes, es decir, coplanares.

Desde un punto de vista físico, cuando los tres vectores de alguna cadena cinemática i se encuentran en un mismo plano, el manipulador pierde la capacidad de generar velocidad en la dirección del eslabón extendido. En otras palabras, la plataforma móvil no puede rotar respecto al eje normal al plano formado por \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i .

Toda fuerza o par aplicado que intente inducir ese movimiento será resistido por el manipulador, provocando fuerzas internas que pueden llegar a ser destructivas, generando ruptura de eslabones, fallos en las juntas o daños en los actuadores.

Singularidad tipo 2

La singularidad de tipo 2 ocurre cuando el sistema adquiere movimientos no controlables desde las articulaciones, es decir, cuando la plataforma móvil puede moverse sin necesidad de

que haya movimiento en los actuadores. Esta situación se identifica cuando la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{J}^T \Delta$ pierde rango, lo cual equivale a que su determinante sea cero:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{J}^T \Delta) = 0$$

Aplicando la propiedad multiplicativa del determinante y recordando que, para matrices cuadradas, el determinante de la transpuesta es igual al de la matriz original, se tiene:

$$\det(\mathbf{J}^T \Delta) = \det(\mathbf{J}^T) \det(\Delta) = \det(\mathbf{J}) \det(\Delta) = 0$$

La matriz Δ tiene la siguiente estructura:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Delta) = -1$$

Por lo tanto, la condición de singularidad se reduce a:

$$\det(\mathbf{J}) = 0$$

La matriz \mathbf{J} está compuesta por seis tornillos recíprocos que definen las restricciones impuestas por la estructura del manipulador, los cuales pueden expresarse como:

$$\mathbf{J} = [{}^3\$_{r1}^4, {}^3\$_{r2}^4, {}^3\$_{r3}^4, {}^0\$_{r4}^1, {}^1\$_{r4}^2, {}^2\$_{r4}^3]$$

Al evaluar la matriz \mathbf{J} con ayuda de las ecuaciones (4.35) y (4.36), ésta puede representarse como una matriz por bloques de la forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Dado que se trata de una matriz por bloques con estructura antidiagonal (es decir, bloques nulos en la diagonal y bloques no nulos fuera de ella), puede aplicarse la propiedad del determinante para este tipo de matrices. En particular, el determinante de una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ es igual a } (-1)^n \cdot \det(\mathbf{M})$$

siendo n el tamaño de los bloques. En este caso, se concluye que:

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \Rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3 \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \right) = 0$$

Dado que el escalar $\sin(\alpha_2)$ es común en las tres columnas, puede extraerse como factor del determinante, por lo que la condición equivalente resulta en la ecuación (4.91).

$$\det([\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3]) = 0 \quad (4.91)$$

Esta expresión implica que los tres vectores obtenidos como producto cruz entre \mathbf{w}_i y \mathbf{v}_i , para $i = 1, 2, 3$, son linealmente dependientes. En términos geométricos, esto significa que dichos vectores son coplanares, lo cual a su vez indica que los eslabones distales del manipulador se encuentran contenidos en un mismo plano.

Como se menciona en [73], se ha observado que, para manipuladores esféricos coaxiales con $\beta = 90^\circ$, esta singularidad se presenta únicamente cuando la inclinación de la plataforma móvil adopta valores de 0° , 90° o 180° , y solo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$. Dado que el manipulador analizado no cumple con estas condiciones geométricas, dicha singularidad no se manifiesta dentro de su espacio de trabajo.

Singularidad tipo 3

La singularidad tipo 3 ocurre cuando las condiciones definidas en las ecuaciones (4.90) y (4.91) se cumplen simultáneamente. Según lo indicado en [73], este tipo de singularidad solo es posible cuando $\alpha_1 = \alpha_2$ y se caracteriza como una singularidad arquitectónica del manipulador, lo que implica que la configuración geométrica del mecanismo induce una pérdida crítica de grados de libertad. Desde un punto de vista físico, esta singularidad se presenta cuando el manipulador alcanza posiciones en las que la estructura cinemática genera un comportamiento indefinido, causando pérdida de control en la plataforma móvil.

Adicionalmente, dado que en el manipulador bajo análisis no se presenta la singularidad tipo 2, se concluye que la singularidad tipo 3 tampoco ocurre en su espacio de trabajo. Esto se debe a que la singularidad tipo 3 está íntimamente relacionada con la simultaneidad de las condiciones que definen la tipo 1 y tipo 2, por lo que la ausencia de una impide la aparición de la singularidad tipo 3.

4.6.2. Estrategia para evitar las singularidades

En el diseño y análisis de manipuladores paralelos, la aparición de singularidades representa una limitación significativa, ya que compromete la precisión, el control y la seguridad del sistema. Por esta razón, se han desarrollado diversas estrategias destinadas a evitar o minimizar su ocurrencia dentro del espacio de trabajo.

Una de las formas más efectivas de prevenir las singularidades consiste en un diseño geométrico adecuado del manipulador. En particular, la elección de los ángulos estructurales α_1 , α_2 y β influye directamente en la ubicación de las singularidades. Tal como se menciona en [73], al evitar configuraciones con $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ y $\beta = 90^\circ$, se elimina la posibilidad de que el manipulador entre en una singularidad de tipo 2 o tipo 3, especialmente en configuraciones con inclinaciones críticas de 0° , 90° o 180° .

Otra estrategia ampliamente utilizada es la delimitación de un espacio de trabajo restringido, en el cual se excluyen las regiones donde se ha identificado la presencia de singularidades. Tal como se describe en [88], esta metodología se basa en la cuantificación del número de condición de la matriz Jacobiana total, denotado como $k(\mathbf{J}_{tot})$. Este valor permite estimar la cercanía a una singularidad, y por lo tanto, descartar aquellas configuraciones problemáticas mediante el cumplimiento de la siguiente condición:

$$\zeta(\mathbf{J}_{tot}) > \zeta_{\min} \quad (4.92)$$

Si esta condición se cumple, se considera que el manipulador opera en una región segura, libre de los efectos negativos asociados a las singularidades, y por ende, dicha configuración puede formar parte del espacio de trabajo y de configuración.

Para mayor claridad, se incluyen a continuación las ecuaciones propuestas en [88]:

$$\zeta(\mathbf{J}_{tot}) = \frac{1}{k(\mathbf{J}_{tot})} \quad (4.93)$$

donde el número de condición se define como:

$$k(\mathbf{J}_{tot}) = \|\mathbf{J}_{tot}\| \cdot \|\mathbf{J}_{tot}^{-1}\| \quad (4.94)$$

La norma de la matriz Jacobiana se calcula mediante:

$$\|\mathbf{J}_{tot}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}_{tot}^T \mathbf{W} \mathbf{J}_{tot})} \quad (4.95)$$

donde \mathbf{W} es una matriz de ponderación definida como:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \mathbf{I}_3 \quad (4.96)$$

Aquí, n representa la dimensión de la matriz cuadrada \mathbf{J}_{tot} .

En el caso particular del manipulador analizado en este trabajo, la matriz Jacobiana total se define como $\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{AB}^{-1}$, ya que la ecuación de entrada-salida de velocidad puede escribirse como:

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{J}_{tot} {}^B \mathbf{V}_o^P$$

La implementación de esta técnica permite establecer límites seguros para los movimientos de la plataforma móvil, descartando del espacio de trabajo y de configuración aquellos puntos que se encuentren demasiado próximos a regiones singulares, mediante el monitoreo de la condición establecida en la ecuación (4.92).

Capítulo 5

Validación Numérica del Modelo Matemático

Este capítulo aborda la validación numérica del modelo matemático desarrollado para el manipulador paralelo esférico coaxial, evaluando las cinemáticas directa e inversa en posición, velocidad y aceleración. La validación se realizará mediante el uso de polinomios de grado 5 en las trayectorias de posición. Este tipo de polinomio es particularmente adecuado, ya que permite obtener, mediante su derivación, polinomios de grado 4 para la velocidad y de grado 3 para la aceleración, asegurando así una continuidad en todas las etapas del análisis.

En primer lugar, se generarán trayectorias deseadas mediante estos polinomios de grado 5, que serán aplicadas en la cinemática inversa del modelo para calcular las configuraciones articulares necesarias. Posteriormente, se utilizará la cinemática directa para comparar las posiciones recalculadas con las posiciones originales y obtener una medida del error en posición. A continuación, estas configuraciones se emplearán en la cinemática directa, permitiendo una comparación entre las posiciones, velocidades y aceleraciones resultantes y las trayectorias originales. Para complementar esta validación, se utilizará el modelo en SolidWorks del manipulador, previamente configurado con los parámetros específicos del diseño, con el fin de simular y comparar el comportamiento teórico con el simulado.

Esta validación permitirá cuantificar el error entre el modelo teórico y el comportamiento simulado, proporcionando una medida precisa de la exactitud del modelo matemático.

5.1. Generación de trayectorias

Las trayectorias de posición para el manipulador se generan utilizando polinomios de grado 5. Estos polinomios se seleccionan debido a su capacidad para proporcionar una transición suave entre los puntos inicial y final de movimiento, garantizando continuidad en la posición y evitando cambios abruptos en velocidad y aceleración. Las ecuaciones de los polinomios se definen como las ecuaciones (5.1).

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \\
 \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4, \\
 \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde $\theta(t)$ representa la posición en función del tiempo t , $\dot{\theta}(t)$ es la velocidad (primera derivada de la posición respecto al tiempo), $\ddot{\theta}(t)$ es la aceleración (segunda derivada de la posición respecto al tiempo), y $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ son los coeficientes determinados mediante condiciones de frontera específicas. Estos coeficientes pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (5.2) proporcionadas en [89].

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \theta_0, \\
 a_1 &= \dot{\theta}_0, \\
 a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2}, \\
 a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}, \\
 a_4 &= \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}, \\
 a_5 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Las ecuaciones (5.1) se utilizarán como trayectorias deseadas de posición, velocidad y aceleración en cada uno de los ejes del sistema de referencia móvil. Dado que se emplea la representación en ángulos de Euler con la secuencia ZYX, se requieren tres polinomios de grado 5 para definir la posición deseada del manipulador, cada uno correspondiente a uno de los ángulos de la secuencia especificada.

A partir de estos polinomios de posición, se derivan los polinomios correspondientes para la velocidad y aceleración, lo cual permite obtener las trayectorias suaves que el manipulador debe seguir en función de las condiciones iniciales y finales establecidas. Estas trayectorias pueden ser utilizadas tanto como funciones de salida, al buscar una trayectoria específica, como funciones de entrada, según el propósito de la simulación.

5.2. Exportación y configuración del modelo de SolidWorks a Simulink

Esta sección describe el proceso de exportación del modelo tridimensional desde SolidWorks hacia Simulink, asegurando que las características físicas y cinemáticas sean consistentes con el diseño original. El procedimiento comienza con la configuración del modelo en SolidWorks, utilizando el complemento Simscape Multibody Link, y continúa con la importación

y ajuste del modelo en el entorno de simulación de Simulink. También se detallan los pasos de configuración necesarios para que el sistema funcione correctamente, la implementación de subsistemas y relaciones requeridas para representar el manipulador, así como la gestión de las entradas y las lecturas de las variables de interés, como posición, velocidad y aceleración.

5.2.1. Preparación del modelo en SolidWorks

Antes de exportar el modelo, es crucial verificar que todas las propiedades físicas y las restricciones cinemáticas estén correctamente configuradas. Sin embargo, es importante destacar que las relaciones entre engranajes definidas en SolidWorks no son soportadas directamente por Simulink. Por lo tanto, estas relaciones deben ser desactivadas antes de realizar la exportación (véase la Figura 5.1), ya que su presencia puede generar comportamientos incorrectos en el modelo importado. Posteriormente, estas relaciones son reconstruidas dentro del entorno de Simulink.

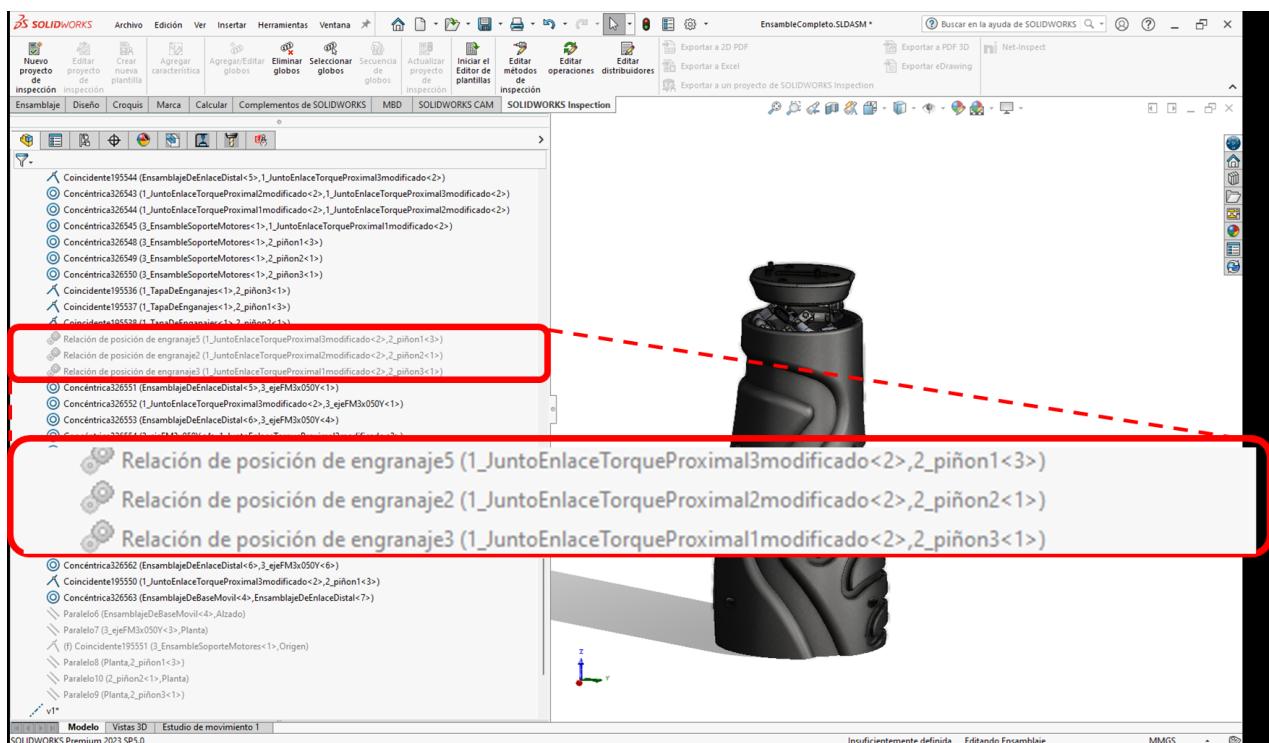


Figura 5.1: Desactivación de la relación de engranajes.

5.2.2. Exportación con Simscape Multibody Link

Una vez preparado el modelo en SolidWorks, se utiliza el complemento **Simscape Multibody Link** para exportarlo al entorno de Simulink. Este complemento genera un archivo en formato XML que contiene información detallada sobre la geometría, las propiedades físicas y las restricciones cinemáticas del modelo. Para comenzar el proceso de exportación, se activa el complemento **Simscape Multibody Link** desde el menú de complementos en SolidWorks.

(véase la Figura 5.2), lo que permite la transferencia del modelo a Simulink.

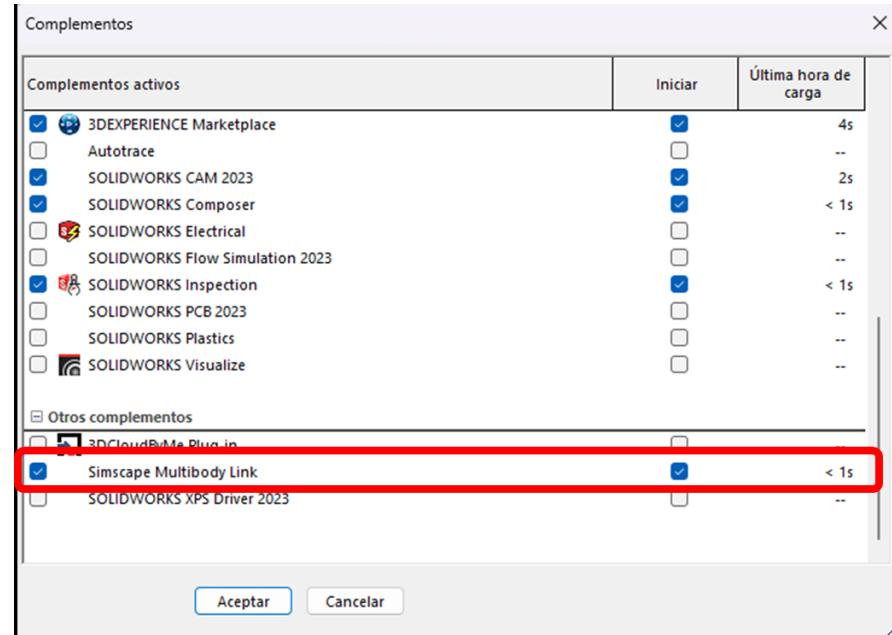


Figura 5.2: Activación del complemento Simscape Multibody Link en Solidworks.

A continuación, se selecciona la opción **Herramientas** → **Simscape Multibody Link** → **Export** → **Simscape Multibody...** desde el menú de herramientas en SolidWorks (véase la Figura 5.3), lo que permite la exportación del modelo al formato adecuado para Simulink.

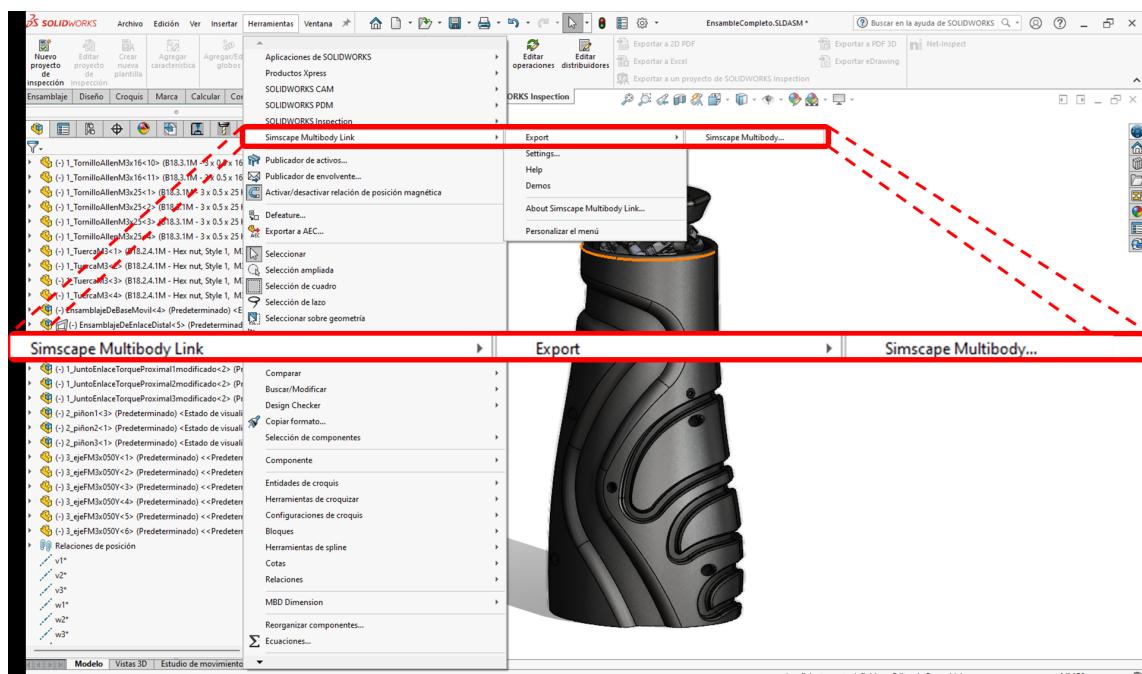


Figura 5.3: Exportación del modelo a archivo XML.

Después de seleccionar la ubicación, SolidWorks genera un archivo en formato XML que contiene toda la información necesaria sobre el modelo, incluidas las características geométricas y las restricciones cinemáticas del manipulador. Este archivo se importa a Simulink utilizando el comando `smimport` en MATLAB, creando así un modelo en Simulink que contiene todos los componentes del manipulador, incluidos eslabones, juntas y restricciones.

5.2.3. Configuración del modelo en Simulink

Una vez importado el modelo en Simulink, se realizan diversas configuraciones para garantizar su correcto funcionamiento.

En primer lugar, se construye un subsistema que agrupa todas las partes del modelo (véase la Figura 5.4), representando el manipulador completo. Este subsistema incluye las entradas correspondientes a los motores, así como las salidas necesarias para monitorear la posición, velocidad y aceleración de todo el manipulador.

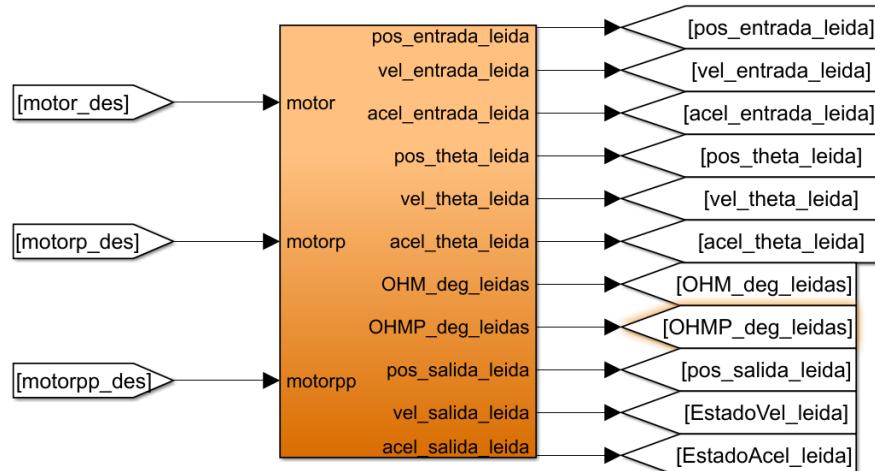


Figura 5.4: Bloque con el modelo del prototipo.

Las entradas al modelo se definen mediante las juntas cinemáticas que conectan los distintos componentes del sistema. En el caso de los motores, estas juntas se modelan como juntas de revoluta, que vinculan el subsistema de soporte de los motorreductores con el ensamblaje que contiene los acopladores correspondientes. Para habilitar el movimiento en las juntas actuadas, es necesario configurarlas desde el menú de propiedades, estableciendo que el par de torsión sea calculado automáticamente y que el movimiento sea provisto externamente por las entradas del sistema (véase la Figura 5.5, inciso a). Asimismo, las señales de posición, velocidad y aceleración se introducen en las juntas mediante bloques *Simulink-PS Converter*, los cuales deben ser configurados para recibir las señales adecuadas generadas por las entradas del sistema (véase la Figura 5.5, inciso b).

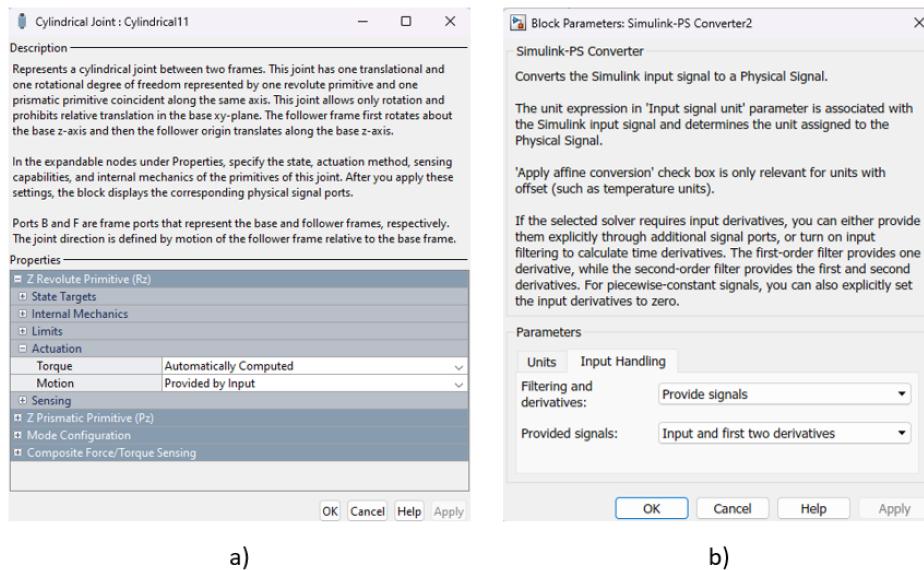


Figura 5.5: Configuración de las entradas del sistema: a) Propiedades de la junta de revoluta, b) Configuración del bloque Simulink-PS Converter.

Por otro lado, para modelar la relación de engranaje 1:3 existente entre los motorreductores y las juntas del sistema de orientación, las entradas de posición, velocidad y aceleración se ajustan dividiéndolas manualmente entre 3 mediante un bloque matemático tal como se muestra en la Figura 5.6. Este enfoque asegura que la relación de engranaje se respete en todas las magnitudes ingresadas, permitiendo controlar cada engranaje de forma independiente y simular la relación correspondiente sin comprometer el funcionamiento global del sistema.

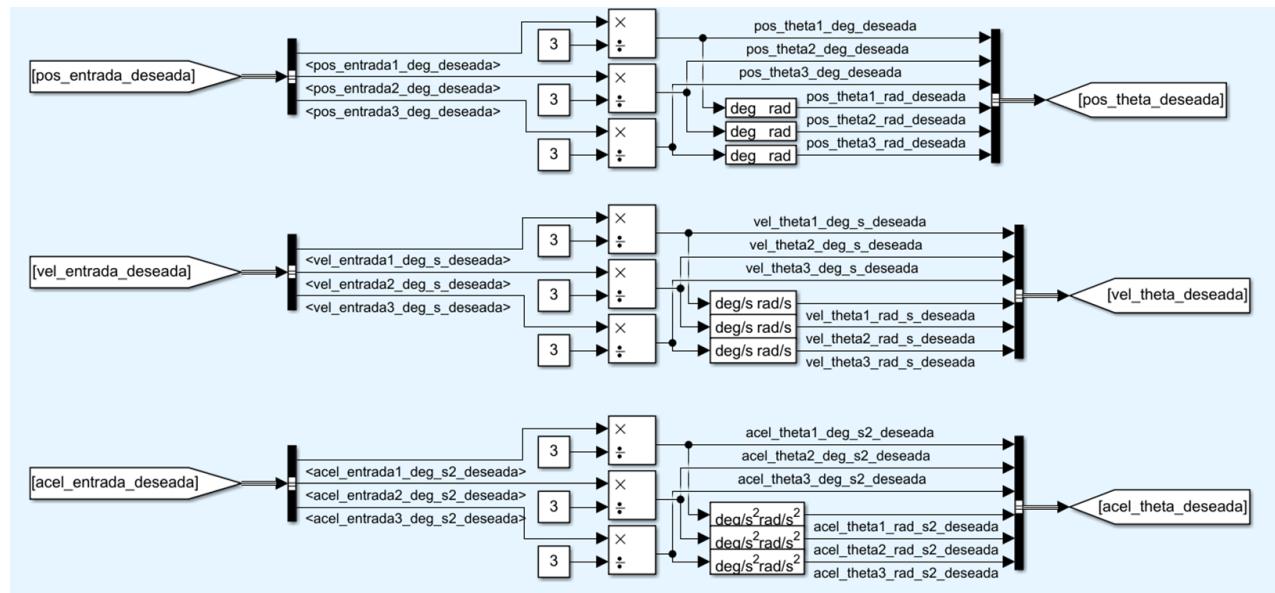


Figura 5.6: Compensación de la relación de engranaje mediante ajuste de las entradas de posición, velocidad y aceleración.

Se configuran las salidas del modelo definiendo puntos estratégicos para medir la posición, velocidad y aceleración, tanto de la plataforma móvil como de las articulaciones activas y pasivas del sistema. Estas mediciones se realizan directamente en cada articulación, identificando los elementos que conectan los diferentes componentes del modelo en Simulink. Para ello, se ajustan las propiedades de las juntas cinemáticas correspondientes, habilitando las opciones de lectura de posición, velocidad y aceleración, como se muestra en la Figura 5.7, inciso a).

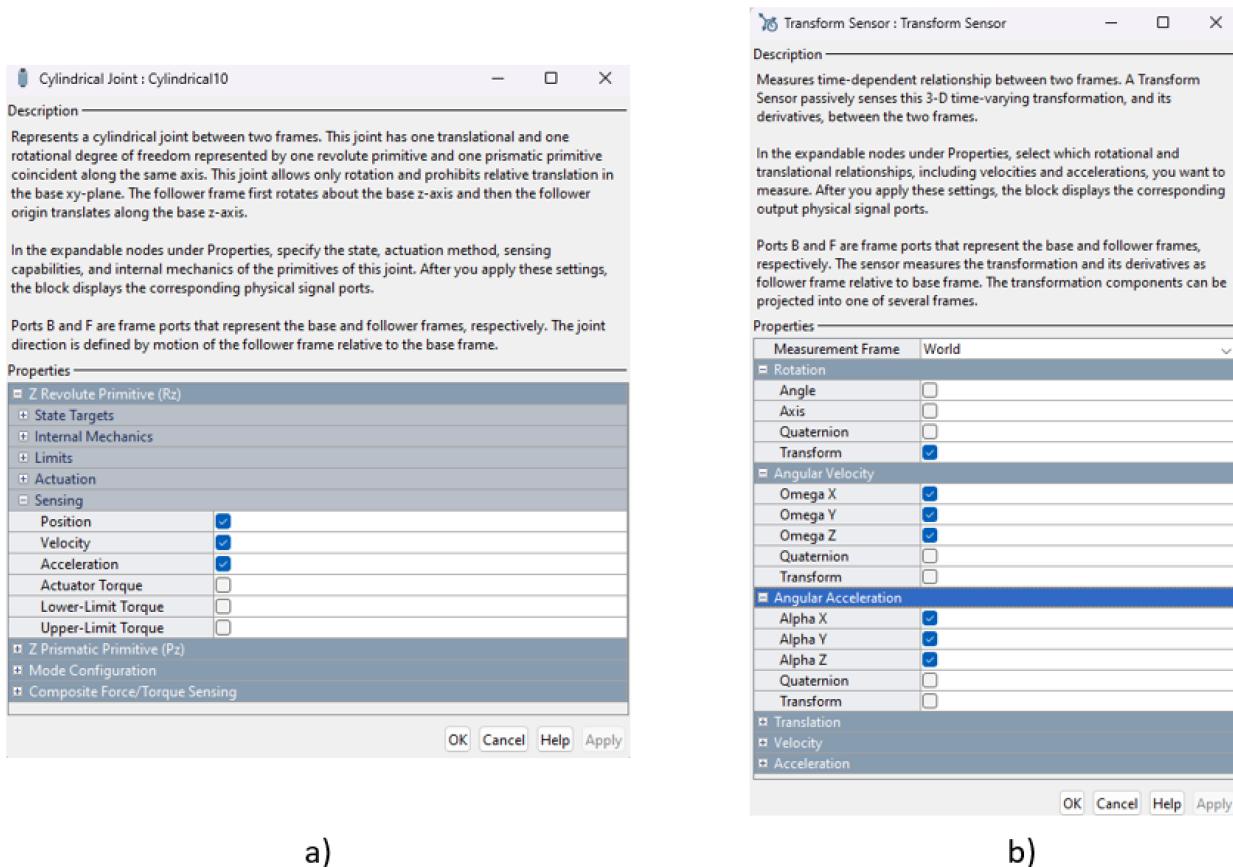


Figura 5.7: Configuración de las juntas cinemáticas para lectura.

En el caso de la plataforma móvil, es necesario implementar un bloque *Transform Sensor* entre el sistema de referencia global y el sistema de referencia de la plataforma móvil, como se ilustra en la Figura 5.8. Este bloque debe configurarse para realizar las mediciones correspondientes de posición, velocidad y aceleración (véase la Figura 5.7, inciso b). En cuanto a la medición de posición, el *Transform Sensor* no proporciona directamente la posición en términos de ángulos de Euler, pero sí en forma de matriz de rotación. Por esta razón, se selecciona esta opción y posteriormente se realiza la conversión a ángulos de Euler de manera externa.

