



# UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

## **DISEÑO ÓPTIMO DE UN ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN NO TRADICIONAL BASADO EN INERSOR PARA EL CONTROL DE VIBRACIÓN EN VIGAS**

### **TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

PRESENTA:

**HECTOR HUGO ROSAS VELASCO**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.

JULIO DE 2025



---

## *Dedicatoria*

---

- *Dedicado a mis padres María Adelina Velasco González y Rigoberto Rosas Cruz quienes siempre estuvieron para apoyarme en los momentos más complicados de mi vida y siempre confiaron en mí.*
- *A Elena Berenice Loredó Aparicio quien me enseñó a disfrutar cada instante del camino sin perder de vista mi destino, a quien siempre llevaré en mi corazón y siempre estaré agradecido por haberme permitido caminar a su lado.*

---

# *Agradecimientos*

---

- *A mis amigos Amaury, Aranza, Aylin, Blanca, Ceci, David, Ehecatl, Elí y Ulises por cada momento de felicidad y tristeza que hemos compartido.*
- *A la familia Loredó Aparicio por todo el cariño y apoyo que me han brindado a lo largo de los años.*
- *A mi familia por creer en mí y apoyarme en cada momento de mi vida.*
- *Agradezco la confianza y tiempo brindado a quienes formaron parte de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios. De igual forma a mis sinodales, M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez, Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría y al Dr. Luis Vázquez Sánchez.*



---

## *Resumen*

---

En este trabajo de tesis se propone el diseño teórico de un dispositivo absorbedor de vibraciones basado en la red mecánica C3 llamado NIDVA-C3, para el control de vibración armónica de una estructura tipo viga. Para cumplir con el propósito de éste trabajo se utilizaron la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio  $H_\infty$ , en ambos casos se obtuvieron resultados satisfactorios, sin embargo al utilizar la técnica de los puntos fijos solo se obtiene una aproximación de la respuesta exacta que se obtiene al utilizar el criterio  $H_\infty$ , esto se observa más claramente al comparar las gráficas de las respuestas del sistema con ambas técnicas. Una vez obtenidos los parámetros óptimos para el sistema se comparó la respuesta del sistema optimizado con la respuesta del sistema al utilizar el absorbedor de vibración dinámico (DVA) clásico. Al realizar la comparación se observó que al utilizar el NIDVA-C3 la amplitud de la vibración se reduce en un 48.1% que para casos prácticos significa una mayor durabilidad de las estructuras y máquinas sujetas a vibración y para el área de ingeniería mecánica automotriz se traduce en una mejor experiencia de manejo ya que se tendría una trayectoria más suave y fluida, lo cual brinda mayor confort.

## Índice

Resumen.....	1
Capítulo 1: Introducción .....	6
1.1 Planteamiento del problema.....	8
1.2 Justificación.....	9
1.3 Hipótesis.....	10
1.4 Objetivos .....	10
1.4.1 Objetivo General.....	10
1.4.2 Objetivos Específicos .....	10
1.5 Metas.....	10
1.6 Metodología.....	11
Capítulo 2: Estado del arte.....	15
2.1 Breve historia de los absorbedores de vibración.....	15
2.2 Implementación del inersor.....	18
Capítulo 3: Marco Teórico .....	25
3.1 Vibraciones Mecánicas.....	25
3.1.1 Elementos de un sistema vibratorio .....	25
3.1.2 Vibración armónica de un sistema de un solo grado de libertad .....	26
3.2 Vigas .....	28
3.2.1 Clasificación de las vigas.....	28
3.2.2 Teoría de Euler-Bernoulli .....	29
3.3 Deflexión de vigas .....	30
3.3.1 Condiciones de frontera en vigas .....	32
3.4 Análisis dimensional .....	34
3.4.1 Teorema II de Buckingham .....	35
3.5 Análisis modal .....	36
3.5.1 Función de respuesta en frecuencia .....	36
3.6 Teorema de Vieta.....	37
3.7 Técnica de los puntos fijos.....	38
3.8 Técnica de los puntos fijos extendida.....	40
3.9 Criterio $H_{\infty}$ .....	41

3.9.1 Método de Nishihara. ....	41
3.10 Formulación de Euler-Lagrange .....	44
3.10.1 Función de disipación de Rayleigh.....	44
Capítulo 4: Desarrollo del modelo matemático y optimización.....	47
4.1 Técnica de los puntos fijos extendida.....	52
4.2 Criterio $H_{\infty}$ .....	54
4.2.1 Método de Nishihara .....	54
Capítulo 5: Resultados.....	58
5.1 Resultados de la técnica de los puntos fijos extendida .....	58
5.1.1 Soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento $\zeta_2$ .....	61
5.2 Resultados mediante el criterio $H_{\infty}$ .....	64
Capítulo 6: Conclusiones.....	70
6.1 Trabajos futuros .....	71
Apéndices.....	73
Referencias.....	75



## Índice de Figuras

<b>FIGURA 1. 1:</b> ASIGNACIÓN ESTÁNDAR DE LOS ELEMENTOS DE CIRCUITOS EN LA ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE DONDE, K (RIGIDEZ), M (MASA), C (COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO), I (INDUCTANCIA), C (CAPACITANCIA) Y R (RESISTENCIA), SON CONSTANTES POSITIVAS .....	6
<b>FIGURA 1. 2:</b> ESQUEMA DE LA VIGA EULER-BERNOULLI CON EL ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN NO TRADICIONAL UTILIZANDO LA RED MECÁNICA C3 .....	9
<b>FIGURA 1. 3:</b> ESQUEMA DE LA ESTRUCTURA DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA POR CANALES. ....	11
<b>FIGURA 2. 1:</b> ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN DINÁMICO DE FRAHM. (6).....	15
<b>FIGURA 2. 2:</b> DISEÑO DE DVA CLÁSICO.....	18
<b>FIGURA 2. 3:</b> DISEÑO DVA NO TRADICIONAL. ....	18
<b>FIGURA 2. 4:</b> CONFIGURACIONES DE SUSPENSIONES EMPLEANDO INERSORES PROPUESTAS .....	19
<b>FIGURA 2. 5:</b> DIAGRAMA DEL SISTEMA PROPUESTO POR LÓPEZ.....	22
<b>FIGURA 2. 6:</b> DIAGRAMA DE LA ESTRUCTURA TIPO VIGA ACOPLADA AL NIDVA-C4.....	23
<b>FIGURA 3. 1:</b> SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD SUJETO A UNA FUERZA ARMÓNICA EXTERNA .....	27
<b>FIGURA 3. 2:</b> CLASIFICACIÓN DE LAS VIGAS SEGÚN SU APOYO.....	28
<b>FIGURA 3. 3:</b> VIGA CONVENCIONAL DE EULER-BERNOULLI.....	30
<b>FIGURA 3. 4:</b> ESQUEMA DEL MODELO DE VIGA [20] .....	31
<b>FIGURA 3. 5:</b> DCL DE FUERZAS QUE ACTÚAN EN UN ELEMENTO DIFERENCIA DE LA VIGA .....	31
<b>FIGURA 3. 6:</b> CONDICIONES DE FRONTERA MÁS USADAS PARA VIBRACIÓN TRANSVERSAL DE VIGAS [2].....	34
<b>FIGURA 3. 7:</b> SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD CON EXCITACIÓN ARMÓNICA .....	37
<b>FIGURA 3. 8:</b> GRÁFICA DE UN DVA CLÁSICO CORRESPONDIENTE AL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTADOS DEL SISTEMA CONSIDERANDO AMORTIGUAMIENTO INFINITO Y CERO, OBTENIENDO LOS PUNTOS FIJOS P Y Q. ....	39
<b>FIGURA 3. 9:</b> RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LA ESTRUCTURA PRIMARIA ACOPLADA AL DVA CLÁSICO CONSIDERANDO DIFERENTES VALORES DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO .....	39
<b>FIGURA 4. 1:</b> ESQUEMA DEL MODELO DE LA VIGA PROPUESTA EN ÉSTE TRABAJO. ....	47
<b>FIGURA 5. 1:</b> RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LA ESTRUCTURA PRIMARIA ACOPLADA AL NIDVA-C3 VS LA RELACIÓN DE FRECUENCIA $\Omega$ UTILIZANDO LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS Y UN COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO ARBITRARIO. ....	60
<b>FIGURA 5. 2:</b> GRÁFICA DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA $H(\Omega)$ CON LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS INCLUYENDO LA RELACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO ÓPTIMO. ....	63
<b>FIGURA 5. 3:</b> RESPUESTAS DEL SISTEMA AL CONSIDERAR DISTINTOS VALORES DE $\beta$ CON LA TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA. ....	64
<b>FIGURA 5. 4:</b> GRÁFICA DE $H(\Omega)$ CONSIDERANDO LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS OBTENIDOS CON EL CRITERIO $H_\infty$ .....	65
<b>FIGURA 5. 5:</b> COMPARACIÓN ENTRE LAS CURVAS RESULTANTES DE LA TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA Y EL CRITERIO $H_\infty$ .....	66
<b>FIGURA 5. 6:</b> RESPUESTA DEL SISTEMA CONSIDERANDO DISTINTOS VALORES DE $\beta$ EN EL CRITERIO $H_\infty$ .....	67
<b>FIGURA 5. 7:</b> COMPARACIÓN DE LAS CURVAS FRF DEL NIDVA-C3 Y EL DVA CLÁSICO .....	68

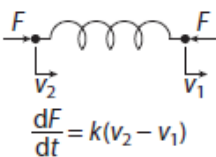
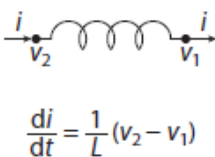
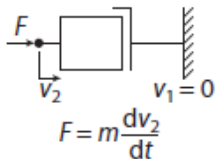
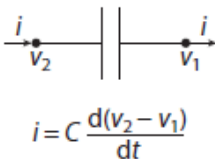
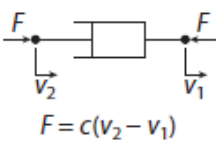
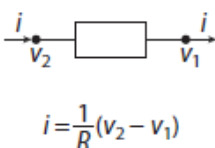
## Índice de Tablas

<b>TABLA 5. 1:</b> VALORES NUMÉRICOS ASIGNADOS PARA LAS VARIABLES INDEPENDIENTES.....	59
<b>TABLA 5. 2:</b> VALORES NUMÉRICOS OBTENIDOS PARA LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS Y LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL SISTEMA EN SU FORMA ADIMENSIONAL.....	59
<b>TABLA 5. 3:</b> VALORES NUMÉRICOS DE LA RELACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO PARA CADA FRECUENCIA RESONANTE.....	62
<b>TABLA 5. 4:</b> PARÁMETROS ÓPTIMOS DEL SISTEMA CONSIDERANDO DIFERENTES VALORES PARA $\beta$ CON LA TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA. ....	63
<b>TABLA 5. 5:</b> VALORES PARA LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS OBTENIDOS MEDIANTE EL CRITERIO $H_{\infty}$ .....	65
<b>TABLA 5. 6:</b> PARÁMETROS ÓPTIMOS DEL SISTEMA CONSIDERANDO DIFERENTES VALORES PARA $\beta$ EN EL CRITERIO $H_{\infty}$ .....	67

# Capítulo 1: Introducción

En diversas áreas de la ingeniería el daño generado a estructuras y maquinaria por vibraciones es una de las principales preocupaciones. Es por ello que, durante los últimos años, el desarrollo de dispositivos de control de vibraciones ha sido una de las principales áreas de investigación. Debido a este crecimiento del área de estudio, se ha implementado el uso de nuevos dispositivos de control de vibraciones.

En el 2001 un nuevo dispositivo para el control de vibraciones fue introducido el cual desde entonces se ha convertido en uno de los tres principales dispositivos de control pasivo utilizados en los sistemas de suspensión de vehículos de motor de alto rendimiento [1], esto hace que el conocimiento adquirido al desarrollar esta tesis también tenga aplicación en el área automotriz. En su artículo “*The inerter: A retrospective*” [1], Smith cita una analogía entre los elementos de las redes mecánicas con los elementos de las redes eléctricas, la cual es llamada la analogía Fuerza-Corriente, la cual se muestra en la Figura 1.1.

Mechanical	Electrical
 <p>Resorte</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	 <p>Inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (v_2 - v_1)$
 <p>Masa</p> $F = m \frac{dv_2}{dt}$	 <p>Capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$
 <p>Amortiguador</p> $F = c(v_2 - v_1)$	 <p>Resistor</p> $i = \frac{1}{R} (v_2 - v_1)$

**Figura 1. 1:** Asignación estándar de los elementos de circuitos en la analogía Fuerza-Corriente donde,  $k$  (rigidez),  $m$  (masa),  $c$  (coeficiente de amortiguamiento),  $L$  (inductancia),  $C$  (capacitancia) y  $R$  (resistencia), son constantes positivas

Sin embargo, la masa no es un dispositivo para la ingeniería que se pudiera manufacturar en comparación con los otros 5 dispositivos de esta analogía, es por ello que con la invención del inersor esta analogía cobra un poco más de sentido ya que puede ser el equivalente mecánico de un capacitor eléctrico.

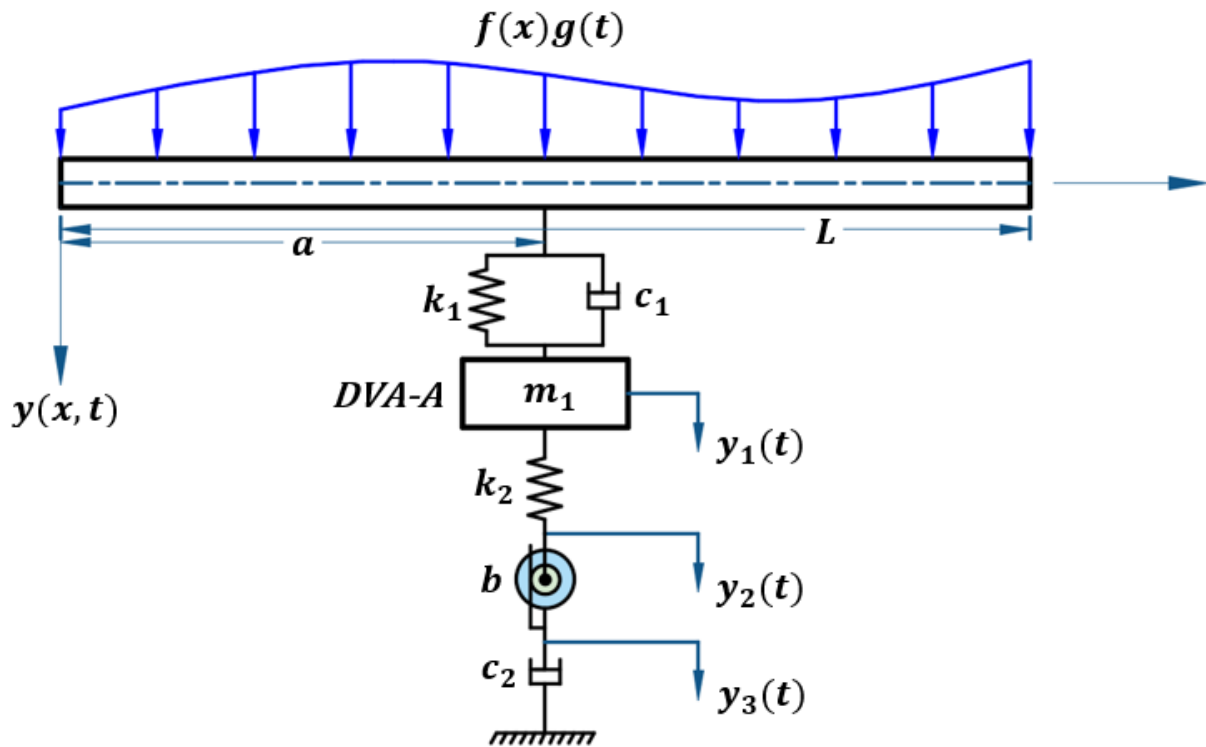
Existe un fenómeno llamado Resonancia el cual se da siempre que la frecuencia natural de la vibración de una máquina o de una estructura coincide con la frecuencia de la excitación externa [2], este fenómeno puede llegar a producir deflexiones y fallas excesivas en cualquier sistema, es por ello que es importante buscar la manera de reducir las amplitudes de vibración que las fuerzas externas producen en los sistemas. Una de las técnicas de reducción de vibraciones más investigadas es el uso de absorbedores de vibración dinámicos. Este sistema denominado DVA por sus siglas en inglés, es un sistema de masa auxiliar acoplado a un sistema primario, el cual ayuda reduciendo la amplitud de la vibración no deseada, para ello utiliza el equilibrio dinámico entre los desplazamientos de la estructura principal y el absorbedor. También, existe una configuración llamada absorbedor de vibración no tradicional, cuya característica es la conexión a tierra del amortiguador viscoso lineal del sistema secundario. El absorbedor de vibración dinámico se diseña de modo que las frecuencias naturales del sistema resultante se alejen de la frecuencia de excitación.

Actualmente las investigaciones relacionadas con el control pasivo de vibraciones se central en la implementación del DVA en conjunto con las redes mecánicas basadas en inersor. En [3] mediante la propuesta de dos sistemas de control pasivo de vibraciones basados en inersores se comprobó que el uso de éstos sistemas resulta más eficiente que usar solo el DVA clásico.

## 1.1 Planteamiento del problema

La vida útil de muchos elementos estructurales y maquinaria se ve reducida en gran manera debido a las vibraciones generadas por alguna fuerza externa muchas veces generadas por los efectos del viento o mala alineación de componentes conectados a motores, por ésta razón el desarrollo de sistemas de control de vibraciones para minimizar las amplitudes de vibración es de gran importancia en la ingeniería. Existen muchas variedades de sistemas mecánicos que han sido modelados matemáticamente y que han demostrado ser muy efectivos, ahora bien, desde el desarrollo del inersor, la síntesis de redes mecánicas pasivas se ha popularizado ya que se ha demostrado una ventaja superior cuando se emplean los inersores. Es por ello que en éste trabajo de tesis se propone el sistema mostrado en la Figura 1.2 en donde, considerando el modelo dinámico de la estructura, se realizarán las actividades planteadas en la sección de objetivos y metas.

