



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**CONTROL SENSORLESS POR MODOS DESLIZANTES  
PARA EL MOTOR PMSM**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO EN MECATRÓNICA**

PRESENTA:

**VÍCTOR ORTEGA GARCÍA**

DIRECTOR:

**DR. JESÚS LINARES FLORES**

CO-DIRECTOR:

**DR. ARTURO HERNÁNDEZ MÉNDEZ**

**H. Cd. Huajuapán de León, Oaxaca, agosto de 2025**



# Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia.

A mis padres Claudio y Hermelinda.

A mi hermano Aarón.





# Agradecimientos

Agradezco a mis padres por darme el mayor regalo que se puede dar a alguien, confiar en mí.

A mi hermano que ha sido una gran compañía y fuente de motivación.

A los Dres. Jesús Linares Flores y Arturo Hernández Méndez por su apoyo, guía y revisión en este trabajo de tesis.

A los profesores Dr. José Antonio Juárez Abad, Dr. Oscar David Ramírez Cárdenas y Dr. Marco Antonio Contreras Ordaz por sus observaciones y aportaciones que contribuyeron a mejorar este trabajo.

A mis amigos, con quienes compartí mis mejores momentos y hoy los considero mi segunda familia.

Y por último gracias a todas las personas que me ayudaron, profesores, compañeros y todas las personas que estuvieron cuando las necesite.



---

# Resumen

Este trabajo se propone el análisis del modelo matemático del Motor Síncrono de Imanes Permanentes superficiales (PMSM, por sus siglas en inglés *Permanent Magnet Synchronous Motor*), con el objetivo de diseñar un control de seguimiento de velocidad angular, en conjunto con un Observador Proporcional Integral Generalizado (GPI, por sus siglas en inglés *Generalized Integral Proportional*), para estimar la velocidad y posición angular del motor PMSM. Este enfoque permite evitar el uso de sensores para dichas variables durante la operación del motor reduciendo costos, complejidades mecánicas y eléctricas. El control se lleva a cabo mediante la regulación simultánea de las salidas planas del sistema, en específico la corriente  $i_q$  y la velocidad angular  $\omega$ . Tal regulación se implementa con ayuda de un control desarrollado por el método de Modos Deslizantes (SM, por sus siglas en inglés *Sliding Mode*), lo que se traduce en un controlador lineal que varía en el tiempo y depende exclusivamente de las mediciones de corriente de las fases del motor. El diseño del controlador requiere del modelo matemático en el marco de referencia  $d-q$ , el cual resulta de aplicar las transformadas de Clarke y Park al modelo matemático en coordenadas  $a\ b\ c$  del PMSM. Por otra parte, la estimación de la posición y velocidad lleva al diseño de un observador basado en el modelo matemático en el eje coordenado  $\alpha-\beta$ .



# Índice

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
Estado del arte . . . . .	2
Planteamiento del problema . . . . .	3
Justificación . . . . .	4
Pertinencia . . . . .	5
Relevancia . . . . .	6
Hipótesis . . . . .	7
Objetivos . . . . .	8
Objetivo general . . . . .	8
Objetivos específicos . . . . .	8
Metas . . . . .	9
Alcances y limitaciones de la tesis . . . . .	10

---

<b>2. Motor PMSM</b>	<b>11</b>
Estructura física . . . . .	12
Aplicaciones de los PMSM . . . . .	13
Ventajas y desventajas . . . . .	13
Clasificación de los PMSM . . . . .	14
Funcionamiento . . . . .	17
Modo de operación . . . . .	17
Operación es estado estacionario . . . . .	19
Pérdidas de potencia . . . . .	22
Inversores y accionadores . . . . .	26
Topologías básicas de los inversores . . . . .	26
Esquema de control para motores de CA . . . . .	29
<b>3. Control por modos deslizantes (SMC)</b>	<b>31</b>
Contexto histórico . . . . .	31
Características . . . . .	32
Origen . . . . .	33
Consideraciones de diseño . . . . .	34

Fundamentos teóricos . . . . .	35
Superficies deslizantes . . . . .	35
Dinámica equivalente de Filipov . . . . .	42
Control integral . . . . .	46
Márgenes de ganancia . . . . .	47
Diseño de control . . . . .	49
<b>4. Observadores</b>	<b>55</b>
Observadores de estado . . . . .	56
Observadores de orden completo . . . . .	56
Observadores de orden reducido . . . . .	56
Observador GPI . . . . .	57
Diseño del observador GPI . . . . .	61
<b>5. Diseño y simulación del control</b>	<b>67</b>
Esquema general del sistema . . . . .	68
Diagrama de bloques del algoritmo de control . . . . .	69
Representación del modelo promedio de la planta en Psim . . . . .	71
Representación del algoritmo de control en diagrama de bloques de Simulink . . . . .	74

---

Controlador por modos deslizantes . . . . .	74
Transformación de Clarke . . . . .	76
Transformación de Park . . . . .	77
Observador GPI . . . . .	79
Simulación de una trayectoria suave de velocidad . . . . .	82
<b>6. Resultados experimentales y conclusiones</b>	<b>89</b>
Procedimiento . . . . .	89
Plataforma experimental . . . . .	90
Autotransformador trifásico . . . . .	91
Inversor trifásico . . . . .	92
Sensores de corriente . . . . .	93
Módulo dSPACE . . . . .	94
Módulo Motor/Dinamómetro . . . . .	98
Resultados obtenidos . . . . .	100
Conclusiones . . . . .	109
<b>Referencias</b>	<b>116</b>



<b>Transformaciones de Clarke y Park</b>	<b>117</b>
Transformación de Clarke . . . . .	117
Transformación de Park . . . . .	119
<b>Modelo matemático del PMSM</b>	<b>123</b>
Consideraciones para la obtención del modelo matemático . . . . .	123
Circuito equivalente . . . . .	124
Determinación de la matriz de inductancias del estator . . . . .	126
Inductancias propias del estator . . . . .	127
Inductancias mutuas del estator . . . . .	130
Modelado en el eje de referencia a b c . . . . .	133
Modelado en el eje de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	136
Modelado en el eje de referencia $d - q$ . . . . .	139
Modelado electromecánico . . . . .	145
<b>Cálculo del par electromagnético</b>	<b>147</b>
<b>Artículos realizados</b>	<b>153</b>



# Índice de figuras

---

2.1. Estator y rotor. . . . .	12
2.2. Clasificación de las máquinas eléctricas de [13]. . . . .	16
2.3. Diagrama fasorial de voltajes y corrientes balanceados de [21]. . . . .	20
2.4. Diagrama equivalente modificado de [19]. . . . .	22
2.5. Diagrama fasorial de motor síncrono de [19]. . . . .	22
2.6. Flujo de potencia modificado de [20]. . . . .	23
2.7. Descripción de ángulo de par de [20]. . . . .	25
2.8. Circuito eléctrico de un inversor trifásico modificado de [22]. . . . .	28
2.9. Esquemas de control. . . . .	30
3.1. Cálculo de límites en $\bar{x}$ de [1]. . . . .	37
3.2. Cálculo de límites en $\bar{x}^{(i)}$ de [1]. . . . .	38
3.3. Condición deslizante de [1]. . . . .	39

---

3.4. Interpretación gráfica de las ecuaciones 3.3 y 3.6 de [1]. . . . .	41
3.5. Cascabeleo como resultado de un control imperfecto de conmutación de [1]. . .	42
3.6. Construcción de Filippov de la dinámica equivalente en modo deslizante de [1].	43
5.1. Esquema general del sistema. . . . .	68
5.2. Diagrama de bloques del sistema. . . . .	70
5.3. Modelo promedio de la planta en PSim <sup>®</sup> . . . . .	72
5.4. Ventana de configuración de módulo PMSM. . . . .	73
5.5. Bloque enlace SimCoupler. . . . .	74
5.6. Subsistema del módulo del Controlador por Modos Deslizantes. . . . .	75
5.7. Transformación de Clarke. . . . .	76
5.8. Subsistema del módulo de Transformación de Clarke. . . . .	77
5.9. Transformación y transformación inversa de Park. . . . .	77
5.10. Subsistema del módulo de transformación de Park. . . . .	78
5.11. Subsistema del módulo de transformación inversa de Park. . . . .	79
5.12. Observador GPI para la estimación de FCEM. . . . .	80
5.13. Subsistema de ecuaciones del observador GPI . . . . .	81
5.14. Subsistema de ecuaciones de ganancias del polinomio Hurwitz. . . . .	82

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.15. Grafica de velocidad del motor PMSM. . . . .	83
5.16. Grafica de error velocidad del motor PMSM. . . . .	84
5.17. Grafica del par de carga. . . . .	84
5.18. Corrientes trifásicas suministrada al PMSM. . . . .	85
5.19. Acercamiento a las corrientes trifásicas ante el cambio del par de carga. . . . .	85
5.20. Voltajes trifásicos suministrada al PMSM. . . . .	86
5.21. Acercamiento a los voltajes trifásicos durante en arranque. . . . .	87
5.22. Voltajes en el marco de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	87
5.23. Corrientes en el marco de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	88
6.1. Plataforma experimental. . . . .	90
6.2. Autotransformador trifásico. . . . .	92
6.3. Inversor trifásico. . . . .	93
6.4. Módulo dSPACE. . . . .	94
6.5. Tarjeta controladora DS1104 R&W. . . . .	95
6.6. Configuración de los pines de salida del PWM de [39]. . . . .	97
6.7. Motor/dinamómetro modelo 8960-22. . . . .	99
6.8. Gráfica de velocidad. . . . .	101

---

6.9. Gráfica de error de velocidad estimada. . . . .	102
6.10. Gráfica de error de velocidad medida. . . . .	102
6.11. Gráfica de velocidad con par de carga. . . . .	103
6.12. Gráfica de error de velocidad estimada. . . . .	103
6.13. Gráfica de error de velocidad medida. . . . .	104
6.14. Gráfica del perfil de par aplicado . . . . .	104
6.15. Gráfica de velocidad . . . . .	105
6.16. Gráfica de error de velocidad estimada. . . . .	106
6.17. Gráfica de error de velocidad medida. . . . .	106
18. Eje de referencia $a, b$ y $c$ y eje de referencia $\alpha_\beta$ . . . . .	118
19. Eje de referencia síncrono $d - q$ , eje de referencua $\alpha - \beta$ . . . . .	120
20. Devanados del estator modificado de [41]. . . . .	125
21. Componentes $F_{mad}$ y $F_{maq}$ de la fuerza $F_{ma}$ modificado de [41]. . . . .	127
22. Comportamiento de la inductancia propia del devanado $a$ de [41] . . . . .	129
23. Diagrama equivalente de la face $a$ . . . . .	136
24. Eje de referencia $a, b$ y $c$ y eje de referencia $\alpha - \beta$ de [42]. . . . .	145

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

En la actualidad el uso y desarrollo de sistemas de control para motores se ha vuelto fundamental en la industria, esto se debe a la amplia aplicación de los dichos sistemas en la maquinaria industrial, así como al creciente uso de motores eléctricos. Las aplicaciones industriales demandan controles de velocidad angular capaces de cumplir con requerimientos de par, tamaño y potencia que se adecuen a los sistemas modernos.

Los motores eléctricos generalmente se clasifican en motores de Corriente Directa (CD) y de corriente alterna (CA). A su vez, los motores de CA se clasifican en monofásicos y trifásicos, y estos últimos se subdividen en motores asíncronos y síncronos. Los motores trifásicos de inducción son los más utilizados en la industria debido a su bajo costo y fácil mantenimiento, sin embargo, el PMSM ha ganado importancia en la propulsión de actuadores robóticos, herramientas eléctricas y aplicaciones en vehículos eléctricos, debido a su alta densidad de potencia, alta relación peso-torque, baja inercia y alta eficiencia.

Para desarrollar controles de alto rendimiento del PMSM y aprovechar todas sus ventajas es necesario el uso de un modelo matemático que incluya los parámetros de par y carga. Uno de los enfoques estudiados en las últimas décadas es el control de velocidad sin el uso de sensores, esto con el objetivo de abaratar costos y simplificar montajes, para ello se emplean técnicas de estimación como son observadores de orden extendido en conjunto con un control robusto.

---

El enfoque principal de esta tesis es el desarrollo de un control robusto que en conjunto con un observador Proporcional Integral Generalizado (GPI, por sus siglas en inglés *Generalized Integral Proportional*), proporcione una salida de control sobre la velocidad angular del motor, evitando así el uso de sensor de velocidad.

En esta tesis se desarrolla un esquema de control sin sensores basado en Modos Deslizantes para el motor PMSM con el propósito de seguimiento suave de velocidad angular y adicionalmente evaluar los resultados obtenidos tanto en simulación como en pruebas experimentales controladas.

## Estado del arte

Durante los últimos años, el estudio de las técnicas de control sin sensores ha tomado interés, dado que la eliminación del uso de sensores permite reducir costos y minimizar problemas mecánicos, este creciente interés se relaciona estrechamente con la popularidad de los motores síncronos, cuya aplicación se ha incrementado notablemente a la par del auge de los vehículos eléctricos.

En los artículos comprendidos entre [2] – [5] se emplean observadores para la estimación de la velocidad o posición, para el posterior control del PMSM, en cada caso se implementan diferentes técnicas para el diseño de los observadores, las cuales son: el Observador no lineal Luenberger, el Observador no lineal de perturbaciones (NDO, *Non-linear Disturbance Observer*), el Observador de modos deslizantes (SMO, *Sliding Mode Observer*) y el Observador de estado extendido (ESO, *Extended State Observer*).

De igual forma en [6] se propone una variación de SMO, denominada Observador de Modos Deslizantes de Alta Velocidad (HSSMO, *High speed Sliding Mode Observer*) y en [7], se desarrolla un Filtro de Kalman Extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*) para estimar la velocidad del motor y la resistencia del estator.



De lo anterior se concluye existen múltiples y variadas metodologías para la estimación de la velocidad, situación que se manifiesta también en los enfoques aplicados a los métodos de control, por ejemplo, en [2] y [3] se utiliza control adaptativo basado en el observador propuesto, mientras que en [5] y [8] se implementa un controlador Backstepping, en [7], se presenta un Control No lineal Optimo Cuadrático (NQOC, *Nonlinear Quadratic Optimal Control*), sustentado en la ecuación de estado dependiente de Riccati, además, un control por Modos Deslizantes es utilizado en [9], en [10] se desarrolla un control predictivo aplicado en el marco del estator y bajo restricción de pasividad y en [11] se implementa un control no lineal por planitud diferencial.

En la Universidad Tecnológica de la Mixteca se han llevado a cabo diversos trabajos de investigación enfocados en el estudio del Motor Síncrono de Imanes Permanentes, entre los cuales destacan, [12] donde se desarrolló un control Backstepping para el motor PMSM, [13] donde se diseñó un control sin sensores basado en pasividad, [14] en el año 2020 que propuso un control de velocidad adaptativo y [15] donde se desarrolló un sistema de control accionado por un inversor trifásico multinivel.

## Planteamiento del problema

En la actualidad el desarrollo de esquemas de control robusto aplicados a máquinas eléctricas utilizadas en la industria y sistemas automotrices es de gran importancia, ya que se busca realizar diseños compactos que entreguen alto torque y velocidad, en ese sentido los de motores PMSM cuentan con alta densidad de potencia, alta eficiencia y alta capacidad de par, lo cual los hace ideales para este tipo de aplicaciones.

Para asegurar un funcionamiento adecuado del control de velocidad angular es imprescindible la medición de posición y velocidad, dado que la posición es una variable esencial debido a su relación directa con el flujo del motor. La obtención de posición y velocidad mediante mediciones mecánicas, como encoders, resolvers, o potenciómetros, conlleva un incremento en la necesidad

---

de mantenimiento, costos, conexiones eléctricas y complejidad física.

Por esta razón se contempla el uso de un observador, prescindiendo así del sensor, lo cual permite reducir el número de conexiones, disminuyendo así las fallas, el mantenimiento y la complejidad física del sistema.

## **Justificación**

Hoy en día, el desarrollo de sistemas embebidos inteligentes ha impulsado el uso y desarrollo de microcontroladores y microprocesadores que se encargan del procesamiento de datos, cálculo de valores numéricos, lectura de sensores y disparo de compuertas de control. Entre dichos dispositivos se encuentran los Procesadores de Señales Digitales (DSP por sus siglas en inglés *Digital Signal Processor*), placas de desarrollo y prototipado rápido como la Dspace y encapsulados de alta densidad como Arreglo de Compuertas Programables (FPGA por sus siglas en inglés *Field Programmable Gate Array*).

El uso de estos dispositivos permite aprovechar sus capacidades de cálculo y diseñar sistemas de control de velocidad angular sin sensor, esto se logra mediante la construcción de un observador capaz de estimar la posición y velocidad a partir de las mediciones de corriente, eliminando con ello la necesidad de mecanismos de medición. Esta estimación reduce costos, complejidad eléctrica, complejidad mecánica y facilita el mantenimiento. La implementación conjunta del observador y controlador mejora la eficiencia y robustez del sistema acosta de un mayor requerimiento de recursos del microcontrolador, por lo tanto es importante considerar la capacidad del microcontrolador.

### **Pertinencia**

La situación energética actual de México requiere no solo la sustitución de energías no renovables por renovables, sino también la optimización y reducción del uso de energía eléctrica, en la búsqueda de una reducción del consumo energético en el desarrollo industrial, todos los aportes provenientes de los trabajos de investigación y desarrollo de nuevas aplicaciones de la tecnología, son de gran utilidad, dado que en México el 30 % de la toda la energía eléctrica generada se destina a la industria y alrededor de un 70 % del consumo de energía eléctrica en la industria se debe los motores eléctricos [16], mientras tanto la generación de energía renovable apenas supera el 25 % de toda la energía eléctrica generada en el país [17].

En el marco de un uso sustentable de la energía eléctrica, es evidente que se necesita reducir el consumo de los motores eléctricos, esto puede lograrse mediante el uso de motores más eficientes y el uso de controles que garanticen su desempeño.

Este trabajo se desarrolla como un aporte al uso de los motores con mayor densidad de potencia en la industria, contribuyendo así a la optimización del uso de la energía, particularmente en motores eléctricos, además de lo mencionado, este trabajo se presenta como una aplicación de los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera de ingeniería mecatrónica, especialmente en el curso de Control de Máquinas de Corriente Alterna, dado que incluye el uso de convertidores de potencia, así como el uso de transductores.

Este proyecto de tesis abarca el desarrollo del algoritmo de control por Modos Deslizantes (SM, *Sliding Mode*) para el control de velocidad de un motor PMSM por mediante de sistemas digitales (dSPACE) y contribuyendo a la línea de investigación de Control de Sistemas Electrónicos realizados en la División de Estudios de Postgrado de la Universidad Tecnológica de la Mixteca.

---

## Relevancia

Con el propósito de contribuir a la línea de investigación desarrollada en la Universidad Tecnológica de la Mixteca referente a el control del PMSM, el presente trabajo aborda el desarrollo de un control SM combinado con la estimación de velocidad angular de un observador GPI para el PMSM.

Uno de los temas de interés dentro de esta área de investigación en la Universidad Tecnológica de la Mixteca, es la estimación de velocidad angular del rotor en máquinas PMSM, el presente se enfoca en el caso de baja velocidad angular, donde la estimación es más compleja, lo que confiere mayor relevancia a las contribuciones derivadas de este trabajo.

El trabajo aquí propuesto implementa un esquema de control SM con observador GPI desarrollado en co-simulaciones de Matlab Simulink® y PSim® e implementado de forma física mediante la placa de desarrollo Dspace, que permite prescindir de sensores para su funcionamiento.

## Hipótesis

El control de velocidad basado en modos deslizantes con elemento integral, aplicado al PMSM, junto con el observador GPI de velocidad y posición, permitirá el seguimiento de velocidad bajo condiciones de torque aplicado. Esto será posible siempre que las acciones conjuntas de compensación y estimación converjan y sean transformadas exitosamente mediante convertidor trifásico, en señales sinusoidales de alimentación del motor. Dicha condición se basa en el cumplimiento exitoso de los siguientes supuestos.

- El error de estimación de las variables observadas debe ser acotado, de manera que los errores de seguimiento converjan asintóticamente a cero. Esta condición es garantizada por los términos de corrección de error en el observador GPI.
- El controlador basado en la implementación de control integral a través de Modos Deslizantes (SM), generará una señal de control promedio para cada una de las salidas planas del sistema, las cuales dependen directamente de las mediciones de las corrientes de fase.

---

# Objetivos

## Objetivo general

Implementar un esquema de control sin sensores basado en Modos Deslizantes para el motor PMSM con el propósito de realizar un seguimiento suave de velocidad. Adicionalmente, evaluar los resultados obtenidos tanto en simulación como en pruebas experimentales.

## Objetivos específicos

- I. Desarrollar las ecuaciones de control por modos deslizantes para el motor PMSM dado el modelo matemático en coordenadas  $d - q$  del sistema.
- II. Diseñar un observador GPI para la estimación de posición y velocidad del sistema.
- III. Modelar el sistema en lazo cerrado en los programas Matlab Simulink® y PSim®.
- IV. Desarrollar co-simulaciones en Matlab Simulink® y PSim® para validar el desempeño del modelo de control y el observador.
- V. Implementar el esquema de control en el PMSM mediante la placa de desarrollo Dspace.
- VI. Analizar el desempeño del esquema de control propuesto ante diferentes escenarios de pruebas experimentales.

## Metas

- Obtener el modelo matemático del motor PMSM en el eje de referencia  $d - q$  partiendo del modelo trifásico en el eje  $a b c$ .
- Integrar el control interno y desarrollar las superficies de deslizamiento para las salidas planas del motor PMSM, para hallar las ecuaciones de control del motor PMSM.
- Obtener el modelo matemático del motor PMSM en el eje de referencia  $\alpha - \beta$  con base en el modelo trifásico en el eje  $a b c$  y desarrollar una copia del sistema para cada una de las funciones FCEM, que serán los valores estimados utilizados para calcular la velocidad.
- Desarrollar el diagrama eléctrico del inversor trifásico, el motor PMSM y comparación PWM en el software PSim<sup>®</sup> e implementar las ecuaciones del control y observador en diagramas de bloques de Matlab Simulink<sup>®</sup>.
- Desarrollar el circuito eléctrico desde fuente CD, inversor, sensores de corriente, motor PMSM y placa de desarrollo.
- Verificar la conexión eléctrica con pruebas a lazo abierto y aplicar el control diseñado al prototipo.
- Ejecutar pruebas de seguimiento de trayectoria sin par aplicado y ante diferentes perfiles de par.
- Documentar y analizar los resultados obtenidos en las simulaciones.

---

## **Alcances y limitaciones de la tesis**

El alcance de este trabajo incluye el diseño e implementación una placa de sensores de corriente, el desarrollo del esquema de control basado en Modos Deslizantes, su simulación en Matlab e implantación física, así como el diseño del observador GPI, incluida su simulación e implantación. Además, se llevarán a cabo pruebas experimentales a baja velocidad en condiciones de torque aplicado, empleando para ello el equipo LabVolt. Por otro lado, las limitaciones de este trabajo radican principalmente en la disponibilidad del equipo, en específico el dinamómetro del equipo LabVolt, y en la precisión de medición de los sensores particularmente en la velocidad de medición y ruido presente en las mismas.



---

## Capítulo 2

# Motor PMSM

---

A partir de la década de 1950 se introdujeron en las máquinas eléctricas los materiales capaces de retener el magnetismo, lo que fue punto de referencia para la investigación estas máquinas, en consecuencia, ocurrió un rápido progreso en la aplicación de materiales magnéticos, debido a su alta densidad de energía. En los imanes permanentes, la densidad de energía se define como producto de la intensidad de campo y la densidad de flujo magnético, por consiguiente, la intensidad de campo es una medida de la calidad de los imanes [18].

Fue gracias a la disponibilidad los imanes permanentes con una considerable densidad de energía, que se impulsó el desarrollo de las máquinas eléctricas que los incorporan. Los imanes permanentes se introdujeron con el propósito de remplazar los polos debandados, que requieren un suministro de energía, dando como origen las máquinas eléctricas compactas. La implementación de los imanes elimina los rotores bobinados y, en consecuencia, los conmutadores. Esto sumado a la llegada de los transistores de potencia conmutados y dispositivos rectificadores basados en silicio, permitió el desarrollo del inversor, que asumió el papel de conmutador electrónico [18].

---

## Estructura física

El motor PMSM consta de dos componentes principales: el rotor y el estator, los cuales se encuentran ensamblados dentro de una armadura que permite el giro del rotor mediante un cojinete, tal como se ilustra en la Figura 2.1.

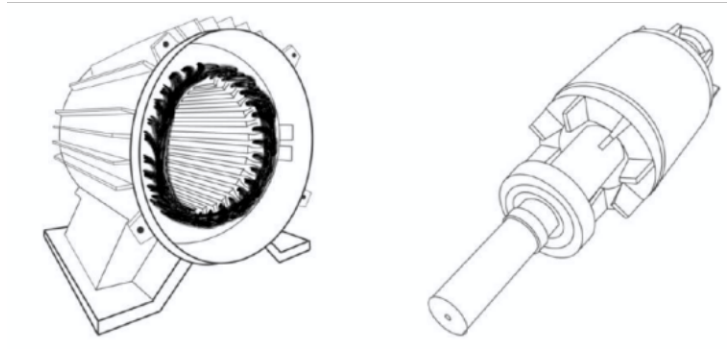


Figura 2.1: Estator y rotor.

El estator está compuesto de múltiples devanados que generan campos magnéticos al conducir corriente eléctrica a través de las tres fases. Estos devanados son bobinas de cobre cuidadosamente aisladas y delicadamente enrolladas alrededor de un núcleo ferromagnético. A su vez, el rotor consta de un eje con un cilindro de acero laminado, alrededor del cual se colocan imanes permanentes fabricados con materiales de gran fuerza coercitiva que se mantienen magnetizados.

Existen diversas configuraciones para el estator y el rotor, además de diversas combinaciones posibles entre ellas. Cada combinación con ventajas y desventajas en su desempeño. Sin embargo, la combinación más común empleada es un estator con bobinado concentrado y un rotor de polos superficiales, debido a su facilidad de manufactura y confiabilidad de su funcionamiento.

## Aplicaciones de los PMSM

Los motores síncronos, por lo regular resultan en ventajas económicas y operativas en la industria, son de gran utilidad al lidiar con altas potencias de carga, suelen emplearse como: actuadores en servosistemas, sistemas de propulsión eléctrica y generadores de potencia trifásica. Los motores síncronos de imanes permanentes, por otra parte, son utilizados fundamentalmente en aplicaciones de baja potencia como servomecanismos para herramientas industriales, por ejemplo: tornos, fresadoras, bombas de vacío, grúas, elevadores, máquinas de corte por láser y robótica.

## Ventajas y desventajas

### Ventajas

- Alta densidad de potencia, es decir en un tamaño compacto se puede desarrollar mucha potencia.
- Mejor desempeño en estado transitorio debido a la alta densidad de flujo en el entre hierro.
- Mayor eficiencia gracias al hecho de que imanes permanentes no absorben energía eléctrica, reduciendo las pérdidas de excitación.
- Construcción y mantenimiento más sencillos.
- Reducción del espacio de instalación requerido.
- Menor calentamiento debido a menores pérdidas, lo que conlleva mejor enfriamiento.
- Controlabilidad en su rango completo de par velocidad.

---

## Desventajas

- Mayor costo de fabricación a causa de los imanes permanentes.
- Posibilidad de desmagnetización de los imanes.
- Menor capacidad de modulación del flujo magnético.

## Clasificación de los PMSM

Los PMSM pueden clasificarse en función de la dirección de flujo del campo magnético en el rotor, lo que los divide en las dos categorías que se muestran a continuación:

1. Flujo radial: La dirección del flujo circula a lo largo del radio de la máquina.
2. Flujo axial: La dirección del flujo es paralela al eje del rotor.

Por otra parte, los motores PMSM pueden clasificarse en función de la configuración del estator, dando origen a dos categorías nuevamente:

1. Devanado distribuido: Son aquellos que cuentan con una cantidad de ranuras por polos mayores que 1.
2. Devanado concentrado: Cuenta solo con una ranura por polo y están espaciadas uniformemente alrededor de la circunferencia del motor y las bobinas que forman el devanado pueden conectarse en serie y paralelo.

Por último, pueden catalogarse en función del tipo de rotor utilizado.

1. Rotor de polos salientes: Poseen una inductancia de cuadratura diferente a la inductancia directa.
2. Rotor de polos superficiales: Poseen una inductancia de cuadratura y directa iguales  $L_d = L_q$

Dentro de las máquinas eléctricas el motor PMSM se clasifica de la manera que se muestra en la Figura 2.2 [13].

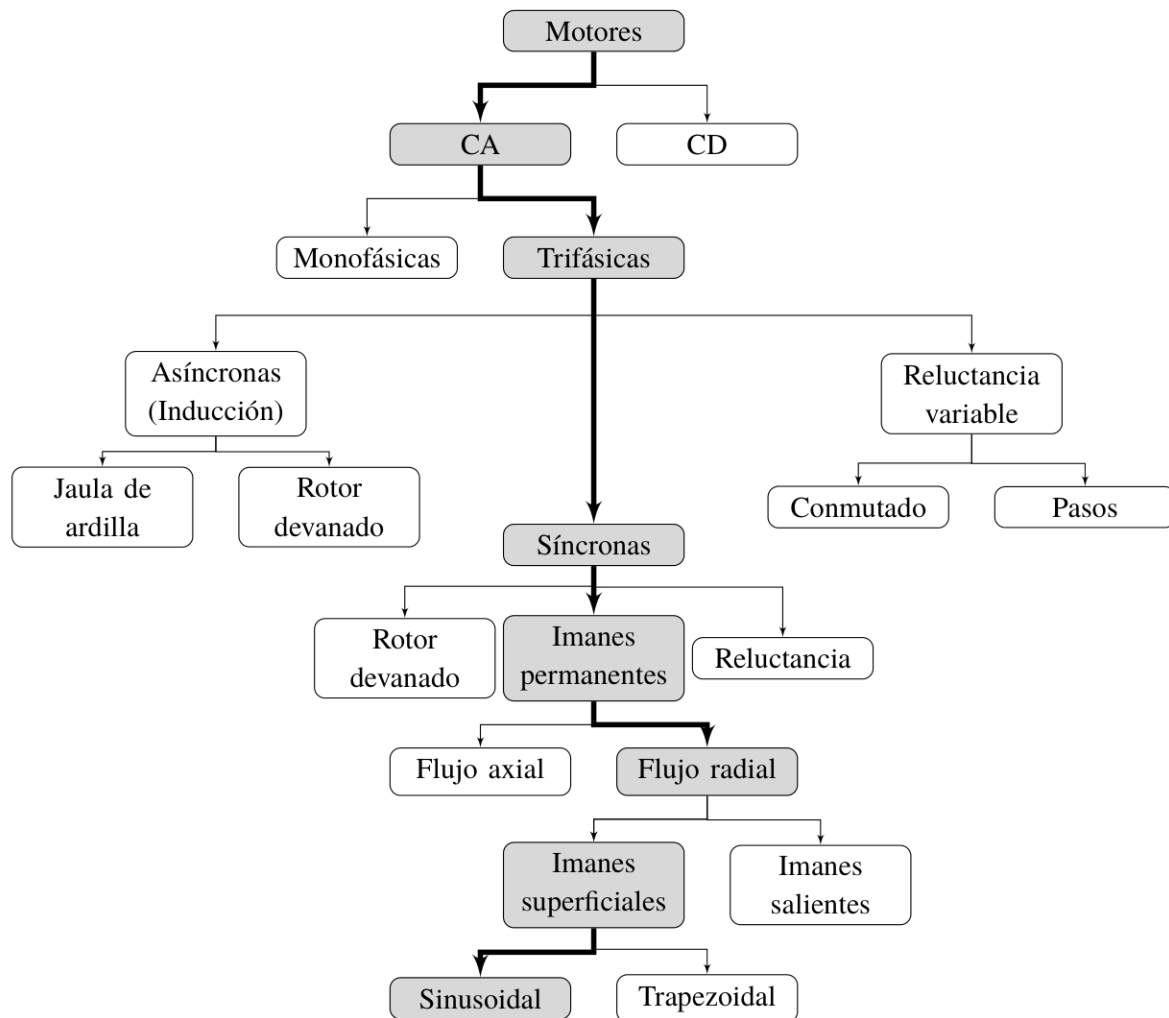


Figura 2.2: Clasificación de las máquinas eléctricas de [13].

El flujo radial cuenta con una alta aceleración y alta densidad de potencia, debido a las tales características es muy utilizado en la construcción del PMSM, en conjunto, con un rotor de imanes superficiales y un estator de devanado concentrado. La configuración previamente mencionada, cuenta con buenas características de funcionamiento a pesar de ser simple mecánicamente y por consecuencia la más económica.

### Funcionamiento

Para generar un par electromagnético, es necesaria la existencia de un flujo en el rotor y una fuerza magneto motriz del estator. Estos deben ser estacionarios entre sí, pero que tener un desplazamiento de fase entre ellos distinto de cero. En el PMSM, flujo necesario en el rotor es proporcionado por los imanes permanentes, mientras que, en el estator las corrientes que circulan en los devanados generan la fuerza magneto motriz. La velocidad relativa entre el flujo en el rotor y la fuerza magneto motriz del estator es cero únicamente si ambos giran a la misma velocidad y dirección.

La fuerza magneto motriz giratoria en el estator se obtiene inyectando un conjunto de corrientes polifásicas con desfase igual entre ellas, en los devanados polifásicos. Es decir, en una máquina de tres fases los devanados estarán desfasados en el espacio  $120^\circ$ , e igualmente, las corrientes inyectadas en dichos devanados exhiben un desfase de  $120^\circ$  grados eléctricos. Esa configuración produce un campo magnético giratorio de magnitud constante y con una frecuencia angular igual a la de las corrientes [18].

### Modo de operación

En las máquinas síncronas, la velocidad angular es proporcional a la frecuencia de la corriente de alimentación del bobinado de armadura, esto debido a que el rotor gira de manera sincronizada y a la misma velocidad que el campo magnético en rotación, el cual se genera como consecuencia de las corrientes que circulan en estator. En una máquina bipolar, cada ciclo de voltaje a través de la bobina es una revolución del rotor, es decir, la frecuencia eléctrica y la velocidad mecánica se sincronizan. Sin embargo, la mayoría de las máquinas síncronas presentan más de dos polos, lo conveniente en este caso es solamente centrarse en un par de polos y considerar el resto simplemente como repeticiones del anterior [19]. En una máquina multipolar,

---

un par de polos se considera como 360 grados eléctricos o  $2\pi$  radianes eléctricos. La relación de entre grados eléctricos y espaciales entonces, es la siguiente:

$$\theta_e = \frac{p}{2}\theta_m \quad (2.1)$$

Donde  $\theta_e$  es el ángulo eléctrico, mientras que  $\theta_m$  representa el ángulo mecánico y  $p$  representa el número de polos, o bien simplificando la notación.

$$\theta_e = n_p\theta_m \quad (2.2)$$

Donde  $n_p$  es número de pares de polos, sucede de igual manera el resto de dimensiones angulares, sus unidades eléctricas serán  $n_p$  veces las de los valores espaciales.

El devanado trifásico produce un campo magnético giratorio, cuya velocidad angular eléctrica  $\omega_e$  en [rad/s] es:

$$\omega_e = 2\pi f \quad (2.3)$$

Donde  $f$  es la frecuencia de los voltajes de estator en [Hz], manteniendo la relación antes mencionada la velocidad angular eléctrica es:

$$\omega_e = n_p\omega_m \quad (2.4)$$

La velocidad del eje, representada en revoluciones por minuto [rpm], denotada por  $\eta_m$ , se indica a continuación:

$$\eta_e = \frac{60}{n_p}f \quad (2.5)$$



## Operación es estado estacionario

En las máquinas síncronas, las características de operación en estado estacionario se describen mediante las interacciones de voltaje, corriente de inducido y factor de potencia. En estado estacionario el motor PMSM se alimenta con tres voltajes, cuya representación en el dominio del tiempo, está dada por la ecuación 2.6.

$$\begin{aligned}v_a &= V \cos \omega_e t \\v_b &= V \cos \omega_e t - 120^\circ \\v_c &= V \cos \omega_e t + 120^\circ\end{aligned}\tag{2.6}$$

Donde  $V$  es el voltaje pico y la velocidad angular eléctrica es  $\omega_e = 2\pi f$ . Donde  $V$  es el voltaje pico y  $\omega_e = 2\pi f$  es la velocidad angular. Puede notarse, que los tres voltajes tienen la misma frecuencia y magnitud, siendo el ángulo de fase la única diferencia. Estos voltajes también pueden representarse en forma fasorial como se muestra en la ecuación 2.7.

$$\begin{aligned}\hat{V}_a &= V \angle 0 \\ \hat{V}_b &= V \angle -120^\circ \\ \hat{V}_c &= V \angle +120^\circ\end{aligned}\tag{2.7}$$

Al igual que en los voltajes trifásicos, las corrientes que circulan por las fases pueden representarse en el dominio del tiempo o mediante su forma fasorial, como se puede ver en las ecuaciones 2.8 y 2.9.

$$\begin{aligned}i_a &= I \cos \omega_e t + \varphi \\ i_b &= I \cos \omega_e t + \varphi - 120^\circ \\ i_c &= I \cos \omega_e t + \varphi + 120^\circ\end{aligned}\tag{2.8}$$

Considerando que  $I$  es la corriente pico y  $\varphi$  es el ángulo entre voltaje y corriente.

$$\begin{aligned}\hat{I}_a &= I \angle \varphi \\ \hat{I}_b &= I \angle \varphi - 120^\circ \\ \hat{I}_c &= I \angle \varphi + 120^\circ\end{aligned}\tag{2.9}$$

Una vez definidos los voltajes y corrientes de alimentación, es necesario analizar los efectos de las impedancias y reluctancias, la manera más fácil de hacerlo es mediante de un diagrama fasorial. Un diagrama fasorial es una representación gráfica de los fasores de los voltajes y corrientes. El diagrama de voltajes y corrientes balanceados del PMSM se muestra en la Figura 2.3.