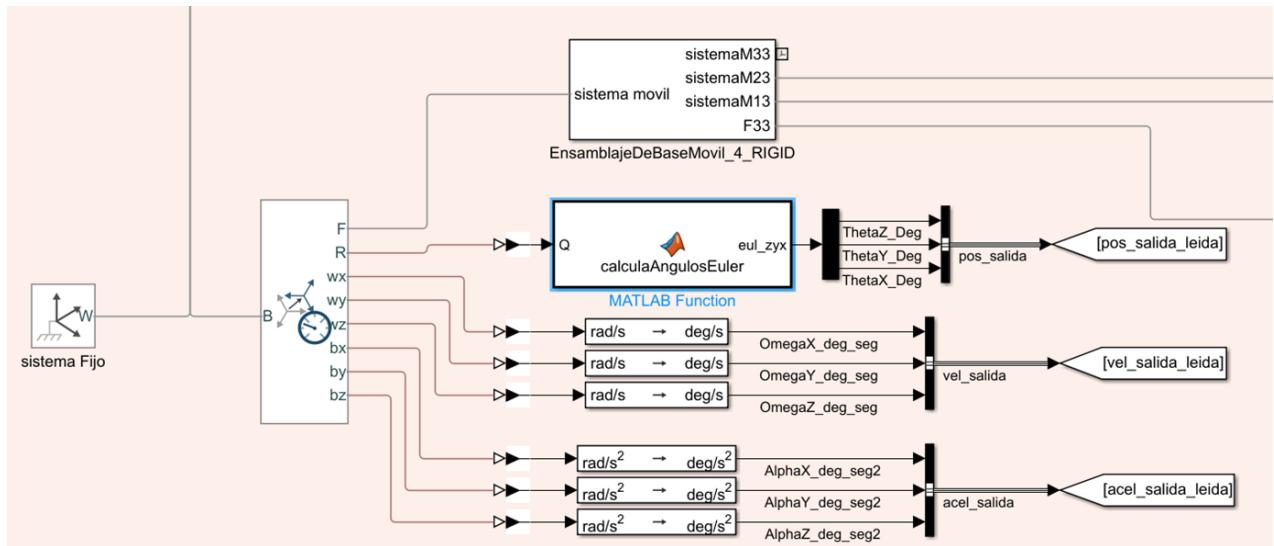


Figura 5.8: Implementación del *Transform Sensor* para las lecturas de la plataforma móvil.

Con estas configuraciones, se cuenta con todos los elementos necesarios para realizar la simulación del sistema, asegurando que el modelo represente fielmente el comportamiento del prototipo en el entorno de Simulink.

5.3. Proceso de validación del modelo matemático

5.3.1. Cinemática de posición

Aplicación de la cinemática inversa

Definidas las trayectorias de posición mediante polinomios de grado 5, se procede con la aplicación de la cinemática inversa para calcular las configuraciones articulares requeridas. Este proceso permite determinar los ángulos de las articulaciones necesarios para que el manipulador alcance cada punto de la trayectoria especificada.

El proceso se desarrolla siguiendo los pasos que se describen a continuación (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). Para una mejor comprensión, consulte la Figura 5.9.

- ✓ **Entrada de la trayectoria de posición:** Las posiciones $\theta_{z_d}(t), \theta_{y_d}(t), \theta_{x_d}(t)$, generadas por los polinomios, se introducen en el modelo de cinemática inversa.
- ✓ **Cálculo de las configuraciones articulares:** Se resuelven las ecuaciones de cinemática inversa en función de la trayectoria deseada y los parámetros de construcción, obteniendo así los ángulos articulares $\theta_i(t)$ requeridos en cada instante de tiempo (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).

Aplicación de la cinemática directa

Las configuraciones articulares obtenidas mediante la cinemática inversa se emplean en el modelo de cinemática directa para recalcular las posiciones $\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t)$ del manipulador a partir de los ángulos articulares generalizados $\theta_i(t)$ previamente determinados.

El procedimiento consiste en:

- ✓ **Entrada de las configuraciones articulares:** Los ángulos $\theta_i(t)$ obtenidos mediante la cinemática inversa se ingresan en el modelo de cinemática directa.
- ✓ **Cálculo de las posiciones recalculadas:** Se resuelven las ecuaciones de cinemática directa para obtener las posiciones $\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t)$ del manipulador en cada instante de tiempo (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).

Este paso permite verificar la precisión del modelo matemático, asegurando que las posiciones recalculadas coincidan con las trayectorias originales definidas por los polinomios de posición.

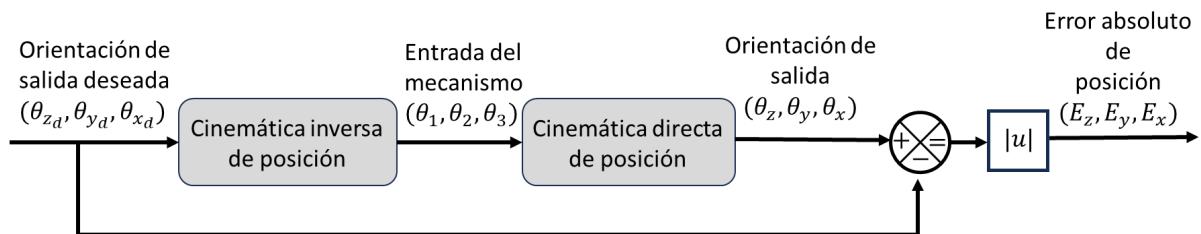


Figura 5.9: Proceso de validación de la cinemática de posición.

Comparación y análisis de errores

Para evaluar la precisión del modelo matemático, se compara cada una de las posiciones originales $\theta_{z_d}(t), \theta_{y_d}(t), \theta_{x_d}(t)$ con las posiciones recalculadas $\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t)$. El error absoluto se define según la ecuación (5.3).

$$\begin{aligned}
 E_z(t) &= |\theta_z(t) - \theta_{z_d}(t)|, \\
 E_y(t) &= |\theta_y(t) - \theta_{y_d}(t)|, \\
 E_x(t) &= |\theta_x(t) - \theta_{x_d}(t)|,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde $E_z(t)$, $E_y(t)$ y $E_x(t)$ representan el error absoluto en cada instante de tiempo t para las componentes correspondientes de la secuencia de rotación ZYX. Este error se grafica en función del tiempo, permitiendo visualizar las discrepancias presentes en el modelo teórico de posición.

Los errores de la ecuación (5.3) ofrecen una herramienta de diagnóstico para identificar desviaciones y evaluar si el modelo matemático satisface los requisitos de precisión establecidos. Un error bajo (menor de 1×10^{-1}) y consistente indicará una alta fidelidad del modelo, mientras que discrepancias significativas podrían señalar la necesidad de ajustes en las ecuaciones de posición o en los parámetros del modelo.

Validación del modelo matemático mediante simulación

Además de la validación teórica, se realiza una simulación en Matlab Simulink para evaluar la precisión del modelo matemático en un entorno virtual (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). El modelo se configura con los parámetros específicos del diseño del manipulador, que coinciden con los empleados en el modelo matemático, garantizando así una representación precisa y coherente en la simulación.

El proceso de comparación se lleva a cabo mediante los siguientes pasos (véase la Figura 5.10):

- ✓ **Simulación de la trayectoria:** Las trayectorias de posición definidas por los polinomios de grado 5 ($\theta_{1_d}(t), \theta_{2_d}(t), \theta_{3_d}(t)$), son introducidas en el modelo simulado por medio de las entradas del mecanismo.
- ✓ **Obtención de las posiciones simuladas:** A lo largo del tiempo, se registran las posiciones del manipulador en la simulación, obteniendo así $\theta_{z_{sim}}(t), \theta_{y_{sim}}(t), \theta_{x_{sim}}(t)$.
- ✓ **Cálculo de la cinemática directa:** Utilizando las mismas trayectorias de posición definidas por los polinomios de grado 5, se calculan las posiciones de salida del manipulador ($\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t)$) mediante el modelo de cinemática directa (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Cálculo de la cinemática inversa:** Utilizando las posiciones leídas mediante la simulación, se calculan las posiciones de entrada del manipulador ($\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$) mediante el modelo de cinemática inversa (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Comparación de resultados:** Se compara la posición obtenida mediante la cinemática directa del modelo matemático ($\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t)$) con la posición registrada en la simulación ($\theta_{z_{sim}}(t), \theta_{y_{sim}}(t), \theta_{x_{sim}}(t)$). Además, se realiza una comparación entre la trayectoria de entrada de la simulación ($\theta_{1_d}(t), \theta_{2_d}(t), \theta_{3_d}(t)$) y la entrada obtenida mediante la cinemática inversa ($\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$).

El error absoluto entre ambas posiciones se define como en la ecuación (5.4).

$$\begin{aligned}
 E_{z_{dir}}(t) &= |\theta_z(t) - \theta_{z_{sim}}(t)|, \\
 E_{y_{dir}}(t) &= |\theta_y(t) - \theta_{y_{sim}}(t)|, \\
 E_{x_{dir}}(t) &= |\theta_x(t) - \theta_{x_{sim}}(t)|, \\
 E_{1_{inv}}(t) &= |\theta_1(t) - \theta_{1_d}(t)|, \\
 E_{2_{inv}}(t) &= |\theta_2(t) - \theta_{2_d}(t)|, \\
 E_{3_{inv}}(t) &= |\theta_3(t) - \theta_{3_d}(t)|,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

En este contexto, los subíndices “dir” e “inv” se utilizan para señalar si el error corresponde a la cinemática directa o inversa. Este error se grafica con el fin de evaluar la concordancia entre el modelo matemático y la simulación. Una coincidencia adecuada entre ambos valida la precisión del modelo en términos de posición, mientras que discrepancias significativas pueden

sugerir la necesidad de ajustar los parámetros del modelo o las condiciones de la simulación para mejorar su exactitud.

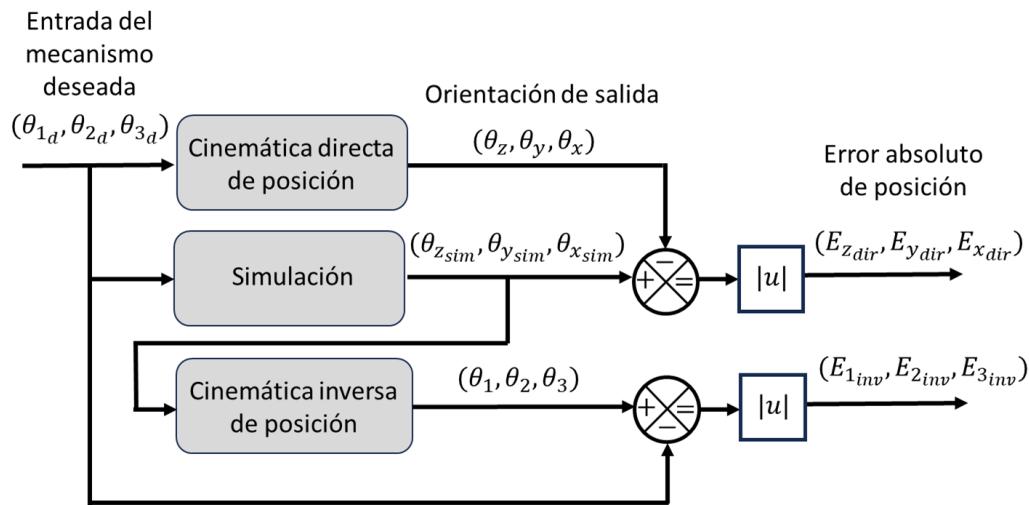


Figura 5.10: Proceso de validación de la cinemática de posición mediante simulación.

5.3.2. Cinemática de velocidad

La validación de la cinemática de velocidad requiere la confirmación previa del modelo de posición, ya que este proporciona la información necesaria para el cálculo de las velocidades. El proceso sigue una metodología similar a la empleada en la validación de la cinemática de posición, integrando tanto la cinemática directa como la inversa de velocidad y posición, así como un modelo de simulación (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). A continuación, se describe detalladamente el proceso de validación:

Proceso de validación matemática mediante cinemática inversa y directa

El proceso inicial de validación consiste en proponer una salida deseada para el manipulador y calcular la entrada correspondiente mediante la cinemática inversa. A continuación, esta entrada es evaluada utilizando la cinemática directa, lo que permite comparar la salida deseada con la obtenida. En la Figura 5.11 se detalla este proceso, estructurado en los siguientes pasos:

- ✓ **Generación de trayectorias de velocidad:** Para validar el modelo de velocidad, se derivan los polinomios de grado 5 que describen las trayectorias de posición $(\theta_{z_d}(t), \theta_{y_d}(t), \theta_{x_d}(t))$, obteniendo los polinomios de grado 4 que representan las trayectorias de velocidad deseadas $(\dot{\theta}_{z_d}(t), \dot{\theta}_{y_d}(t), \dot{\theta}_{x_d}(t))$.
- ✓ **Conversión de trayectorias de velocidad al estado de velocidad:** Las trayectorias de velocidad deseadas $(\dot{\theta}_{z_d}(t), \dot{\theta}_{y_d}(t), \dot{\theta}_{x_d}(t))$ se convierten en el vector de velocidad an-

gular deseado ${}^B\omega_d^P$ mediante la ecuación (4.61), conformando así el estado de velocidad deseado ${}^B\mathbf{V}_{o_d}^P$.

- ✓ **Cinemática inversa de velocidad:** Con el estado de velocidad deseado ${}^B\mathbf{V}_{o_d}^P$, se calculan las velocidades de cada articulación generalizada $(\dot{\theta}_i(t))$ utilizando la cinemática inversa (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Cinemática directa de velocidad:** A partir de las velocidades articulares obtenidas, se aplica la cinemática directa para calcular el estado de velocidad ${}^B\mathbf{V}_o^P$ (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Conversión del estado de velocidad a las derivadas de los ángulos de Euler:** Una vez obtenido el estado de velocidad, se separa en sus componentes lineales y angulares. Posteriormente, la velocidad angular ${}^B\omega^P$ se convierte en las derivadas temporales de los ángulos de Euler $(\dot{\theta}_z(t), \dot{\theta}_y(t), \dot{\theta}_x(t))$ mediante la ecuación (4.64).

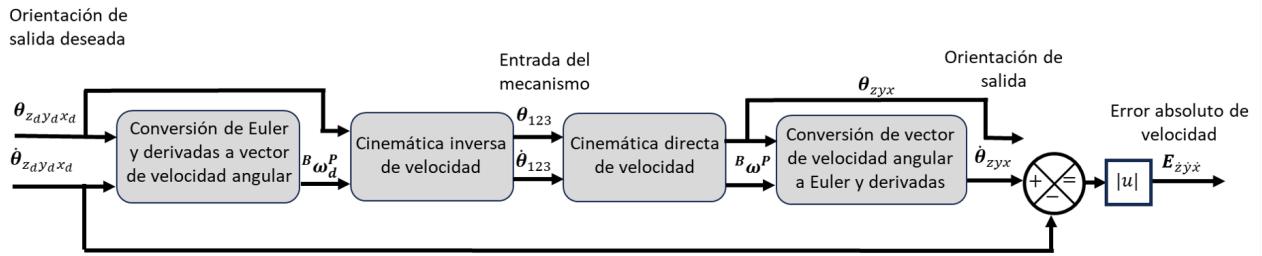


Figura 5.11: Proceso de validación del modelo matemático de velocidad mediante la cinemática inversa y directa.

Por medio de ese proceso se calculan los errores absolutos entre las velocidades deseadas y calculadas mediante la ecuación (5.5).

$$\begin{aligned}
 E_z(t) &= |\dot{\theta}_z(t) - \dot{\theta}_{z_d}(t)|, \\
 E_y(t) &= |\dot{\theta}_y(t) - \dot{\theta}_{y_d}(t)|, \\
 E_x(t) &= |\dot{\theta}_x(t) - \dot{\theta}_{x_d}(t)|.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Proceso de validación mediante simulación

Este proceso emplea el modelo del manipulador en simulación, estableciendo una entrada deseada que pueda implementarse en el modelo para obtener las salidas correspondientes. Con la entrada aplicada y las salidas registradas, es posible utilizar una de ellas para calcular la otra mediante la cinemática adecuada, ya sea directa o inversa, y comparar los resultados con los obtenidos en la simulación. En la Figura 5.12 se detallan los pasos, los cuales se describen a continuación:

- ✓ **Simulación de trayectorias:** Se definen trayectorias de posición $(\theta_{1_d}(t), \theta_{2_d}(t), \theta_{3_d}(t))$ y velocidad $(\dot{\theta}_{1_d}(t), \dot{\theta}_{2_d}(t), \dot{\theta}_{3_d}(t))$ mediante polinomios de grado 5 y 4, respectivamente, los cuales se utilizan como entrada en el modelo de simulación.
- ✓ **Obtención de posiciones y velocidades simuladas:** Se registran las posiciones $(\theta_{z_{sim}}(t), \theta_{y_{sim}}(t), \theta_{x_{sim}}(t))$, el vector de velocidad angular $(^B\omega_{sim}^P(t))$ y las velocidades angulares articulares $(\Omega_{i_{sim}})$ resultantes de la salida del manipulador.
- ✓ **Conversión del vector de velocidad angular a derivada de ángulos de Euler:** Una vez obtenido el vector de velocidad angular $(^B\omega_{sim}^P(t))$ y las posiciones $(\theta_{z_{sim}}(t), \theta_{y_{sim}}(t), \theta_{x_{sim}}(t))$ son calculadas las derivadas temporales de los ángulos de Euler $(\dot{\theta}_{z_{sim}}(t), \dot{\theta}_{y_{sim}}(t), \dot{\theta}_{x_{sim}}(t))$ mediante la ecuación (4.64).
- ✓ **Implementación de la cinemática directa de posición y velocidad:** Se calcula el vector de velocidad angular $(^B\omega^P(t))$ y las posiciones de salida $(\theta_z(t), \theta_y(t), \theta_x(t))$ aplicando la cinemática directa de velocidad y de posición, respectivamente, utilizando las mismas entradas que en la simulación (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Conversión del vector de velocidad angular a derivadas de ángulos de Euler:** A partir del vector de velocidad angular y las posiciones de salida obtenidas mediante la cinemática directa de velocidad y posición, respectivamente, se calculan las derivadas de los ángulos de Euler $(\dot{\theta}_z(t), \dot{\theta}_y(t), \dot{\theta}_x(t))$ utilizando la ecuación (4.64).
- ✓ **Validación de la cinemática directa de velocidad:** Se comparan las salidas obtenidas en la simulación con aquellas generadas mediante la cinemática directa de velocidad. Aunque esta comparación puede realizarse utilizando los vectores de velocidad angular, resulta más adecuada al emplear las derivadas de los ángulos de Euler, previamente calculadas. De esta forma, se verifica la consistencia entre las trayectorias de posición definidas en términos de ángulos de Euler y las relaciones de velocidad correspondientes.
- ✓ **Validación de la cinemática inversa de velocidad:** Se calculan las velocidades de entrada $(\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dot{\theta}_3(t))$ y las velocidades angulares articulares (Ω_i) aplicando la cinemática inversa de velocidad, utilizando las salidas registradas en la simulación (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas). Posteriormente, se comparan las velocidades de entrada deseadas con las obtenidas mediante la cinemática inversa de velocidad. Adicionalmente, se realiza una comparación entre las velocidades angulares articulares derivadas de la simulación y las generadas por la implementación de la cinemática inversa. Finalmente, se evalúa la concordancia entre los resultados mediante el cálculo del error, asegurando así la consistencia del modelo.

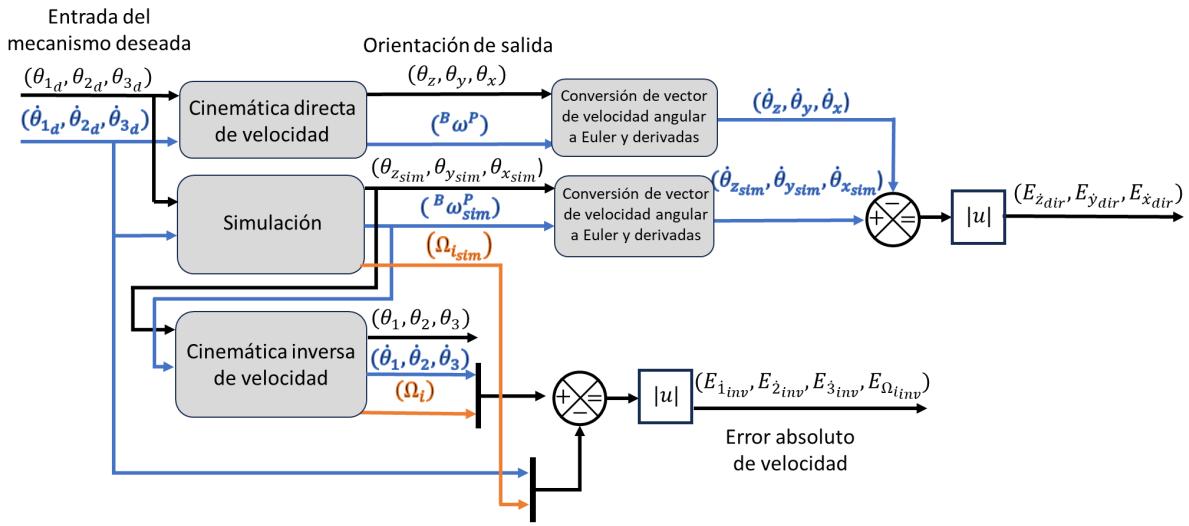


Figura 5.12: Proceso de validación de la cinemática de velocidad mediante simulación.

El error absoluto entre las velocidades obtenidas por las cinemáticas directa e inversa y las de la simulación se calcula mediante la ecuación (5.6).

$$\begin{aligned}
 E_{\dot{\theta}_z}(t) &= |\dot{\theta}_z(t) - \dot{\theta}_{zsim}(t)|, \\
 E_{\dot{\theta}_y}(t) &= |\dot{\theta}_y(t) - \dot{\theta}_{ysim}(t)|, \\
 E_{\dot{\theta}_x}(t) &= |\dot{\theta}_x(t) - \dot{\theta}_{xsim}(t)|, \\
 E_{\dot{\theta}_1}(t) &= |\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_{1d}(t)|, \\
 E_{\dot{\theta}_2}(t) &= |\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_{2d}(t)|, \\
 E_{\dot{\theta}_3}(t) &= |\dot{\theta}_3(t) - \dot{\theta}_{3d}(t)|, \\
 E_{\Omega_i}(t) &= |\Omega_i(t) - \Omega_{isim}(t)|.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Estos errores representan la concordancia entre las velocidades calculadas y simuladas, confirmando la precisión del modelo de cinemática de velocidad. Cualquier discrepancia significativa indicará la necesidad de revisar parámetros del modelo o condiciones de simulación.

5.3.3. Cinemática de aceleración

La validación de la cinemática de aceleración requiere la confirmación previa de los modelos de posición y velocidad, dado que ambos son necesarios para el cálculo de las aceleraciones. Este proceso sigue una metodología similar a la empleada en la validación de la cinemática de posición y velocidad, integrando tanto la cinemática directa como la inversa de aceleración, velocidad y posición, así como un modelo de simulación (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). A continuación, se describe el proceso de validación:

Proceso de validación matemática mediante cinemática inversa y directa

El proceso de validación matemática de la aceleración se lleva a cabo mediante los pasos descritos a continuación. Para una mejor comprensión, consulte la Figura 5.13.

- ✓ **Generación de trayectorias de aceleración:** Para validar el modelo de aceleración, se derivan los polinomios de grado 5 de posición ($\theta_{z_d}(t), \theta_{y_d}(t), \theta_{x_d}(t)$), los polinomios de grado 4 de velocidad ($\dot{\theta}_{z_d}(t), \dot{\theta}_{y_d}(t), \dot{\theta}_{x_d}(t)$) y se generan los polinomios de grado 3 que representan las trayectorias de aceleración deseadas ($\ddot{\theta}_{z_d}(t), \ddot{\theta}_{y_d}(t), \ddot{\theta}_{x_d}(t)$).
- ✓ **Conversión de trayectorias de velocidad y aceleración a estados de velocidad y aceleración:** A partir de las trayectorias generadas, se calculan los vectores de velocidad angular (${}^B\omega_d^P$) y aceleración angular (${}^B\alpha_d^P$) utilizando las ecuaciones (4.61) y (4.87), respectivamente.
- ✓ **Cinemática inversa de aceleración:** Con los vectores de velocidad angular y aceleración angular deseados, junto con los polinomios de grado 5 que describen la posición deseada, se determina la aceleración de cada articulación generalizada ($\ddot{\theta}_i(t)$) mediante la aplicación de la cinemática inversa (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Cinemática directa de aceleración:** A partir de las aceleraciones articulares generalizadas, se emplea la cinemática directa para obtener el estado de aceleración del manipulador, del cual se deriva el vector de aceleración angular (${}^B\alpha^P$) (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Conversión de vectores de velocidad y aceleración angular a derivadas de ángulos de Euler:** A partir de los vectores de velocidad y aceleración angular obtenidos mediante la cinemática directa, se emplean las ecuaciones (4.64) y (4.89), respectivamente, para calcular las trayectorias de entrada ($\dot{\theta}_z(t), \dot{\theta}_y(t), \dot{\theta}_x(t)$) y ($\ddot{\theta}_z(t), \ddot{\theta}_y(t), \ddot{\theta}_x(t)$).
- ✓ **Comparación teórica de resultados:** Las aceleraciones obtenidas mediante la cinemática directa ($\ddot{\theta}_z(t), \ddot{\theta}_y(t), \ddot{\theta}_x(t)$) se comparan con las aceleraciones deseadas ($\ddot{\theta}_{z_d}(t), \ddot{\theta}_{y_d}(t), \ddot{\theta}_{x_d}(t)$) para evaluar la precisión del modelo.

El error absoluto entre las aceleraciones deseadas y calculadas se expresa mediante la ecuación (5.7).

$$\begin{aligned}
 E_{\dot{z}}(t) &= |\ddot{\theta}_z(t) - \ddot{\theta}_{z_d}(t)|, \\
 E_{\dot{y}}(t) &= |\ddot{\theta}_y(t) - \ddot{\theta}_{y_d}(t)|, \\
 E_{\dot{x}}(t) &= |\ddot{\theta}_x(t) - \ddot{\theta}_{x_d}(t)|
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

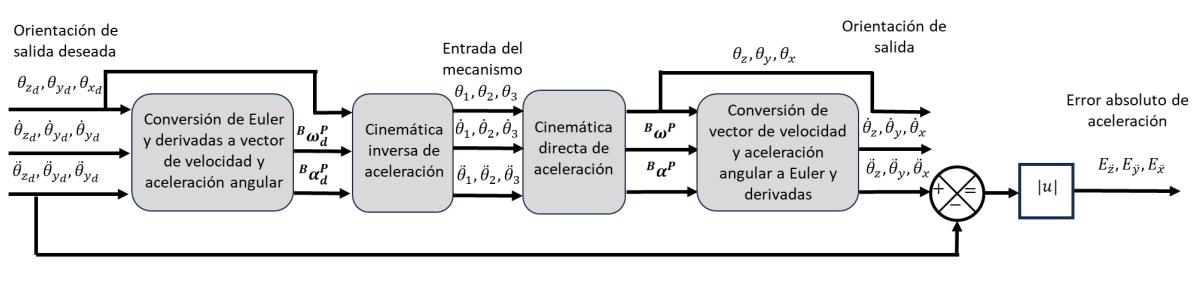


Figura 5.13: Proceso de validación de la cinemática de aceleración.

Proceso de validación mediante simulación

Este proceso de validación se lleva a cabo utilizando el modelo simulado, siguiendo los pasos que se describen a continuación. Para mayor detalle, consulte la Figura 5.14.

- ✓ **Simulación de trayectorias:** Se definen trayectorias de posición $(\theta_{1_d}(t), \theta_{2_d}(t), \theta_{3_d}(t))$, velocidad $(\dot{\theta}_{1_d}(t), \dot{\theta}_{2_d}(t), \dot{\theta}_{3_d}(t))$ y aceleración $(\ddot{\theta}_{1_d}(t), \ddot{\theta}_{2_d}(t), \ddot{\theta}_{3_d}(t))$ mediante polinomios de grado 5, 4 y 3, respectivamente, los cuales se utilizan como entrada en el modelo de simulación.
- ✓ **Obtención de posiciones, velocidades y aceleraciones angulares simuladas:** Se registran las posiciones $(\theta_{z_{sim}}(t), \theta_{y_{sim}}(t), \theta_{x_{sim}}(t))$, los vectores de velocidad angular $({}^B\omega_{sim}^P)$, los vectores de aceleración angular $({}^B\alpha_{sim}^P)$ y las aceleraciones angulares articulares $(\dot{\Omega}_{i_{sim}})$ obtenidos como resultado de la simulación del modelo.
- ✓ **Conversión de vectores de velocidad y aceleración angular a derivadas de ángulos de Euler:** A partir de las posiciones de salida, los vectores de velocidad angular y los vectores de aceleración angular obtenidos de la simulación, se calculan las primeras y segundas derivadas de los ángulos de Euler utilizando las ecuaciones (4.64) y (4.89), respectivamente.
- ✓ **Implementación de la cinemática directa de aceleración:** Se calculan las posiciones $(\theta_z, \theta_y, \theta_x)$, los vectores de velocidad angular $({}^B\omega^P)$ y los vectores de aceleración angular de salida $({}^B\alpha^P)$ mediante la aplicación de la cinemática directa de aceleración, utilizando las mismas entradas empleadas en la simulación (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas).
- ✓ **Conversión de vectores de velocidad angular y aceleración angular a derivadas de ángulos de Euler:** A partir de los vectores de posición, velocidad angular y aceleración angular obtenidos mediante la cinemática directa de posición, velocidad y aceleración, respectivamente, se calculan las primeras y segundas derivadas de los ángulos de Euler, $(\dot{\theta}_z(t), \dot{\theta}_y(t), \dot{\theta}_x(t))$ y $(\ddot{\theta}_z(t), \ddot{\theta}_y(t), \ddot{\theta}_x(t))$, utilizando las ecuaciones (4.64) y (4.89).

- ✓ **Validación de la cinemática directa de aceleración:** Se realiza una comparación entre las salidas obtenidas en la simulación y aquellas generadas a través de la conversión a derivadas de los ángulos de Euler. Aunque la comparación también puede efectuarse utilizando los vectores de aceleración angular, resulta más adecuado utilizar las derivadas de los ángulos de Euler previamente calculadas. Esta aproximación permite comprobar la coherencia entre las trayectorias de posición, definidas en términos de ángulos de Euler, y las relaciones de aceleración correspondientes.
- ✓ **Validación de la cinemática inversa de aceleración:** Se determinan las aceleraciones de entrada $(\ddot{\theta}_1(t), \ddot{\theta}_2(t), \ddot{\theta}_3(t))$ y las aceleraciones angulares articulares $(\dot{\Omega}_i(t))$ mediante la aplicación de la cinemática inversa de aceleración (véase Apéndice A para el detalle de las funciones implementadas), empleando las salidas registradas en la simulación como referencia. Posteriormente, se comparan las aceleraciones de entrada deseadas con las obtenidas a partir de la cinemática inversa de aceleración. Adicionalmente, se realiza una comparación entre las aceleraciones angulares articulares generadas en la simulación y aquellas calculadas mediante la cinemática inversa, evaluando la concordancia entre ambos conjuntos de resultados.