En la propuesta mostrada en la Figura 1.2 se observa una configuración de una viga de Euler-Bernoulli de longitud  $L$  y sujeta a una fuerza de excitación armónica la cual está definida por la función  $f(x)g(t)$  donde  $f(x)$  es una función espacial y  $g(t)$  es una función determinística de tiempo. Esta viga está acoplada en serie con un absorbedor de vibración no tradicional el cual utiliza la red mecánica basada en inersor C3 [4], la cual emplea un resorte, un inersor y amortiguador en serie. Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para el absorbedor y la red mecánica quedan definidos como  $c_n$  y  $k_n$  ( $n=1,2$ ) respectivamente, ambos, están conectados a la masa  $m_1$ . La configuración del absorbedor de vibración se localiza en el punto  $x = a$ . Para el diseño óptimo del absorbedor de vibración se utilizarán tanto la técnica de los puntos fijos, como el índice de rendimiento  $H_\infty$ , ambas técnicas de optimización tienen como propósito obtener parámetros óptimos para el diseño de los absorbedores de vibración, sin embargo, la técnica de los puntos fijos extendida emplea los puntos invariantes para obtener soluciones aproximadas, mientras que con el índice de rendimiento  $H_\infty$  se utilizan las frecuencias de resonancia para obtener soluciones exactas, sin embargo, las ecuaciones resultantes en el tratamiento matemático son más complejas. Es por ello que es importante considerar ambas técnicas de optimización.



**Figura 1. 2:** Esquema de la viga Euler-Bernoulli con el absorbedor de vibración no tradicional utilizando la red mecánica C3

## 1.2 Justificación

Según la teoría de vibraciones, si un cuerpo tiene masa y elasticidad tiene la capacidad de vibrar, en estructuras, esta vibración muchas veces es ocasionada por la intervención de una fuerza dinámica externa, la cual puede ser causada por efectos del viento, olas, terremotos o incluso explosiones. Si la vibración generada por las fuerzas dinámicas externas tiene una frecuencia equiparable a las frecuencias naturales de la estructura se da un fenómeno llamado resonancia, este fenómeno hace que las amplitudes de las vibraciones tengan un incremento peligroso, comprometiendo la integridad de la estructura. Por esta razón es necesario el desarrollo de métodos para la mitigación de las vibraciones, ya que de no hacer esto, la vida útil de las estructuras se reduce. Con el fin de mitigar las vibraciones en estructuras tipo viga este trabajo se propone el control pasivo de vibraciones mediante el diseño óptimo de un absorbedor de vibración dinámico no tradicional basado en inersor conectado a tierra mecánica por una red mecánica C3.

### **1.3 Hipótesis**

La implementación del absorbedor de vibración dinámico no tradicional NIDVA-C3 a una estructura tipo viga, producirá un mayor rendimiento dinámico en comparación con el DVA clásico.

### **1.4 Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo General**

Diseñar teóricamente un absorbedor de vibración no tradicional sintonizado para minimizar la vibración armónica de la estructura tipo viga

#### **1.4.2 Objetivos Específicos**

- Obtener el modelo dinámico adimensional de la estructura tipo viga con el absorbedor de vibración no tradicional NIDVA-C3.
- Aplicar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el objetivo de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto.
- Obtener numéricamente soluciones óptimas mediante el criterio de rendimiento  $H_\infty$  con el objetivo de minimizar las amplitudes de vibración de la estructura tipo viga sujeta a vibración armónica.

### **1.5 Metas**

- Desarrollo del modelado de la viga con el absorbedor de vibración no tradicional NIDVA-C3 mediante la implementación del formulismo de Euler-Lagrange.

- Obtención de las ecuaciones algebraicas simplificadas para el cálculo de los parámetros óptimos del sistema mediante la técnica de los puntos fijos extendida.
- Obtención de los valores numéricos de los parámetros óptimos del sistema mediante el criterio  $H_{\infty}$ .
- Comparación gráfica las funciones de respuesta en frecuencia considerando los parámetros óptimos obtenidos con ambas técnicas de optimización.
- Comparación los resultados obtenidos con el criterio  $H_{\infty}$  con la respuesta del sistema al implementar el DVA clásico.
- Escribir una tesis con los resultados obtenidos.

## 1.6 Metodología.

La metodología que se utilizó en éste trabajo fue la propuesta por Canales [5] ya que según el autor este método responde a la necesidad de las diferentes escuelas de ingeniería. La estructura de la metodología se muestra en la Figura 1.3:

### Metodología



**Figura 1. 3:** Esquema de la estructura de la metodología propuesta por Canales.



Donde cada etapa consiste en:

**Etapa 0:** Documentación. En esta etapa, se recopila información relevante acerca de la tecnología, metodologías empleadas, entre otros aspectos relacionados con el tema de investigación. Es común que antes de comenzar un desarrollo o investigación, sea necesario documentarse sobre el dominio específico del producto o tema a abordar. La documentación puede incluir bibliografías, textos, artículos, normas, reglamentos, entre otros recursos que proporcionen información necesaria para el proceso de investigación.

Para el caso particular de éste trabajo de tesis fue necesario recopilar información sobre métodos de optimización de absorbedores de vibración, además de obtener un panorama general acerca de estudios previos a éste trabajo en los cuales se haya implementado el control de vibraciones y todo el conocimiento teórico necesario para el desarrollo del modelo matemático del sistema.

**Etapa 1:** Determinación del problema. Esta consiste en realizar la captura de requerimientos, lo que permite realizar un análisis del problema y delimitar los aspectos concretos que se tendrán en cuenta para el futuro objeto de investigación.

Para éste trabajo se considera una estructura tipo viga sujeta a carga armónica externa a la cual es necesario mitigar la vibración mediante el uso del NIDVA-C3, para ello es necesario el uso de dos técnicas de optimización para la obtención de los parámetros óptimos que reduzcan de mejor manera las amplitudes de vibración del sistema.

**Etapa 2:** Creación de la hipótesis. En la creación de la hipótesis, se formula una descripción del nuevo objeto que se desea construir o desarrollar en el contexto de la investigación. Esta hipótesis se basa en el objeto de estudio y tiene como objetivo principal guiar el proceso de investigación y proporcionar una dirección clara para la resolución del problema planteado.

La hipótesis planteada en éste trabajo es la siguiente:

- La implementación del absorbedor de vibración dinámico no tradicional NIDVA-C3 a una estructura tipo viga, producirá un mayor rendimiento dinámico en comparación con el DVA clásico.

**Etapa 3:** Definición del método de trabajo. En esta etapa se toman decisiones importantes relacionadas con la investigación, lo cual implica elegir el paradigma metodológico general de abordamiento, el método concreto y la metodología técnica ingenieril.

En éste trabajo se utilizan las ecuaciones de equilibrio de Newton y el formulismo de Euler-Lagrange para desarrollar el modelo matemático, además se utiliza el análisis modal para obtener la función de respuesta en frecuencia de la estructura. Una vez obtenida la función de respuesta en frecuencia se utilizan la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio  $H_{\infty}$  para obtener los parámetros óptimos que minimicen la vibración del sistema.

**Etapa 4:** Resolución, validación y verificación. En primer lugar, se realiza la resolución del problema identificado mediante herramientas matemáticas y consideraciones físicas.

Luego, se procede a la validación y verificación de la solución propuesta. La validación implica comprobar si la solución es adecuada y cumple con los requerimientos establecidos. Por otro lado, la verificación implica probar la solución en casos de prueba para asegurarse de que funcione correctamente. Una vez obtenidos los parámetros óptimos del sistema se realizó la validación de los mismos al realizar gráficas de la función de respuesta en frecuencia considerando distintos valores para los parámetros. A partir las gráficas se observó que los parámetros obtenidos mediante las técnicas de optimización resultan en la mejor respuesta del sistema, validando así los resultados obtenidos en éste trabajo de tesis.

**Etapa 5:** Una vez obtenidos los resultados analíticos o numéricos se comparan detalladamente con los reportados en la literatura y se plantea si los resultados obtenidos afirman o refutan la hipótesis. También se evalúa si se cumplieron con los objetivos y metas propuestas al inicio de la tesis. Cuando no se cumplen en su totalidad los objetivos o metas se plantean posibles soluciones al problema y se responde a la interrogante del por qué no fue posible su resolución total. De manera breve, se formulan ideas que enriquecen al tema de investigación para trabajos a futuro y cómo continuar con la investigación. Al realizar la comparación de los resultados obtenidos al realizar la optimización del sistema NIDVA-C3 con los resultados mostrados en la literatura para el sistema con el DVA clásico con lo cual se corrobora la hipótesis planteada al principio de la investigación.

**Etapa 6:** Redacción del informe final. En esta etapa, se redacta el informe final de la investigación. En dicho informe se debe dar una explicación clara y coherente del procedimiento y los resultados obtenidos.



---

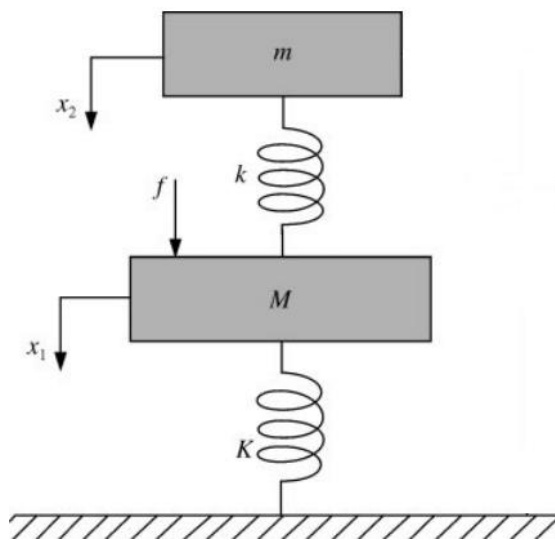
## Capítulo 2: Estado del arte

---

### 2.1 Breve historia de los absorbedores de vibración

A finales del siglo XIX, durante la era industrial, surgieron los primeros estudios y desarrollos relacionados con el control de vibraciones. Uno de los primeros dispositivos utilizados para reducir las vibraciones fue el amortiguador de masa, que consistía en agregar una masa adicional a un sistema vibratorio para cambiar su frecuencia natural y reducir las vibraciones no deseadas.

El primer absorbedor de vibración (DVA por sus siglas en inglés) fue desarrollado por Frahm en 1909 [37], este sistema es un dispositivo de control pasivo el cual consiste en un resorte lineal y una masa ( $m_2$ ), este sistema se acopla a un sistema principal el cual puede ser una estructura o maquinaria, Figura 2.1, y es utilizado para suprimir la vibración de banda estrecha. A partir de este modelo los investigadores han desarrollado nuevas configuraciones en busca de mejorar su rendimiento dinámico y superar su limitante obteniendo una absorción de vibraciones de banda ancha.



**Figura 2. 1:** Absorbedor de vibración dinámico de Frahm. (6)

Basado en este sistema en 1928 Ormondroyd [27] propuso un arreglo en el cual agrega un amortiguador al sistema, dicho amortiguador fue puesto en paralelo con el resorte del sistema de Frahm lo cual resulta en que el ancho de banda operativo del sistema se amplía considerablemente. A éste sistema es el que se le llama en la literatura DVA clásico. Gracias a

esta propuesta se descubrió también que existen frecuencias llamadas puntos fijos en donde las amplitudes de vibración son independientes del factor de amortiguamiento, a partir de estos puntos se puede obtener el valor óptimo de rigidez y amortiguamiento. Esa técnica de optimización sigue usándose hoy en día y es conocida como la técnica de los puntos fijos.

Una de las primeras aplicaciones prácticas de los sistemas de absorbedores de vibración dinámicos es el DAVI (*Dynamic Antiresonant Vibration Isolator*) utilizado por la armada de Estados Unidos para modificar un Helicóptero UH-1H [6] con la intención de reducir las vibraciones y daños que estas producen a los componentes de este vehículo, para ello se llevaron a cabo varias pruebas haciendo una comparación entre las del vehículo estándar y el mejorado con el DAVI, los resultados de esta prueba mostraron que para el caso del vehículo modificado con el DAVI la vibración vertical se redujo a  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{4}$  de la vibración del vehículo estándar, esto a una velocidad de 20-30 nudos. A velocidades más altas se redujo solo a la mitad.

En [7] se propone un modo de análisis para obtener los parámetros óptimos de los absorbedores de vibración dinámicos, el cual es útil para varios tipos de vigas. En este método se utiliza la primera forma modal como la función de expansión para la viga, esto hace que dichos parámetros estén en función de las condiciones de frontera de la viga, además de la ubicación del absorbedor de vibración dinámico. Además de que se llegó a la conclusión de que si la frecuencia de excitación es menor a cuatro veces la frecuencia de resonancia de la viga la solución aproximada que se obtiene de este método es muy cercana a la respuesta exacta amortiguada. Adicionalmente, este método no solo se puede utilizar para sintonizar el absorbedor a altas frecuencias de resonancia, ya que también resulta útil en casos en los cuales sea necesario utilizar más de un absorbedor de vibración y cada uno de ellos estén sintonizados a diferentes frecuencias resonantes.

En el año 1985 B.P. Wang en [8] propuso un método para el desarrollo de absorbedores de vibración dinámicos en el cual se utiliza la creación de antirresonancias en puntos específicos del sistema, donde, a partir de la respuesta dinámica de la viga a la excitación externa (receptancia) es posible obtener los parámetros del absorbedor, que, en este caso, son la rigidez del resorte y la masa del absorbedor. Sin embargo, también se considera la adición de un amortiguador del cual se puede calcular su constante a partir de un rango de amortiguamiento. Los pasos a seguir en este método son los siguientes:

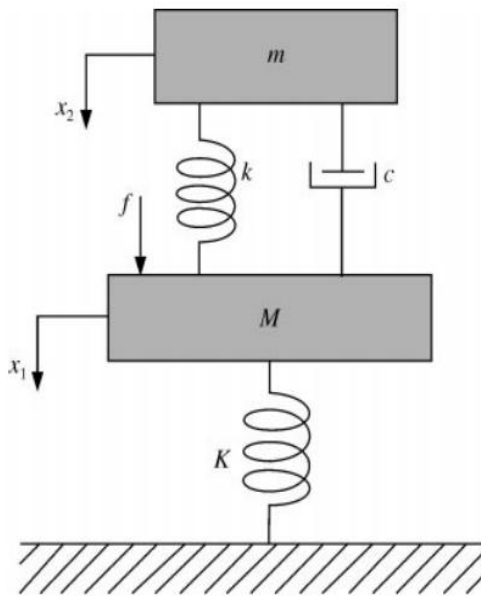
- Elegir el grado de libertad antirresonante deseado
- Elegir la ubicación de el/los absorbedores.
- Calcular las fuerzas internas
- Calcular la receptancia para cada absorbedor
- Para un rango admisible de valores para la masa del absorbedor, calcular las constantes del resorte. Si esta constante es positiva, los valores de la masa y rigidez del resorte son una solución físicamente posible al problema de diseño.

Debido a que en este método la estructura y el o los absorbedores se analizan por separado, se pueden utilizar otros tipos de absorbedores además del sistema de masa-resorte. De la misma manera, la libertad de elegir el número de absorbedores y su ubicación, permite evadir algunas limitaciones del diseño.

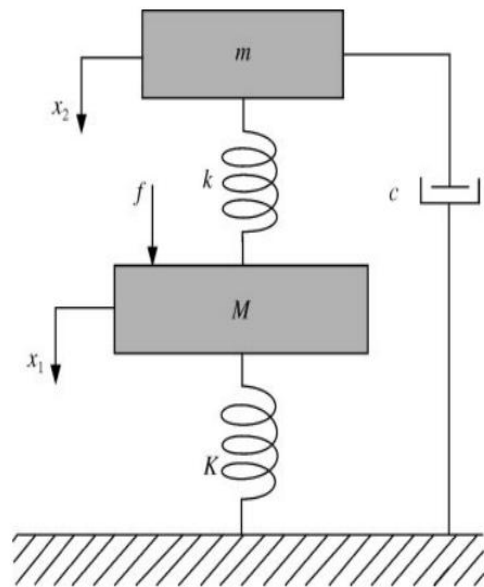
En el año 1992 Tadayashi Aida [9] publicó un artículo en el cual se utiliza un sistema de absorbedor de vibración dinámico compuesto por una viga un resorte de conexión y un amortiguador. Este sistema es colocado en la viga principal bajo las mismas condiciones de frontera que la viga principal. Así mismo, se discute la importancia del amortiguamiento en el absorbedor de vibración dinámico, ya que se demuestra que sin el amortiguamiento la respuesta de la viga principal se reduce a excepción de la respuesta del segundo modo. Ahora, si se utiliza el amortiguamiento la respuesta de la viga principal se reduce notablemente, mostrando así que el absorbedor de vibración dinámico de tipo viga es efectivo para reducir la respuesta de la viga principal a la carga periódica y que el amortiguamiento es un factor importante a considerar en el diseño del absorbedor para lograr una reducción efectiva de las amplitudes de vibración de la viga.

En 2001 se propuso un nuevo diseño basado en el llamado absorbedor de vibración dinámico clásico, dicho diseño consiste en un sistema compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador, el cual se conecta a una estructura primaria sujeta a vibraciones (Figura 2.2). El principio de funcionamiento de este DVA se basa en la capacidad del amortiguador para disipar la energía vibracional.

En el diseño propuesto [10], el elemento amortiguador se conecta a la tierra en lugar de a la estructura que se desea controlar (Figura 2.3). Éste tipo de configuración es conocido como DVA no tradicional. Se demostró que para una misma relación de masas el DVA no tradicional reduce de manera más efectiva el nivel de vibración que el diseño clásico, lo cual significa que se puede lograr una mejor reducción de la vibración sin aumentar la masa adicional. Además, se encontró que el amortiguamiento óptimo para el DVA no tradicional es mayor que el amortiguamiento óptimo del DVA clásico.



**Figura 2. 2:** Diseño de DVA clásico.



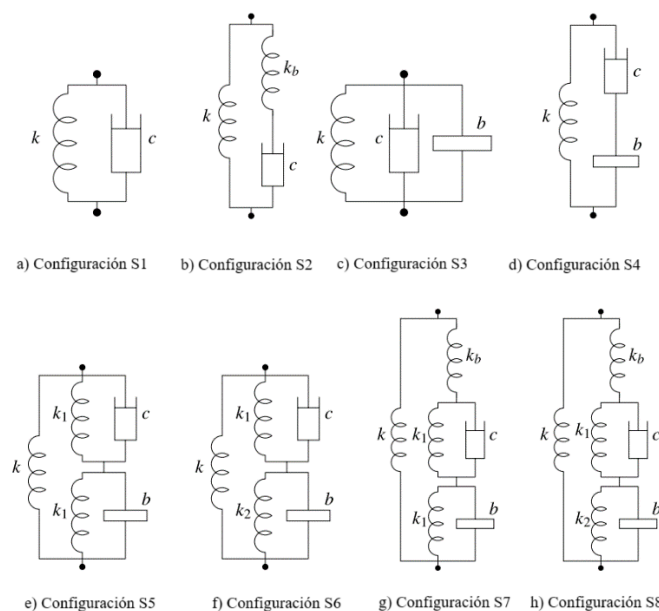
**Figura 2. 3:** Diseño DVA no tradicional.

