



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

INSTITUTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y AUTOMOTRIZ

**“OPTIMIZACIÓN DE NIDVAs PARA SUPRESIÓN DE
VIBRACIONES EN SISTEMAS ROTOR - COJINETE
TIPO JEFFCOTT”**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ

PRESENTA:

ANDREA BUSTAMANTE MIGUEL

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS

HCA. CD. DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO. JULIO DE 2025.

DEDICATORIA

A Dios, por darme la vida, la salud, la fuerza y la sabiduría para culminar este proyecto.

A mis padres, Paulina Miguel Pérez y Aquilino Bustamante López, por su amor incondicional, su ejemplo de perseverancia y sus sacrificios constantes.

A mis hermanas, Celia Rosario Bustamante Miguel y Paola Fernanda Bustamante Miguel, por escucharme, darme ánimo y ayudarme siempre.

A mi familia y amigos, por su apoyo emocional, sus palabras de aliento y por acompañarme en cada paso de este camino.

AGRADECIMIENTOS

Culminar esta tesis representa el cierre de una etapa importante en mi vida, la cual no hubiera sido posible sin el apoyo y acompañamiento de muchas personas.

En primer lugar, agradezco profundamente a Dios, por darme la salud, la fuerza y la claridad necesaria para seguir adelante incluso en los momentos difíciles.

A mis padres, por ser mi base y mi motor, por su amor incondicional, sus consejos y su ejemplo de esfuerzo y constancia.

Agradezco profundamente a mi asesor de tesis Dr. José Gabriel Mendoza Larrios, por compartir sus conocimientos y guiarme con paciencia en este proyecto de investigación. De la misma forma, agradezco a mis sinodales al Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría, al Dr. Galdino Cardenal Santos Reyes y al M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez por su tiempo y guía en este proyecto.

A mis compañeros y amigos, por estar presentes en este camino, por explicarme con paciencia, las conversaciones, las ideas compartidas, y el aliento mutuo en cada etapa del proceso.

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindarme el espacio y los recursos necesarios para llevar a cabo esta investigación.

Finalmente, a todos quienes, de una u otra manera, contribuyeron a que este proyecto se hiciera realidad. A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento.

RESUMEN

La presente investigación se enfoca en la optimización de sistemas de control de vibraciones aplicados a sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott, mediante la implementación de tres configuraciones de Absorbedores Dinámicos de Vibración No Tradicionales basados en Inersor, NIDVAs C3, C4 y C6. Estos dispositivos han mostrado un desempeño superior al de los amortiguadores convencionales (DVA, TMD e IDVA), al ampliar la banda de atenuación de la respuesta vibratoria del sistema.

El estudio surge de la necesidad de mejorar el control de vibraciones en sistemas rotodinámicos, donde las soluciones tradicionales presentan limitaciones en términos de robustez y efectividad ante variaciones de frecuencia. Para abordar este problema, se emplean dos técnicas de optimización: la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ con el objetivo de minimizar la amplitud de la función de respuesta en frecuencia (FRF) de los NIDVAs implementados en rotores Jeffcott.

La metodología seguida se basa en el método de Canales, que contempla desde la documentación del estado del arte hasta la redacción del informe final. Se utilizan modelos matemáticos derivados mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange y software de cálculo simbólico (Maple) para simular el comportamiento de los sistemas y determinar los parámetros óptimos.

Finalmente, se evaluó y comparó la efectividad de ambas técnicas de optimización y se demostró que los NIDVAs C3, C4 y C6 representan una alternativa eficaz para la supresión de vibraciones en sistemas rotodinámicos.

NOMENCLATURA

m_u : Masa desbalanceada o masa excentrica.

d : Excentricidad.

wt : Ángulo recorrido.

M : Masa del disco del rotor tipo Jeffcott.

m_x : Masa de los absorbedores en la dirección x.

b_x : Inertancia de las redes mecánicas en la dirección x.

c_x : Amortiguamiento de las redes mecánicas en la dirección x.

c_{1x} : Amortiguamiento de los absorbedores en la dirección x.

k_{1x} : Rigidez de los absorbedores en la dirección x.

k_{2x} : Rigidez de las redes mecánicas en la dirección x.

K_x : Rigidez del rotor tipo Jeffcott en la dirección x.

x : Desplazamiento del disco del rotor tipo Jeffcott.

x_1 : Desplazamiento de las masas de los absorbedores.

x_2 : Desplazamiento interno de las redes mecánicas.

x_3 : Desplazamiento interno de las redes mecánicas.

m_y : Masa de los absorbedores en la dirección y.

b_y : Inertancia de las redes mecánicas en la dirección y.

c_y : Amortiguamiento de las redes mecánicas en la dirección y.

c_{1y} : Amortiguamiento de los absorbedores en la dirección y.

k_{1y} : Rigidez de los absorbedores en la dirección y.

k_{2y} : Rigidez de las redes mecánicas en la dirección y.

K_y : Rigidez del rotor tipo Jeffcott en la dirección y.

y : Desplazamiento del disco del rotor tipo Jeffcott.

y_1 : Desplazamiento de las masas de los absorbedores.

y_2 : Desplazamiento interno de las redes mecánicas.

y_3 : Desplazamiento interno de las redes mecánicas.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	IV
Nomenclatura	V
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XIII
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.2 JUSTIFICACIÓN	3
1.3 HIPÓTESIS	4
1.4 OBJETIVOS	5
1.4.1 Objetivo General.	5
1.4.2 Objetivos Específicos.	5
1.5 METAS	6
1.6 METODOLOGÍA	6
2 ESTADO DEL ARTE	11
2.1 ROTORES	11
2.2 ROTOR TIPO JEFFCOTT	12

2.3	SISTEMA ROTOR-COJINETE JEFFCOTT	15
2.4	DVA	16
2.5	NDVA	18
2.6	ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE	25
2.7	INERSOR	27
2.7.1	Inersor Piñon Cremallera	29
2.7.2	Inersor Husillo de Bolas	30
2.7.3	Inersor Bomba de Engranajes	31
2.7.4	Inersor Hidráulico	32
2.7.5	Inersor de Fluido	32
2.7.6	Inersor Rotacional	33
2.8	REDES MECÁNICAS CON INERSOR	33
2.9	IDVA	35
2.10	NIDVA	38
2.11	NIDVAs EN ROTOR TIPO JEFFCOTT	42
3	MARCO TEÓRICO	44
3.1	ANÁLISIS DIMENSIONAL	44
3.2	TEOREMA II DE BUCKINGHAM	46
3.3	ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE	47
3.4	TEOREMA DE VIETA	48
3.5	OPTIMIZACIÓN	50
3.6	TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS	51
3.7	TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA	52
3.8	CRITERIO H_{∞}	55
4	MODELOS MATEMÁTICOS	57
4.1	NIDVA-C3	58
4.2	NIDVA-C4	62