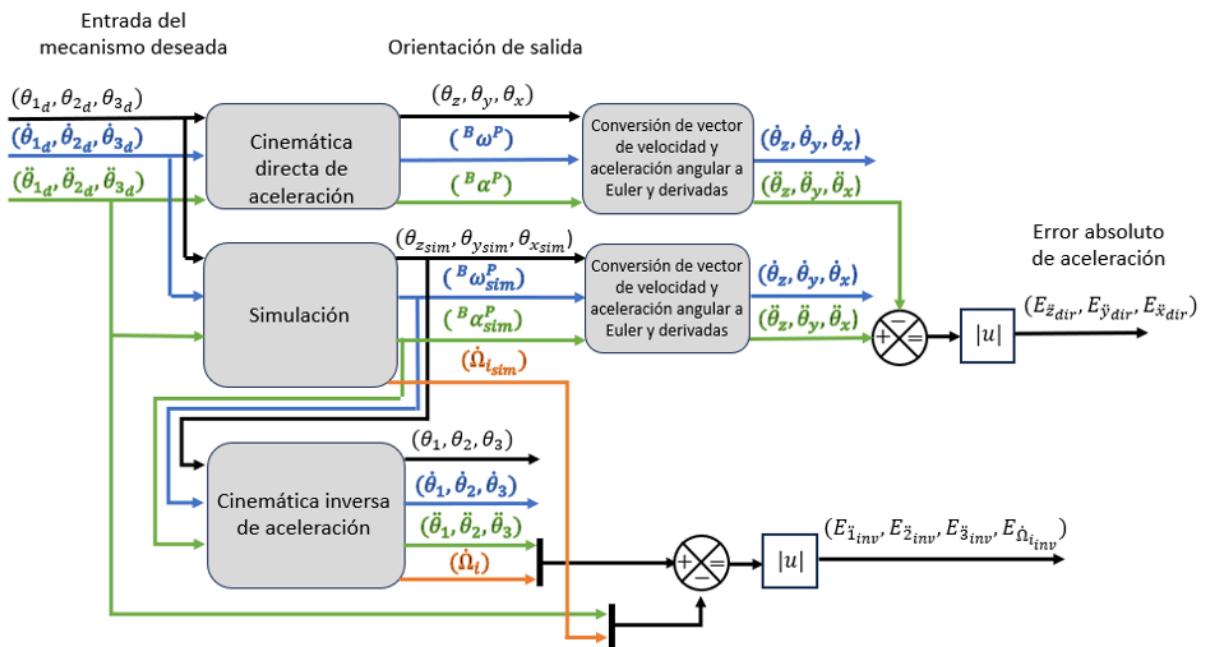


Figura 5.14: Proceso de validación de la cinemática de aceleración mediante simulación.

El error absoluto entre las aceleraciones calculadas y simuladas se expresa mediante la ecuación (5.7).

$$\begin{aligned}
E_{\ddot{z}_{dir}}(t) &= |\ddot{\theta}_z(t) - \ddot{\theta}_{z_{sim}}(t)|, \\
E_{\ddot{y}_{dir}}(t) &= |\ddot{\theta}_y(t) - \ddot{\theta}_{y_{sim}}(t)|, \\
E_{\ddot{x}_{dir}}(t) &= |\ddot{\theta}_x(t) - \ddot{\theta}_{x_{sim}}(t)|, \\
E_{\ddot{\theta}_{1_{inv}}}(t) &= |\ddot{\theta}_1(t) - \ddot{\theta}_{1_d}(t)|, \\
E_{\ddot{\theta}_{2_{inv}}}(t) &= |\ddot{\theta}_2(t) - \ddot{\theta}_{2_d}(t)|, \\
E_{\ddot{\theta}_{3_{inv}}}(t) &= |\ddot{\theta}_3(t) - \ddot{\theta}_{3_d}(t)|, \\
E_{\dot{\Omega}_{i_{inv}}}(t) &= |\dot{\Omega}_i(t) - \dot{\Omega}_{i_{sim}}(t)|.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Estos errores reflejan la concordancia entre las aceleraciones deseadas, calculadas y simuladas, proporcionando una medida de las posibles discrepancias en los parámetros del modelo o en las condiciones de simulación.

5.4. Resultados de la validación cinemática

En esta sección se presentan los resultados obtenidos tras aplicar el proceso de validación de la cinemática, descrito previamente (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). Los resultados se dividen en las subsecciones de posición, velocidad y aceleración, cada una de las cuales incluye gráficos que permiten evaluar la precisión del modelo. Para cada validación, se han utilizado funciones de trayectoria con condiciones de frontera específicas, de acuerdo con las ecuaciones (5.1), y considerando los parámetros de construcción previamente definidos: $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, y $\gamma = 0^\circ$.

Para la validación de la trayectoria, se definieron las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
\theta_{z_{d0}} &= 0^\circ, & \theta_{y_{d0}} &= 0^\circ, & \theta_{x_{d0}} &= 0^\circ, \\
\theta_{z_{df}} &= 90^\circ, & \theta_{y_{df}} &= 25^\circ, & \theta_{x_{df}} &= -30^\circ, \\
\theta_{1_{d0}} &= 0^\circ, & \theta_{2_{d0}} &= 0^\circ, & \theta_{3_{d0}} &= 0^\circ, \\
\theta_{1_{df}} &= -360^\circ, & \theta_{2_{df}} &= -200^\circ, & \theta_{3_{df}} &= -300^\circ, \\
t_f &= 5s.
\end{aligned}$$

Estas condiciones de frontera son empleadas en las ecuaciones (5.2), generando las siguientes funciones polinómicas de trayectoria para cada una de las variables de movimiento en el intervalo de tiempo especificado. Cabe señalar que las condiciones son seleccionadas cuidadosamente para evitar cualquier singularidad a lo largo de la trayectoria, asegurando que las variables se mantengan dentro del espacio de trabajo del manipulador.

Funciones de posición:

$$\begin{aligned}\theta_{z_d}(t) &= 0,1728t^5 - 2,1600t^4 + 7,2000t^3, \\ \theta_{y_d}(t) &= 0,0480t^5 - 0,6000t^4 + 2,0000t^3, \\ \theta_{x_d}(t) &= -0,0576t^5 + 0,7200t^4 - 2,4000t^3, \\ \theta_{1_d}(t) &= -0,6912t^5 + 8,64t^4 - 28,80t^3, \\ \theta_{2_d}(t) &= -0,3840t^5 + 4,800t^4 - 16,00t^3, \\ \theta_{3_d}(t) &= -0,5760t^5 + 7,200t^4 - 24,0t^3.\end{aligned}$$

Funciones de velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{z_d}(t) &= 0,8640t^4 - 8,6400t^3 + 21,600t^2, \\ \dot{\theta}_{y_d}(t) &= 0,2400t^4 - 2,4000t^3 + 6,0000t^2, \\ \dot{\theta}_{x_d}(t) &= -0,2880t^4 + 2,8800t^3 - 7,2000t^2, \\ \dot{\theta}_{1_d}(t) &= -3,456t^4 + 34,56t^3 - 86,40t^2, \\ \dot{\theta}_{2_d}(t) &= -1,92t^4 + 19,20t^3 - 48,0t^2, \\ \dot{\theta}_{3_d}(t) &= -2,88t^4 + 28,80t^3 - 72,0t^2.\end{aligned}$$

Funciones de aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_{z_d}(t) &= 3,456t^3 - 25,92t^2 + 43,2t, \\ \ddot{\theta}_{y_d}(t) &= 0,96t^3 - 7,20t^2 + 12,00t, \\ \ddot{\theta}_{x_d}(t) &= -1,1520t^3 + 8,6400t^2 - 14,4000t, \\ \ddot{\theta}_{1_d}(t) &= -13,824t^3 + 103,68t^2 - 172,80t, \\ \ddot{\theta}_{2_d}(t) &= -7,68t^3 + 57,60t^2 - 96,0t, \\ \ddot{\theta}_{3_d}(t) &= -11,52t^3 + 86,40t^2 - 144,0t.\end{aligned}$$

Las funciones resultantes cumplen con las condiciones de frontera y definen la trayectoria de las variables de posición, velocidad y aceleración dentro del intervalo especificado. A continuación, se presentan los resultados de la validación para la cinemática de posición, seguidos de las subsecciones correspondientes a la velocidad y aceleración.

5.4.1. Validación de la cinemática de posición

La validación del modelo de posición se realiza en dos etapas, representadas gráficamente en esta sección. La primera etapa evalúa la coherencia del modelo de posición mediante el proceso de validación inverso-directo. Para ello, se definen las funciones de posición de salida del manipulador, y estas se introducen en el cálculo de la cinemática inversa. Las posiciones articulares obtenidas se procesan luego mediante la cinemática directa para obtener las posiciones de salida estimadas, que se comparan con las deseadas a través de gráficos que muestran el error absoluto entre ambas (véase la Figura 5.15). Este error refleja la precisión del modelo y la calidad del ajuste de los parámetros de construcción en las funciones de posición de salida.

Análisis de la cinemática de posición: Trayectorias de salida y errores asociados

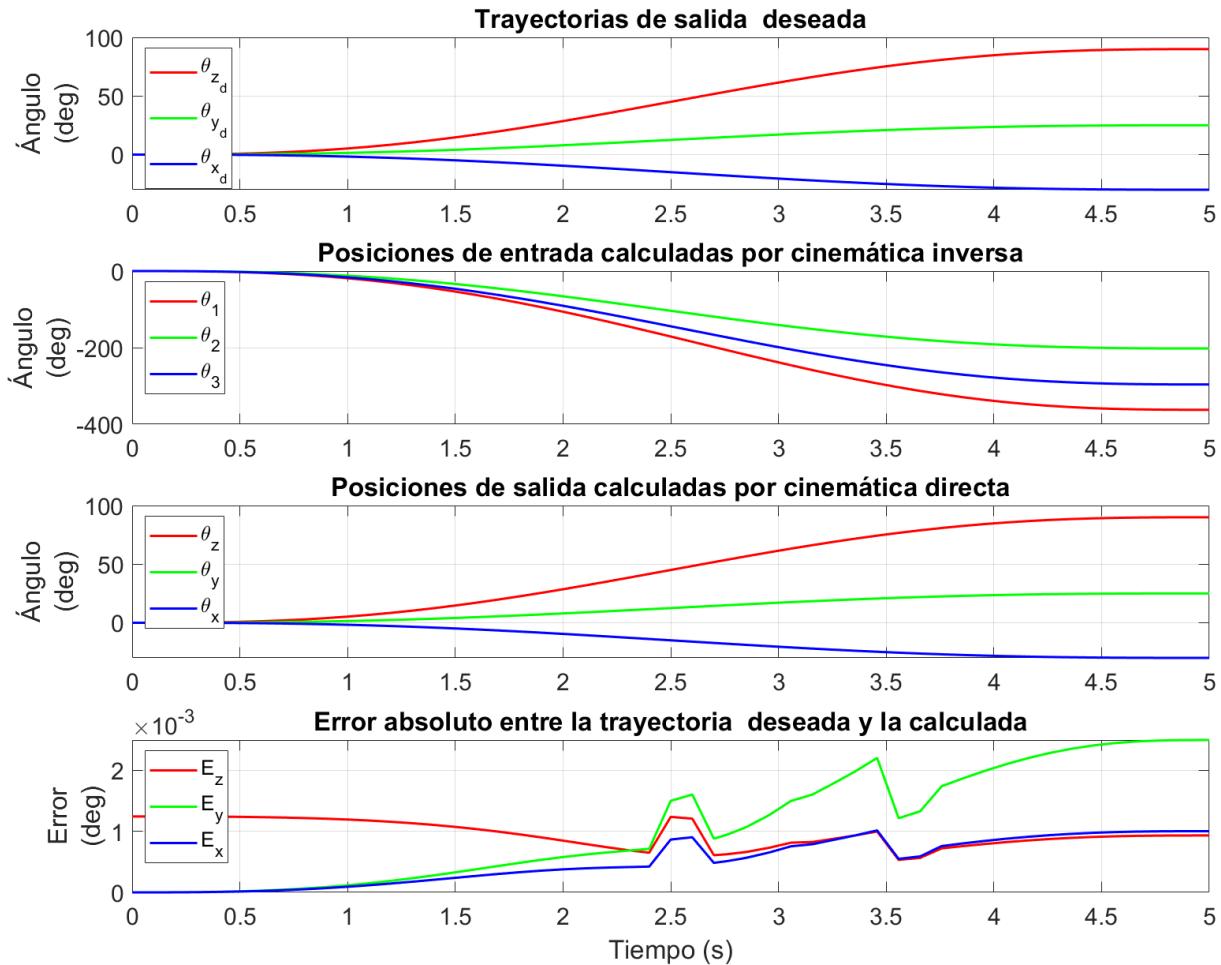


Figura 5.15: Análisis de cinemática de posición, funciones grado 5.

La segunda etapa de la validación se lleva a cabo mediante la implementación del proceso de validación por simulación, como se describe en la Sección 5.3.1. Cabe señalar que este proceso implica condiciones diferentes a las del proceso de validación por lazo cerrado, ya que en ambos casos se inducen movimientos distintos en los modelos. Aunque se procura que las funciones utilizadas sean lo más similares posible, no es factible compararlas directamente. Esto se debe a que, en la validación por lazo cerrado, se proponen las funciones de salida, mientras que en el proceso por simulación se definen las funciones de entrada. En la Figura 5.16 se muestra la validación de la cinemática directa de posición, donde se comparan las trayectorias obtenidas del manipulador al implementar tanto el modelo en simulación como el modelo matemático de la cinemática directa. En las gráficas de la parte superior, representadas por líneas continuas, se visualizan las trayectorias calculadas al resolver la cinemática directa, mientras que las trayectorias obtenidas de las lecturas de la salida de posición del manipulador, mediante la simulación, están representadas por líneas discontinuas. En la parte inferior de la

figura se presentan los errores absolutos obtenidos al comparar los resultados de la simulación con los de la cinemática directa. Estos errores oscilan entre 0 y $2,5 \times 10^{-3}$, lo que sugiere que la cinemática directa de posición es comparable al comportamiento del manipulador. Es importante destacar que, para todas las validaciones, se ha considerado el sistema completo y no solo el manipulador, por lo que se implementó la relación de engranaje correspondiente.

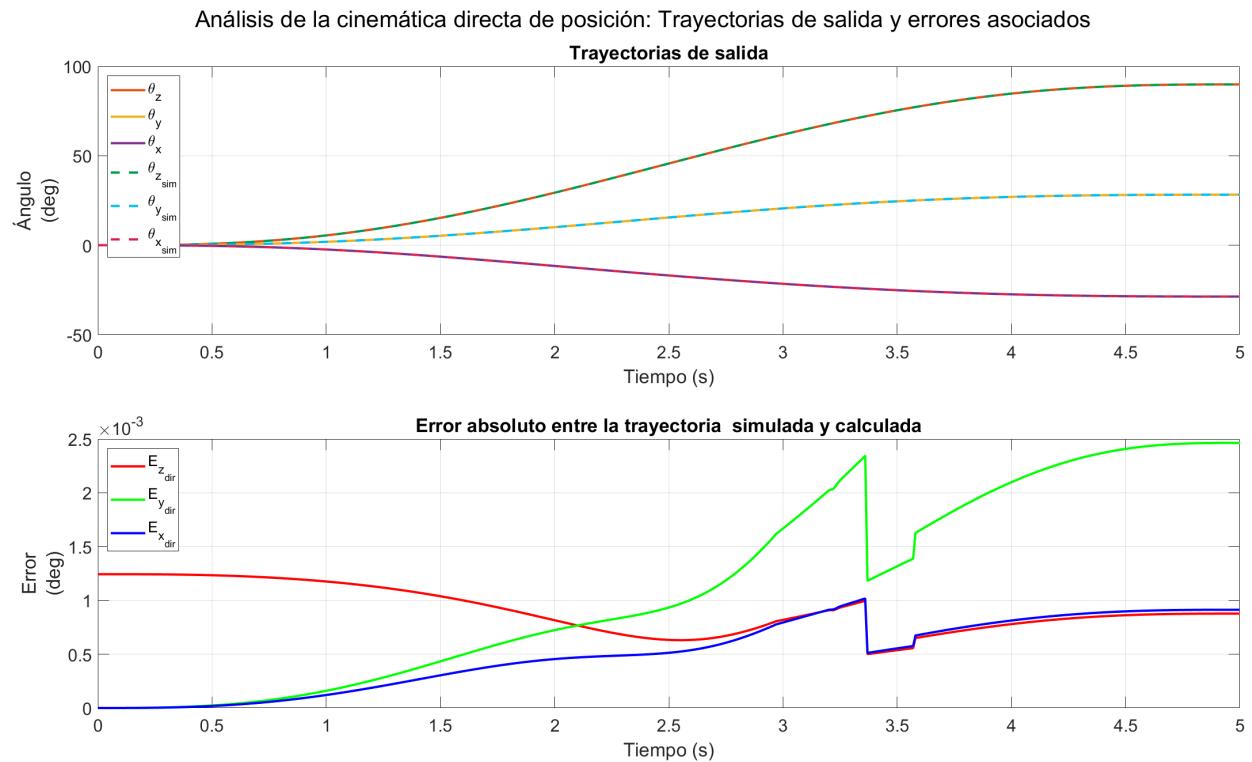


Figura 5.16: Comparación entre la cinemática directa de posición y los resultados obtenidos mediante simulación.

En lo que respecta a la cinemática inversa de posición, se puede consultar la Figura 5.17, donde se comparan las trayectorias establecidas para la entrada del modelo en simulación, representadas por líneas discontinuas, con las trayectorias obtenidas a través de la implementación de la cinemática inversa de posición, mostradas como líneas continuas. Al igual que en la validación de la cinemática directa de posición, en la parte superior de la figura se presentan los errores asociados a esta comparación. En la gráfica se observa que los errores fluctúan entre 0 y $2,5 \times 10^{-10}$, lo cual indica una reducción considerable de los errores en comparación con los obtenidos en la validación de la cinemática directa de posición. Aunque estos errores no deben ser comparados directamente, ya que corresponden a dos procesos distintos, esta comparación resalta el hecho de que, para la cinemática inversa de posición, no es necesario implementar métodos numéricos que requieran un umbral de finalización, lo cual explica la menor magnitud de los errores en este caso. Con la implementación de las dos etapas del proceso de validación se ha comprobado que la cinemática de posición del manipulador está adecuadamente validada, mostrando resultados consistentes y errores dentro de los márgenes esperados.

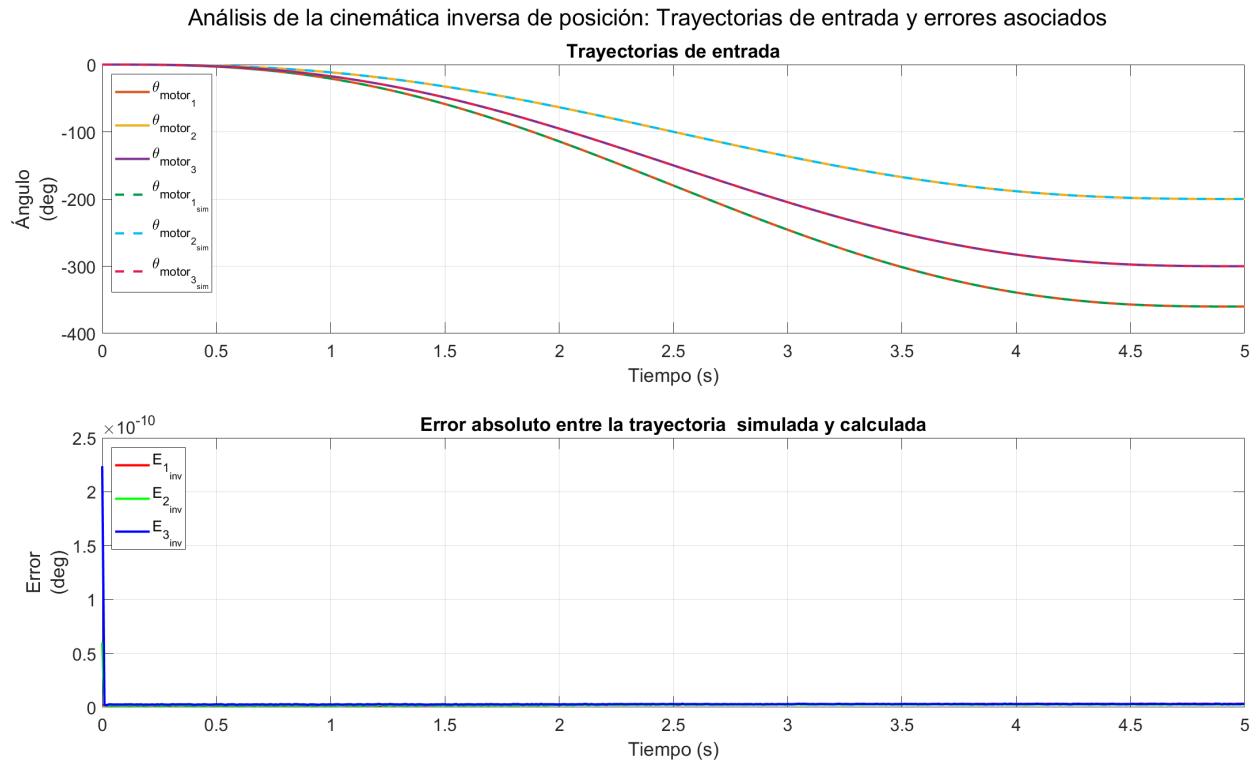


Figura 5.17: Comparación entre la cinemática inversa de posición y los resultados obtenidos mediante simulación.

5.4.2. Validación de la cinemática de velocidad

Para validar el modelo de cinemática de velocidad, se llevaron a cabo simulaciones comparando las trayectorias deseadas de las derivadas de los ángulos de Euler ($\dot{\theta}_{z_d}(t), \dot{\theta}_{y_d}(t), \dot{\theta}_{x_d}(t)$) con las obtenidas mediante el proceso descrito en la sección (5.3.2). Estas trayectorias deseadas fueron definidas a partir de las funciones de velocidad previamente establecidas (ver sección (5.4)), y fueron transformadas al estado de velocidad angular ${}^B\mathbf{V}_{o_d}^P$, requerido para el análisis inverso de velocidad.

Aunque el estado de la velocidad angular ${}^B\mathbf{V}_{o_d}^P$ y las derivadas de los ángulos de Euler representan esencialmente la misma información, lo hacen de maneras distintas. El estado de velocidad incluye, además de la magnitud de la velocidad angular, la orientación espacial del eje alrededor del cual se produce la rotación, mientras que las derivadas de los ángulos de Euler se limitan a describir cómo cambian en el tiempo los propios ángulos. Esta distinción es fundamental para el análisis, ya que mientras las trayectorias deseadas de velocidad están definidas en términos de derivadas de ángulos de Euler para mantener la relación directa con las trayectorias de posición, el análisis de velocidad requiere específicamente el estado de velocidad angular para garantizar un cálculo correcto.

La transformación de las derivadas de los ángulos de Euler al estado de velocidad no solo es una necesidad del análisis inverso, sino que también cumple un rol crucial en preservar la coherencia entre las trayectorias de posición y velocidad. Al garantizar que las velocidades

utilizadas en el análisis correspondan exactamente con las trayectorias de posición definidas, se evita la implementación de trayectorias inconsistentes que podrían alterar los resultados y comprometer la validez del modelo.

De no realizar esta transformación, sería imposible mantener la relación intrínseca de derivación entre posición y velocidad, lo que llevaría a errores significativos. Por ejemplo, implementar directamente las trayectorias de velocidad como si fueran el estado de velocidad angular podría generar inconsistencias debido a que simplemente la trayectoria de posición no correspondería con su trayectoria de velocidad.

En esta validación, las trayectorias de velocidad deseadas fueron utilizadas para calcular el estado de velocidad correspondiente, necesario para el análisis inverso de velocidad, asegurando así que estuvieran correctamente asociadas con las trayectorias de posición definidas. Posteriormente, al obtener las entradas correspondientes a dicha salida, se implementó el análisis directo, lo que permitió encontrar nuevamente el estado de velocidad, el cual fue transformado a su representación en derivadas de los ángulos de Euler para facilitar la comparación con las trayectorias deseadas. Los resultados obtenidos muestran un error máximo de 2×10^{-3} , siendo estos errores similares a los reportados en la cinemática de posición.

Las gráficas incluidas en la Figura 5.18 ilustran los resultados obtenidos al implementar este proceso de validación, confirmando de manera directa la precisión del modelo de cinemática de velocidad. Además, estos resultados destacan la importancia de la transformación adecuada de las trayectorias deseadas al estado de velocidad angular, ya que este paso no solo asegura la consistencia del análisis, sino que también permite evaluar correctamente el desempeño del modelo.

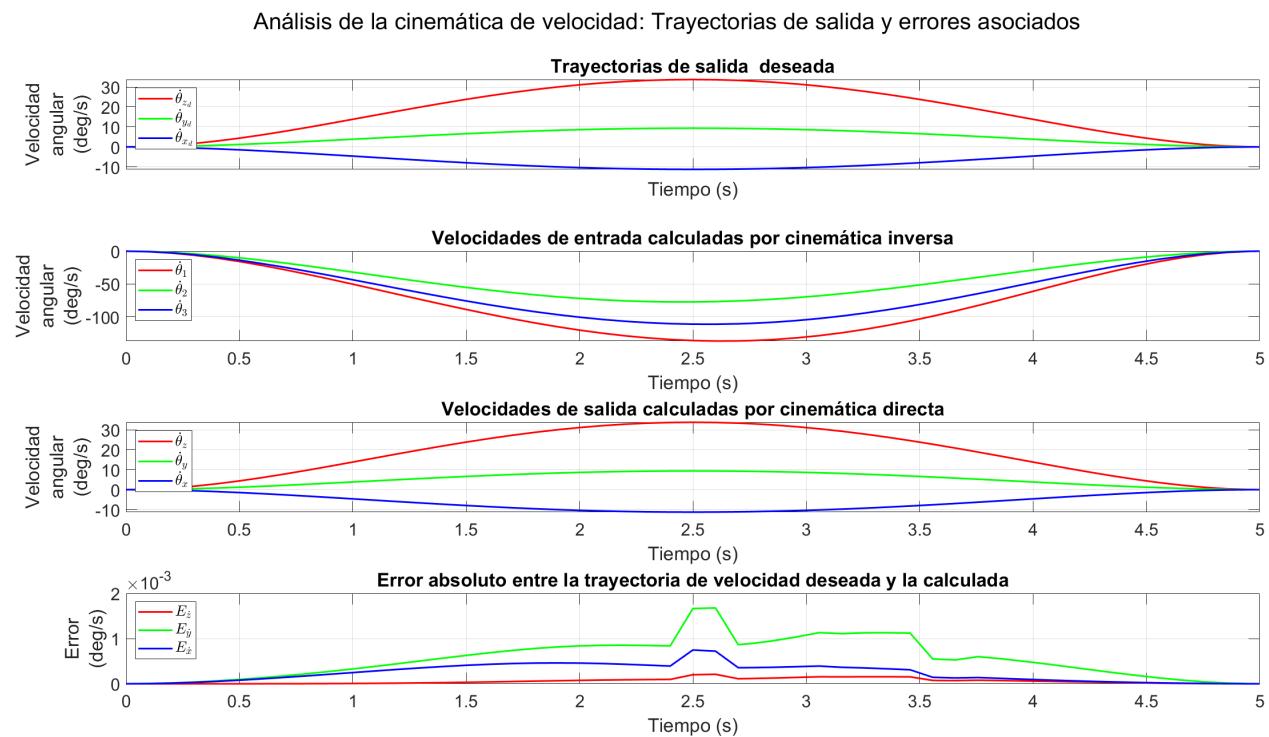


Figura 5.18: Análisis de cinemática de velocidad, funciones grado 4.

El segundo proceso de validación, descrito en la Sección 5.3.2, consiste en verificar por separado la cinemática directa e inversa del modelo de velocidad, utilizando la teoría de tornillos y los resultados obtenidos en la simulación.

En cuanto a la cinemática directa de velocidad, su validación se presenta en la Figura 5.19. En esta figura se muestran dos gráficas: en la parte superior, las trayectorias de velocidad de salida del manipulador obtenidas mediante la implementación de la cinemática directa de velocidad, representadas con líneas continuas en términos de la variación temporal de los ángulos de Euler. En la misma gráfica, las trayectorias de velocidad obtenidas a partir de la simulación se representan con líneas discontinuas.

En la parte inferior de la figura, se ilustran los errores asociados a la comparación entre ambos resultados, los cuales se encuentran en un rango de 0 a $1,2 \times 10^{-3}$. Dicho rango es aceptable para considerar validada la cinemática directa de velocidad.

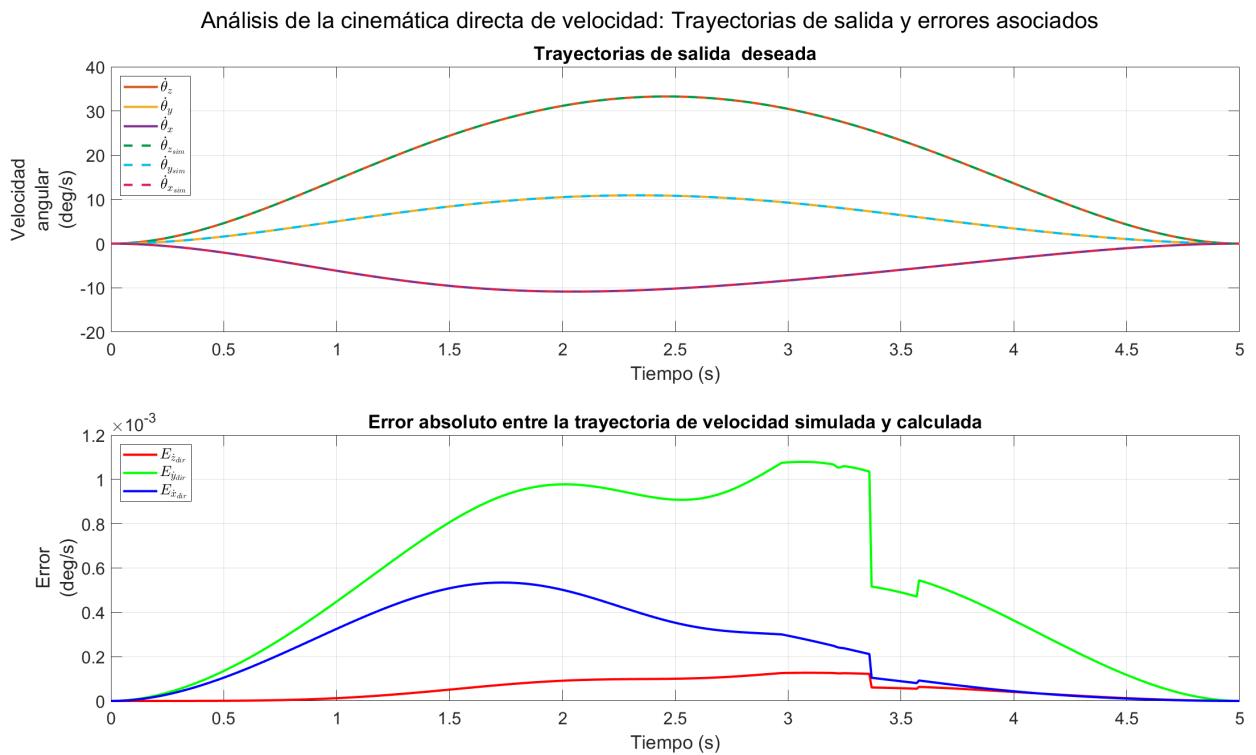


Figura 5.19: Comparación entre la cinemática directa de velocidad y los resultados obtenidos mediante simulación.

En cuanto a la validación de la cinemática inversa de velocidad, el procedimiento sigue la misma metodología. Sin embargo, a diferencia de la validación de la cinemática inversa de posición, en este caso es necesario verificar tanto la obtención de las velocidades generalizadas como las velocidades articulares correspondientes a las cadenas cinemáticas.

Para ello, en la Figura 5.20 se presentan dos gráficas. En la parte superior, se muestra la comparación entre las trayectorias obtenidas mediante la cinemática inversa de velocidad, utilizando la ecuación (4.53) (representadas con líneas continuas), la cual permite acceder a estas velocidades sin requerir el conocimiento de las velocidades pasivas. Estas trayecto-

rias se comparan con aquellas obtenidas a través de la simulación, representadas con líneas discontinuas.

En la gráfica inferior, se ilustran los errores asociados a la comparación, los cuales se encuentran en un rango de 6×10^{-13} , lo que confirma la precisión del modelo implementado.