Lo que ocurre en una fase dentro la máquina síncrona en estado estacionario, no depende úni-

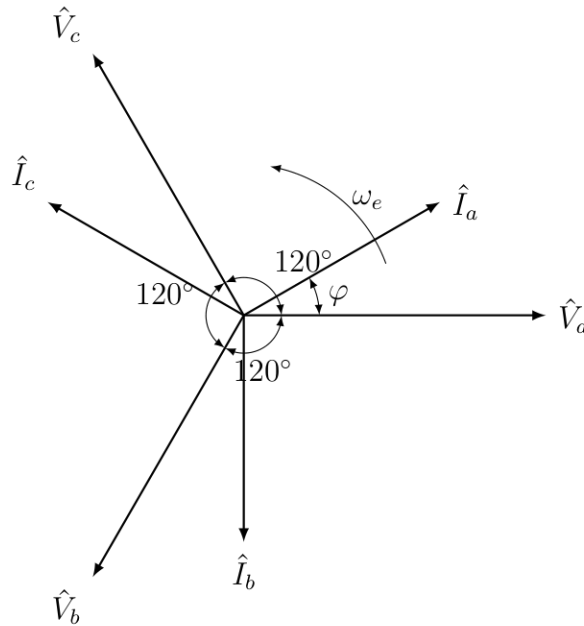


Figura 2.3: Diagrama fasorial de voltajes y corrientes balanceados de [21].

camente del voltaje en las terminales, se precisa también, de la resistencia en las bobinas del inducido, la auto inductancia en las bobinas de inducido y la distorsión del campo magnético del entrehierro. El estudio de estos tres efectos es parte del desarrollo del modelo de la máquina. Normalmente el más fuerte de los tres efectos es la distorsión de campo, llamada también reacción de inducido. Este efecto se produce a causa de la corriente que circula en la inductancia del

estator, es decir es producto de  $i_a$  circulando por  $L$ . Por su parte, la autoinductancia es definida como  $L_a$  y la resistencia en el estator es  $R_a$  [20].

Para transformar las corrientes y flujos a fasores, es necesario transformar también los elementos pasivos, resistencia  $R$ , inductor  $L$  y capacitor  $C$  del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Las resistencias no tienen cambio al hacer dicha transformación.

$$\begin{aligned} R &= R \\ X_L &= \omega_e L \\ X_C &= -\frac{1}{\omega_e C} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por lo que las reactancias en el dominio de la frecuencia serán las que se muestran en la ecuación 2.11.

$$\begin{aligned} R_a &= R_a \\ X &= \omega_e L \\ X_a &= \omega_e L_a \end{aligned} \tag{2.11}$$

Combinando las reactancias de inducido y la autoinductancia, se obtiene la reactancia síncrona.

$$X_s = X + X_a \tag{2.12}$$

Por tanto, el circuito equivalente del motor síncrono, es como se muestra en la Figura 2.4.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, obtenemos que:

$$\hat{V}_a = \hat{E}_a + \hat{I}_a X_s + \hat{I}_a R_a \tag{2.13}$$

El diagrama fasorial correspondiente a la ecuación 2.13 se muestra en la Figura 2.5.

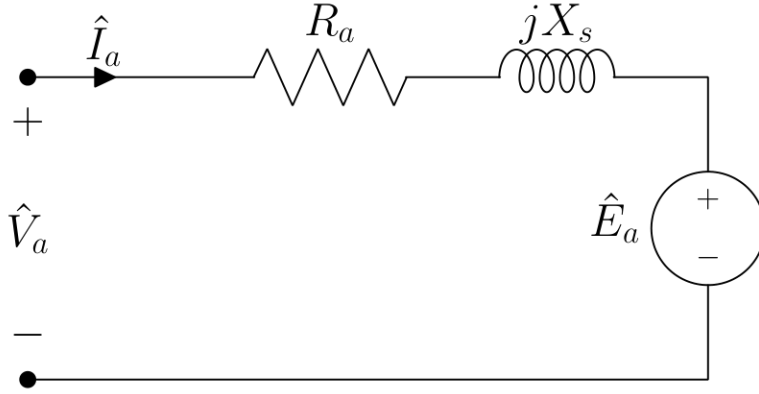


Figura 2.4: Diagrama equivalente modificado de [19].

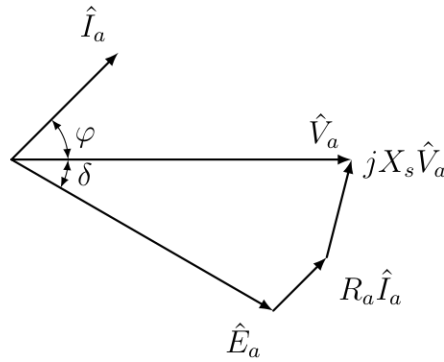


Figura 2.5: Diagrama fasorial de motor síncrono de [19].

## Pérdidas de potencia

La potencia máxima de un motor síncrono se determina mediante el par máximo que puede aplicarse sin pérdida de sincronía, sin embargo, la potencia mecánica de salida en el eje del motor, no es la misma que la potencia eléctrica entregada en los terminales de alimentación del mismo, esto debe a las pérdidas de potencia que ocurren en los elementos del motor. El flujo de la potencia en el motor se muestra en la Figura 2.6 [20], una parte de la potencia que entra al sistema se disipa en: pérdidas por resistencia, pérdidas en el núcleo, pérdidas por fricción y rozamiento. Mientras que la potencia restante es trasformada a potencia mecánica, esta se conoce como potencia electromagnética.

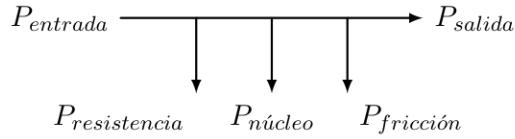


Figura 2.6: Flujo de potencia modificado de [20].

La Potencia eléctrica proporcionada en la alimentación puede calcularse mediante la ecuación 2.14.

$$P_{entrada} = 3VI \cos \varphi \quad (2.14)$$

Siendo  $\varphi$  el ángulo entre el voltaje y la corriente.

Las pérdidas por resistencia son consecuencia de la resistencia del cobre en los devanados de armadura, disipando Potencia en forma de calor denotadas por:  $P_{resistencia}$ , estas pérdidas se calculan mediante la siguiente ecuación 2.15 [22].

$$P_{resistencia} = 3I^2 R_a \quad (2.15)$$

Las pérdidas en el núcleo son causadas por la histéresis del cobre y corrientes parásitas en el metal del motor, el resto de las pérdidas son mecánicas, ocurren por la fricción y rozamiento del eje con los rodamientos que los sostienen a la carcasa o por la fricción del aire contra el rotor [21].

Por último, está la potencia electromagnética, de interés principal para el análisis en estado estacionario. La potencia electromagnética, es la que se consume en la “fuente” de voltaje  $\hat{E}_a$  del diagrama equivalente Figura 2.4. Se calcula como se muestra en 2.16.

$$\hat{S} = \hat{E}_a \hat{I}_a^* \quad (2.16)$$

Donde  $\hat{I}_a^*$  es el conjugado de la corriente  $\hat{I}_a$  y  $\hat{S}$  es la Potencia aparente [23]. Siendo  $\hat{I}_a$  y  $\hat{I}_a^*$  como se muestra en las ecuaciones 2.17 y 2.18.

$$\hat{I}_a = \frac{V_a - E_a}{R_a + jX_s} = \frac{V}{|Z|} \angle -\varphi - \frac{E}{|Z|} \angle -(\delta + \varphi) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_a^* &= \left| \frac{V_a - E_a}{R_a + jX_s} \right|^* = \frac{\hat{V}_a^*}{\hat{Z}} - \frac{\hat{E}_a^*}{\hat{Z}} \\ &= \frac{V}{|Z|} \angle \varphi - \frac{E}{|Z|} \angle (\delta + \varphi) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora, sustituyendo 2.18 en 2.16 tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{E}_a \hat{I}_a^* \\ &= \frac{VE}{|Z|} \angle (\varphi - \delta) - \frac{E^2}{|Z|} \angle \varphi \end{aligned} \quad (2.19)$$

De la ecuación 2.19, se obtiene que la Potencia Real  $P$  y la Potencia Reactiva  $Q$  por fase, se calculan mediante las ecuaciones 2.20 y 2.21.

$$P = \frac{VE}{|Z|} \cos(\varphi - \delta) - \frac{E^2}{|Z|} \cos \varphi \quad (2.20)$$

$$Q = \frac{VE}{|Z|} \sin(\varphi - \delta) - \frac{E^2}{|Z|} \sin \varphi \quad (2.21)$$

Entonces la Potencia electromagnética total en las tres fases será  $P_{salida} = 3P$ . Ahora, si se desprecia la resistencia  $R$  tenemos que  $Z_s = X_s$  y  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , sustituyendo en 2.20 tenemos:

$$P_{salida} = 3 \frac{VE}{|X_s|} \sin \delta \quad (2.22)$$

Nótese, que la potencia máxima en la salida se desempeña cuando  $\delta$ , también conocido como ángulo de par, es igual a  $\frac{\pi}{2}$ . El ángulo  $\delta$  que hay entre  $\hat{V}_a$  y  $\hat{V}_a$  es positivo para la acción generadora y negativo para la acción motriz, como se muestra en la Figura 2.7. Este ángulo juega un papel importante en la transferencia de potencia y en la estabilidad del funcionamiento de la máquina síncrona. Por último, una vez calculada la potencia efectiva que se trasmite al eje, el troque

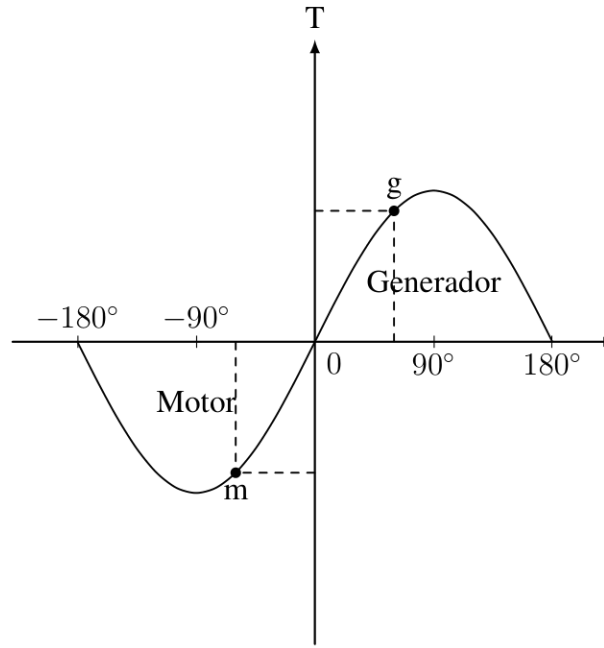


Figura 2.7: Descripción de ángulo de par de [20].

desempeñado por el mismo puede calcularse en función de la potencia, como se muestra en 2.23.

$$T = \frac{P}{\omega} \quad (2.23)$$

Siendo entonces:

$$T_{max} = \frac{P_{salida}}{\omega_s} \quad (2.24)$$

---

## **Inversores y accionadores**

En la década de 1950, además de los imanes permanentes, se introdujeron los transistores de potencia y dispositivos rectificadores basados en silicio [18], dando origen a los inversores. Los inversores son sistemas electrónicos para la gestión de energía eléctrica, permitiendo tomar potencia de una fuente de alimentación fija para transformarla en una fuente de amplitud y frecuencia variable. Usualmente, este proceso implica el uso de una fuente de energía eléctrica de corriente alterna con amplitud y frecuencia fijas, que posteriormente se convierte en una fuente de corriente continua por medio de un rectificador. Finalmente es el inversor quien se encarga de transformar dicha fuente de CD en una fuente de energía eléctrica con amplitud y frecuencia variables [24]. Los inversores conmutados de CD a CA son utilizados para alimentar motores de CA y, además, como fuentes de alimentación no interrumpibles, donde el objetivo es producir una salida sinusoidal de CA con magnitud y frecuencia controlables.

### **Topologías básicas de los inversores**

En la industria son utilizadas dos distintas topologías capaces de cumplir los requerimientos de las fuentes de CA utilizadas por las máquinas eléctricas.

1. Monofásica.
2. Trifásica.

Para optimizar el desempeño de un inversor existen dos conceptos importantes relacionados con estos tipos de convertidores, dichos conceptos son los siguientes:

- La estrategia de modulación: que busca aprovechar al máximo la tensión continua de entrada y minimizar los componentes armónicos en la salida.



- La arquitectura de aislamiento galvánico: que se utiliza en los controladores y los interruptores electrónicos que forman parte del inversor.

Teniendo en cuenta lo anterior, estas topologías se pueden subclasificar según la fuente de alimentación, como se describe a continuación:

**VSI** Inversores de fuente de voltaje.

1. Inversores modulados por ancho de pulsos.
2. Inversores de onda cuadrada.
3. Inversores monofásicos con cancelación de voltaje.

**CSI** Inversores de fuente de corriente.

La topología CSI es utilizada especialmente para accionar motores del muy alta potencia, mientras que la topología VSI es en la práctica más popular, debido sus a prestaciones físicas y de rendimiento.

Un VSI consta de las terminales de alimentación para el ingreso de CD, tres terminales de salida, cada una con dos interruptores electrónicos de potencia y diodos de flujo libre conectados en los interruptores para facilitar su apagado como se muestra en la Figura 2.8.

Los interruptores se encienden y apagan a alta frecuencia mediante circuitos de conducción, a través de los cuales circulan las señales generadas por el sistema de control, proporcionando salidas aisladas hacia las compuertas del interruptor. En un inversor, los interruptores funcionan en modo de conmutación, lo que implica alternar entre dos estados de funcionamiento: el modo de conducción o encendido, y en modo de no conducción o apagado. Los interruptores se conectan con las terminales de salida del inversor, siendo VCD, 0, - VCD respectivamente. Los dos interruptores de la misma terminal tienen estados opuestos, con el objetivo de evitar un corto circuito entre los interruptores.

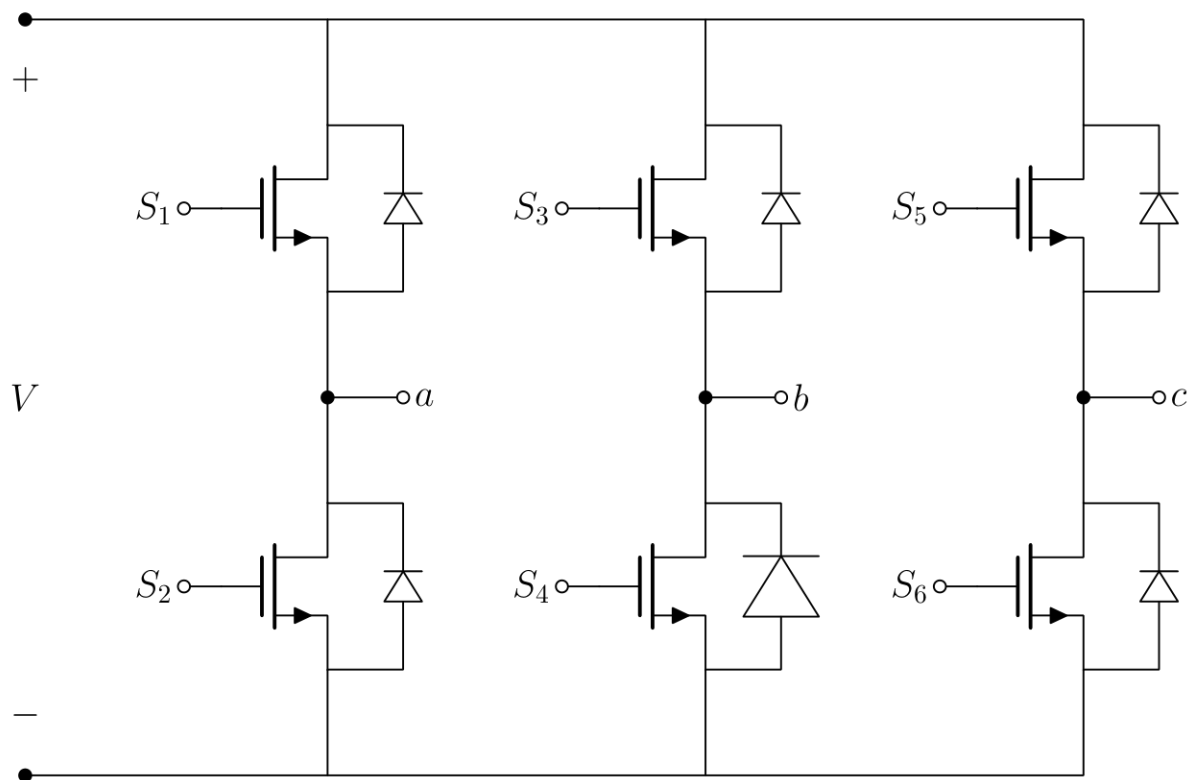


Figura 2.8: Circuito eléctrico de un inversor trifásico modificado de [22].

Los estados de conmutación cumplen una secuencia específica con el propósito de producir un voltaje y una frecuencia variable en las terminales de salida del inversor. Los sistemas de Modulación de Ancho de Pulso por sus siglas en inglés (*Pulse Width Modulation* PWM), controlan la conmutación para obtener los voltajes deseados en los terminales de salida del inversor. Estos esquemas producen las señales de activación de los interruptores electrónicos mediante una proyección de las señales de voltaje comandadas, los dos métodos PWM más utilizados son: el PWM sinusoidal y el PWM trapezoidal.

El PWM sinusoidal compara los tres voltajes de fase generados por el control con una señal portadora triangular de frecuencia fundamental  $f$ , la comparación de la intersección de las señales determina los puntos de conmutación de los interruptores electrónicos. Este método se llama sub armónico o sub oscilación, los anchos de pulso varían de manera sinusoidal con la misma

frecuencia que la fundamental, mientras su amplitud es proporcional al voltaje de la señal de control. Con este método es posible usar la misma onda portadora para las tres fases sin ningún inconveniente.

### **Esquema de control para motores de CA**

En el ámbito de los sistemas de accionamiento de alto rendimiento, el objetivo principal es lograr un control que garantice una respuesta dinámica rápida y un comportamiento estable en las máquinas de Corriente Alterna (CA). Para alcanzar este objetivo, se emplean diversas técnicas destinadas a regular la velocidad, el flujo y el par de los motores de CA. Sin embargo, los parámetros de control convencionales, como el voltaje y la frecuencia de los voltajes y corrientes aplicados, resultan insuficientes para obtener un control de alto rendimiento de las máquinas en cuestión. En la Figura 2.9 se muestra el esquema de control utilizado de acuerdo a su clasificación.

En este contexto, se ha introducido el convertidor electrónico de potencia para controlar la interfaz entre la red de suministro y los motores eléctricos. En la mayoría de los casos, se emplean convertidores de CA-CD-CA, también conocidos como inversores, en los accionamientos de máquinas de CA, estos convertidores son altamente complejos y se utilizan para alimentar los motores en aplicaciones que requieren velocidad ajustable. Además de los convertidores de CA-CD-CA, existen otras alternativas, como: los convertidores de CA-CA directos, el ciclo convertidor y el convertidor de matriz [25].

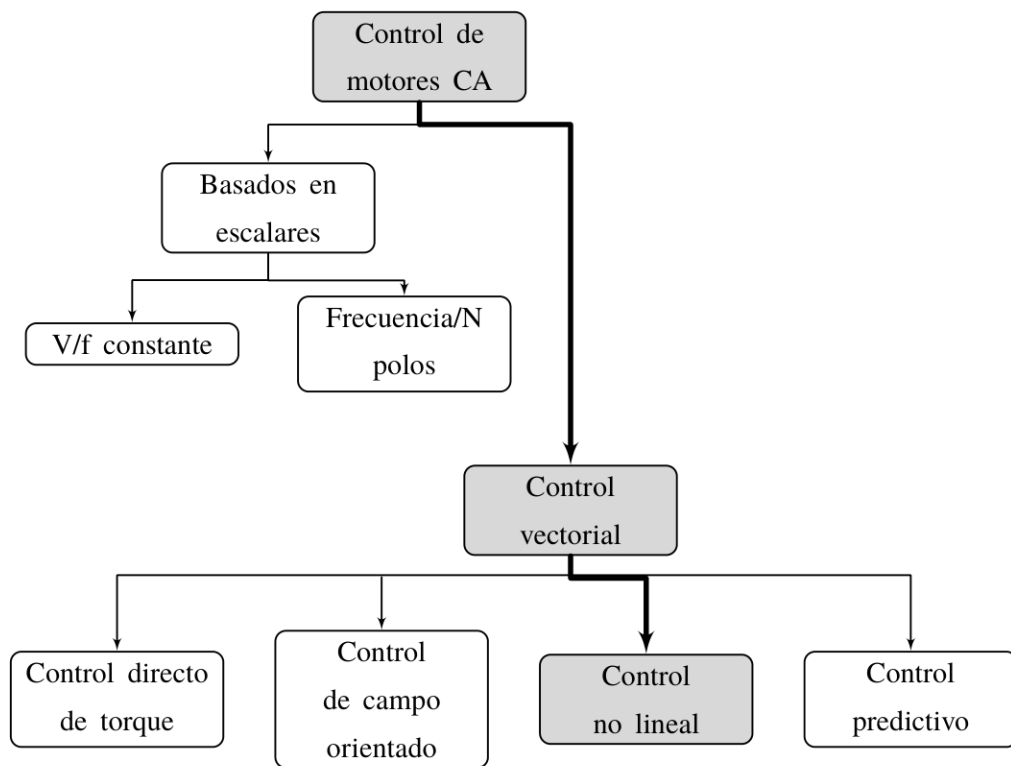


Figura 2.9: Esquemas de control.

# Control por modos deslizantes (SMC)

---

## Contexto histórico

La mayoría sistemas físicos precisan la implementación de términos discontinuos en su dinámica, puesto que en todo modelo mecánico surgen términos discontinuos, como la fricción. Este hecho ha sido aprovechado ampliamente desde principios del siglo XX para la regulación de sistemas dinámicos. Sin embargo, a mediados del siglo XX, la llegada de la teoría de las ecuaciones diferenciales con lados derechos discontinuos, establecido las bases para estrategias de control con retroalimentación discontinua o teoría de sistemas de estructura variable. En este enfoque las entradas de control toman valores de un conjunto discreto, que pueden ser estados de un interruptor o un conjunto de funciones de control por retroalimentación prediseñadas. La lógica de conmutación se diseña de manera tal que la dinámica del sistema en lazo cerrado, sea dominada por una propiedad de contracción, causando la estabilización de conmutador y con ello induciendo trayectorias deseadas. Con esos principios como base surge el control por modos deslizantes en la década de 1950 [26].

---

## Características

La principal característica de esta técnica, es la elección de una superficie de conmutación del espacio de estados, capaz de cumplir las especificaciones dinámicas deseadas del sistema en bucle cerrado. La lógica de conmutación y, por tanto, la ley de control, están diseñadas de modo que las trayectorias de estado lleguen a la superficie y permanezcan en ella.

Una vez elegida la Función de Deslizamiento Restrictivo, o por sus siglas en inglés (*Constraint Sliding Function* CSF), de acuerdo con las especificaciones de diseño, ya sea la dinámica estabilizadora o seguimiento, pueden aparecer dos dificultades:

- La CSF debe ser de grado relativo uno. En otras palabras, al realizar una única diferenciación una vez para esta función con respecto al tiempo, debe surgir el término de control. Este requisito garantiza la existencia de un movimiento deslizante.
- La CSF puede ser definida en función de la totalidad del estado, y no limitarse a las salidas medidas.

Para evitar la primera dificultad se puede usar una nueva CSF de grado relativo uno, esto puede hacerse reescribiendo las ecuaciones, otra opción es el diseño de un controlador de orden superior. Por otra parte, para la segunda dificultad, cuando la CSF depende de otras variables además de los medidos, puede usarse un observador que proporcione una solución natural.

**Las principales ventajas de este método son:**

- Su robustez frente a una gran clase de perturbaciones o incertidumbres del modelo.
- La necesidad de una cantidad reducida de información en comparación con las técnicas de control clásicas.

- La posibilidad de estabilizar algunos sistemas no lineales que no son estabilizables mediante leyes de retroalimentación de estado continuo.

Ahora, se han vuelto más populares en la comunidad industrial, debido a su solidez, facilidad de implementación y aplicabilidad a problemas complejos. Se han desarrollado aplicaciones como: Control de motores eléctricos DTC, observadores y reconstrucción de señales, sistemas mecánicos, control de robots y manipuladores, entre otros [26].

### Origen

El interés en el “Control por Modos Deslizantes” se remonta a varios años atrás, debido las diversas características que lo distinguen. Entre ellas destacan su simplicidad de diseño, su resistencia a variaciones dinámicas y perturbaciones externas, así como su capacidad de operar tanto en regulación como en control de trayectoria.

El Control por Modos Deslizantes surgió en el contexto de la búsqueda de las hoy denominadas leyes robustas de control. A principios de la década de 1960, se presentaba la necesidad de desarrollar un control que fuera insensible a las variaciones del sistema a controlar, ya que en ese entonces no existía un método capaz de proporcionar una compensación adecuada para emplear las altas ganancias requeridas para lograr la insensibilidad paramétrica.

La técnica de Control por Modos Deslizantes es esencialmente una consecuencia del control discontinuo, ya que parte de su forma más sencilla, el control bang bang. El desarrollo de esta técnica llevó a la solución de problemas de sintonización, desde linealización y robustez, hasta optimización del tiempo [26].

---

## Consideraciones de diseño

En el control no lineal robusto, como el Control por Modos Deslizantes, el diseño se sustenta en el modelo nominal del sistema y contempla alguna caracterización de las incertidumbres del sistema. Además, hace uso de mediciones de estado del sistema. El modelo matemático se construye a manera de una descripción matemática del sistema físico a controlar. Sin embargo, los modelos muy precisos no siempre son los mejores, ya que pueden requerir un análisis y diseño innecesariamente complejos, por ello se mantiene solo lo esencial y se descarta lo insignificante en la dinámica. No obstante, para el control no lineal el modelado debe proporcionar una caracterización de las incertidumbres de modelo además del modelo mismo.

No existe un método general para diseño, sino una colección de técnicas alternativas y complementarias, ya que el objetivo es desarrollar un controlador justificable mediante análisis y simulaciones. Las tareas de control, debido a los efectos de la no linealidad, requieren movimientos de largo alcance, alta velocidad o una combinación de ambos. Estas tareas se clasifican en dos tipos: regulación o estabilización. Su implementación puede ser mediante un regulador o un rastreador respectivamente. Un regulador lleva la salida a un punto de equilibrio, mientras que, un rastreador realiza un seguimiento de forma que la salida trace una trayectoria que varía con el tiempo. En ambos casos el objetivo es reducir a cero el error en la salida, para ello se utiliza el concepto de estabilidad asintótica y robustez. El seguimiento asintótico implica que en lazo cerrado los estados iniciales adecuados alcanzan un error de seguimiento cero de manera asintótica, es decir, comenzando en cualquier parte, el error tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Por su parte la robustez es la sensibilidad a los efectos no considerados en el sistema, perturbaciones, ruido de medición y dinámica no modelada. La robustez es resistente a perturbaciones persistentes en el comportamiento del sistema. Por lo cual es relevante cuando se busca garantizar la estabilidad en el modelo nominal, la precisión y respuesta de trayectorias.

Con el objetivo de obtener seguimiento asintótico, durante el diseño se parte de la suposición de que la trayectoria deseada cuenta con derivadas continuas y acotadas de orden igual al sistema.



Además, se asume que el estado a controlar y sus derivadas están disponibles. Sin embargo, en algunos casos lo anterior no se cumple, por lo que es necesario hacer un modelo de referencia para obtener las señales derivadas requeridas. Para que la estimación de las señales requeridas logre su cometido, debe ser suficientemente rápida y cercana a la señal. Muchos controladores usan retroalimentación anticipada, sumada a la retroalimentación del sistema, esto para cancelar los efectos de todas las perturbaciones conocidas, obteniendo estabilidad del sistema. Lo anterior se hace mediante observadores de orden superior con el fin de aumentar la robustez aprovechando la flexibilidad extra que estos otorgan. Es decir, la estimación de variables es de utilidad para el desarrollo del control y la robustez del mismo ayudando a mejorar el desempeño del sistema [1].

## Fundamentos teóricos

### Superficies deslizantes

Considerando un sistema dinámico de una sola entrada tal que:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(x)u \quad (3.1)$$

Donde  $x$  es la salida  $u$  la entrada de control,  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  es el vector de estado.

En la ecuación 3.1, la función  $f(x)$ , que en general es no lineal. No es exactamente conocida, pero su imprecisión está acotada superiormente, por una función de  $x$  continua y conocida. De manera similar, la ganancia de control  $b$  es desconocida, pero se conoce su signo y está limitada por funciones de  $x$  continuas y conocidas.

La problemática del diseño de control radica en obtener un estado  $x$  para realizar el seguimiento de un estado específico variante en el tiempo  $x_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$  en presencia de la

---

imprecisión de  $f(x)$  y  $b(x)$ . Para que la tarea de seguimiento sea posible usando un control finito  $u$  el estado inicial deseado  $x_d(0)$  debe ser:

$$x_d(0) = x(0) \quad (3.2)$$

En un sistema de segundo orden, por ejemplo, la velocidad y posición no puede dar “saltos”, por lo que, si no se desea un transitorio, la trayectoria deseada para  $t = 0$  necesariamente debe iniciar en la misma posición y velocidad que la planta [1].

Ahora para simplificar la notación, siendo  $\bar{x} = x - x_d$  el error de seguimiento de la variable  $x$  entonces:

$$\bar{x} = x - x_d = [\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(n-1)}]^T$$

Es el vector del error de seguimiento. Lo que nos permite definir una superficie variante en el tiempo  $S(t)$  en el espacio de estados  $\mathbf{R}^n$  para la ecuación escalar  $s(x; t) = 0$  dada por 3.3.

$$s(x; t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \bar{x} \quad (3.3)$$

Donde  $\lambda$  es una constante estrictamente positiva.

Por ejemplo, si  $n = 2$

$$s = \dot{\bar{x}} + \lambda \bar{x}$$

Vemos entonces que  $s$  es simplemente una suma ponderada del error de posición y el error de velocidad.

Con  $n = 3$  tendremos:

$$s = \ddot{\bar{x}} + 2\lambda\dot{\bar{x}} + \lambda^2\bar{x}$$

Dada la condición inicial 3.2, el problema de seguimiento  $x \equiv x_d$  es equivalente a permanecer en la superficie  $S(t)$  para todo  $t > 0$ . Así  $s \equiv 0$  representa una ecuación diferencial cuya única solución es  $\bar{x} \equiv 0$  dadas las condiciones iniciales de 3.2. Por lo tanto, el seguimiento del vector  $n$ -dimensional  $x_d$  puede reducirse a mantener el valor escalar de  $s$  en cero. Es decir, el problema original de seguimiento en  $x$ , puede reemplazarse por un problema de estabilización de primer orden en  $s$ .

Partiendo de 3.3 podemos observar que la expresión de  $s$  contiene a  $\bar{x}^{(n-1)}$  y se solo se debe diferenciar  $s$  una vez, para que la entrada de control  $u$  aparezca. Además, los límites de  $s$  pueden ser directamente traducidos a los límites de seguimiento del vector de error  $\bar{x}$ , por lo tanto,  $s$  representa una medición real del desempeño del seguimiento. Específicamente asumiendo que  $\bar{x} = 0$  podemos obtener que:

$$\forall t \geq 0, |s(t)| \leq \Phi \implies \forall t \geq 0, |\bar{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon \quad (3.4)$$

Donde  $\varepsilon = \Phi / \lambda^{(n-1)}$ .

Partiendo de la definición de 3.3, tenemos que el error de seguimiento  $\bar{x}$  puede ser obtenido de  $s$  a través de una secuencia de filtros pasa bajas de primer orden, como se muestra en la Figura 3.1 donde  $p = \frac{d}{dt}$  es el operador de Laplace,  $y_1$  es la salida del primer filtro y se denota por la expresión 3.5.

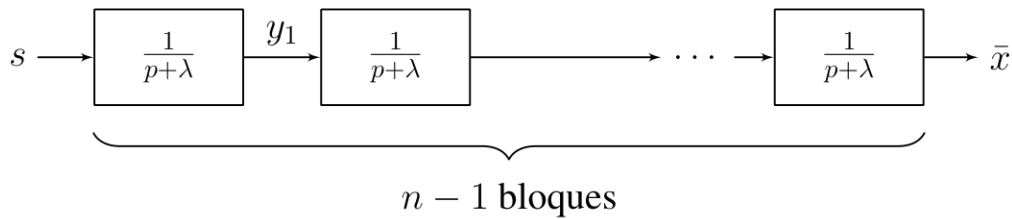


Figura 3.1: Cálculo de límites en  $\bar{x}$  de [1].

$$y_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-T)} s(T) dT \quad (3.5)$$

De  $|s| \leq \Phi$  tenemos:

$$|y_1(t)| \leq \Phi \int_0^t e^{-\lambda(t-T)}(T) dT = (\Phi/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) \leq \Phi/\lambda$$

Podemos aplicar el mismo razonamiento al filtro de segundo orden y así sucesivamente hasta  $y_{n-1} = \bar{x}$  y entonces obtenemos:

$$|\bar{x}| \leq \Phi/\lambda^{n-1} = \varepsilon$$

De forma similar  $\bar{x}^{(i)}$  puede considerarse como obtenida a través de la Figura 3.2 de la cual, se tiene  $|z_1| \leq \Phi/\lambda^{n-1-i}$  donde  $z_1$  es la salida del filtro  $(n - i - 1)$  además tomando nota de que:

$$\frac{p}{p + \lambda} = \frac{p + \lambda - \lambda}{p + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{p + \lambda}$$

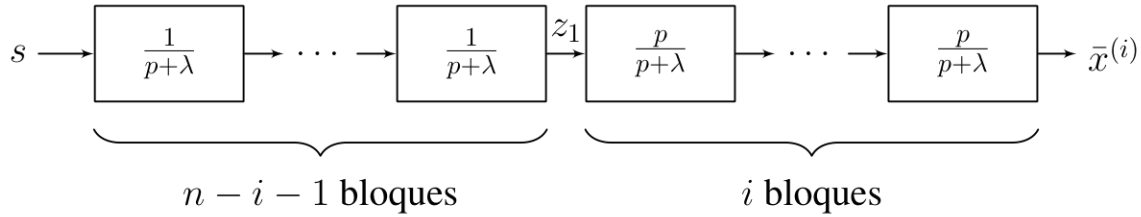


Figura 3.2: Cálculo de límites en  $\bar{x}^{(i)}$  de [1].

La secuencia de la Figura 3.2 implica que:

$$|\bar{x}^{(i)}| \leq \left( \frac{\Phi}{\lambda^{n-1-i}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\lambda} \right) = (2\lambda)^i \varepsilon$$

Por lo tanto, los límites están dados por 3.4, finalmente en caso de que  $\bar{x}(0) \neq 0$  los límites 3.4 se obtienen asintóticamente dentro de una constante de tiempo  $(n - 1)/\lambda$ .

El problema de primer orden simplificado de mantener el escalor  $s$  en cero, puede lograrse eli-

giendo una ley de control  $u$  de 3.1 de tal manera que fuera de la superficie  $S(t)$  se cumpla que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \leq -\eta |s| \quad (3.6)$$

Esencialmente, 3.6 establece que el cuadrado de la distancia a la superficie, es medido como  $s^2$  y disminuye a lo largo de toda la trayectoria del sistema, por lo tanto, restringe las trayectorias para que apunten hacia la superficie  $S(t)$ , como se muestra en la Figura 3.3.

Una vez en la superficie, la trayectoria del sistema permanece en ella, ya que satisface la condición 3.6 o condición deslizante, haciendo que la superficie sea un conjunto invariante. Además, como puede verse en 3.6, algunas perturbaciones o dinámicas inciertas pueden ser toleradas mientras se mantiene la superficie invariable. Gráficamente esto corresponde con lo mostrado en la Figura 3.3, las trayectorias pueden “moverse” mientras continúen apuntado a la superficie. Aquella  $S(t)$  que cumple 3.6 se denomina superficie deslizante, y el comportamiento del sistema una vez en la superficie, se denomina régimen deslizante o modo deslizante.

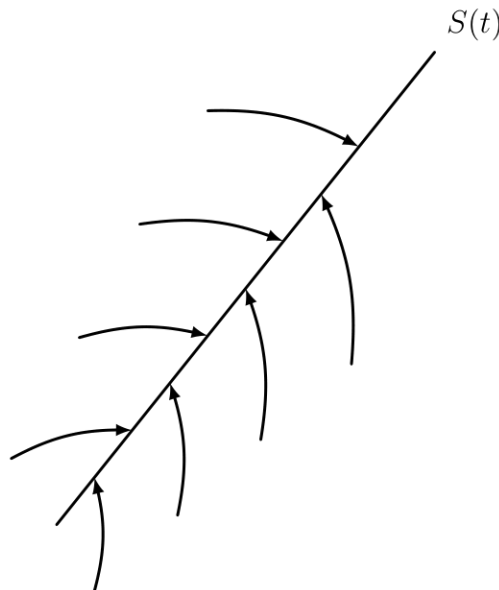


Figura 3.3: Condición deslizante de [1].

Otro aspecto interesante del conjunto invariante  $S(t)$  es que una vez en él, las trayectorias del

---

sistema están definidas por la ecuación del propio conjunto.

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \bar{x} = 0$$

En otras palabras, la superficie  $S(t)$  es tanto un lugar como la dinámica. Este hecho es una interpretación geométrica de la observación anterior, el cual señala que la definición 3.3 nos permite remplazar un sistema de enésimo orden por uno de primer orden.

Finalmente satisfaciendo 3.6 se garantiza que si la condición 3.2 no se verifica exactamente, es decir si  $x(t = 0)$  está fuera de  $x_d(t = 0)$ , la superficie  $S(t)$  puede ser alcanzada en un finito periodo de tiempo menor que  $|s(t = 0)|/\eta$ .

Asumiendo, por ejemplo, que  $s(t = 0) > 0$  y que  $t_{alcance}$  es el tiempo requerido para alcanzar la superficie  $s = 0$  e integrando 3.6 entre  $t = 0$  y  $t = t_{alcance}$  tenemos que:

$$0 - s(t = 0) = s(t = t_{alcance}) - s(t = 0) \leq -\eta(t_{alcance} - 0)$$

Lo que implica que:

$$t_{alcance} \leq s(t = 0)/\eta$$

Se podría obtener un resultado similar empezando con  $s(t = 0) < 0$  y de este modo:

$$t_{alcance} \leq |s(t = 0)|/\eta$$

Además, la definición 3.3 implica que una vez en la superficie el error de seguimiento tiende exponencialmente a cero con una constante de tiempo  $(n - 1)/\lambda$ .

El sistema típicamente implementado para satisfacer la condición 3.6 es ilustrado en la Figura 3.4 para  $n = 2$ . La superficie deslizante es una línea en el plano de fase con pendiente  $-\lambda$  y contrayéndose al punto variante en el tiempo  $x_d = [x_d, \dot{x}_d]^T$  empezando con una condición inicial cualquiera, la trayectoria de estado alcanza la superficie variante en el tiempo, en un tiempo finito

menor que  $|s(t=0)|/\eta$  y luego se desliza por la superficie exponencialmente con una constante de tiempo igual a  $1/\lambda$ .