4.3	NIDVA-C6	63
4.4	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	65
4.5	RESPUESTA EN FRECUENCIA	67
5	RESULTADOS	70
5.1	TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA	70
5.1.1	NIDVA-C3 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott	71
5.1.2	NIDVA-C4 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	78
5.1.3	NIDVA-C6 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	79
5.2	CRITERIO H_{∞}	81
5.3	NIDVA-C3	82
5.4	NIDVA-C4	87
6	CONCLUSIONES	90
6.1	TRABAJOS FUTUROS	91
	BIBLIOGRAFÍA	93
	APÉNDICE	100
A	Funciones de Transferencia.	100
B	Técnica de los puntos fijos extendida.	106
C	Criterio H_{∞}	108

Índice de figuras

Figura 1.1. Metodología de Canales.	7
Figura 2.1. Diseño en 3D de un rotor de freno para automóvil [5].	11
Figura 2.2. Motor eléctrico [10].	12
Figura 2.3. Rotor tipo Jeffcott [7].	13
Figura 2.4. Rotor de Jeffcott [9].	13
Figura 2.5. Bomba Centrífuga Helicoidal [11].	14
Figura 2.6. Sistema Rotor-Cojinete Jeffcott [14].	15
Figura 2.7. DVA, a) No amortiguado y b) Amortiguado [17].	16
Figura 2.8. Absorbedor dinámico de vibraciones a) tradicional, b) no tradicional [17].	18
Figura 2.9. Absorbedor dinámico de vibraciones no tradicional, NDVA [19].	19
Figura 2.10. Gráfica de respuesta de la amplitud media normalizada del, DVA (línea sólida) y NDVA (línea discontinua) [20].	20
Figura 2.11. Comparación de gráficas de la relación de amplitud de velocidad entre la vibración del DVA y NDVA en la relación de masas [21].	21
Figura 2.12. Absorbedor dinámico de vibraciones no tradicional, NDVA, implementado en Rotor tipo Jeffcott [22].	22
Figura 2.13. Respuesta en frecuencia del Rotor tipo Jeffcott con DVA y NDVA, relación de masa similar [22].	22
Figura 2.14. Sistema con NDVA bajo excitación inercial [23].	23

Figura 2.15. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, norma $H(\Omega)_\infty$ y puntos fijos [23].	24
Figura 2.16. Turbina de un motor de avión. [24]	24
Figura 2.17. Analogía de la red eléctrica y mecánica [25].	25
Figura 2.18. Diagrama de cuerpo libre del resorte, el resistor y la masa. [26]	26
Figura 2.19. Diagrama de cuerpo libre de una red mecánica. [27]	26
Figura 2.20. Símbolo del inersor [28].	28
Figura 2.21. Elementos de la red mecánica y eléctrica [29].	28
Figura 2.22. Esquema del modelo mecánico del inersor piñón-cremallera [28].	29
Figura 2.23. Implementación física del inersor realizada en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [28]. . .	30
Figura 2.24. Inersor Husillo de Bolas [30]	30
Figura 2.25. Esquema mecánico del inersor husillo de bolas [30].	31
Figura 2.26. Esquema mecánico del inersor bomba de engranajes [30]. . .	31
Figura 2.27. Prototipo de inersor hidráulico [33].	32
Figura 2.28. Prototipo de inersor de fluido [34].	32
Figura 2.29. Diagrama mecánico del inersor rotacional [30].	33
Figura 2.30. Redes mecánicas basadas en inersor [28].	34
Figura 2.31. Ocho redes mecánicas optimizadas. [36].	35
Figura 2.32. a) TDVA, b) IDVA [28].	36
Figura 2.33. Respuesta en frecuencia del IDVA-C4 [38].	37
Figura 2.34. Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica de optimización H_∞ de las curvas de la respuesta en frecuencia del NIDVA C4 [38].	38
Figura 2.35. a) TDVA, b) NIDVA-C3 [39].	39

Figura 2.36. Respuesta en frecuencia normalizada del sistema primario, optimizado mediante la técnica de los puntos fijos extendida, cuando $\mu = 0,05$ [39].	39
Figura 2.37. Red mecánica C4 o TID [40].	40
Figura 2.38. Dispositivo de alto rendimiento NIDVA-C4 [40].	41
Figura 2.39. Gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema mediante la técnica de los puntos fijos [40].	41
Figura 2.40. NIDVA-C3 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	42
Figura 2.41. NIDVA-C4 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	43
Figura 2.42. NIDVA-C6 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	43
Figura 3.1. Gráfica del comportamiento del sistema cuando los coeficien- tes amortiguamiento de un DVA son: $\zeta \rightarrow 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$ [17].	51
Figura 3.2. Gráfica de la FRF del sistema primario de un DVA clásico, considerando distintos coeficientes de amortiguamiento [17].	52
Figura 3.3. Gráfica de la FRF vs. la relación de frecuencias Ω del IDVA- C3, comparando la técnica de Den Hartog y la técnica de los puntos fijos extendida [38].	55
Figura 3.4. Gráfica de comparación de resultados entre la técnica de los puntos fijos y la técnica de optimización H_∞ [17].	56
Figura 4.1. Aplicaciones de Rotor- Cojinete Tipo Jeffcott: Turbina industrial de vapor [49].	57
Figura 4.2. Diagrama de cuerpo libre del NIDVA-C3 en Sistema Rotor- Cojinete Tipo Jeffcott.	58
Figura 4.3. Diagrama de cuerpo libre del NIDVA-C4 en Sistema Rotor- Cojinete Tipo Jeffcott.	62
Figura 4.4. Esquema del NIDVA-C6 en un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott.	64