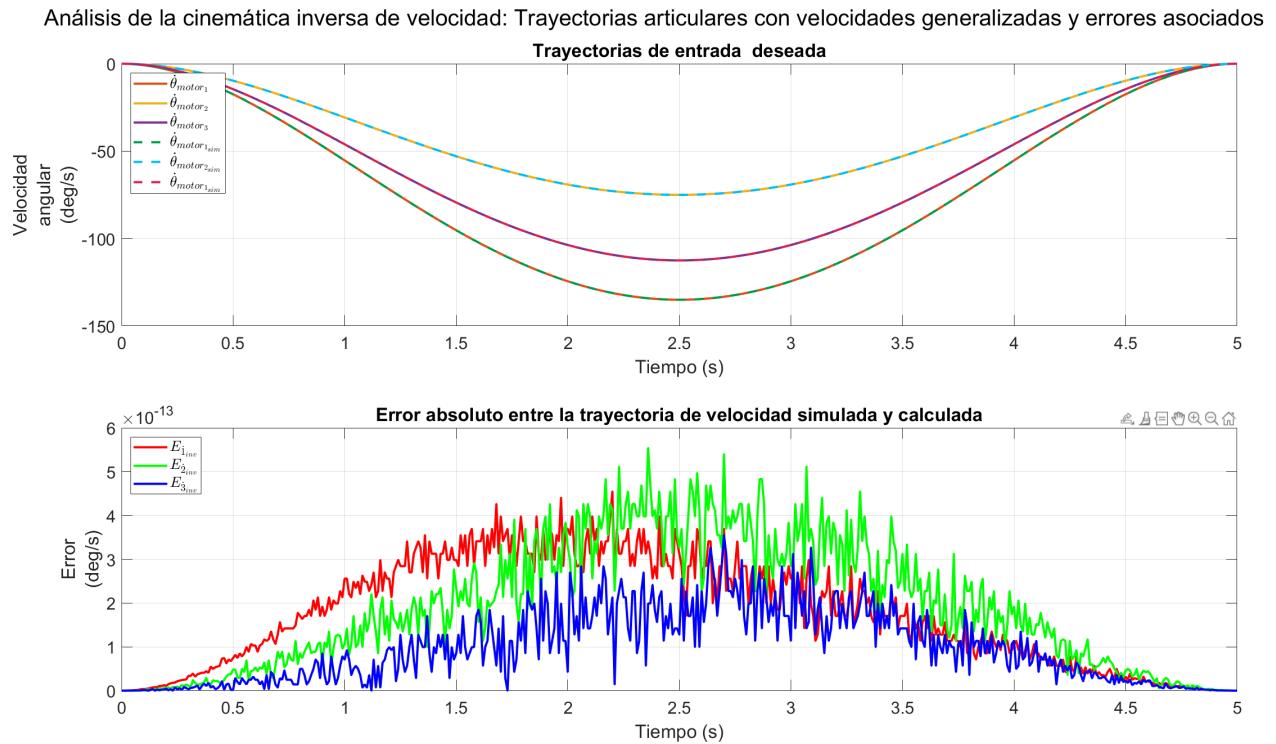


Figura 5.20: Comparación de las velocidades generalizadas: cinemática inversa de velocidad vs. simulación.

Para completar este proceso, es fundamental analizar la implementación de la ecuación (4.57), la cual proporciona las velocidades correspondientes a todas las juntas de las cadenas cinemáticas. Para ello, se debe consultar la Figura 5.21, que contiene cuatro gráficas. Las tres primeras muestran las velocidades articulares de las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3, respectivamente, mientras que la última representa los errores asociados a las juntas cinemáticas físicas, es decir, aquellas cuya velocidad puede ser medida directamente en la simulación.

En las tres primeras gráficas, las líneas continuas corresponden a las velocidades articulares calculadas mediante la cinemática inversa de velocidad, mientras que las líneas discontinuas representan las velocidades obtenidas a partir de la simulación. Cabe destacar que en estas gráficas también se incluyen las velocidades de los pares prismáticos ficticios, las cuales, como era de esperarse, resultan ser nulas. Cualquier valor distinto de cero indicaría una implementación incorrecta de la teoría de tornillos en el análisis.

Finalmente, los errores obtenidos se encuentran en el rango de 2×10^{-13} , lo que confirma la precisión y validez del modelo implementado.

Análisis de la cinemática inversa de velocidad:
Trayectorias de velocidad en las juntas cinemáticas y errores asociados

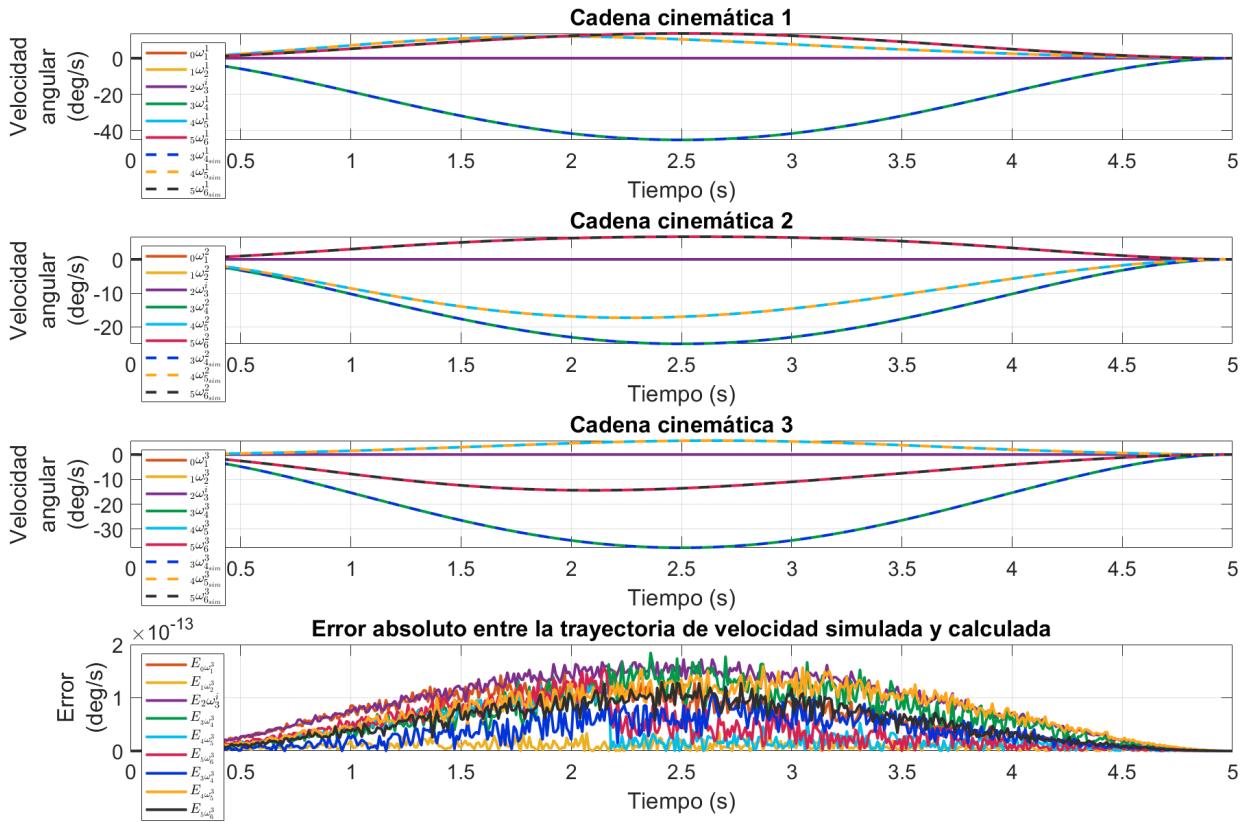


Figura 5.21: Velocidades articulares en las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 mediante cinemática inversa y comparación de errores mediante simulación.

5.4.3. Validación de la cinemática de aceleración

El proceso de validación de la cinemática de aceleración se llevó a cabo siguiendo el procedimiento descrito en la sección (5.3.3), donde se utilizaron las funciones de aceleración definidas en la sección (5.4). Estas funciones están estrechamente relacionadas con las funciones de velocidad y posición previamente establecidas, lo que garantiza la coherencia entre los distintos aspectos del modelo.

Al igual que en el caso de la cinemática de velocidad, fue necesario realizar las transformaciones correspondientes de las segundas derivadas de los ángulos de Euler al estado de aceleración. Esta transformación es crucial por las mismas razones mencionadas en la validación de la cinemática de velocidad, ya que asegura que las trayectorias de aceleración y velocidad estén correctamente relacionadas y que el análisis inverso pueda realizarse de forma coherente.

Las gráficas mostradas en la Figura 5.22 evidencian una buena correlación entre las aceleraciones deseadas y las calculadas, con un error máximo de concordancia en el rango de 1×10^{-3} , lo que confirma la validez del modelo de aceleración.

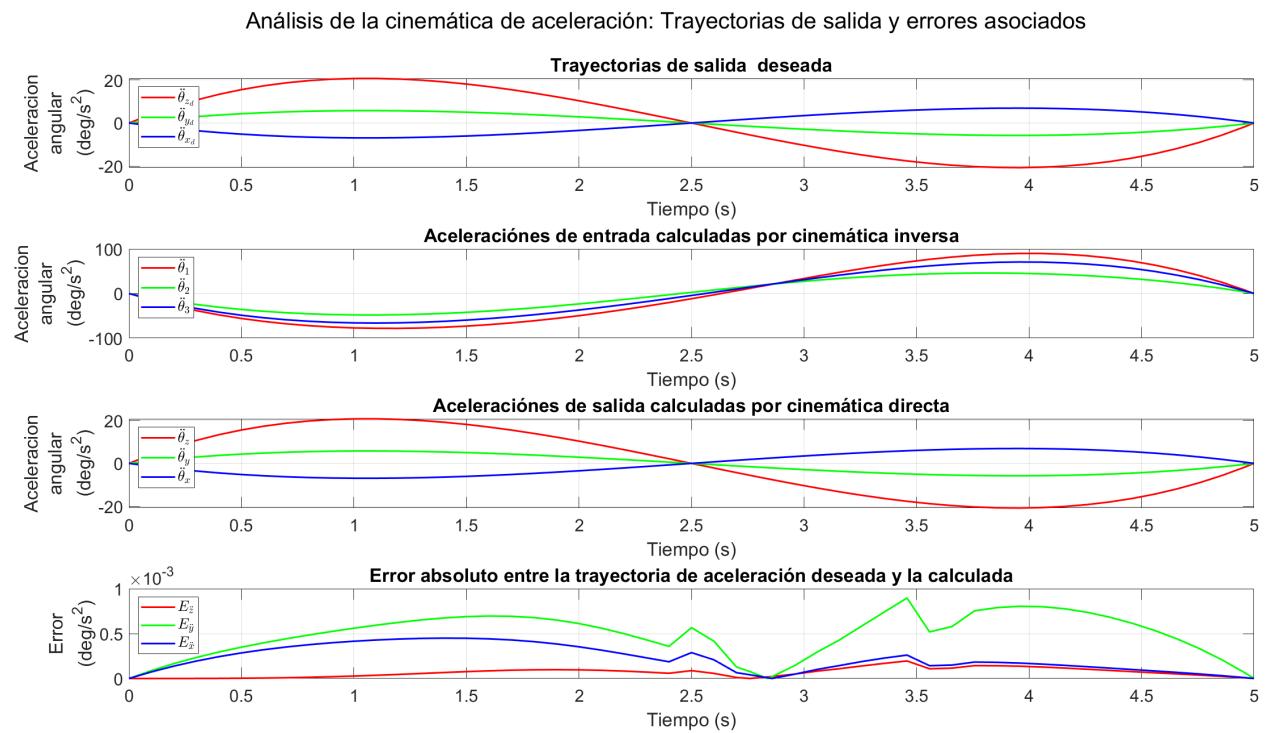


Figura 5.22: Análisis de cinemática de aceleración, funciones grado 3.

Como segundo proceso de validación, se implementa el descrito en la Sección 5.3.3. En este caso, se analiza la cinemática directa de aceleración a través de la Figura 5.23, la cual se encuentra subdividida en dos gráficas.

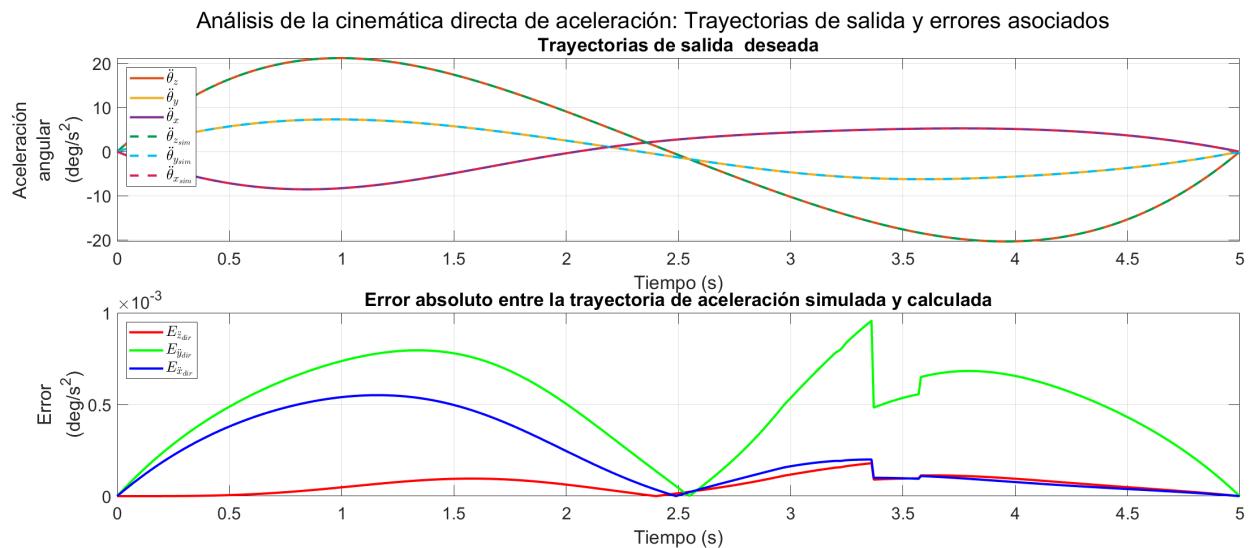


Figura 5.23: Comparación entre la cinemática directa de aceleración y los resultados obtenidos mediante simulación.

La gráfica superior muestra las aceleraciones de salida del manipulador, donde las líneas continuas corresponden a las aceleraciones obtenidas mediante la cinemática directa de aceleración, mientras que las líneas discontinuas representan los valores obtenidos a partir de la simulación. Por otro lado, la gráfica inferior presenta los errores asociados a esta comparación, los cuales se encuentran en un rango de 0 a 6×10^{-3} . Estos resultados confirman la validez del modelo de cinemática directa de aceleración.

En cuanto a la cinemática inversa de aceleración, su validación se realiza en dos etapas. La primera consiste en la verificación de la ecuación (4.82), mediante la cual se obtienen las aceleraciones generalizadas, representadas con líneas continuas en la gráfica superior de la Figura 5.24.

Estas trayectorias se comparan con las obtenidas a través de la simulación, las cuales se muestran en la misma gráfica con líneas discontinuas. En la gráfica inferior se presentan los errores asociados, que se encuentran en un rango de 2×10^{-10} , lo que confirma la validez de la cinemática inversa de aceleración.

Análisis de la cinemática inversa de aceleración: Trayectorias articulares con aceleraciones generalizadas y errores asociados

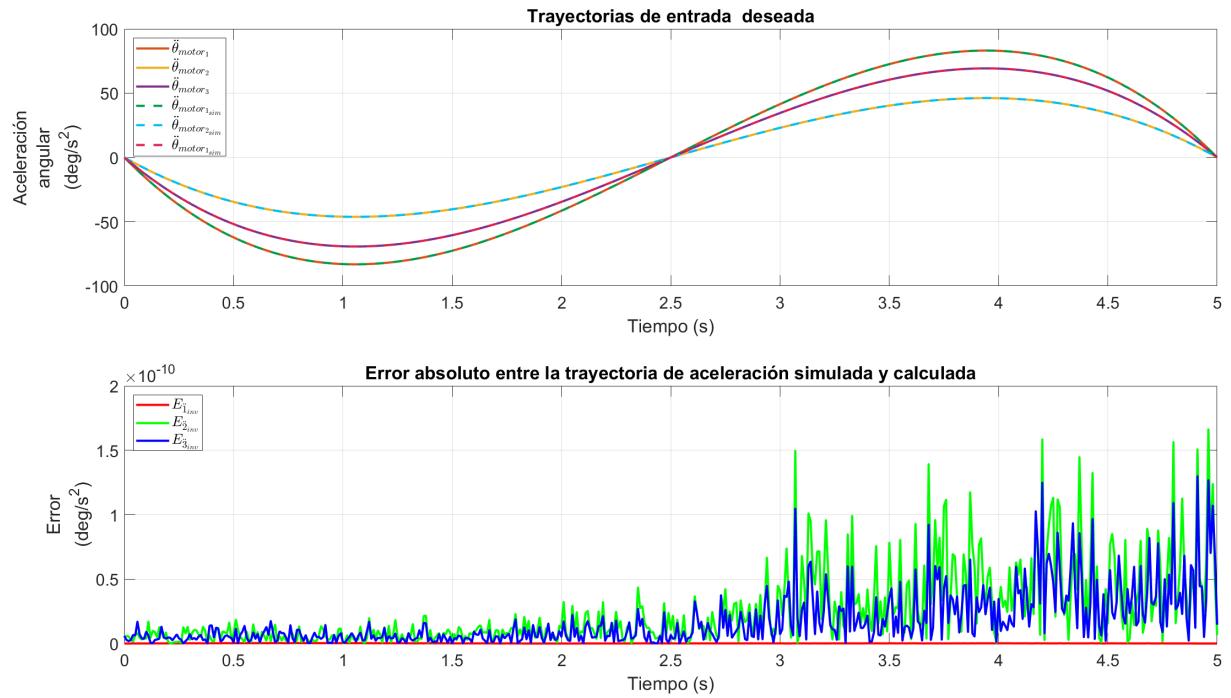


Figura 5.24: Comparación de las aceleraciones generalizadas: cinemática inversa de aceleración vs. simulación.

De manera análoga a la validación de la cinemática inversa de velocidad, la validación de la cinemática inversa de aceleración se realiza utilizando la ecuación (4.85), la cual proporciona las aceleraciones en cada junta cinemática del manipulador.

Estas aceleraciones se presentan en la Figura 5.25 mediante líneas continuas en las gráficas 1, 2 y 3, correspondientes a las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3, respectivamente. Como era de esperarse, las aceleraciones de las juntas prismáticas ficticias son nulas, lo que confirma que su inclusión no afecta el modelo matemático.

Además, en estas mismas gráficas se muestran las aceleraciones obtenidas a partir de la simulación para las articulaciones físicas del manipulador. Finalmente, en la gráfica 4 de esta figura, se representan los errores resultantes de la comparación entre las aceleraciones articulares medibles y las obtenidas mediante la cinemática. Estos errores se encuentran en el rango de 0 a 5×10^{-11} , validando así la cinemática inversa de aceleración.

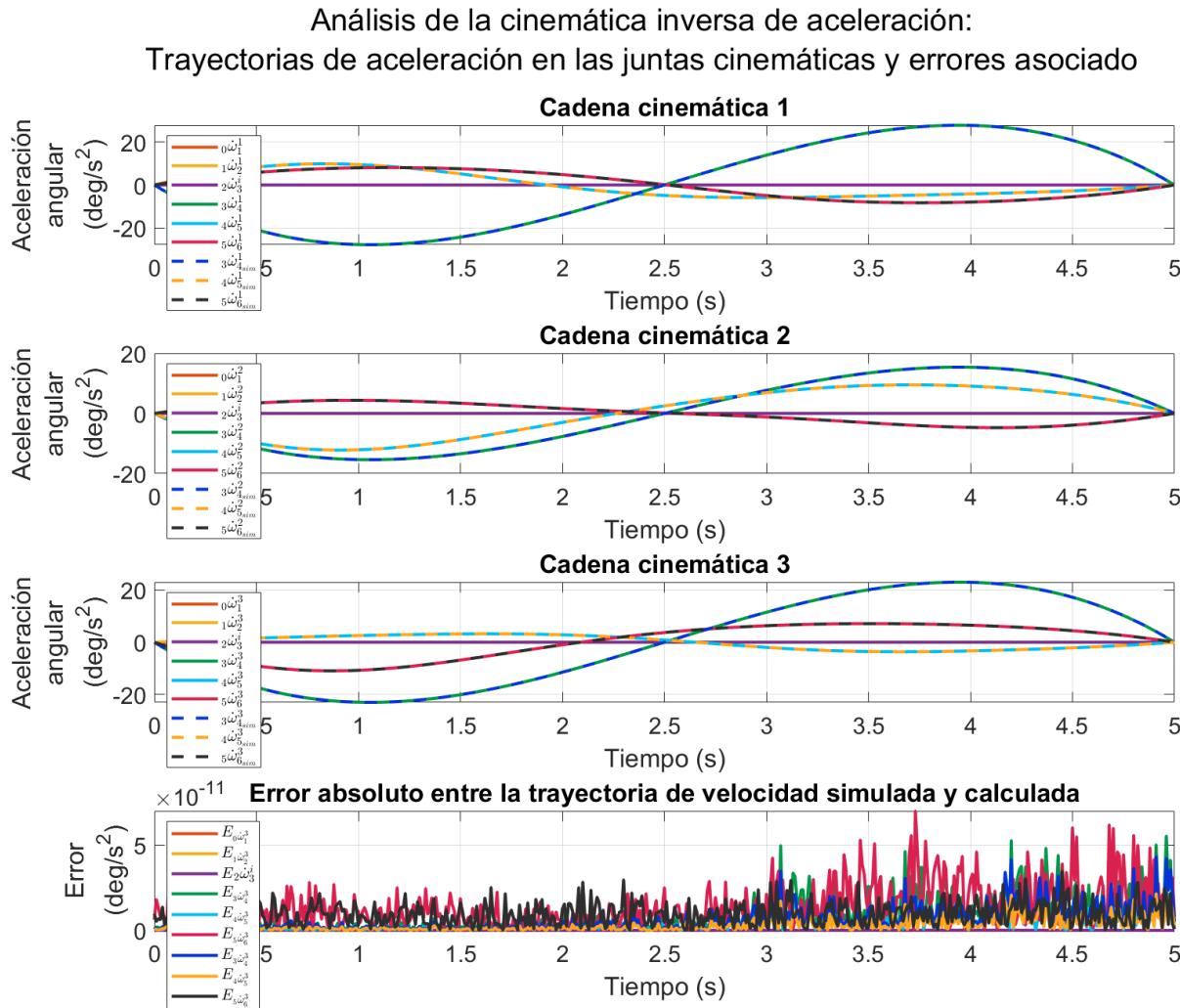


Figura 5.25: Aceleraciones articulares en las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 mediante cinemática inversa y comparación de errores mediante simulación.

5.5. Construcción del espacio de configuración y del espacio de trabajo

En esta sección se describe el proceso completo mediante el cual se construyen el espacio de configuración y el espacio de trabajo del manipulador. Este proceso abarca desde la ex-

tación del modelo CAD hacia un entorno de simulación, hasta el análisis de configuraciones articulares válidas y su correspondiente transformación en orientaciones del efecto final. Para ello, la sección se divide en tres partes: exportación del modelo, generación del espacio de configuración y obtención del espacio de trabajo.

5.5.1. Exportación del modelo CAD a CoppeliaSim

Para llevar a cabo los análisis del espacio de configuración y del espacio de trabajo, fue necesario contar con un entorno de simulación que permitiera validar visual y numéricamente el comportamiento del manipulador, además de ofrecer retroalimentación en aspectos críticos como la detección de colisiones entre eslabones. En este contexto, se recurrió a la plataforma CoppeliaSim, la cual proporciona herramientas especializadas para la simulación de sistemas robóticos, incluyendo detección de colisiones y comunicación con software externo como MATLAB.

El proceso de exportación del modelo CAD desde SolidWorks hacia CoppeliaSim se basó en el procedimiento descrito por Tursynbek et al. [86], siguiendo los pasos que se describen a continuación:

- ✓ Se añadió el complemento **SW2URDF** a la barra de complementos de SolidWorks.
- ✓ Se suprimieron las relaciones de engranajes del ensamblaje original, sustituyéndolas por juntas revolutas con libertad de movimiento.
- ✓ Se definieron los ejes de rotación correspondientes a las juntas del manipulador (véase la Figura 5.26a).
- ✓ Se inició el proceso de exportación del ensamblaje mediante la herramienta **Export as URDF** desde el menú **Tools**, lo que permitió generar un archivo de definición **.URDF** describiendo la estructura cinemática del manipulador.
- ✓ En esta misma interfaz, se configuró y organizó la jerarquía de los *links*, comenzando por los elementos fijos y continuando con los componentes móviles (véase Figura 5.26b). Como parte del proceso, se incluyeron juntas no conectadas a ningún componente físico, cuyo propósito fue representar los ejes de rotación asociados a las juntas v_i . Estas juntas, identificadas como **borrar_7**, **borrar_8** y **borrar_9**, se utilizaron únicamente para establecer correctamente la orientación de los ejes, y deben ser reemplazadas posteriormente por *dummies* en el entorno de CoppeliaSim.
- ✓ Se definieron las articulaciones, especificando su tipo (revoluta o fija) y su relación con los diferentes componentes del modelo.
- ✓ Una vez verificada la estructura, se generó el archivo **URDF**. Durante este proceso se revisaron las uniones, posiciones relativas y restricciones impuestas al modelo.
- ✓ Desde CoppeliaSim, se importó el modelo mediante la opción **Modules >Importers >URDF importer**.

- ✓ A continuación, se desactivó la opción `Body is respondable` en cada una de las piezas del manipulador, con el fin de evitar que las colisiones generaran reacciones físicas indeseadas durante la simulación.
- ✓ Se reestablecieron las relaciones de engranaje a través de juntas dependientes, utilizando una ecuación con ganancia de -3 para mantener la sincronización de movimiento entre los engranajes.
- ✓ Se cerraron las cadenas cinemáticas utilizando *dummies* en los extremos de los eslabones distales y en los puntos finales de los vectores v_i . Estos elementos se configuraron con la opción `Dynamic, overlap constraint`, enlazando cada eslabón distal con su respectivo vector v_i . En la Figura 5.27a, estos cierres de cadena se visualizan como líneas punteadas de color azul.
- ✓ Se verificó que los ejes de rotación de todas las juntas coincidieran en el centro de rotación del manipulador, como es requerido en manipuladores paralelos esféricos (ver Figura 5.27b).
- ✓ Finalmente, el modelo fue guardado desde el menú `File >Save model as >CoppeliaSim model...` en formato `.ttm`. El resultado fue un modelo simulable (véase la Figura 5.27c), compatible con el entorno de MATLAB y con capacidad para detectar colisiones entre los componentes del manipulador.
- ✓ Para permitir la comunicación con MATLAB, se copiaron los archivos `remApi.m` y `remoteApiProto.m`, ubicados en el directorio de instalación de CoppeliaSim, hacia la carpeta del programa de comunicación desarrollado en MATLAB.

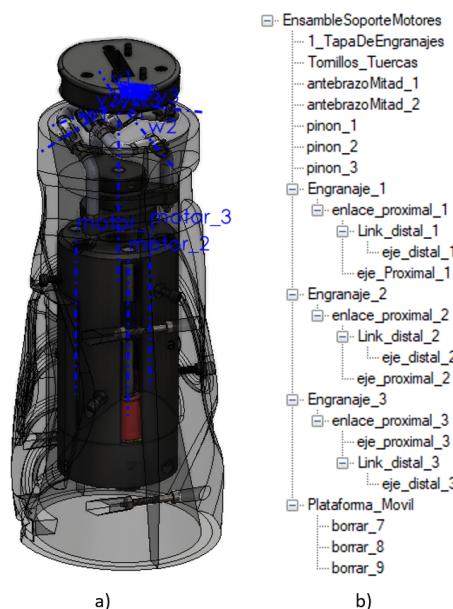


Figura 5.26: Pasos previos para la exportación desde SolidWorks a CoppeliaSim: a) Establecimiento de los ejes de rotación de las juntas revolutas, b) Organización jerárquica de los *links*.

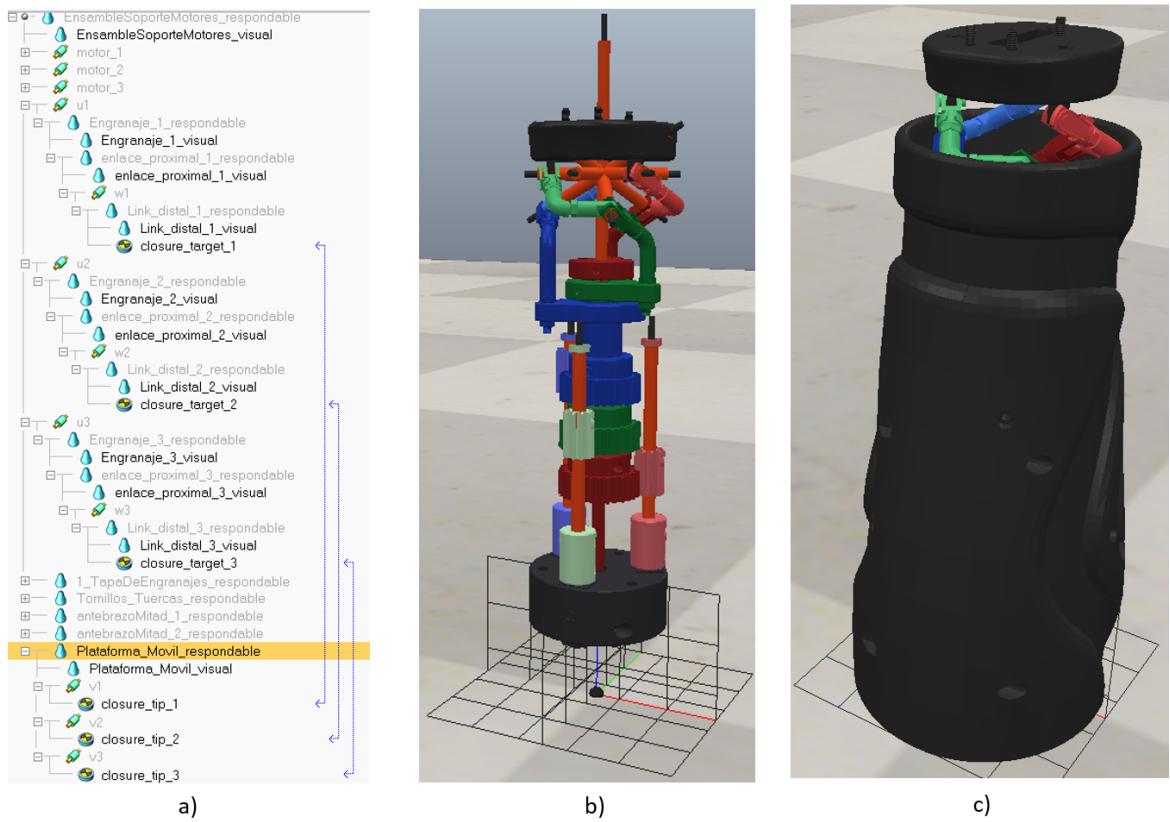


Figura 5.27: Configuración del manipulador en CoppeliaSim. a) Cierre de las cadenas cinemáticas con *dummies*, b) Verificación de la convergencia de los ejes de rotación, c) Modelo final exportado.

5.5.2. Generación y depuración del espacio de configuración

La obtención del espacio de configuración del manipulador se llevó a cabo mediante la comunicación entre **MATLAB** y **CoppeliaSim**, permitiendo el control directo del modelo virtual desde **MATLAB** y el envío de información desde **CoppeliaSim** (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). Esta conexión bidireccional resulta esencial para evaluar el comportamiento del sistema ante distintas configuraciones articulares, ya que permite validar tanto la viabilidad cinemática como la presencia de colisiones físicas en el prototipo simulado.