En resumen, la idea principal de la ecuación 3.3 y 3.6 es tomar una función con buen desempeño

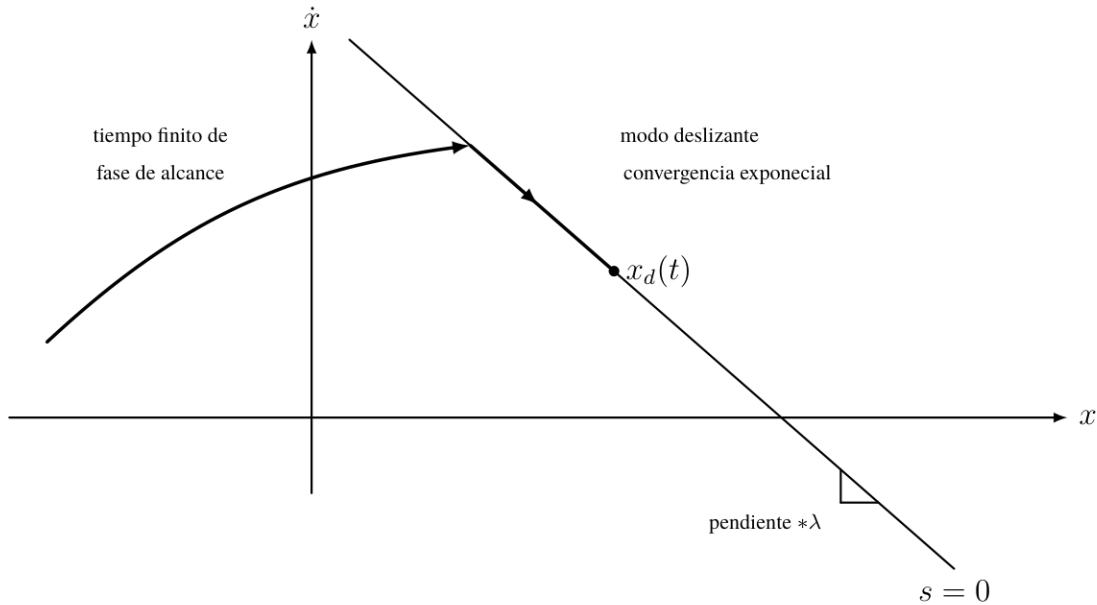


Figura 3.4: Interpretación gráfica de las ecuaciones 3.3 y 3.6 de [1].

en el seguimiento del error  $s$ , de acuerdo con 3.3, luego seleccionar una ley de control por retroalimentación  $u$  de tal manera que  $s^2$  permanezca como una función tipo Lyapunov del sistema en lazo cerrado, a pesar de la presencia de imprecisiones del modelo y las perturbaciones.

El procedimiento del diseño del controlador consta de dos pasos. Primero como se mostró, una ley de control por retroalimentación  $u$  es seleccionada para verificar la condición de deslizamiento. Sin embargo, para considerar las imprecisiones del modelo y las perturbaciones, la ley de control debe ser discontinua a través de  $S(t)$ . Dado que el control por conmutación es imperfecto, lo que provoca la existencia de cascabeleo, este no es deseable en la práctica, ya que implica una alta actividad de control y con ello una activación de la dinámica de alta frecuencia descuidada durante el modelado (modos de frecuencia sin modelar, retardos no considerados etc.).

Por lo que la ley de control discontinuo  $u$  se suaviza adecuadamente para lograr un equilibrio óptimo entre el ancho de banda de control y la precisión de seguimiento.

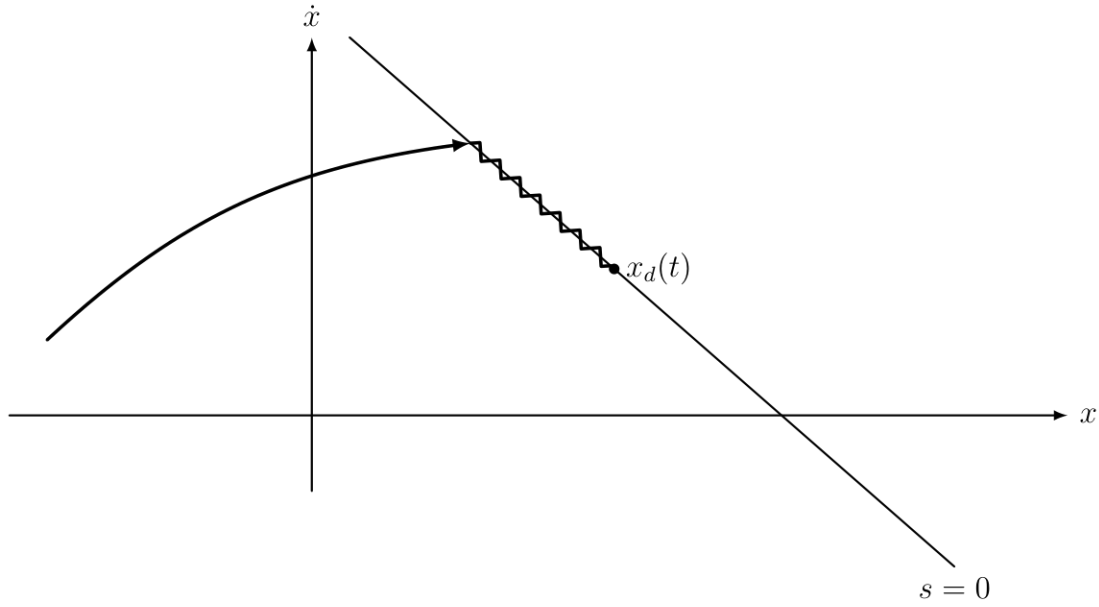


Figura 3.5: Cascabeleo como resultado de un control imperfecto de conmutación de [1].

## Dinámica equivalente de Filipov

Los sistemas en movimiento sobre la superficie deslizante, pueden dar una interesante interpretación geométrica como un promedio de la dinámica el sistema a ambos lados de la superficie.

La dinámica en modo deslizante puede escribirse como:

$$\dot{s} = 0 \quad (3.7)$$

Al resolver formalmente la ecuación para la entrada de control podemos obtener una expresión para  $u$  llamada control equivalente  $u_{eq}$ , que puede ser interpretada como una ley de control continua que mantiene  $\dot{s} = 0$  si la dinámica es exactamente conocida. Por ejemplo, para el sistema

$$\ddot{x} = f + u$$



Tenemos:

$$u_{eq} = -f + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}$$

La dinámica del sistema en modo deslizante es:

$$\ddot{\tilde{x}} = f + u_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}$$

Geométricamente la equivalencia del control, se puede construir:

$$u_{eq} = \alpha u_+ + (1 - \alpha) u_- \quad (3.8)$$

Como una combinación convexa de los valores de  $u$  para los dos lados de la superficie  $S(t)$ , el valor de  $\alpha$  puede ser obtenido formalmente de 3.7 que corresponde al requerimiento de que las trayectorias del sistema sean tangentes a la superficie, la construcción intuitiva está resumida en la Figura 3.6 donde  $f_+ = [\dot{x} \ f + u_+]$  y de forma similar  $f_- = [\dot{x} \ f + u_-]$  y  $f_{eq} = [\dot{x} \ f + u_{eq}]$ . La justificación formal fue derivada por el matemático ruso A.F. Filippov [27].

Regresando a lo anterior, el movimiento deslizante corresponde a un comportamiento limitante

$$s < 0$$

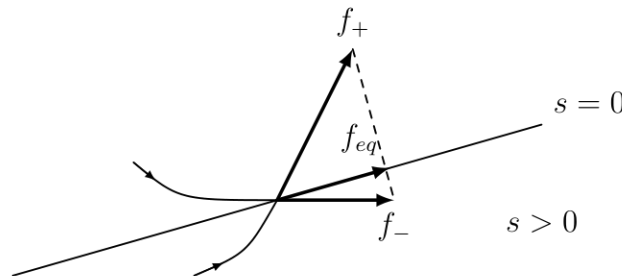


Figura 3.6: Construcción de Filippov de la dinámica equivalente en modo deslizante de [1].

por las conmutaciones de control producidas infinitamente rápido, la solución formal a  $\alpha$  de 3.7 y de 3.8 puede interpretarse como la resistencia promedio de la trayectoria en el lado  $s > 0$ .

---

Dados los límites de las incertidumbres en  $f(x)$  y  $b(x)$  construir la ley de control que verifique la condición deslizante 3.6 es sencillo. Ejemplo básico:

$$\ddot{x} = f + u \quad (3.9)$$

Donde  $u$  es la entrada de control y  $x$  es la salida escalar de interés y la dinámica  $f$  (posiblemente no lineal) no es exactamente conocida, pero puede ser estimada como  $\hat{f}$ . El error de estimación en  $f$  se asume como un límite de alguna función conocida  $F = F(x, \dot{x})$ .

$$|\hat{f} - f| \leq F \quad (3.10)$$

Por ejemplo, en el sistema dado:

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2 \cos 3x = u \quad (3.11)$$

Donde  $a(t)$  es desconocida, pero cumple que:

$$1 \leq a(t) \leq 2$$

Tenemos que:

$$\hat{f} = -1,5\dot{x}^2 \cos 3x \quad F = 0,5\dot{x}^2 |\cos 3x|$$

Con el fin de tener un sistema de seguimiento  $x(t) \equiv x_d(t)$  definimos la superficie deslizante  $s = 0$  de acuerdo a 3.3.

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \bar{x} = \dot{\bar{x}} + \lambda \bar{x} \quad (3.12)$$

Tenemos:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (3.13)$$

La mejor aproximación  $\hat{u}$  de una ley de control continua que alcanza  $\dot{s} = 0$  es:

$$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (3.14)$$

Note que  $\hat{u}$  puede ser interpretada como la mejor estimación del control equivalente. Con el fin de satisfacer la condición deslizante 3.6 a pesar de la incertidumbre de la dinámica  $f$  añadimos a  $\hat{u}$  un término discontinuo a través de la superficie  $s = 0$ :

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s) \quad (3.15)$$

Donde  $\operatorname{sgn}$  es la función signo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(s) &= +1 & \text{si} & \quad s > 0 \\ \operatorname{sgn}(s) &= -1 & \text{si} & \quad s < 0 \end{aligned}$$

Eligiendo  $k = k(x, \bar{x})$  en 3.15 lo suficientemente grande podemos garantizar que 3.6 se cumple entonces de 3.13 y 3.15 tenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = \dot{s} \cdot s = [f - \hat{f} - k \operatorname{sgn}(s)]s = (f - \hat{f})s - k|s|$$

Haciendo:

$$k = F - \eta \quad (3.16)$$

---

De 3.10:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

Note de 3.16 que la discontinuidad de control  $k$  a través de la superficie  $s = 0$  incrementa con el aumento de la incertidumbre paramétrica, también note que  $\hat{f}$  y  $F$  necesitan solo depender de  $x$  o  $\dot{x}$ . De forma general, deben ser funciones de alguna variable medida, externa al sistema y depender solo explícitamente del tiempo  $t$ .

## Control integral

Un resultado similar puede ser obtenido usando un control integral. Formalmente haciendo  $\int_0^t \bar{x}(r) dr$  como la variable de interés el sistema 3.9 se vuelve ahora de tercer orden relativo a esta variable:

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \left( \int_0^t \bar{x} dr \right) = \dot{\bar{x}} + 2\lambda \bar{x} + \lambda^2 \int_0^t \bar{x} dr$$

Obteniendo en lugar de: 3.14

$$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - 2\lambda \dot{\bar{x}} - \lambda^2 \bar{x}$$

Con 2.15 y 2.16 formalmente sin cambios note que  $\int_0^t \hat{x} dr$  puede ser remplazado por  $\int^t \hat{x} dr$  y la integral puede ser definida con una constante, la cual puede ser elegida para obtener  $s(t=0) = 0$  independientemente de  $x_d(0)$  por lo que tenemos:

$$s = \dot{\bar{x}} + 2\lambda \bar{x} + \lambda^2 \int_0^t \bar{x} dr - \dot{\bar{x}}(0) - 2\lambda \bar{x}(0)$$

**Márgenes de ganancia**

Asumiendo que 3.9 se remplaza con:

$$\ddot{x} = f + bu \quad (3.17)$$

Donde la ganancia del control (posiblemente variante en el tiempo o dependiente de estado)  $b$ , es desconocida, pero se conocen sus límites:

$$0 < b_{min} \leq b \leq b_{max} \quad (3.18)$$

Dado que la entrada de control entra multiplicativamente en la dinámica, es natural elegir nuestra estimación  $\hat{b}$  de la ganancia  $b$  como la media geométrica de los límites anteriores.

$$\hat{b} = (b_{min} b_{max})^{1/2}$$

Los límites se pueden escribirse de la forma:

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \beta \quad (3.19)$$

Donde:

$$\beta = (b_{max}/b_{min})^{1/2}$$

Dado que la ley de control se diseñará para ser robusta a la incertidumbre multiplicativa acotada en 3.19 llamaremos a  $\beta$  margen de ganancia de muestreo de diseño, por analogía con la terminología utilizada en el control lineal. Tenga en cuenta que  $\beta$  debe ser variante en el tiempo o

---

dependiente del estado aunado a ello tenemos:

$$\beta^{-1} \leq \frac{b}{\hat{b}} \leq \beta$$

La incertidumbre también puede venir directamente de 3.19 por ejemplo si la acción de control  $u$  en sí misma es generada por un sistema dinámico lineal.

Con  $s$  y  $\hat{u}$  definidas como antes, se puede mostrar fácilmente que la ley de control es:

$$u = \hat{b}^{-1}[\hat{u} - k \operatorname{sgn}(s)] \quad (3.20)$$

Con:

$$k \geq \beta(F - \eta) + (\beta - 1)|\hat{b}| \quad (3.21)$$

Se satisface la condición deslizante. El uso de 3.20 en la expresión de  $s$  lleva a:

$$\dot{s} = (f - b\hat{b}^{-1}\hat{f}) + (1 - b\hat{b}^{-1})(-\ddot{x}_d + \lambda\dot{x}) - b\hat{b}^{-1}k \operatorname{sgn}(s)$$

Y  $k$  tiene que cumplir lo siguiente:

$$k \geq |\hat{b}b^{-1}f - \hat{f} + (\hat{b}b^{-1} - 1)(-\ddot{x}_d + \lambda\dot{x})| + \eta\hat{b}b^{-1}$$

Dado  $f = \hat{f} + (f - \hat{f})$ , dónde  $|f - \hat{f}| \leq F$ , esto a su vez conduce a:

$$k \geq \hat{b}b^{-1}F + \eta\hat{b}b^{-1} + |\hat{b}b^{-1} - 1| \cdot |\hat{f} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{x}|$$

Así en 3.21, nótese que la discontinuidad de control se ha incrementado para tener en cuenta la incertidumbre en la ganancia de control  $b$ .

Es útil detenerse en este punto y preguntarse si una acción de control diferente obtenida por

algún otro método podría lograr la misma tarea. La respuesta a esta pregunta es que, dada una trayectoria deseada factible, existe una función temporal de control uniforme única que la sigue exactamente.

$$u(t) = b(x_d)^{-1}[\ddot{x}_d - f(x_d)] \quad (3.22)$$

Por lo tanto, cualquiera que sea el método, la función temporal de control resultante será la misma y, por lo tanto, el uso de este enfoque particular simplemente proporciona una manera directa de llegar a esa función temporal. Debido a que requerimos que se logre un seguimiento perfecto incluso en presencia de incertidumbre paramétrica, esta función temporal se construye a través de un proceso de promediado de conmutaciones discontinuas infinitamente rápidas, llamado control equivalente, que es precisamente 3.22 [1].

## Diseño de control

Para el diseño del control SMD del motor PMSM, comienza por el modelo matemático del PMSM. Para ello se tienen en cuenta algunas consideraciones.

1. Debido a los devanados con distribución sinusoidal el campo magnético producido en estado estable es de magnitud fija y velocidad constante, por lo que los armónicos no tienen influencia en la dinámica y por esa razón se ignoran en el modelo.
2. Suponemos que la fuente de alimentación no tiene armónicos de conmutación ya que pueden considerarse como ruidos que serán filtrados por la inductancia del devanado.
3. Suponemos una distribución de densidad de flujo sinusoidal en la periferia del entre hierro.
4. Las pérdidas en el entre hierro son ignoradas en el modelado, del mismo modo que la saturación magnética y las pérdidas parasitas.

5. Se suponen los EMF inducidos en los devanados de fase son sinusoidales.

Dichas consideraciones son llevadas a cabo en el apéndice A para el modelado del PMSM en el eje de referencia  $a b c$  y su posterior transformación al marco de referencia  $d_q$ . Partiendo de las ecuaciones obtenidas en 6, entonces para comenzar con el diseño partimos del modelo en  $d_q$ :

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + L_s i_q \eta_p \omega + u_d \quad (3.23)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - L_s i_d \eta_p \omega - K_m \omega + u_q \quad (3.24)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \underbrace{\frac{3}{2} K_m i_q}_{:=K_t} - B\omega - \tau_L \quad (3.25)$$

Para el control por modos deslizantes comenzaremos renombrando las salidas planas del sistema de la siguiente forma:

$$i_d = F_1 \quad (3.26)$$

$$\omega = F_2 \quad (3.27)$$

Ahora sustituyendo 3.26 y 3.27 en 3.23 y 3.25 y reordenando tenemos:

$$u_d = L_s \dot{F}_1 + \underbrace{R_s F_1 - L_s i_q \eta_p F_2}_{f_1} \quad (3.28)$$

$$i_q = \frac{J}{K_t} \dot{F}_2 + \frac{B F_2}{K_t} \quad (3.29)$$

Y sustituyendo 3.29 en 3.24

$$u_q = \underbrace{\frac{L_s J}{K_t} \ddot{F}_2}_{:=\alpha} + \underbrace{\frac{L_s B + R_s J}{K_t} \dot{F}_2 + (\eta_p L_s F_1 + K_m + \frac{B R_s}{K_t}) F_2}_{f_2} \quad (3.30)$$



De lo anterior se obtiene como resultado las siguientes ecuaciones:

$$u_d = L_s \dot{F}_1 + f_1 \quad (3.31)$$

$$u_q = \alpha \ddot{F}_2 + f_2 \quad (3.32)$$

Para introducir el control por modos deslizantes al sistema incluiremos controles internos a partir de las ecuaciones 3.31 y 3.32 resultando de la siguiente forma:

$$u_d = L_s V_{aux1} + \hat{f}_1 \quad (3.33)$$

$$u_q = \alpha V_{aux2} + \hat{f}_2 \quad (3.34)$$

Igualando las ecuaciones obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} L_s \dot{F}_1 + f_1 &= L_s V_{aux1} + \hat{f}_1 \\ \dot{F}_1 &= V_{aux1} + \frac{\Delta f_1}{L_s} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha \ddot{F}_2 + f_2 &= L_s V_{aux2} + \hat{f}_2 \\ \ddot{F}_2 &= V_{aux2} + \frac{\Delta f_2}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Con la finalidad de implementar un control robusto para el sistema se utilizará un elemento integral. Por lo cual considerando el orden de las dos salidas planas del sistema y partiendo de la ecuación general propuesta por [1], que se muestra a continuación:

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \left( \int (\bar{x}) dt \right) \quad (3.37)$$

Donde  $\bar{x} = x - x^*$  siendo  $x$  el estado del sistema y  $x^*$  el estado deseado.

$\lambda$  es una ganancia de control.

$\left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n$  la ecuación de orden  $n$  para obtener la superficie de deslizamiento y  $\int (\bar{x}) dt$  el elemento integral.

Desarrollando la ecuación para las dos salidas planas obtendremos las superficies de deslizamiento  $S_1$  y  $S_2$  y utilizando las ganancias de control  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$ . El desarrollo para  $S_1$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \frac{d}{dt} + c_1 \right) \int (F_1 - F_1^*) dt \\ S_1 &= (F_1 - F_1^*) + c_1 \int (F_1 - F_1^*) \end{aligned} \quad (3.38)$$

El desarrollo para  $S_2$  resulta como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} S_2 &= \left( \frac{d}{dt} + c_2 \right)^2 \int (F_2 - F_2^*) dt \\ S_2 &= (\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) + 2c_2(F_2 - F_2^*) + c_1^2 \int (F_2 - F_2^*) dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ahora suponiendo que  $\dot{S}_1 = 0$  y  $\dot{S}_2 = 0$  y sustituyendo 3.35 y 3.36

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = 0 &= (\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) + c_1(F_1 - F_1^*) \\ &= (V_{aux1} + \frac{\Delta f_1}{Ls} - \dot{F}_1^*) + c_1(F_1 - F_1^*) \iff V_{aux1} \leq 2c_1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 = 0 &= (\ddot{F}_2 - \ddot{F}_2^*) + 2c_2(\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) + c_1^2(F_2 - F_2^*) \\ &= (V_{aux2} + \frac{\Delta f_2}{\alpha} - \ddot{F}_2^*) + 2c_2(\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) + c_1^2(F_2 - F_2^*) \iff V_{aux2} \leq 2c_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ahora una vez obtenidas las superficies de deslizamiento se propone una ecuación para el cálculo de los controles auxiliares

$$V_{aux1} = -\lambda_1 |\hat{V}_{eq1}| \text{sign}(S_1) \quad (3.42)$$

$$V_{aux2} = -\lambda_2 |\hat{V}_{eq1}| \text{sign}(S_2) \quad (3.43)$$

Partiendo de las ecuaciones 3.40 y 3.41 podemos encontrar una ecuación para  $V_{eq1}$  y  $V_{eq2}$  tal que:

$$V_{eq1} = -\dot{F}_1^* - c_1(F_1 - F_1^*) - \frac{\Delta f_1}{Ls} \quad (3.44)$$

$$V_{eq2} = -\ddot{F}_2^* - 2c_2(\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) - c_2^2(F_2 - F_2^*) - \frac{\Delta f_2}{\alpha} \quad (3.45)$$

Partiremos de 3.44 y 3.45. Bajo las condiciones antes mencionadas y suponiendo un error limitado y acotado para  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  podemos acotar las funciones  $|\hat{V}_{eq1}|$  y  $|\hat{V}_{eq2}|$ .

$$|\hat{V}_{eq1}| = 2c_1|F_1 - F_1^*| + \frac{2}{3} \quad (3.46)$$

$$|\hat{V}_{eq2}| = |\ddot{F}_2^*| + 4c_2|\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*| + 2c_2^2|F_2 - F_2^*| \quad (3.47)$$



---

## Capítulo 4

# Observadores

---

A menudo, durante el diseño de sistemas de control, suele suponerse que todas las variables de estado del sistema se encuentran disponibles para su medición. Si no es posible medir todas las variables, lo cual es común en casi todos los sistemas de control, no se puede implementar la ley de control. Por lo que son posibles dos enfoques, replantear el control para funcionar sin conocer las variables faltantes o bien estimar los valores faltantes para sustituirse en la ley de control. Resulta ser mucho más simple lo segundo, ya que se sustituirá la aproximación por el estado no disponible. Se considera el diseño en dos partes, primero diseño del controlador suponiendo que todas las variables están disponibles y después diseño del sistema que produce la aproximación de los estados, este sistema, en un entorno determinista se denomina observador [28].

Un dispositivo, programa o computador, que estima variables de estado, es llamado observador. [29]. Desde 1964, los observadores han formado parte integral de numerosos diseños de sistemas de control, ya que además de su utilidad práctica, la teoría está asociada íntimamente con conceptos fundamentales de controlabilidad, observabilidad, repuesta dinámica y estabilidad, proporcionando un entorno donde todos estos conceptos convergen [28].

---

## Observadores de estado

### Observadores de orden completo

Cuando un observador estima todas las variables de estado del sistema se denomina observador de orden completo. Siendo el sistema a observar como se muestra en 4.1, el observador de orden completo está dado por la siguiente ecuación 4.2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{x}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey\end{aligned}\tag{4.2}$$

### Observadores de orden reducido

En otros casos se requiere la observación solo de variables que no se miden y no de las que son medidas directamente. Estos observadores que estiman menos de  $n$  variables donde  $n$  es el orden del sistema, se llaman observadores de orden reducido. Por otra parte, un observador de orden mínimo que solo estima las mínimas variables es un observador de estado mínimo. Partiendo del sistema lineal representado en sistema matricial 4.3 y 4.4.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u\tag{4.3}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \quad (4.4)$$

Donde  $x_1 \in R^{n_1}$  y  $x_2 \in R^{n_2}$ , tal que  $n_1 + n_2 = n$ . Los elementos de las matrices  $A$  y  $b$  son particionados y correspondientes a estas dimensiones.

Para el caso particular del observador de estado mínimo  $n_1 = 1$ .

Los observadores de estado estiman basándose en las mediciones de las variables de salida y de control. Un observador es un subsistema que reconstruye los estados de la planta, es una réplica matemática del sistema. Para que se pueda construir el observador, el sistema de interés debe satisfacer la condición de observabilidad, una propiedad matemática que nos permite saber si el observador converge [29].

$$[C^* : A^*C : \dots : A^{*n-1}C] \quad (4.5)$$

Una vez diseñado un observador para un sistema lineal, que produce una estimación del vector de estado. No se desea, que un diseño de control, que de otro modo sería estable, se vuelva inestable cuando se implemente mediante la introducción de un observador. Afortunadamente, los observadores no alteran las propiedades de estabilidad cuando se introducen. Un observador no cambia los valores propios de lazo cerrado del sistema, sino que simplemente agrega sus valores propios. Los resultados son similares para sistemas con leyes de control no lineales [28].

## Observador GPI

Las técnicas de control requieren robustez para garantizar un buen rendimiento, es por ello que a falta de la medición de algún estado del sistema o para la estimación de alguna perturbación se utilizan observadores.

La teoría de observadores GPI es relativamente reciente. Su uso para la observación de siste-

mas lineales se desarrolló en [30]. Mientras que el concepto de Observador GPI se introdujo por primera vez en [31]. Este tipo de observadores ofrece una robustez a perturbaciones acotadas polinomiales mediante la integración iterada del error, que puede garantizarse de la misma manera que en un control PID clásico, pero evitando el término derivativo y sus desventajas, principalmente la sensibilidad al ruido [31] [32].

El observador GPI, se construye añadiendo una combinación lineal finita de componentes integrales iterados, ya sea de la entrada o de la salida según se requiera. La técnica consiste en substituir ecuaciones diferenciales que describen el sistema, por sistemas perturbados de integración pura, simplificados. De esta manera cualquier variable del sistema depende del orden o se ve influenciada por una perturbación, lo que lleva a que tanto el estudio de estabilidad como de robustez sean respecto a perturbaciones particulares.

De acuerdo con la teoría propuesta en [33] y [34], se construye la siguiente ecuación diferencial no lineal de  $n$ -ésimo orden perturbada con una entrada y una salida.

$$y^{(n)}(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) + \phi(t, y(t))u + \zeta(t) \quad (4.6)$$

Donde  $\psi(\cdot)$  considera la dinámica no modelada desconocida (perturbación endógena) y  $\zeta(\cdot)$  la perturbación externa. Ambas consideradas de carácter desconocido pero acotado, denotadas por medio de  $\xi(t)$ . Dando como resultado la expresión 4.7.

$$y^{(n)}(t) = \xi(t) + \phi(t, y(t))u \quad (4.7)$$

Tal que  $\xi(t)$  es  $m$ -diferenciable y uniformemente acotado, cumpliendo que  $|\xi(t)| \leq K$  donde  $K$  es real y finito. Y para todo  $\phi(t, y)u \neq 0$  el sistema es controlable y puede llamarse diferencialmente plano.

En los observadores GPI mientras mayor sea la cantidad de estados extra, mejor será la precisión del observador, esto porque se reduce el error de salida con cada componente integral agregado. Además, se obtiene una identificación asintótica de la señal de entrada y brinda un amplio rango



de operación para el que se mantiene la estabilidad [31] [33].

Debido a su construcción es necesario el uso de altas ganancias para que el observador GPI reconstruya correctamente los estados o perturbaciones, por ello las mediciones ruidosas pueden afectar su operación. El ruido de medición es afectado proporcionalmente por las ganancias del observador. Dicha dinámica, escalada por ganancias muy grandes, puede afectar la convergencia del observador. Las altas ganancias llevan también a la aparición de “picos” iniciales. como una solución para lo anterior se hace necesaria la implementación de “embragues”, para la suave estimación de las variables requeridas [32].

Por ejemplo, para el sistema de segundo orden dado en 4.8, donde  $k$  representa  $\phi(t, y)u$ , el observador GPI será de la forma que se muestra en 4.9

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= ku + \xi(t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Donde el error de observación está dado por la ecuación  $(y - \hat{y}_1)$ , utilizado para garantizar una dinámica estable mediante sumas ponderadas de inyecciones del mismo.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{n+m+1}(y - \hat{y}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{y}}_{n-1} &= \hat{y}_n + \lambda_{m+1}(y - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_n &= z_1 + ku + \lambda_m(y - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}(y - \hat{y}_1) \\ &\vdots \\ \dot{z}_m &= \lambda_0(y - \hat{y}_1)\end{aligned}\tag{4.9}$$

Analizando los errores de estimación de la salida de las primeras  $(n - 1)$  derivadas con respecto al tiempo, se define  $e_1 = (y - \hat{y}_1)$ ,  $e_2 = (y_2 - \hat{y}_2)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (y_n - \hat{y}_n)$ . Posteriormente se fijan los errores de estimación de la función de perturbación  $\xi(t)$  y sus primeras  $(m - 1)$  derivadas, como

---

$e_{n+1} = \xi(t) - z_1$ ,  $e_{n+2} = \dot{\xi}(t) - z_2$ ,  $\dots$ ,  $e_{n+m-1} = \xi(t)^{(m-1)} - z_{m-1}$ . Por lo que la dinámica asociada es como se muestra en 4.10.

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_{n+m-1}e_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\dot{e}_n &= e_{n+1} - \lambda_m e_1 \\
\dot{e}_{n+1} &= e_{n+2} - \lambda_{m-1}e_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\dot{e}_{n+m-1} &= \xi(t)^{(m)}\lambda_0 e_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Tras la simplificación se incorporan los errores de seguimiento y de estimación en lazo cerrado mediante la ecuación 4.11.

$$e^{(n+m)}(t) + \lambda_{n+m-1}e^{(n+m-1)}(t) + \dots + \lambda_1\dot{e}(t) + \lambda_0e(t) = \xi^{(m)}(t) \tag{4.11}$$

Para garantizar la estabilidad en lazo cerrado, se eligen los coeficientes por medio del polinomio en variable compleja  $s$  de tal forma que sea un polinomio Hurwitz.

$$P(s) = s^{(n+m)} + \lambda_{n+m-1}s^{(n+m-1)} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \tag{4.12}$$

Los coeficientes  $\lambda_k : k = 0, 1, \dots, n+m-1$  logran estabilizar al polinomio  $P(s)$  al ser elegidos de tal forma que sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ . Entonces el error de estimación  $e(t)$  y sus correspondientes derivadas temporales convergen globalmente a una función  $B(0, \rho)$  centrada en el origen del espacio de fase  $\{e, \dot{e}, \dots, e^{(n+m-1)}\}$  de radio  $\rho$  tan cercano al origen como se desee dependiendo de la parte real de las raíces seleccionadas. A mayor magnitud de la parte real, menor radio garantizando así la convergencia con la selección de los coeficientes antes mencionados.

## Diseño del observador GPI

### Modelo matemático del PMSM

En el marco de referencia  $\alpha - \beta$  el modelo matemático de la dinámica de motor está dado por las siguientes ecuaciones:

$$L_s \frac{di_\alpha}{dt} = -R_s i_\alpha + e_\alpha + u_\alpha \quad (4.13)$$

$$L_s \frac{di_\beta}{dt} = -R_s i_\beta - e_\beta + u_\beta \quad (4.14)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_e + B\omega - \tau_L(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4.16)$$

Donde  $i_\alpha, i_\beta, e_\alpha, e_\beta, u_\alpha$  y  $u_\beta$ , representan las corrientes del estator, fuerzas contra electromotriz y las entradas del control del sistema.

$R_s$  representa la resistencia del estator y  $L_s$  representa la inductancia del estator.

Mientras que  $\theta, \omega$ , y  $\tau_e$  representan la posición angular, velocidad angular y par interno del PMSM.

El par de carga  $\tau_L$  es desconocido, sin embargo, se considera acotado y constante.

Ahora el torque electromagnético entregado por el PMSM en el marco de referencia  $\alpha - \beta$  se expresa como:

$$\tau_e = \underbrace{\frac{2}{3} K_m}_{:=K_t} [i_\alpha \sin(n_p \theta) - i_\beta \cos(n_p \theta)] \quad (4.17)$$

$$= K_t [i_\alpha \sin(n_p \theta) - i_\beta \cos(n_p \theta)] \quad (4.18)$$

Donde  $K_t$  es el torque constante del motor.

Las funciones de la fuerza contra electromotriz FCEM, se inducen mediante los devanados del

estator dadas por 4.19 y 4.20.

$$e_\alpha(\theta, \dot{\theta}, K_m) = K_t \sin(n_p \theta) \dot{\theta} \quad (4.19)$$

$$e_\beta(\theta, \dot{\theta}, K_m) = K_t \cos(n_p \theta) \dot{\theta} \quad (4.20)$$

## Desarrollo del observador GPI

Partiendo de las ecuaciones 4.13 y 4.14, para diseñar el observador GPI, con ellas se estima de manera simultánea las funciones FCEM, que los imanes permanentes del motor síncrono generan. Utilizando la medición de corriente de fase y los voltajes en  $\alpha$  -  $\beta$  se estiman las funciones  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ . La estimación ayudara al modelado de  $e_\alpha$  y  $e_\beta$  pero también al de los términos no modelados. Esto lo hace a través de una función polinomial dependiente del tiempo. Para este caso particular se usará un modelo de sexto orden, que se incorpora dentro del observador como una cadena de integraciones en cascada con condiciones iniciales arbitrarias.

El diseño del observadore GPI comienza con una copia de las funciones no lineales de fuerza contra electromotriz  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ . En ella se remplaza a la función no lineal por una variable en función del tiempo  $z_{1\alpha} = \hat{e}_\alpha$  además de un término de error de corrección, dado por el error de estimación  $\gamma(i_\alpha - \hat{i}_\alpha)$ ;  $\gamma > 0$ . Ahora partiendo de la ecuación eléctrica del eje  $\alpha$  del sistema dada en 4.13 se tiene que:

$$\begin{aligned} L_s \frac{di_\alpha}{dt} &= -R_s i_\alpha + z_{1\alpha} + u_\alpha + \gamma_5(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \dot{z}_{1\alpha} &= z_{2\alpha} + \gamma_4(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \dot{z}_{2\alpha} &= z_{3\alpha} + \gamma_3(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \dot{z}_{3\alpha} &= z_{4\alpha} + \gamma_2(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \dot{z}_{4\alpha} &= z_{5\alpha} + \gamma_1(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \dot{z}_{5\alpha} &= \gamma_0(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Obsérvese que se obtuvieron las ganancias  $\gamma_i$ ;  $i = 0, \dots, 5$ . Para realizar la estimación en el eje  $\beta$  la función de estimación es dada como  $z_{1\beta} = \hat{e}_\beta$  más un término de error de corrección, dependiente del error de estimación  $\gamma(i_\beta - \hat{i}_\beta)$ ;  $\gamma > 0$ . A partir de la ecuación eléctrica 4.14 se crea una copia para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 L_s \frac{di_\beta}{dt} &= -R_s i_\beta + z_{1\beta} + u_\beta + \gamma_5(i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
 \dot{z}_{1\beta} &= z_{2\beta} + \gamma_4(i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
 \dot{z}_{2\beta} &= z_{3\beta} + \gamma_3(i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
 \dot{z}_{3\beta} &= z_{4\beta} + \gamma_2(i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
 \dot{z}_{4\beta} &= z_{5\beta} + \gamma_1(i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
 \dot{z}_{5\beta} &= \gamma_0(i_\beta - \hat{i}_\beta)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

**Análisis de estabilidad** Siendo los errores de estimación de corriente definidos tal que:  $e_{i\alpha} = i_\alpha - \hat{i}_\alpha$  y  $e_{i\beta} = i_\beta - \hat{i}_\beta$ . Restando la ecuación miembro a miembro 4.13 con 4.21 y 4.14 con 4.22.

$$\begin{aligned}
 L_s \frac{di_\alpha}{dt} &= -R_s i_\alpha + z_{1\alpha} + u_\alpha + \gamma_5 e_{i\alpha} \\
 \dot{z}_{1\alpha} &= z_{2\alpha} + \gamma_4 e_{i\alpha} \\
 \vdots &= \vdots \\
 \dot{z}_{5\alpha} &= \gamma_0 e_{i\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 L_s \frac{di_\beta}{dt} &= -R_s i_\beta + z_{1\beta} + u_\beta + \gamma_5 e_{i\beta} \\
 \dot{z}_{1\beta} &= z_{2\beta} + \gamma_4 e_{i\alpha} \\
 \vdots &= \vdots \\
 \dot{z}_{5\alpha} &= \gamma_0 e_{i\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por lo tanto, los errores de estimación en  $\alpha$  y  $\beta$  son dados por:

$$e_{i\alpha}^{(6)} + \left(\frac{R_s + \gamma_5}{L_s}\right)e_{i\alpha}^{(5)} + \left(\frac{\gamma_4}{L_s}\right)e_{i\alpha}^{(4)} + \left(\frac{\gamma_3}{L_s}\right)e_{i\alpha}^{(3)} + \left(\frac{\gamma_2}{L_s}\right)\ddot{e}_{i\alpha} + \left(\frac{\gamma_1}{L_s}\right)\dot{e}_{i\alpha} + \left(\frac{\gamma_0}{L_s}\right)e_{i\alpha} = \left(\frac{1}{L_s}\right)e_{i\alpha}^{(5)} \quad (4.25)$$

$$e_{i\beta}^{(6)} + \left(\frac{R_s + \gamma_5}{L_s}\right)e_{i\beta}^{(5)} + \left(\frac{\gamma_4}{L_s}\right)e_{i\beta}^{(4)} + \left(\frac{\gamma_3}{L_s}\right)e_{i\beta}^{(3)} + \left(\frac{\gamma_2}{L_s}\right)\ddot{e}_{i\beta} + \left(\frac{\gamma_1}{L_s}\right)\dot{e}_{i\beta} + \left(\frac{\gamma_0}{L_s}\right)e_{i\beta} = \left(\frac{1}{L_s}\right)e_{i\beta}^{(5)} \quad (4.26)$$

Para la selección de los valores de las ganancias  $\gamma_i$ ;  $i = 0, \dots, 5$  se considera un polinomio Hurwitz de grado seis. Con  $\zeta > 0$  y  $\omega_n > 0$  se definen constantes, de tal forma el polinomio deseado  $P_d(s)$ , sea un polinomio Hurwitz definido de la siguiente manera:

$$P_d(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^3 \quad (4.27)$$

Asumiendo que  $e_{\alpha}^{(5)}(t)$  y  $e_{\beta}^{(5)}(t)$  son funciones de la quinta derivada con respecto al tiempo de la fuerza contra electromotriz de perturbación desconocida, aunque uniforme y absolutamente acotadas, por lo que existen coeficientes para las ganancias del observador GPI,  $\gamma_i$ ; ( $i = 0, \dots, 5$ ), que se compran término a término con 4.25 y 4.26, con el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= 6L_s\zeta\omega_n - R_s \\ \gamma_4 &= (3\omega_n^2 + 12\zeta^2\omega_n^2)L_s \\ \gamma_3 &= (12\zeta\omega_n^3 + 8\zeta^3\omega_n^3)L_s \\ \gamma_2 &= (3\omega_n^4 + 15\zeta^2\omega_n^4)L_s \\ \gamma_1 &= 6L_s\zeta\omega_n^5 \\ \gamma_0 &= L_s\omega_n^6 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Por lo tanto, los errores de estimación del observador y sus derivadas convergen asintóticamente a cero, es decir, los errores quedan dentro de un disco cerrado alrededor del origen de radio muy pequeño respecto al error de estimación de espacio de fase [34] [35] [36] [37]. Suponiendo que

$e_{i\alpha}$  y  $e_{i\beta}$  son casi cero, de ahí se tienen las siguientes expresiones.

$$L_s \frac{de_{i\alpha}}{dt} = -R_s e_{i\alpha} - z_{1\alpha} + e_\alpha + \gamma_5 e_{i\alpha} \quad (4.29)$$

$$L_s \frac{de_{i\beta}}{dt} = -R_s e_{i\beta} - z_{1\beta} + e_\beta + \gamma_5 e_{i\beta} \quad (4.30)$$

Por lo tanto, se dice que,  $z_{1\alpha}(t) = \hat{e}_\alpha(t)$  y  $z_{1\beta}(t) = \hat{e}_\beta(t)$ . De ahí las funciones de fuerza contra electromotriz son estimadas con mucha precisión, de tal manera los términos lineales de,  $e_\alpha(\theta, \dot{\theta}, Km)$  y  $e_\beta(\theta, \dot{\theta}, Km)$ , y sus derivadas consecutivas son estimadas por  $z_{j\alpha-\beta} = e_{\alpha-\beta}^{j-1}$  para  $j = 2, \dots, 5$ . Entonces podemos concluir que el error de estimación converge asintóticamente cerca de 0.