Figura 5.1.	Gráfica de la FRF del NIDVA-C3 en Rotor-Cojinete tipo Jeffcott, incluyendo el factor de amortiguamiento óptimo. . .	78
Figura 5.2.	Gráfica de la FRF de NIDVA-C4 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott, con factor de amortiguamiento óptimo.	79
Figura 5.3.	Gráfica de la FRF del NIDVA-C6 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott, con factor de amortiguamiento óptimo.	80
Figura 5.4.	FRF de NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6 obtenida mediante la técnica de los puntos fijos.	81
Figura 5.5.	Gráfica de la FRF del NIDVA-C3 mediante el criterio H_{∞} . .	86
Figura 5.6.	FRF del NIDVA-C3 mediante dos técnicas de optimización.	87
Figura 5.7.	FRF del NIDVA-C4 implementado en un rotor tipo Jeffcott.	88
Figura 5.8.	FRF del NIDVA-C4 mediante los dos métodos de optimización TPFE y Criterio H_{∞} ,	89

Índice de cuadros

Tabla 2.1. Cuadro comparativo de DVA no amortiguado y amortiguado. .	17
Tabla 2.2. Cuadro comparativo de los parámetros óptimos de, A) DVA y B) NDVA [20].	20
Tabla 2.3. Analogía fuerza-corriente.	27
Tabla 3.1. Dimensiones y abreviaturas de algunas variables físicas, en unidades del SI [17].	45
Tabla 3.2. Admitancias $Y(s)$ para cada red mecánica basada en inersor [37].	55
Tabla 5.1. Valores establecidos para las variables independientes.	76
Tabla 5.2. Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos. . .	76
Tabla 5.3. Valores numéricos de los parámetros óptimos del NIDVA-C4 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.	78
Tabla 5.4. Valores numéricos de los parámetros óptimos para el NIDVA-C6.	80
Tabla 5.5. Parámetros óptimos del NIDVA-C3 por el criterio H_∞ , cuando $\beta = 0$	86
Tabla 5.6. Valores numéricos para los parámetros óptimos del NIDVA-C4.	87

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los rotores tipo Jeffcott son un modelo simplificado de sistemas rotodinámicos para el análisis de vibraciones de máquinas rotatorias. Este modelo es utilizado para estudiar los efectos de vibraciones, resonancia y estabilidad en máquinas rotatorias como turbinas, generadores y motores.

En 1911 se identificó un fenómeno llamado vibraciones de resonancia, el cual puede llegar a afectar significativamente estructuras como barcos y edificios. Debido a este problema, se propuso el uso de cuerpos auxiliares cuya vibración es opuesta a la estructura principal y ayuda a reducir la amplitud de las oscilaciones mediante un efecto de cancelación. Este principio fue el inicio para el desarrollo de dispositivos de control pasivo de vibraciones.

Más tarde, se realizó la comparación del desempeño en el control de vibraciones entre el Amortiguador de Masa Sintonizada (TMD) y seis Absorbedores Dinámicos de Vibración basados en Inersor (IDVAs) para una torre de desulfuración [1]. Los resultados demostraron que los IDVAs pueden mitigar significativamente la respuesta vibratoria, además, el inersor hace que la banda de frecuencia efectiva de los IDVAs sea más amplia que la del TMD. De la misma forma, se obtuvieron mejoras mediante el criterio H_{∞} en la implementación de los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor (IDVAs) ampliando la banda de frecuencias efectiva mediante el uso del inersor[2].

Después, en consecuencia de que la relación de masas fijas en IDVAs fue un obstáculo para su desempeño, idearon un IDVA no tradicional. Se demostró que el NIDVA tiene ventaja sobre el IDVA y el DVA tradicional [3].

En este contexto, existe la limitante de solo poder usarse para mitigar vibraciones en estructuras de ingeniería civil o estructuras mecánicas estacionarias. Por ello, el estudio y modelado de los absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersor (NIDVAs) en sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott tiene gran importancia, ya que estos dispositivos han mostrado un desempeño superior al de los DVA tradicionales y los IDVAs.

La presente investigación trata de analizar y optimizar el rendimiento en la respuesta en frecuencia de los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott, utilizando las redes mecánicas no tradicionales basadas en inersor denominadas NIDVA-C3, C4 y C6 como objeto de estudio para mejorar la eficiencia en la supresión de vibraciones de este tipo de sistemas.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las vibraciones mecánicas constituyen un problema crítico en diversos campos de la ingeniería, afectando el desempeño y la estabilidad de estructuras y máquinas. En el caso de sistemas rotodinámicos, como los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott, estas vibraciones pueden deberse al desbalance, desalineación, desgaste de componentes o fuerzas externas. La presencia de vibraciones excesivas puede reducir la vida útil de los componentes, provocar fallas prematuras y afectar la seguridad y eficiencia del sistema.

Tradicionalmente, el control de vibraciones en estos sistemas se ha abordado mediante Amortiguadores de Masa Sintonizada (TMDs) y amortiguadores viscosos. Sin embargo, estos dispositivos presentan limitaciones:

Los TMDs son eficaces solo en rangos de frecuencia específicos y su rendi-

miento se degrada cuando la frecuencia de excitación varía.

Los amortiguadores viscosos pueden no ser suficientes para aplicaciones que requieren un control preciso en un amplio espectro de frecuencias o bajo condiciones dinámicas cambiantes.

Para superar estas limitaciones, el uso de inersores en absorbedores dinámicos representa una solución innovadora. En particular, los NIDVAs han mostrado un desempeño superior en la mitigación de vibraciones debido a su configuración mecánica mejorada. No obstante, su aplicación en sistemas rotodinámicos aún no ha sido explorada.

Por lo tanto, la presente investigación se centra en el análisis y optimización de NIDVAs en sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott, evaluando su efectividad en la reducción de vibraciones. Así mismo, impulsar la implementación de NIDVAs en sistemas rotodinámicos, mejorando la estabilidad y eficiencia de estos dispositivos en el campo de la ingeniería mecánica.

1.2. JUSTIFICACIÓN

Las vibraciones en embarcaciones pueden originarse por diversas causas, como el desbalanceo en la hélice, la desalineación del eje de propulsión, el desgaste de componentes mecánicos (rodamientos o cojinetes), las vibraciones del motor o las fuerzas hidrodinámicas generadas por la interacción de la hélice con el agua. Estas vibraciones no se limitan únicamente a los barcos, también afectan aeronaves, aviones, vehículos ferroviarios y automóviles, reduciendo su desempeño y seguridad estructural.

Las vibraciones mecánicas se pueden encontrar en nuestra vida cotidiana y a pesar de los distintos estudios e investigaciones, siguen existiendo limitantes en el control de vibraciones.