El análisis se inicia con la generación de una nube de configuraciones articulares, restringida por un criterio geométrico: la diferencia angular entre eslabones consecutivos no puede superar los 120° , debido a las interferencias mecánicas entre eslabones. Como resultado, se obtiene una base inicial de configuraciones válidas en el espacio de las variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 , cada una dentro del rango de 0° a 360° . La nube generada presenta una geometría particular, semejante a una torre de base triangular inclinada, cuya forma refleja directamente la restricción angular impuesta entre los eslabones.

Como segundo paso, es realizado un filtrado basado en criterios de singularidad. Para ello, es utilizado un umbral conservador definido por $\zeta_{min} = 0.4$, el cual permite mantener al

manipulador operando lejos de regiones cercanas a la pérdida de grados de libertad o al deterioro de movilidad por presencia de singularidades. Aquellas configuraciones que no cumplen con la condición $\zeta(\mathbf{J}_{tot}) > \zeta_{min}$ son descartadas, dejando así configuraciones aceptables desde el punto de vista de la condición de la matriz Jacobiana. Esto se refleja en la parte media superior de la Figura 5.28, donde los puntos rojos indican configuraciones descartadas y los azules aquellas que cumplen con el criterio de condición.

Las regiones singulares dividen la nube de configuraciones en subconjuntos desconectados, de modo que no es posible transitar entre ellos sin atravesar una singularidad. Por ello, con el objetivo de aislar una única región de configuraciones mutuamente accesibles sin atravesar zonas críticas, se emplea el algoritmo de segmentación DBSCAN, que permite identificar con claridad los distintos conglomerados existentes en el espacio articular. Esta segmentación puede observarse en la parte superior derecha de la Figura 5.28. Entre todos los grupos detectados, se conserva únicamente aquel que contiene la configuración inicial del manipulador, definida por $(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0)$, ya que este punto sirve como referencia para la generación de trayectorias dentro del espacio de configuración. La nube resultante representa, por tanto, la única región apta para la simulación, dado que cualquier intento de acceder a otros subconjuntos requeriría atravesar una singularidad, lo cual implicaría un cambio en el modo de operación del manipulador, indeseable en el contexto de este estudio. Esta región seleccionada se muestra en la parte inferior izquierda de la Figura 5.28.

Finalmente, se procede a validar dicha nube mediante simulación en **CoppeliaSim**, enviando cada configuración articular activa directamente al modelo virtual y evaluando la presencia de colisiones entre los componentes del prototipo. Las configuraciones que provocan cualquier tipo de colisión se descartan, conservándose únicamente aquellas completamente libres de interferencias físicas. En la parte inferior central de la Figura 5.28, se muestran en rojo las configuraciones descartadas por colisión, mientras que en azul se visualizan los nodos válidos que constituyen el espacio de configuración final. Es importante recalcar que este resultado está directamente relacionado con la geometría específica del prototipo utilizado y no puede generalizarse a manipuladores con idénticos parámetros de configuración.

En la Figura 5.28 se observa el desarrollo progresivo del espacio de configuración, destacando las siguientes etapas clave:

- ✓ Generación inicial de configuraciones sin enlaces sobrepasados.
- ✓ Descarte de configuraciones con singularidades.
- ✓ Segmentación mediante el algoritmo DBSCAN.
- ✓ Selección de la nube conectada que contiene la posición inicial.
- ✓ Filtrado por colisiones en el entorno simulado.
- ✓ Obtención final del espacio de configuración libre de colisiones y singularidades.

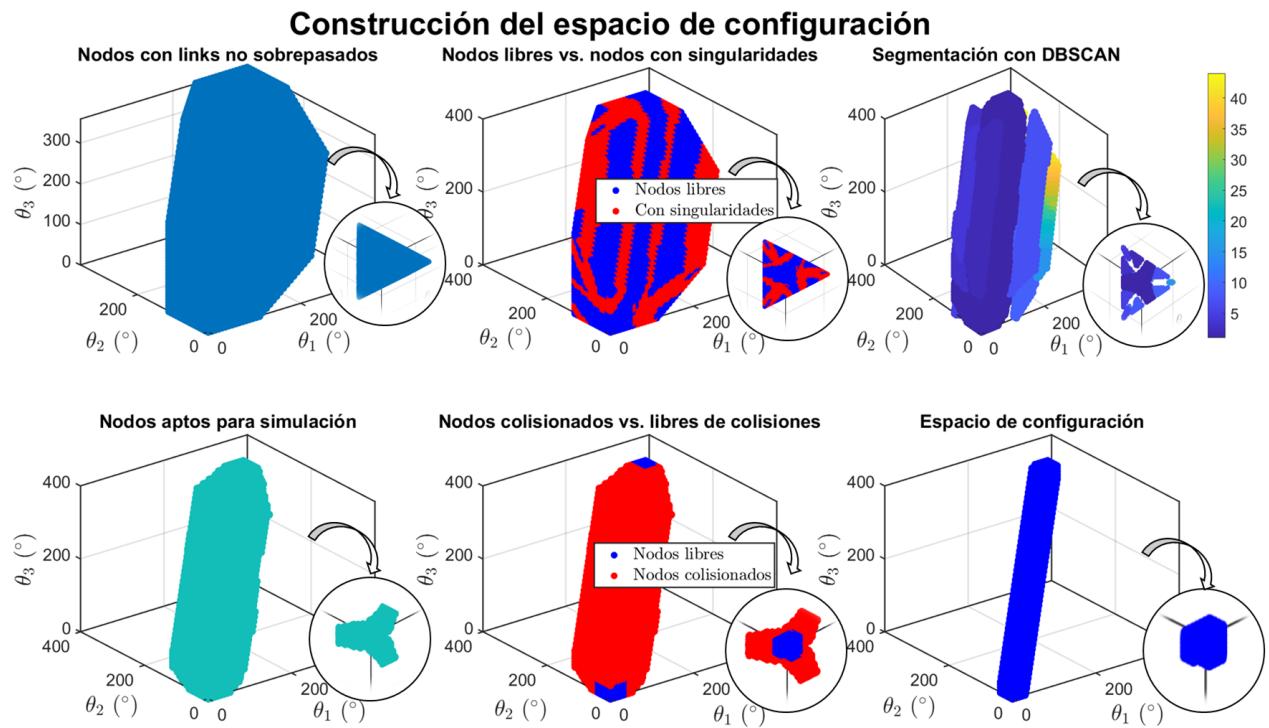


Figura 5.28: Construcción del espacio de configuración: filtrado por límites articulares, singularidades y colisiones.

5.5.3. Obtención del espacio de trabajo mediante cinemática directa

A partir del espacio de configuración previamente depurado, se aplica la cinemática directa para transformar las configuraciones articulares en orientaciones del efecto final en términos de ángulos de Euler. El resultado de esta transformación define el espacio de trabajo del manipulador, el cual mantiene una correspondencia directa con las regiones previamente analizadas. La Figura 5.29 ofrece una representación visual equivalente a la de la Figura 5.28, facilitando una comparación directa entre el espacio de configuración y el espacio de trabajo. Esta equivalencia gráfica permite observar cómo las restricciones y segmentaciones impuestas en el espacio de configuración se reflejan en el comportamiento del manipulador desde su salida. Cabe destacar que en esta etapa no se imponen restricciones adicionales, sino que se representa el espacio de entrada en el dominio del espacio de salida.

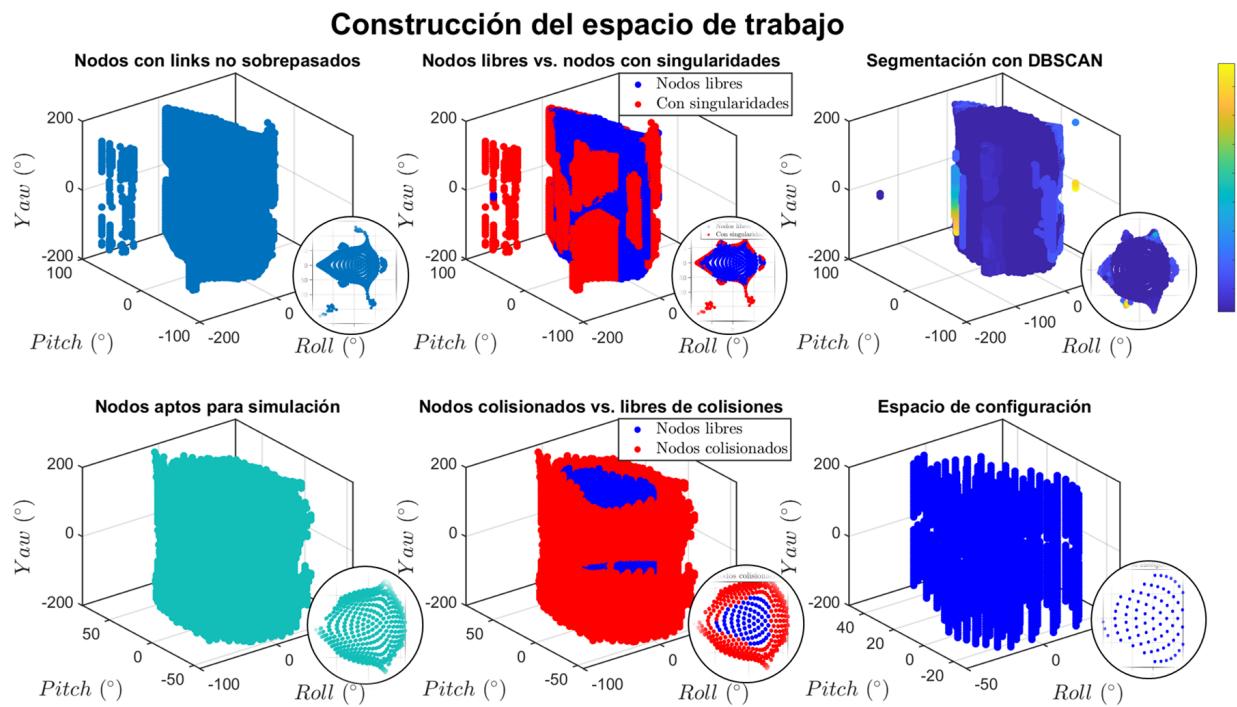


Figura 5.29: Representación del espacio de trabajo derivado del espacio de configuración.

Capítulo 6

Validación Experimental del Modelo Matemático

En este capítulo se presenta la validación experimental del modelo matemático mediante la implementación de pruebas físicas en el prototipo desarrollado. Con el fin de garantizar la correcta adquisición y análisis de los datos experimentales, se incluye una descripción detallada del sistema de instrumentación empleado, seguida de los procedimientos de prueba y el análisis de resultados.

6.1. Instrumentación

En esta sección se describen los principales componentes electrónicos involucrados en el prototipo desarrollado, necesarios tanto para el funcionamiento del sistema como para la adquisición de datos durante su operación. La Figura 6.1 presenta una vista general de todos los dispositivos que integran el sistema, así como las conexiones entre ellos. En dicha figura, las relaciones funcionales se representan mediante flechas: las líneas de **color azul** indican la transmisión de datos, mientras que las de **color rojo** representan las líneas de alimentación, correspondientes a tensiones de 12 V y 5 V, según el caso.

A continuación, se presenta una lista de los componentes electrónicos empleados, junto con una breve descripción de su función dentro del sistema:

- ✓ **Computadora:** Se encarga de ejecutar el algoritmo de control de los motores, tomando como referencia tanto las señales deseadas como los datos obtenidos a partir de los encoders. Asimismo, emplea la información del sensor de unidad de medición inercial (IMU) para la calibración de la posición inicial de la plataforma móvil. La computadora envía y recibe datos mediante comunicación serial, los cuales son analizados en tiempo real para el control y monitoreo del sistema.
- ✓ **Sensor de Unidad de Medición Inercial (IMU):** Es el encargado de medir la orientación y velocidad angular de la plataforma móvil. Este dispositivo transmite los datos vía *Bluetooth* hacia la tarjeta de desarrollo, permitiendo la adquisición de los datos y su posterior análisis.

- ✓ **Tarjeta de Desarrollo:** Actúa como intermediaria entre los diferentes módulos del sistema. Recibe los datos provenientes del sensor IMU y procesa las señales de los encoders, convirtiendo los pulsos digitales en información útil como posición angular. También recibe las señales de control generadas por la computadora y las convierte en señales eléctricas, como voltajes lógicos y pulsos PWM, que son enviadas a los puentes H, los cuales a su vez regulan el movimiento de los motores.
- ✓ **Puentes H:** Son los encargados de regular el sentido y la intensidad de la corriente aplicada a los motorreductores, permitiendo su accionamiento y control a partir de las señales recibidas desde la tarjeta de desarrollo.
- ✓ **Fuente de Alimentación DC (12 V):** Proporciona el voltaje necesario para el funcionamiento de los puentes H y, por extensión, de los motores. Además, suministra la tensión de entrada al módulo **DC-DC Step Down**.
- ✓ **DC-DC Step Down:** Reduce la salida de 12 V proveniente de la fuente de alimentación a 5 V, con el fin de alimentar componentes electrónicos que requieren un voltaje más bajo, como los encoders y los propios puentes H.
- ✓ **Motorreductores con Encoder Integrado:** Son responsables de generar el movimiento mecánico de la plataforma móvil. Los encoders incorporados permiten medir, a través de pulsos digitales, tanto la posición como la velocidad de rotación de los motores, lo cual es fundamental para el control en lazo cerrado.

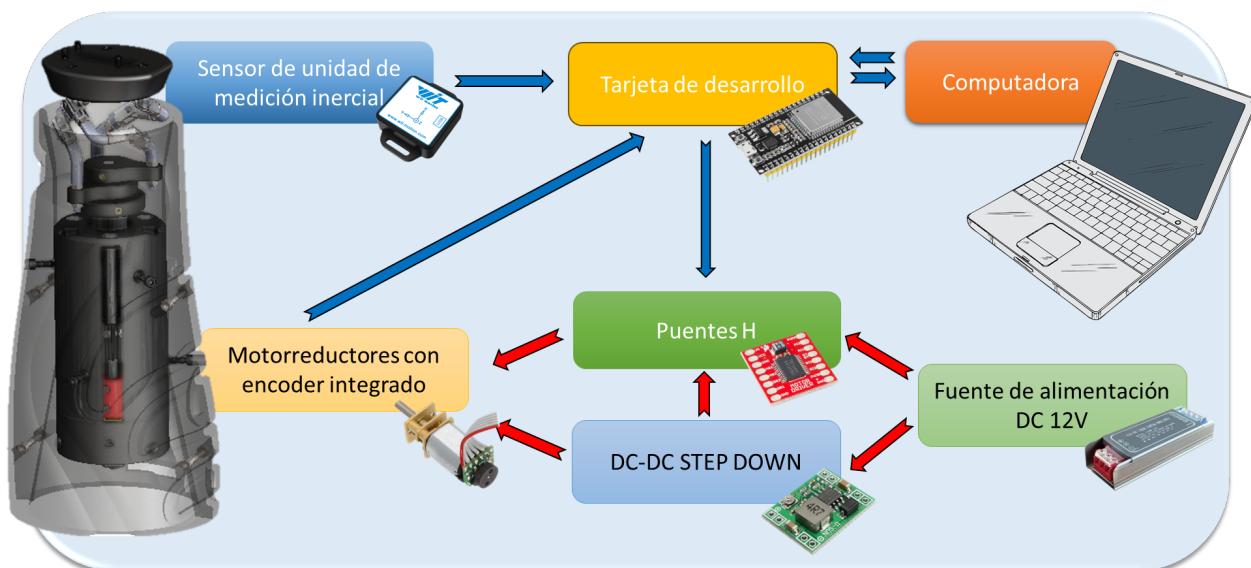


Figura 6.1: Vista general de la estructura del sistema y sus componentes.

6.1.1. Sensor de unidad de medición inercial (IMU)

Para la medición adecuada de la orientación y la velocidad angular de la plataforma móvil, se realizó un proceso de selección del sensor de unidad de medición inercial (IMU).

La elección consideró criterios de precisión, estabilidad y facilidad de integración, aspectos clave para asegurar la calidad de los datos experimentales sin comprometer el desempeño del sistema durante las pruebas.

Ante este panorama, se evaluaron diversas opciones disponibles en el mercado, tomando en cuenta los siguientes criterios:

- ✓ Precisión y estabilidad de medición
- ✓ Número de grados de libertad (GDL)
- ✓ Facilidad de integración y compatibilidad
- ✓ Tipo de comunicación (inalámbrica o por cable)
- ✓ Documentación técnica y soporte

Los sensores considerados fueron:

- ✓ WitMotion HWT31
- ✓ WitMotion WT901BLECL BLE 5.0
- ✓ WitMotion WT1-IMU (ICM42607)
- ✓ GY-BNO055 (Bosch BNO055)
- ✓ WT901C RS232 (MPU9250)
- ✓ MPU6050
- ✓ LSM9DS1

Con base en el análisis de las especificaciones resumidas en la Tabla 6.1, se seleccionó el sensor **WitMotion WT901BLECL BLE 5.0** (véase el Apéndice F para consultar la hoja de datos del sensor y la Figura 6.2 para visualizar el dispositivo) como la opción más adecuada para este estudio. La tabla presenta una comparativa compacta de diversas unidades de medición inercial (IMU), resaltando las principales características técnicas: consumo de corriente (mA), precisión, tipo de comunicación (Com), voltaje de operación (V), velocidad en baudios (BR), grados de libertad (DOF), inclusión de giróscopo (Gyro), acelerómetro (Acc) y magnetómetro (Mag), frecuencia de muestreo (Freq), rangos de aceleración (Acc $\pm g$), rangos del giróscopo (Gyro $^{\circ}/s$), ángulo máximo (Áng.), rango del magnetómetro (Mag G), además de la presencia de fusión sensorial (Fusión) y uso de filtro de Kalman (Kalman). La columna correspondiente al sensor **WT901BLECL** ha sido resaltada visualmente al ser el modelo elegido para la toma de los datos experimentales.

La elección de este sensor se justifica por los siguientes motivos:

- ✓ **Alta precisión y estabilidad:** Integra acelerómetro, giroscopio y magnetómetro (9 GDL), complementados con algoritmos de fusión sensorial y un filtro Kalman, lo que permite obtener datos confiables y con bajo nivel de ruido.

- ✓ **Conectividad inalámbrica:** Es el único modelo del conjunto comparado que ofrece comunicación mediante Bluetooth 5.0 (BLE), lo cual facilita la adquisición remota de datos sin interferir con el movimiento físico de la plataforma.
- ✓ **Compatibilidad y soporte:** Cuenta con software propio (WitMotion PC/Android) que permite una visualización, registro y calibración de datos sencilla, además de contar con amplia documentación técnica y ejemplos de integración.

Caract.	HWT31	WT901BLECL	WT1-IMU	BNO055	WT901C	MPU6050	LSM9DS1
<i>mA</i>	<10	<25	<10	—	<40	—	—
Precisión	0.05°	0.05°	0.5–1°	—	0.05–1°	—	—
Com	TTL	BLE	TTL	I2C/UART	RS232	I2C	I2C/SPI
<i>V</i>	5	3.3–5	3.3–5	3.3–5	5–36	2.4–3.5	3.3
BR	9k–460k	115k	9.6k	—	4.8k–230k	—	—
DOF	6	9	6	9	9	6	9
Gyro	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Acc	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Mag	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí
Freq	0.1–100	0.2–200	20	100	0.2–200	—	—
Acc ±g	2/4/8/16	2/4/8/16	2/4/8/16	2/4/8/16	2/4/8/16	2/4/8/16	2/4/8/16
Gyro °/s	—	250–2000	250–2000	250–2000	250–2000	250–2000	245–2000
Áng.	±90	±180/90	±180/90	—	±180/90	—	—
Mag G	—	±2	—	—	—	2–16	4–16
Fusión	No	Sí	Sí	No	Sí	No	No
Kalman	Sí	Sí	Sí	No	Sí	No	No
Notas	No Z	Prec.+Kalman	Compacto	Alg. internos	Z limitada	Económico	Flexible

Tabla 6.1: Comparativa de unidades de medición iniciales



Figura 6.2: Unidad de medición inercial WT901BLECL BLE 5.0.

Durante el proceso de evaluación, se identificaron ciertos compromisos técnicos en los sensores restantes, que los hicieron menos adecuados en comparación con la opción seleccionada:

- ✓ **WitMotion HWT31:** Aunque cuenta con buena precisión, la comunicación con este sensor es únicamente por cable (UART), lo que limita la libertad de movimiento de la plataforma. Además, presenta mayor consumo energético y menor soporte en línea.
- ✓ **WitMotion WT1-IMU (ICM42607):** Es un sensor compacto y de bajo consumo, pero carece de magnetómetro, reduciendo su capacidad para medir orientación absoluta con precisión.

- ✓ **GY-BNO055 (Bosch BNO055):** Este sensor proporciona una respuesta aceptable en aplicaciones de baja dinámica, sin embargo su frecuencia es limitada en comparación con el WT901BLECL además de no contar con la integración de algoritmos como el filtro de Kalman ni ningún tipo de fusión dinámica.
- ✓ **WT901C RS232 (MPU9250):** Comparte similitudes con el sensor elegido, pero utiliza comunicación RS232, lo que implica el uso de cables. Además, la versión BLE ofrece mejor rendimiento y flexibilidad.
- ✓ **MPU6050:** A pesar de ser económico y popular, solo incluye acelerómetro y giroscopio (6 GDL), sin magnetómetro, lo que impide obtener orientación absoluta sin métodos propensos a acumulación de error.
- ✓ **LSM9DS1:** Sensor versátil con 9 GDL, pero con menor estabilidad en la fusión de datos comparado con soluciones que integran algoritmos avanzados como el filtro de Kalman. Requiere procesamiento adicional externo para alcanzar un nivel de precisión aceptable.

6.1.2. Doble Puente H TB6612FNG

Para controlar los tres motorreductores del prototipo, se emplearon dos módulos *TB6612FNG* (véase el Apéndice F para consultar su hoja de datos), dado que cada uno permite el control independiente de hasta dos motores de corriente directa. Esta distribución permite gestionar los tres actuadores con una cantidad mínima de controladores.

El módulo *TB6612FNG* (véase la Figura 6.3) permite controlar motores de corriente directa mediante señales lógicas que definen el sentido de giro y regulan la velocidad a través de modulación por ancho de pulso (PWM). Además, cuenta con un modo de espera que desactiva el funcionamiento del motor para reducir el consumo energético cuando no se requiere movimiento. Este componente proporciona las funciones necesarias para accionar los motores del prototipo, incluyendo el control de dirección, frenado y detención. Su capacidad para operar con niveles de tensión compatibles con los motorreductores empleados, así como su diseño compacto, facilitan su integración en el sistema de control.

Las principales especificaciones técnicas del módulo se presentan en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Características principales del módulo TB6612FNG

Parámetro	Valor
Corriente continua por canal	1.2 A
Corriente pico (breves intervalos)	3.2 A
Voltaje lógico (VCC)	2.7 a 5.5 V
Voltaje motor (VM)	hasta 15 V
Control de velocidad	PWM hasta 100 kHz
Dimensiones	18.5mmx21mm

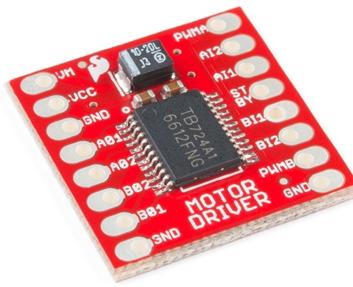


Figura 6.3: Doble Puente H TB6612FNG.

6.1.3. Convertidor de voltaje DC-DC Step-Down MP1584

Para la alimentación de algunos componentes del prototipo, como los encoders y los puentes H, se utilizó un convertidor de voltaje DC-DC tipo buck, modelo MP1584 (véase el Apéndice F para consultar su hoja de datos). Este módulo permite reducir tensiones de entrada en el rango de 4.5V a 28V hasta un valor ajustable entre 0.8V y 20V, lo cual es adecuado para convertir los 12V de entrada a los 5V requeridos por los componentes del manipulador.

El convertidor puede suministrar corrientes de hasta 3A, valor considerablemente superior al necesario para alimentar los dispositivos a 5V del prototipo. Además, su tamaño reducido facilita su integración dentro del sistema, lo que representa una ventaja adicional. Si bien el uso de un convertidor DC-DC tipo buck podría sustituirse por un regulador lineal, la implementación de este módulo resulta más eficiente en términos de disipación térmica y aprovechamiento energético. La Figura 6.4 muestra uno de los módulos utilizados.

Las principales especificaciones del MP1584 se resumen en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Especificaciones técnicas del convertidor MP1584

Parámetro	Valor
Voltaje de entrada	4.5 V a 28 V
Voltaje de salida	0.8 V a 20 V (ajustable)
Corriente de salida	Hasta 3 A (1 A recomendado)
Potencia máxima	20 W
Frecuencia de conmutación	1 MHz
Eficiencia de conversión	Hasta 96 %
Ripple de salida	<30 mV
Protección contra sobrecorriente	Sí (hasta 4 A)
Protección contra sobrtemperatura	Sí
Protección contra cortocircuito	Sí
Protección contra inversión de polaridad	No
Dimensiones	22 mm × 17 mm × 4 mm



Figura 6.4: Convertidor de voltaje DC-DC Step-Down MP1584.

6.1.4. Tarjeta de desarrollo ESP32 38 Pines

La tarjeta de desarrollo *ESP32* utilizada en el prototipo (véase la Figura 6.5) cuenta con 38 pines y fue seleccionada por su capacidad de conectividad *Bluetooth* integrada en la placa, resultando adecuada para la comunicación con el sensor utilizado, que opera mediante tecnología *Bluetooth Low Energy* (BLE).

Una de las razones principales para su elección fue su capacidad para establecer comunicación serial a un baud rate de 115200 bps, suficiente para garantizar una transmisión de datos fluida entre la computadora y la tarjeta. Además, la cantidad de pines disponibles permite la conexión simultánea de todos los componentes del sistema, como los encoders y módulos puente H, sin necesidad de hardware adicional.

Su integración en el prototipo facilita la comunicación y adquisición de datos, además de ofrecer compatibilidad con el entorno de programación *Arduino*, lo cual simplifica la implementación del firmware necesario para el funcionamiento del sistema, así como el uso de bibliotecas específicas para el desarrollo. Las características técnicas más relevantes de la tarjeta se resumen en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4: Características principales de la tarjeta ESP32 (38 pines)

Característica	Valor
CPU	Xtensa® Dual-Core LX6, 32 bits
Frecuencia máxima	240 MHz
Memoria ROM	448 kB
Memoria RAM	520 kB
Memoria flash	4 MB
Wi-Fi	802.11 b/g/n, 2.4 GHz, hasta 150 Mbps
Bluetooth	BLE 4.2
Modos inalámbricos	STA / AP / STA + AP, Wi-Fi Direct
Voltaje de operación	4.5 V a 9 V
Conector	Micro USB o tipo C (alimentación y comunicación)
Pines GPIO	31, con funciones PWM, I2C, SPI, etc.
Antena	Integrada
Convertidor ADC	Sí

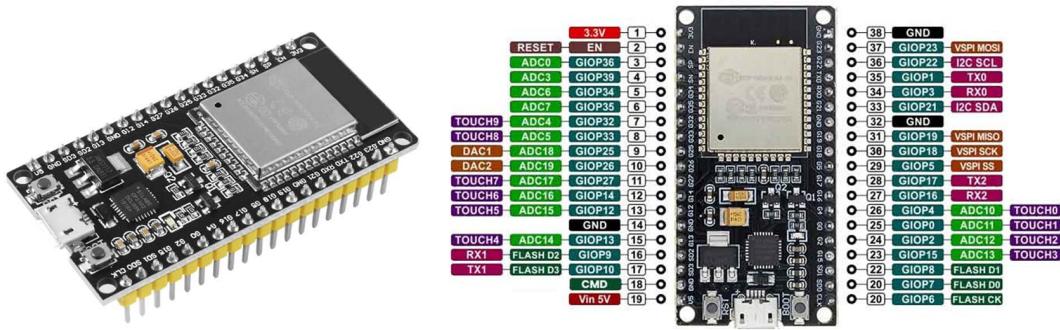


Figura 6.5: Tarjeta de desarrollo ESP32 y distribución de pines (pinout).

6.1.5. Fuente de alimentación DC 12V

Para el suministro de energía eléctrica del prototipo se utilizó una fuente de alimentación con salida de 12 V en corriente directa. Esta fue seleccionada debido a que proporciona el voltaje adecuado para el funcionamiento de los motorreductores, además de ofrecer una corriente máxima de 8.3 A, más que suficiente para cubrir el consumo total de los actuadores y demás componentes eléctricos conectados al sistema.

Otro criterio importante en su elección fue su diseño compacto (113 mm × 40 mm × 23 mm), lo cual permite su integración en espacios reducidos, en contraste con el uso de fuentes de alimentación variables tradicionales que suelen tener dimensiones mayores y menor portabilidad.

La Figura 6.6 muestra la fuente de alimentación empleada en el sistema, destacando su diseño compacto y formato cerrado. Sus principales especificaciones técnicas se presentan en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5: Especificaciones técnicas de la fuente de alimentación DC 12V

Parámetro	Valor
Voltaje de salida	12 V DC
Corriente máxima de salida	8.3 A
Potencia máxima	100 W
Voltaje de entrada	176–264 V AC
Dimensiones	113 mm × 40 mm × 23 mm
Temperatura de operación	-20 °C a +60 °C
Protecciones	Sobrevoltaje, sobrecorriente, y cortocircuito de salida

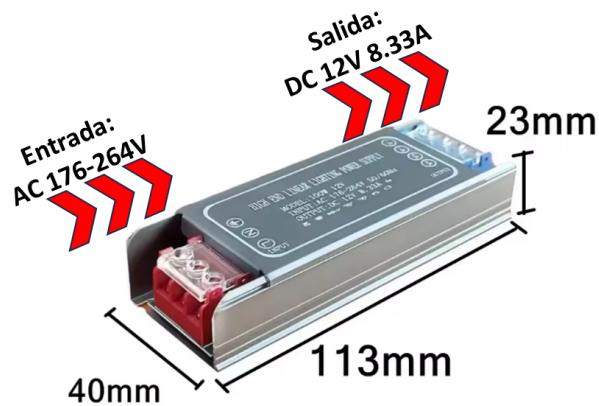


Figura 6.6: Fuente de alimentación DC 12V.

6.1.6. Motorreductor con encoder integrado

Los motorreductores empleados en el prototipo fueron seleccionados con base en sus características eléctricas y mecánicas, específicamente su baja corriente de operación, alto torque máximo y velocidad adecuada para los movimientos permitidos por el manipulador. Este equilibrio permite un funcionamiento adecuado para el manipulador sin requerir un sistema de potencia sobredimensionado.

Además, el formato compacto de estos motores facilita su integración en el diseño del prototipo, contribuyendo a mantener dimensiones reducidas del conjunto mecánico. La Figura 6.7 muestra uno de los motorreductores utilizados, mientras que las especificaciones técnicas más relevantes se resumen en la Tabla 6.6, donde puede apreciarse que se trata de un motor de 12V con una relación de reducción de 210:1, capaz de alcanzar un torque máximo de 3.4Kg·cm y una velocidad nominal de 100 rpm.

Tabla 6.6: Especificaciones del motor DC 12V con reducción 210:1

Parámetro	Valor
Reducción	210:1
Corriente sin carga	≤ 75 mA
Velocidad sin carga	140 rpm
Torque nominal	340.0 Kg·cm
Velocidad nominal	100 rpm
Corriente nominal	$\leq 0,3$ A
Torque máximo	3.4 Kg·cm
Corriente de parada	0.9 A



Figura 6.7: Motorreductor con encoder integrado.

6.1.7. Interfaz de operación

Con el propósito de facilitar las pruebas experimentales realizadas sobre el prototipo físico, se diseñó una interfaz gráfica que permite establecer trayectorias deseadas para la plataforma móvil. Esta interfaz incluye opciones para definir parámetros como la amplitud de salida y el tipo de señal a emplear. Entre los tipos de señal disponibles se contemplan funciones polinómicas de quinto grado, señales senoidales, escalones y rampas. En todas ellas es posible configurar tanto la amplitud como el tiempo de ejecución. En el caso de las señales polinómicas, escalones y rampas, el parámetro temporal corresponde al tiempo necesario para alcanzar la posición final especificada. Para la señal senoidal, dicho parámetro representa el periodo de la señal, y la amplitud se relaciona directamente con los ángulos de Euler, que representan los valores máximos que se desea alcanzar en cada componente. Estas señales permiten realizar diversas pruebas que resultan útiles para validar la cinemática del manipulador. Adicionalmente, la interfaz incorpora un botón de control que permite habilitar o deshabilitar el envío de la señal de control, funcionando así como un mecanismo de paro de emergencia o de seguridad.