## 2.2 Implementación del inersor

Como se mencionó anteriormente, Smith [31] introdujo el concepto de “*inersor*” el cual es un dispositivo de dos terminales el cual cuenta con ciertas propiedades las cuales están definidas por la aceleración relativa entre ambas terminales de dicho dispositivo. En ese mismo artículo se propone el uso del inersor en el diseño de puntales de suspensiones que, tradicionalmente, solo emplean amortiguadores y resortes. Al considerar la suspensión con arreglos convencionales de resortes y amortiguadores resulta en un comportamiento muy oscilatorio, en

cambio sí se implementan redes mecánicas basadas en inersor reduce significativamente dicha oscilación.

Las primeras aplicaciones exitosas del inersor se dieron en sistemas de suspensión de vehículos, Smith y Wang [11] fueron de los primeros investigadores en realizar la publicación de un artículo sobre la implementación de los inersores en suspensiones de vehículos, en dicho artículo, se menciona que debido a que las suspensiones de vehículos en las cuales solo se utilizan resortes y amortiguadores y que, además, se evita tener un elemento masa tienen características dinámicas limitadas, existe un rango de mejora de las dinámicas del vehículo si se utilizan sistemas de suspensiones en las cuales no solo se utilizan los dispositivos mecánicos mencionados anteriormente, sino que también se utilizan inersores, es por ello que se propusieron ocho configuraciones de sistemas de suspensión empleando estos tres dispositivos las cuales se muestran en la Figura 2.4. Adicionalmente, se utilizaron modelos simplificados de la suspensión de un cuarto de vehículo y de vehículo completo, para hacer un estudio de optimización preliminar tomando en cuenta ciertos requerimientos prácticos para el diseño tales como el confort del pasajero, cargas normales de los neumáticos, manejo, etc. Después de la optimización se obtuvieron mejoras de un 10% o más para mediciones como las cargas normales a los neumáticos o el manejo, esto para el caso del cuarto de vehículo, sin embargo, para el caso del vehículo completo también se obtuvieron mejoras. Por último, se creó un prototipo de un inersor con la finalidad de realizar pruebas experimentales.



**Figura 2. 4:** Configuraciones de suspensiones empleando inersores propuestas



Otro de los usos que se le dio al inersor fue en el diseño de un compensador mecánico de dirección para motocicletas de alto rendimiento [12] en el cual se introdujo la idea de remplazar el amortiguador de dirección de una motocicleta de alto rendimiento por una red mecánica, esta idea fue incitada debido a los reportes del bajo desempeño de las motocicletas de alto rendimiento a altas velocidades y así buscar un mejor desempeño en la repuesta de los modos de vibración “*wobble and weave*” de la motocicleta a altas velocidades. Los resultados obtenidos mediante el procedimiento de diseño de respuesta en frecuencia muestran que la implementación de la red mecánica basada en inersor mejora significativamente las características de desempeño de la motocicleta. Sin embargo, se dejó en claro que, a pesar de los buenos resultados obtenidos en este estudio, aún existían problemas destacados para la implementación de esta red mecánica, algunos ejemplos de dichos problemas son la selección de los radios óptimos para los inersores y el correcto dimensionamiento del dispositivo con el fin de hacerlo lo suficientemente robusto para soportar el desgaste del uso normal, sin ser innecesariamente voluminoso.

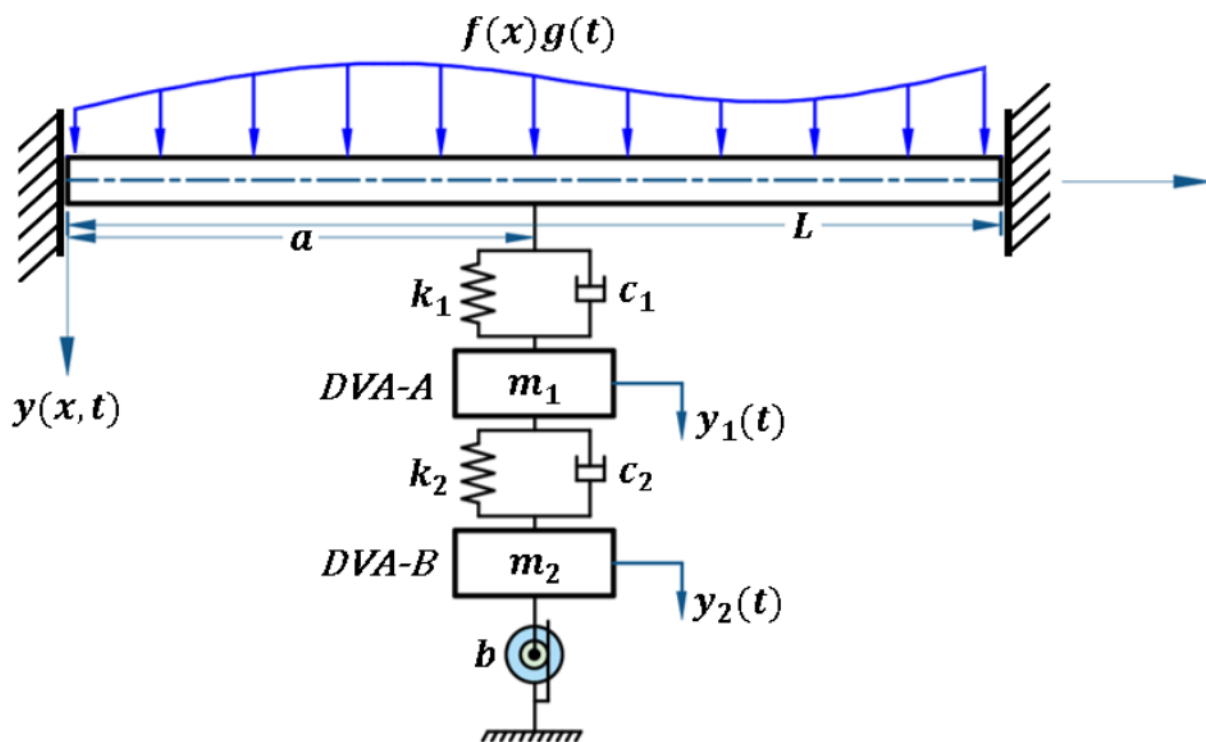
La tercera implementación de los inersores se dio en el diseño de suspensiones de trenes de los cuales las suspensiones son más complejas que las suspensiones de los vehículos ya que en ellas se utiliza un componente extra entre las ruedas y el chasis llamado “*bogie*”. Estas suspensiones utilizan dos sistemas para conectar el chasis con el *bogie* y el *bogie* con la rueda, en la Figura 2.5 se muestra el diagrama del sistema de suspensión de una rueda de tren.

En 2016 Jin [26] propone dos configuraciones de control pasivo basados en inersores. La configuración 1 consiste de una masa conectada a una combinación en paralelo de un resorte y un amortiguador en serie con un resorte y un inersor, mientras que la configuración 2 consta de un absorbedor de vibración dinámico en serie con un inersor. Estas configuraciones fueron propuestas para mejorar la eliminación de vibraciones en una estructura tipo viga. Al analizar ambos sistemas y obtener los valores de los parámetros óptimos mediante la técnica de los puntos fijos, se compararon los resultados obtenidos con los resultados de un DVA tradicional y en ambos casos se encontró que son más eficientes sobre todo bajo relaciones de masas más pequeñas. Además, se realiza una comparación entre ambas configuraciones obteniendo como resultado que para relaciones de masas más pequeñas la configuración 1 es mejor que la configuración dos mientras que para relaciones de masas más grandes la configuración 2 resulta ser mejor que la configuración 1.

En 2018 Barredo [15] desarrollo una técnica analítica para el diseño óptimo de absorbedores de vibración dinámicos basados en inersores, dicha técnica se basa en la técnica desarrollada por Den Hartog [27]. Para encontrar las soluciones óptimas, esta técnica también considera la teoría de Krenk y el Teorema de Vieta. Para poder validar ésta técnica se compararon los resultados resolviendo un problema de optimización, el problema de optimización se enfocó en la desviación media entre las amplitudes de vibración bajo un rango específico de frecuencias de excitación para cada relación de masa, con esto Barredo también demostró que la técnica de Den Hartog no es apta para calcular el factor de amortiguamiento óptimo que aplane las curvas de la función de respuesta en frecuencia de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor. Adicionalmente, se demostró que los resultados obtenidos con la técnica de los puntos fijos extendida son muy similares a los obtenidos con el método de optimización  $H_\infty$ , con la ventaja de que la técnica de los puntos fijos solo requiere resolver un conjunto de ecuaciones no lineales dadas por las sumas y productos de las raíces reales de ecuaciones de cuarto grado.

En 2021 López [16] realizó el análisis matemático y optimización de una estructura tipo viga sobre la cual se ejerce una fuerza de excitación armónica externa, ésta viga esta acoplada a un arreglo en serie de dos absorbedores de vibración dinámicos A y B, ambos están compuestos por un elemento de masa que a su vez está conectado en serie con un arreglo en paralelo de un amortiguador y un resorte, además, el sistema también cuenta con un inersor, para el que una de sus terminales está conectada a tierra mecánica y la otra terminal se conecta a la masa del DVA-B. El diagrama del modelo propuesto se muestra en la Figura 2.5.

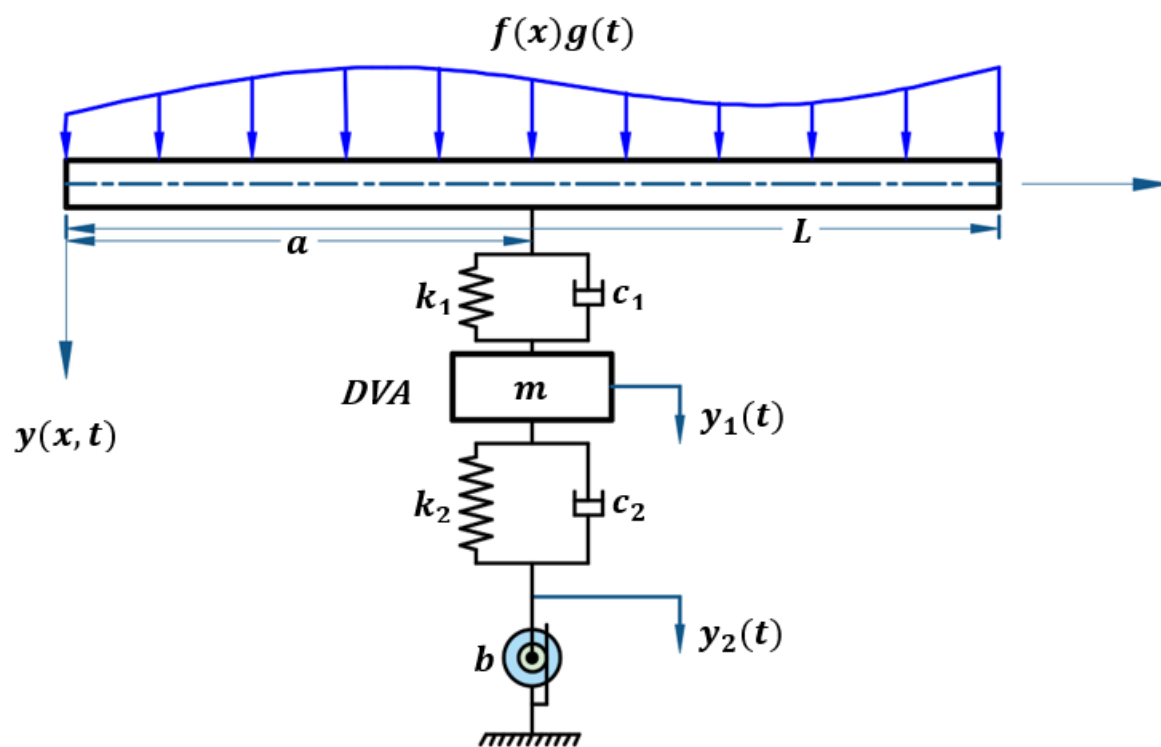
El análisis fue realizado mediante los criterios de optimización  $H_\infty$ , basado en el método de Nishihara y la técnica de los puntos fijos extendida, siendo una aproximación de la norma  $H_\infty$ . Con los resultados obtenidos se logró minimizar las amplitudes de vibración del sistema relacionadas con la respuesta en frecuencia, además de que se corroboró la similitud entre los resultados obtenidos con ambas técnicas. Al calcular el índice de ancho de banda de supresión de vibraciones existe una ventaja superior al 17% cuando se utiliza el sistema propuesto, en comparación con el DVA clásico cuando actúa una fuerza externa de tipo armónica.



*Figura 2. 5: Diagrama del sistema propuesto por López*

De la misma manera Pérez [28] propone un sistema de un absorbedor de vibración dinámico no tradicional basado en inersor conectado a una estructura tipo viga bajo excitación armónica externa, el sistema al cual está acoplada la estructura consta de un absorbedor dinámico de vibración amortiguado que, a su vez, se conecta en serie a la red mecánica denominada C-4 con conexión a tierra, como se muestra en la Figura 2.6. Así mismo, la red mecánica C-4 está formada por una conexión en paralelo de resorte amortiguador viscoso conectado en serie a un inersor.

Para obtener los parámetros óptimos se realizó el análisis utilizando el criterio  $H_\infty$  y la técnica de los puntos fijos extendida. Con ambas técnicas se logró minimizar las amplitudes de vibración del sistema relacionadas con la respuesta en frecuencia del sistema. Al calcular el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones existe un rendimiento del 23.03 % cuando se utiliza el NIDVA-C4 propuesto, en comparación con el DVA clásico.



**Figura 2. 6:** Diagrama de la estructura tipo viga acoplada al NIDVA-C4



---

## *Capítulo 3: Marco Teórico*

---

### **3.1 Vibraciones Mecánicas**

De acuerdo con Rao [2] una vibración se define como cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo llamado periodo usualmente denotado por la letra  $\tau$  y medido en segundos. Además del periodo existen dos características más de las vibraciones las cuales son la frecuencia, que es el recíproco del periodo y esta denotado en ciclos por segundo, y la amplitud, que es la máxima magnitud del desplazamiento que alcanza la vibración.

#### **3.1.1 Elementos de un sistema vibratorio**

Normalmente se contemplan tres elementos

- **Elemento Resorte:** Este elemento mecánico en la mayoría de sus aplicaciones se considera que no tiene amortiguamiento ni masa, sin embargo, cualquier elemento elástico o deformable puede considerarse como un resorte, su propósito principal es almacenar energía potencial. Existen dos tipos de resortes, lineales y no lineales, para que un resorte se considere lineal se tiene que cumplir la relación entre el alargamiento o el acortamiento de la longitud  $x$  del resorte con la fuerza aplicada  $F$  mostrada en la ecuación (3.1), donde también influye la constante de rigidez del resorte, denotada como  $k$  y la cual indica la fuerza necesaria para producir una deflexión unitaria en el resorte, dicha constante es siempre positiva.

$$F = kx \quad (3.1)$$

En el caso de los resortes no lineales la relación fuerza-deflexión está dada por la ecuación (3.2) en la que la constante asociada con la parte lineal es siempre positiva y la constante asociada a la no linealidad,  $b$ , determina si un resorte es duro, lineal o suave ya que si  $b > 0$  el resorte es duro, si  $b = 0$  el resorte es lineal y si  $b < 0$  el resorte es suave.

$$F = ax + bx^3 \quad (3.2)$$

- **Elemento de masa o inercia:** En este elemento tiene la capacidad de perder o ganar energía cinética a partir del trabajo que se realiza sobre la misma masa.
- **Elemento de amortiguamiento:** Este es el mecanismo con el cual la energía vibratoria se disipa en calor o sonido. Esta disipación, aunque sea muy pequeña, es importante para determinar de manera más precisa la respuesta a la vibración de un sistema. La mayoría de las veces es muy difícil determinar las causas del amortiguamiento en sistemas prácticos, así que el amortiguamiento se modela tomando en cuenta alguno de los siguientes modelos:
  - **Amortiguamiento viscoso:** Este es el tipo de amortiguamiento más utilizado en el análisis de vibración. En este tipo de amortiguamiento la energía se disipa debido a la resistencia que ofrece el fluido en el cual se encuentra el sistema mecánico, sin embargo, la cantidad de energía disipada depende de otros factores como la viscosidad del fluido, la frecuencia de vibración, etc. Para este amortiguamiento la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo vibratorio.
  - **Amortiguamiento de Coulomb o de fricción en seco:** Es el resultado de la fricción entre dos superficies secas al frotarse, aquí la fuerza de amortiguamiento es de magnitud constante, pero en dirección opuesta al movimiento del cuerpo vibratorio.
  - **Amortiguamiento debido a un material sólido o histérico:** cuando un material se deforma, absorbe o disipa energía. El efecto se debe a la fricción que se genera entre los planos internos de material que se deslizan a medida que ocurren las deformaciones.

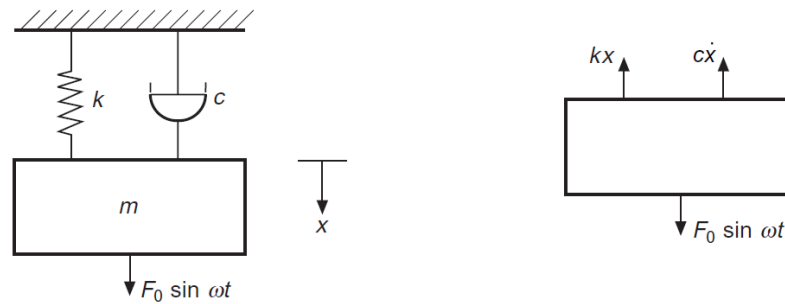
### 3.1.2 Vibración armónica de un sistema de un solo grado de libertad

Este es el tipo de vibración generalmente es representada matemáticamente con funciones seno y coseno, es considerada la forma más simple de vibración y es la base en la cual muchos

modos de vibración más complejos ya que hasta las formas de vibración no periódicas pueden ser descritas como una vibración periódica cuyo periodo es infinito.

La vibración armónica de un sistema de un solo grado de libertad puede suceder si se desplaza la masa hasta cierta distancia del punto de equilibrio y después se suelta generando una oscilación. Si no existiera fricción en el sistema, la oscilación continuaría en la misma proporción y en la misma amplitud para siempre. Este movimiento armónico sencillo idealizado, casi nunca se encuentra en sistemas mecánicos reales. Cualquier sistema real tiene fricción y eso hace que la amplitud de la vibración disminuya gradualmente ya que la energía se disipa en forma de calor [33].