Sin embargo, un novedoso dispositivo surgió en los últimos años, el inersor.

Se ha demostrado que el inersor mejora significativamente el rendimiento de los absorbedores de vibración tradicionales y no tradicionales (DVA y NDVA). Por ello, se eligieron tres configuraciones de redes mecánicas basadas en inersor, C3, C4 y C6. Estas configuraciones se implementaron en DVAs y NDVAs, creando así nuevos diseños de absorbdores para el control de vibraciones, IDVAs y NIDVAs.

Se demostró que los NIDVAs C3, C4 y C6 superaron en rendimiento y en minimización de la curva de la función de la respuesta en frecuencia del sistema (FRF), a los DVAs y NDVAs. No obstante, existe la limitante de solo poder utilizar estos NIDVAs en sistemas mecánicos estacionarios.

Con el fin de abordar esta limitante, se pretende realizar en este trabajo, la implementación de los NIDVAs C3, C4 y C6 en un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott. Además, se minimizará la curva de la función de la respuesta en frecuencia (FRF) del sistema, mediante la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica de optimización H_{∞} .

1.3. HIPÓTESIS

Se espera que la implementación de técnicas de optimización y ajuste en los NIDVAs C3, C4 y C6 de un rotor tipo Jeffcott mejore el rendimiento de estas configuraciones, reduciendo la amplitud de la función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema y permitiendo un mejor control de las vibraciones en sistemas rotodinámicos.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo General.

Determinar el diseño óptimo de los NIDVA-C3, C4 y C6 implementados en un sistema rotor cojinete tipo Jeffcott, para minimizar la amplitud de la función de la respuesta en frecuencia de los sistemas y así mejorar el control de vibraciones en sistemas rotodinámicos.

1.4.2. Objetivos Específicos.

- Obtener los modelos matemáticos del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con los dispositivos NIDVA-C3, C4 y C6..
- Obtener y graficar la respuesta en frecuencia de los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott con los dispositivos NIDVA-C3, C4 y C6.
- Determinar valores óptimos para el diseño del rotor-cojinete tipo Jeffcott con los dispositivos NIDVA-C3, C4 y C6. mediante la técnica de los puntos fijos extendida.
- Determinar valores óptimos para el diseño del rotor-cojinete tipo Jeffcott con los dispositivos NIDVA-C3, C4 y C6 mediante la técnica de optimización H_{∞} .
- Evaluar la efectividad de los absorbedores en las diferentes condiciones de amortiguamiento óptimo.
- Analizar y comparar los resultados de los valores y las gráficas entre los métodos de optimización.

1.5. METAS

Las metas que se desean lograr son:

- Desarrollar ecuaciones simplificadas para el diseño teórico de los absorbedores NIDVA-C3, C4 y C5 para el control óptimo de la vibración, en sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott.
- Determinar los parámetros de diseño óptimos de forma numérica de los absorbedores NIDVA-C3, C4 y C5 para el control de vibración en sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott utilizando el índice de rendimiento H_{∞} .
- Realizar la comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica H_{∞} utilizadas en este trabajo de investigación.

1.6. METODOLOGÍA

Para alcanzar las metas planteadas en este trabajo de investigación, se utilizará la metodología de Canales[4]. Este autor plantea que este método es una solución a la variabilidad de problemas en la formulación de métodos dispersos en investigación, específicamente para trabajos de investigación tecnológica en el campo de la ingeniería, esta responde a la necesidad urgente de las diferentes escuelas de ingeniería y de posgrado. Esta metodología está formada por 7 etapas, como se muestra en la Figura 1.1 y se describen a continuación.

Documentación: Esta fase de la metodología se basa en recolección de información acerca del tema principal, términos, definiciones, antecedentes, datos numéricos, toda información o documento que pueda ser de utilidad en esta investigación. En este trabajo de investigación se indagará acerca de los sistemas de reducción o mitigación de vibraciones que existen y que han sido aplicados en

la ingeniería, haciendo énfasis en sistemas DVA, NDVA, IDVA, NIDVA, inersores, rotores tipo Jeffcott.

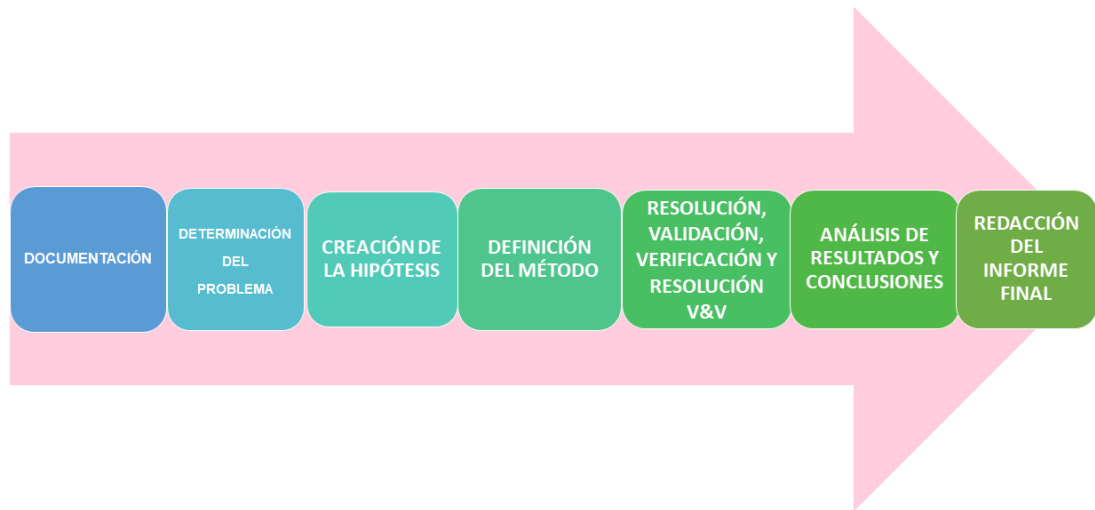


Figura 1.1: Metodología de Canales.

En 2015, Hu y Chen [2] propusieron tres configuraciones de IDVAs, C3, C4 y C6, que demostraron una mejora mayor al 20 % con respecto al DVA tradicional implementando la técnica de optimización H_{∞} . A partir de esto, se utilizaron estas tres configuraciones como objeto de estudio en la mitigación de vibraciones con absorbedores dinámicos. Debido a la efectividad y desempeño de estas configuraciones C3, C4 y C6, se eligieron para ser implementadas en un NIDVA para rotor tipo Jeffcott.