Otra funcionalidad relevante consiste en el retorno automático del manipulador a su posición de origen. Esta característica permite reiniciar el sistema a su configuración inicial, preparando al manipulador para ejecutar una nueva trayectoria de manera ordenada. Por otro lado, la interfaz muestra los resultados de la cinemática directa e inversa, tanto para el análisis de posición como de velocidad.

En la Figura 6.8 se presenta una vista general de la interfaz implementada, donde pueden observarse los distintos controles que permiten la interacción entre el usuario y el sistema. Cabe destacar que esta interfaz fue desarrollada dentro del entorno de Simulink, lo que permite una integración directa con el modelo del manipulador, facilitando la implementación y modificación de trayectorias o funciones adicionales. Esto representa una ventaja significativa frente a soluciones menos accesibles, ya que permite una manipulación flexible y sencilla, evitando que la interfaz se convierta en una “caja negra” difícil de modificar.

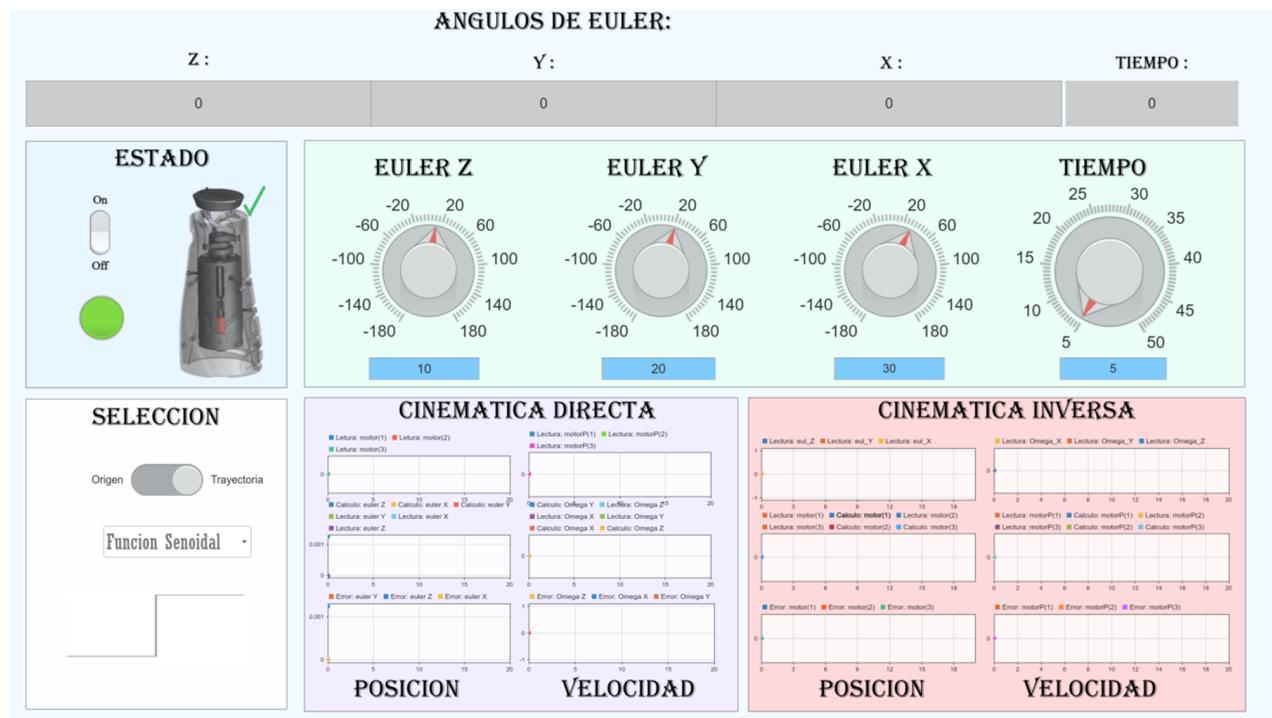


Figura 6.8: Interfaz de apoyo para la operación del prototipo.

La interfaz desarrollada incorpora dos funcionalidades adicionales. La primera consiste en la visualización gráfica del tipo de señal seleccionada para su implementación. Es decir, la interfaz permite al usuario identificar de manera clara y directa la señal que se aplicará durante la ejecución del programa. En la Figura 6.9 se muestran las cuatro funciones disponibles: polinómica de quinto grado, senoidal, escalón y rampa. Esta característica fue incorporada con el propósito de facilitar la comprensión y supervisión del comportamiento deseado del manipulador durante las pruebas.

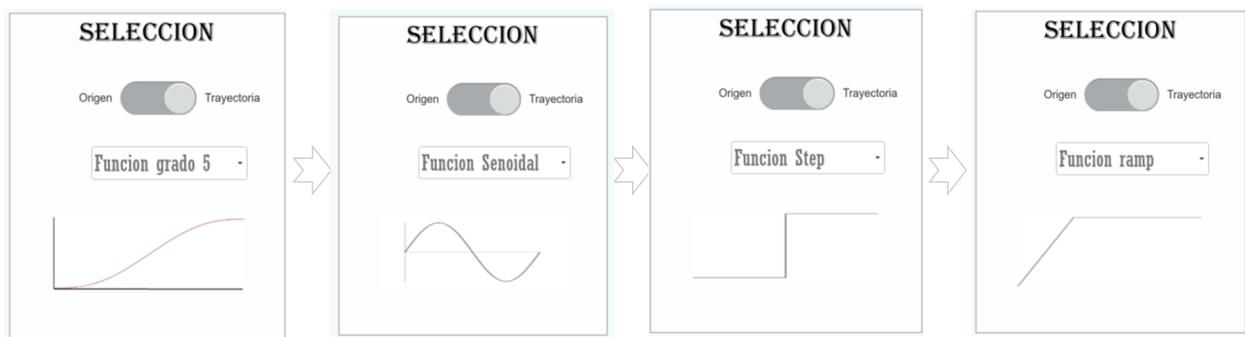


Figura 6.9: Selección del tipo de señal a aplicar desde la interfaz.

Como segunda funcionalidad, la interfaz permite tanto la visualización como el control del estado operativo del manipulador. Esta característica brinda la posibilidad de interrumpir o continuar la trayectoria establecida según sea necesario, funcionando como un mecanismo de

paro de emergencia que desactiva la alimentación de los motores ante cualquier eventualidad. Adicionalmente, la interfaz incluye una indicación visual del estado del sistema. Cuando el manipulador está recibiendo una señal de control, se muestra un indicador en forma de LED acompañado de una palomita en color verde. En caso contrario, cuando el sistema se encuentra inactivo, la interfaz cambia el color del LED y muestra una equis en color rojo, facilitando así una rápida identificación del estado del sistema por parte del usuario. En la Figura 6.10 se ilustran las dos indicaciones visuales proporcionadas por la interfaz, las cuales permiten al usuario conocer el estado operativo del sistema.

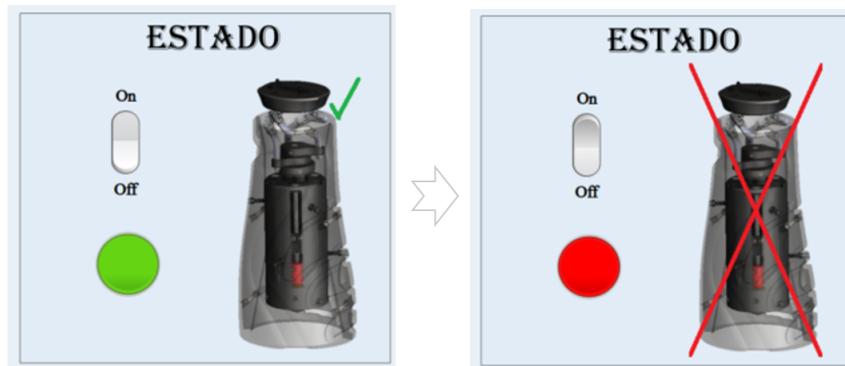


Figura 6.10: Supervisión y control del estado del manipulador mediante la interfaz.

6.2. Validación experimental

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación experimental en el prototipo desarrollado (ver Apéndice C, que presenta el programa implementado en la tarjeta de desarrollo, y Apéndice D, donde se detalla el diseño del circuito electrónico utilizado para la conexión y adquisición de datos). Con el objetivo de validar las soluciones cinemáticas propuestas en el Capítulo 4, se utilizaron funciones polinómicas de quinto grado, de manera similar a como se hizo en la validación con el modelo simulado; dichas funciones se definieron como trayectorias deseadas en el espacio de salida y fueron transformadas en posiciones angulares de entrada mediante la cinemática inversa, con el fin de ser implementadas como trayectorias de referencia para los motoreductores. Es importante señalar que, dado que el propósito principal de esta etapa es validar el modelo matemático, el análisis se enfoca exclusivamente en las lecturas obtenidas del prototipo, sin considerar la precisión del sistema de control de los motores; por ello, no se realiza una comparación directa entre las trayectorias deseadas y las reales, ya que el interés radica en evaluar la consistencia del modelo cinemático y no el desempeño del controlador. Aunque sería posible comparar las trayectorias experimentales con funciones polinómicas ideales, los datos empleados en este análisis no corresponden a funciones perfectamente definidas, ya que provienen directamente de sensores como los encoders y la IMU, los cuales introducen cierto nivel de ruido y errores de medición.

Ante esta limitación, se implementó un proceso específico para el tratamiento de las señales adquiridas (véase la Figura 6.11), comenzando por la obtención de las lecturas de posición angular tanto de los encoders como de la IMU, las cuales fueron sometidas a un filtrado inicial

con el objetivo de atenuar el ruido presente en las mediciones (véase Apéndice B para el detalle de los programas utilizados). En particular, se utilizó un filtro de media móvil implementado mediante la función *movmean* de MATLAB, con una ventana de 40 muestras, lo cual permitió suavizar adecuadamente las señales sin introducir un retardo significativo. La operación realizada por esta función puede representarse mediante la ecuación (6.1). Posteriormente, se aplicó una derivada numérica simple (conocida como derivada sucia) a los datos filtrados para estimar la variación de la posición en el tiempo y, con ello, calcular la velocidad angular. No obstante, dado que el análisis incluye también la aceleración angular (segunda derivada), fue necesario aplicar nuevamente una derivada sobre dichos datos, lo que implicó un paso adicional de filtrado para reducir el ruido amplificado por este segundo proceso. Este enfoque busca mitigar los efectos no deseados asociados al uso de derivadas numéricas sucesivas, las cuales tienden a amplificar el ruido conforme se incrementa el orden de derivación, permitiendo así obtener una representación más confiable de las magnitudes cinemáticas de orden superior.

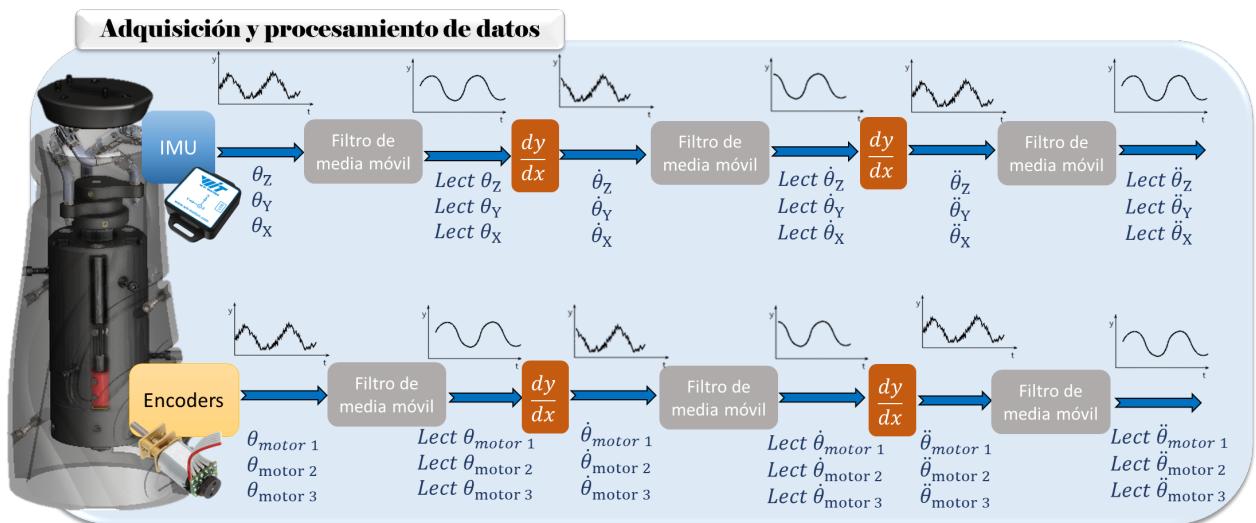


Figura 6.11: Proceso de adquisición y filtrado de las señales del prototipo físico.

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n - k] \quad (6.1)$$

donde:

- ✓ N : Tamaño de la ventana de filtrado.
- ✓ x : Vector de datos de entrada.
- ✓ n : Índice de la muestra actual.
- ✓ k : Índice de la sumatoria, que recorre las muestras pasadas desde n hasta $n - (N - 1)$.

Para la implementación de las soluciones cinemáticas, las lecturas obtenidas deben ser adecuadamente transformadas a las representaciones requeridas por cada tipo de cinemática.

En particular, para aplicar la cinemática inversa es fundamental convertir primero las derivadas temporales de los ángulos de Euler ($\dot{\theta}_Z$, $\dot{\theta}_Y$, $\dot{\theta}_X$, $\ddot{\theta}_Z$, $\ddot{\theta}_Y$, $\ddot{\theta}_X$) en vectores de velocidad angular (${}^B\omega^P$) y aceleración angular (${}^B\alpha^P$). Esta transformación es necesaria para que las ecuaciones de la cinemática inversa puedan procesar correctamente la información y calcular las posiciones angulares de cada actuador correspondientes a dicha salida.

Por otro lado, en la cinemática directa se realiza el proceso inverso: los vectores de velocidad y aceleración angular calculados mediante las ecuaciones del modelo se convierten nuevamente en los correspondientes cambios temporales de los ángulos de Euler. Esta conversión permite obtener una representación coherente y comparable con los datos experimentales, facilitando así la validación y el análisis de los resultados obtenidos. En la Figura 6.12 se ilustra el proceso de implementación de las cinemáticas en el sistema experimental, con el objetivo de realizar el análisis comparativo entre el modelo matemático y los resultados obtenidos.

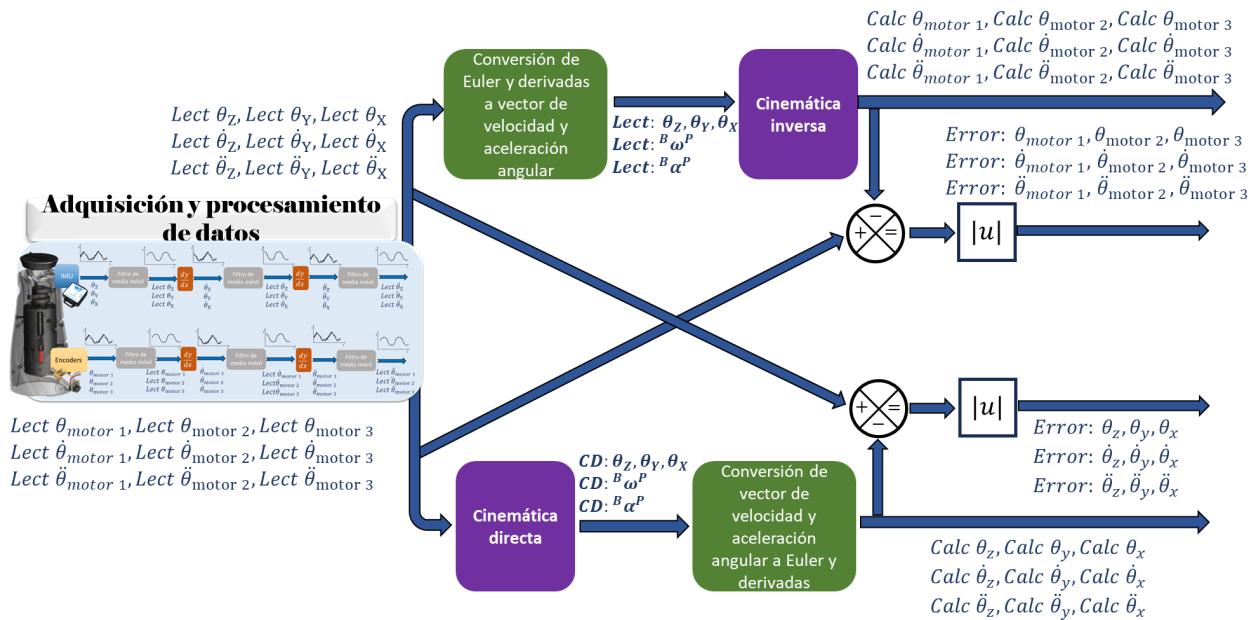


Figura 6.12: Proceso de validación experimental de las cinemáticas directa e inversa mediante su implementación en el prototipo físico, incluyendo el cálculo del error entre las estimaciones y las mediciones reales.

Para la validación experimental de las cinemáticas, se utilizó como salida deseada una función polinómica de quinto grado, definida con parámetros finales de $\theta_{z_{final}} = 90^\circ$, $\theta_{y_{final}} = 25^\circ$ y $\theta_{x_{final}} = -35^\circ$. Estas funciones describen trayectorias suaves, con condiciones iniciales y finales nulas en velocidad y aceleración, estableciendo un tiempo de finalización de 5 segundos. No obstante, debido a errores asociados al sistema de control, el tiempo real en alcanzar la posición final puede diferir del ideal; por ello, se optó por un tiempo total de simulación de 10 segundos, considerado suficiente para garantizar el establecimiento completo de la trayectoria. Cabe destacar que, dado que el desempeño del controlador no es objeto de análisis en esta etapa, únicamente se tomarán en cuenta las lecturas obtenidas directamente del prototipo,

y en consecuencia, los errores del modelo matemático serán evaluados con base en dichas mediciones experimentales.

Es importante señalar que, al ser la validación de carácter experimental y emplear filtros para mitigar el ruido en las señales, puede presentarse un desplazamiento temporal o atenuación en las lecturas, lo cual afecta la comparación directa entre la trayectoria deseada y la medida. Por esta razón, además de analizar los errores absolutos, se utiliza una métrica complementaria para cuantificar la similitud global entre las señales: el coeficiente de correlación lineal. Este coeficiente indica el grado de relación lineal entre dos variables, donde un valor próximo a 1 denota una alta similitud, valores cercanos a -1 indican una relación inversamente lineal, y valores próximos a 0 reflejan variables sin relación lineal aparente. Para calcular este coeficiente se emplea la función `corrcoef(var1, var2)` de MATLAB, lo que proporciona un indicador cuantitativo sobre qué tan bien se ajusta la cinemática al comportamiento real registrado en el prototipo.

6.2.1. Cinemática directa

Posición

Con el objetivo de validar la precisión de la cinemática directa en términos de posición, se comparan las salidas del modelo matemático con las mediciones experimentales obtenidas a partir de los sensores del prototipo. Para ello, se toman como referencia las lecturas procesadas de la IMU y se evalúa la correspondencia entre las posiciones angulares estimadas por el modelo. En la Figura 6.13 se presentan, en primer lugar, las lecturas de posición de los tres motorreductores, los cuales parten de 0 y alcanzan amplitudes aproximadas de $-372,0^\circ$, $-194,5^\circ$ y $-295,5^\circ$ para los motores 1, 2 y 3, respectivamente. Estas trayectorias se procesan mediante la cinemática directa de posición, obteniéndose las salidas $Calc \theta_Z$, $Calc \theta_Y$ y $Calc \theta_X$, que se muestran en el segundo gráfico de la figura, y cuyas amplitudes finales alcanzadas son de aproximadamente $89,5^\circ$, $25,5^\circ$ y $-33,0^\circ$ para los ejes Z , Y y X , respectivamente.

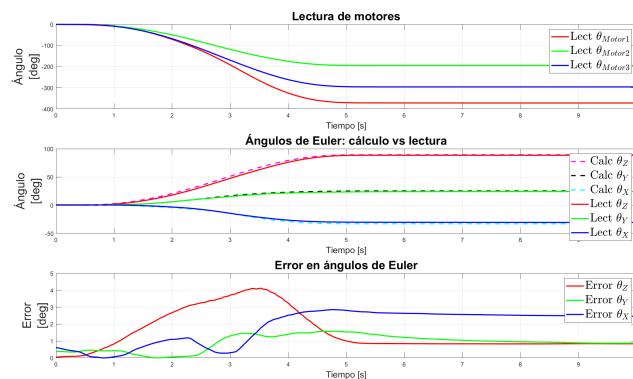


Figura 6.13: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de posición, incluyendo el error absoluto.

Estas salidas se comparan visualmente con las mediciones angulares de la IMU, y en el tercer gráfico se ilustran los errores absolutos entre ambas señales. Se observa que los

mayores errores se presentan durante el seguimiento activo de la trayectoria, alcanzando valores máximos aproximados de $4,12^\circ$, $1,57^\circ$ y $2,84^\circ$ para las componentes Z , Y y X , respectivamente, ocurridos en los instantes de tiempo 4.0 s, 2.84 s y 1.6 s. En general, los errores se mantienen dentro de un margen aceptable, con una magnitud máxima del orden del 7 %.

Adicionalmente, los valores máximos registrados tanto para las señales medidas como calculadas, así como los errores máximos correspondientes, se resumen en la Tabla 6.7, lo cual complementa el análisis visual y permite identificar cuantitativamente los puntos críticos de cada trayectoria. Asimismo, en la Tabla 6.10 se presentan los coeficientes de correlación entre las señales estimadas y medidas para cada eje, con valores de 0.99944 para θ_Z , 0.99955 para θ_Y y 0.99972 para θ_X . Estos resultados reflejan una alta correlación entre los datos obtenidos por el modelo y las mediciones experimentales, lo que indica que la cinemática directa reproduce con precisión el comportamiento real del sistema en términos de posición angular.

Tabla 6.7: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática directa – Posición

Descripción	Variable	Mín [deg]	t [s]	Máx [deg]	t [s]
Motor 1 (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_{Motor1}	-371.7551	7.2800	0.0000	0.0000
Motor 2 (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_{Motor2}	-194.5714	5.2600	-0.2082	0.0000
Motor 3 (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_{Motor3}	-295.5919	5.5200	-0.2449	0.0000
Euler Z (Cálculo-Pos)	<i>Calc</i> θ_Z	0.0516	0.0000	89.4353	7.2800
Euler Y (Cálculo-Pos)	<i>Calc</i> θ_Y	0.0070	0.0600	25.2958	5.5200
Euler X (Cálculo-Pos)	<i>Calc</i> θ_X	-32.9471	7.2800	0.5737	0.6600
Euler Z (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_Z	0.0008	0.0000	88.6045	7.7400
Euler Y (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_Y	0.3793	0.0000	24.3533	9.6200
Euler X (Lectura-Pos)	<i>Lect</i> θ_X	-30.4860	10.0000	0.6968	0.0000
Error Euler Z (Pos)	<i>Error</i> θ_Z	0.0000	0.0000	4.1189	3.5200
Error Euler Y (Pos)	<i>Error</i> θ_Y	0.0000	0.0000	1.5729	4.8000
Error Euler X (Pos)	<i>Error</i> θ_X	0.0000	0.0000	2.8497	4.7800

Velocidad

Posteriormente, se analiza la validez del modelo de cinemática directa en términos de velocidad angular. Para ello, se emplean las velocidades angulares obtenidas a partir de las lecturas de los sensores, calculadas mediante derivación numérica sobre los datos de posición ya filtrados. Estas velocidades experimentales se comparan con las estimaciones generadas por el modelo, a partir del procesamiento de las trayectorias articulares mediante las ecuaciones de cinemática directa de velocidad.

En la Figura 6.14 se presentan los resultados correspondientes, donde se muestran las señales estimadas, las medidas y el error absoluto entre ambas para cada uno de los ejes angulares $\dot{\theta}_Z$, $\dot{\theta}_Y$ y $\dot{\theta}_X$. Como puede observarse, las cotas de velocidad estimadas alcanzan aproximadamente valores máximos de $32,29^\circ/s$, $11,09^\circ/s$ y mínimos de $-15,89^\circ/s$ para los ejes Z , Y y X respectivamente. De manera similar, las lecturas de la IMU registran cotas máximas de $31,34^\circ/s$, $9,54^\circ/s$ y mínimos de $-14,22^\circ/s$ en los mismos ejes, lo cual muestra una cercanía aceptable entre ambas señales.

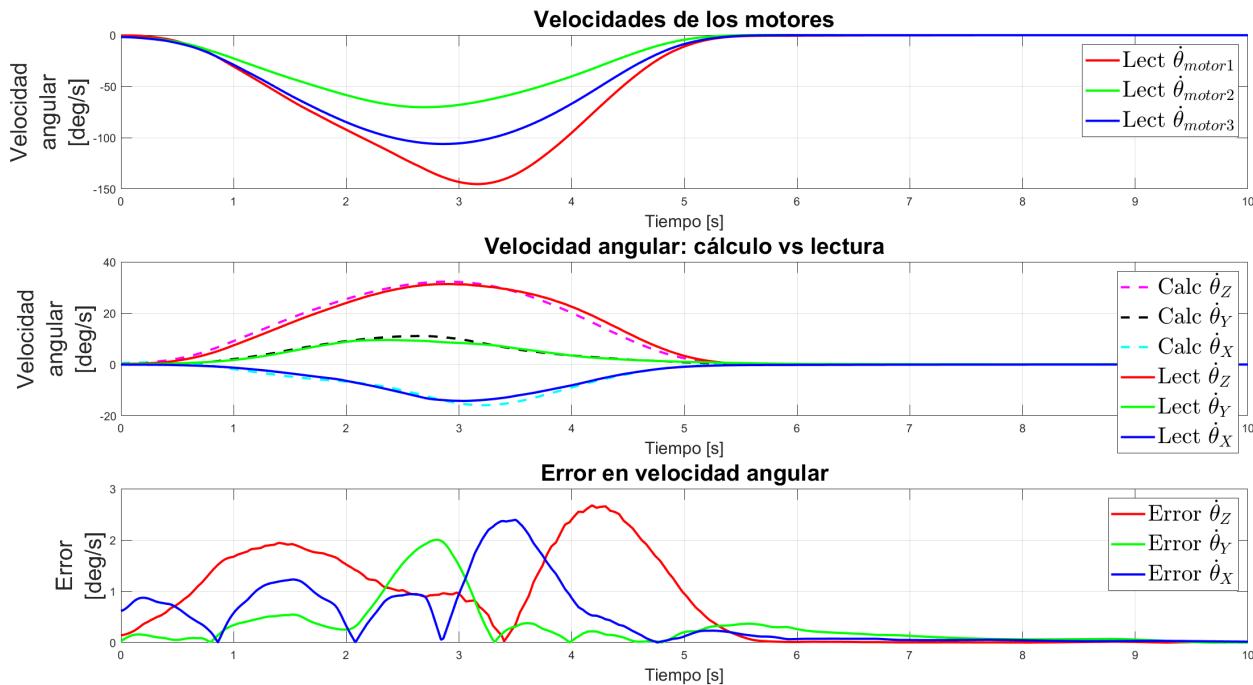


Figura 6.14: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de velocidad, incluyendo el error absoluto.

Los errores máximos absolutos durante el seguimiento de la trayectoria son de $2,67^\circ/s$, $2,00^\circ/s$ y $2,39^\circ/s$ para los ejes Z , Y y X , respectivamente, presentándose en los tiempos 4.18 s, 2.80 s y 3.50 s. Estos valores se resumen en la Tabla 6.8.

Tabla 6.8: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinematográfica directa – Velocidad

Descripción	Variable	Mín [deg/s]	t [s]	Máx [deg/s]	t [s]
Motor 1 (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_{Motor1}$	-145.2857	3.1600	0.0000	7.7000
Motor 2 (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_{Motor2}$	-70.2360	2.6800	0.1512	5.7800
Motor 3 (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_{Motor3}$	-106.1250	2.8600	0.0000	5.9400
Euler Z (Cálculo-Vel)	$Calc \dot{\theta}_Z$	0.0000	7.7000	32.2879	2.9000
Euler Y (Cálculo-Vel)	$Calc \dot{\theta}_Y$	-0.0537	5.9400	11.0888	2.6600
Euler X (Cálculo-Vel)	$Calc \dot{\theta}_X$	-15.8900	3.2200	0.7832	0.1800
Euler Z (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_Z$	-0.0166	8.8000	31.3408	2.9000
Euler Y (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_Y$	-0.0032	10.0000	9.5431	2.3400
Euler X (Lectura-Vel)	$Lect \dot{\theta}_X$	-14.2181	3.0600	-0.0162	10.0000
Error Euler Z (Vel)	$Error \dot{\theta}_Z$	0.0000	0.0000	2.6740	4.1800
Error Euler Y (Vel)	$Error \dot{\theta}_Y$	0.0000	0.0000	2.0034	2.8000
Error Euler X (Vel)	$Error \dot{\theta}_X$	0.0000	0.0000	2.3941	3.5000

Dado que las señales provienen de datos experimentales afectados por ruido y suavizados mediante filtrado, es común que exista un pequeño desfase entre la señal estimada y la medida,

lo cual puede introducir errores aparentes. Para una evaluación más robusta de la similitud entre señales, se utilizó el coeficiente de correlación. Los coeficientes obtenidos fueron de 0.99582 para $\dot{\theta}_Z$, 0.99559 para $\dot{\theta}_Y$ y 0.99215 para $\dot{\theta}_X$, lo cual refleja una alta correlación entre las señales estimadas y medidas.

Aceleración

La validación de la cinemática directa en términos de aceleración angular se llevó a cabo a partir de la segunda derivada de las señales de posición filtradas. En la primera gráfica de la Figura 6.15 se muestran las aceleraciones articulares de los motores del prototipo, las cuales sirven como entrada para el cálculo de las aceleraciones angulares de salida mediante el modelo cinemático. Estas aceleraciones calculadas se contrastan posteriormente con las mediciones experimentales registradas por la IMU.

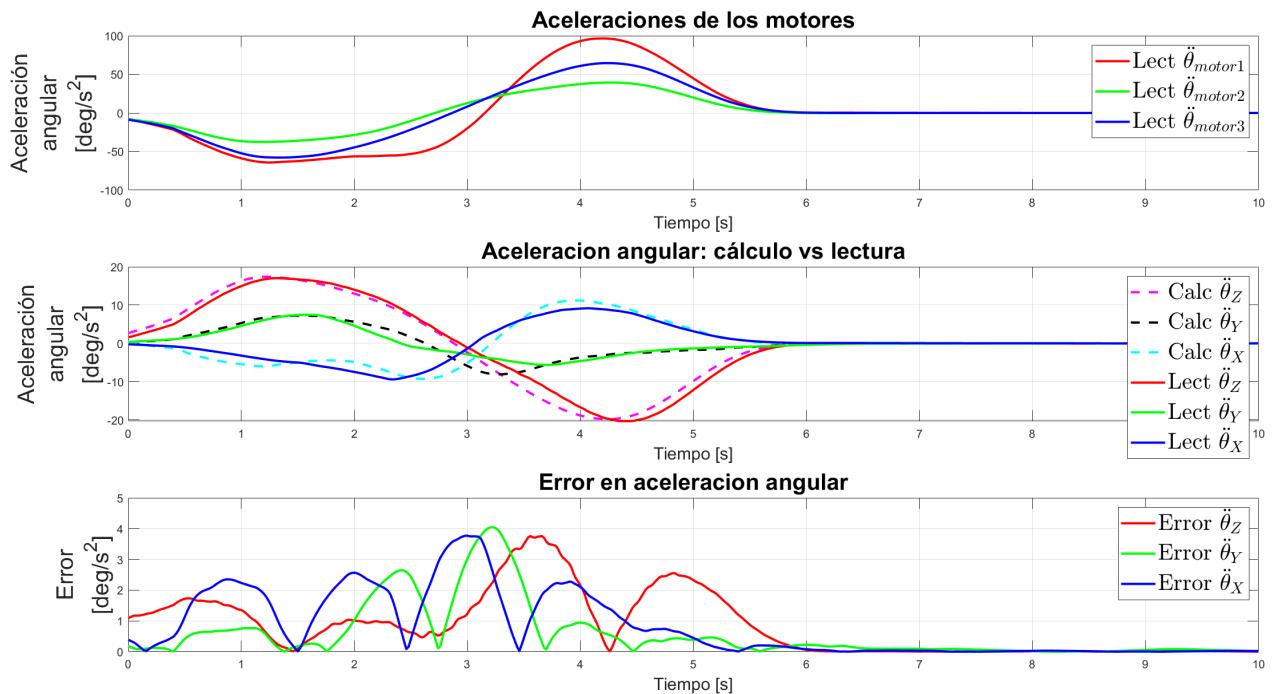


Figura 6.15: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática directa de aceleración, incluyendo el error absoluto.