Otra manera de que ocurra la vibración armónica es si sistema está sujeto a una fuerza armónica externa. Si se toma como ejemplo un sistema el cual además tiene un amortiguador viscoso cuyo coeficiente de amortiguamiento es  $c$ , con una fuerza armónica externa denotada por  $F_0 \sin \omega t$  (Figura 3.1)



**Figura 3. 1:** Sistema de un solo grado de libertad sujeto a una fuerza armónica externa

Considerando el sistema mostrado en la Figura 3.1, el modelo matemático que gobierna el sistema dinámico es:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \omega t \quad (3.3)$$

Se sabe que en señales armónicas en el dominio de tiempo con un periodo  $T$  y frecuencia  $\omega$  el desplazamiento es de la forma:

$$x(t) = X \sin \omega t = X \sin (\omega t + nT) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$



Entonces para este caso la función de desplazamiento de la vibración del sistema que da determinada por:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

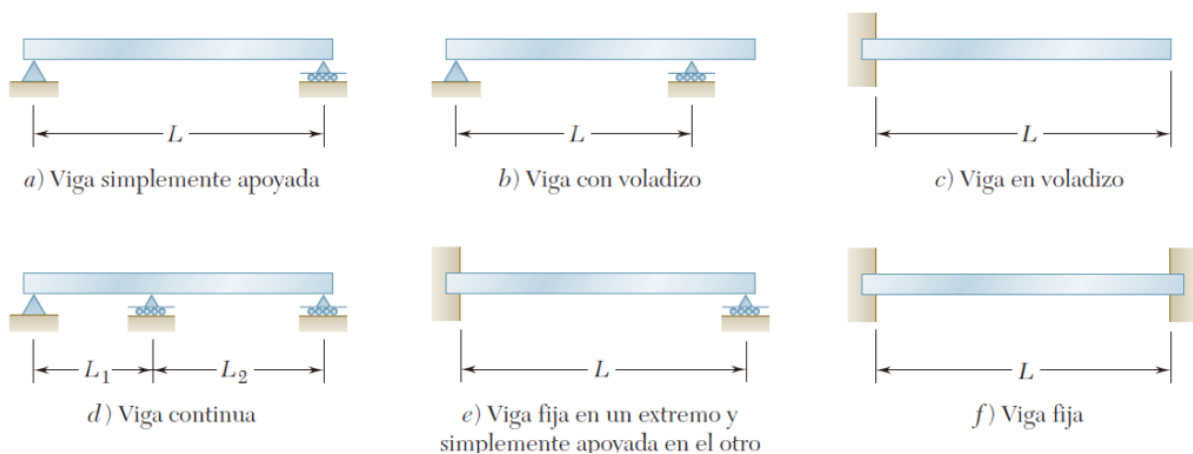
Donde  $X$  y  $\varphi$  son constantes que se tienen que determinar e indican la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta, respectivamente.

## 3.2 Vigas

Una viga se define como un elemento estructural (generalmente barras prismáticas rectas y largas) diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en uno o varios puntos a lo largo del elemento, dichas cargas normalmente son perpendiculares al eje de la viga produciendo sobre esta corte y deflexión [13]. Una viga no solo puede estar sujeta a cargas puntuales, expresadas en Newtons o libras, sino también pueden estar sujetas a una carga distribuida  $W$ , expresada en N/m o lb/ft.

### 3.2.1 Clasificación de las vigas

Las vigas se clasifican de acuerdo a la forma en la que estén apoyadas, la Figura 3.2 muestra varios tipos de vigas que se utilizan frecuentemente.



**Figura 3. 2:** Clasificación de las vigas según su apoyo.

La distancia  $L$  que existe entre los apoyos se le llama claro.

### 3.2.2 Teoría de Euler-Bernoulli

En esta teoría se considera una viga de longitud  $L$ , sección transversal con área  $A$  y módulo de inercia  $I$ , sobre dicha viga actúan cargas verticales y momentos sobre el plano  $xz$ , como se muestra en la Figura 3.3.

La teoría de Euler-Bernoulli se basa en tres hipótesis [32]:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje  $x$ .
2. El desplazamiento lateral (eje  $y$ ) es nulo.
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

Derivado de estas hipótesis el desplazamiento de cualquier punto se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z\theta(x) \\v(x, y, z) &= 0 \\w(x, y, z) &= w(x)\end{aligned}\tag{3.6}$$

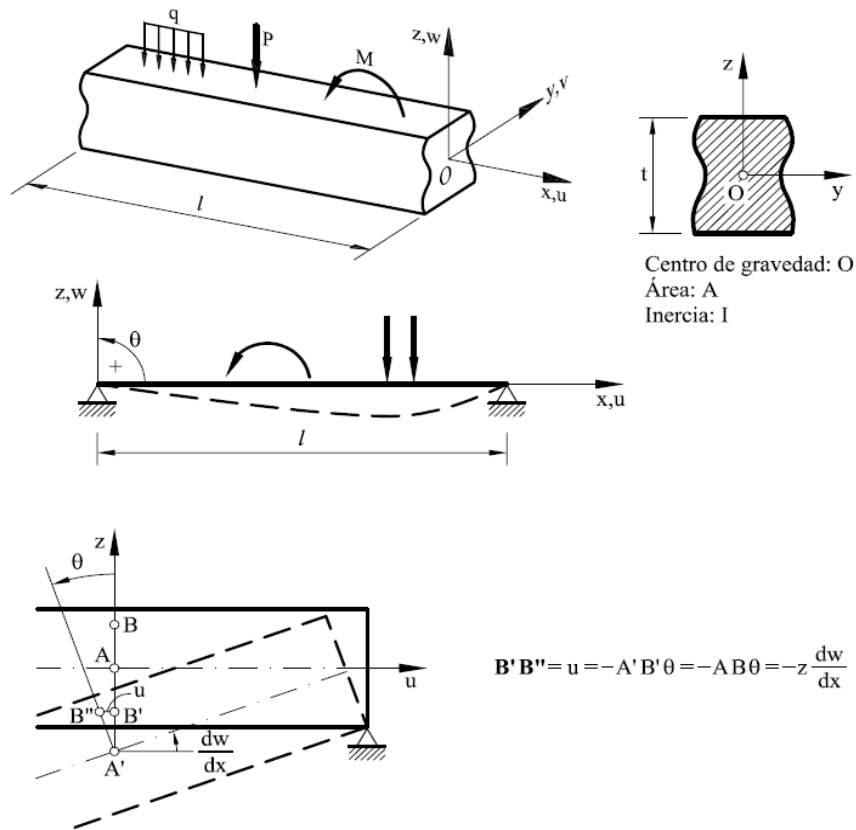
A partir de la tercera hipótesis se tiene que el giro  $\theta$  es igual a la pendiente de la deformación del eje, es decir

$$\theta = \frac{dw}{dx} \text{ y } u = -z \frac{dw}{dx}\tag{3.7}$$

De esta manera las deformaciones de la viga en cualquier punto están dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}\tag{3.8}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\tag{3.9}$$

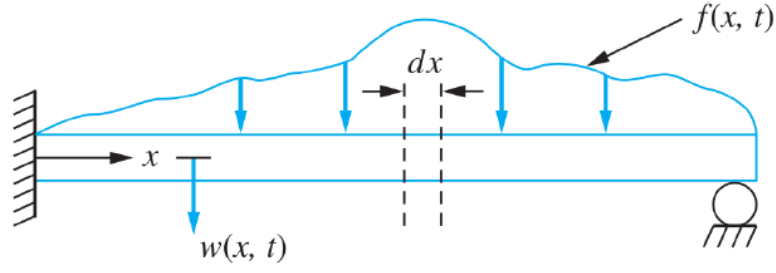


**Figura 3. 3:** *Viga convencional de Euler-Bernoulli.*

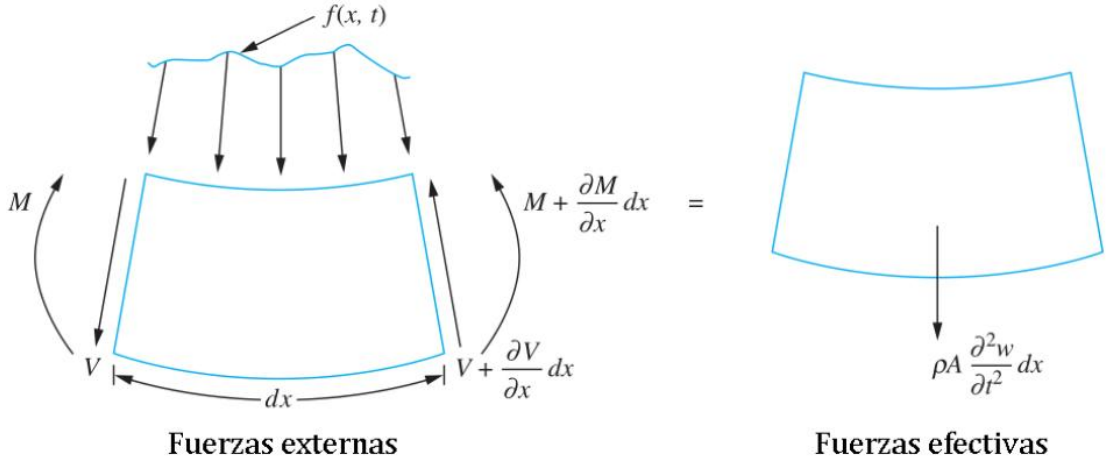
Considerando éstas hipótesis se llega a la suposición de que el esfuerzo cortante transversal es cero, en cambio en la teoría de Timoshenko esta suposición se elimina, debido a que el plano de la sección transversal permanece recto, pero no necesariamente perpendicular al eje neutro de la viga. Sin embargo, para el análisis de vigas largas no existe diferencia significativa.

### 3.3 Deflexión de vigas

Muchas estructuras que se son útiles en nuestro día a día están constituidas por vigas, columnas o placas, las cuales a su vez están sujetas a la acción de fuerzas ya sea debido a su propio peso o generadas por algún agente externo. Al considerar la vibración lateral de la viga uniforme, mostrada en la Figura 3.4, con una longitud  $L$ , área transversal  $A$ , momento de inercia  $I$  [20]. La viga está constituida por un material con características físicas de densidad de masa  $\rho$  y módulo de elasticidad  $E$ . Además, dicha viga está sujeta a una carga externa por unidad de longitud  $f(x, t)$  y su desplazamiento transversal está dado por  $w(x, t)$ .



**Figura 3. 4:** Esquema del modelo de viga [20]



**Figura 3. 5:** DCL de fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la viga

Considerando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3.5 se tiene que la ecuación de movimiento causada por la fuerza es:

$$V - \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + \int_x^{x+dx} f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \quad (3.10)$$

Al aplicar el teorema del valor medio se tiene:

$$f(x, t) - \frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Tomando en cuenta el DCL de la Figura 3.5 se obtiene que la ecuación de movimiento causado por el momento es:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx\right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) dx + \int_x^{x+dx} (\xi - x) f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \left(\frac{dx}{2}\right) \quad (3.12)$$

Aplicando el teorema del valor medio y despreciando los términos mayores de orden 2 para los elementos infinitesimales, la ecuación anterior se simplifica a:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.13)$$

De la teoría de la deflexión de vigas y considerando la convención de los signos de acuerdo al DCL

$$M = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Considerando las propiedades de una viga uniforme tenemos:

$$EI \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.15)$$

Esta ecuación representa la dinámica vibratoria de una viga sujeta a una carga externa [2].

### 3.3.1 Condiciones de frontera en vigas

A continuación, se muestra una lista con las condiciones de frontera utilizadas más frecuentemente para vibraciones transversales de vigas:

i. Extremo libre

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.16)$$

- Fuerza cortante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.17)$$

ii. Extremo simplemente apoyado (de pasador)

- Deflexión

$$\omega = 0 \quad (3.18)$$

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19)$$

iii. Extremo fijo (empotrado)

- Deflexión

$$\omega = 0 \quad (3.20)$$

- Pendiente

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

iv. Corredizo (deslizándose)

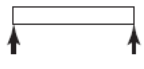

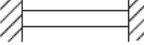
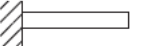
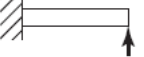

- Pendiente

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

- Fuerza cortante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.23)$$

En la Figura 3.6 se muestran las condiciones de frontera más utilizadas junto con sus ecuaciones de frecuencia, modos normales y las frecuencias naturales.

Condiciones en los extremos de la viga	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Valor de $\beta_n l$
Ambos extremos articulados 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Ambos extremos libres 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ( $\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)
Ambos extremos empotrados 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left( \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Un extremo empotrado y el otro libre 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Un extremo empotrado y el otro articulado 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Un extremo articulado y el otro libre 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \alpha_n \sinh \beta_n x]$ donde $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ( $\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)

**Figura 3. 6:** Condiciones de frontera más usadas para vibración transversal de vigas [2]

### 3.4 Análisis dimensional

El análisis dimensional tiene como propósito tener en ambos lados de una ecuación las mismas dimensiones finales, dichas dimensiones, involucradas en un sistema físico, se dan en términos de tres dimensiones elementales, longitud, masa y tiempo, que tienen unidades de metro, kilogramo y segundo, respectivamente, de acuerdo al Sistema Internacional de Unidades.

### 3.4.1 Teorema II de Buckingham

Este teorema representa una parte fundamental del análisis adimensional, y está basado en los trabajos de Vaschy [34] y Riabouchinski [35]. Este teorema establece que una relación física que involucra  $n$  variables puede ser expresada en términos de  $n - j$  grupos adimensionales, donde  $j$  es el número mínimo de dimensiones fundamentales necesarias para describir las variables. De manera textual el teorema puede ser escrito de la siguiente manera:

*“ Si  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  son  $n$  variables físicas involucradas en un problema físico y existe una relación funcional entre las variables de la forma:*

$$\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

*Entonces, las  $n$  variables se pueden combinar de tal forma que se forman  $(n-j)$  variables adimensionales independientes, donde  $j$  es el rango de la matriz adimensional”.*

Cada factor adimensional es conocido como número  $\Pi$ , de manera que la relación se puede reescribir como:

$$\psi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-j}) = 0 \quad (3.24)$$

De esta manera es posible encontrar los  $\Pi_i$  por medio de la siguiente ecuación:

$$\Pi_i = \Gamma_{B_i} \prod_{m=1}^j \Gamma_{P_m}^{c_m}, \quad \text{con: } i = 1, 2, \dots, n - j \quad (3.25)$$

Donde  $\Gamma_B$  son las variables involucradas en el sistema,  $\Gamma_P$  son las variables de referencia o fundamentales y los  $c_k$  se eligen para que cada  $\Pi_i$  sea adimensional. De esta manera se expresa la relación entre las  $\Pi_i$  como:

$$\Pi_1 = \Omega(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-j}) \quad (3.26)$$



Este teorema solo ayuda a encontrar una manera de generar conjuntos de variables adimensionales, sin embargo, el método no deduce las variables físicamente significativas, es decir, las que se necesiten para resolver el problema. Cada caso  $(n - j)$  forman una base. [22]

### 3.5 Análisis modal

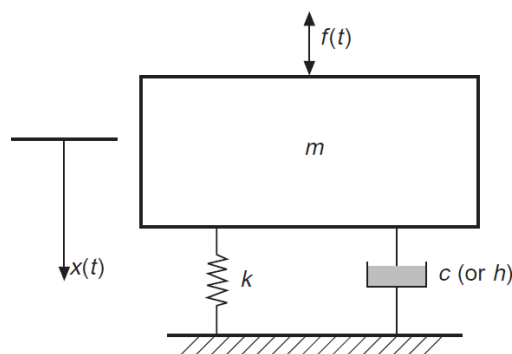
El análisis modal es el proceso de determinar las características dinámicas inherentes de un sistema en formas de frecuencia natural, factores de amortiguamiento y formas modales y usarlos para formular un modelo matemático para su comportamiento dinámico [13].

El análisis modal está basado en las respuestas de vibración de un sistema dinámico lineal, el cuál puede ser expresado mediante una combinación lineal de movimientos armónicos simples (modos naturales de vibración). Al utilizar este análisis, es posible obtener las características dinámicas intrínsecas de una estructura, la cual se representa en las formas modales, frecuencias naturales y los factores de amortiguamiento.

#### 3.5.1 Función de respuesta en frecuencia

La función principal de la cual depende el análisis modal es la función de respuesta de frecuencia o FRF (por sus siglas en inglés) ya que el éxito del análisis modal depende mucho de la exactitud de los datos obtenidos de la función de respuesta en frecuencia.

Debido a que algunos sistemas mecánicos y estructurales son idealizados como sistemas de un solo grado de libertad, además de que los sistemas de un solo grado de libertad forman las bases para el análisis de sistemas de varios grados de libertad, se toma en cuenta el diagrama mostrado en la Figura 3.7 el cual cuenta con una masa, un resorte y un amortiguador.



**Figura 3. 7:** Sistema de un solo grado de libertad con excitación armónica

En este caso, si la excitación es armónica,  $f(t) = F(\omega)e^{j\omega t}$  su respuesta también es una función armónica de la forma  $x(t) = X(\omega)e^{j\omega t}$  donde  $X(\omega)$  es la amplitud compleja. A partir de esto se puede deducir que la función de respuesta de frecuencia es la relación entre la respuesta de desplazamiento y la fuerza de excitación y puede ser denotado como  $\alpha(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c}$ .

### 3.6 Teorema de Vieta

Cuando se trabaja con ecuaciones algebraicas es inherente tratar de resolverlas y encontrarle un significado tangible a las soluciones obtenidas. El resolver las ecuaciones involucra obtener todas sus raíces (complejas o reales), de forma exacta o aproximada [23]. En ocasiones basta con encontrar una aproximación a dicha solución, sin embargo, en el proceso de efectuar cierto procedimiento para encontrar las raíces de forma analítica, es posible encontrar y vincular más información relacionada a las propiedades que caracterizan al problema, tal es el caso de las llamadas ecuaciones de Vieta.

Para emplear las ecuaciones de Vieta se considera una ecuación mónica ( $a_n = 1$ ) de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (3.27)$$

La ecuación anterior contiene  $n$  raíces  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Éstas raíces pueden encontrarse con base en los términos  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  independientes del polinomio.

Generalizando las soluciones de la ecuación y relacionándolas con los términos independientes se obtiene [24]:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(x_1 + \dots + x_n) \\ a_{n-2} &= (x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \\ &\vdots \\ a_{n-j} &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j} \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tomando como ejemplo una ecuación cuartica, es decir, una ecuación con  $n=4$ :

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.29)$$

Los coeficientes de la ecuación se pueden expresar en términos de las sumas y los productos de sus raíces  $x_1, x_2, x_3, x_4$  las cuales se expresan como:

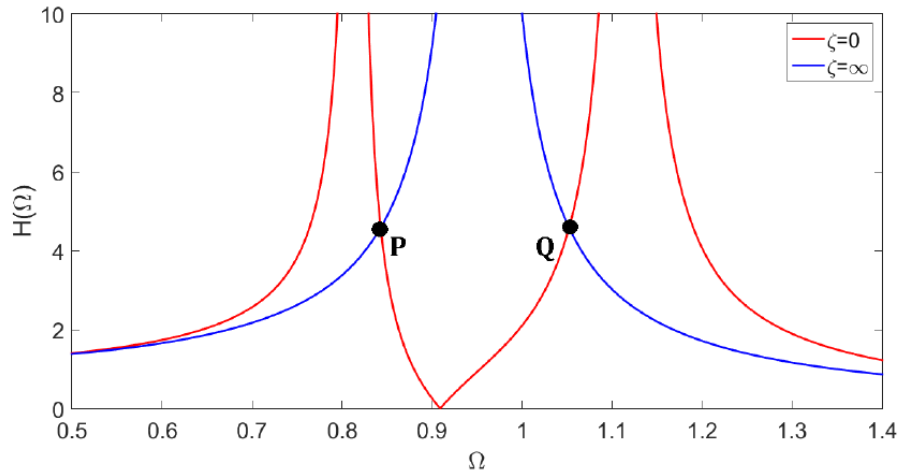
$$\begin{aligned} a_3 &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ a_2 &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ a_1 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ a_0 &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para el caso de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor, Barredo [25], propone una nueva metodología basándose en las fórmulas de Vieta para la obtención de los parámetros óptimos de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor.