# Diseño y simulación del control

---

En este apartado se aborda la estructura general del sistema para su simulación, partiendo del diagrama eléctrico de la planta y esquema de control de velocidad sin sensores. Para el diseño y simulación del controlador se emplea el software Matlab Simulink<sup>®</sup>, mientras que la elaboración del diagrama eléctrico de la planta y la cosimulación se realiza en el software PSim<sup>®</sup>. El diagrama promedio de la planta contempla los circuitos de Modulación por Ancho de Pulsos (PWM), los circuitos electrónicos de potencia, el Motor Síncrono de Imanes Permanentes (PMSM) y los sensores de corriente.

Durante la simulación a lazo cerrado las corrientes medidas se utilizan para realizar la estimación de posición y velocidad del PMSM. La programación de los bloques de control en Matlab Simulink<sup>®</sup> sigue el esquema general planteado en la Figura 5.1. El algoritmo de control está conformado por un conjunto de subsistemas representados mediante bloques que interactúan entre sí, integrando las ecuaciones desarrolladas en capítulos anteriores. Este enfoque facilita un diseño modular simple y ordenado.

En lo sucesivo se describen los bloques que integran el diagrama general del sistema y se presentan los resultados obtenidos mediante la simulación.

## Esquema general del sistema

En la Figura 5.1 se presenta el esquema general del sistema, el cual está compuesto por el algoritmo de control y el modelo promedio de la planta. Es importante destacar que, dentro del recuadro azul, se encuentran los componentes eléctricos del modelo promedio de la planta. Por su parte los bloques contenidos en el recuadro rojo conforman el algoritmo de control.

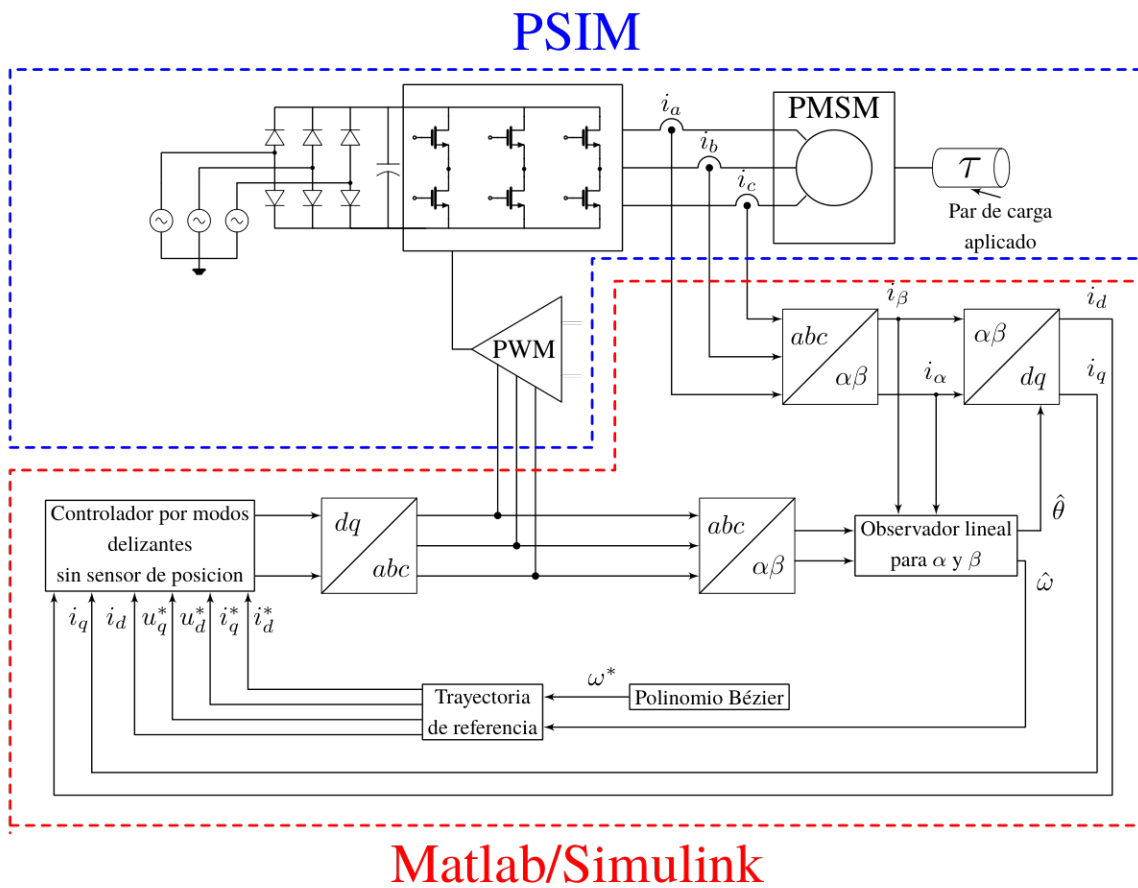


Figura 5.1: Esquema general del sistema.

Los bloques se componen de la siguiente manera:

- El modelo promedio del sistema: fuente de alimentación, circuito PWM, inverso de voltaje trifásico, PMSM, sensores de corriente y par de carga aplicado al motor.

- Esquema de control: Controlador por Modos Deslizantes, Observador GPI, transformaciones de Park y Clark, transformaciones  $dq - abc$ ,  $abc - \alpha\beta$ ,  $\alpha\beta - dq$  y por último la trayectoria de referencia.

### Diagrama de bloques del algoritmo de control

En la Figura 5.2 se ilustra el esquema del control del sistema, construido mediante bloques de Matlab<sup>®</sup>. El cual permite llevar a cabo la simulación del control de seguimiento suave de velocidad de PMSM. Para la cosimulación entre Matlab<sup>®</sup> y PSim<sup>®</sup>, es necesario especificar algunos parámetros. En Matlab<sup>®</sup> donde se desarrolla el algoritmo de control, se precisan las ganancias para el controlador y las ganancias del observador, las cuales son seleccionadas mediante un criterio de estabilización. Mientras que, en PSim<sup>®</sup>, en donde se integra el modelo de la planta, los parámetros del PMSM se establecen de conforme a la información proporcionada en la hoja de datos de motor.

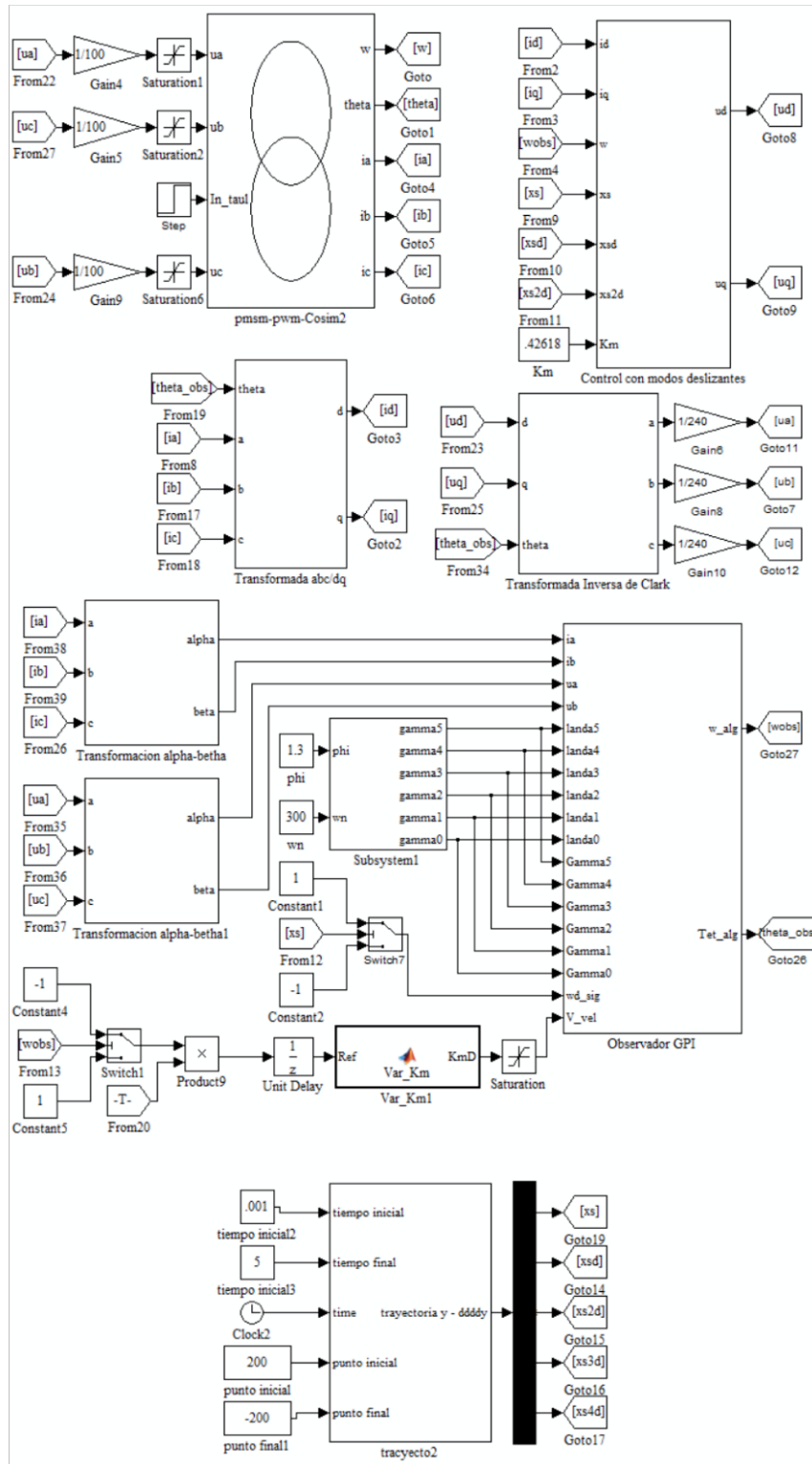


Figura 5.2: Diagrama de bloques del sistema.

## Representación del modelo promedio de la planta en Psim

En la Figura 5.3 se muestra el diagrama eléctrico de la planta diseñado utilizando el software PSim<sup>®</sup>. En dicho diagrama el inversor trifásico actúa como fuente de voltaje CA para el PMSM. El control del inversor se realiza mediante la conmutación de los IGBT utilizando el método PWM sinusoidal, a través de una comparación analógica entre las señales de referencia y una señal triangular. Las señales de referencia utilizadas para la Modulación de Ancho de Pulsos son entradas provenientes del controlador, mientras que las salidas son mediciones obtenidas de la planta, corrientes de fase, posición angular y velocidad angular. Las corrientes de fase son señales de retroalimentación para el controlador, mientras que la posición y velocidad permiten una comparativa de la precisión entre la velocidad real y estimada. Por último, la señal de entrada restante es el parámetro de carga aplicado al motor. Las señales de entrada y salida mencionadas, se obtienen a través de los nodos de enlace **In Link Node** y **Out Link Node**, mediante los cuales reciben las variables de control ( $u_a, u_b, u_c$  y  $T_l$ ) en el circuito eléctrico de la planta y se envían las variables ( $i_a, i_b, i_c, \theta, \omega$ ) hacia el algoritmo de control en Matlab<sup>®</sup>.

La utiliza el software PSim<sup>®</sup> debido a su capacidad para simular comportamiento dinámico y estático del PMSM, basándose en los parámetros del motor establecidos por el usuario en el módulo PMSM. Los cuales son proporcionados en la hoja de datos del fabricante, como se muestra en la tabla 5.1 (modelo BMS80N-275AA). Dichos parámetros se configuran a través de la pestaña Elements → Power → Motor Drive Module → Permanent Magnet Sync. Machine de PSim<sup>®</sup>. La ventana de configuración del módulo se muestra en la Figura 5.4. Además de los parámetros del motor, deben establecerse tanto el voltaje de alimentación, como la frecuencia de la señal portadora, el inversor trifásico se alimenta con una fuente de CD de 240 V, mientras que la frecuencia de conmutación de la señal triangular usada para la comparación PWM es de 10 KHz.

Una vez finalizado el diseño del modelo promedio de la planta y guardado el arco en el directorio deseado, debe establecerse el enlace entre los entornos PSim<sup>®</sup> y Matlab<sup>®</sup>, para lo cual se emplea el bloque ‘‘SimCoupler’’, que facilita la implementación y simulación de la parte del sistema

correspondiente a la planta en PSim<sup>®</sup>, mientras el resto se ejecuta en Matlab<sup>®</sup>. El uso de esta herramienta permite llevar a cabo una visualización y análisis del desempeño del controlador en simulación, previo a la realización de pruebas en laboratorio.

Para agregar el bloque *SimCoupler* a Matlab Simulink<sup>®</sup>, debe seleccionarse en el menú S-funtion SimCoupler del explorador de librerías de Matlab Simulink<sup>®</sup>, al hacer doble click en el bloque, se despliega un cuadro de dialogo que nos permite cargar el modelo de PSim<sup>®</sup> guardado anteriormente. Aplicamos las modificaciones y tenemos listo un subsistema con los puertos de entrada y de salida establecidos en el programa PSim<sup>®</sup>, como se muestra en la Figura 5.5.

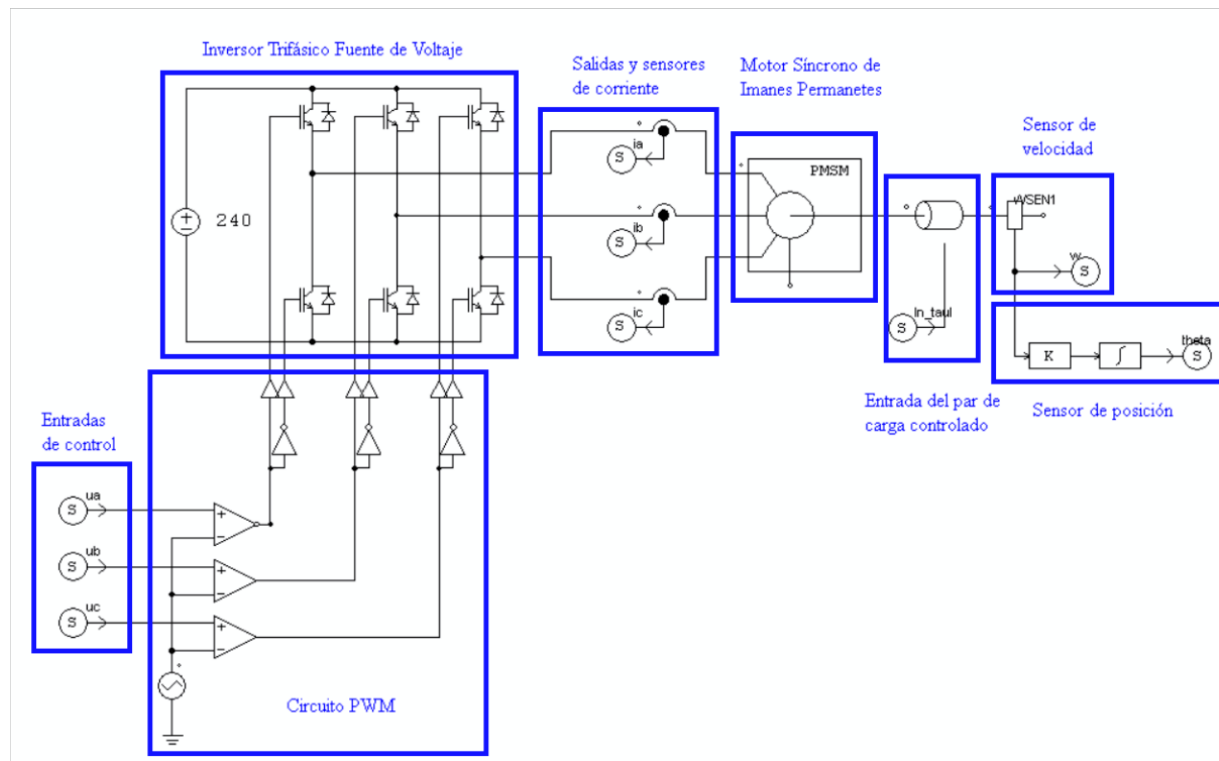


Figura 5.3: Modelo promedio de la planta en PSim<sup>®</sup>.

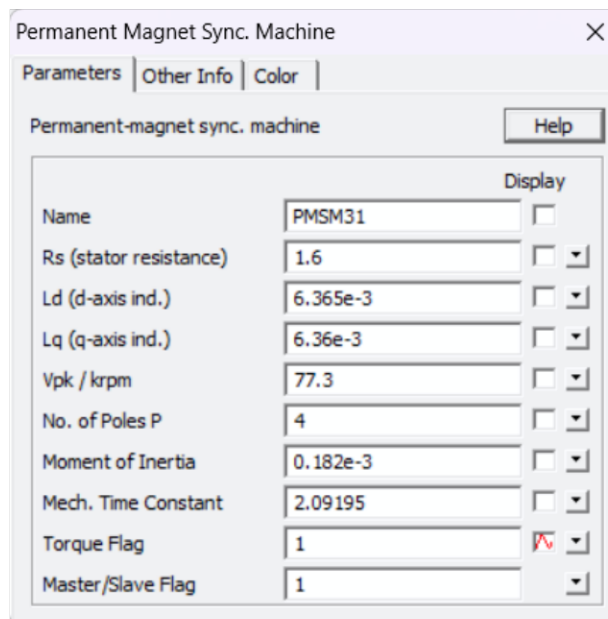


Figura 5.4: Ventana de configuración de módulo PMSM.

Descripción	Símbolo	Magnitud	Unidad
Resistencia del estator	$R_s$	1,6	$\Omega$
Inductancia del eje directo	$L_d$	6.635	mH
Inductancia del eje de cuadratura	$L_d$	6.635	mH
FCEM pico de línea a línea a velocidad constante	$V_{pk}/krpm$	77.3	V
Número de polos	$N_p$	4	P
Momento de inercia	$J$	0.182E-3	$Kgm^2$
Constante mecánica de tiempo	$T_m$	2.09195	S

Cuadro 5.1: Parámetros de PMSM modelo BSM80N-275AA.

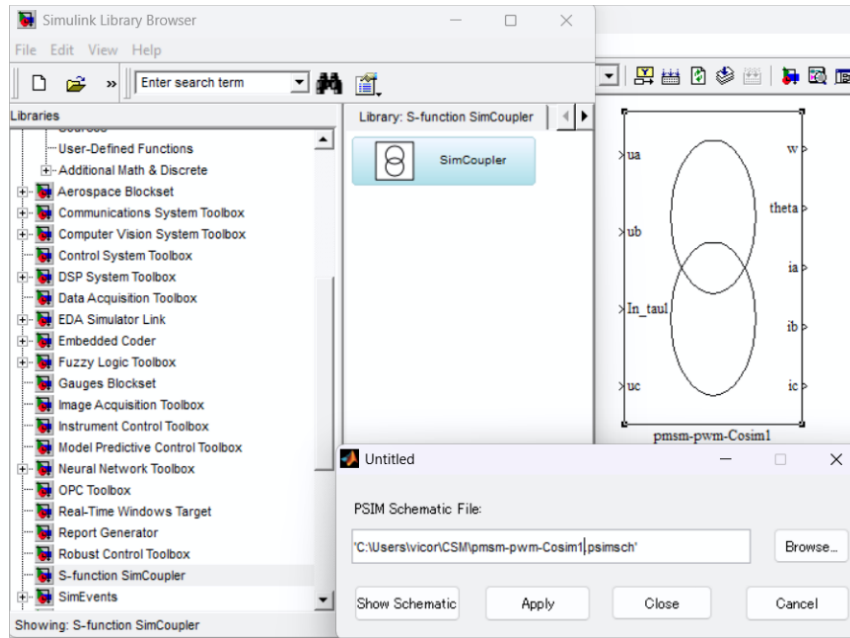


Figura 5.5: Bloque enlace SimCoupler.

## Representación del algoritmo de control en diagrama de bloques de Simulink

En este apartado, se incluye el subsistema que genera las señales de control  $u_d$   $u_q$ , transformación de las corrientes de fase y las señales de referencia, como bloques y subsistemas de diagramas de bloques en Matlab Simulink®, interconectados para realizar el control de la planta.

## Controlador por modos deslizantes

El Control por Modos Deslizantes, tiene como finalidad generar las señales de control  $u_d$   $u_q$ . Esto lo hace mediante un diagrama de bloques que representa las ecuaciones de control 3.33. Dicho subsistema de bloques se muestra en la Figura 5.6.



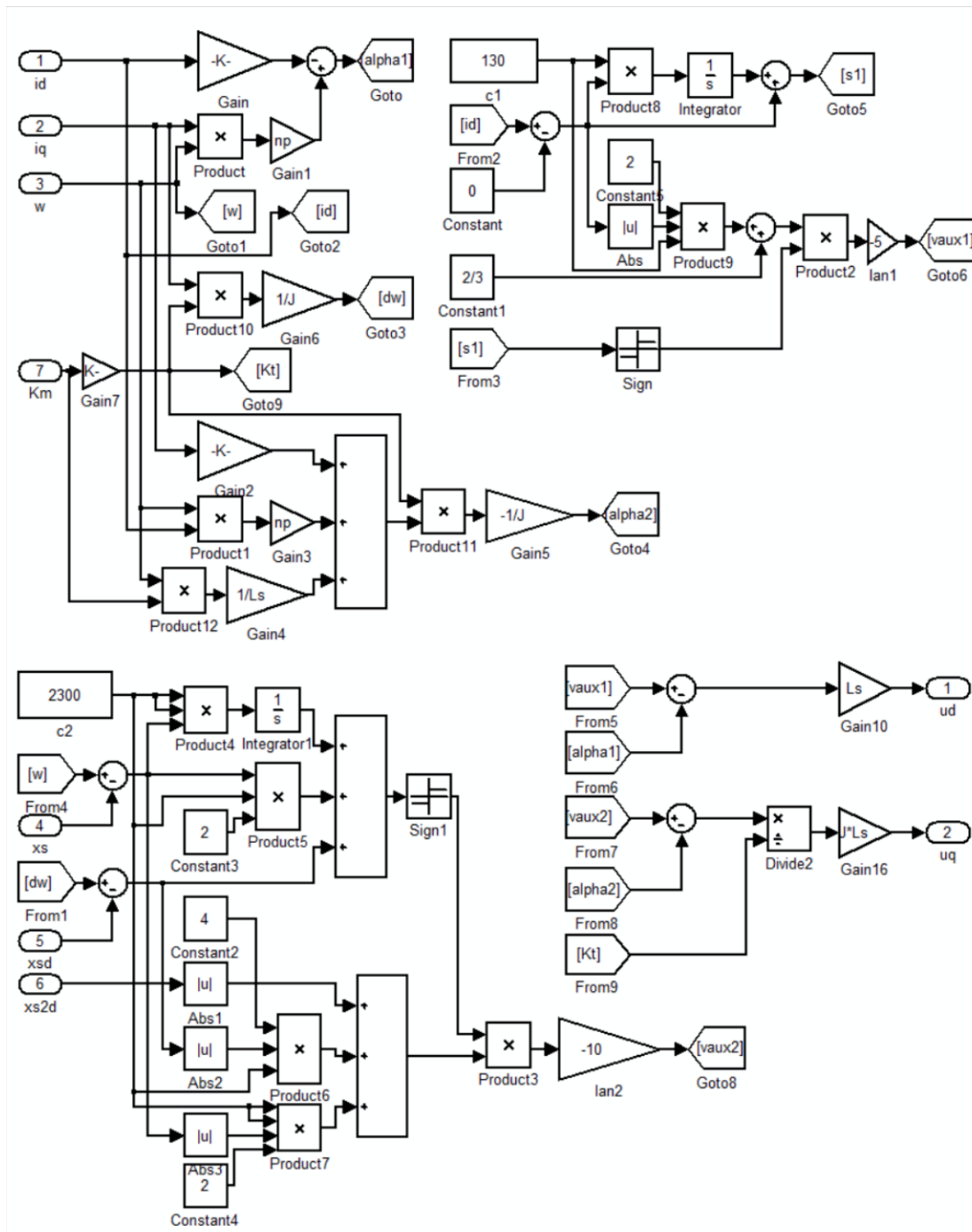


Figura 5.6: Subsistema del módulo del Controlador por Modos Deslizantes.

## Transformación de Clarke

El diseño de observador Proporcional Integral Generalizado (GPI) para la Fuerza Contra Electromotriz (FCEM) del PSMSM, se lleva a cabo en el marco de referencia bifásico estacionario  $\alpha - \beta$ . Por esta razón las corrientes y las señales de control deben ser transformadas a al marco de referencia antes mencionado, mediante la transformación de Clarke. En la Figura 5.7 se muestran los bloques correspondientes a la transformación de Clark.

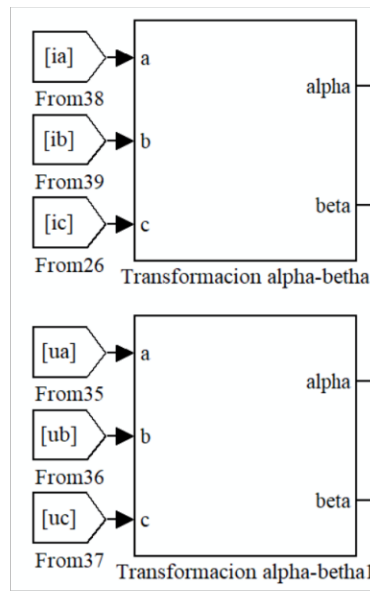


Figura 5.7: Transformación de Clarke.

Las ecuaciones de la transformación de Clarke son representadas mediante el subsistema de bloques que se muestra en la Figura 5.8.

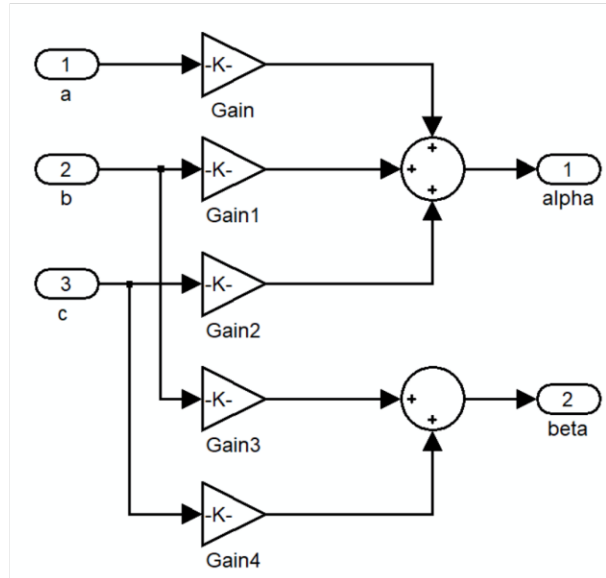


Figura 5.8: Subsistema del módulo de Transformación de Clarke.

## Transformación de Park

Para el controlador es necesario usar el marco de referencia  $d - q$ , ya que facilita el diseño del mismo. Por lo tanto, es necesario utilizar la transformación de Park que permite cambiar del marco de referencia  $a b c$  al marco de referencia  $d - q$ . Una vez obtenida la ley de control, se aplica la transformada inversa para volver al marco de referencia  $a b c$ , obteniendo así, los voltajes trifásicos de control que funcionan como entrada en el circuito PWM. En la Figura 5.9 se muestran los bloques de transformación y transformación inversa en el marco de referencia rotatorio  $d - q$ .

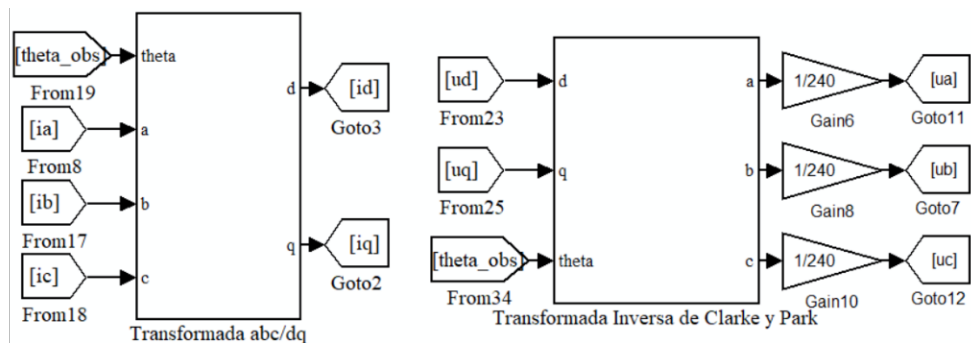


Figura 5.9: Transformación y transformación inversa de Park.

En la Figura 5.10 se muestra la representación de las ecuaciones de la transformación de Park en diagrama de bloques, de la misma forma en la Figura 5.11 podemos ver el subsistema de la transformación inversa.

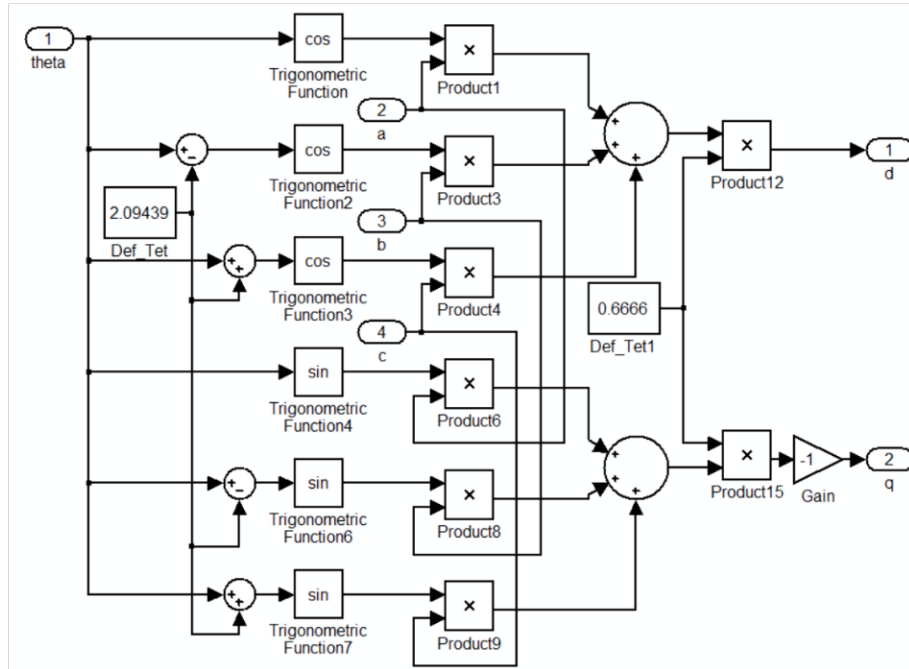


Figura 5.10: Subsistema del módulo de transformación de Park.

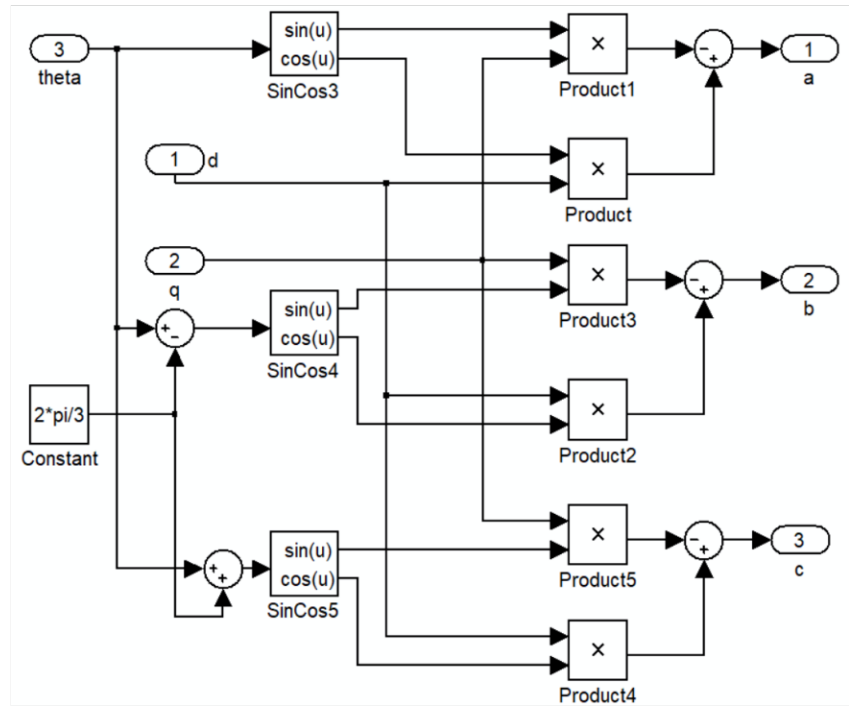


Figura 5.11: Subsistema del módulo de transformación inversa de Park.

## Observador GPI

En la Figura 5.12 se muestra el bloque del observador GPI para la FCEM. El cual posee como entradas, las señales de voltaje del controlador y mediciones de corriente del PMSM, en el marco de referencia  $\alpha - \beta$ , las ganancias del polinomio Hurwitz de sexto orden, el signo de la velocidad de referencia y el valor de  $K_m$ . Del observador GPI obtenemos la estimación de la velocidad y posición del PMSM.

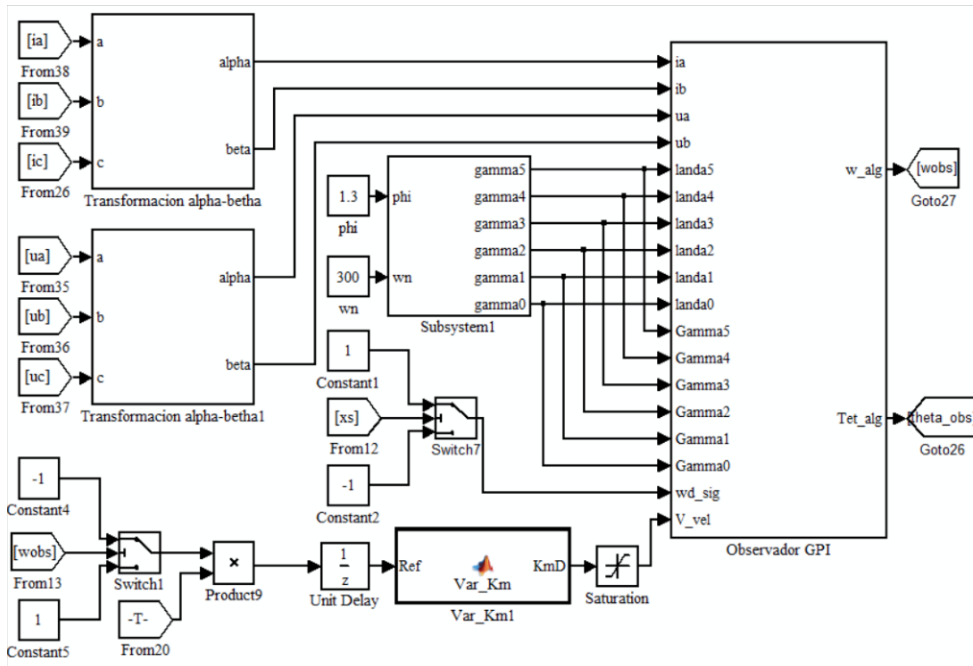


Figura 5.12: Observador GPI para la estimación de FCEM.

El subsistema de la Figura 5.13 muestra las ecuaciones 4.23 y 4.24 representadas en diagrama de bloques.

Para el cálculo de las ganancias del observador, se utiliza un polinomio Hurwitz de sexto orden que tiene por entradas los valores de coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural. En la Figura 5.14 vemos el diagrama de bloques que representa las ecuaciones 4.28, utilizadas para calcular las ganancias del Polinomio Hurwitz de sexto orden.