Como puede observarse, las cotas mínimas y máximas estimadas para las aceleraciones angulares son aproximadamente $-19,77^{\circ}/s^2$ y $17,42^{\circ}/s^2$ en el eje Z , $-8,06^{\circ}/s^2$ y $7,25^{\circ}/s^2$ en el eje Y , y $-9,26^{\circ}/s^2$ y $11,20^{\circ}/s^2$ en el eje X . De manera análoga, las aceleraciones medidas presentan cotas que van de $-20,31^{\circ}/s^2$ a $17,03^{\circ}/s^2$ en Z , de $-5,62^{\circ}/s^2$ a $7,49^{\circ}/s^2$ en Y , y de $-9,40^{\circ}/s^2$ a $9,17^{\circ}/s^2$ en X , lo que indica una correspondencia razonable entre las señales calculadas y experimentales. Por otro lado, los errores absolutos alcanzan cotas máximas de $3,76^{\circ}/s^2$, $4,04^{\circ}/s^2$ y $3,77^{\circ}/s^2$ para los ejes Z , Y y X respectivamente, presentándose en los tiempos 3.56 s, 3.22 s y 3.00 s. Estos valores, junto con los rangos mínimos y máximos de las señales involucradas, se resumen en la Tabla 6.9.

Debido a la alta sensibilidad de la aceleración a pequeñas variaciones en la señal, se reforzó el análisis mediante el cálculo del coeficiente de correlación lineal, obteniéndose valores de 0.99043 para $\ddot{\theta}_Z$, 0.95676 para $\ddot{\theta}_Y$ y 0.96268 para $\ddot{\theta}_X$. Aunque estos coeficientes son ligeramente inferiores a los observados en posición y velocidad, siguen indicando una correlación fuerte y positiva, lo que confirma que el modelo reproduce adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema en términos de aceleración angular.

Tabla 6.9: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática directa – Aceleración

Descripción	Variable	Mín [deg/s ²]	t [s]	Máx [deg/s ²]	t [s]
Motor 1 (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_{Motor1}$	-64.1458	1.2400	96.4656	4.2000
Motor 2 (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_{Motor2}$	-37.5189	1.1800	39.3953	4.2800
Motor 3 (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_{Motor3}$	-57.7758	1.3400	64.5583	4.2400
Euler Z (Cálculo-Acel)	<i>Calc</i> $\ddot{\theta}_Z$	-19.7695	4.2400	17.4172	1.2200
Euler Y (Cálculo-Acel)	<i>Calc</i> $\ddot{\theta}_Y$	-8.0628	3.2800	7.2507	1.5200
Euler X (Cálculo-Acel)	<i>Calc</i> $\ddot{\theta}_X$	-9.2605	2.6000	11.2032	3.9600
Euler Z (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_Z$	-20.3071	4.3600	17.0286	1.3200
Euler Y (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_Y$	-5.6190	3.7000	7.4870	1.5800
Euler X (Lectura-Acel)	<i>Lect</i> $\ddot{\theta}_X$	-9.3953	2.3400	9.1732	4.0600
Error Euler Z (Acel)	<i>Error</i> $\ddot{\theta}_Z$	0.0000	0.0000	3.7583	3.5600
Error Euler Y (Acel)	<i>Error</i> $\ddot{\theta}_Y$	0.0000	0.0000	4.0444	3.2200
Error Euler X (Acel)	<i>Error</i> $\ddot{\theta}_X$	0.0000	0.0000	3.7691	3.0000

Los coeficientes de correlación presentados en la Tabla 6.10 muestran una clara tendencia decreciente conforme se avanza desde la posición hacia la aceleración, lo cual es coherente con el hecho de que las derivadas numéricas sucesivas (velocidad y aceleración) amplifican el ruido y las pequeñas discrepancias entre las señales medidas y calculadas. En particular, la correlación en posición se mantiene muy alta, con valores superiores a 0.999 en los tres ejes, lo que indica una excelente correspondencia entre el modelo y las mediciones experimentales en términos de posición angular. En velocidad, los coeficientes son ligeramente menores, aunque aún muy cercanos a 1, con valores entre 0.992 y 0.995, evidenciando una buena estimación dinámica. Finalmente, en aceleración, los valores de correlación oscilan entre 0.95 y 0.99, lo cual es esperado debido a la mayor sensibilidad de esta variable.

Tabla 6.10: Correlación - Cinemática Directa (Ángulos de Euler)

Eje	Correlación Posición	Correlación Velocidad	Correlación Aceleración
Z	0.99944	0.99582	0.99043
Y	0.99955	0.99559	0.95676
X	0.99972	0.99215	0.96268

Estos resultados confirman que la cinemática directa presenta un comportamiento robusto

que permite estimar el comportamiento del manipulador a partir del conocimiento de sus movimientos de entrada.

6.2.2. Cinemática inversa

La validación de la cinemática inversa podría considerarse redundante, dado que el modelo completo ya ha sido previamente verificado mediante el método de lazo cerrado y la cuantificación del error absoluto, como se describe en la Sección 5.3. En dicho proceso, se evaluó la consistencia entre las salidas de la cinemática directa y las entradas obtenidas por la cinemática inversa, asegurando así la coherencia matemática entre ambos enfoques.

No obstante, con el objetivo de cerrar completamente el ciclo de validación y confirmar que el modelo implementado en ambas direcciones —directa e inversa— es capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento físico del prototipo, se procede también a validar experimentalmente la cinemática inversa. Para ello, se analizan las salidas del modelo inverso en términos de posición, velocidad y aceleración, y se comparan con las señales articulares medidas en el sistema físico.

Posición

La validación de la cinemática inversa en términos de posición se llevó a cabo comparando las señales articulares estimadas por el modelo con las lecturas reales de los motores del prototipo. Las posiciones angulares utilizadas como entrada del modelo inverso, a partir de las cuales se calcularon las trayectorias articulares correspondientes, se definieron con base en las mediciones proporcionadas por la IMU. Esto se muestra en la Figura 6.16, donde se observa la comparación entre las señales calculadas mediante la cinemática inversa y las obtenidas experimentalmente, incluyendo también el error absoluto asociado a cada motor. Asimismo, se presentan las trayectorias empleadas por el modelo de cinemática inversa, las cuales corresponden a dichas lecturas de la IMU. Como puede apreciarse, las trayectorias siguen un comportamiento coherente, presentando un buen grado de coincidencia entre ambas señales.

Las cotas mínimas y máximas registradas para cada una de las señales se resumen en la Tabla 6.11. Por ejemplo, el motor 1 presentó una posición mínima calculada de $-359,27^\circ$ y una máxima de $1,22^\circ$, mientras que sus lecturas reales oscilaron entre $-371,76^\circ$ y $0,00^\circ$. Los errores absolutos máximos registrados fueron de $20,05^\circ$ para el motor 1, $9,41^\circ$ para el motor 2 y $14,16^\circ$ para el motor 3, ocurridos en los tiempos 3.76 s, 3.12 s y 3.52 s, respectivamente; aunque en apariencia son errores relativamente grandes, estos picos no superan el 8% en ningún caso. Adicionalmente, al igual que en el análisis de la cinemática directa, se evaluó el grado de correlación entre las señales articulares estimadas por el modelo inverso y las obtenidas experimentalmente, arrojando coeficientes de 0.99977, 0.99873 y 0.99949 para los motores 1, 2 y 3, respectivamente.

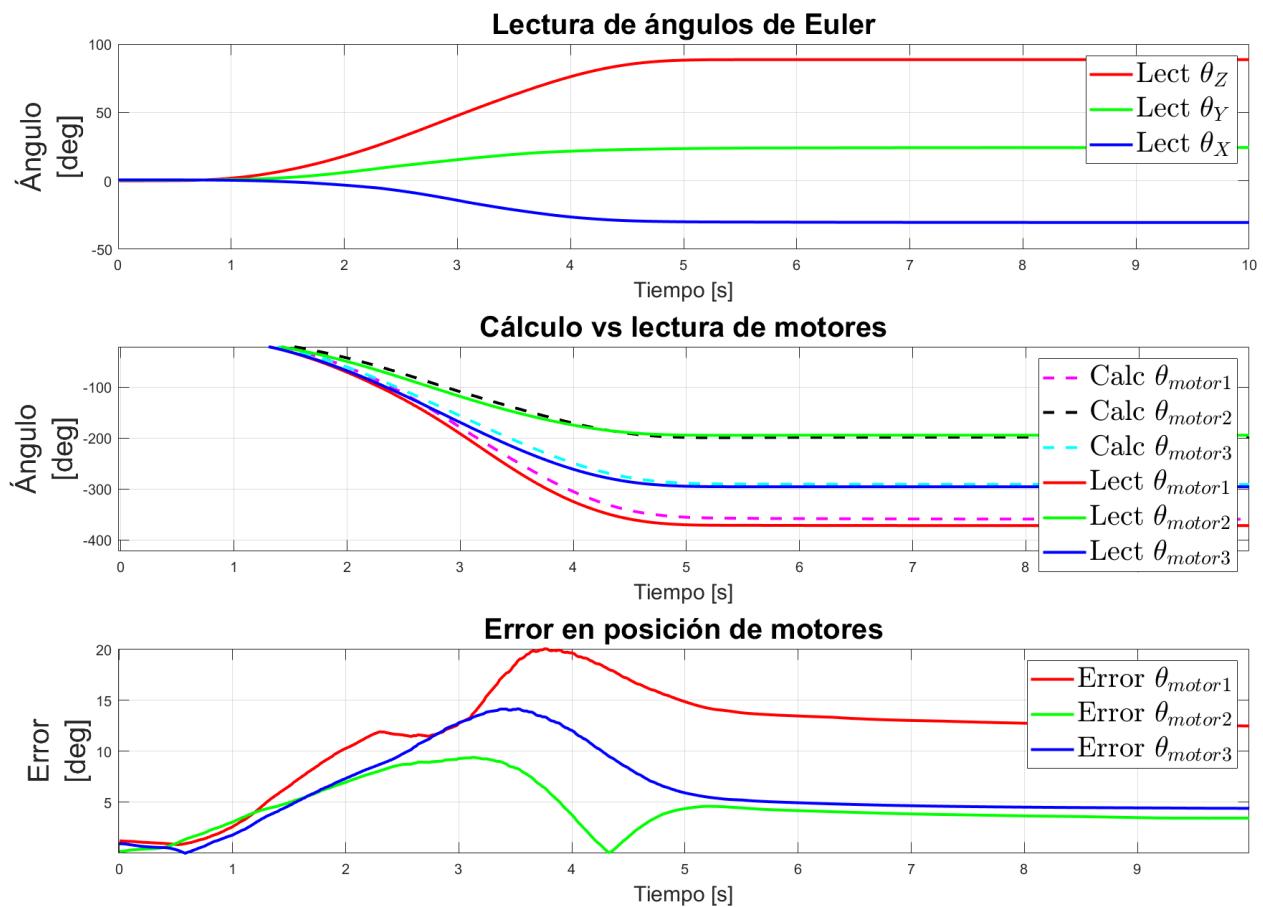


Figura 6.16: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de posición, incluyendo el error absoluto.

Tabla 6.11: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Posición

Descripción	Variable	Mín [deg]	t [s]	Máx [deg]	t [s]
Euler Z (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_Z</i>	0.0008	0.0000	88.6045	7.7400
Euler Y (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_Y</i>	0.3793	0.0000	24.3533	9.6200
Euler X (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_X</i>	-30.4860	10.0000	0.6968	0.0000
Motor 1 (Cálculo-Pos)	<i>Calc θ_{motor1}</i>	-359.2715	10.0000	1.2183	0.0000
Motor 2 (Cálculo-Pos)	<i>Calc θ_{motor2}</i>	-199.1715	5.2400	-0.0296	0.0000
Motor 3 (Cálculo-Pos)	<i>Calc θ_{motor3}</i>	-291.1859	10.0000	-1.1754	0.0000
Motor 1 (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_{motor1}</i>	-371.7551	7.2800	0.0000	0.0000
Motor 2 (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_{motor2}</i>	-194.5714	5.2600	-0.2082	0.0000
Motor 3 (Lectura-Pos)	<i>Lect θ_{motor3}</i>	-295.5919	5.5200	-0.2449	0.0000
Error Motor 1 (Pos)	<i>Error θ_{Motor1}</i>	0.0000	0.0000	20.0478	3.7600
Error Motor 2 (Pos)	<i>Error θ_{Motor2}</i>	0.0000	0.0000	9.4117	3.1200
Error Motor 3 (Pos)	<i>Error θ_{Motor3}</i>	0.0000	0.0000	14.1625	3.5200

Velocidad

La Figura 6.17 muestra la comparación entre las velocidades articulares calculadas mediante la cinemática inversa y las obtenidas experimentalmente a partir de los motores del prototipo, utilizando como entrada las velocidades angulares registradas por la IMU. En dicha figura se presentan las trayectorias de referencia utilizadas por el modelo, las señales estimadas y los errores absolutos para cada motor. Las cotas mínimas y máximas registradas, que se resumen en la Tabla 6.12, indican que la velocidad calculada para el motor 1 osciló entre $-136,86^\circ/s$ y $-0,09^\circ/s$, mientras que la velocidad medida varió entre $-145,29^\circ/s$ y $0,00^\circ/s$. Para los motores 2 y 3, las velocidades calculadas alcanzaron mínimos de $-69,14^\circ/s$ y $-100,88^\circ/s$, con máximos de $0,69^\circ/s$ y $-0,03^\circ/s$, respectivamente. En comparación, las velocidades medidas oscilaron entre $-70,24^\circ/s$ y $0,15^\circ/s$ para el motor 2, y entre $-106,13^\circ/s$ y $0,00^\circ/s$ para el motor 3. Los errores máximos absolutos obtenidos fueron de $9,40^\circ/s$, $10,44^\circ/s$ y $7,16^\circ/s$ para los motores 1, 2 y 3, ocurriendo en los tiempos 3.26 s, 4.18 s y 4.30 s, respectivamente. En cuanto al análisis de correlación, los coeficientes obtenidos para la velocidad fueron de 0.9981 para el motor 1, 0.9900 para el motor 2 y 0.9964 para el motor 3, reflejando una buena relación entre los datos estimados y medidos.

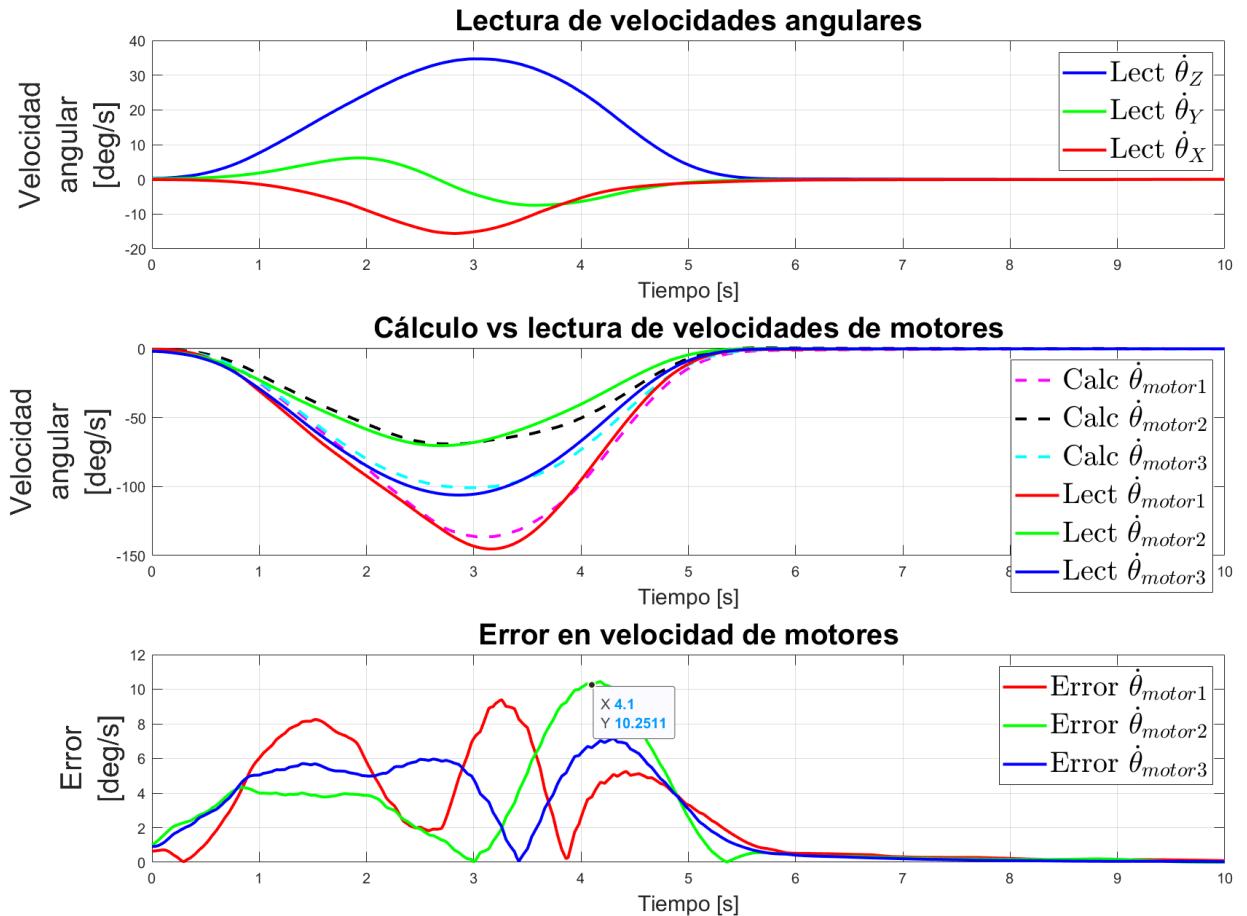


Figura 6.17: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de velocidad, incluyendo el error absoluto.

Tabla 6.12: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Velocidad

Descripción	Variable	Mín [deg/s]	t [s]	Máx [deg/s]	t [s]
Euler Z (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_Z$	-0.0166	8.8000	31.3408	2.9000
Euler Y (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_Y$	-0.0032	10.0000	9.5431	2.3400
Euler X (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_X$	-14.2181	3.0600	-0.0162	10.0000
Motor 1 (Cálculo-Vel)	<i>Calc</i> $\dot{\theta}_{motor1}$	-136.8565	3.0600	-0.0873	10.0000
Motor 2 (Cálculo-Vel)	<i>Calc</i> $\dot{\theta}_{motor2}$	-69.1406	2.8200	0.6859	5.7000
Motor 3 (Cálculo-Vel)	<i>Calc</i> $\dot{\theta}_{motor3}$	-100.8823	3.0600	-0.0309	10.0000
Motor 1 (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_{motor1}$	-145.2857	3.1600	0.0000	7.7000
Motor 2 (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_{motor2}$	-70.2360	2.6800	0.1512	5.7800
Motor 3 (Lectura-Vel)	<i>Lect</i> $\dot{\theta}_{motor3}$	-106.1250	2.8600	0.0000	5.9400
Error Motor 1 (Vel)	<i>Error</i> $\dot{\theta}_{motor1}$	0.0000	0.0000	9.3963	3.2600
Error Motor 2 (Vel)	<i>Error</i> $\dot{\theta}_{motor2}$	0.0000	0.0000	10.4417	4.1800
Error Motor 3 (Vel)	<i>Error</i> $\dot{\theta}_{motor3}$	0.0000	0.0000	7.1565	4.3000

Aceleración

La Figura 6.18 presenta la comparación entre las aceleraciones articulares estimadas mediante el modelo de cinemática inversa y las obtenidas experimentalmente a partir de las derivadas sucesivas de las señales de posición. En dicha gráfica, se puede observar el comportamiento temporal de cada una de las tres articulaciones, incluyendo el error absoluto asociado, lo cual permite apreciar visualmente la cercanía entre los valores teóricos y los medidos.

En cuanto a los valores extremos registrados, el motor 1 alcanzó una aceleración máxima calculada de $91,29^{\circ}/s^2$ y mínima de $-63,82^{\circ}/s^2$, mientras que las lecturas experimentales correspondientes oscilaron entre $96,47^{\circ}/s^2$ y $-64,15^{\circ}/s^2$. Para los motores 2 y 3, las aceleraciones calculadas estuvieron en rangos de $-37,99^{\circ}/s^2$ a $44,91^{\circ}/s^2$ y de $-57,43^{\circ}/s^2$ a $65,73^{\circ}/s^2$, respectivamente. Estas cotas, así como sus instantes de aparición, se resumen en la Tabla 6.13. Los errores máximos absolutos obtenidos fueron de $16,46^{\circ}/s^2$ para el motor 1, $10,85^{\circ}/s^2$ para el motor 2 y $12,20^{\circ}/s^2$ para el motor 3.

Adicionalmente, se evaluó el grado de correspondencia entre los perfiles estimados y medidos mediante el coeficiente de correlación lineal. En esta etapa, los valores obtenidos fueron de 0.99302, 0.97837 y 0.99174 para los motores 1, 2 y 3 respectivamente, lo cual, a pesar de ser ligeramente menor que en los análisis de posición y velocidad, sigue mostrando una adecuada relación entre ambas señales, incluso considerando la sensibilidad propia de la aceleración frente a ruidos y variaciones pequeñas en las mediciones.

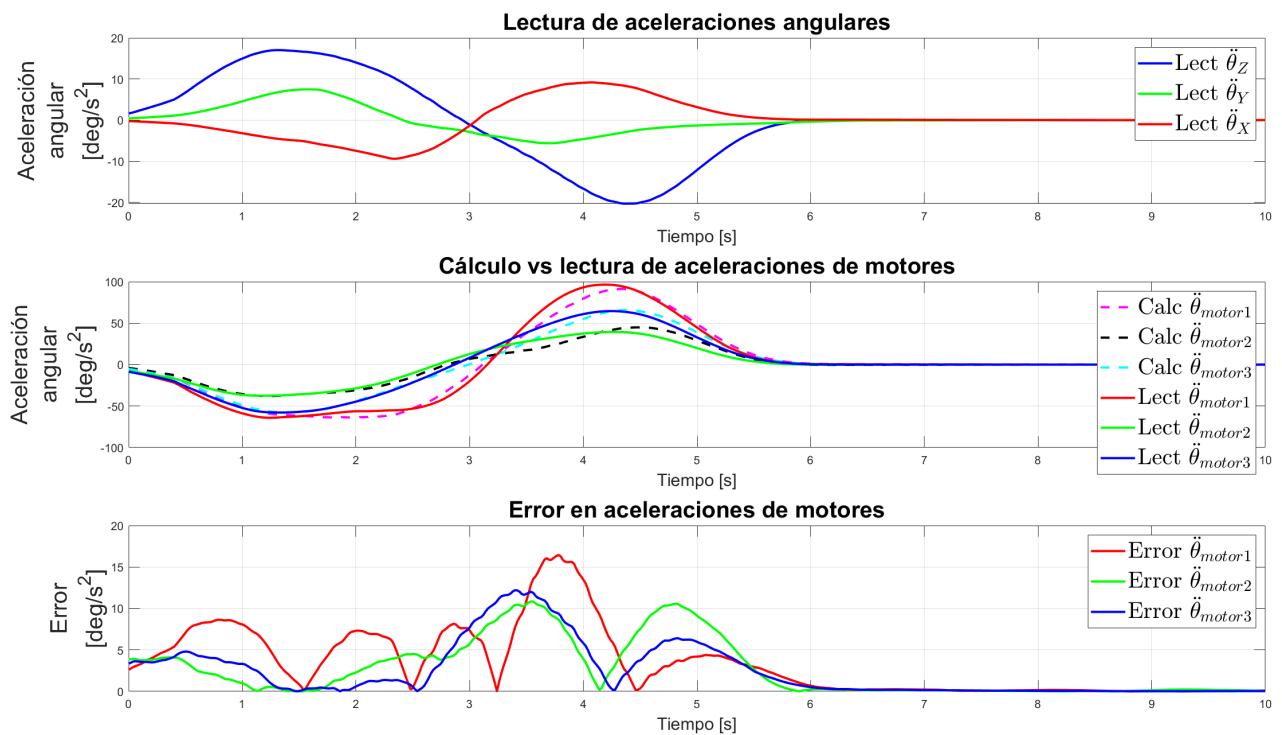


Figura 6.18: Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante la cinemática inversa de aceleración, incluyendo el error absoluto.

Tabla 6.13: Cotas mínimas y máximas registradas para la cinemática inversa – Aceleración

Descripción	Variable	Mín [deg/s ²]	t [s]	Máx [deg/s ²]	t [s]
Euler Z (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_z$	-20.3071	4.3600	17.0286	1.3200
Euler Y (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_Y$	-5.6190	3.7000	7.4870	1.5800
Euler X (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_x$	-9.3953	2.3400	9.1732	4.0600
Motor 1 (Cálculo-acel)	Calc $\ddot{\theta}_{motor1}$	-63.8238	1.8000	91.2913	4.3400
Motor 2 (Cálculo-acel)	Calc $\ddot{\theta}_{motor2}$	-37.9954	1.2400	44.9142	4.4800
Motor 3 (Cálculo-acel)	Calc $\ddot{\theta}_{motor3}$	-57.4308	1.3600	65.7334	4.3600
Motor 1 (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_{motor1}$	-64.1458	1.2400	96.4656	4.2000
Motor 2 (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_{motor2}$	-37.5189	1.1800	39.3953	4.2800
Motor 3 (Lectura-acel)	Lect $\ddot{\theta}_{motor3}$	-57.7758	1.3400	64.5583	4.2400
Error Motor 1 (acel)	Error $\ddot{\theta}_{motor1}$	0.0000	0.0000	16.4575	3.7800
Error Motor 2 (acel)	Error $\ddot{\theta}_{motor2}$	0.0000	0.0000	10.8512	3.5400
Error Motor 3 (acel)	Error $\ddot{\theta}_{motor3}$	0.0000	0.0000	12.1991	3.4000

De manera general, los coeficientes de correlación obtenidos para la cinemática inversa reflejan una correspondencia adecuada entre las señales articulares estimadas por el modelo y aquellas registradas experimentalmente (ver Tabla 6.14). En las tres articulaciones, se observa

una tendencia decreciente conforme se pasa de posición a velocidad y finalmente a aceleración, lo cual es consistente con el aumento en la sensibilidad a ruidos y errores numéricos que conllevan las derivaciones sucesivas.

En posición, los valores superan ampliamente los 0.998 en todos los motores, destacando una fuerte consistencia entre el modelo inverso y la realidad física. Para la velocidad, aunque los coeficientes disminuyen levemente, se mantienen dentro de un rango alto (por encima de 0.99 en los tres motores), indicando que la velocidad también es capturada de forma adecuada. En el caso de la aceleración, las correlaciones siguen siendo aceptables, con valores superiores a 0.97, incluso en el motor con menor índice, lo cual es relevante dado que esta variable es particularmente sensible a pequeñas fluctuaciones.

Cabe recordar que el análisis en esta etapa de validación resulta redundante, dado que ya se realizó la prueba en lazo cerrado y la cuantificación de error absoluto en la sección 5.3. Por lo tanto, al observar resultados satisfactorios en la cinemática directa, era de esperarse una respuesta acorde en la cinemática inversa, confirmando así la coherencia del modelo en ambos sentidos.

Tabla 6.14: Correlación - Cinemática Inversa (Ángulos de Motores)

Motor	Correlación Posición	Correlación Velocidad	Correlación Aceleración
Motor 1	0.99977	0.99809	0.99302
Motor 2	0.99873	0.99002	0.97837
Motor 3	0.99949	0.99640	0.99174

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusión

Este trabajo abordó de forma integral el diseño, construcción, análisis y validación de un manipulador paralelo esférico en configuración coaxial. El prototipo fue desarrollado utilizando principalmente componentes comerciales, seleccionados e integrados junto con piezas diseñadas específicamente para asegurar su funcionalidad mecánica. Se seleccionaron parámetros geométricos respaldados por la literatura — $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 0^\circ$ — que optimizan la destreza del manipulador, permitiendo que el prototipo emule los movimientos de la muñeca humana, tanto en sus grados de libertad como en sus rangos de movimiento.

En el análisis teórico, se optó por una formulación general que no se limita a la configuración coaxial, manteniendo los parámetros de construcción como variables. Este enfoque permite reutilizar el modelo para diferentes manipuladores paralelos esféricos que comparten el mismo sistema de referencia global y una posición inicial de “codo derecho”, tal como se estableció en la Sección (4.1.1). A diferencia de otros trabajos que se limitan a obtener los vectores de orientación \mathbf{v}_i , aquí se logró llegar hasta la representación de los ángulos de Euler, representando un avance significativo en la descripción posicional del sistema. Además, se destacó la distinción entre las representaciones basadas en las derivadas de los ángulos de Euler ZYX y aquellas que utilizan directamente los vectores de velocidad y aceleración angular, siendo esta diferenciación crucial para una implementación coherente del modelo cinemático mediante teoría de tornillos.

La aplicación de la teoría de tornillos facilitó significativamente la obtención de los modelos de velocidad y aceleración, gracias a los tornillos recíprocos y la forma de Klein, que permitieron eliminar las contribuciones de las juntas pasivas sin recurrir a manipulaciones matemáticas complejas. Dichos modelos están formalmente establecidos en las ecuaciones (4.52) y (4.81), que describen respectivamente la relación de la velocidad y la aceleración de la plataforma móvil en función de las variables articulares activas. Asimismo, la inclusión de una cadena cinemática virtual con juntas ficticias hizo posible completar la matriz Jacobiana, modelando el sistema como uno de seis grados de libertad sin interferir con sus movimientos reales.

Para la validación numérica, se implementó un esquema de lazo cerrado que permitió

cuantificar errores máximos del 0.01 % en posición, 0.018 % en velocidad y 0.02 % en aceleración, lo que evidencia una elevada consistencia entre los modelos de cinemática directa e inversa. Además, mediante simulaciones del modelo CAD en Simulink, se obtuvieron errores potenciales máximos notablemente bajos: en la cinemática directa, los errores fueron menores al 0.01 % en posición, 0.012 % en velocidad y 0.014 % en aceleración; mientras que en la cinemática inversa, los errores fueron del orden de $1.25 \times 10^{-10} \%$ en posición, $8 \times 10^{-13} \%$ en velocidad y $4.5 \times 10^{-10} \%$ en aceleración. Esta diferencia es coherente con el hecho de que la cinemática directa recurre a métodos numéricos iterativos, los cuales tienden a introducir un mayor margen de error en comparación con los métodos algebraicos empleados en la cinemática inversa. Paralelamente, se estudió el espacio de configuración y el espacio de trabajo mediante la exportación del modelo a CoppeliaSim, donde se llevó a cabo un análisis sistemático para identificar y descartar los puntos que generaban colisiones entre los componentes del manipulador. Previamente, se eliminaron todos aquellos puntos que no cumplían con la condición (4.92), lo cual permitió excluir regiones cercanas a singularidades. De esta manera, el espacio resultante representa únicamente configuraciones válidas, libres tanto de colisiones como de problemas de singularidad.