### 3.7 Técnica de los puntos fijos

Esta técnica descrita por Den Hartog, consiste en minimizar la amplitud máxima de la respuesta adimensional de un sistema mecánico, dicha técnica consiste en obtener los puntos fijos o invariantes del sistema a partir de dos consideraciones:

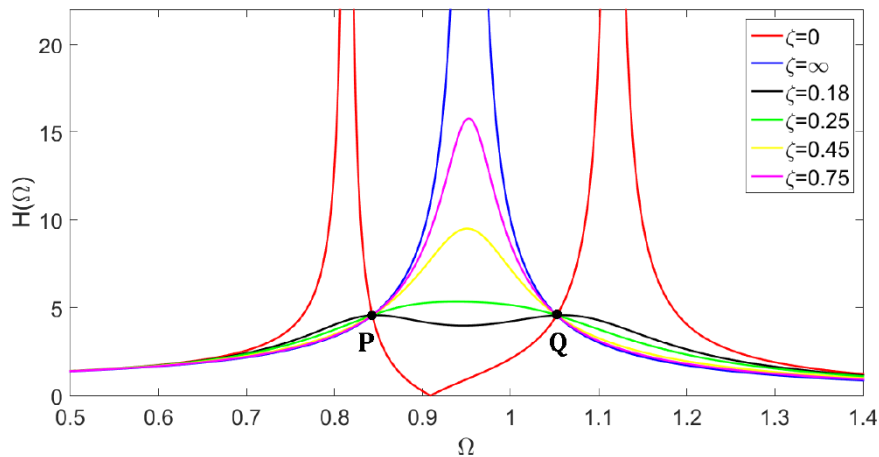
- I. Amortiguamiento cero ( $\zeta \rightarrow 0$ )
- II. Amortiguamiento tiende a infinito ( $\zeta \rightarrow \infty$ )



**Figura 3. 8:** Gráfica de un DVA clásico correspondiente al comportamiento de los estados del sistema considerando amortiguamiento infinito y cero, obteniendo los puntos fijos P y Q.

La Figura 3.8 muestra la respuesta en estado estable determinada por las dos condiciones consideradas en esta técnica. Considerando que todas las curvas pasan a través de los puntos fijos y son independientes del amortiguamiento [14] y mediante un tratamiento matemático se obtienen los parámetros óptimos del sistema.

La Figura 3.9 muestra el comportamiento de la respuesta en frecuencia considerando valores arbitrarios, incluyendo las condiciones fundamentales consideradas en esta técnica.



**Figura 3. 9:** Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento

Como se puede observar todas las curvas tienen diferentes amplitudes, sin embargo, el mejor balance dinámico se encuentra cuando la curva de función de respuesta en frecuencia óptima sea más plana en todo el rango de frecuencias de excitación.

### 3.8 Técnica de los puntos fijos extendida.

La técnica de los puntos fijos extendida [15], es una expansión de la técnica de Den Hartog, que sirve para la optimización de los absorbedores de vibración basados redes mecánicas con inersor.

En [16] se resume esta técnica a una serie de pasos a seguir los cuales se enlistan a continuación:

- i. Obtener el modelo matemático del sistema.
- ii. Obtener la función de transferencia  $H(s)$  del sistema, la cual también es conocida como la respuesta del sistema  $R(s)$ .
- iii. Sustituir la expresión  $s = j\omega$ .
- iv. Reescribir la función de transferencia  $H(s)$  de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{A+jB}{C+jD} \quad (3.31)$$

- v. Sustituir los parámetros adimensionales asociados al teorema  $\Pi$  de Buckingham. Dichas variables están asociadas directamente a las propiedades intrínsecas del sistema.
- vi. Obtener el módulo de  $H(s)$  a través de la multiplicación de su conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2+B^2}{C^2+D^2} \quad (3.32)$$

- vii. Aplicar las dos condiciones fundamentales de la técnica de los puntos fijos de Den Hartog para el absorbedor dinámico de vibración.

Cuando el amortiguamiento es cero la ecuación (3.32) se convierte en:

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.33)$$

Y cuando el amortiguamiento tiende a infinito

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.34)$$

- viii. Igualar las ecuaciones (3.33) y (3.34) al realizar ésta igualación se obtienen dos posibles resultados de los cuales una de ellas será trivial y la otra será la que proporcione mayor información de la solución del sistema.
- ix. Realizar el cambio de variable.

$$\epsilon = \Omega^2 \quad (3.35)$$

- x. Convertir en una ecuación mónica.
- xi. Igualar a h el lado derecho de la ecuación obtenida del paso vii bajo la condición  $\zeta \rightarrow \infty$ .

- xii. Realizar el mismo cambio de variable de la ecuación (3.35).
- xiii. Convertir en una ecuación mónica.
- xiv. Obtener las soluciones óptimas mediante el teorema de Vieta.
- xv. Obtener la solución óptima para el factor de amortiguamiento  $\zeta_{opt}$  a partir del teorema de Krenk.

### 3.9 Criterio $H_\infty$

Esta técnica tiene como objetivo principal minimizar las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia de la respuesta en frecuencia  $R(s)$  de la masa de la estructura principal, conocida como la norma  $\|H_\infty\|$ . Al minimizar esta norma se mejora la respuesta de estado estable del sistema acoplado a los DVA's, esto deriva a un problema de optimización de la forma:

$$\min \left( \max_{P_{opt}} |H_{IDVA}(\Omega)| \right) = \max(|H_{IDVA}(P_{opt}, \beta, \Omega)|) \quad (3.36)$$

Donde  $P_{opt}$  son los parámetros a optimizar del sistema, estos parámetros están restringidos a ser soluciones reales y positivas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial |H_{IDVA}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (3.37)$$

Para resolver este problema de optimización min-max principalmente se utiliza el método de Nishihara, debido a su alta precisión en la resolución numérica, sin embargo, se puede utilizar también el método de programación cuadrática secuencial.

#### 3.9.1 Método de Nishihara.

Esta metodología analítica fue presentada por Nishihara y Asami en 2002 [18], con ella se pueden obtener los parámetros óptimos para los DVA, sin embargo, esta metodología propuesta inicialmente solo funcionaba para modelos con dos grados de libertad y no fue hasta un año después que esta metodología pudo ser implementada en modelos con más de dos grados de libertad [19].

Con el fin de hacer más simple el sistema en este método se propuso remplazar  $h$  por  $1/(1 - r^2)$  es decir:

$$r^2 = 1 - \frac{1}{h_{max}^2} \quad (3.38)$$

Además, de una función que se emplea para minimizar el valor máximo  $h_{max}$  de la función de transferencia referente a la norma  $||H_\infty||$

$$f_n = Denominador - \frac{Numerador}{h_{max}^2} \quad (3.39)$$

López [16] resume este método en una serie de pasos enlistados a continuación.

- i. Obtener el módulo de  $H(s)$  a través de la multiplicación de su conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.40)$$

- ii. Definir las variables numerador  $\mathcal{N}$  y denominador  $\mathcal{D}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{N} = A^2 + B^2 \quad y \quad \mathcal{D} = C^2 + D^2 \quad (3.41)$$

- iii. Se propone la ecuación descrita por Nishihara para determinar el valor mínimo  $h_{min}$  de la amplitud máxima  $h_{max}$  mediante la siguiente ecuación.

$$h = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \quad (3.42)$$

- iv. Reescribir la ecuación de la siguiente manera

$$\mathcal{D} - \frac{\mathcal{N}}{h^2} = 0 \quad (3.43)$$

- v. Sustituir los términos correspondientes.
- vi. Coinvertir en una ecuación mónica. Esto nos da como resultado una ecuación de la forma

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (3.44)$$

- vii. A partir del teorema de Vieta, la suma y productos de las raíces de la ecuación anterior se pueden expresar mediante el siguiente sistema de ecuaciones en términos de los coeficientes  $c_n$ .

$$f_1 \rightarrow (4c_2 - c_1^2)\sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (3.45)$$

$$f_2 \rightarrow c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} = 0 \quad (3.46)$$

$$f_3 \rightarrow 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (3.47)$$

Estas ecuaciones están expresadas en términos de los parámetros a optimizar, incluido el parámetro  $h$ .

- viii. Sustituir los coeficientes  $c_n$  en las ecuaciones para  $f_1$ ,  $f_2$ , y  $f_3$  y llevar a su mínima expresión.

- ix. Hallar la matriz Jacobiana con base a los parámetros a optimizar.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

- x. Obtener los determinantes  $f_4$  y  $f_5$  de 3x3 asociados a la matriz jacobiana.

$$f_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (3.49)$$

$$f_4 = A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = 0$$

$$f_5 = \begin{vmatrix} D_1 & A_1 & B_1 \\ D_2 & A_2 & B_2 \\ D_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

$$f_5 = A_1C_2D_3 - A_1C_3D_2 - A_2C_1D_3 + A_2C_3D_1 + A_3C_1D_2 - A_3C_2D_1 = 0$$

- xi. Proponer un valor arbitrario para  $\beta$  y sustituirlo en las ecuaciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$ .
- xii. Resolver el sistema de ecuaciones no lineales de 5x5 por el método de Newton-Rhapson estableciendo valores iniciales apropiados.

Los resultados obtenidos de los parámetros óptimos mediante la técnica de los puntos fijos extendida se toman como valores iniciales.



### 3.10 Formulación de Euler-Lagrange

El formulismo de Euler-Lagrange es un método utilizado para obtener ecuaciones diferenciales de movimiento cuando el uso de las leyes de Newton resulta complicado. Este método está basado en el principio de conservación de energía y fue planteado por Joseph Louis Lagrange, por ello y por la gran contribución de Euler, es que este método lleva este nombre. La expresión matemática de la formulación para sistemas conservativos es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.51)$$

$$i=1,2,3,\dots,n$$

donde el subíndice  $i$  representa cada una de las coordenadas generalizadas y  $L$  representa el Lagrangiano el cual se define como la diferencia de energía cinética total del sistema con la energía potencial total [36], i.e.

$$L = T - U \quad (3.52)$$

Donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial del sistema.

#### 3.10.1 Función de disipación de Rayleigh

Para el caso de sistemas mecánicos con amortiguamiento se utiliza la forma generalizada de las ecuaciones de Euler-Lagrange como se presenta a continuación.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (3.53)$$

Donde se introduce la variable  $D$  la cual representa una función de las velocidades generalizadas llamada “*función de disipación de Rayleigh*”, además de las fuerzas no conservativas denotadas por  $Q_i$  con  $i=1,2,3,\dots,n$ .

Las fuerzas generalizadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange aplican para sistemas no conservativos y deben cumplir con la condición que las fuerzas no conservativas hagan que el sistema pierda energía por su acción.

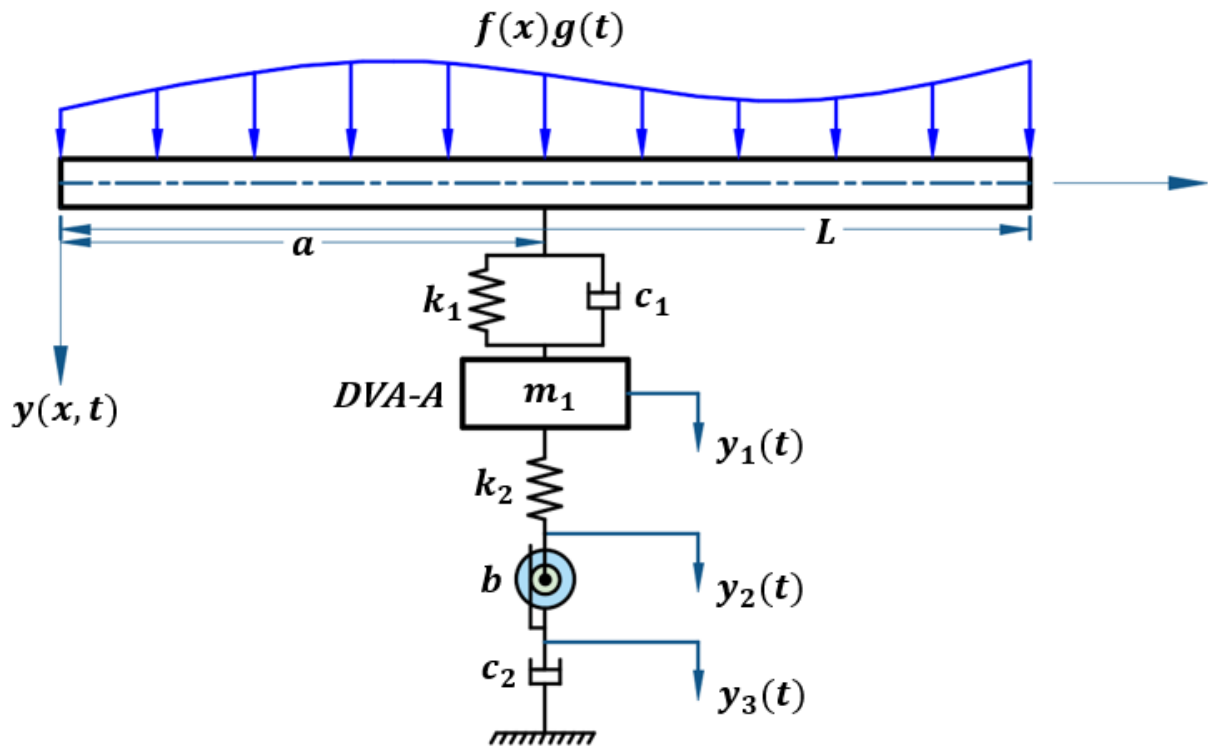


---

## Capítulo 4: Desarrollo del modelo matemático y optimización

---

Para el desarrollo del modelo matemático considere el sistema que se muestra en la Figura 4.1. Este sistema consiste de una viga doblemente empotrada la cual está sujeta a una carga distribuida  $f(x)g(t)$  donde  $f(x)$  es una función espacial y  $g(t)$  es una función temporal determinística. Para determinar el comportamiento dinámico del sistema se propone utilizar una fuerza de excitación armónica. La viga está acoplada en el punto  $x = a$  a un absorbedor de vibración dinámico no tradicional el cual está conectado a tierra mecánica por una red mecánica C3 [4] la cual consiste de un resorte, un inersor y un amortiguador conectados en serie, con coeficientes de rigidez, inercia y amortiguamiento  $k_2, b, c_2$  respectivamente, mientras que el absorbedor de vibración consiste en una masa ( $m_1$ ) conectada a la viga por un resorte con rigidez  $k_1$  y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento  $c_1$ .



**Figura 4. 1:** Esquema del modelo de la viga propuesta en éste trabajo.

Donde:

$f(x)g(x) \rightarrow$  Carga distribuida

$y(x, t) \rightarrow$  Desplazamiento transversal de la viga

$L \rightarrow$  Longitud de la viga

$m_1 \rightarrow$  Masa asociada al DVA

$k_1 \rightarrow$  Rigidez correspondiente al DVA

$y_1(t) \rightarrow$  Desplazamiento correspondiente a  $m_1$  del DVA

$k_2 \rightarrow$  Rigidez del resorte de la red mecánica C3

$y_2(t) \rightarrow$  Desplazamiento correspondiente al inersor de la red mecánica C3

$b \rightarrow$  Inertancia

$y_3(t) \rightarrow$  Desplazamiento correspondiente al amortiguador de la red mecánica C3

$c_2 \rightarrow$  Coeficiente de amortiguamiento correspondiente a la red mecánica C3

Para realizar el análisis dinámico del sistema partimos del formulismo de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos para el que se definen las siguientes ecuaciones:

$$T = \frac{1}{2}M_v[\dot{y}(x, t)]^2 + \frac{1}{2}m_1[\dot{y}_1(t)]^2 + \frac{1}{2}b[\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)]^2 \quad (4.1)$$

$$U = \frac{1}{2}K_v[y(x, t)]^2 + \frac{1}{2}k_1[y_1(t) - y(a, t)]^2 + \frac{1}{2}k_2[y_2(t) - y_1(t)]^2 \quad (4.2)$$

$$D = \frac{1}{2}c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)]^2 + \frac{1}{2}c_2[\dot{y}_3(t)]^2 \quad (4.3)$$

La función T [ecuación (4.1)] representa la energía cinética total del sistema, la función U [ecuación (4.2)] representa la energía potencial total del sistema y la función D [ecuación (4.3)] representa la función de disipación de Rayleigh. Éstas tres funciones son la base de la formulación de Euler-Lagrange para obtener el comportamiento dinámico del sistema.

Al aplicar los procedimientos matemáticos correspondientes mostrados en la sección 3.10, además de los conceptos de la teoría de vibración lateral en vigas, la ecuación que rige el comportamiento de la viga es:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = f(x, t) + \{c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)]\}\delta(x - a) \quad (4.4)$$

Donde:

$A$  = Área transversal de la viga.

$I$  = Momento de inercia.

$\rho$  = Densidad de la viga.

$E$  = Módulo de elasticidad de la viga.

$\delta(x - a)$  = Función Delta de Dirac.

La expresión entre llaves puede ser aproximada por la función delta e indica que es válida cuando la distancia  $x$  es igual a la ubicación  $a$  del NIDVA-C3.