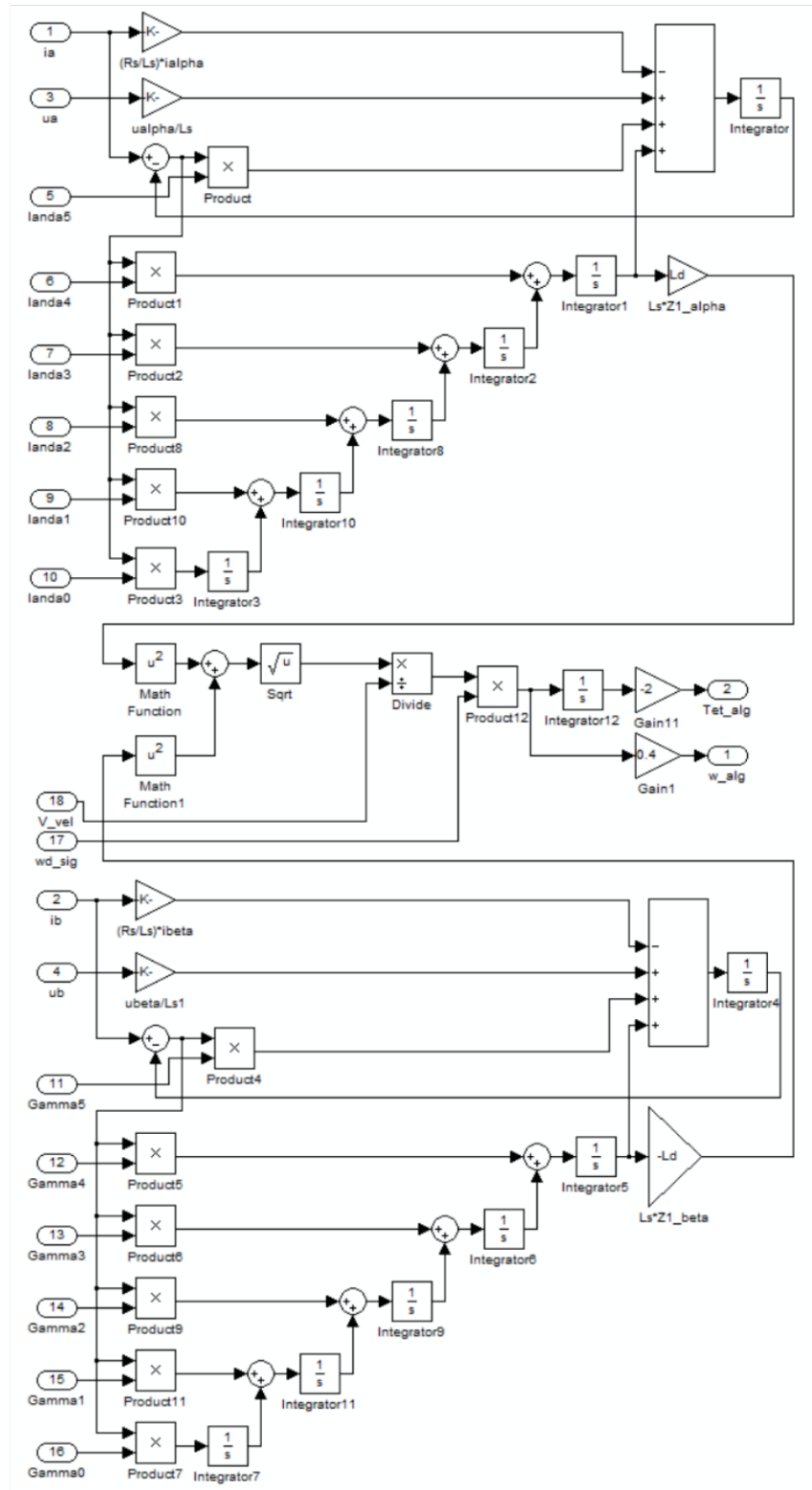


Figura 5.13: Subsistema de ecuaciones del observador GPI

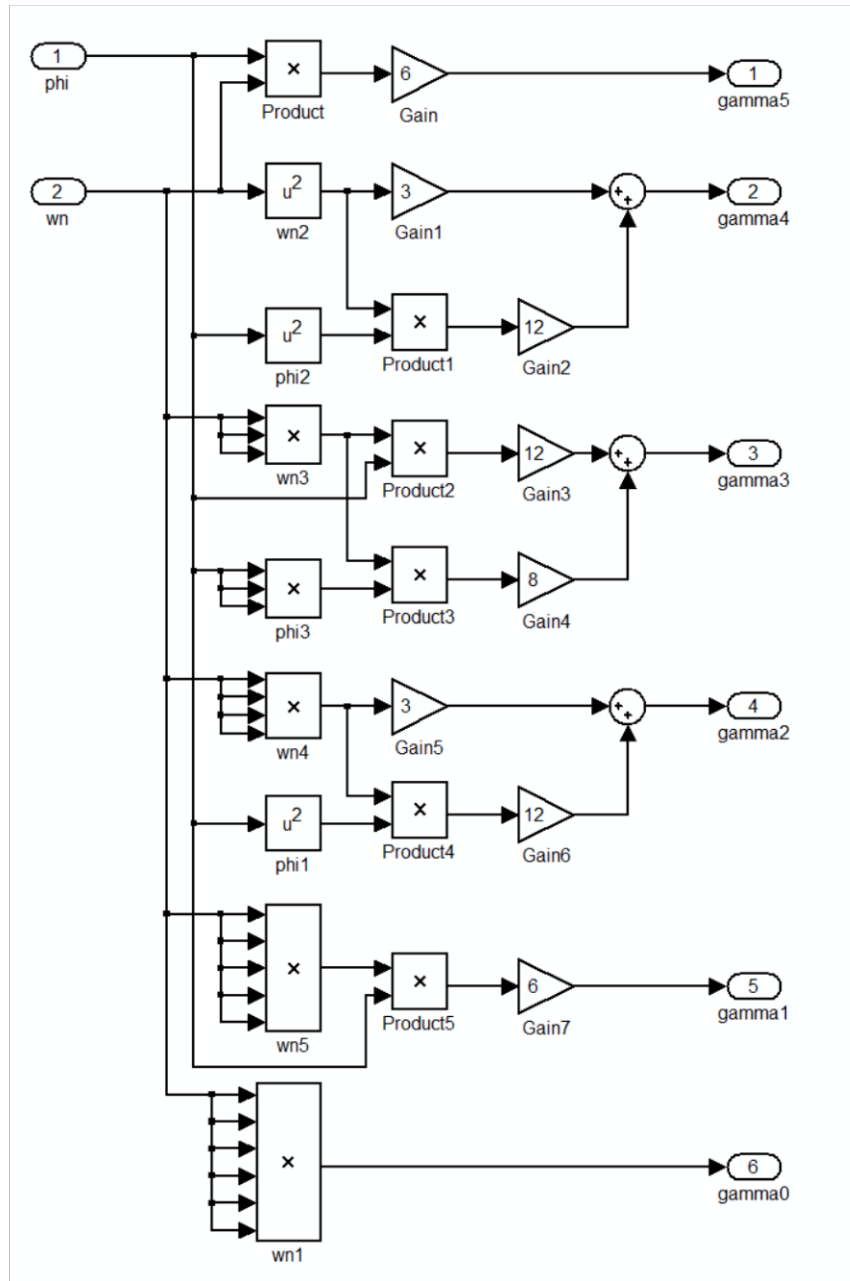


Figura 5.14: Subsistema de ecuaciones de ganancias del polinomio Hurwitz.

## Simulación de una trayectoria suave de velocidad

En la Figura 5.15 se muestra la gráfica de la velocidad desarrollada por el PMSM en la simulación. La velocidad propuesta es de 240 ras/s con arranque suave, en un intervalo entre [0,



1] segundos. Se aplica un par de carga de 1 Nm después de 2 segundos de iniciado el arranque. En la Figura 5.15 se muestran tanto la velocidad mecánica del motor como medida mediante sensor y la velocidad estimada con el observador GPI. Podemos notar que la ley de control, envía la potencia necesaria para que la velocidad del motor alcance la velocidad de referencia fácilmente, aun tras aplicar el par de carga al eje. Después de aplicar el par de carga, la ley de control aún mantiene la velocidad en la referencia, sin perder el sincronismo entre el rotor y estator.

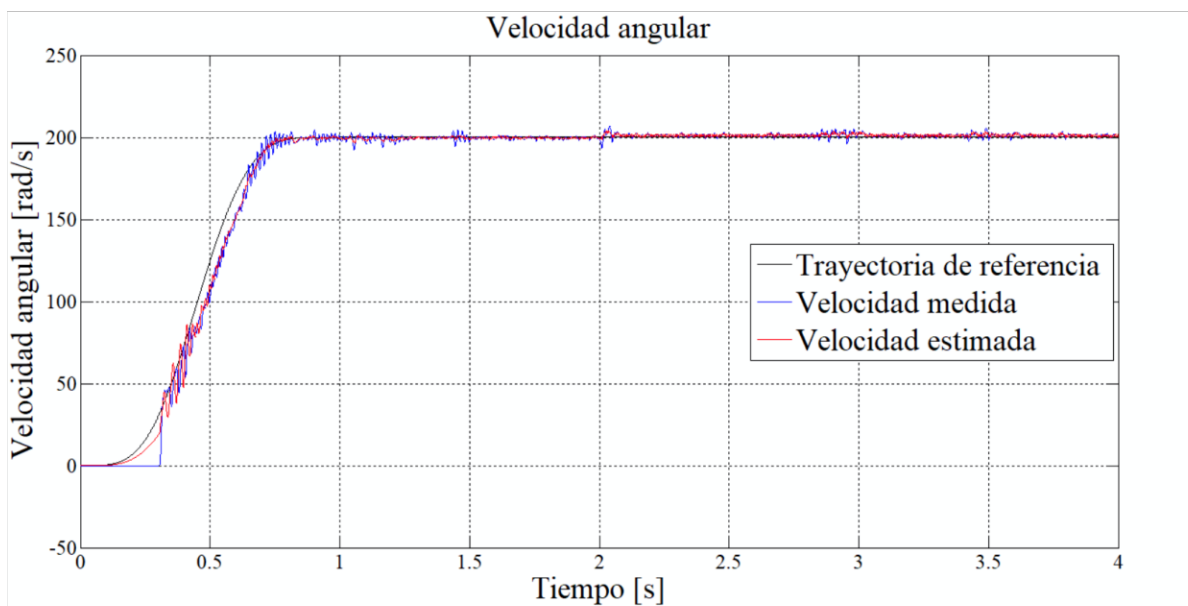


Figura 5.15: Grafica de velocidad del motor PMSM.

En la Figura 5.16 podemos observar la gráfica del error de velocidad, en la cual se aprecia el desempeño del control, tanto al seguir la trayectoria como ante el par de carga aplicado.

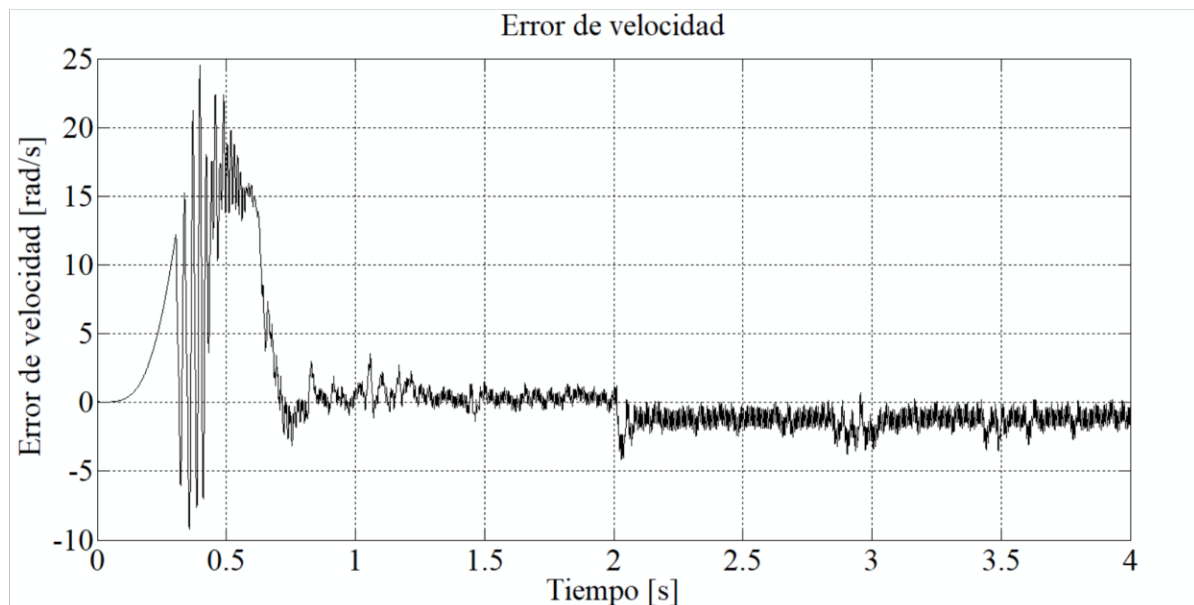


Figura 5.16: Grafica de error velocidad del motor PMSM.

De manera similar podemos ver el perfil del par de carga aplicado al sistema en la Figura 5.17, que es una señal escalón, que inicia en 0 Nm y después de 2 segundos cambia bruscamente a 1 Nm.

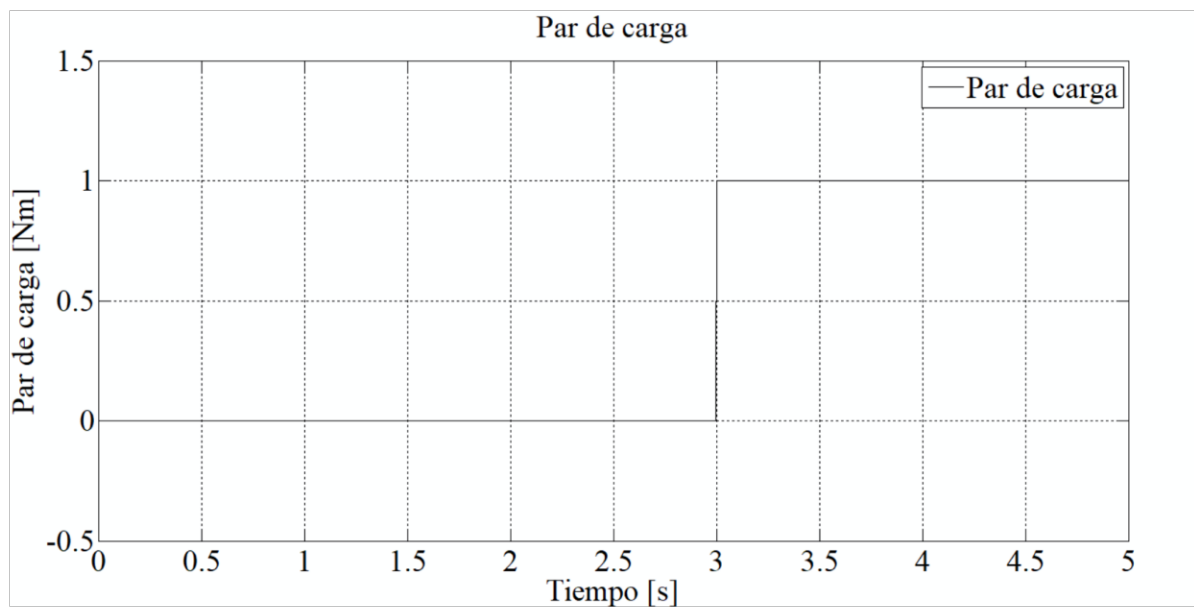


Figura 5.17: Grafica del par de carga.

Como consecuencia del par de carga aplicado, hay un incremento en las corrientes trifásicas que alimentan al motor al momento en que este se aplica. En la Figura 5.18 se muestran las corrientes en el PMSM durante la simulación y en la Figura 5.19 puede apreciarse dicho aumento de corriente al aplicar el par.

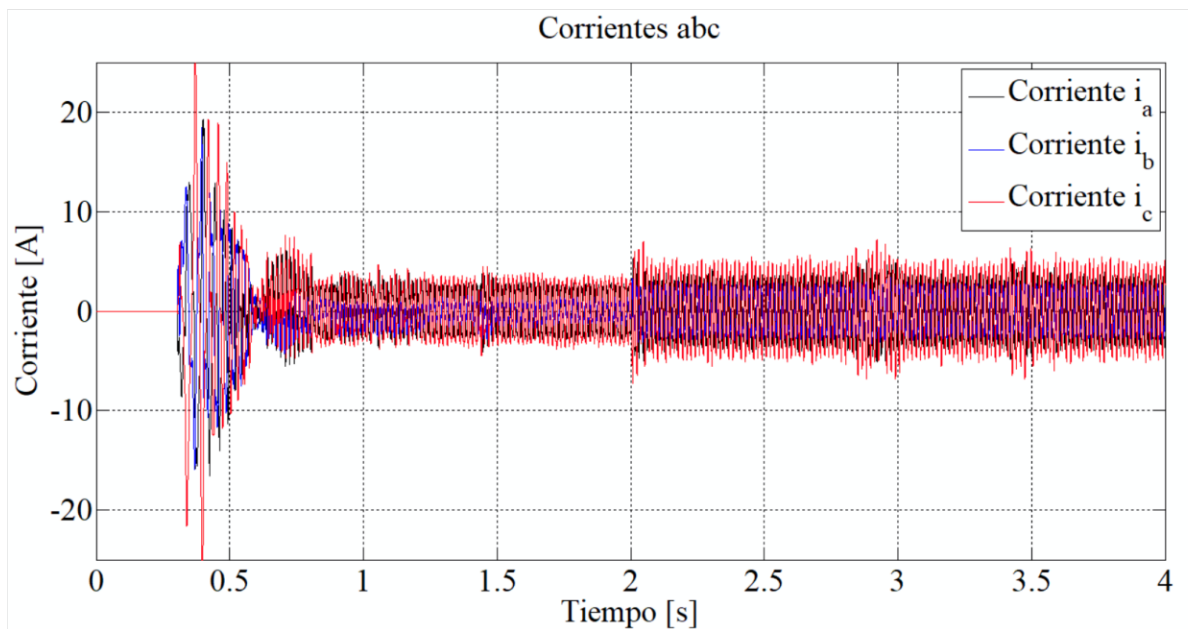


Figura 5.18: Corrientes trifásicas suministrada al PMSM.

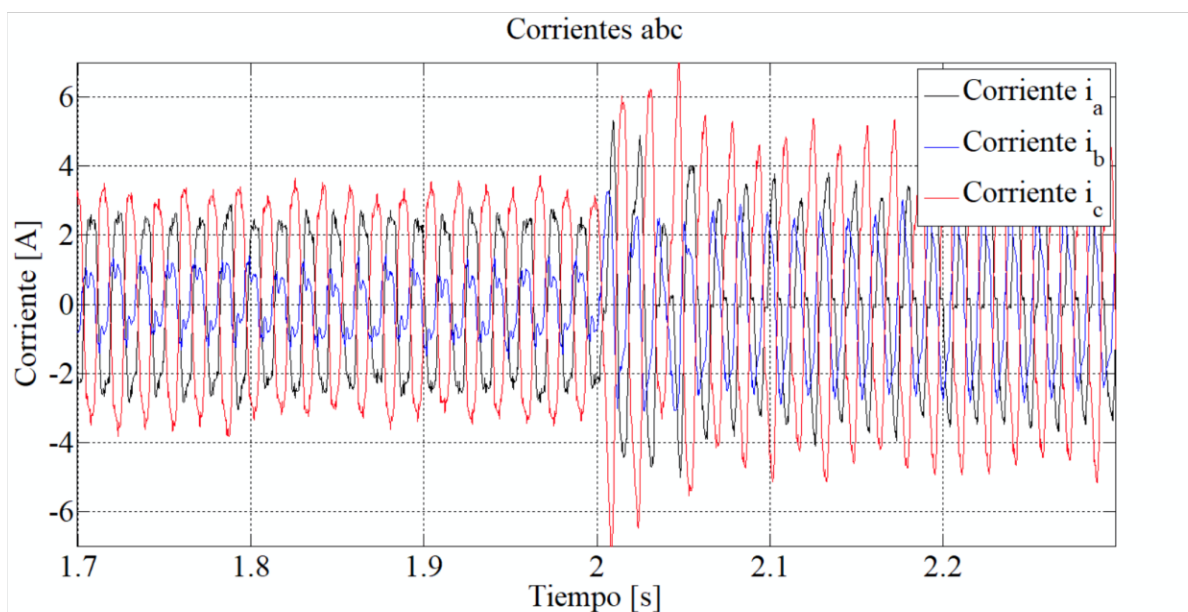


Figura 5.19: Acercamiento a las corrientes trifásicas ante el cambio del par de carga.

Los voltajes de trifásicos proporcionados al PMSM por el inversor trifásico, obtenidos mediante de la conmutación PWM, son resultado de las señales de control enviadas al circuito PWM. En la Figura 5.20 se muestran los voltajes de CA generados por las leyes de control para cada una de las fases, además puede apreciarse el incremento de voltaje como respuesta a la aplicación del par de carga en  $t = 2$  segundos. En la Figura 5.21 se hace un acercamiento al voltaje trifásico, en el que se puede apreciar como son generados los voltajes de cada fase durante el arranque.

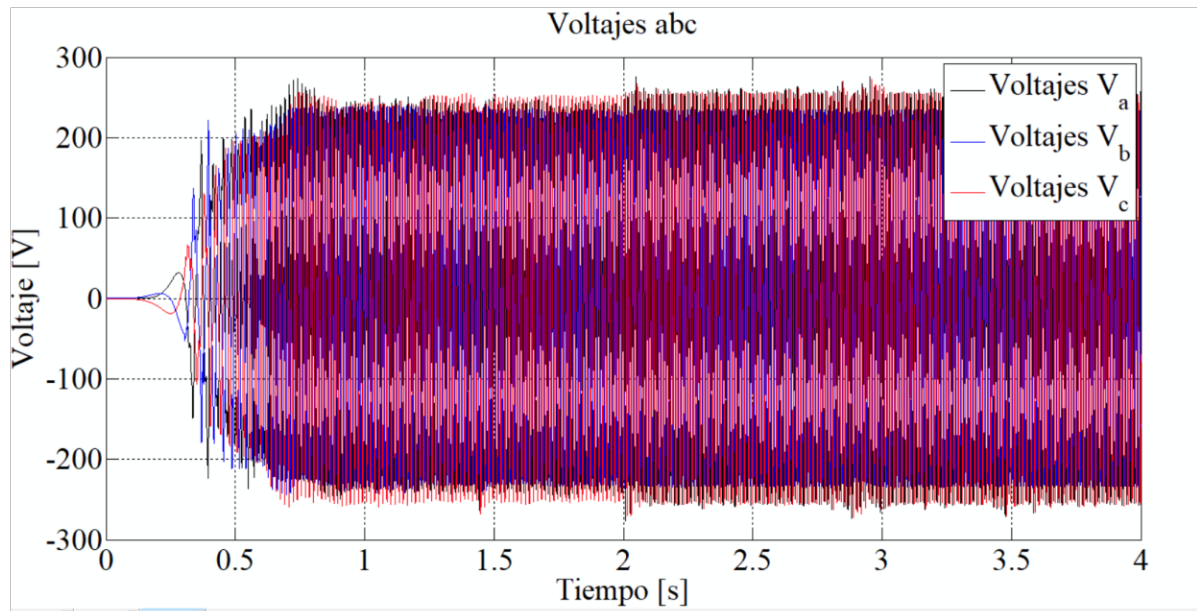


Figura 5.20: Voltajes trifásicos suministrada al PMSM.

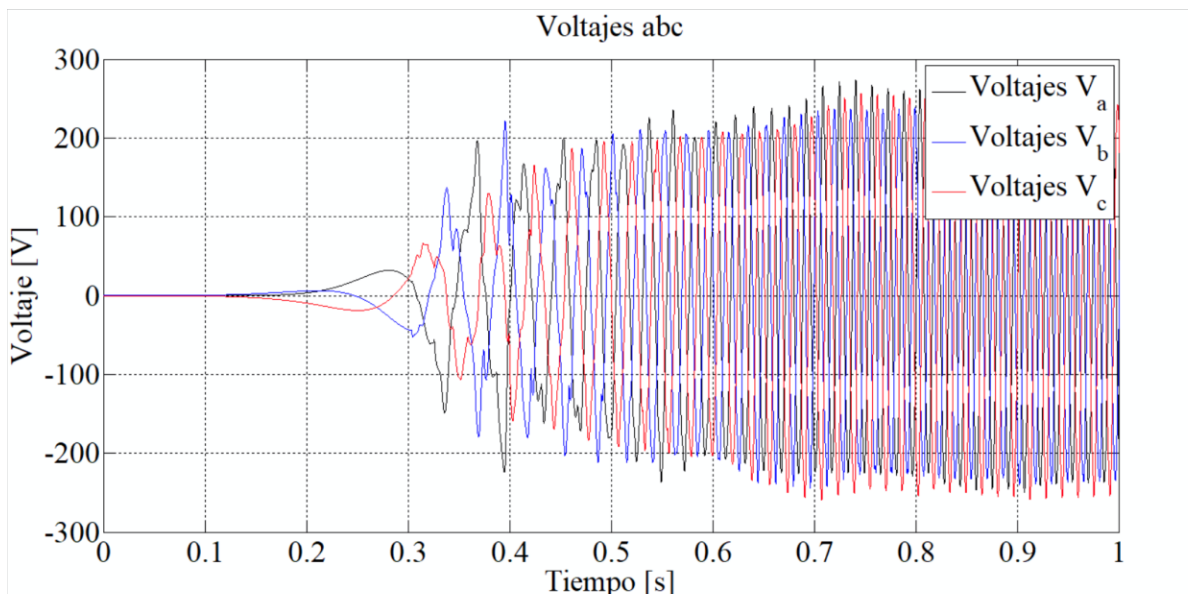


Figura 5.21: Acercamiento a los voltajes trifásicos durante en arranque.

Para la estimación de la FCEM es necesario aplicar la transformada de Clarke a los voltajes y corrientes mostrados anteriormente, ya que el observador los requiere para su funcionamiento, en las Figuras 5.22 y 5.23 se muestran las corrientes y voltajes del PMSM en el marco de referencia  $\alpha - \beta$  utilizados por el observador GPI.

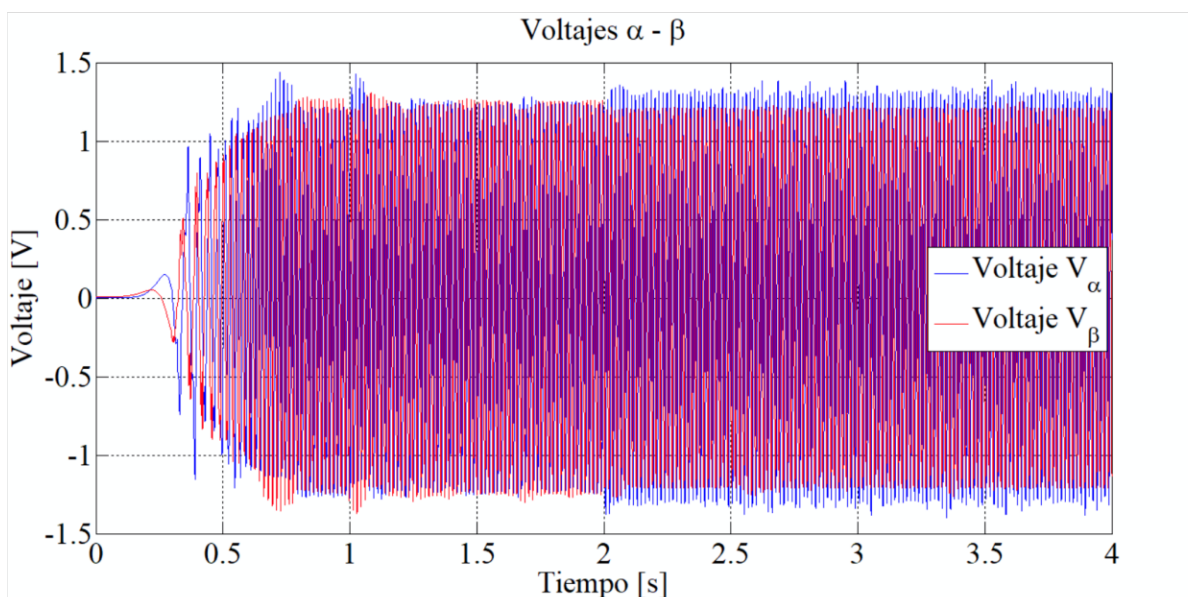


Figura 5.22: Voltajes en el marco de referencia  $\alpha - \beta$

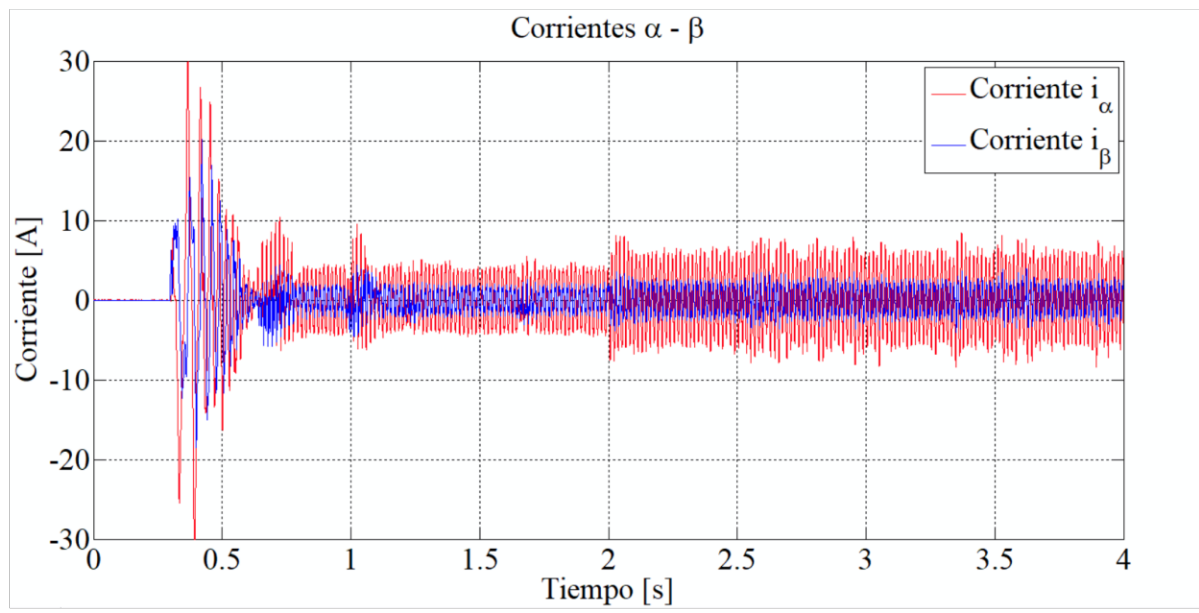


Figura 5.23: Corrientes en el marco de referencia  $\alpha - \beta$ .

# Resultados experimentales y conclusiones

---

## Procedimiento

El desarrollo del presente trabajo de tesis se realiza de acuerdo a la metodología de Gorrostieta et al [38] y cumple con las etapas clave de dicha metodología. La primer etapa, modelado y simulación de la cinemática y dinámica, fue cubierta en los apartados previos con el diseño y simulación de observador y controlador. La siguiente etapa, implementación y manufactura, comprende el diseño de la tarjeta electrónica para los sensores de corriente, la fabricación de la misma, la construcción del inversor trifásico, la conexión eléctrica de la planta, pruebas de funcionamiento e implementación del control. Lo que concierne a la tercer etapa, sensores y actuadores, es la calibración de sensores y actuadores de ser necesario. Por último, la etapa de comparación consta de monitoreo en condiciones reales realizado mediante pruebas practicas con par aplicado, permitiendo así comparar los resultados de las pruebas con los esperados.



---

## Plataforma experimental

En la Figura 6.1 vemos la plataforma experimental utilizada para realizar las pruebas de laboratorio. Las señales de control son generadas por la placa de desarrollo dSPACE. Esas señales de conmutación controlan la activación de los Transistores Bipolares de Compuerta Aislada (*Insulated Gate Bipolar Transistors*) (IGBT) del inversor, generando así las corrientes trifásicas, que le brindan potencia requerida para seguir la trayectoria de referencia al PMSM. Para el control del dSPACE se emplea el software Control Desk que permite además de la manipulación de la tarjeta, el muestreo y recolección de datos de las señales generadas durante la prueba.



Figura 6.1: Plataforma experimental.

La plataforma de control está conformada por los elementos que se listan a continuación:

1. Fuente de alimentación CD.
2. Inversor trifásico.



3. Sensores de corriente.
4. DS1104 dSPACE.
5. Motor Síncrono de Imanes Permanentes.
6. Programa controlador implementado en Matlab®.
7. Dinamómetro y sensor de velocidad angular.

### **Autotransformador trifásico**

La potencia eléctrica es suministrada al inversor mediante un autotransformador trifásico variable, conocido como “variac”. Un autotransformador es parcialmente un transformador normal con una conexión especial. Además, el variac es un auto transformador con un núcleo variable, lo que permite ajustar la relación de transformación de cada una de las fases. Para ello se dispone de un autotransformador independiente para cada fase, lo que evita que exista interferencias entre fases. Sin embargo, los núcleos de los autotransformadores varían de forma simultánea mediante una perilla circular acoplada a un eje común fijado al núcleo de cada auto transformador. Gracias a esta configuración, el variac permite obtener voltajes y corrientes variables en su salida.

El variac empleado en las pruebas experimentales pertenece a la marca STACO ENERGY PRODUCT CO, de la serie 1520, modelo 1520-3. Este equipo opera con una alimentación de 480 V y 60 Hz, con una salida que va desde 0 hasta 560 V, una corriente máxima de 9.5 A y una potencia máxima de 9.22 kVA. Además, está equipado con un interruptor termomagnético que proporciona protección eléctrica ante sobretensiones y picos de voltaje. Asimismo, cuenta con un circuito rectificador trifásico CTR, conformado por un capacitor electrolítico de 1000 mF a 350 V para generar el voltaje de CD y un capacitor NKT de 1 uF a 850 V para eliminar el ruido. En la Figura 6.2 podemos apreciar el variac en conjunto con el interruptor termo magnético y el circuito de rectificación.

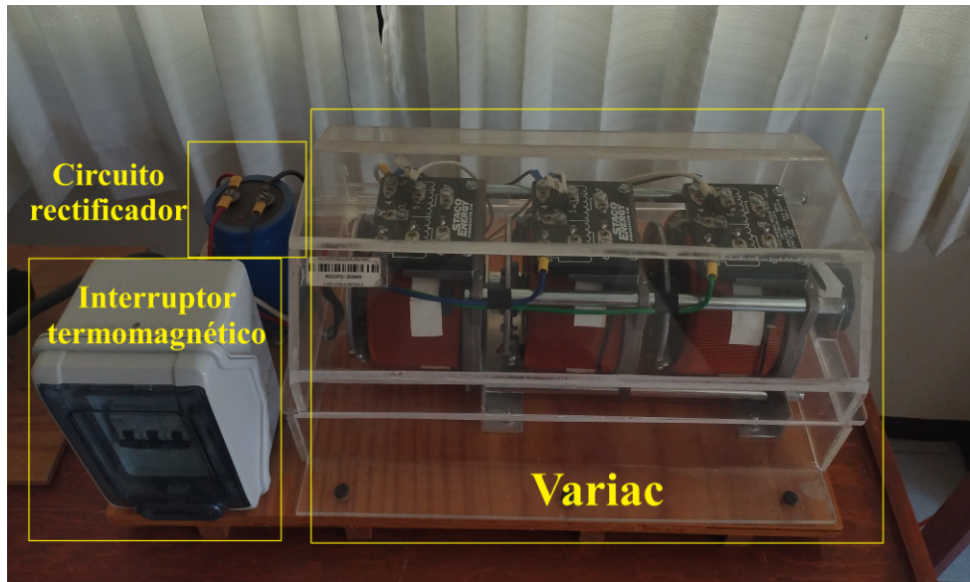


Figura 6.2: Autotransformador trifásico.

## Inversor trifásico

El inversor trifásico, encargado de accionar el PMSM mediante la potencia suministrada por el variac, está compuesto por los siguientes elementos:

- Módulos de Transistores IGBT Infineon BSM75GB60DLC: dispositivo semiconductor de potencia accionado por compuerta.
- Optoacopladores PC923: Elemento electrónico de accionamiento de las compuertas de los IGBT, con aislamiento galvánico, lo que garantiza la protección eléctrica del circuito electrónico de control, minimizando el riesgo de interferencias y mejorando la fiabilidad del sistema.
- Alimentación de bajo voltaje (15 V): Alimentación eléctrica para los accionadores optoacopladores.

En la Figura 6.3 pueden verse claramente estos elementos.

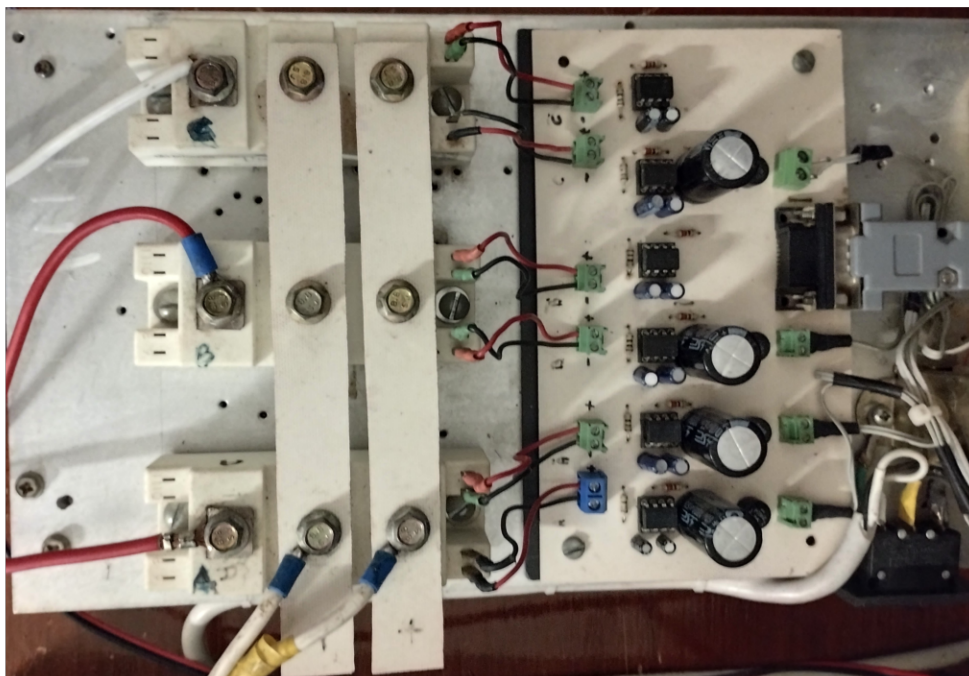


Figura 6.3: Inversor trifásico.

El inversor trifásico recibe las señales de conmutación del dSPACE que son mediante las cuales se activan los IGBT a través de los optoacopladores.

### **Sensores de corriente**

Para la medición de las corrientes de fase del motor PMSM se utilizaron sensores de corriente de la marca LEM, modelo HX 10-P/PS2. Estos sensores tienen un rango de medición máximo de  $\pm 30$  A, un rango de medición nominal de 10 A rms y requieren una alimentación de 12 a 15 V CD para su funcionamiento.

Los tres sensores fueron integrados en una tarjeta electrónica para la medición de las corrientes trifásicas generadas por el inversor. Cada sensor proporciona una salida analógica entre 0 y 5 V, las cuales son mediadas por los ADC del módulo dSPACE. Posteriormente, dichas señales se calibran mediante software, aplicando una conversión de 1:16, dado que por cada amperio el sensor entrega un voltaje de 62.5 mV.

## Módulo dSPACE

El módulo dSPACE opera en conjunto con el software ControlDesk, que proporciona un entorno grafico para el control de variables y la visualización de datos en tiempo real durante la ejecución. Asimismo, ofrece un conjunto de librerías para el software Matlab Simulink®, lo que permite la utilización de los módulos de la tarjeta de desarrollo, así como el diseño, simulación e implementación de una amplia variedad de algoritmos. El algoritmo de control es programado en el dSPACE mediante Matlab Simulink® y es ejecutado en conjunto con ControlDesk. En la Figura 6.4 se aprecia el módulo dSPACE utilizada para las pruebas experimentales.