Con la finalidad de conocer las limitaciones que existen en dichos sistemas, así como su rendimiento y compararlos con los resultados de esta investigación, se elige un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott ya que es considerado un modelo simplificado de un sistema rotodinámico y permite comprender los principios básicos de las vibraciones en rotores.

Determinación del problema: En la industria de maquinaria rotodinámica, el control de vibraciones es un factor clave para la eficiencia y durabilidad de

los sistemas. Sin embargo, los métodos tradicionales presentan dificultades para minimizar la respuesta en frecuencia de sistemas rotodinámicos. Esto genera un aumento en el desgaste de componentes, mayores costos de mantenimiento y reducción de la vida útil del sistema.

Actualmente, la implementación de NIDVAs optimizados se ha propuesto como una solución efectiva para el control de vibraciones. Sin embargo, aún no ha sido explorada la optimización de estos dispositivos y su impacto en sistemas rotodinámicos.

Por lo tanto, esta investigación busca abordar esta problemática mediante la determinación y análisis de parámetros óptimos para NIDVAs C3, C4 y C6 en rotores tipo Jeffcott.

Creación de la hipótesis: En esta fase se tiene que describir lo que se espera obtener como resultado del trabajo de investigación. Para este caso, la hipótesis es:

“Se espera que la implementación de técnicas de optimización y ajuste en los NIDVAs C3, C4 y C6 de un rotor tipo Jeffcott mejore el rendimiento de estas configuraciones, reduciendo la amplitud de la función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema y permitiendo un mejor control de las vibraciones en sistemas rotodinámicos”.

Definición del método: Se debe elegir la metodología general para abordar la investigación y el método concreto a utilizar, para alcanzar las metas propuestas.

Por lo tanto, en este trabajo se utilizarán las ecuaciones de Euler-Lagrange con el fin de obtener el modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de los sistemas NIDVA C3, C4 y C6 en un rotor tipo Jeffcott. Posteriormente, mediante el análisis modal y un tratamiento matemático complejo, se obtendrá la función de respuesta en frecuencia de los sistemas antes mencionados.

Posteriormente, se utilizará la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio

H_∞ para determinar los parámetros óptimos de los sistemas NIDVA C3, C4 y C6 en un rotor tipo Jeffcott.

La técnica de los puntos fijos extendida es un método de optimización eurístico y cuasi-óptimo pues, se basa en la observación de como se comporta un sistema. Además, permite encontrar ecuaciones simplificadas de los parámetros óptimos de dichos sistemas.

Por otro lado, el criterio H_∞ proporciona una solución óptima debido a que su formulación matemática es robusta y bien definida, y minimiza las máximas amplitudes de vibración en las frecuencias resonantes del sistema. Además, el criterio H_∞ optimiza el rendimiento en todo el rango de frecuencias, lo que lo hace más flexible y adecuado para sistemas complejos.

Debido a esto, se emplearán ambos métodos en esta investigación. Pues, mientras la técnica de los puntos fijos extendida proporciona ecuaciones simplificadas de los parámetros del sistema, el criterio H_∞ al proporcionar una solución óptima, respaldará los resultados del método de optimización anterior.

Resolución, validación y verificación: Se utilizará como herramienta matemática el software Maple para desarrollar ecuaciones complejas con la finalidad de simplificar las ecuaciones, obtener parámetros y graficar la respuesta en frecuencia de los NIDVAs C3, C4 y C6 en rotor tipo Jeffcott.

Debido a que esta investigación se basa en el análisis modal y tratamiento matemático para obtener parámetros óptimos sin la construcción de un prototipo físico. La validación de los resultados se realizará mediante modelos matemáticos, ecuaciones simplificadas y representaciones gráficas obtenidas a partir del software Maple.

Análisis de resultados y conclusiones: Después de obtener los resultados, se analizarán a detalle para compararlos con las limitaciones y ventajas de absorbedores dinámicos de vibración anteriores a los NIDVAs, reportados en esta investigación. Además, se planteará si los resultados obtenidos afirman o refutan

la hipótesis. Esto dará paso a nuevas investigaciones y trabajos futuros.

Redacción del informe final: Luego de la obtención de resultados, se escribirá de forma detallada la metodología de investigación, resultados, análisis y conclusiones de este trabajo de investigación. Esto, con el fin de comunicar de manera clara y precisa al lector los resultados, análisis y conclusiones obtenidas de la optimización de NIDVAs C3, C4 y C6 para supresión de vibraciones en sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

2.1. ROTORES

El rotor, en ingeniería mecánica, es un elemento de una máquina que gira alrededor de su propio eje. Su función principal es rotar para transmitir movimiento o energía. El tamaño y la forma del rotor varían dependiendo de la aplicación del mismo. A continuación se presentan las aplicaciones de un rotor.

-Turbina. Se emplean en los generadores y motores de un avión. Este tipo de rotores transforma la energía de fluidos en energía mecánica;

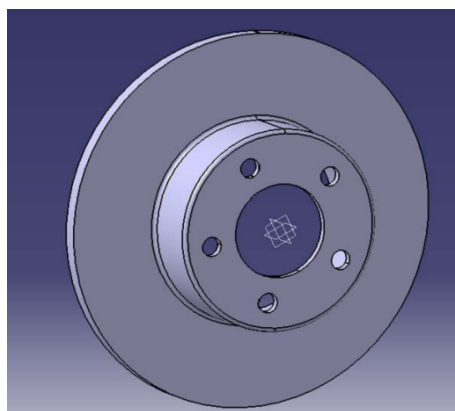


Figura 2.1: Diseño en 3D de un rotor de freno para automóvil [5].

-Freno. Son los más comunes en los vehículos y trabajan junto con las pastillas de freno. Su objetivo es detener o reducir la velocidad de un coche a través

de la fricción. Por ejemplo, en la Figura 2.1 se observa un rotor de freno para automovil.

-Motores eléctricos. Estos rotores transforman la energía eléctrica en un movimiento rotacional. Por ejemplo, el motor ilustrado en la Figura 2.2;



Figura 2.2: Motor eléctrico [10].

-Compresores. Los rotores compresores son los que más se utilizan en los dispositivos y sistemas de climatización y refrigeración. Lo que hacen es comprimir gases para elevar la presión y temperatura [6].