De la misma manera que con la viga es necesario obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento de los elementos del NIDVA-C3. Para el caso del absorbedor de vibración la ecuación es:

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + k_2 [y_1(t) - y_2(t)] = 0 \quad (4.5)$$

Para el inersor:

$$b [\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_3(t)] + c_2 \dot{y}_3(t) = 0 \quad (4.6)$$

Y finalmente el amortiguador:

$$b [\ddot{y}_3(t) - \ddot{y}_2(t)] + c_2 \dot{y}_3(t) = 0 \quad (4.7)$$

Sin embargo, como el modelo está sujeto a una carga armónica es necesario definir los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= Y_1 e^{i\omega t}; \quad \dot{y}_1(t) = i\omega Y_1 e^{i\omega t}; \quad \ddot{y}_1(t) = -\omega^2 Y_1 e^{i\omega t}; \quad y_2(t) = Y_2 e^{i\omega t}; \quad \dot{y}_2(t) = \\ &= i\omega Y_2 e^{i\omega t}; \quad \ddot{y}_2(t) = -\omega^2 Y_2 e^{i\omega t}; \quad y_3(t) = Y_3 e^{i\omega t}; \quad \dot{y}_3(t) = i\omega Y_3 e^{i\omega t}; \quad \ddot{y}_3(t) = \\ &= -\omega^2 Y_3 e^{i\omega t}; \quad y(a, t) = Y(a, \omega) e^{i\omega t}; \quad \dot{y}(a, t) = i\omega Y(a, \omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta éstos nuevos parámetros, se sustituyen en las ecuaciones (4.4)-(4.7) y a continuación las ecuaciones resultantes se resuelven para  $Y_1, Y_2, Y_3$  lo cual da como resultado:

$$Y_1 = - \frac{k_1(Ib\omega^2 c_2 - Ic_2 k_2 + b\omega k_2)Y(a, \omega)}{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2[(b+m_1)k_2 + bk_1]\omega^2 - b\omega k_1 k_2 + Ic_2 k_1 k_2} \quad (4.8)$$

$$Y_2 = \frac{Y_1 k_2 (Ic_2 - b\omega)}{\omega(Ic_2 \omega + k_2)b - Ic_2 k_2} \quad (4.9)$$

$$Y_3 = \frac{b\omega Y_2}{Ic_2 - b\omega} \quad (4.10)$$

Se define la siguiente ecuación:

$$P = m_1 \omega^2 Y_1 - Ic_2 \omega Y_3 \quad (4.11)$$

Luego se sustituyen los valores correspondientes de  $Y_1, Y_2, Y_3$  resultando de la siguiente manera:

$$P = - \frac{[Ib\omega^2 c_2 m_1 + b\omega k_2 m_1 - Ic_2 k_2 (b+m_1)]Y(a, \omega)\omega^2 k_1}{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2[(b+m_1)k_2 + bk_1]\omega^2 - b\omega k_1 k_2 + Ic_2 k_1 k_2} \quad (4.12)$$

La ecuación anterior también se puede escribir en la forma:  $P = -H(\omega)Y(a, \omega)$ , siendo

$$H = - \frac{\omega^2 [Ib\omega^2 c_2 m_1 + b\omega k_2 m_1 - Ic_2 k_2 (b+m_1)]k_1}{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2[(b+m_1)k_2 + bk_1]\omega^2 - b\omega k_1 k_2 + Ic_2 k_1 k_2} \quad (4.13)$$

A su vez la ecuación anterior se puede expresar de manera simplificada como:

$$H = m_1 \omega^2 J \quad (4.14)$$

donde J está definida como:

$$J = \frac{k_1 [Ib\omega^2 c_2 m_1 + b\omega k_2 m_1 - Ic_2 k_2 (b+m_1)]}{m_1 \{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2[(b+m_1)k_2 + bk_1]\omega^2 - b\omega k_1 k_2 + Ic_2 k_1 k_2\}} \quad (4.15)$$

Con el propósito de realizar el análisis adimensional del sistema, se proponen las siguientes variables adimensionales las cuales relacionan las propiedades físicas de la estructura tipo viga con el sistema absorbedor de vibraciones.

$$\omega_A^2 = \frac{k_1}{m} ; \omega_C^2 = \frac{k_2}{b} ; \zeta_2 = \frac{c_2}{2m\omega_A} ; \mu = \frac{b}{m} ; q = \frac{\omega_A}{\omega_1} ; \eta = \frac{\omega_C}{\omega_A} ; \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} ; \beta = \frac{m_1}{M_v}$$

donde:

$\omega_A^2$  = Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA.

$\omega_C^2$  = Frecuencia natural al cuadrado relacionado al inersor.

$\zeta_2$  =Factor de amortiguamiento relacionado al DVA.

$\mu$  = Relación de masas entre la inercia y el DVA.

$q$  = Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA.

$\eta$  = Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre la inercia y el DVA.

$\Omega$  = Relación de frecuencias forzadas.

$\beta$  = Relación de masas

Sustituyendo las variables adimensionales en  $J$  se obtiene.

$$J = - \frac{2[I\eta^2(\mu+1)\zeta_2 q^2 - \frac{1}{2}\mu q \eta^2 \Omega - I\zeta_2 \Omega^2]q^2}{2I\zeta_2 q^4 \eta^2 - \mu q^3 \eta^2 \Omega - 2I[(\mu+1)\eta^2 + 1]\zeta_2 \Omega^2 q^2 + \mu q \eta^2 \Omega^3 + 2I\zeta_2 \Omega^4} \quad (4.16)$$

Después, se sustituye la frecuencia de excitación ( $\omega = \omega_1 \Omega$ ) del sistema, lo cual da como resultado

$$H(\omega) = m_1 \omega_1^2 J_1 \quad (4.17)$$

donde  $J_1 = \Omega^2 J$ .

Es necesaria la implementación del principio de superposición de modos para la obtención de la solución de la vibración forzada de la viga, para ello, la deflexión de la viga y sus condiciones de frontera se expresan de la siguiente manera:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t)$$

$$\frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x)$$

Donde  $\beta_i$  es el valor característico o Eigenvalor de la ecuación característica de la viga y  $\phi_i$  es el  $i$ -ésimo modo de vibración de la viga.



Para obtener la respuesta dinámica general en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga, se supone que la excitación armónica afecta al DVA. La ecuación que rige el comportamiento del sistema es:

$$y(x, \omega) = G_1(x, \omega) - \frac{G_2(a, \omega)G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H(\omega)} + G_1(a, \omega)} \quad (4.18)$$

donde:

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.19)$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.20)$$

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x)\phi_i(x)dx \quad (4.21)$$

Después de sustituir las ecuaciones correspondientes y efectuar el desarrollo algebraico se tiene:

$$S(a, \Omega) = \frac{1}{\rho AL\omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[ \frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i(a)^2}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right] \quad (4.22)$$

La ecuación (4.22) representa la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se tiene una excitación armónica. Sin embargo, si se considera el primer modo de vibración la ecuación (4.22), se reescribe como:

$$S(a, \Omega) = \frac{\phi_1 a_1}{(\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1) \rho AL \omega_1^2} \quad (4.23)$$

## 4.1 Técnica de los puntos fijos extendida

Para esta técnica es necesario partir de la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la estructura tipo viga con el NIDVA-C3 para la implementación de la técnica de los

puntos fijos extendida. De esta manera si se considera el primer modo de vibración y al evaluar en el punto  $X = a$  se obtiene.

$$S(a, \Omega) = \frac{1}{\beta J_1 \phi_1^2(a) - \Omega^2 + 1} \quad (4.24)$$

Después de sustituir el valor de  $J_1$  se observa que la ecuación puede expresarse en la forma:

$$S = \frac{A+iB}{C+iD} \quad (4.25)$$

Los valores para A, B, C y D que se muestran en la ecuación (4.25) se proporcionan en el apéndice A.

De esta manera se puede obtener la resultante del sistema como el módulo de la ecuación (4.25):

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2+B^2}{C^2+D^2} \quad (4.26)$$

Como se menciona en la sección 3.7, la técnica de los puntos fijos se basa principalmente en dos condiciones de operación del absorbedor, siendo la primera de ellas cuando el amortiguamiento es cero y la segunda cuando el amortiguamiento es infinito. Al aplicar estas condiciones a la ecuación (4.26) se obtienen dos ecuaciones las cuales son independientes de la relación de amortiguamiento. Para un valor de relación de amortiguamiento de cero ( $\zeta = 0$ ) la ecuación (4.26) se reduce a la siguiente expresión.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (4.27)$$

De igual forma para un valor de relación de amortiguamiento infinito ( $\zeta = \infty$ ) la ecuación (4.26) se reduce a la siguiente expresión.

$$|H(s)|^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (4.28)$$

Al igualar las ecuaciones (4.26) y (4.27) se obtienen dos soluciones, una de ellas proporciona un resultado trivial pero cierto,  $\beta = 0, \mu = 0, q = 0, \eta = 0$  y  $\phi_1(a) = 0$ . Cuando  $\Omega = 0$  o  $\omega = 0$  la amplitud del sistema es  $Y(a, t)_{est}$  (Deflexión estática) y es independiente del amortiguamiento, simplemente porque el amortiguamiento se mueve tan despacio que no se da oportunidad para la creación de una fuerza de amortiguamiento.

La segunda alternativa proporciona un polinomio de grado 8 el cual comparte las mismas raíces que la ecuación (4.28). Para reducir el grado de la ecuación se realiza un cambio de variable para después convertirla en una ecuación mónica y así emplear el teorema de Vieta.

Al aplicar el teorema de Vieta, se igualan las sumas y los productos de las raíces de las ecuaciones (4.27) y (4.28), a partir de ello se obtienen los parámetros óptimos del sistema.

## 4.2 Criterio $H_\infty$

Como se menciona en la sección 3.8, para llevar a cabo la optimización mediante el criterio  $H_\infty$  es necesario utilizar el método de Nishihara para la obtención de los parámetros óptimos.

### 4.2.1 Método de Nishihara

Para éste método se parte de calcular el módulo de  $H(s)$ , (ecuación (4.26)), a partir de la cual se definen dos variables:

$$Numerador = A^2 + B^2 \quad (4.29)$$

$$Denominador = C^2 + D^2 \quad (4.30)$$

También es necesario definir una nueva variable propuesta por Nishihara como se menciona en la sección 3.9.1.

$$h = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \quad (4.31)$$

A partir de las ecuaciones (4.29) -(4.31) se define la siguiente ecuación.

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} = 0 \quad (4.32)$$

Después de sustituir las ecuaciones (4.29)-(4.31) en la ecuación (4.32) se obtiene un polinomio de grado 12, el cual es necesario convertir en un polinomio mónico, dicho polinomio tiene la forma:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (4.33)$$

Los valores de los coeficientes  $c_n$  de la ecuación (4.33) se enlistan en el apéndice B.

A partir del teorema de Vieta se obtiene el sistema de ecuaciones en términos de los coeficientes  $c_n$  del polinomio de la ecuación (4.33), de la siguiente manera.

$$f_1(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = (4c_2 - c_1^2)\sqrt{c_6} + 4c_5 \quad (4.34)$$

$$f_2(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} \quad (4.35)$$

$$f_3(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 \quad (4.36)$$

Al sustituir los valores de los coeficientes  $c_n$  se puede observar que el conjunto de ecuaciones (4.34)-(4.3) están en función de los parámetros a optimizar. A partir de dicho conjunto de ecuaciones se define la matriz jacobiana asociada al sistema de la siguiente manera.

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A partir de la matriz descrita en la ecuación (4.37) se llega a las ecuaciones  $f_4$  y  $f_5$ , para ello se consideran los determinantes de 3x3 más simples asociados a la matriz jacobiana, los cuales son:

$$f_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

$$f_5 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

Al resolver ambos determinantes y sustituir las derivadas parciales del conjunto de ecuaciones (4.34)-(4.36) se obtiene un sistema de 5 ecuaciones no lineales. Para resolver el sistema se emplea el método de Newton-Raphson mediante una herramienta computacional ya que, además de ser ecuaciones no lineales, las expresiones resultantes de los determinantes son muy extensas.

Con el procedimiento del modelado matemático de la viga el cual resulta en la función de respuesta en frecuencia en estado estable necesaria para la obtención de los parámetros óptimos del sistema, se procedió con la implementación de los procedimientos necesarios para la optimización mediante la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio  $H_\infty$  siguiendo los pasos mostrados en las secciones 3.7-3.9. A partir de éstos procedimientos, se obtienen las ecuaciones a resolver para la obtención de los parámetros óptimos del sistema. Los resultados obtenidos se muestran en el Capítulo 5 de este trabajo de investigación.



---

## Capítulo 5: Resultados.

---

En éste capítulo se muestran los resultados obtenidos de los procedimientos desarrollados en el capítulo 4, además de que se realiza una comparación de las gráficas que se obtienen al utilizar los parámetros obtenidos de la técnica de los puntos fijos y el criterio  $H_\infty$ . De la misma manera se obtienen los índices de incremento del ancho de banda y de reducción de la amplitud de vibración con respecto al DVA clásico.

### 5.1 Resultados de la técnica de los puntos fijos extendida

Siguiendo el procedimiento del Teorema de Vieta se obtienen los parámetros óptimos que se muestran a continuación.

$$\mu_{opt} = -\frac{2\beta\phi_1^2}{\beta\phi_1^2-1} \quad (5.1)$$

$$\eta_{opt} = \sqrt{-\beta\phi_1^2 + 1} \quad (5.2)$$

$$q_{opt} = 1 \quad (5.3)$$

$$R(s) = \sqrt{\frac{1}{\beta\phi_1^2}} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) representa la amplitud de la vibración en los puntos invariantes, que también es la amplitud mínima de vibración de la estructura tipo viga con el dispositivo NIDVA-C3.

Como se puede observar, el conjunto de ecuaciones (5.1)-(5.4) se encuentran en términos de  $\beta$  y  $\phi_1$ . Basado en las condiciones de frontera de la estructura tipo viga, además de considerar que la masa del dispositivo NIDVA-C3 sea el 10% de la masa de la estructura principal, se plantean los valores mostrados en la Tabla 5.1. Para casos prácticos de absorbedores de vibración dinámicos en los cuales se utilicen redes mecánicas el valor máximo de la relación de masas es el 10%, mientras que para el DVA clásico es el 25% [29,30].

**Tabla 5. 1:** Valores numéricos asignados para las variables independientes.

Variable	Valor Numérico
$\beta$	0.1
$\phi_1(a)$	$\sqrt{2}$

Una vez se definen los valores mostrados en la Tabla 5.1, éstos se sustituyen en las ecuaciones de los parámetros óptimos (ecuaciones (5.1)-(5.4)). Los valores numéricos obtenidos se muestran en la Tabla 5.2, para este caso se consideran 6 cifras significativas.

**Tabla 5. 2:** valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional.

Parámetro	Valor
$\mu_{opt}$	0.50000
$\eta_{opt}$	0.89442
$q_{opt}$	1.00000
R(s)	2.23606

Después de sustituir los valores numéricos de las Tablas 5.1 y 5.2 se llega a la función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema considerando amortiguamiento igual a cero ( $\zeta_2 \rightarrow 0$ ).

$$H_{\zeta_2 \rightarrow 0}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(1-\Omega)^2(1+\Omega)^2}{(-\Omega^4 + 2.2\Omega^2 - 1)^2}} \quad (5.5)$$

De la misma manera, considerando los valores de las Tablas 5.1 y 5.2 se obtiene la función de respuesta de frecuencia (FRF) del sistema considerando amortiguamiento infinito ( $\zeta_2 \rightarrow \infty$ ).

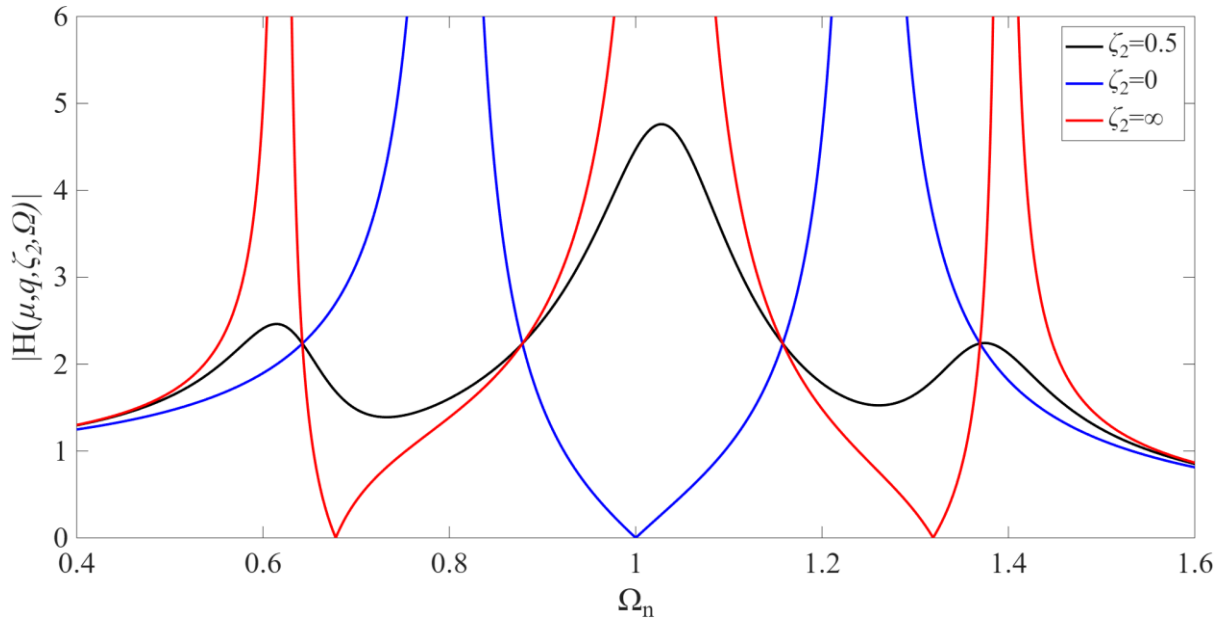
$$H_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(\Omega^4 - 2.2\Omega^2 + 0.8)^2}{(\Omega^6 - 3.4\Omega^4 + 3.24\Omega^2 - 0.8)^2}} \quad (5.6)$$



Para poder observar de mejor manera el comportamiento de la función de respuesta en frecuencia se propone un valor arbitrario para el amortiguamiento, en este caso  $\zeta_2 = 0.5$ . Al sustituir los valores numéricos se obtiene la siguiente expresión.

$$H_{\zeta_2=0.5}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{0.16\Omega^2(-\Omega^2+1)^2+(\Omega^4-2.2\Omega^2+0.8)^2}{0.16\Omega^2(-2.2\Omega^2+\Omega^4+1)^2+(\Omega^6-3.4\Omega^4+3.24\Omega^2-0.8)^2}} \quad (5.7)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.5)-( 5.7) se muestra en la Figura 5.1.



**Figura 5. 1:** Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al NIDVA-C3 vs la relación de frecuencia  $\Omega$  utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.

Como se observa en la Figura 5.1 todas las curvas pasan por los puntos fijos o invariantes que son independientes de la relación de amortiguamiento. Además, la curva de la función de respuesta en frecuencia con el valor de relación de amortiguamiento arbitrario ( $\zeta_2 = 0.5$ ) no brinda una reducción adecuada de la amplitud de vibración del sistema.

El conjunto de soluciones óptimas obtenidas hasta este punto  $(\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt})$  crean los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del NIDVA-C3, pero para aplanar la curva de la función de respuesta en frecuencia

del NIDVA-C3 estos parámetros no son suficientes, es necesario encontrar la relación de amortiguamiento óptimo  $\zeta_{2_{opt}}$ .

### 5.1.1 Soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento $\zeta_2$

Al aplicar la teoría de Krenk [38] para obtener el amortiguamiento óptimo de la viga se producen tres frecuencias resonantes  $\Omega_{1,2}$  cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  y  $\Omega_0$  cuando  $\zeta \rightarrow 0$ .