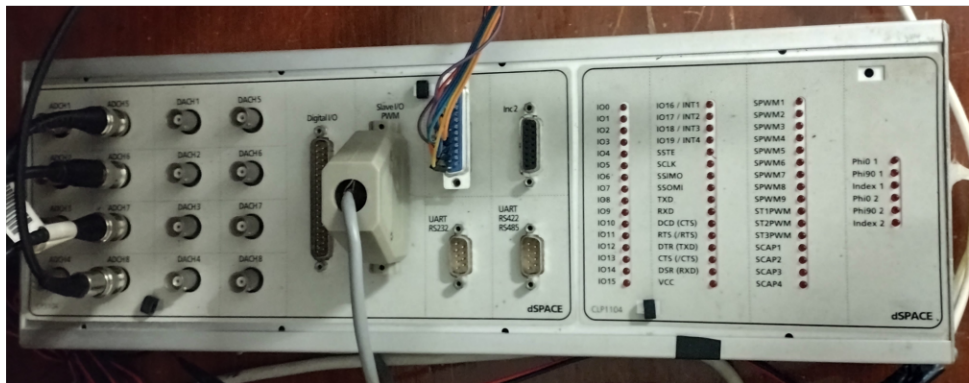


Figura 6.4: Módulo dSPACE.

Este módulo cuenta con una tarjeta controladora DS1104 R&W que se aprecia en la Figura 6.5, dicha tarjeta tiene un microcontrolador (*Digital Signal Processor*) (DSP) esclavo modelo TMS320F240. El sistema de prototipado rápido facilita la implementación del algoritmo de control por medio de un sistema de conectores rápidos para la entrada y salida de señales. Además, combina con la capacidad de cálculo de un microcontrolador principal y el DSP.



Figura 6.5: Tarjeta controladora DS1104 R&W.

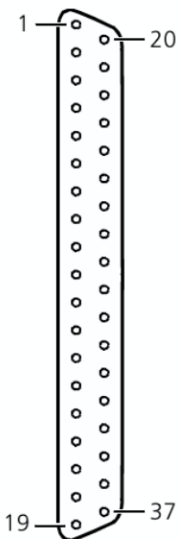
Las especificaciones técnicas del módulo dSPACE son las siguientes:

- Procesador principal: modelo MPC8240 de 64 bits, con una frecuencia de reloj de CPU de 250 MHz, núcleo PPC 603e y periféricos en un solo chip, además de una memoria cache de 32kB.
- Memoria: 32 MB en SDRAM y 8 MB de memoria flash.
- Temporizadores: 4 temporizadores de propósito general de 32 bits con conteo descendente, un contador de tiempo de frecuencia de muestreo de 32 bits y contador base de 64 bits.
- Controladores de interrupción: Gestionan temporizadores, convertidores ADC, PWM, DSP, puerto UART e interrupciones internas.
- Convertidores ADC: 4 canales multiplexados a un ADC de 16 bits, y 4 ADC independientes de 12 bits.
- Convertidores DAC :8 convertidores DAC de 16 bits con un rango de salida de +- 10 V.



- 
- Entradas y salidas digitales: 20 I/O.
  - Encoders incrementales: 2 Encoders incrementales de 24 bits tecnología TTL o RS422.
  - Interfaz serial: UART.
  - DSP esclavo: TM320F240 de 16 bits.
  - Conexión: PCI de 32 bits.
  - Tamaño del conector: 185x106.68
  - Temperatura de operación: 0-55°C.
  - Fuente de alimentación: +5V a 2.5 A +12V a 0.3 A y -12V a 0.2 A.
  - Consumo de potencia: 18.5 W

Entre las diversas características que posee el módulo dSPACE, las utilizadas para el control de velocidad del PMSM son el módulo PWM y los convertidores ADC. En la Figura 6.6 se muestra la configuración de los pines de salida de las señales PWM, las cuales se enlazan al inversor mediante un conector DB25 para facilitar la conexión.



Connector (CP18)	Pin	Signal	Pin	Signal
	1	GND	20	GND
	2	SCAP1	21	SCAP2
	3	SCAP3	22	SCAP4
	4	GND	23	ST1PWM
	5	ST2PWM	24	ST3PWM
	6	GND	25	GND
	7	SPWM1	26	SPWM2
	8	SPWM3	27	SPWM4
	9	SPWM5	28	SPWM6
	10	SPWM7	29	SPWM8
	11	SPWM9	30	GND
	12	GND	31	GND
	13	GND	32	GND
	14	GND	33	GND
	15	GND	34	SSOMI
	16	SSIMO	35	SSTE
	17	SCLK	36	GND
	18	VCC (+5 V)	37	GND
	19	VCC (+5 V)		

Figura 6.6: Configuración de los pines de salida del PWM de [39].

El módulo PWM cuenta con las siguientes características:

- DSP esclavo con 3 canales de salida para la generación de señales PWM trifásicas, con un rango de frecuencia de 1.25 Hz a 5 Hz.
- Tres señales PWM controladas mediante el período en modo simétrico.
- Las señales PWM poseen componentes complementarios (señales negadas).
- Control de tiempo muerto entre cada señal PWM no invertida (PWM1, PWM3 y PWM5) y cada señal invertida (PWM2, PWM4 y PWM6).
- El ciclo de trabajo es programado de manera independiente y el tiempo muerto es especificado por el usuario.

- 
- Salidas de voltaje TTL.
  - Capacidad de corriente en las salidas de cada pin PWM de hasta 13 mA.

Por su parte el módulo de conversión ADC se conforma de 5 canales ADC, el funcionamiento puede ser tanto simultaneo y los canales de ADC de dos tipos:

- Un ADC multiplexado equipado con un equipo de muestreo y retención.
  - Resolución de 16 bits.
  - Rango de voltaje de entrada de -10V a +10 V.
  - Tiempo de conversión de 2us.
- ADC con funcionamiento independiente:
  - Resolución de 12 bits.
  - Rango de voltaje de entrada de -10V a +10 V.
  - Tiempo de conversión de 800 ns.

## **Módulo Motor/Dinamómetro**

El motor/dinamómetro (Modelo 8960-22) que se muestra en la Figura 6.7, está equipado con un motor CD de imanes permanentes, el cual puede configurarse en dos modalidades de operación: como dinamómetro o como motor. Para su correcto funcionamiento, requiere de una fuente de alimentación de 120 V a 60 Hz, que debe conectarse a través del conector colocado en la parte frontal del módulo.



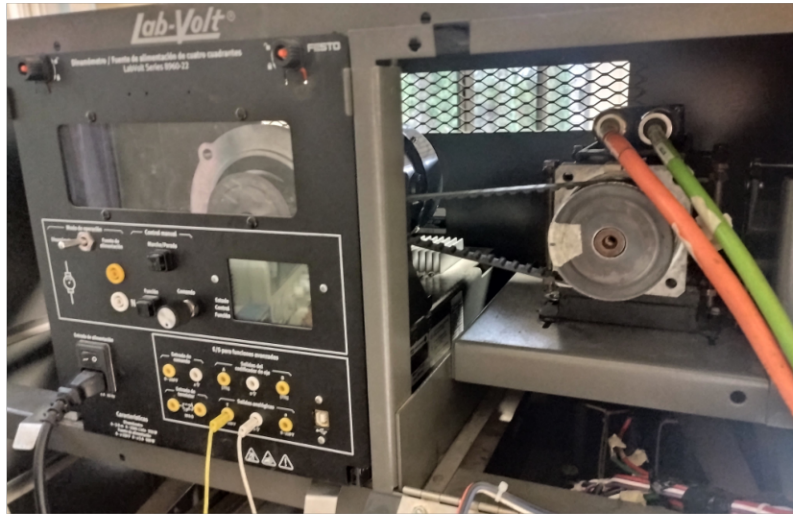


Figura 6.7: Motor/dinamómetro modelo 8960-22.

En la configuración de dinamómetro, los imanes permites del motor operan como en un generador de CD, cuyas terminales son conectadas a una carga eléctrica. La carga mecánica aplicada por el dinamómetro puede ajustarse manualmente mediante una perilla en el panel frontal del equipo o de manera externa mediante un voltaje de control.

Para las pruebas realizadas, el ajuste de la carga aplicada se llevó a cabo utilizando el panel de control. En panel también se encuentran indicadores digitales de par y velocidad, además de terminales de salida que permiten la extracción de los datos del dinamómetro como señales analógicas. Estas señales provenientes del sensor de par aplicado y del tacogenerador, se utilizaron durante las pruebas para generar gráficas de los resultados experimentales.

Para acoplar mecánicamente ambas maquinas, el PMSM y el motor/dinamómetro, el módulo de este último cuenta con una polea acoplada al eje y un sistema de tensores, para que la banda síncrona que unirá mecánicamente los ejes no tenga movimientos indeseados.

---

## Resultados obtenidos

Se realizaron pruebas experimentales en el laboratorio para el seguimiento de una velocidad angular deseada y los datos obtenidos fueron capturados mediante el uso del software Control y el módulo dSPACE. Durante las pruebas para asegurar el correcto funcionamiento del motor, se consideraron los parámetros nominales dados por el fabricante en la hoja de datos. Dichos parámetros se muestran a continuación:

- Par nominal: 3.2 [Nm]. Para máximo que puede ejercer el PMSM de forma continua sin exceder los límites térmicos.
- Velocidad nominal: 419 [rad/s]. Máxima velocidad angular del eje con una fuente de alimentación de 300 V
- Potencia nominal: 1230 [W]. Potencia entregada por el PMSM.

Una vez establecidos los parámetros de funcionamiento límites durante las pruebas de seguimiento de la trayectoria del PMSM, es pertinente establecer las trayectorias de referencia para las salidas planas. Las salidas planas del sistema son  $\omega$  e  $i_d$ , la componente de cuadratura produce par cuando la componente directa no produce ninguno [40], por lo tanto, la trayectoria de referencia será  $i_d^* = 0$ . La trayectoria para la salida plana  $\omega$  será dada por el polinomio Bézier, que tiene como valor inicial de -50 rad/s distante 4 segundos con un cambio suave de dirección de 8 segundos para alcanzar una velocidad final de 50 rad/s. Diferentes perfiles de par son aplicados durante diferentes pruebas con la misma trayectoria de velocidad. La primera prueba se realizó sin par aplicado, en la Figura 6.8 se muestran las gráficas de velocidad angular resultantes, velocidad deseada  $\omega^*$ , velocidad estimada  $\hat{\omega}$  y velocidad medida  $\omega$ .

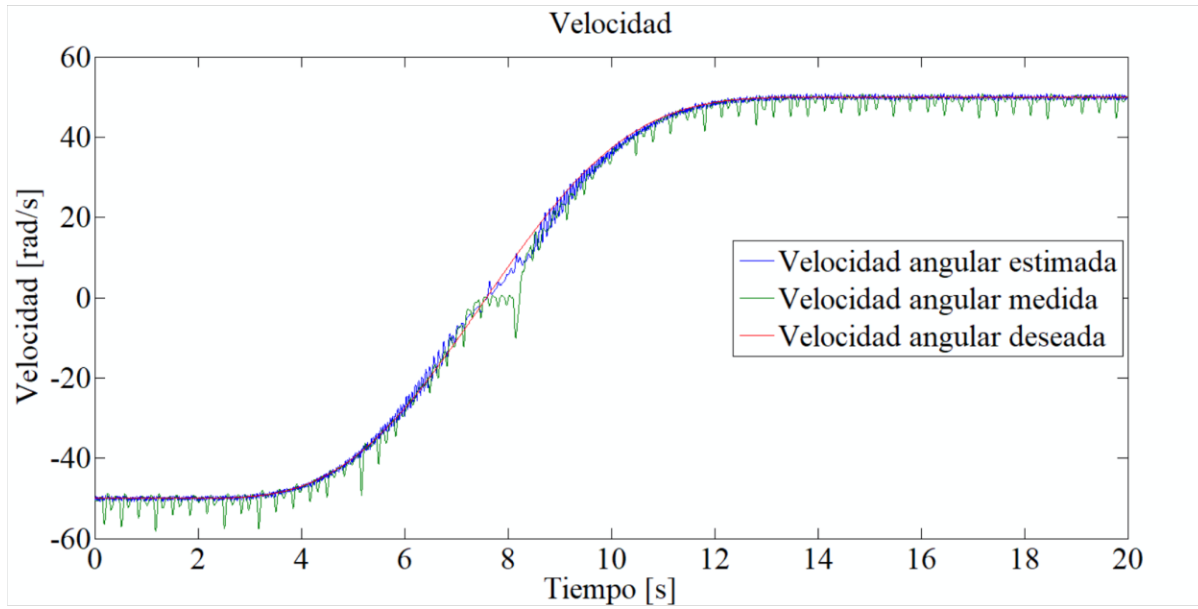


Figura 6.8: Gráfica de velocidad.

El error de velocidad del PMSM se muestra en la Figura 6.9, que presenta el error con respecto a la velocidad estimada ( $\omega^* - \hat{\omega}$ ) mientras que la Figura 6.10 ilustra el error con respecto a la velocidad medida ( $\omega^* - \omega$ ). En ambas graficas podemos apreciar que el error de velocidad se aproxima asintóticamente a cero, se aprecia también que el error aumenta al disminuir la velocidad e invertir la inercia del motor para cambiar la dirección de giro.

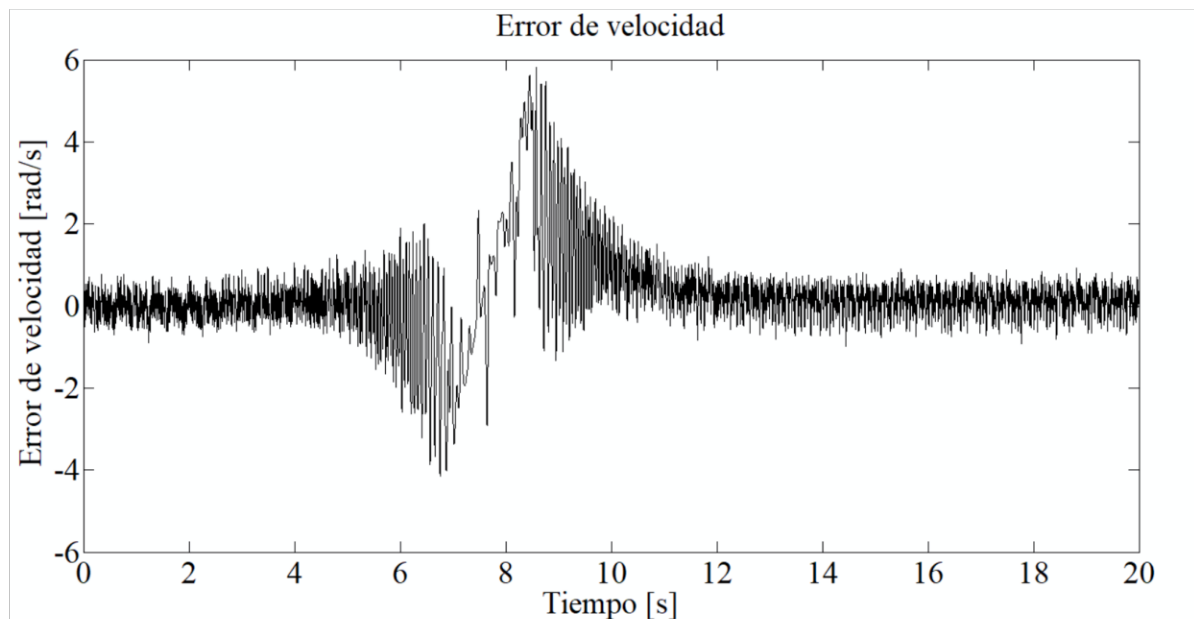


Figura 6.9: Gráfica de error de velocidad estimada.

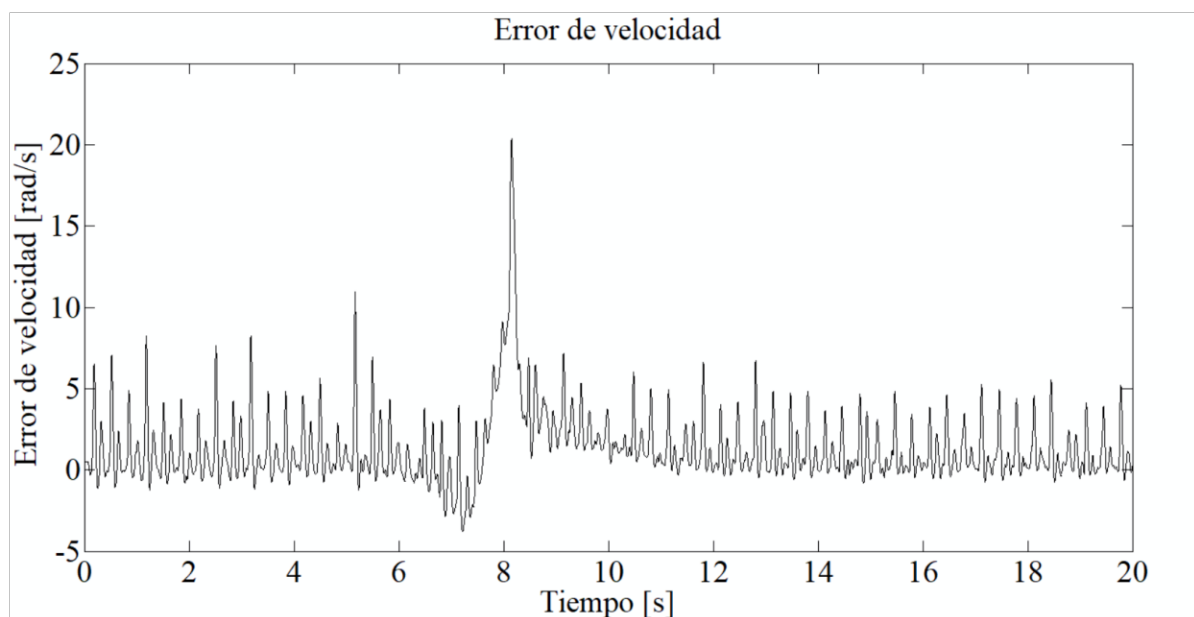


Figura 6.10: Gráfica de error de velocidad medida.

Las pruebas posteriores fueron realizadas con diferentes perfiles de par aplicado, en las Figuras 6.12, 6.12 y 6.13 se observan las gráficas de velocidad deseada  $\omega^*$ , velocidad estimada  $\hat{\omega}$  y velocidad medida  $\omega$  y los respectivos errores de velocidad con un par aplicado de 0.4 Nm que

comienza en el segundo 5 y finaliza en el segundo 11.

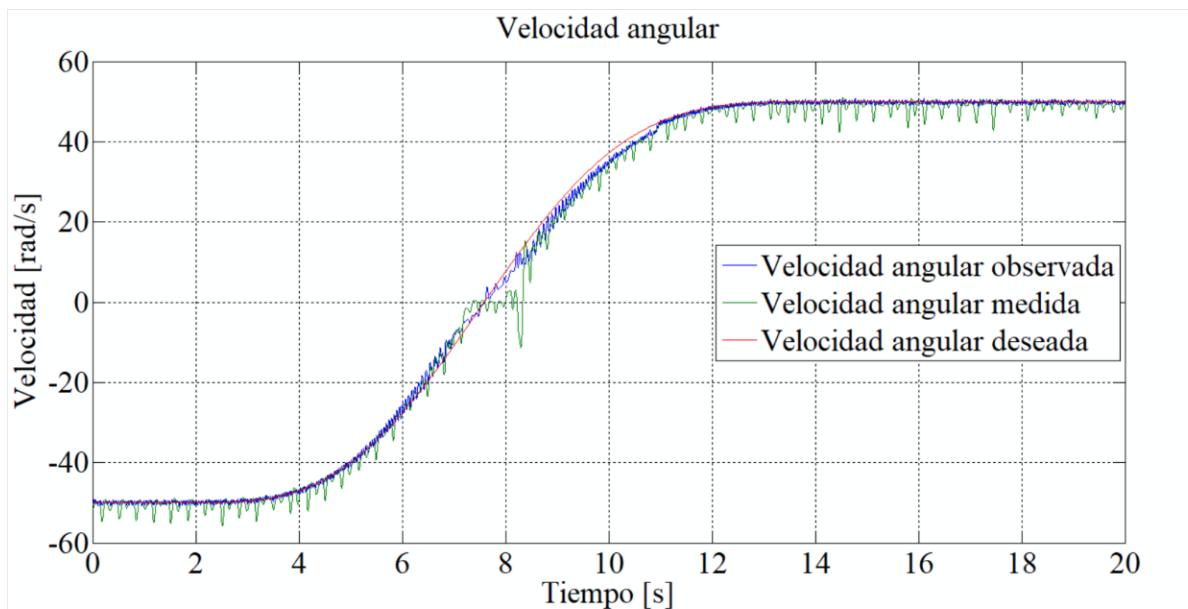


Figura 6.11: Gráfica de velocidad con par de carga.

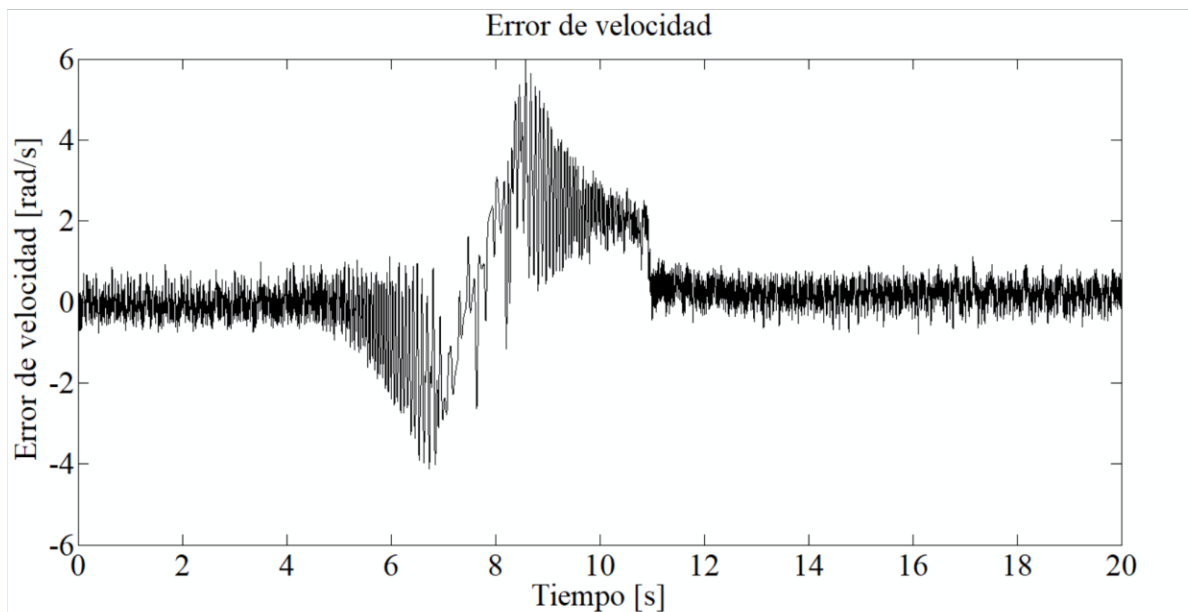


Figura 6.12: Gráfica de error de velocidad estimada.

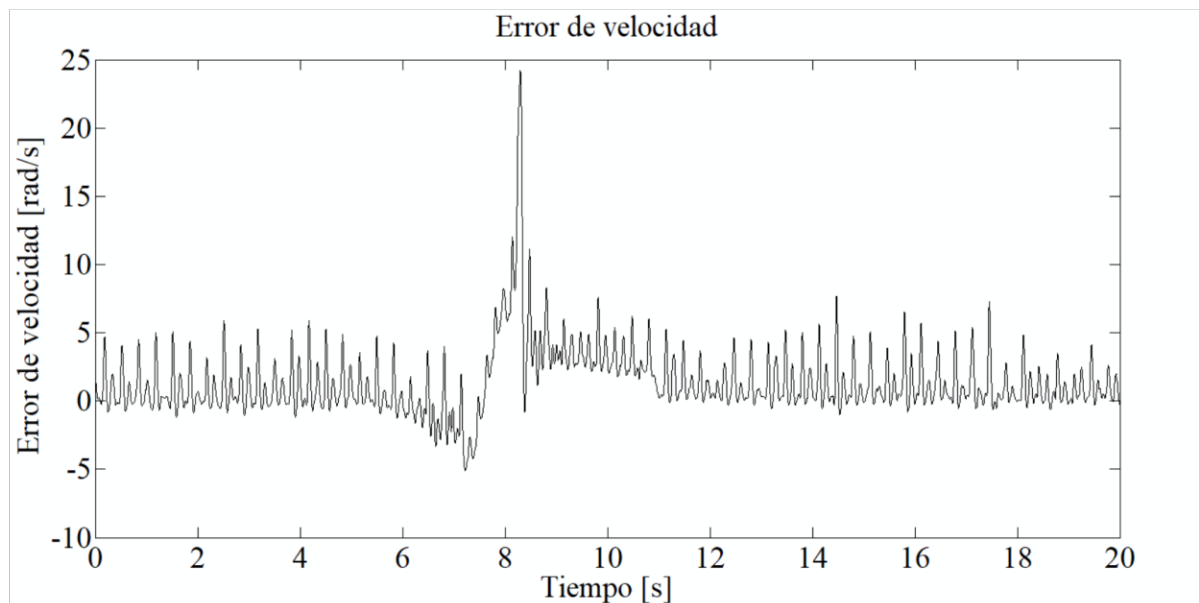


Figura 6.13: Gráfica de error de velocidad medida.

En las Figuras 6.11, 6.12 y 6.13 puede notarse el efecto del par aplicado, esto debido a que no se usa un estimador de torque, el perfil de par se muestra en la Figura 6.14.

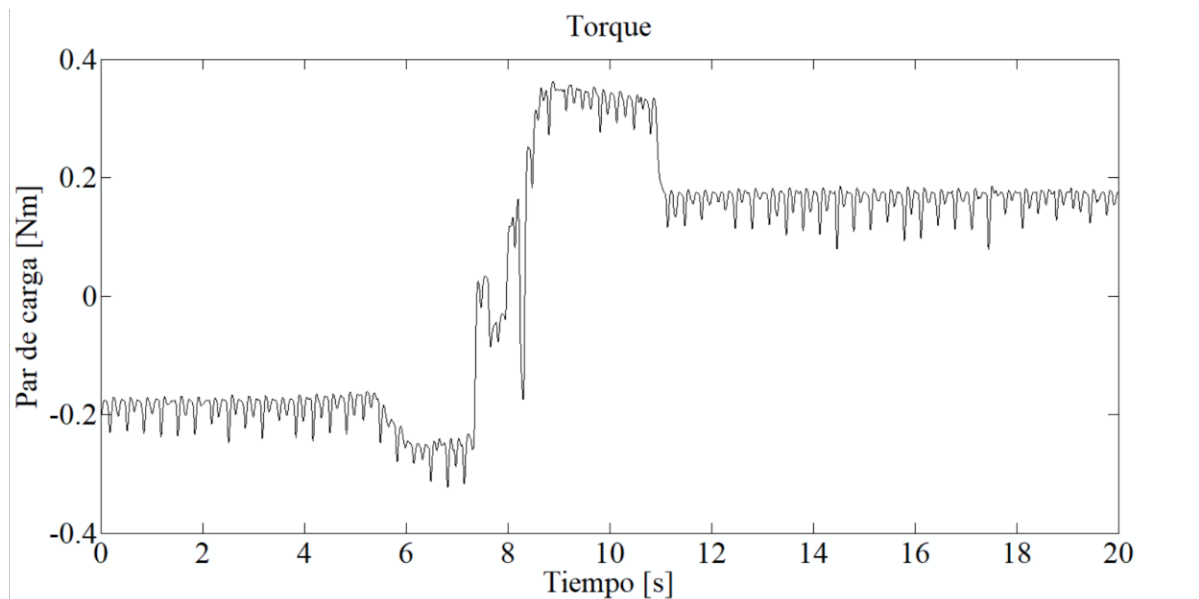


Figura 6.14: Gráfica del perfil de par aplicado

Una vez realizadas las pruebas de funcionamiento del controlador en condiciones de vacío y

carga, el siguiente paso consiste en llevar a cabo pruebas a baja velocidad. Para ello, la trayectoria deseada se establece mediante un polinomio Bézier, iniciando con un valor inicial de 0 rad/s, durante un intervalo de 4 segundos, seguido de un cambio suave de dirección en un período de 8 segundos, hasta alcanzar una velocidad final de 10 rad/s.

La prueba a baja velocidad se realizó sin par aplicado al eje de motor, las gráficas de velocidad obtenidas durante dicha prueba se muestran en la Figura 6.15, donde puede apreciarse la velocidad de referencia, la velocidad estimada y la velocidad medida.

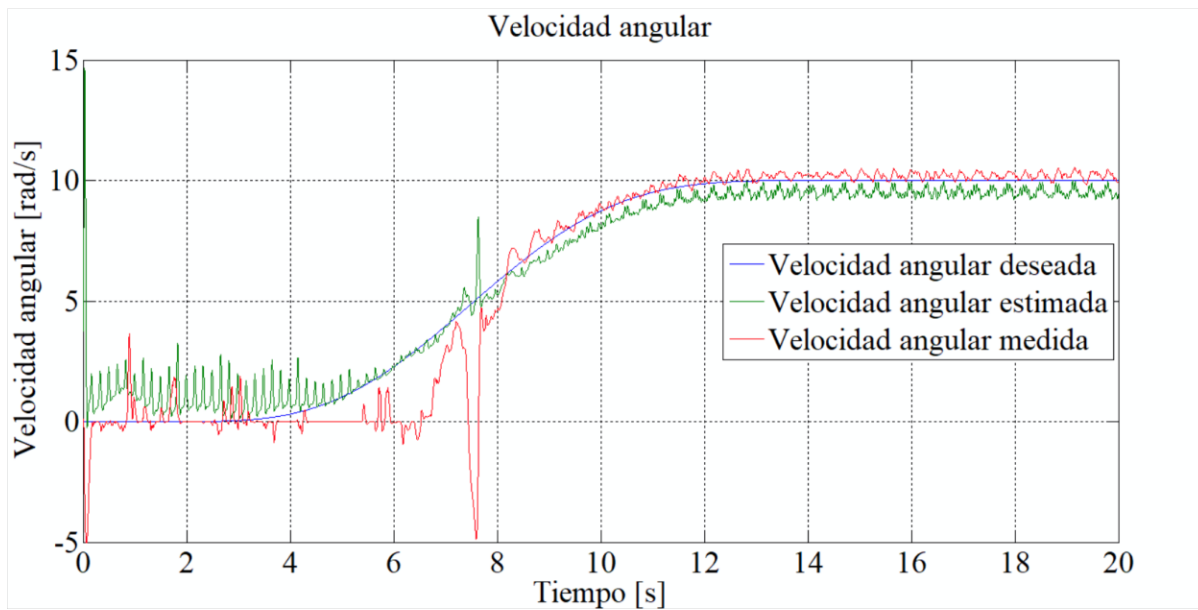


Figura 6.15: Gráfica de velocidad

En la Figura 6.16 se aprecia la gráfica del error de velocidad estimada ( $\omega^* - \hat{\omega}$ ), por otra parte, en la Figura 6.17 se muestra el error de velocidad medida ( $\omega^* - \omega$ ).

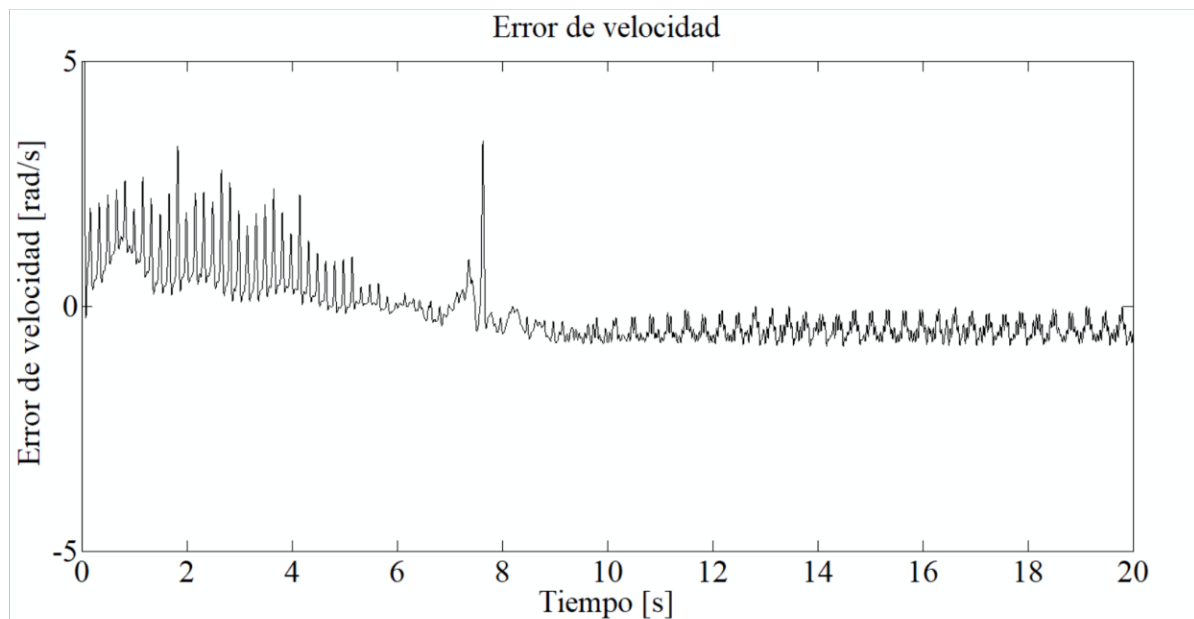


Figura 6.16: Gráfica de error de velocidad estimada.

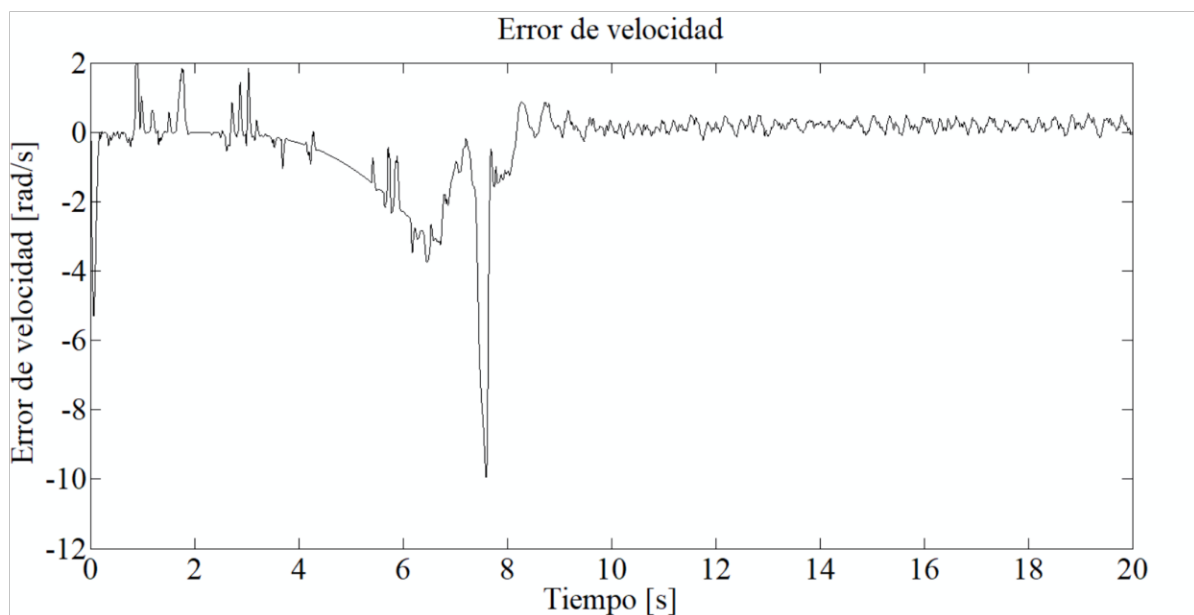


Figura 6.17: Gráfica de error de velocidad medida.

En la Figura 6.16 podemos apreciar el desempeño de observador, es fácil notar que el mayor error de estimación ocurre cuando el PMSM se encuentra en reposo, el error se reduce una vez comienza el movimiento y la corriente comienza a circular por el bobinado. De manera simula



en la Figura 6.17 se muestra el desempeño del controlador, se puede notar que le toma un tiempo al eje del motor romper la inercia inicial, sin embargo, el controlador hace su trabajo llevando el error de velocidad a 0.



## Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha desarrollado un controlador basado en modos deslizantes para el control de la velocidad angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes (PMSM), sin la necesidad de utilizar un sensor de posición, permitiendo un seguimiento suave de la trayectoria deseada. Tanto el controlador como el observador fueron evaluados en diversas condiciones experimentales, demostrando un desempeño satisfactorio en estado estable, en estado transitorio y ante perturbaciones de par, lo que confirma su robustez

A continuación, se presentan las principales características obtenidas durante el desarrollo de este trabajo:

- El modelo matemático del PMSM en coordenadas  $d - q$  simplifica la implementación del método de control por modos deslizantes.
- El modelo matemático del PMSM en coordenadas  $\alpha - \beta$  optimiza el diseño del observador de las variables de posición y velocidad.
- El observador GPI permite una aproximación precisa al valor real de las variables de posición y velocidad angular, con un error cercano a cero, a pesar de la presencia de características no modeladas o desconocidas, así como del par de carga aplicado.
- El controlador cumple su objetivo de seguimiento de la velocidad de referencia bajo condiciones normales de operación mediante el método de modos deslizantes. Se consiguió el seguimiento de trayectoria efectivo a baja velocidad, en un rango de 0 a 10 rad/s.
- El diseño de una trayectoria de referencia suave para la velocidad angular permitió un arranque suave del PMSM, evitando sobretensiones y picos de corriente durante el proceso de arranque.

- 
- El PMSM mantiene una velocidad angular conforme a la trayectoria deseada, incluso ante perturbaciones de par de carga y dinámicas no modeladas.

El diseño del sistema en Matlab Simulink® permite una segmentación modular del algoritmo de control y con ello implementar múltiples bloques de ecuaciones diferenciales interconectados, simplificando las tareas de pruebas e implementación. La técnica sin sensores para estimación de posición y velocidad es versátil y puede aplicarse a distintas técnicas de control, el observador GPI con su amplio rango de operación brinda excelentes resultados en esa tarea. La implementación del algoritmo de control por medio del dSPACE hace que la tarea de programación del controlador se simplifique y agiliza el monitoreo en tiempo real de las variables, así como el registro de los datos obtenidos. También permite la medición simultánea de las corrientes de fase por medio de los ADC manteniendo una frecuencia de muestreo baja permitiendo que el periodo de muestreo del controlador sea de  $2 \times 10^{-4}$ , lo que significa que todas las operaciones necesarias para el controlador son ejecutadas por el microcontrolador en un periodo menor a 0.0002 segundos, sin reducir la eficiencia o reducir la rapidez del controlador.