2.2. ROTOR TIPO JEFFCOTT

El rotor Jeffcott fue introducido en 1919 por H.H. Jeffcott y se compone por un único disco montado simétricamente sobre un eje elástico uniforme. Además, es considerado el modelo de rotor más simple.

En la Figura 2.3 se puede ver que Jeffcott fundamentó su diseño en un rotor rígido simétrico caracterizado porque su velocidad de régimen no supera su primera velocidad crítica. Además, consideró los parámetros de la siguiente manera: la rigidez del sistema incluye la sumatoria de las rigideces de soportes y disco; la masa de todos los componentes participa en el movimiento vibratorio. El

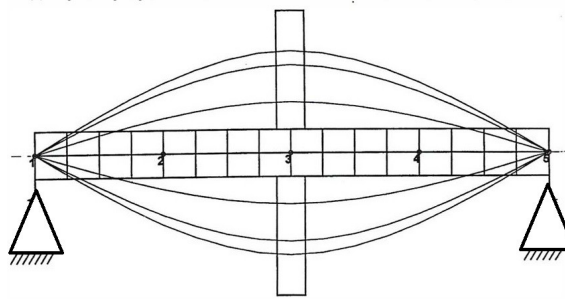


Figura 2.3: Rotor tipo Jeffcott [7].

rotor contemplaba un disco de masa desbalanceada montado en la parte central del eje flexible, soportado en extremos rígidos y donde la viscosidad actúa como medio de amortiguamiento [8].

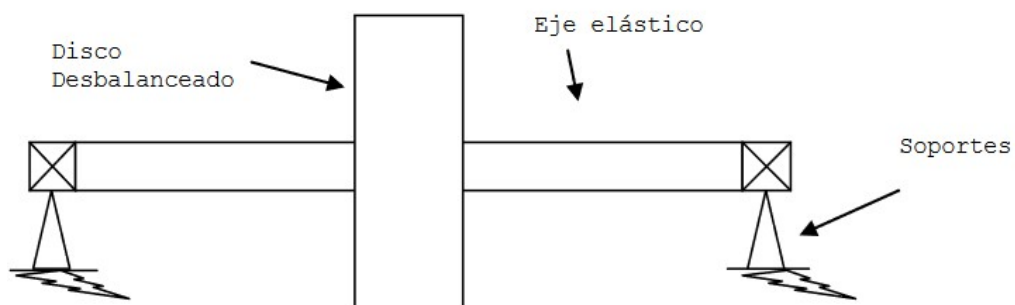


Figura 2.4: Rotor de Jeffcott [9].

El estudio y análisis de parámetros del rotor de Jeffcott fue el punto de partida de los fundamentos de la dinámica de los rotores flexibles. Este rotor ilustrado en la Figura 2.4, permite tener una buena percepción y comprensión de los fenómenos físicos que se presentan en la maquinaria rotatoria, como la presencia de una velocidad crítica y el efecto del amortiguamiento en respuesta del sistema.

Para las fuerzas que actúan sobre el sistema, se considera normalmente que el eje no tiene masa y que el disco tiene una masa M . Sin embargo, la masa del eje puede incluirse colocándola agrupada con el disco sin pérdida de precisión. Dado que el disco está centrado en el eje, no se incluyen los momentos giroscópicos del disco para el análisis de la 1ª velocidad crítica del rotor. Los cojinetes se consideran soportes simples y no proporcionan amortiguación. Se supone que el

amortiguamiento del rotor actúa en el centro del eje.

El funcionamiento de un compresor o turbina multietapa en su primer modo es similar al de un rotor Jeffcott. A través del análisis de la velocidad crítica, es posible simplificar un compresor o turbina a un rotor Jeffcott, calculando la masa y la rigidez modal del rotor en su primer modo. Estas características son fundamentales para evaluar de manera rápida las propiedades óptimas de los rodamientos correspondientes a este rotor, como se ilustra en la Figura 2.5, donde se muestra una bomba centrífuga representativa de este tipo de sistemas rotodinámicos.

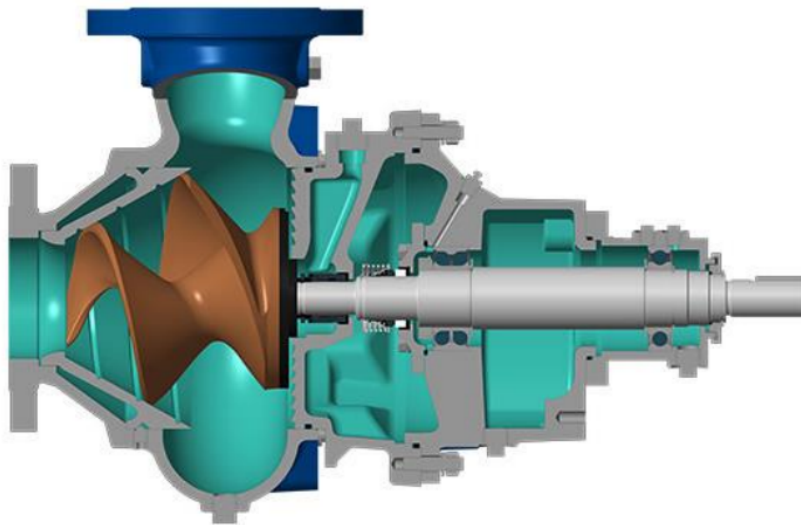


Figura 2.5: Bomba Centrífuga Helicoidal [11].

El rotor de Jeffcott se diferencia de otros ya que tiene un eje elástico y porque el comportamiento de este es similar al de un compresor o una turbina. Además, su capacidad para representar el comportamiento de un rotor en su primer modo de vibración permite una evaluación efectiva de las propiedades mecánicas, como la masa y la rigidez. Esto es fundamental para optimizar el diseño de rodamientos y mejorar la estabilidad y el rendimiento de la maquinaria rotativa. Sin embargo, existen vibraciones mecánicas en el sistema provocadas por desbalance y, con el tiempo, producen desgaste hasta llegar a afectar la eficacia del mismo.

2.3. SISTEMA ROTOR-COJINETE JEFFCOTT

Los elementos básicos de un sistema rotor-cojinete son: el disco, el eje, los cojinetes y los sellos, además de las masas de desbalance [12] [13]. Mientras en el rotor de Jeffcott no se toman en cuenta los cojinetes y resulta ser un modelo teórico, en este tipo de rotor se toma en cuenta el sistema completo para realizar el análisis con mayor precisión de la dinámica del rotor, como se ilustra en la Figura 2.6, un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott.