Para calcular las frecuencias invariantes  $\Omega_{1,2}$  se debe resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la ecuación (4.27), resultando en la siguiente expresión.

$$-\Omega^4 + 2.2\Omega^2 - 1 = 0 \quad (5.8)$$

Al resolver la ecuación (5.8) y tomando las raíces positivas obtenemos los siguientes valores.

$$\Omega_1 = 1.248301874$$

$$\Omega_2 = 0.8010882790$$

Para  $\Omega_0$  se iguala a cero el denominador de la ecuación (4.28), además se sustituyen los parámetros óptimos  $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}$ , lo cual resulta en:

$$\Omega^6 - 3.4\Omega^4 + 3.24\Omega^2 - 0.8 \quad (5.9)$$

Al resolver la ecuación (5.9) se toma un valor que cumpla con la condición  $\Omega_2 \leq \Omega_0 \leq \Omega_1$  por lo tanto:

$$\Omega_0 = 1$$

Para obtener numéricamente la relación de amortiguamiento óptimo que aplanla la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, se deben sustituir las soluciones  $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}, R(s), \Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_0$  en la ecuación (4.26). Esto produce tres valores para la relación de amortiguamiento en cada frecuencia resonante, los valores obtenidos se muestran en la Tabla 5.3.

**Tabla 5. 3:** Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante.

Amortiguamiento	Valor Numérico
$\zeta_{2A}$	0.3046334712
$\zeta_{2B}$	0.2292690598
$\zeta_{2C}$	0.2294157339

El factor de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor cuadrático medio (RMS) de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia resonante.

$$\zeta_{2opt} = \frac{1}{3} \sqrt{3\zeta_{2A}^2 + 3\zeta_{2B}^2 + 3\zeta_{2C}^2} \quad (5.10)$$

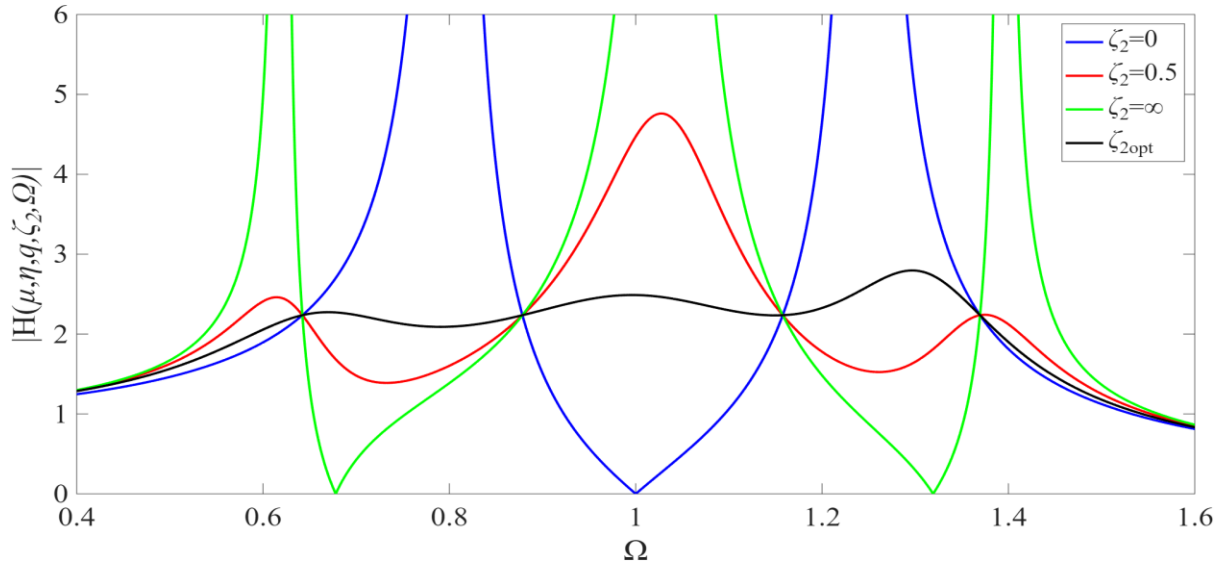
Lo cual da como resultado:

$$\zeta_{2opt} = 0.2569029859$$

De esta manera al sustituir los datos de las Tablas 5.1 y 5.2, además del factor de amortiguamiento óptimo se obtiene la siguiente expresión.

$$H_{\zeta_{2opt}}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{0.16\Omega^2(-\Omega^2+1)^2+0.2639965766(\Omega^4-2.2\Omega^2+0.8)^2}{0.16\Omega^2(\Omega^4-2.2\Omega^2+1)^2+0.2639965766(\Omega^6-3.4\Omega^4+3.24\Omega^2-0.8)^2}} \quad (5.11)$$

En la Figura 5.2 se observan las gráficas de la respuesta de la estructura tipo viga con el NIDVA-C3, los valores de la relación de amortiguamiento utilizados para obtener las gráficas son las dos condiciones principales de funcionamiento en la técnica de los puntos fijos ( $\zeta_2 = 0$  y  $\zeta_2 \rightarrow \infty$ ), un valor arbitrario de la relación de amortiguamiento y finalmente la relación de amortiguamiento óptima para el sistema.



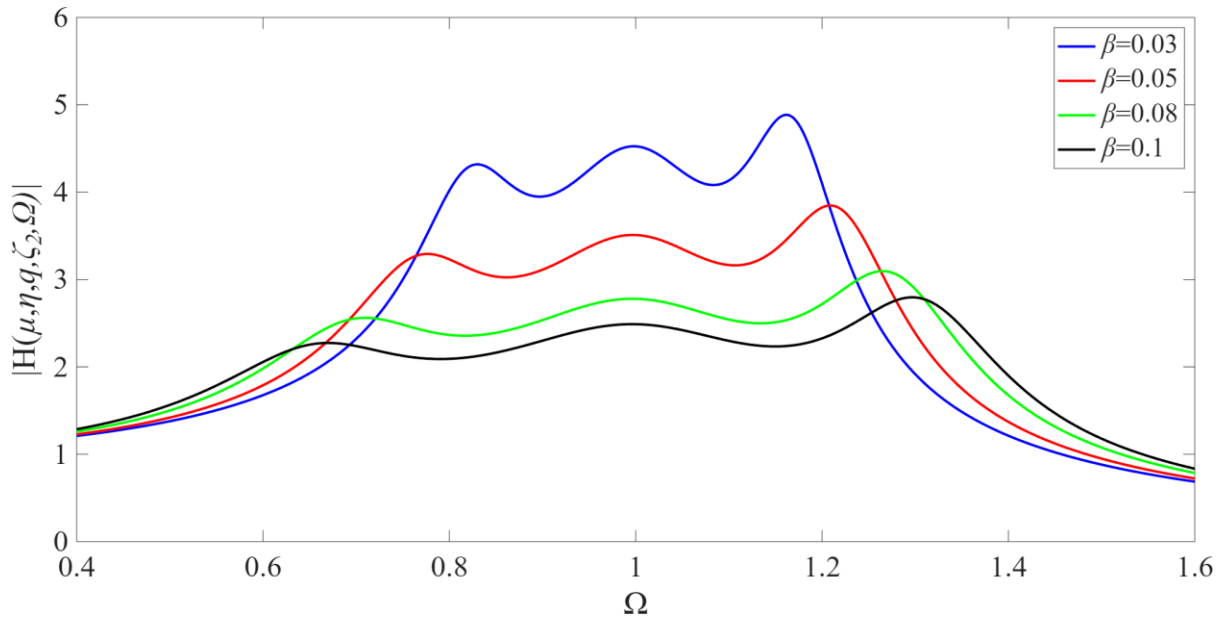
**Figura 5. 2:** Gráfica de la respuesta en frecuencia  $H(\Omega)$  con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.

Como se observa en la Figura 5.2 las curvas de la respuesta de la estructura cuando se utilizan los valores fundamentales de la relación de amortiguamiento ( $\zeta_2 = 0$  y  $\zeta_2 \rightarrow \infty$ ) además del valor de amortiguamiento arbitrario ( $\zeta_2 = 0.5$ ) y el valor óptimo obtenido mediante la técnica de los puntos fijos. También, es posible observar que al utilizar el factor de amortiguamiento óptimo (curva negra) se tiene una menor amplitud en comparación con la curva en la cual se emplea un valor arbitrario para la relación de amortiguamiento.

En la Tabla 5.4 se enlista los parámetros óptimos que se obtienen al aplicar la técnica de los puntos fijos extendida considerando distintos valores para la relación de masas,  $\beta$ . Se consideraron valores de 3%, 5%, 8% y 10%.

**Tabla 5. 4:** Parámetros óptimos del sistema considerando diferentes valores para  $\beta$  con la técnica de los puntos fijos extendida.

Técnica de los puntos fijos extendida					
$\phi_1 = \sqrt{2}$					
$\beta$	$\mu_{opt}$	$q_{opt}$	$\eta_{opt}$	$\zeta_{opt}$	R(s)
<b>0.03</b>	0.12765	1	0.96953	0.13699	4.08248
<b>0.05</b>	0.22222	1	0.94868	0.17822	3.16227
<b>0.08</b>	0.38095	1	0.91651	0.22804	2.49999
<b>0.1</b>	0.5	1	0.89442	0.25690	2.23606



**Figura 5. 3:** Respuestas del sistema al considerar distintos valores de  $\beta$  con la técnica de los puntos fijos extendida.

La Figura 5.3 muestra una comparación de las respuestas del sistema obtenidas a partir de los parámetros obtenidos al considerar distintos valores de relación de masa, como se observa, al aumentar la relación de masas la amplitud de la vibración disminuye.

## 5.2 Resultados mediante el criterio $H_{\infty}$

En ésta técnica, al igual que con la técnica de los puntos fijos extendida se consideran los valores para  $\beta$  y  $\phi_1$  propuestos en la Tabla 5.1. Para resolver el sistema de ecuaciones mediante el método de Newton-Raphson los valores iniciales se propusieron considerando los resultados obtenidos en la técnica de los puntos fijos extendida (ver Tabla 5.2).

Los resultados obtenidos para los parámetros óptimos se muestran en la Tabla 5.5.

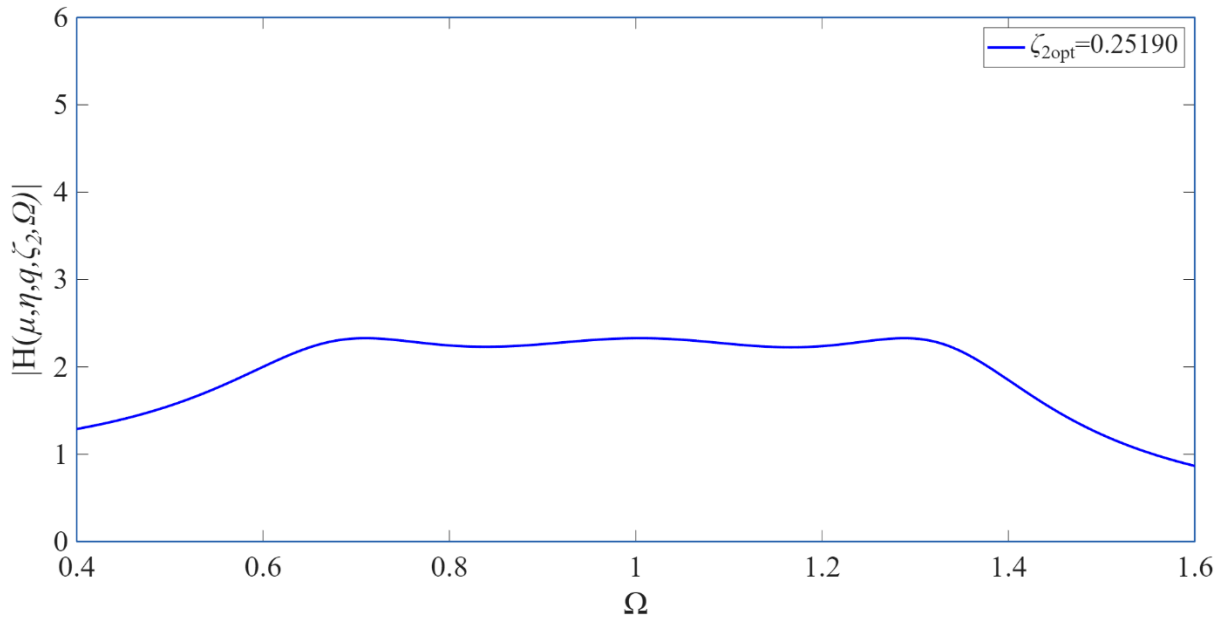
**Tabla 5. 5:** valores para los parámetros óptimos obtenidos mediante el criterio  $H_\infty$

Parámetro	Valor óptimo
$\mu_{opt}$	0.61972
$\eta_{opt}$	0.89520
$q_{opt}$	1.03901
$\zeta_{2opt}$	0.25190
$  H_\infty  $	2.32812

Al sustituir los valores de los parámetros óptimos de la Tabla 5.5 en la función de respuesta en frecuencia se obtiene la siguiente expresión.

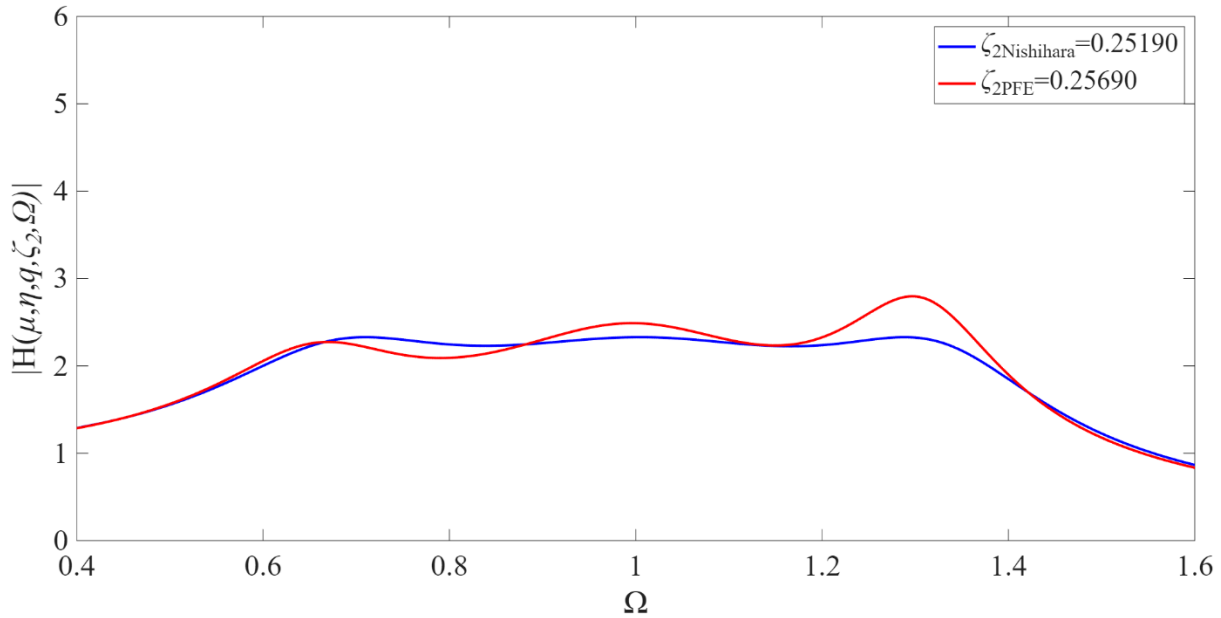
$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{0.26626\Omega^2(-\Omega^2+1.07954)^2+0.25381(\Omega^4-2.48080\Omega^2+0.93394)^2}{0.26626\Omega^2(\Omega^4-2.29545\Omega^2+1.07954)^2+0.25381(\Omega^6-3.69671\Omega^4+3.71728\Omega^2-0.93394)^2}} \quad (5.12)$$

La Figura 5.4 muestra como la curva de la función de respuesta en frecuencia del sistema al utilizar los parámetros óptimos resultantes al emplear el criterio  $H_\infty$ .



**Figura 5. 4:** Gráfica de  $H(\Omega)$  considerando los parámetros óptimos obtenidos con el criterio  $H_\infty$

Para poder visualizar de mejor manera la diferencia existente entre las curvas generadas con los parámetros óptimos resultantes de la técnica de los puntos fijos extendida [ecuación (5.11)] y el criterio  $H_\infty$  [ecuación 5.12] la Figura 5.5 muestra una comparación entre ambas gráficas.



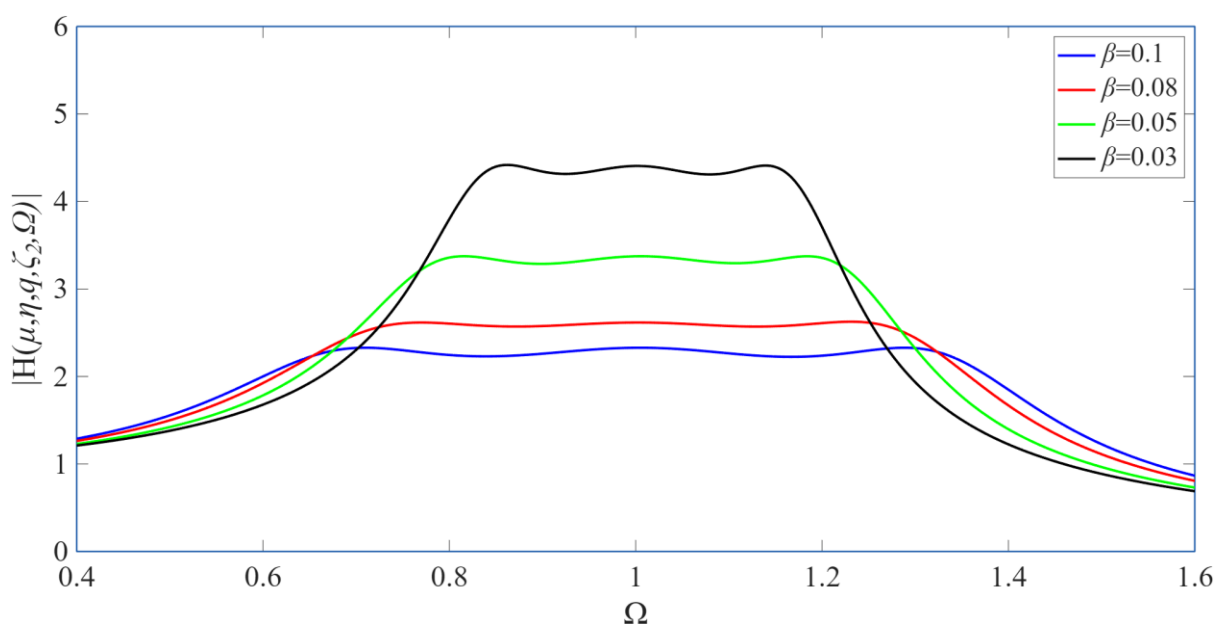
**Figura 5. 5:** Comparación entre las curvas resultantes de la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio  $H_\infty$ .