Finalmente, se realizó la validación experimental utilizando el prototipo físico. Debido al ruido inherente en las mediciones del sensor inercial, fue necesario aplicar un preprocesamiento a las señales. A pesar de ello, los coeficientes de correlación obtenidos para la cinemática directa oscilaron entre 0.995 y 0.999 para posición, entre 0.992 y 0.996 para velocidad, y entre 0.956 y 0.990 para aceleración. Para la cinemática inversa, los resultados se situaron entre 0.998 y 0.999 para posición, 0.990 y 0.998 para velocidad, y 0.978 y 0.993 para aceleración.

7.2. Trabajos futuros

A partir del desarrollo y validación del presente prototipo, se identifican diversas líneas de trabajo que podrían fortalecer y ampliar el alcance del sistema desarrollado:

- ✓ **Mejora mecánica del sistema:** Se recomienda sustituir las juntas de revoluta actuales por unas con menor juego mecánico, lo cual permitiría una mayor precisión en el movimiento y una mejor correspondencia entre el modelo matemático y el comportamiento del prototipo físico.
- ✓ **Optimización del modelo numérico:** La implementación de métodos numéricos alternativos al algoritmo de `fsolve` de MATLAB, como el método de Euler-Homotopía, permitiría evaluar el desempeño computacional y determinar cuál enfoque ofrece mayor eficiencia en términos de tiempo de procesamiento y robustez en la convergencia.
- ✓ **Ánalysis de destreza:** Se propone realizar un estudio detallado del índice de destreza del mecanismo, lo cual permitiría caracterizar con mayor precisión las zonas del espacio de trabajo con mayor capacidad de orientación y maniobrabilidad.
- ✓ **Rediseño estructural de la carcasa:** Otra mejora viable consiste en rediseñar la carcasa externa del manipulador con el fin de evitar colisiones con la plataforma móvil. Esto

permitiría ampliar el espacio operativo útil, asegurando zonas de trabajo y configuración más extensas y completamente libres de interferencias mecánicas.

- ✓ **Extensión funcional del prototipo:** Se propone implementar rutinas de movimiento específicas e integrar sensores electromiográficos, con el objetivo de permitir el control del prototipo mediante señales musculares. Además, se sugiere montar una mano robótica sobre la plataforma móvil del manipulador, con la finalidad de conformar una prótesis robótica funcional que responda de manera intuitiva a la intención de movimiento del usuario.
- ✓ **Miniaturización y portabilidad:** Finalmente, se propone integrar el sistema electrónico dentro del cuerpo del manipulador y reducir el tamaño de los engranajes, con el objetivo de obtener un diseño más compacto y fácilmente transportable.

Referencias

- [1] H. Shahsavari, P. Matourypour, S. Ghiyasvandian, A. Ghorbani, F. Bakhshi, M. Mahmoudi, and M. R. Golestannejad. Upper limb amputation; care needs for reintegration to life: An integrative review. *International Journal of Orthopaedic and Trauma Nursing*, 38:100773, 2020.
- [2] L. K. Jiménez. Ajuste psicosocial en pacientes amputados: La psicología en el contexto sanitario. *Revista Cúpula*, 31(2):8–43, 2017.
- [3] L. U. Odhner, L. P. Jentoft, M. R. Claffee, N. Corson, Y. Tenzer, R. R. Ma, M. Buehler, R. Kohout, R. D. Howe, and A. M. Dollar. A compliant, underactuated hand for robust manipulation. *The International Journal of Robotics Research*, 33(5):736–752, 2014.
- [4] Shadow Robot Company. Shadow hand, 2016. URL <https://www.shadowrobot.com/products/dexterous-hand/>. Accessed: 2023-04-10.
- [5] I. Coltd. The handroid, 2011. URL <http://www.itk-pro.com/en/pro/kindengisyu.htm>. Accessed: 2023-04-10.
- [6] M. G. Catalano, G. Grioli, E. Farnioli, A. Serio, C. Piazza, and A. Bicchi. Adaptive synergies for the design and control of the pisa/iit softhand. *The International Journal of Robotics Research*, 33(5):768–782, 2014.
- [7] Z. Xu and E. Todorov. Design of a highly biomimetic anthropomorphic robotic hand towards artificial limb regeneration. In *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3485–3492. IEEE, 2016.
- [8] ARC Ltd. Introducing the new ar10 humanoid robotic hand, 2014–2016. URL <http://www.active8robots.com/robots/ar10-robotic-hand/>. Accessed: 2023-04-10.
- [9] A. M. Dollar and R. D. Howe. The highly adaptive sdm hand: Design and performance evaluation. *The International Journal of Robotics Research*, 29(5):585–597, 2010.
- [10] Ossur. Mano protésica quantum i-limb - garotécnica. <https://garotecnica.com/protesica/miembro-superior/manos/quantum-i-limb/>, 2022. Accessed: 2022-7-8.
- [11] Michelangelo. Michelangelo fascina. usar perfectamente una tecnología con precisión. <https://docplayer.es/83793403-Michelangelo-fascina-usar-perfectamente-una-tecnologia-con-precision.html>, 2022. Accessed: 2022-7-21.

- [12] Ottobock. <https://www.ottobock.com/es-mx/product/8E70>, 2022. Accessed: 2022-7-21.
- [13] Ortesica Garo. Mano protésica VINCENT evolution 3 - garotécnica. <https://garotecnica.com/protesica/miembro-superior/manos/vincent-evolution-3/>, 2022. Accessed: 2022-7-21.
- [14] VicentEvolution3. VINCENTwrist. <https://www.vincentsystems.de/vincent-wrist>, 2022. Accessed: 2022-7-21.
- [15] H. Fan, G. Wei, and L. Ren. Prosthetic and robotic wrists comparing with the intelligently evolved human wrist: A review. *Robotica*, pages 1–23, 2022.
- [16] D. Hosmer. We friction wrist. <https://fillauer.com/products/we-friction-wrist/>, 2023. Chattanooga, TN, U.S. Accessed: 2023-04-10.
- [17] W. C. Prout. Prosthetic wrist unit, 1964.
- [18] Ottobock. Ratchet type rotation. [https://shop.ottobock.ca/en/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Body-Powered-Systems/Movo-Wrist-Units/Wrist-Unit%C3%A9Ratchet-Type-Rotation/p/10V8](https://shop.ottobock.ca/en/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Body-Powered-Systems/Movo-Wrist-Units/Wrist-Unit-%C3%A9Ratchet-Type-Rotation/p/10V8), 2023. Duderstadt, Germany. Accessed: 2023-04-10.
- [19] D. Hosmer. Sierra wrist. <https://fillauer.com/products/sierra-wrist-flex-unit/>, 2023. Chattanooga, TN, U.S. Accessed: 2023-07-21.
- [20] D. Hosmer. Fw flexion friction wrist. <https://fillauer.com/products/fw-flexion-friction-wrist/>, 2023. Chattanooga, TN, U.S. Accessed: 2023-07-21.
- [21] Ottobock. Otto bock 10v40 myowrist 2act instructions for use manual. <https://www.manualslib.com/manual/1842366/Otto-Bock-10v40-Myowrist-2act.html>. Accessed 2023-10-08.
- [22] A. Albers, S. Brudniok, J. Ottnad, C. Sauter, and K. Sedchaicham. Upper body of a new humanoid robot - the design of armar iii. In *Proceedings of the 2006 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pages 308–313, 2006.
- [23] Ottobock. Myolinowrist. <https://shop.ottobock.us/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Myo-Hands-and-Components/Myo-Wrist-Units-and-Rotation/MyolinoWrist-2000/p/10V51%C3%A9ij52>, 2023. Duderstadt, Germany. Accessed: 2023-07-22.
- [24] Ottobock. Robo wrist. [https://shop.ottobock.us/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Body-Powered-Systems/Movo-Wrist-Units/Robo-Wrist%C2%BC-Body-powered-wrist-unit/p/10V41](https://shop.ottobock.us/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Body-Powered-Systems/Movo-Wrist-Units/Robo-Wrist%2C-Body-powered-wrist-unit/p/10V41), 2023. Duderstadt, Germany, Accessed: 2023-07-23.
- [25] D. Hosmer. Four-function wrist. <https://fillauer.com/products/four-functionwrist/>, 2023. Chattanooga, TN, U.S. Accessed: 2023-07-23.

- [26] Ottobock. Adapter with flexion. <https://shop.ottobock.us/Prosthetics/Upper-Limb-Prosthetics/Cosmetic-Devices/Movo-Wrist-Units/Adapter-with-Flexion/p/10R3Lij5M12X1Lij85>, 2023. Duderstadt, Germany, Accessed: 2023-07-23.
- [27] J. N. Billock. Upper limb prosthetic terminal devices: Hands versus hooks. *Clinical Prosthetics and Orthotics*, 10(2):57–65, 1986.
- [28] N. A. A. Razak, N. A. A. Osman, H. Gholizadeh, and S. Ali. Development and performance of a new prosthesis system using ultrasonic sensor for wrist movements: A preliminary study. *Biomedical Engineering Online*, 13(1):49, 2014.
- [29] P. J. Kyberd, E. D. Lemaire, E. Scheme, C. MacPhail, L. Goudreau, G. Bush, and M. Brookeshaw. Two-degree-of-freedom powered prosthetic wrist. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, 48(6):609, 2011.
- [30] I.S. Phillips, J. laurentis kathryn, and E.C. Pfeiffer. Joint prosthetic device, 2009. URL <https://www.surechembl.org/document/US-20090326677-A1>.
- [31] T. Lenzi, J. Lipsey, and J. W. Sensinger. The ric arm—a small anthropomorphic transhumeral prosthesis. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(6):2660–2671, 2016.
- [32] M. S. Johannes, J. D. Bigelow, J. M. Burck, S. D. Harshbarger, M. V. Kozlowski, and T. V. Doren. An overview of the developmental process for the modular prosthetic limb. *Journal of Hopkins APL Technical Digest*, 30(3):207–216, 2011.
- [33] E. V. Vela. Los amputados y su rehabilitación. *Un reto para el Estado. Academia Nacional de Medicina. Mexico*, 2016.
- [34] C. Corella Mora and A. Pérez González. Análisis preliminar de la cinemática de la muñeca humana en el transporte de objetos. aplicación al diseño de prótesis de muñeca. In *IX Reunión del Capítulo Español de la Sociedad Europea de Biomecánica (ESB 2019)*, Las Palmas de Gran Canaria, España, octubre 2019. Ed. Autoeditado por Comité congreso. ISBN 9788409158966.
- [35] C. M. Gosselin, E. S. Pierre, and M. Gagne. On the development of the agile eye. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 3(4):29–37, 1996.
- [36] C. Rojas and J. Humberto. Metodología de diseño mecatrónico de robots. *Épsilon*, 1(4): 91–101, 2005.
- [37] C. Medina Gonzalez, M. Benet Rodríguez, and F. Marco Martínez. El complejo articular de la muñeca: aspectos anatofisiológicos y biomecánicos, características, clasificación y tratamiento de la fractura distal del radio. *Medisur*, 14(4):430–446, 2016.
- [38] J. Delprat, S. Ehrler, and J.C. Meyer. Muñeca y mano: examen articular. *EMC-Kinesiterapia-Medicina Física*, 26(2):1–19, 2005.

- [39] A. Sutherland. Huesos del carpo. <https://quizlet.com/es/326027465/huesos-del-carpo-diagram/>, 2000. Accessed: 2023-12-10.
- [40] A. Goicoechea. Los ocho huesos del carpo. <https://fisiosaludable.com/publicaciones/articulos/209-los-ocho-huesos-del-carpo>, October 2017. Accessed: 2022-7-22.
- [41] A. Pineda Borja, E. Bernabé Castañeda, and A. Morales Sosa. Fractura del hueso piramidal en un paciente pediátrico. reporte de un caso y revisión de la literatura. *Revista de la Facultad de Medicina (México)*, 60(5):22–27, 2019.
- [42] R. Junquera. Hueso pisiforme. <https://www.fisioterapia-online.com/glosario/hueso-pisiforme>, 2019. Accessed: 2022-7-25.
- [43] R. Junquera. Hueso trapecio. <https://www.fisioterapia-online.com/glosario/hueso-trapecio>, 2019. Accessed: 2022-7-25.
- [44] R. Junquera. Hueso trapezoide. <https://www.fisioterapia-online.com/glosario/hueso-trapezoide>, 2019. Accessed: 2022-7-25.
- [45] A. Galiano. ANATOMIA. <https://www.iqb.es/cbasicas/anatomia/es004.htm>, 2017. Accessed: 2022-7-25.
- [46] M. Chávez. Sistema Oseo. <https://sistemoseoanatomiamarcela.blogspot.com/2020/04/>, 2020. Accessed: 2023-12-20.
- [47] Mayo Clinic. Arm bones. <https://www.mayoclinic.org/diseases-conditions/broken-arm/multimedia/arm-bones/img-20007018>, noviembre 15 2021. Accessed: 2024-01-10.
- [48] X. M. BULLO. Muñeca. <https://www.icatma.es/muneca-especialidades-icatma-unidad-mano-codo-y-microcirugia/>, July 2018. Accessed: 2022-7-22.
- [49] J. Bicocca. Importancia de la estabilidad de la muñeca y de la mano en los gestos técnicos de pases. In *10mo Congreso Argentino de Educación Física y Ciencias*. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata, 2013.
- [50] C. Serrano and B. Navarro. Huesos principales del miembro superior. Accessed: 2021-11-10.
- [51] M. F. Miranda López. Complejo articular de la muñeca: articulación radiocarpiana y articulación mediocarpiana. <https://www.mirandafisioterapia.com/post/complejo-articular-de-la-muneca>, May 2018. Accessed: 2022-7-25.
- [52] E. Sánchez. Articulación de la muñeca. <https://mejorconsalud.as.com/articulacion-la-muneca/>, December 2017. Accessed: 2022-7-22.

- [53] P. Ibáñez Gimeno and X. Jordana and J. Manyosa and A. Malgosa and I. Galtés. Los humanos, más eficientes al coger objetos. <https://www.uab.cat/web/detalle-noticia/los-humanos-mas-eficientes-al-coger-objetos-1345680342040.html?articleId=1345644713355>, September 2012. Accessed: 2022-7-25.
- [54] J. E. Shigley, J. J. Uicker, and J. H. Pérez. *Teoría de máquinas y mecanismos*. Number TJ145. S54 1983. McGraw-Hill México;., 1983.
- [55] S. Rodríguez and F. Ramírez. Engranajes. *Revista de Bogotá*, 1981.
- [56] A. Mazariegos. *Engranajes*. Lulu.com, Morrisville, NC, 2006.
- [57] B.H. Cortez Pazmiño. Engranajes. <https://es.slideshare.net/byronhernancortezpazmino/engranajes-77693675>, 2022. Accessed: 2024-02-13.
- [58] R.G. Budynas and J. Keith Nisbett. *Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley*. McGraw Hill, 8 edition, 2011.
- [59] J. Gallardo Alvarado, J. Rico Martínez, and M. Caudillo Ramírez. Análisis cinemático directo de un manipulador paralelo esférico asimétrico. *Ingeniería, investigación y tecnología*, 7(4):205–215, 2006.
- [60] G. Wu and S. Bai. Design and kinematic analysis of a 3-rrr spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 56:55–65, 2019.
- [61] S. Bai, M. R. Hansen, and T. O. Andersen. Modelling of a special class of spherical parallel manipulators with euler parameters. *Robotica*, 27(2):161–170, 2009.
- [62] G. Legnani and I. Fassi. Kinematics analysis of a class of spherical pkms by projective angles. *Robotics*, 7(4):59, 2018.
- [63] S. Bai, X. Li, and J. Angeles. A review of spherical motion generation using either spherical parallel manipulators or spherical motors. *Mechanism and Machine Theory*, 140:377–388, 2019.
- [64] R. M. Colorado. *Cinem'atica y din'amica de robots manipuladores*. Alpha Editorial, 2016.
- [65] J. J. Craig. *Robótica: John J. Craig*. Pearson Educación, 2006.
- [66] F. J. Somma. *Cuaterniones y ángulos de Euler para describir rotaciones en R3*. PhD thesis, Universidad Abierta Interamericana, 2018.
- [67] J. Gallardo Alvarado. *Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory*. Springer, 2016.
- [68] Z. Huang, Q. Li, and H. Ding. *Theory of parallel mechanisms*, volume 6. Springer Science & Business Media, 2012.

- [69] Z. Huang, Q. Li, and H. Ding. Basics of screw theory. *Theory of Parallel Mechanisms*, pages 1–16, 2013.
- [70] J. Duffy. *Statics and kinematics with applications to robotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [71] C. D. Crane III, M. Griffis, and J. Duffy. *Screw theory and its application to spatial robot manipulators*. Cambridge University Press, 2022.
- [72] J. Zhao, B. Li, X. Yang, and H. Yu. Geometrical method to determine the reciprocal screws and applications to parallel manipulators. *Robotica*, 27(6):929–940, 2009.
- [73] I. Tursynbek and A. Shintemirov. Infinite rotational motion generation and analysis of a spherical parallel manipulator with coaxial input axes. *Mechatronics*, 78:102625, 2021.
- [74] S. Bai and M. R. Hansen. Forward kinematics of spherical parallel manipulators with revolute joints. In *2008 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 522–527. IEEE, 2008.
- [75] D. C. Lay. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson educación, 2007.
- [76] S. Bai, M. R. Hansen, and J. Angeles. A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, 44(12):2204–2216, 2009.
- [77] J. G. Alvarado, M. C. Ramírez, C. R. Nájera, R. Aguilar, and L. P. González. Eliminación algebraica y el método newton-homotopía: Dos métodos eficientes en la solución de ecuaciones compuestas por polinomios (algebraic elimination and the newton-homotopy method: Two efficient methods for solving polynomial equations). *Pistas Educativas*, 41 (133), 2019.
- [78] A. Niyetkaliyev and A. Shintemirov. An approach for obtaining unique kinematic solutions of a spherical parallel manipulator. In *2014 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 1355–1360. IEEE, 2014.
- [79] S. B. Niku. *Introduction to robotics: analysis, control, applications*. John Wiley & Sons, 2020.
- [80] J. Craig. *Introduction to robotics*. Pearson Educacion, 2006.
- [81] C. M. Gosselin, J. Sefrioui, and M. J. Richard. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators with a coplanar platform. 1994.
- [82] I. Tursynbek, A. Niyetkaliye, and A. Shintemirov. Computation of unique kinematic solutions of a spherical parallel manipulator with coaxial input shafts. In *2019 IEEE 15th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pages 1524–1531. IEEE, 2019.

- [83] Y. Jian and J. Angeles. Kinematics simulation and control design of the agile wrist in a dual-arm robotic mechanical systems. In *2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE)*, volume 3, pages 39–42. IEEE, 2012.
- [84] J. Gallardo Alvarado and M. A. Murillo. Análisis cinemático del manipulador paralelo 4-prur mediante la teoría de tornillos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 14(3):299–306, 2017.
- [85] J. Gallardo Alvarado, R. Rodríguez Castro, R. Pérez-González, and C. R. Aguilar Nájera. Análisis cinemático de un manipulador paralelo plano mediante la teoría de tornillos infinitesimales. *Científica*, 17(4):159–169, 2013.
- [86] I. Tursynbek and A. Shintemirov. Modeling and simulation of spherical parallel manipulators in coppeliasim (v-rep) robot simulator software. In *2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR)*, pages 1–6. IEEE, 2020.
- [87] C. Gosselin and J. Angeles. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE transactions on robotics and automation*, 6(3):281–290, 1990.
- [88] C. M. Gosselin and E. Lavoie. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 12(4):394–402, 1993.
- [89] J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Education Limited, 4 edition, 2022.

Apéndice A

Funciones implementadas en MATLAB para el cálculo de la cinemática del manipulador

Este apéndice contiene todas las funciones desarrolladas en MATLAB para el análisis cinemático del manipulador paralelo esférico. El código ha sido organizado en carpetas de acuerdo con el tipo de operación que realiza cada conjunto de funciones, con el fin de facilitar su comprensión, mantenimiento y reutilización.

A continuación, se describen brevemente los contenidos de cada carpeta:

- ✓ **1 _ Cinemática directa:** Contiene las funciones que permiten calcular la orientación, velocidad y aceleración de la plataforma móvil a partir de los ángulos de entrada de los motores. Se incluyen versiones para posición, velocidad y aceleración.
- ✓ **2 _ Cinemática inversa:** Incluye funciones que calculan los ángulos, velocidades y aceleraciones de entrada requeridos para alcanzar una orientación deseada de la plataforma, a partir de los ángulos de Euler.
- ✓ **3 _ Cinemática inversa (completa):** Agrupa funciones que resuelven la cinemática inversa considerando también velocidades y aceleraciones, tanto en las variables activas como pasivas. Estas funciones hacen uso del producto de Klein y del producto de Lie entre tornillos, funciones que se encuentran en la sección **5 _ Operaciones**.
- ✓ **4 _ Conversiones:** Conjunto de funciones para convertir entre ángulos de Euler y vectores de velocidad y aceleración angular en derivadas primeras y segundas de ángulos de Euler, y viceversa.
- ✓ **5 _ Operaciones:** Incluye funciones matemáticas auxiliares como el producto de Klein, producto de Lie, utilizadas por otras rutinas del sistema.

Nota: Las funciones utilizan como base el análisis mediante teoría de tornillos, los principios de cinemática y relaciones vectoriales, adaptados a la estructura del manipulador paralelo esférico tipo 3RRR con ejes coaxiales.

Los archivos completos pueden consultarse en el siguiente enlace digital: <https://drive.google.com/drive/folders/1fQBHocGQD2J1X9oRI-AgpfEQRUtXvRii?usp=sharing>

Para facilitar el acceso desde dispositivos móviles, en la Figura A.1 se incluye un código QR que direcciona directamente a la carpeta con las funciones de MATLAB.



Figura A.1: Código QR para acceder a la carpeta digital con las funciones de MATLAB.

Apéndice B

Programas para la recolección de resultados

Este apéndice contiene la documentación y estructura de los programas desarrollados para la simulación y validación del sistema. El contenido se divide en cuatro secciones principales, organizadas de la siguiente forma:

- ✓ Simulación – Validación por lazo cerrado
- ✓ Simulación – Validación por modelo exportado
- ✓ Simulación – Espacio de configuración y de trabajo
- ✓ Prototipo físico

Importante: Para el correcto funcionamiento de todos los programas, es indispensable cargar todas las funciones contenidas en el **Apéndice A** al *Set Path* de MATLAB. Esto garantiza que todos los scripts y modelos puedan acceder a las funciones auxiliares necesarias para la ejecución, análisis y graficación.

1. Simulación – Validación por lazo cerrado

Esta carpeta contiene dos archivos principales:

- ✓ `programaParaSimulinkValidacionCinematica.m` (MATLAB)
- ✓ `SimulacionCinematicas.slx` (Simulink)

El archivo en MATLAB ejecuta automáticamente el modelo de Simulink, extrae los datos resultantes y genera gráficas de posición, velocidad y aceleración, así como sus respectivos errores. El modelo en Simulink implementa la validación del modelo matemático mediante el enfoque de **lazo cerrado**.

Además, esta carpeta contiene una subcarpeta **Resultados** donde se almacenan las imágenes generadas por MATLAB.

2. Simulación – Validación por modelo exportado

Contiene:

- ✓ **EnsambleCompletoV3.slx** (Simulink): Simulación del manipulador completo exportado desde SolidWorks mediante Simscape Multibody, utilizada para validar el comportamiento físico del modelo.
- ✓ **Programa_Para_Corroborar_con_SimulacionV1.m** (MATLAB): Ejecuta el modelo anterior y genera las gráficas de validación.

También incluye una subcarpeta **Resultados** con las figuras generadas.

3. Simulación – Espacio de configuración y de trabajo

Incluye el entorno necesario para determinar el **espacio de trabajo** y el **espacio de construcción** del manipulador. Contiene:

- ✓ Archivo de simulación en COPPELIASIM.
- ✓ Archivos para **cosimulación** con MATLAB: **remApi.m**, **remoteApi.dll** y **remoteApiProto.m**.

Nota: Estos archivos deben estar en la misma carpeta que los del simulador y MATLAB para que la comunicación funcione correctamente.

Además, incluye archivos de datos ya generados que contienen el espacio de trabajo y construcción previamente calculado, permitiendo usar resultados almacenados sin correr simulaciones largas. También se proporciona una carpeta **Resultados** con las gráficas de los espacios.

4. Prototipo físico

Contiene el entorno para la conexión y operación del **prototipo real**:

- ✓ **ControlEnvioVersion1.slx** (Simulink): Modelo para comunicación con la placa, interfaz de usuario e implementación de cinemáticas.
- ✓ **ParaGraficarV3.m** (MATLAB): Procesa los datos capturados, aplicando filtros, derivación numérica y generación de gráficas.

También incluye el archivo **DatosRobot.xlsx**, con datos reales sin procesamiento, y el workspace de MATLAB para análisis inmediato. Finalmente, contiene una carpeta **Resultados** con las figuras generadas a partir de datos del prototipo.

Los programas y archivos completos pueden consultarse en el siguiente enlace digital: https://drive.google.com/drive/folders/1Twq_gTh9LjTrbAueGSaUUvtxnPAAhwHi?usp=sharing

Para facilitar el acceso rápido desde dispositivos móviles o tabletas, la Figura B.1 incluye un código QR que direcciona a la carpeta con los programas y documentación mencionados.



Figura B.1: Código QR para acceder a la carpeta digital con los programas para la recolección de resultados.

Apéndice C

Código en Arduino para establecer la comunicación del sistema

El código desarrollado en **Arduino** tiene como objetivo establecer la comunicación UART entre la computadora y el prototipo físico del manipulador, utilizando una conexión mediante cable USB.

Este programa permite la ejecución de trayectorias definidas desde la interfaz en Simulink, al recibir instrucciones de movimiento desde la computadora, procesarlas internamente y transmitirlas a la electrónica de control. De forma simultánea, la tarjeta envía los datos de retroalimentación al entorno de simulación, permitiendo una interacción en tiempo real.

Para su correcto funcionamiento deben considerarse los siguientes aspectos:

- ✓ El sensor Bluetooth debe estar encendido antes de cargar o ejecutar el programa.
- ✓ Al iniciar, el sistema intentará conectar automáticamente con el dispositivo maestro.
- ✓ Una vez establecida la conexión, será posible enviar y recibir datos entre el prototipo y la interfaz gráfica de control.

Este código representa un componente esencial para garantizar la sincronización entre el entorno virtual y el sistema físico, siendo clave durante el proceso de validación experimental del manipulador robótico.

El archivo fuente del programa y su documentación pueden consultarse en el siguiente enlace digital: <https://drive.google.com/drive/folders/1y133FRt1n3LPqkU11i-exIiyMp9bEMx7?usp=sharing>

Asimismo, en la Figura C.1 se proporciona un código QR para facilitar el acceso desde dispositivos móviles.



Figura C.1: Código QR para acceder a la carpeta con el código en Arduino.

Apéndice D

Diagrama eléctrico del sistema

El sistema electrónico diseñado para controlar el prototipo del manipulador paralelo esférico se basa en un circuito especializado, cuya finalidad es integrar sensores y actuadores.

El diseño fue elaborado utilizando el software AUTODESK EAGLE, y contempla tanto el esquemático como el diseño de la tarjeta PCB (circuito impreso). Además de los archivos nativos del software, se incluyen versiones exportadas en PDF e imagen para su revisión rápida, así como la biblioteca personalizada de componentes empleada durante el desarrollo.

Los archivos incluidos son los siguientes:

- ✓ `placa3.sch` – Esquemático eléctrico del sistema.
- ✓ `placa3.brd` – Diseño de la tarjeta PCB.
- ✓ `Diseño.lbr` – Biblioteca de componentes personalizados.
- ✓ `placa3.pdf` – Versión en PDF del diseño completo.
- ✓ `placa3.png` – Imagen del diseño para consulta rápida.

Todos estos elementos permiten documentar y reproducir la electrónica del sistema, facilitando tanto su mantenimiento como futuras mejoras.

El conjunto de archivos puede consultarse y descargarse desde el siguiente enlace digital:

<https://drive.google.com/drive/folders/1BEUu0ZJ8s0W0XhtHK23X9u1omydvrU4V?usp=sharing>

Adicionalmente, en la Figura D.1 se presenta un código QR que enlaza directamente a la carpeta del diagrama eléctrico, permitiendo un acceso ágil desde dispositivos móviles.



Figura D.1: Código QR para acceder a los archivos del diseño electrónico del sistema.

Apéndice E

Contenido CAD, planos y videos del prototipo

Con el propósito de documentar de forma integral el desarrollo del prototipo del manipulador paralelo esférico, se proporciona un conjunto de recursos digitales organizados en tres carpetas principales. Estos archivos permiten explorar tanto el diseño asistido por computadora como los elementos visuales que acompañan la validación estructural y funcional del sistema.

1. ModeloCAD

Incluye todos los archivos del modelo tridimensional desarrollado en SOLIDWORKS, organizados por categorías de componentes. Se proporciona el ensamblaje completo, así como los archivos individuales de cada pieza. Adicionalmente, se integra una subcarpeta con archivos .STL destinados a la fabricación mediante impresión 3D.

2. Planos

Contiene los planos técnicos de las piezas fabricadas. Se incluyen archivos en formato .SLDDRW (editables en SolidWorks), documentos .pdf, y un archivo adicional que reúne todos los planos para su consulta rápida o impresión.

3. Videos

Esta carpeta está compuesta por tres secciones con videos demostrativos:

- ✓ **Explosivo:** Animaciones tipo vista explotada que ilustra el proceso de ensamblaje y desmontaje del prototipo.
- ✓ **MovimientoEngranes:** Muestran el funcionamiento de los engranajes y la transmisión de potencia.
- ✓ **MovimientosGenerales:** Presenta algunos de los movimientos que puede ejecutar el manipulador (Nota: En todos estos videos no se considera la colisión entre la plataforma móvil y la carcasa externa).

Todos los archivos digitales pueden descargarse y consultarse mediante el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/drive/folders/1zLcsatVNjDAuppFKYVM-VZEK1VxVqyic?usp=sharing>

Además, para facilitar el acceso desde dispositivos móviles, se incluye en la Figura E.1 un código QR que enlaza directamente al contenido mencionado.



Figura E.1: Código QR para acceder al contenido CAD, planos y videos del prototipo.

Apéndice F

Datasheets de componentes

Este apéndice contiene las hojas de datos (*datasheets*) de los componentes electrónicos más relevantes utilizados en el sistema físico. Todos los documentos están en formato PDF y proporcionan información técnica detallada directamente del fabricante.

La carpeta se encuentra organizada con los siguientes archivos:

- ✓ **Datasheet _ MP1584.pdf:** Hoja de datos del regulador reductor (buck converter) MP1584, utilizado para el control de voltaje en diversas partes del sistema.
- ✓ **Datasheet _ TB6612FNG.pdf:** Hoja de datos del puente H dual TB6612FNG, empleado para el control de motores de corriente directa.
- ✓ **Datasheet _ WT901BLECL.pdf:** Hoja de datos del sensor inercial WT901BLECL, el cual proporciona información de orientación, velocidad y aceleración, y se comunica mediante tecnología Bluetooth Low Energy.

Cada uno de estos documentos incluye especificaciones eléctricas, características operativas, esquemas de conexión, curvas de comportamiento y recomendaciones para una integración segura del sistema.

Los archivos pueden consultarse directamente desde el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/drive/folders/17MnW7U27-IiohNRUDJjpZ9TUip4GWA8H?usp=sharing>

Además, para facilitar el acceso desde dispositivos móviles, se incluye en la Figura F.1 un código QR que enlaza directamente al contenido mencionado.



Figura F.1: Código QR para acceder a los datasheets de los componentes principales del prototipo.

NO REPRODUCIR

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de este Trabajo Profesional puede reproducirse o transmitirse bajo forma o por ningún medio, electrónico ni mecánico, incluyendo fotocopiado o grabación, ni por ningún sistema de almacenamiento y recuperación de información, sin permiso por escrito del autor.