## Referencias

---

- [1] J.-J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [2] Y. Jun, L. Huixian, L. Shihua, and C. Xisong, “Nonlinear disturbance observer based robust tracking control for a pmsm drive subject to mismatched uncertainties,” in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 2012, pp. 830–835.
- [3] K. Zheng, T. Shen, and Y. Yao, “A design approach for observer-based robust traction control with pmsm,” in *2006 SICE-ICASE International Joint Conference*, 2006, pp. 3664–3669.
- [4] S. Murshid and B. Singh, “An improved smo for position sensorless operation of pmsm driven solar water pumping system,” in *2020 IEEE International Conference on Power Electronics, Smart Grid and Renewable Energy (PESGRE2020)*, 2020, pp. 1–5.
- [5] C.-I. Nicola, Marcel, “Sensorless control of pmsm using backstepping control and eso-type observer,” in *2020 12th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)*, 2020, pp. 1–6.
- [6] K. V. Tejan, R. M. Pindoriya, and B. S. Rajpurohit, “Rotor position sensorless technique using high-speed sliding mode observer for pmsm drive,” in *2021 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting (IAS)*, 2021, pp. 1–8.

- 
- [7] P. V. Medagam, T. Yucelen, and F. Pourboghrat, "Adaptive sdre-based nonlinear sensorless speed control for pmsm drives," in *2007 39th North American Power Symposium*, 2007, pp. 518–522.
- [8] L. Li, J. Xiao, Y. Zhao, K. Liu, X. Peng, H. Luan, and K. Li, "Robust position anti-interference control for pmsm servo system with uncertain disturbance," *CES Transactions on Electrical Machines and Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 151–160, 2020.
- [9] J. Li, H. Ren, S. Wang, and Y. Fang, "Integral sliding mode control for pmsm with uncertainties and disturbances via nonlinear disturbance observer," in *2020 39th Chinese Control Conference (CCC)*, 2020, pp. 2055–2060.
- [10] R. Mocanu, R. C. Rafaila, and A. Onea, "Predictive control of pmsm in stator frame under passivity constrain," in *2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 2020, pp. 898–903.
- [11] P. Thounthong, S. Sikkabut, N. Poonnoy, P. Mungporn, B. Yodwong, P. Kumam, N. Bizon, B. Nahid-Mobarakeh, and S. Pierfederici, "Nonlinear differential flatness-based speed/torque control with state-observers of permanent magnet synchronous motor drives," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 54, no. 3, pp. 2874–2884, 2018.
- [12] O. D. Ramírez Cárdenas, "CONTROL DE POSICIÓN DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES," Ph.D. dissertation, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León Oaxaca, Dec. 2014. [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/65>
- [13] C. Escobar Noriega, "CONTROL DE SEGUIMIENTO DE VELOCIDAD BASADO EN PASIVIDAD DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES, SIN SENSOR DE POSICIÓN," Ph.D. dissertation, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León Oaxaca, Jun. 2015. [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/98>

- [14] V. Sanjuan, “Diseño e Implementación de un Controlador de velocidad Adaptativo para el Motor Síncrono de Imanes Permanente,” Ph.D. dissertation, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León Oaxaca, Feb. 2020. [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/304>
- [15] R. Mayoral Lagunes, “Control de velocidad de un motor síncrono de imanes permanentes accionado por un inversor trifásico multinivel,” Ph.D. dissertation, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León Oaxaca, Aug. 2020. [Online]. Available: <http://repositorio.utm.mx:8080/jspui/handle/123456789/361>
- [16] SENER. (2025) Balance nacional de energía 2023. [Online]. Available: [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/977268/Balance\\_Nacional\\_de\\_Energ\\_a\\_2023.FINAL06.02.2025.1.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/977268/Balance_Nacional_de_Energ_a_2023.FINAL06.02.2025.1.pdf)
- [17] CONUE. (2009) Motores eléctricos. [Online]. Available: [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/93849/Motores\\_02.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/93849/Motores_02.pdf)
- [18] k. Ramu, *Permanet Magnet Synchronous and brushless CD Motor Drives*, 1st ed. Boca Raton FL: CRC press, 2010.
- [19] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, and S. Umans, *Máquinas eléctricas*, 6th ed. McGraw Hill, 2003.
- [20] C. Stephen J., *Máquinas eléctricas*, 5th ed. México: MacGraw Hill, 2012.
- [21] M. A. Duran, “Diseño de un controlador no lineal basado en pasividad de un motor síncrono,” Ph.D. dissertation, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, Jan. 2004. [Online]. Available: <https://www.cenidet.edu.mx/subplan/biblio/seleccion/Tesis/ME%20Miguel%20Angel%20Duran%20Fonseca%202004.pdf>
- [22] B. Bose, *Modern Power Electronics and AC Drives*, 1st ed. Prentice Hall, 2001.

- 
- [23] P. C. Sen, *Principes of Electric Machines and power electronics*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 2014.
- [24] S. Vaez-Zadeh, *Control of Permanent Magnet Synchronous Motors*, 1st ed. United States of America: Oxford University Press, 2018.
- [25] S. B. Iderus, “The field oriented control of a permanent magnet synchronous motor (pmsm) by using fuzzy logic,” University Tun Hussein Onn Malaysia, Project Report, January 2014.
- [26] J. P. B. Wilfrid Perruquetti, *SLIDING MODE CONTROL IN ENGINEERING*, ser. IEEE Series. Marcel Dekker AG, New York,, 2002.
- [27] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Rusia: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [28] D. Luenberger, “An introduction to observers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 6, pp. 596–602, 1971.
- [29] K. Ogata, *Ingeniería de control moderno*, 5th ed. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, 2010.
- [30] H. Sira-Ramirez, V. Feliu-Batlle, F. Beltran-Carbajal, and A. Blanco-Ortega, “Sigma-delta modulation sliding mode observers for linear systems subject to locally unstable inputs,” in *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2008, pp. 344–349.
- [31] M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau, and H. Sira-Ramírez, “CORRECTEURS PROPORTIONNELS-INTÉGRAUX GÉNÉRALISÉS,” *ESAIM*, vol. 7, pp. 23–43, Dec. 2002. [Online]. Available: <https://www.esaim-cocv.org/articles/cocv/pdf/2002/01/cocvVol7-2.pdf>
- [32] D. Martinez-Vazquez, A. Rodriguez-Angeles, and H. Sira-Ramirez, “Robust gpi observer under noisy measurements,” in *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2009, pp. 1–5.



- [33] A. Luviano-Juárez, J. Cortés-Romero, and H. Sira-Ramírez, “Synchronization of chaotic oscillators by means of generalized proportional integral observers,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 20, no. 5, pp. 1509–1517, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1142/S0218127410026654>
- [34] H. Sira-Ramírez, A. Luviano-Juárez, and J. Cortés\_Romero, “Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos,” *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*, vol. 8, Jan. 2011.
- [35] H. Sira-Ramírez, J. Linares-Flores, C. García-Rodríguez, and M. A. Contreras-Ordaz, “On the Control of the Permanent Magnet Synchronous Motor: An Active Disturbance Rejection Control Approach,” *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS*, vol. 22, no. 5, Sep. 2014.
- [36] J. Linares-Flores, J. Reger, and H. Sira-Ramírez, “Load Torque Estimation and Passivity-Based Control of a Boost-Converter/DC-Motor Combination,” *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, vol. 18, no. 6, Nov. 2010.
- [37] H. Sira-Ramírez and R. Silva-Ortogoza, *Control Design Techniques in Power Electronics Devices*. London: Springer, 2006.
- [38] E. Gorrostieta, E. Vargas-Soto, L. Zuñiga-Avilés, J. Rodríguez-Reséndiz, and S. Tovar-Arriaga, “Mechatronics methodology: 15 years of experience,” *Ingeniería e Investigación*, vol. 35, no. 3, pp. 107–114, 2015. [Online]. Available: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=>
- [39] D. Board. (2004) dspace ds1104 manual. [Online]. Available: [https://www.artisanng.com/info/dSPACE\\_CLP1104\\_Manual\\_201663013420.pdf?srsId=AfmBOoqIGvQ2De3j4rxn6BOnRjIRuQs3u\\_1lbokdFh-sY9P7gsMt89TM](https://www.artisanng.com/info/dSPACE_CLP1104_Manual_201663013420.pdf?srsId=AfmBOoqIGvQ2De3j4rxn6BOnRjIRuQs3u_1lbokdFh-sY9P7gsMt89TM)
- [40] J. Chiasson, *Modeling and High Performance Control of Electric Machines*, ser.

---

IEEE Press. Wiley, 2005. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=cq6RPPsOyt8C>

- [41] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, 1st ed. Palo Alto California: McGraw Hill, 1994.
- [42] S. E. Lyshevski, *Electromechanical Systems and Divices*, 1st ed. New York: CRC Press, 2008.

# Transformaciones de Clarke y Park

---

## Transformación de Clarke

En la Figura 18 podemos apreciar las variables trifásicas  $f_a$ ,  $f_b$  y  $f_c$  desfasadas entre ellas  $120^\circ$  a lo largo de sus correspondientes ejes de referencia trifásico  $a$ ,  $b$  y  $c$  también podemos ver un eje bifásico ortogonal conocido como eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ . Es importante destacar que el eje  $\alpha$  sistema estacionario se encuentra alineado con el eje  $a$  del sistema trifásico. La transformación de Clarke permite cambiar las variables del eje  $a$ ,  $b$  y  $c$  al eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ .

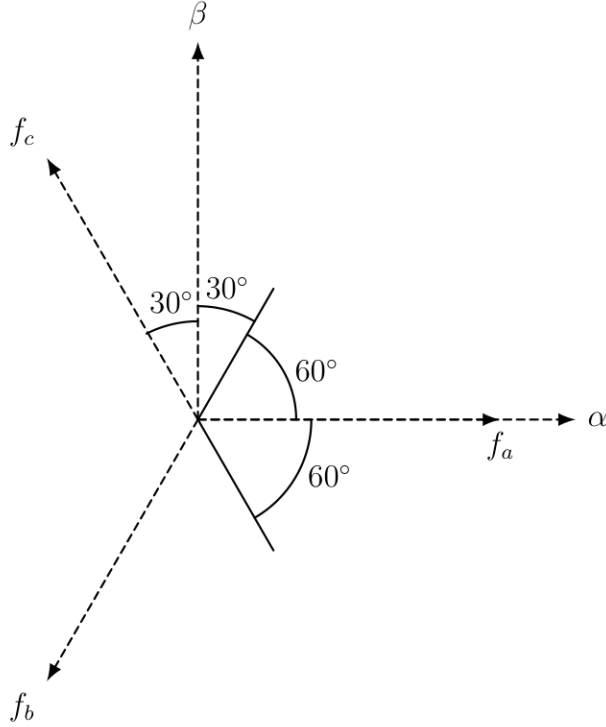


Figura 18: Eje de referencia  $a, b$  y  $c$  y eje de referencia  $\alpha_\beta$ .

Al proyectar las variables del eje de referencia  $a, b, c$  sobre el eje de referencia  $\alpha - \beta$ , podemos apreciar que realizando las sumas vectoriales necesarias y ordenado matricialmente resulta la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\cos(60^\circ) & \cos(30^\circ) & 1 \\ -\cos(60^\circ) & -\cos(60^\circ) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

La transformación inversa de Clarke está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (2)$$

La ecuación 2 también puede expresarse en términos trigonométricos como:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(60^\circ) & -\cos(60^\circ) \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\cos(30^\circ) \\ \cos(60^\circ) & \cos(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (3)$$

La ecuación 2 o 3 es la transformación con la cual se representan las variables  $f_a$ ,  $f_b$  y  $f_c$  en un eje de referencia bifásico estacionario  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$ .

Una de las ventajas de esta transformación es que aísla las componentes de frecuencia cero, concentrándolas en el eje de secuencia cero. En sistemas de tres hilos, donde no existe conductor de neutro dichas componentes no se generan, por lo que pueden eliminarse de las ecuaciones anteriores.

## Transformación de Park

La transformada de Park efectúa un cambio de coordenadas que transforma las variables trifásicas del sistema de referencia estacionario en un sistema ortonormal rotativo sincronizado con el giro del motor. Por otra parte, la transformada inversa de Park permite realizar el cambio de coordenadas contrario, llevando las coordenadas en sistema ortonormal giratorio un eje de referencia estacionario. Ya que la transformada da Clarke lleva el sistema trifásico estacionario  $a b c$  al sistema bifásico fijo  $\alpha - \beta$  el siguiente paso es analizar la rotación del eje  $d - q$  con respecto al eje fijo  $\alpha - \beta$ . En la Figura 18 se observa el eje de referencia bifásico estacionario  $\alpha - \beta$ , también se observan las variables  $f_d$  y  $f_q$  que se encuentran en un eje de referencia bifásico síncrono  $d - q$ . Tanto el eje de referencia  $d - q$  como sus variables  $f_d$  y  $f_q$  se encuentra rotando respecto al eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ , con una velocidad angular  $\omega_e$ .

Con base en Figura 19 se realiza un análisis de la proyección de las variables  $f_a$  y  $f_b$  sobre sistema de referencia  $\alpha - \beta$ , con la finalidad de obtener las ecuaciones en su forma matricial.

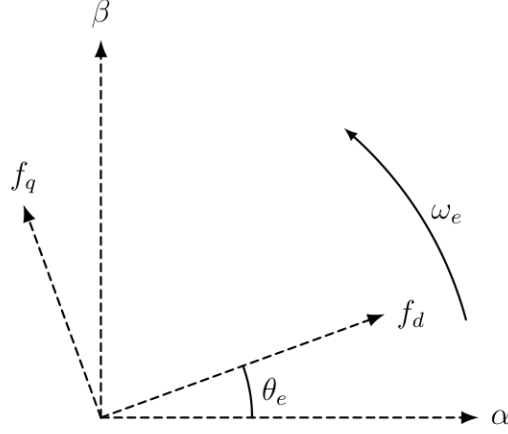


Figura 19: Eje de referencia síncrono  $d - q$ , eje de referencia  $\alpha - \beta$ .

Dicha expresión matricial representa las variables del sistema giratorio  $d - q$  en función de las variables del eje de referencia  $\alpha - \beta$ , tal como se muestre en la ecuación siguiente.

$$\begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) & 0 \\ -\sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

La transformada inversa resulta en la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) & 0 \\ -\sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 0 \\ \sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación 2 en 4 y simplificando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (6)$$

En 6 podemos apreciar con claridad que aplicando la transformación a un sistema en el eje de referencia  $a b c$  podemos llegar a el modelo giratorio  $d - q$  eso debido a que estas transformacio-

nes son válidas para cualquiera de las variables del flujo de enlace, corriente o voltaje trifásico. Lo cual es de gran utilidad para el desarrollo de modelos matemáticos y controladores ya que convierte señales periódicas en estacionarias.





# Modelo matemático del PMSM

---

Para obtener el modelo matemático del PMSM, es indispensable desarrollar previamente el modelo eléctrico en el eje de referencia  $a\ b\ c$ . Posteriormente se aplican las transformaciones de Clarke y Park lo que permite obtener un modelo en los sistemas de coordenadas  $\alpha - \beta$  y  $d - q$ .

## Consideraciones para la obtención del modelo matemático

Para el modelado matemático del PMSM tanto en condiciones de estado estacionario como de estado transitorio se asumen los siguientes criterios [41]:

- El devanado del estator es trifásico se encuentra conectado en estrella.
- Los efectos de la saturación magnética se consideran insignificantes.
- Las resistencias eléctricas de los devanados de cada fase se consideran iguales entre ellas.
- Las pérdidas del núcleo como la histéresis y las corrientes Eddy no se consideran.
- Los tres devanados se encuentran perfectamente distribuidos exactamente a  $120^\circ$  grados mecánicos uno del otro.
- El rotor este compuesto por un núcleo de hierro con Imanes permanentes montados en la superficie del rotor.

- 
- Los imanes permanentes del rotor están fabricados de un material magnético con alta resistencia eléctrica, lo que provoca que las corrientes inducidas en el rotor no sean consideradas.
  - La distribución del de la Fuerza Contra Electro Motriz que circula por el devanado del estator tiene forma sinusoidal.
  - Se considera que la máquina tiene una carga balanceada y sin neutro, en consecuencia, las componentes de secuencia cero son nulas.

## Circuito equivalente

El primer paso para obtener el modelo matemático del circuito equivalente del PMSM, consiste en representar devanado trifásico y las variables eléctricas asociadas a él. Posteriormente, se determinan los elementos de la matriz de inductancias y los componentes del vector de enlaces de flujo producidos por el imán. Finalmente, se construye un circuito equivalente para la primera fase con el propósito de analizar el comportamiento en estado estacionario. Una vez obtenido este análisis el circuito, los resultados pueden extrapolarse al resto de las fases para la representación trifásica completa. Generalmente, el devanado trifásico del estator del PMSM se encuentra conectado en configuración estrella. En esta disposición cada uno de los devanados es representado mediante una resistencia y una inductancia, como se muestra en la Figura 20. Dado que los devanados son idénticos, todos tienen la misma resistencia representada por  $r_e$ . Las corrientes que circulan por los devanados son  $i_a, i_b, i_c$ , mientras que los voltajes aplicados a cada fase se representan como  $v_a, v_b, v_c$ .

Los enlaces de flujo se definen como el producto de las inductancias por sus respectivas corrientes. Para expresar los enlaces de flujo del motor se realiza una suma de los enlaces de flujo mutuos, los propios de cada fase del estator y los enlaces dados por el material magnético en el

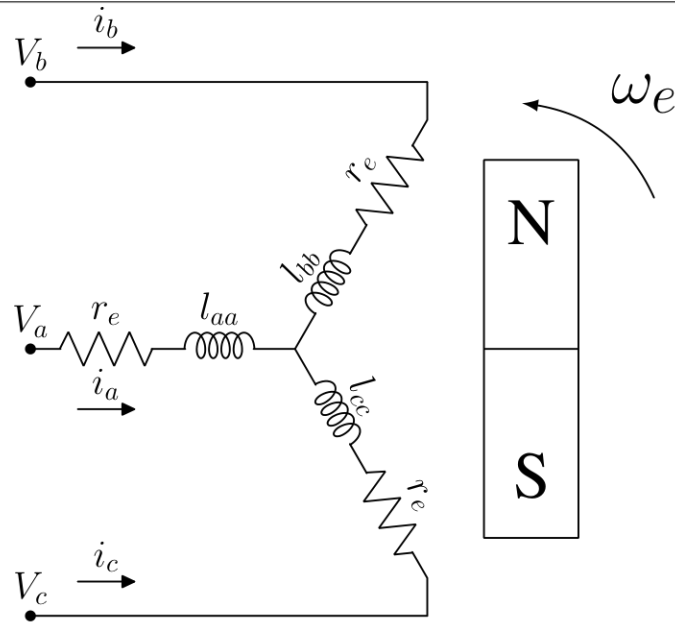


Figura 20: Devanados del estator modificado de [41].

rotor. Las ecuaciones resultantes para cada fase tienen la forma que se muestra en la ecuación 7.

$$\begin{aligned}
 \lambda_a &= l_{aa}i_a + l_{ab}i_b + l_{ac}i_c + \lambda_{am} \\
 \lambda_b &= l_{ba}i_a + l_{bb}i_b + l_{bc}i_c + \lambda_{bm} \\
 \lambda_c &= l_{ca}i_a + l_{cb}i_b + l_{cc}i_c + \lambda_{cm}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Donde  $\lambda_a, \lambda_b$  y  $\lambda_c$  son los enlaces de flujo del motor,  $l_{aa}, l_{ab}, l_{ac}, l_{bb}, l_{ba}, l_{bc}, l_{cc}, l_{ca}$ , y  $l_{cb}$  son las inductancias de los devanados del estator mientras que  $\lambda_{am}, \lambda_{bm}$  y  $\lambda_{cm}$ , son los enlaces de flujo del imán permanente, los cuales son funciones periódicas de  $\theta_e$  denotadas por la ecuación 8. La magnitud  $\lambda_m$  de los imanes permanentes la determina el material del imán permanente[42].

$$\begin{aligned}
 \lambda_{am} &= \lambda_m \cos(\theta_e) \\
 \lambda_{bm} &= \lambda_m \cos\left(\theta_e - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 \lambda_{cm} &= \lambda_m \cos\left(\theta_e + \frac{2}{3}\pi\right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Reescribiendo matricialmente las ecuaciones 7 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Donde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad y \quad \Lambda_m = \begin{bmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Por lo cual, la ecuación matricial de enlaces de flujo 9 puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Lambda = LI + \Lambda_m \quad (11)$$

Siendo  $\Lambda$  el vector de enlaces de flujo del motor,  $L$  la matriz de inductancias,  $I$  el vector de las corrientes de fase y  $\Lambda_m$  el vector de enlaces de flujo producidos por el imán. Es necesario conocer los elementos de la matriz  $L$  de la ecuación 11 para así calcular el circuito que representa a la fase  $a$  del motor.

## Determinación de la matriz de inductancias del estator

La matriz  $L$  se compone de las inductancias del motor, las cuales dependen del desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$  entre los ejes magnéticos del rotor y estator. Cuando los subíndices de las inductancias  $l$  son iguales denotan que la inductancia es propia ( $l_{aa}$ ,  $l_{bb}$  y  $l_{cc}$ ) mientras que los subíndices diferentes indican que se trata de inductancias mutuas entre devanados ( $l_{ab}$ ,  $l_{ac}$ ,  $l_{ba}$ ,  $l_{bc}$ ,  $l_{ca}$ ,  $l_{cb}$ ). De forma general la inductancia  $l_{ij}$  es la inductancia del devanado  $i$  causada con

la corriente  $j$ .

## Inductancias propias del estator

La auto inductancia o inductancia propia  $l_{aa}$  es la razón del enlace de flujo del devanado de la fase  $a$  y la corriente  $i_a$  siendo las demás corrientes iguales a cero. Esta inductancia posee una componente de dispersión  $L_{ls}$  atribuible al flujo disperso en el devanado y a una componente de magnetización provocada por el flujo magnético causado por el devanado. La inductancia  $l_{aa}$  alcanza su máximo cuando  $\theta_e = 0^\circ$ , alcanza su mínimo cuando  $\theta_e = 90^\circ$ , vuelve a su máximo en  $\theta_e = 180^\circ$  y así sucesivamente. La fuerza magnetomotriz de la fase  $a$  ( $F_{ma}$ ) tiene una distribución sinusoidal cuyo valor máximo  $N_s i_a$  está centrado en el eje magnético de la fase  $a$ . La Figura 21 muestran las componentes de la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$  a lo largo de los ejes  $d$  y  $q$ .

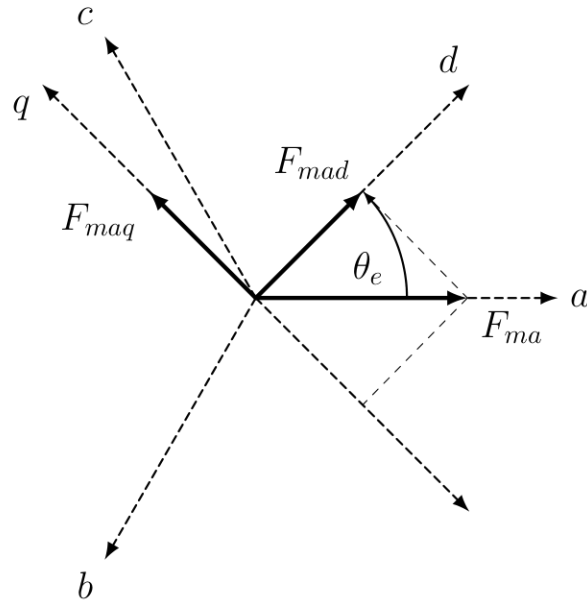


Figura 21: Componentes  $F_{mad}$  y  $F_{maq}$  de la fuerza  $F_{ma}$  modificado de [41].

Tal que  $F_{ma} = N_s i_a$  es la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$ . Las componentes de  $F_{ma}$  a lo largo

de los ejes del rotor se expresan mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} F_{mad} &= F_{ma} \cos \theta_e \\ F_{maq} &= -F_{ma} \sin \theta_e \end{aligned} \quad (12)$$

Un rotor de polos salientes tendrá distintos coeficientes de permeabilidad magnética  $P_d$  y  $P_q$ , por lo tanto, los flujos por polo en el entrehierro a lo largo de los ejes  $d-q$  se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{ad} &= P_d F_{ma} \cos \theta_e \\ \Phi_{aq} &= -P_q F_{ma} \sin \theta_e \end{aligned} \quad (13)$$

Así el enlace de flujo de la fase  $a$  en el entre hierro se expresa en su totalidad de la forma siguiente:

$$\lambda_{aa0} = N_s (\Phi_{ad} \cos \theta_e - \Phi_{aq} \sin \theta_e) \quad (14)$$

Sustituyendo  $\Phi_{ad}$  y  $\Phi_{aq}$  en la ecuación 14 si tiene:

$$\lambda_{aa0} = N_s F_{ma} (P_d \cos^2 \theta_e + P_q \sin^2 \theta_e) \quad (15)$$

Usando las identidades trigonométricas  $\cos^2 \theta_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_e$  y  $\sin^2 \theta_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_e$ , la ecuación resultante es:

$$\lambda_{aa0} = N_s F_{ma} \left( \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta_e \right) \quad (16)$$

La relación entre el enlace de flujo  $\lambda_{aa0}$  y la inductancia  $l_{aa0}$  es:

$$l_{aa0} = \frac{\lambda_{aa0}}{i_a} = \frac{\lambda_{aa0}}{F_{ma}/N_s} = \frac{N_s \lambda_{aa0}}{F_{ma}} \quad (17)$$

La componente de la magnetización de la inductancia propia de la fase  $a$  se denota como:

$$l_{aa0} = N_s^2 \left( \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta_e \right) = \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \quad (18)$$

Donde el valor promedio de la inductancia de magnetización se denota por  $\bar{L}_m = N_s^2 \left( \frac{P_d + P_q}{2} \right)$ , mientras que  $L_{\Delta m} = N_s^2 \left( \frac{P_d - P_q}{2} \right)$  corresponde a la amplitud pico de la variación sinusoidal de la magnetización. Además, a la inductancia  $l_{aa0}$ , se suma la inductancia asociada a la componente de dispersión  $L_{ls}$ , la cual se origina a causa de flujo generado por  $i_a$  que no cruza el entrehierro y afecta exclusivamente al devanado de la fase  $a$ . En consecuencia, la inductancia total se expresa de la siguiente manera:

$$l_{aa} = L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \quad (19)$$

La variación de la inductancia propia  $l_{aa}$  con respecto al ángulo  $\theta_e$  se muestra en la Figura 22.

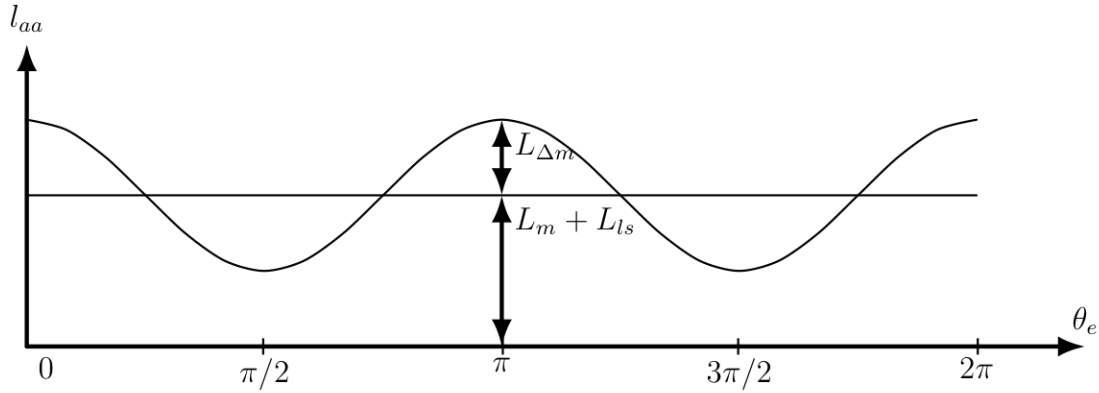


Figura 22: Comportamiento de la inductancia propia del devanado  $a$  de [41]

Debido a que los devanados de las fases  $b$  y  $c$  son prácticamente iguales a los de la fase  $a$ , pero con un desplazamiento de  $-\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{2\pi}{3}$  radianes eléctricos respectivamente, las inductancias propias del estator son:

$$\begin{aligned}
l_{aa} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \\
l_{bb} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\
l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

## Inductancias mutuas del estator

Las inductancias mutuas se definen como la razón entre enlace de flujo de un devanado con respecto a la corriente que circula en un segundo devanado, bajo la condición de que las demás corrientes sean nulas. En ese sentido, la inductancia mutua  $l_{ab}$  se determina evaluando el enlace de flujo correspondiente a la fase  $b$  ( $\lambda_{ba}$ ) en el entrehierro, cuando únicamente se excita la fase  $a$ . Para obtener el enlace de flujo de fase  $b$  inducido por la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$ , se sustituye  $\theta_e$  por  $\theta_e - \frac{2\pi}{3}$  en la ecuación 14.

$$\lambda_{ba} = N_s \left[ \Phi_{ad} \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) - \Phi_{aq} \sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \tag{21}$$

Sustituyendo los valores de  $\Phi_{ad}$  y  $\Phi_{aq}$  previamente dados, en la ecuación 15 se obtiene:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ P_d \cos \theta_e \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + P_q \sin \theta_e \sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \tag{22}$$

Simplificando la expresión anterior con ayuda de las identidades trigonométricas 23.

$$\begin{aligned}
\cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) &= \cos \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \theta_e \sin \frac{2\pi}{3} \\
\sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) &= \sin \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \theta_e \sin \frac{2\pi}{3}
\end{aligned} \tag{23}$$



Se obtiene que:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ P_d \left( -\frac{1}{2} \cos^2 \theta_e + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \cos \theta_e \sin \theta_e \right) + P_q \left( -\frac{1}{2} \sin^2 \theta_e - \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \cos \theta_e \sin \theta_e \right) \right] \quad (24)$$

Utilizando las identidades trigonométricas  $\cos^2 \theta_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta_e)$ ,  $\sin^2 \theta_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta_e)$  y  $\cos \theta_e \sin \theta_e = \frac{1}{2} \sin 2\theta_e$ , se tiene:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ -\frac{P_d + P_q}{4} + \frac{P_d - P_q}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos 2\theta_e + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \sin 2\theta_e \right) \right] \quad (25)$$

Tomando en cuenta la siguiente igualdad:

$$\cos \left( 2\theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \cos 2\theta_e + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \sin (2\theta_e) \quad (26)$$

Sustituyendo y factorizando:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ -\frac{P_d + P_q}{4} - \frac{P_d - P_q}{2} \cos \left( 2\theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (27)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en 28:

$$l_{ab} = \frac{\lambda_{ba}}{i_a} = \frac{\lambda_{ba}}{F_{ma}/N_s} = \frac{N_s \lambda_{ba}}{F_{ma}} \quad (28)$$

Se tienen las expresiones similares a la ecuación 18. La ecuación mutua entre las fases  $a$  y  $b$  es igual a:

$$l_{ab} = l_{ba} = -\frac{1}{2} \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos \left( 2\theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (29)$$

Por lo tanto, las inductancias mutuas entre los devanados del estator se expresan con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} l_{ab} &= l_{ba} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos\left(2\theta_e + \frac{\pi}{3}\right) \\ l_{ac} &= l_{ca} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos\left(2\theta_e - \frac{\pi}{3}\right) \\ l_{bc} &= l_{cb} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos(2\theta_e + \pi) \end{aligned} \quad (30)$$

Debido al desfaseamiento entre devanados, el termino  $\bar{L}_m$  que representa el valor promedio de la inductancia, se multiplica por  $-\frac{1}{2}$ , ya que el ángulo de desfase es  $\frac{2\pi}{3}$  y el coseno de este desfaseamiento es  $-\frac{1}{2}$ . Una vez determinados todos los elementos de la matriz  $L$  y considerando que  $\theta_e = n_p\theta_m$ , la matriz de inductancias del PMSM queda definida como:

$$L = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Con las siguientes expresiones para cada elemento:

$$\begin{aligned} l_{aa} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2(n_p\theta_m) \\ l_{bb} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) \\ l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m + L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) \\ l_{ab} &= l_{ba} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos\left(2n_p\theta_m + \frac{\pi}{3}\right) \\ l_{ac} &= l_{ca} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos\left(2n_p\theta_m - \frac{\pi}{3}\right) \\ l_{bc} &= l_{cb} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos(2n_p\theta_m + \pi) \end{aligned} \quad (32)$$

En motores síncronos de imán permanente con rotor cilíndrico se cumple que  $P_d = P_q$ . Esto implica que los elementos de la matriz de inductancia se simplifican, puesto que  $L_{\Delta m} = 0$ , de esta forma, las inductancias no dependen más del desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$ . Las

expresiones simplificadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} l_{aa} &= l_{bb} = l_{cc} = L_{ls} + \bar{L}_m \\ l_{ab} &= l_{ba} = l_{ac} = l_{ca} = l_{cb} = l_{cb} = -\frac{1}{2}\bar{L}_m \end{aligned} \quad (33)$$

## Modelado en el eje de referencia a b c

Analizando el diagrama eléctrico mostrado en la Figura 20 y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al devanado de la fase  $a$  se obtiene que:

$$v_a = r_e i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \quad (34)$$

La ecuación del flujo de enlace en la fase  $a$  está dada por la siguiente igualdad:

$$\lambda_a = l_{aa} i_a + l_{ab} i_b + l_{ac} i_c + \lambda_{am} \quad (35)$$

Las inductancias mutuas y propias se expresan usando los términos correspondientes definidos previamente en este anexo:

$$\lambda_a = (L_{ls} + \bar{L}_m) i_a + \left(-\frac{1}{2}\bar{L}_m\right) (i_b + i_c) + \lambda_m \cos \theta_e \quad (36)$$

Por otra parte, para un conjunto de voltajes trifásicos balanceados con la misma amplitud en los devanados del motor se cumple que:  $v_a + v_b + v_c = 0$ . Dichos voltajes de alimentación son:

$$\begin{aligned} v_a &= V \cos(\omega_e t) \\ v_b &= V \cos\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_c &= V \cos\left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

Siendo  $V$  es la amplitud pico de voltaje.

Los voltajes aplicados al estator producen corrientes que circulan por los devanados, dichas corrientes se representan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} i_a &= I \cos(\omega_e t - \varphi) \\ i_b &= I \cos\left(\omega_e t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c &= I \cos\left(\omega_e t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

Donde  $I$  es la amplitud máxima de las corrientes y  $\varphi$  es el ángulo cuyo coseno es el factor de potencia al cual opera el motor. Estas corrientes cumplen con:

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (39)$$

Despejando la corriente de la fase  $a$  ( $i_a = -(i_b + i_c)$ ) y sustituyendo el valor de  $i_a$  en 36 se tiene:

$$\lambda_a = \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_a + \lambda_m \cos \theta_e \quad (40)$$

Si se considera el desplazamiento de  $-\frac{2\pi}{3}$  y  $+\frac{2\pi}{3}$  para las fases  $b$  y  $c$ , respectivamente, entonces se obtienen enlaces de flujo.

$$\begin{aligned} \lambda_b &= \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_b + \lambda_m \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \lambda_c &= \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_c + \lambda_m \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

Al tomar en cuenta que  $\theta_e = \omega_e t + \theta_{e0}$  donde  $\theta_{e0}$  es la posición inicial del rotor, entonces el voltaje en la fase  $a$  es:

$$v_a = r_e i_a + \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) \frac{di_a}{dt} + \lambda_m \frac{d}{dt}(\cos(\omega_e t + \theta_{e0})) \quad (42)$$

Donde  $\lambda_m$  es la magnitud de los enlaces de flujo, y la determina el material magnético del rotor. Al desarrollar la derivada restante, la ecuación que define el circuito equivalente para la fase  $a$  es:

$$v_a = r_e i_a + \left( L_{ls} + \frac{3}{2} \bar{L}_m \right) \frac{di_a}{dt} - \lambda_m \omega_e \sin(\omega_e t + \theta_{e0}) \quad (43)$$

De esta última ecuación se dice que el voltaje  $v_a$  está formado por:

1. La caída de voltaje en  $r_e i_a$ . Donde la resistencia en cada devanado del estator es la misma.

$$r_e = r_a = r_b = r_c \quad (44)$$

2. El voltaje  $(L_{ls} + \frac{3}{2} \bar{L}_m) \frac{di_a}{dt}$  en la inductancia efectiva de la fase  $a$ . A esta inductancia se le conoce como inductancia síncrona, definida como:

$$L_e = L_a = L_b = L_c = L_{ls} + \frac{3}{2} \bar{L}_m \quad (45)$$

3. El voltaje  $e_{ag}$  generado o fuerza electromotriz inducida por el movimiento del rotor se define como:

$$e_{ag} = \lambda_m \omega_e \sin(\omega_e t + \theta_{e0}) \quad (46)$$

Así finalmente el circuito equivalente para la fase  $a$  se muestra en la Figura 23. Para la fase  $b$  y  $c$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_a &= r_e i_a + L_e \frac{di_a}{dt} - e_{ag} \\ v_b &= r_e i_b + L_e \frac{di_b}{dt} - e_{bg} \\ v_c &= r_e i_c + L_e \frac{di_c}{dt} - e_{cg} \end{aligned} \quad (47)$$

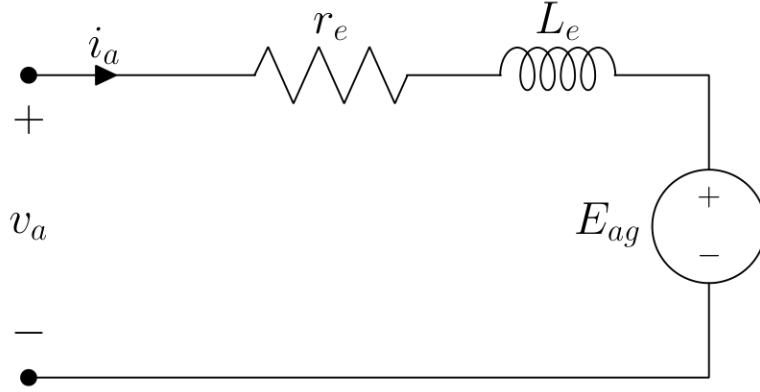


Figura 23: Diagrama equivalente de la face  $a$ .