Como se observa en la Figura 5.5, ambas curvas muestran una amplitud similar, sin embargo, el aplanamiento de la curva es mejor cuando se aplica el criterio  $H_\infty$  con el método de Nishihara, mientras que con la técnica de los puntos se notan oscilaciones en la amplitud, esto se debe a que la técnica de los puntos fijos extendida es solo una aproximación a los resultados exactos que se obtienen con el criterio  $H_\infty$ . Sin embargo, para casos en los cuales se tenga una limitada capacidad de computo, la técnica de los puntos fijos es ampliamente útil, ya que resulta en ecuaciones menos complejas y el resultado es bastante aceptable.

En la Tabla 5.6 se muestran los valores numéricos de los parámetros óptimos que se obtienen al aplicar el criterio  $H_\infty$  al sistema cambiando los valores de la relación de masas,  $\beta$ , correspondientes al 3%, 5%, 8% y 10%.

**Tabla 5. 6:** Parámetros óptimos del sistema considerando diferentes valores para  $\beta$  en el criterio  $H_\infty$ .

Criterio $H_\infty$					
$\phi_1 = \sqrt{2}$					
$\beta$	$\mu_{opt}$	$q_{opt}$	$\eta_{opt}$	$\zeta_{opt}$	$  H_\infty  $
<b>0.03</b>	0.16824	1.01363	0.97073	0.13582	4.41721
<b>0.05</b>	0.29178	1.02220	0.95068	0.17647	3.37379
<b>0.08</b>	0.52837	1.03711	0.91679	0.22541	2.61623
<b>0.1</b>	0.61972	1.03901	0.89520	0.25190	2.32812



**Figura 5. 6:** Respuesta del sistema considerando distintos valores de  $\beta$  en el criterio  $H_\infty$ .

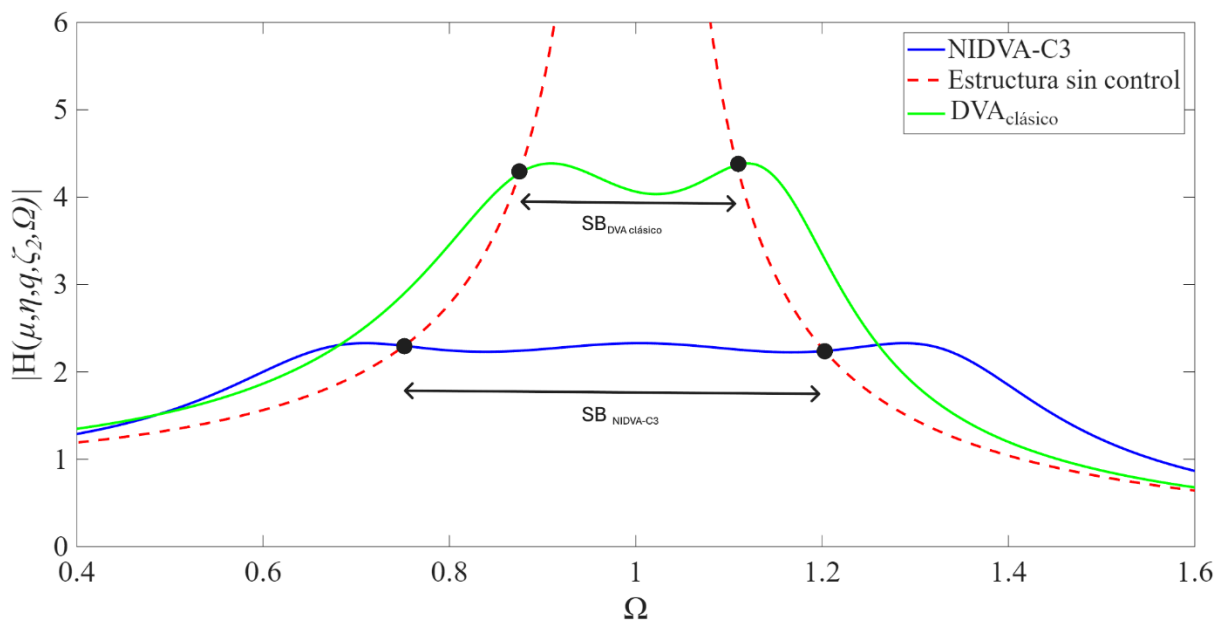
La Figura 5.6 muestra de manera gráfica como la respuesta del sistema se ve afectada por la relación de masas, en este caso con el criterio  $H_\infty$  se observa que si se aumenta la relación de masas del NIDVA-C3 la amplitud de vibración disminuye.

Para calcular el porcentaje de supresión de vibración con respecto al DVA clásico se calcula el ancho de banda de supresión de vibraciones  $\%SB_i$ , para ello se considera la función de respuesta en frecuencia del sistema NIDVA-C3 así como la función de respuesta en frecuencia del sistema tipo viga con el absorbedor de vibración dinámico clásico. Para tener una mejor



idea del contraste entre ambos sistemas se utiliza como referencia la función de respuesta en frecuencia cuando no existe un absorbedor dinámico de vibración acoplado a la estructura tipo viga.

En la Figura 5.7 se observa que el rango de supresión de vibraciones y el ancho de banda operativo es mayor al utilizar el NIDVA-C3 en comparación con el DVA clásico. Traduciéndose en una manera más eficiente de aislar las vibraciones y reduciendo así su impacto, con lo cual se obtiene una mejora en la comodidad, estabilidad y la prolongación de la vida útil de los sistemas mecánicos.



**Figura 5. 7:** Comparación de las curvas FRF del NIDVA-C3 y el DVA clásico

La ecuación para calcular el incremento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SB_{NIDVA-C3} = \frac{SB_{NIDVA-C3} - SB_{DVA\text{clásico}}}{SB_{NIDVA-C3}} \times 100\% \quad (5.13)$$

De la misma forma, para calcular el índice de reducción de la amplitud de vibración del NIDVA-C3 con respecto al DVA clásico, se encuentran los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por lo tanto, la ecuación para el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema es:

$$\%SP_{NIDVA-C3} = \frac{SP_{DVA_{clásico}} - SP_{NIDVA-C3}}{SP_{DVA_{clásico}}} \times 100\%$$

Una vez realizados los cálculos se obtienen que el  $\%SB_{NIDVA-C3}$  para el NIDVA-C3 es del 48.2% mientras que el  $\%SP_{NIDVA-C3}$  es del 48.1% en comparación a la estructura tipo viga con el DVA clásico.

De los resultados obtenidos en éste capítulo se concluye que, al implementar el NIDVA-C3 en una estructura tipo viga la cual esté sujeta a carga armónica la mitigación de las vibraciones resulta ser mucho más efectiva que solo emplear el DVA clásico.

---

## *Capítulo 6: Conclusiones*

---

Con el desarrollo matemático realizado en éste trabajo se determinó el diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor para el control de vibración de una estructura tipo viga. El desarrollo se llevó a cabo considerando que a la estructura se le aplica una excitación armónica. El absorbedor de vibración no tradicional se conecta a tierra mecánica utilizando una red mecánica C3 [4] compuesta por un resorte, un inersor y un amortiguador conectados en serie.

Para el análisis dinámico fue necesario seguir una serie de pasos en la que fue necesario emplear la formulación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento que rigen el sistema, además, para simplificar el procedimiento se obtuvieron los parámetros adimensionales a partir del teorema  $\Pi$  de Buckingham, lo cual permitió hallar la respuesta en frecuencia adimensional del sistema. La resolución del problema planteado se llevó a cabo por medio de dos técnicas, siendo la primera, la técnica de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo [15] además de la técnica de optimización  $H_\infty$  en la cual es necesario emplear el método de Nishihara. Como se describe en la sección 5 de éste trabajo de investigación los resultados obtenidos mediante el criterio  $H_\infty$  muestran una mejor minimización de la amplitud de la vibración ya que proporciona soluciones exactas mientras que la técnica de los puntos fijos extendida es una aproximación de la norma  $H_\infty$  que considera el teorema de Vieta y la teoría de Steen Krenk [38]. Sin embargo, la técnica de los puntos extendida resulta ser ampliamente útil debido a que sus ecuaciones resultantes son menos complejas que las del criterio  $H_\infty$ , lo cual deriva en un menor uso de recursos computacionales.

Tanto el criterio  $H_\infty$  y la técnica de los puntos fijos extendida consiste en encontrar la respuesta óptima entre los puntos fijos para extender el rango de mitigación de vibración del NIDVA-C3. Lo anterior en el área de la ingeniería mecánica automotriz, se puede traducir en una trayectoria de conducción más suave y fluida, brindando un mayor confort, mientras que en ingeniería civil se traduce a una prolongación de la vida útil de las estructuras y maquinaria, sin embargo, también resulta muy útil en diversas industrias.

Finalmente se realizó la comparación entre los resultados obtenidos con el NIDVA-C3 y el DVA clásico donde se observó una mejora considerable al utilizar el NIDVA-C3 en la

estructura tipo viga. De ésta manera la hipótesis planteada al principio de esta investigación fue demostrada exitosamente.

## **6.1 Trabajos futuros**

Es importante recalcar que el trabajo realizado en ésta tesis puede ser mejorado de distintas maneras, siendo las principales las que se enlistan a continuación.

- Debido a que los inersores aún no son muy utilizados en las industrias, la implementación del modelo propuesto en ésta tesis resulta complejo, sin embargo, sería muy importante realizar la implementación física del sistema y así realizar la comprobación de los resultados obtenidos mediante la experimentación.
- Como es sabido, existen diversos tipos de excitaciones externas a las cuales pueden estar sujetas las estructuras y maquinaria, es por ello que resultaría muy útil llevar a cabo el diseño del sistema considerando distintos tipos de excitación, tales como fuerzas inerciales o aleatorias.



---

# *Apéndice.*

---

## **Apéndice A**

Coeficientes de la FRF

$$A = \mu q \eta^2 \Omega (-\Omega^2 + q^2) \quad (\text{A.1})$$

$$B = -2\zeta_2 (\Omega^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + 1)q^2\Omega^2 + \eta^2 q^4) \quad (\text{A.2})$$

$$C = \Omega \eta^2 \mu q (-\Omega^2 \beta q^2 \phi_1^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2) \quad (\text{A.3})$$

$$D = 2\zeta_2 (\Omega^6 + (-1 + ((-\mu - 1)\eta^2 - \beta \phi_1^2 - 1)q^2) + ((1 + \beta(\mu + 1)\phi_1^2)\eta^2 q^2 + 1 + (\mu + 1)\eta^2) q^2 \Omega^2 - \eta^2 q^4) \quad (\text{A.4})$$

## Apéndice B

### Coeficientes del Método de Nishihara

$$c_1 = \frac{1}{4} \frac{(-8 + ((-8\mu - 8)\eta^2 - 8\beta\phi_1^2 - 8)q^2)\zeta_2^2 + \eta^4\mu^2q^2}{\zeta_2^2} \quad (\text{B.1})$$

$$c_2 = \frac{1}{2\zeta_2^2} \left( ((2(\mu + 1)^2\eta^4 + (8\beta\mu\phi_1^2 + 8\beta\phi_1^2 + 4\mu + 8)\eta^2 + 2(\beta\phi_1^2 + 1)^2)\zeta_2^2 - \mu^2\eta^4(\beta\phi_1^2 + 1))q^4 + ((8\mu + 8)\eta^2 + 4\beta\phi_1^2 + 8)\zeta_2^2 - \eta^4\mu^2 \right) q^2 + 2r^2\zeta_2^2 \quad (\text{B.2})$$

$$c_3 = \frac{1}{4\zeta_2^2} \left( q^2 \left( (-8(\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)(\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + 1)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^2(\beta\phi_1^2 + 1)^2 \right) \eta^2 q^4 + ((-8(\mu + 1)^2\eta^4 + (-16\beta\mu\phi_1^2 - 16\beta\phi_1^2 - 16\mu - 32)\eta^2 - 8\beta\phi_1^2 - 8)\zeta_2^2 + 2\mu^2\eta^4(\beta\phi_1^2 + 2))q^2 + ((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta_2^2 + \eta^4\mu^2)r^2 \right) \quad (\text{B.3})$$

$$c_4 = \frac{1}{\zeta_2^2} \left( \left( ((\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)^2 q^4 + 2(\mu + 1)(\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 2)q^2 + r^2(\mu + 1)^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{2}\mu^2((\beta\phi_1^2 + 1)q^2 + r^2) \right) \eta^4 + 2((\beta\mu\phi_1^2 + 2\beta\phi_1^2 + 2)q^2 + r^2(\mu + 2))\zeta_2^2 \eta^2 + r^2\zeta_2^2 \right) q^4 \quad (\text{B.4})$$

$$c_5 = -\frac{1}{\zeta_2^2} \left( 2 \left( ((\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + r^2(\mu + 1))\eta^2 + r^2 \right) \zeta_2^2 - \frac{1}{8}\eta^2\mu^2r^2 \right) q^6\eta^2 \quad (\text{B.5})$$

$$c_6 = \eta^4 q^8 r^2 \quad (\text{B.6})$$

---

## *Referencias*

---

- [1] Smith, M. A. (2020). The Inerter: A Retrospective. *Annual review of control, robotics, and autonomous systems*, 3(1), 361-391. <https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023917>
- [2] Rao, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations*. Pearson College Division.
- [3] Jin, X., Chen, M. Z. Q., & Huang, Z. (2016). Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 119, 80-87. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.10.007>
- [4] Hu, Y., & Chen, M. Z. Q. (2015). Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 99, 297-307. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>
- [5] Marco Canales, William Paucar y Noel Juipa. “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica”. En: RevIA 7.4 (2020), págs. 5-9.
- [6] Rita, A. D., McGarvey, J. H., & Jones, R. E. (1978). Helicopter rotor isolation evaluation utilizing the dynamic antiresonant vibration isolator. *Journal of The American Helicopter Society*, 23(1), 22-29. <https://doi.org/10.4050/jahs.23.22>
- [7] Jacquot, R. G. (1978). Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems. *Journal of Sound and Vibration*, 60(4), 535-542. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(78\)80090-x](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(78)80090-x)
- [8] Wang, B. P., Kitis, L., Pilkey, W. D., & Palazzolo, A. (1985). Synthesis of dynamic vibration absorbers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 107(2), 161-166. <https://doi.org/10.1115/1.3269239>
- [9] Aida, T., Toda, S., Ogawa, N., & Imada, Y. (1992). Vibration Control of beams by Beam-Type Dynamic Vibration Absorbers. *Journal of Engineering Mechanics-asce*, 118(2), 248-258. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1992\)118:2\(248](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1992)118:2(248)
- [10] Ren, M. (2001). A VARIANT DESIGN OF THE DYNAMIC VIBRATION ABSORBER. *Journal of Sound and Vibration*, 245(4), 762-770. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3564>



- [11] Smith, M., & Wang, F. (2004b). Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle System Dynamics*, 42(4), 235-257. <https://doi.org/10.1080/00423110412331289871>
- [12] Evangelou, S. A., Limebeer, D., Sharp, R. D., & Smith, M. (2004b). Steering compensation for high-performance motorcycles. 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601). <https://doi.org/10.1109/cdc.2004.1428746>
- [13] Fu, Z., & He, J. (2001b). *Modal analysis*. Elsevier.
- [14] Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.
- [15] Barredo, E., Blanco, A., Colín, J., Penagos, V. M., Abúndez, A., Vela, L. G., Meza, V., Cruz, R. H., & Mayén, J. (2018). Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 41-53. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>
- [16] López García, G. (2021). *Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo Viga [Tesis de licenciatura]*. Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- [17] Beer, F. P., & Johnston, E. R. (1992). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. tomo 1.
- [18] Osamu Nishihara y Toshihiko Asami. "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)". En: *Journal of Vibration and Acoustics* 124.4 (sep. de 2002), págs. 576-582. issn:1048-9002. doi: 10.1115/1.1500335
- [19] Toshihiko Asami y Osamu Nishihara. "Closed-Form Exact Solution to H1 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems)". En: *Journal of Vibration and Acoustics* 125.3 (jun. de 2003), págs. 398-405. issn:1048-9002. doi: 10.1115/1.1569514.
- [20] S Graham Kelly. *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning Stamford, CT, 2012.
- [21] Luis Quintanar Medina. "El teorema Pi y la modelación". En: *Revista del Departamento de Matemáticas y Física* (2006), págs. 1-7.
- [22] Miguel Angel Bernal Yermanos. "Teorema -construyendo ciencia en el aula". En: *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales* (2015).
- [23] James Victor Uspensky, JC Maquieira y JP Varela. *Teoría de ecuaciones*. Limusa, 1987.

- [24] Israel Gelfand y Vladimir Retakh. “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”. En: The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995. Springer. 1996, págs. 93-100.
- [25] Eduardo Barredo y col. “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers”. En: International Journal of Mechanical Sciences 144 (2018), págs. 41-53. issn: 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>.
- [26] Jin, X., Chen, M. Z., & Huang, Z. (2016). Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations. International Journal Of Mechanical Sciences, 119, 80-87. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.10.007>
- [27] Ormondroyd DJ. The theory of dynamic vibration absorber. ASME J Appl Mech 1928(50):9–22.
- [28] Pérez Martínez, M. (2024). Diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional de alto rendimiento dinámico basado en una red mecánica con inersor conectado a una estructura tipo Viga. [Tesis de licenciatura]. Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- [29] D. J. Inman, Engineering Vibration, 5.<sup>a</sup> ed. EUA: Pearson, 2022.
- [30] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, J. Colín, y M. Arias-Montiel, “Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration”, Eng. Struct., vol. 195, pp. 469-489, may. 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.05.105.
- [31] Smith, M. (2002). Synthesis of mechanical networks: the inerter. IEEE Transactions On Automatic Control, 47(10), 1648-1662. <https://doi.org/10.1109/tac.2002.803532>
- [32] Lajas Contreras, F. (2017). Study of the Model Order Reduction of an Entire Aircraft Configuration [Tesis de maestría]. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [33] White, G. (2010). Introducción al análisis de vibraciones. USA, Azima DLI, 22-29.
- [34] Vaschy, A. “Sur les lois de similitude en physique”.Annales T’el’egraphiques, Vol.19,janvier-f’evrier, pp.25-28, (1892).
- [35] Riabouchinski, D. P. (1911): Méthode des variables de dimension zéro. L’Aérophile, 19: 407-408.
- [36] Aliro Cordero Simunovic. “Mecánica”. En: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (2013).

- [37] Frahm, H., 1909, "Device for Damped Vibrations of Bodies," U.S. Patent No.989958, October 30.
- [38] Steen Krenk. "Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper". En: Journal of Applied Mechanics 72.6 (mayo de 2005), págs. 936-942. issn: 0021-8936. doi: 10.1115/1.2062867.