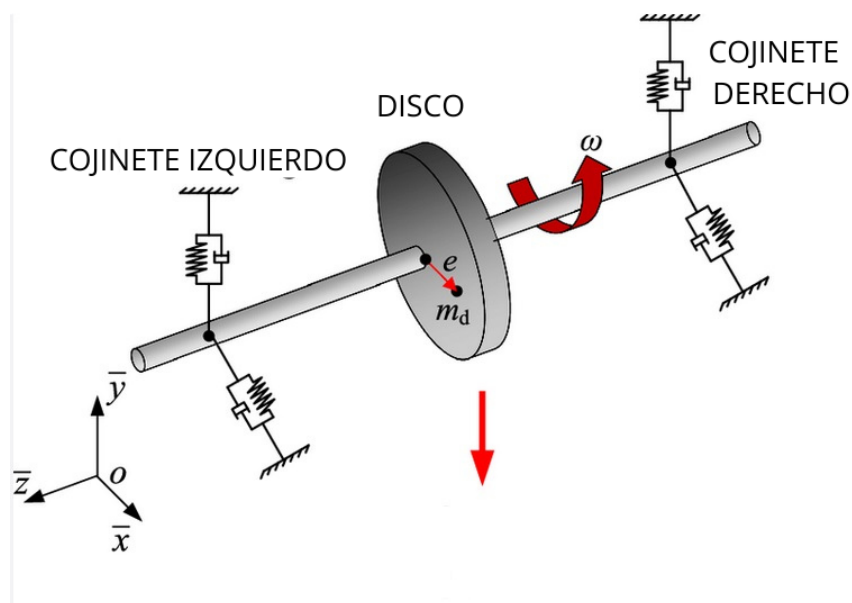


Figura 2.6: Sistema Rotor-Cojinete Jeffcott [14].

La causa más frecuente de vibraciones en máquinas rotatorias es el desbalance. Cuando el eje principal de inercia del rotor no coincide con el eje geométrico del sistema se genera el desbalance, este provoca vibraciones que producen fuerzas indeseables que se transmiten directamente a los elementos mecánicos, como los cojinetes del rotor.

Además, existen las vibraciones causadas por resonancia, esto ocurre cuando la frecuencia de excitación se encuentra a la par con la frecuencia natural del rotor. Dichas vibraciones generan efectos de desbalance catastróficos para el sistema. Por ello, existen métodos y/o dispositivos para atenuar este tipo de vibraciones [15]. A continuación se presentan algunos modelos de absorbedores de vibración dinámica importantes para contrarrestar estos efectos.

2.4. DVA

Debido a los efectos de resonancia en el campo de la mecánica, Frahm [16] presentó un dispositivo con el fin de minimizar las amplitudes de vibración en un sistema, llamado absorbedor dinámico de vibración.

Absorbedor dinámico de vibraciones, por sus siglas en inglés DVA (Dynamic Vibrations Absorber). También conocido como amortiguador de masa sintonizada, TMD (Tuned Mass Damper). Un sistema con DVA clásico se compone de dos partes principales: el sistema primario o estructura principal y el sistema secundario o el absorbedor.

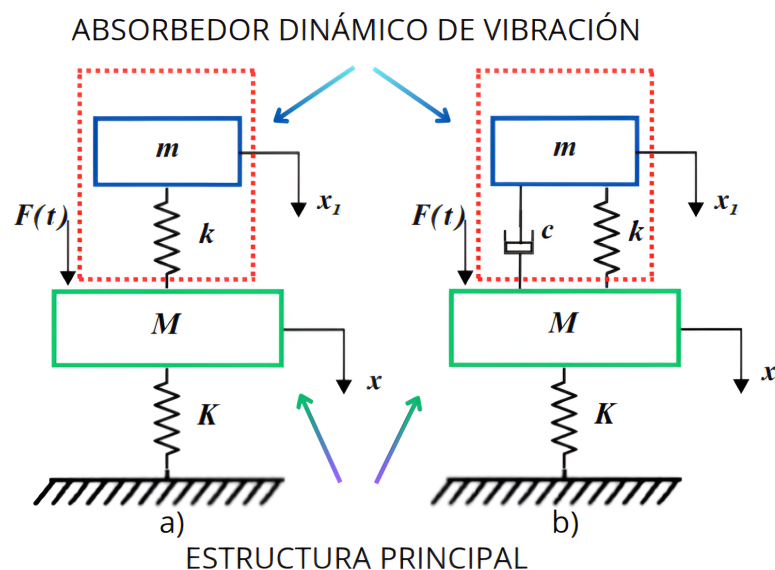


Figura 2.7: DVA, a) No amortiguado y b) Amortiguado [17].

Un absorbedor de vibraciones es un sistema vibratorio masa-resorte relativamente pequeño acoplado a la masa principal M_1 , y sintonizado de tal manera que su frecuencia natural $\frac{k_2}{m_2}^{1/2}$ sea igual a la frecuencia w de la fuerza excitatriz o perturbadora del sistema principal.

DVA No Amortiguado	DVA Amortiguado
No presenta mecanismos de disipación de energía, lo que significa que toda la energía de vibración se transfiere al sistema.	Incorpora un mecanismo de amortiguamiento que disipa la energía de las vibraciones. Esto puede ser a través de materiales viscoelásticos o mecanismos mecánicos.
Tiene un comportamiento más susceptible a la resonancia. Si la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, puede generar vibraciones amplificadas.	Su respuesta es más efectiva en una gama más amplia de frecuencias, ya que el amortiguamiento ayuda a controlar picos de vibración y reduce la resonancia.
Tiende a ser más eficiente en un rango de frecuencia específico, donde se puede ajustar la frecuencia natural del absorbedor para coincidir con la de la vibración a mitigar.	Generalmente, es más estable en su comportamiento, evitando el fenómeno de resonancia que puede ocurrir en sistemas no amortiguados.
Suele ser más simple en términos de diseño y construcción, ya que no requiere mecanismos adicionales para el amortiguamiento.	Puede ser sintonizado para ser efectivo en un rango de frecuencias más amplio, lo que permite su uso en diversas aplicaciones.