Despejando las derivadas:

$$\begin{aligned}
 L_e \frac{di_a}{dt} &= v_a - r_e i_a + e_{ag} \\
 L_e \frac{di_b}{dt} &= v_b - r_e i_b + e_{bg} \\
 L_e \frac{di_c}{dt} &= v_c - r_e i_c + e_{cg}
 \end{aligned} \tag{48}$$

## Modelado en el eje de referencia $\alpha - \beta$

Para la estimación de la posición del rotor, es necesario obtener el modelo matemático del PMSM en el eje de referencia  $\alpha - \beta$ . Para ello, se parte de la ecuación 48, y se considera la siguiente expresión:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{49}$$

El sistema de ecuaciones 48 en su forma matricial, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} L_e & 0 & 0 \\ 0 & L_e & 0 \\ 0 & 0 & L_e \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{ag} \\ e_{bg} \\ e_{cg} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Donde:

$$L = \begin{pmatrix} L_e & 0 & 0 \\ 0 & L_e & 0 \\ 0 & 0 & L_e \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix}; \quad E_g = \begin{pmatrix} e_{ag} \\ e_{bg} \\ e_{cg} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto 50 se reescribe en su forma vectorial como:

$$L \frac{dI}{dt} = V - RI + E_g \quad (51)$$

Aplicando a transformada de Clarke ( $T_{\alpha\beta}$ ) variables de la ecuacion 51 se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} V & V &= T_{\alpha\beta}^{-1} V_{\alpha\beta} \\ I_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} I & \text{ó} & \quad I = T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta} \\ E_{g\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} E_g & E_g &= T_{\alpha\beta}^{-1} E_{g\alpha\beta} \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación 51, se obtiene lo siguiente:

$$L \frac{d(T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta})}{dt} = T_{\alpha\beta}^{-1} V_{\alpha\beta} - R T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{-1} E_{g\alpha\beta} \quad (52)$$

Como  $T_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{-1} = I$  es una matriz identidad 3x3, entonces la ecuación anterior se multiplica por  $T_{\alpha\beta}$ .

$$T_{\alpha\beta} L (T_{\alpha\beta}^{-1}) \frac{d(I_{\alpha\beta})}{dt} = T_{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta}^{-1}) V_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} R (T_{\alpha\beta}^{-1}) I_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta}^{-1}) E_{g\alpha\beta} \quad (53)$$

Al desarrollar los términos  $T_{\alpha\beta}L(T_{\alpha\beta}^{-1}) = L$  y  $T_{\alpha\beta}R(T_{\alpha\beta}^{-1}) = R$  se consigue lo siguiente:

$$L \frac{d(I_{\alpha\beta})}{dt} = V_{\alpha\beta} - RI_{\alpha\beta} + E_{g\alpha\beta} \quad (54)$$

Aplicando la transformada de Clarke a 54 y tomando en cuenta la igualdad de inductancias en 45, se obtiene los siguiente:

$$\begin{pmatrix} L_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & L_\beta & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{\alpha g} \\ e_{\beta g} \\ e_{0g} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Debido a que el sistema 55 es balanceado puede deducirse que los valores de secuencia 0 son nulos, por lo tanto, la fuerza electromotriz resultante de aplicar la transformada es  $e_\alpha = \lambda_m \omega_e \sin(\theta_e) = \lambda_m n_p \omega_m \sin(n_p \theta_m)$  y  $e_\beta = -\lambda_m \omega_e \cos(\theta_e) = -\lambda_m n_p \omega_m \cos(n_p \theta_m)$ . Además, como las inductancias en cada fase son iguales se tiene que  $L_s = L_\alpha = L_\beta$ , por lo tanto, el sistema obtenido del eje de referencia  $\alpha\beta$

$$\frac{di_\alpha}{dt} = \frac{1}{L_s} (v_\alpha - r_e i_\alpha + e_{g\alpha}) \quad (56)$$

$$\frac{di_\beta}{dt} = \frac{1}{L_s} (v_\beta - r_e i_\beta - e_{g\beta}) \quad (57)$$



## Modelado en el eje de referencia $d - q$

Del circuito equivalente del PMSM, se determina mediante las leyes de Kirchoff que los voltajes de fase se describen por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_a &= r_e i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \\ v_b &= r_e i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \\ v_c &= r_e i_c + \frac{d\lambda_c}{dt} \end{aligned} \quad (58)$$

Las transformaciones de Clarke y Park son válidas para cualquiera de las variables del flujo, corriente o voltaje. Aplicando la transformación directa de Clarke y Park a los flujos de fase del estator trifásico del MPSM ( $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$  y  $\lambda_c$ ), se obtienen las siguientes componentes del vector espacial de flujo del estator en el marco de referencia bifásico síncrono ( $d - q$ ):

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (61)$$

Desarrollando  $\lambda_d$  de la matriz 59 se obtiene:

$$\lambda_d = \frac{2}{3} \left[ \cos(\theta_e) \lambda_a + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_b + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_c \right] \quad (62)$$

Ahora derivando 62 se consigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \cos(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} - \lambda_a \sin(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} \right. \\ \left. - \lambda_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} - \lambda_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right] \end{aligned} \quad (63)$$

Siendo  $\omega_e = \frac{d\theta_e}{dt}$ , entonces la ecuación 63 se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \left( \cos(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} \right) \right. \\ \left. - \left( \lambda_a \sin(\theta_e) + \lambda_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + \lambda_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \omega_e \right] \end{aligned} \quad (64)$$

Observando 59, se deduce de 64 que el segundo término agrupado es el vector espacial del flujo en el eje  $q$ , es decir:

$$\lambda_q = \frac{2}{3} \left[ -\sin(\theta_e) \lambda_a - \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_b - \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_c \right] \quad (65)$$

Despejando las ecuaciones 58, las derivadas de los flujos por fase, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_a}{dt} &= v_a - r_e i_a \\ \frac{d\lambda_b}{dt} &= v_b - r_e i_b \\ \frac{d\lambda_c}{dt} &= v_c - r_e i_c \end{aligned} \quad (66)$$

Sustituyendo las ecuaciones 64 65 y 66, se obtiene:

$$\frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \cos(\theta_e)(v_a - r_e i_a) + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)(v_b - r_e i_b) + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)(v_c - r_e i_c) + \frac{3}{2}\lambda_q \omega_e \right] \quad (67)$$

Ordenando la ecuación 67 y reduciendo términos se obtiene los siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \frac{3}{2}\lambda_q \omega_e + v_a \cos(\theta_e) + v_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ \left. - \left( r_e i_a \cos(\theta_e) + r_e i_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + r_e i_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Reordenando la ecuación 68 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \lambda_q \omega_e + \frac{2}{3} \left( v_a \cos(\theta_e) + v_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ - \frac{2}{3} r_e \left( i_a \cos(\theta_e) + i_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (69)$$

Por medio de la transformación de Park, se observa la componete del vector de voltaje y corriente en el eje  $d$ , en la ecuación anterior y se sustituye por los términos  $v_d$  e  $i_d$  en 70.

$$\frac{d\lambda_d}{dt} = \lambda_q \omega_e + v_d - r_e i_d \quad (70)$$

Despejando 70 para la componente de voltaje en el eje  $d$  se obtiene:

$$v_d = \frac{d\lambda_d}{dt} + r_e i_d - \lambda_q \omega_e \quad (71)$$

Desarrollando  $\lambda_q$  de la matriz 59 se deduce la ecuación 72.

$$\lambda_q \frac{2}{3} \left[ -\sin(\theta_e)\lambda_a - \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)\lambda_b - \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)\lambda_c \right] \quad (72)$$

Derivando 72 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{dt} = \frac{2}{3} \left[ -\sin(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} - \lambda_a \cos(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} - \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} \right. \\ \left. - \lambda_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} - \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} - \lambda_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right] \end{aligned}$$

Factorizando y tomando en cuenta a la derivada temporal de la posición, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{dt} = -\frac{2}{3} \left[ \left( \lambda_a \cos(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} + \lambda_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} + \lambda_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right) \right. \\ \left. + \left( \sin(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} + \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} + \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad (73)$$

El primer término agrupado es igual a  $\lambda_d$  mientras que en el segundo término se sustituyen las ecuaciones 66 en 73 obteniendo la siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = -\lambda_q \omega_e - \frac{2}{3} \left[ \sin(\theta_e)(v_a - r_e i_a) + \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)(v_b - r_e i_b) \right. \\ \left. + \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)(v_c - r_e i_c) \right] \end{aligned} \quad (74)$$

Tomando en cuenta el criterio de 44 y factorizando 74, ésta se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = -\lambda_q \omega_e - \frac{2}{3} \left( v_a \sin(\theta_e) + v_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ + \frac{2}{3} r_e \left( i_a \sin(\theta_e) + i_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (75)$$

De acuerdo a la transformada de Park para voltajes y corrientes se tiene que:

$$\begin{aligned} v_q = -\frac{2}{3} \left( v_a \sin(\theta_e) + v_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ -iq = \frac{2}{3} \left( i_a \sin(\theta_e) + i_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (76)$$

Sustituyendo 76 en la ecuación 75 se tiene:

$$\frac{d\lambda_d}{dt} = -\lambda_q \omega_e + v_q - r_e i_q \quad (77)$$

Por lo tanto, el vector espacial en el eje  $q$ , del voltaje de entrada es:

$$v_q = \frac{d\lambda_d}{dt} + r_e i_q + \lambda_q \omega_e \quad (78)$$

El modelo matemático del PMSM en función del flujo magnético, voltajes y corrientes de fase expresado en el marco de referencia  $d - q$ , se definen de la manera siguiente:

$$v_d = \frac{d\lambda_d}{dt} + r_e i_d - \lambda_q \omega_e \quad (79)$$

$$v_q = \frac{d\lambda_q}{dt} + r_e i_q + \lambda_d \omega_e \quad (80)$$

Siendo:

$$T_{dq} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Aplicando la trasformad Park  $T_{dq}$  al de enlace de frujo mostrado en la ecuación 11, se obtiene los siguiente:

$$\Lambda_{dq} = LT_{dq}I + T_{dq}\Lambda_m \quad (82)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = LT_{dq} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + T_{dq} \begin{pmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Por lo tanto, realizando los cálculos y simplificando se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ L_{st} i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (84)$$

Teniendo en cuenta que es un sistema balanceado donde  $\lambda_0 = 0$  y sustituyendo la ecuación anterior en las ecuaciones 79 y 80, se obtiene el siguiente modelo matemático:

$$v_d = L_d \frac{di_d}{dt} + r_e i_d - L_q i_q \omega_e \quad (85)$$

$$v_q = L_q \frac{di_q}{dt} + r_e i_q + L_d i_d \omega_e + \lambda_m \omega_e \quad (86)$$

Como  $L_d = L_q = L$  y  $\omega_e = n_p \omega_m$  y se despeja de las derivadas temporales, entonces se tiene:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L} (v_d - r_e i_d + L i_q n_p \omega_m) \quad (87)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L} (v_q - r_e i_q - L i_d n_p \omega_m - \lambda_m n_p \omega_m) \quad (88)$$

Para el cálculo del flujo de enlace del imán permanente  $\lambda_m$  se define la siguiente ecuación:

$$\lambda_m = \frac{60 V_{pk} / k rpm}{\sqrt[2]{3} \pi n_p 1000} \quad (89)$$

Donde:

- $V_{pk}/k rpm$ : Es el voltaje pico a pico de la fuerza contra electromotriz (obtenido a velocidad constante de 1000 rpm, impulsado por otro motor).
- $n_p$ : número de pares de polos del PMSM.

## Modelado electromecánico

Analizando el diagrama electromecánico de la Figura 18 y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene la siguiente ecuación diferencial que define al subsistema electromecánico:

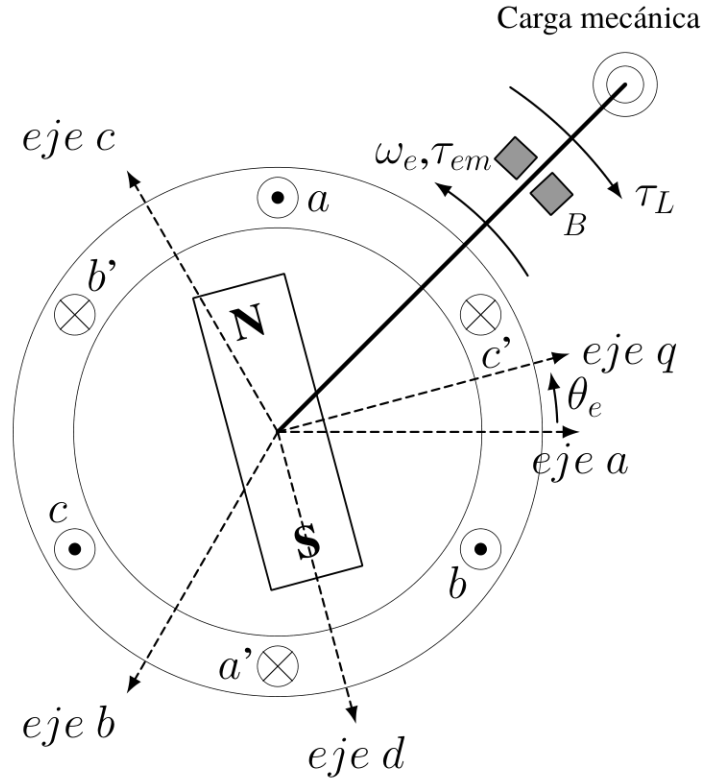


Figura 24: Eje de referencia  $a, b$  y  $c$  y eje de referencia  $\alpha - \beta$  de [42].

$$J_{mec} \frac{d\omega_n}{dt} + \tau_L + B\omega_m = \tau_{em} \quad (90)$$

Al despejar la derivada de la velocidad angular mecánica y sustituyendo  $\tau_{em} = \frac{3}{2}K_m i_q$  (véase anexo 6), la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\frac{d\omega_n}{dt} = \frac{1}{J_{mec}} \left( \frac{3}{2}K_m i_q - B\omega_m - \tau_L \right) \quad (91)$$

Donde  $J_{mec}$  es la inercia rotacional del rotor y  $B$  es el coeficiente de fricción viscosa del motor.





## Cálculo del par electromagnético

---

Para obtener la ecuación de par electromagnético ( $\tau_{em}$ ), partimos de la potencia eléctrica en cada devanado de fase en el marco de referencia  $d - q$ . Se desarrollan las ecuaciones que deducen matemáticamente el  $\tau_{em}$ , generando internamente en el PMSM. Partiendo del hecho de que la potencia de la entrada al motor está dada por:

$$P = vi \quad (92)$$

Considerando la alimentación trifásica al PMSM, se tiene que:

$$P = \begin{pmatrix} v_a & v_b & v_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (93)$$

Aplicando la transformada de Park a los voltajes de entrada  $a$   $b$   $c$ , se obtienen las siguientes expresiones matemáticas en el eje de referencia rotatorio  $d - q$ .

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (94)$$

Siguiendo el mismo proceso para las corrientes de estator se obtiene:

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Sustituyendo las ecuaciones 94 y 95 en la ecuación de potencia 92, la ecuación resultante es:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (96)$$

Realizando las operaciones matriciales, simplificando y factorizando la potencia del sistema resulta de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} v_a & v_b & v_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Por otro lado, se sabe que el flujo electromagnético es igual al producto de la inductancia por la corriente, de ahí se tiene la siguiente expresión:

$$\lambda = LI \quad (98)$$

Aplicando la derivada temporal a la ecuación 98 y sustituyendo en el modelo del PMSM, se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\lambda_d}{dt} \\ \frac{d\lambda_q}{dt} \\ \frac{d\lambda_0}{dt} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 & -L_d & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_q \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_m \\ 0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (99)$$

Donde

$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_d}{dt} \\ \frac{d\lambda_q}{dt} \\ \frac{d\lambda_0}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \quad (100)$$

El término  $L_{ls}$  se refiere a la inductancia de dispersión del estator, sustituyendo 100 en 99 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} v_q \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_q \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 & -L_d & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_q \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_m \\ 0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (101)$$

Sustituyendo 101 en la ecuación de potencia 97:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = P = & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} & \frac{di_q}{dt} & \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_d & 0 \\ -L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m & 0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \right\} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right\} \quad (102) \end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones matriciales se resulta tal que:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \left[ \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} & \frac{di_q}{dt} & \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3L_d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L_q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] + \left[ +r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \\ & + \left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3L_d}{2} & 0 \\ -\frac{3L_q}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_m}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \end{aligned} \quad (103)$$

El primer término de 103 representa la potencia almacenada en los inductores:

$$\left[ \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} & \frac{di_q}{dt} & \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3L_d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L_q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \quad (104)$$

Mientras que el segundo término de 103 representa la potencia disipada en los resistores:

$$\left[ r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \quad (105)$$

Al enfocarnos en la fuerza electromotriz producida por la rotación de los imanes permanentes en el rotor, no se toman en cuenta los dos primeros términos de la ecuación 103, es decir la potencia disponible para el desarrollo de par electromagnético en el PMSM es:

$$\left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3L_d}{2} & 0 \\ -\frac{3L_q}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_m}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (106)$$

Al desarrollar los productos de la ecuación 106 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{3}{2}(L_d i_d i_q - L_q i_q i_d + \lambda_m i_q) \omega_e \quad (107)$$

Se sabe que el par electromagnético  $\tau_{em}$  del PMSM puede expresarse como:

$$\tau_{em} = \frac{P}{\omega_e} \quad (108)$$

Siendo  $\omega_e = n_p \omega_m$ , y sustituyendo en la ecuación 108, se tiene que el par electromagnético desarrollado internamente por el PMSM es:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} n_p (L_d i_d i_q - L_q i_q i_d + \lambda_m i_q) \quad (109)$$

Para este trabajo de tesis se utiliza un PMSM de imanes superficiales, por lo que las inductancias  $L_d$  y  $L_q$  son iguales, entonces la ecuación de par resulta de la siguiente manera:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} n_p \lambda_m i_q \quad (110)$$

Donde  $K_m = n_p \lambda_m$  y por consiguiente:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} K_m i_q \quad (111)$$



## Artículos realizados

---





# Sensorless very low-speed trajectory tracking sliding mode controller based on identification back-EMF parameter for a PMSM

J. Linares-Flores

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Huajuapán de León, Oaxaca, México  
jlinares@mixteco.utm.mx

A. Hernández-Méndez

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz  
Huajuapán de León, Oaxaca, México  
arturohm54@mixteco.utm.mx

V. Ortega-García

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Huajuapán de León, Oaxaca, México  
vicorte20@gmail.com

J.A. Juárez-Abad

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Electrónica y Mecatrónica  
Huajuapán de León, Oaxaca, México  
abad@mixteco.utm.mx

I. F. Castillo-Aguilar

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Posgrado  
Huajuapán de León, Oaxaca, México  
imercastillo26@gmail.com

**Abstract**—Sensorless, very low-speed control is a topic for the PMSM, and it has been of great interest for energy conversion and power electronics. For this reason, we propose a sensorless, very low-speed trajectory tracking sliding mode controller based on the identification back-EMF parameter for a permanent magnet synchronous motor. To identify the back-EMF parameter at a standstill and low speeds, we use a numerical regression polynomial method to estimate this parameter offline. Thus, we build a nonlinear function dependent on angular speed. The extended state observers use the information of this parameter to calculate the position and speed of the PMSM. The position and speed estimated adapt to the sliding mode speed tracking controller. The experimental results show the effectiveness and robustness of the sensorless algorithm in regulating the rotor speed at very low rates with and without load torque applied.

## I. INTRODUCTION

Due to the features of high efficiency, high power density, and fast control response, permanent magnet synchronous motors (PMSMs) have been widely adopted in electric drive vehicles, aerogenerators, robots, and aerospace applications [1]- [2]. Field-oriented vector control, sliding mode control, and backstepping control have been widely employed to improve the dynamic performance of PMSMs. Accurate rotor position and speed information are required for a high-performance control system. However, the installation and use of electromechanical sensors will not only increase the system cost, volume, and complexity of the PMSM electric drive system, but it also reduces the reliability and robustness of the system [3]- [4]. Thus, several sensorless control methods have been developed for the PMSMs to overcome the disadvantages of installing a position sensor. Therefore, our article deals with a new method for the sensorless, very low-speed-tracking sliding mode controller for a PMSM. The back EMF functions are estimated by extended state observers, and with the help

of the back fem parameter  $K_m$  identified, we obtain the speed angular estimation. Integrating the speed angular estimated concerning the time, get the position estimated in precise form. The back fem parameter identification through a numerical regression polynomial avoids the use of the high-frequency signal injection method to calculate the position angular under a very low-speed regime of the PMSM.

## A. Contributions

The main contributions of this article are listed as follows: a) The back EMF parameter identification helps the extended state observers obtain a precise estimation of the PMSM's position and speed without using a high-frequency signal injection method to get the position and speed at the very low-speed operation of the PMSM; b) The proposed sensorless speed tracking sliding mode control for the PMSM regulates at very low speeds with and without load torque applied to the PMSM shaft; c) The experimental results show the effectiveness and robustness of the sensorless speed tracking sliding mode controller in closed-loop.

## II. PMSM MATHEMATICAL MODEL

In the  $\alpha - \beta$  reference frame, the mathematical model of the dynamics of the permanent magnet synchronous motor (PMSM) is given by the following equations:

$$L_S \frac{di_\alpha}{dt} = -R_S i_\alpha + e_\alpha + u_\alpha \quad (1)$$

$$L_S \frac{di_\beta}{dt} = -R_S i_\beta - e_\beta + u_\beta \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_e + B\omega - \tau_L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

where  $i_\alpha$ ,  $i_\beta$ , are the stator currents,  $e_\alpha$ ,  $e_\beta$ , are the back electromotive forces (back-EMF),  $u_\beta$  is the system control input,  $R_s$  is the stator resistance,  $L_s$  is the stator inductance,  $\theta$ ,  $\omega$ , and  $\tau_e$  are the angular position, angular velocity, and internal torque respectively. The load torque  $\tau_L$  is unknown. However, it is considered bounded and constant. At the same time, the pair generated by the PMSM in the reference frame  $\alpha - \beta$  is expressed as:

$$\tau_e = \underbrace{\frac{2}{3} K_m}_{:=K_t} [i_\alpha \sin(n_p \theta) - i_\beta \cos(n_p \theta)] \quad (5)$$

where the constant  $K_t$  is defined as a fraction of the mechanical constant  $K_m$ . Therefore, the back EMF in each winding can be defined as:

$$e_\alpha(\theta, \dot{\theta}, K_m) = K_t \sin(n_p \theta) \dot{\theta} \quad (6)$$

$$e_\beta(\theta, \dot{\theta}, K_m) = K_t \cos(n_p \theta) \dot{\theta} \quad (7)$$

where  $n_p$  is the number of pole pairs. As demonstrated by the previous equations, the parameter  $K_m$  is associated with the back-EMF and the torque produced by the machine. In simple terms, this parameter can be defined as  $n_p = n_p \Psi$ , where  $\Psi$  represents the flux linkage between the  $d$ -winding of the stator and the flux created by the permanent magnets of the rotor, i.e.,  $\Psi = [60 V_{pk}/krpm]/\sqrt{3} \cdot \pi \cdot P \cdot 1000$ , where  $P$  is the number of poles and  $V_{pk}/krpm$  is the peak line-to-line back-EMF constant (mechanical speed) [5].

In this context, the parameter  $K_m$  at low angular velocity is not constant, as mentioned in [6] and [7]. Proper characterization of this parameter allows for better identification of variables if used in an extended state observer (ESO). Characterizing the  $K_m$  value begins by implementing the angular speed regulation controller estimating the rotor position using the nominal  $K_m$  value. At this time, the PMSM machine cannot regulate at low speeds. However, the reference angular velocity is reduced while the  $K_m$  value used by the ESO is manually varied, so the current consumption is within the nominal range. These variations are recorded with the corresponding speed, as shown in Fig 1. These data are characterized offline using a polynomial numerical regression method, where the following expression for  $\hat{K}_m(\omega^*)$  is obtained.

$$\hat{K}_m(\omega^*) = 5.8e^{-6}(\omega^*)^3 + 9.0e^{-4}(\omega^*)^2 + 4.7e^{-2}(\omega^*) + 1.4 \quad (8)$$

$\omega^*$  is the desired angular velocity of the PMSM motor.

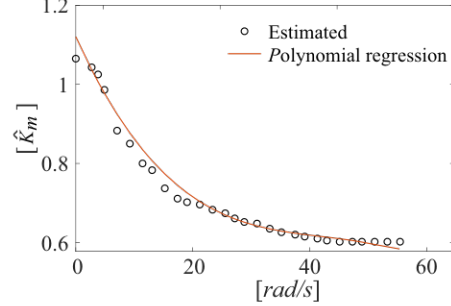


Figure 1: Characterization of the nominal value of  $K_m$ .

#### A. Extended State Observer for back EMF functions

From (1) and (2) we design the following extended state observer (ESOs) for the back-EMF  $e_{\alpha-\beta}$ :

$$\begin{aligned} L_s \frac{d\hat{i}_{\alpha-\beta}}{dt} &= -R_s \hat{i}_{\alpha-\beta} + z_{1\alpha-\beta} + u_{\alpha-\beta} + \gamma_5 (\hat{i}_{\alpha-\beta} - \hat{i}_{\alpha-\beta}) \\ \dot{z}_{1\alpha-\beta} &= z_{2\alpha-\beta} + \gamma_4 (\hat{i}_{\alpha-\beta} - \hat{i}_{\alpha-\beta}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{5\alpha-\beta} &= \gamma_0 (\hat{i}_{\alpha-\beta} - \hat{i}_{\alpha-\beta}) \end{aligned} \quad (9)$$

where  $z_{1\alpha-\beta}$  is the variable representing the estimate of  $e_{\alpha-\beta}$  regarded as a time signal. The Extended State Observer gains,  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$  are calculated using pole-assignment technique.

We define  $e_{i\alpha\beta} = \hat{i}_{\alpha-\beta} - \hat{i}_{\alpha-\beta}$  now if  $e_{i\alpha\beta}$  were not identically zero but ultimately uniformly arbitrarily close to zero, then  $z_{1\alpha} = \hat{e}_\alpha$  and  $z_{1\beta} = -\hat{e}_\beta$  would also be an ultimately arbitrarily close estimate of the nonlinear terms:  $e_\alpha(\theta, \dot{\theta}, K_m)$  and  $e_\beta(\theta, \dot{\theta}, K_m)$ . This justifies our choice of notation for  $z_{1(\alpha\beta)}$  as  $\hat{e}_{(\alpha\beta)}$ . Therefore,

$$z_{1\alpha}(t) = \hat{e}_\alpha(t) \quad (10)$$

$$z_{1\beta}(t) = -\hat{e}_\beta(t) \quad (11)$$

The angular speed estimated value is calculated using (10) and (11), then we have the following

$$\hat{e}_\alpha^2 + \hat{e}_\beta^2 = \left[ \hat{\theta} \hat{K}_m \right]^2 = \left[ \omega \hat{K}_m \right]^2 \quad (12)$$

The square root of (12), is given by

$$\sqrt{\hat{z}_{1\alpha}^2 + \hat{z}_{1\beta}^2} = \sqrt{\hat{e}_\alpha^2 + \hat{e}_\beta^2} = \omega \hat{K}_m \quad (13)$$

The estimation of the back-EMF term  $\omega \hat{K}_m$ , has a dependency on the back-EMF parameter  $K_m$ , thus if we divide (13) by (8). From this parametric identification, we calculate the estimated speed as follows

$$\frac{\omega \hat{K}_m}{\hat{K}_m(\omega^*)} = \hat{\omega}(t) \quad (14)$$

By integrating the estimated speed concerning time, we obtain the estimation of the angular position thus:

$$\hat{\theta}(t) = \int_0^t \hat{\omega}(\tau) d\tau + \kappa \quad (15)$$

### III. SLIDING MODE CONTROL DESIGN

We consider the mathematical model of PMSM dynamics, (1)-(4), in the  $d$ - $q$  reference frame given by the following equations:

$$L_S \frac{di_d}{dt} = -R_S i_d + L_S i_q \eta_p \omega + U_d \quad (16)$$

$$L_S \frac{di_q}{dt} = -R_S i_q - L_S i_d \eta_p \omega - K_m \omega + U_q \quad (17)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \underbrace{\frac{3}{2} K_m i_q}_{:=K_t} - B\omega - \tau_L \quad (18)$$

where  $U_d$  is the direct voltage,  $U_q$  is the quadrature voltage,  $i_d$  is the direct current,  $i_q$  is the quadrature current,  $\omega$  is the angular velocity of the rotor. The resistance and inductance of the stator circuit are denoted by  $R_s$  and  $L_s$ , respectively,  $n_p$  is the number of pole pairs, and  $J$  is the moment of inertia of the motor. Thus, we have the following outputs as follows:  $i_d = F_1$  and  $\hat{\omega} = F_2$  this last was calculated by (14). Using the input-state linearization the control inputs of (16) and (17) are given by [5]:

$$U_d = L_S \dot{F}_1 + \underbrace{R_S F_1 - L_S i_q \eta_p F_2}_{f_1} \quad (19)$$

$$U_q = \underbrace{\frac{L_S J}{K_t} \ddot{F}_2}_{:=\alpha} + \underbrace{\frac{L_S B + R_S J}{K_t} \dot{F}_2 + (\eta_p L_S F_1 + K_m + \frac{B R_s}{K_t}) F_2}_{f_2} \quad (20)$$

Therefore  $U_d = L_S \dot{F}_1 + f_1$  and  $U_q = \alpha \ddot{F}_2 + f_2$ . To introduce sliding mode control to the system we will incorporate internal controls as follows:

$$U_d = L_S V_{aux1} + \hat{f}_1 \quad (21)$$

$$U_q = \alpha V_{aux2} + \hat{f}_2 \quad (22)$$

where  $V_{aux1}$  and  $V_{aux2}$  are auxiliary dynamics imposed by the control law. While, the functions  $\hat{f}_1$  and  $\hat{f}_2$  are calculated by the estimated value of  $\hat{\omega}$  and of the direct current measure  $i_d$ , besides the nominal value parameters. Substituting (21)–(22) in (19)–(20), we obtain the following:

$$\dot{F}_1 = V_{aux1} + \frac{\Delta f_1}{L_S}, \ddot{F}_2 = V_{aux2} + \frac{\Delta f_2}{\alpha} \quad (23)$$

where  $\Delta f_1 = f_1 - \hat{f}_1$  and  $\Delta f_2 = f_2 - \hat{f}_2$  are the estimation errors of the functions  $f_1$  and  $f_2$  respectively. On the other hand, we establish the surface equations for sliding modes proposed by [8], which incorporates the integral term of the

output errors for the speed-tracking as follows:

$$S_1 = (F_1 - F_1^*) + c_1 \int_0^t (F_1 - F_1^*) d\tau \quad (24)$$

$$S_2 = (\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) + 2c_2 (F_2 - F_2^*) + c_2^2 \int_0^t (F_2 - F_2^*) d\tau \quad (25)$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are constant gains greater than zero. We use the equivalent control method to calculate the internal controllers [9].

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= (\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) + c_1 (F_1 - F_1^*) \\ &= (V_{aux1} + \frac{\Delta f_1}{L_S} - \dot{F}_1^*) + c_1 (S_1 - c_1 \int_0^t (F_1 - F_1^*) d\tau) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= (\ddot{F}_2 - \ddot{F}_2^*) + 2c_2 (\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) + c_2^2 (F_2 - F_2^*) \\ &= v_{aux2} + \frac{\Delta f_2}{\alpha} + 2c_2 \left( S_2 - 2c_2 (F_2 - F_2^*) - c_2^2 \int_0^t (F_2 - F_2^*) d\tau \right) + c_2^2 (F_2 - F_2^*) \end{aligned} \quad (27)$$

We consider that the surfaces and their time-derivatives are equal to zero for ideal surfaces  $S_1 = \dot{S}_1 = 0$  and  $S_2 = \dot{S}_2 = 0$  in (26) and (27), thus, we calculate the equivalent controllers as follows:

$$|\hat{V}_{eq1}| = |\dot{F}_1^*| + 2c_1 \int_0^t |F_1 - F_1^*| d\tau + \frac{2}{3} \quad (28)$$

$$|\hat{V}_{eq1}| = |\ddot{F}_2^*| + 4c_2^2 |F_2 - F_2^*| + 2c_2^3 \int_0^t |F_2 - F_2^*| d\tau + \frac{2}{3} \quad (29)$$

We enclose the errors  $\Delta f_1$  and  $\Delta f_3$  employing the assignment of a constant less than one.

$$V_{aux1} = -\lambda_1 |\hat{V}_{eq1}| \text{sign}(S_1) \quad (30)$$

$$V_{aux2} = -\lambda_2 |\hat{V}_{eq2}| \text{sign}(S_2) \quad (31)$$

From (18), we calculate the time-derivative of the output second  $\dot{F}_2$ , which is given by

$$\dot{F}_2 = \left( \frac{K_t}{J} \right) i_q - \left( \frac{B}{J} \right) \hat{\omega} \quad (32)$$

#### A. Stability proof in closed-loop

We consider the following candidate Lyapunov function as follows: which is given by

$$V(S_1, S_2) = \frac{12}{\gamma} (S_1^2 + S_2^2) > 0 \quad (33)$$

which is given by Taking the time-derivative of  $V(S_1, S_2)$  in (33) along of (26)–(27), gives which is given by

$$\dot{V} = S_1 \dot{S}_1 + S_2 \dot{S}_2 \leq -\lambda_1 |\hat{V}_{eq1}| |S_1| - \lambda_2 |\hat{V}_{eq2}| |S_2| < 0 \quad (34)$$

which is given by We are choosing the gain values  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $c_1$ , and  $c_2$  the sufficiently larger for the existence of the sliding

mode, and like this, we guarantee an asymptotic stability of the speed tracking regulation error to zero.

#### IV. EXPERIMENTAL RESULTS

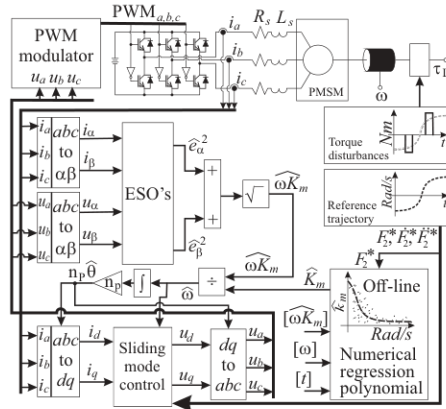


Figure 2: Experimental diagram.

Fig. 2 shows the speed sensor-less algorithm schematic based on dSPACE equipment. The angular position and speed estimation algorithm relies on the offline estimation of the back-EMF parameter, shown in this diagram. Sliding mode control (SMC) block adapted the speed estimation. The sampling time used to implement the speed sensorless tracking sliding mode controller was  $100\mu$  sec. approximately. The PMSM used has the following nominal parameters:  $R_s = 1.6\Omega$ ,  $n_p = 4$ ,  $L_s = 6.365mH$ ,  $J = 1.82e - 4Kg m^2$ ,  $K_m = 2.09$ ,  $B = 8.7e - 5Kg m^2/s$ . A smooth Bezier-type angular velocity reference trajectory is established in the experimental test. This trajectory goes from  $-50 rad/s$  to  $50 rad/s$  in 15 seconds. The motor is coupled with a constant torque of approximately  $0.3 Nm$ . However, an additional torque perturbation of  $0.2 Nm$  is applied around the zero crossing of the desired trajectory (Fig. 3 b)). In Fig. 3 a) it is observed that the control scheme adequately follows the angular velocity reference. In the range from  $-50$  to  $0 rad/s$ , the tracking is done until the motor stops. However, at startup, the following trajectory begins at approximately  $6 rad/s$ . In this figure, the adequate estimation of the angular velocity can also be corroborated. The applied torque is shown in Fig. 3 b). Fig. 4 a) shows the control maneuver in coordinates  $a - b - c$ . Fig. 4 b) and 4 c) show that the maximum angular velocity tracking error is less than  $6 rad/s$ , where the maximum error is at the zero crossing.

The variation of the  $K_m$  parameter during the tracking trajectory is shown in Fig. 3 c). Fig. 3 d) shows that the armature current consumption remains within the nominal range during angular velocity trajectory tracking.

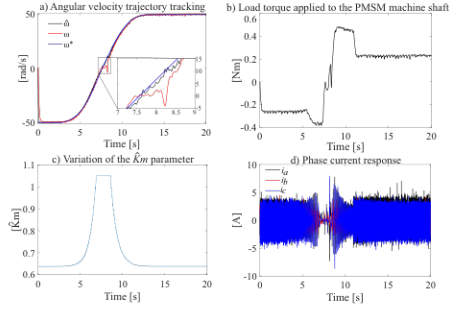


Figure 3: Experimental results.

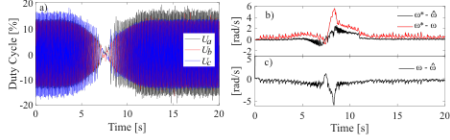


Figure 4: Experimental results a) control inputs in  $a - b - c$  coordinates, b) tracking error with respect to the desired trajectory c) tracking error with respect to estimated angular velocity.

#### V. CONCLUSIONS

A sensorless angular velocity control scheme is presented. The experimental results demonstrate that it is possible to follow the desired trajectory at low speeds if the value of the parameter  $K_m$  is characterized without using a high-frequency signal injection method. This work provides a method to obtain a characteristic polynomial of  $K_m$  and the way in which it is used to estimate the speed and angular position of the rotor at the very low-speed regime of the PMSM.

#### REFERENCES

- [1] X. Zhu, Z. Shu, L. Quan, Z. Xiang, and X. Pan, "Design and multicondition comparison of two outer-rotor flux-switching permanent-magnet motors for in-wheel traction applications," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 8, pp. 6137–6148, 2017.
- [2] X. Sun, L. Chen, H. Jiang, Z. Yang, J. Chen, and W. Zhang, "High-performance control for a bearingless permanent-magnet synchronous motor using neural network inverse scheme plus internal model controllers," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, pp. 3479–3488, 2016.
- [3] Q. Chen, G. Xu, G. Liu, W. Zhao, L. Liu, and Z. Lin, "Torque ripple reduction in five-phase ipm motors by lowering interactional mmf," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, no. 11, pp. 8520–8531, 2018.
- [4] X. Sun, C. Hu, J. Zhu, S. Wang, W. Zhou, Z. Yang, G. Lei, K. Li, B. Zhu, and Y. Guo, "Mpc for pmsms of evs with multi-motor driven system considering optimal energy allocation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 55, no. 7, pp. 1–6, 2019.
- [5] J. Linares-Flores, C. Garcia-Rodriguez, H. Sira-Ramirez, and O. D. Ramirez-Cárdenas, "Robust backstepping tracking controller for low speed pmsm positioning system: Design, analysis, and implementation," in *2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2015, pp. 2131–2138.

- [6] K. Urbanski, "Estimation of back emf for pmsm at low speed range," *MM Science Journal*, pp. 564–569, 2015.
- [7] H. K. Kunihiisa Kubota, Hajime Yoda and S. Takiguchi, "Identification of pmsm motor parameters with a power analyzer," HIOKI E.E. Corporation, Tech. Rep., 2016.
- [8] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, E. Cliffs, Ed. Prentice Hall, 1991.
- [9] M. W. Spong and Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control, First Edition*. John Wiley & Sons, 1991.