Tabla 2.1: Cuadro comparativo de DVA no amortiguado y amortiguado.

Los absorbedores dinámicos de vibraciones son dispositivos diseñados para reducir o eliminar vibraciones indeseadas en estructuras y maquinaria.

En la Figura 2.7 se puede observar la primera clasificación de los DVA's. En

la Tabla 2.1 se presentan las diferencias de comportamiento y rendimiento entre un DVA no amortiguado y un DVA amortiguado.

Se puede concluir que el DVA no amortiguado tiene mejor desempeño a determinada frecuencia, es propenso a la resonancia y cuenta con un diseño más simple. Por otro lado, el DVA amortiguado es eficaz para un amplio rango de frecuencias; el control de picos de la vibración es más sencillo, por lo tanto, es más estable [17].

A pesar de las soluciones analíticas presentadas por Ormondroyd y Den Hartog para el diseño óptimo del DVA por medio de la técnica de los puntos fijos, en este punto aún existen limitaciones, ya que los DVA pueden tener un desempeño deficiente si no están sintonizados a determinada frecuencia de vibración. Esto disminuye la eficacia de los DVA en sistemas donde las condiciones cambian debido a variaciones en las propiedades del sistema o desgaste de los componentes [18].

2.5. NDVA

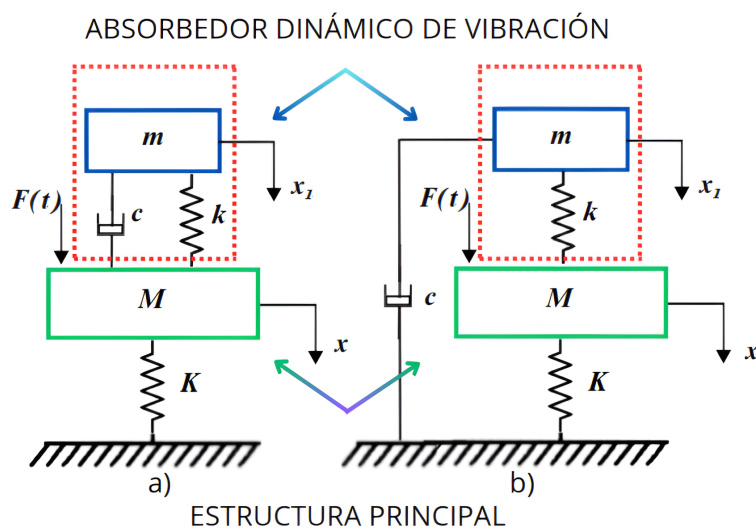


Figura 2.8: Absorbedor dinámico de vibraciones a) tradicional, b) no tradicional [17].

Un absorbedor dinámico de vibración no tradicional, por sus siglas en inglés NDVA (Non traditional Dynamic Vibration Absorber) se ilustra en la Figura 2.9. En 2001, Ren [19] presentó un diseño variante del DVA clásico. El sistema consiste en un amortiguador conectado directamente a tierra, en lugar de estar conectado al sistema principal. La Figura 2.8 se muestra la comparación del DVA y NDVA.

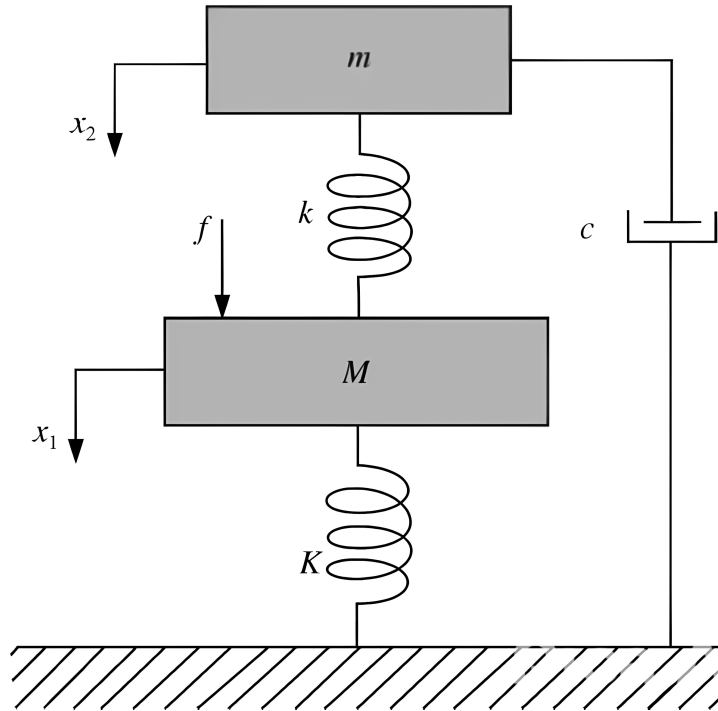


Figura 2.9: Absorbedor dinámico de vibraciones no tradicional, NDVA [19].

También se realizó la comparación de estos absorbedores respecto a su rendimiento para reducir las vibraciones en un sistema. El DVA clásico se sintoniza a frecuencia más baja que la frecuencia de funcionamiento del sistema; el NDVA se sintoniza a frecuencia ligeramente más alta que la frecuencia de funcionamiento del sistema. Así, el NDVA tiene mayor rango de frecuencias para interactuar con el sistema en distintas condiciones, brindando mayor efectividad. También, el NDVA utiliza un coeficiente de amortiguamiento mayor que el DVA. Por lo tanto, el NDVA tiene mayor capacidad para disipar la energía de vibraciones y como resultado, mejor rendimiento que el DVA.

De acuerdo con Ren, la principal ventaja del NDVA radica en que sin la ne-

cesidad de aumentar la masa, se reducen de manera eficaz las vibraciones del sistema en comparación con el DVA convencional. Por lo tanto, el NDVA tiene mayor eficiencia y rendimiento al reducir vibraciones, comparado con el DVA clásico [19].

Comparison of the two models

Model	β^*	ζ_{opt}	$G(r_1) = G(r_2)^a$	$G(r = \beta^*)$	\bar{G}
A	0.8696	0.1923	3.786	3.476	2.522
B	1.085	0.2675	3.104	2.795	2.376

^a $r_1 = 0.7999$, $r_2 = 1.049$ for Model A; $r_1 = 0.9243$, $r_2 = 1.224$ for Model B.

Tabla 2.2: Cuadro comparativo de los parámetros óptimos de, A) DVA y B) NDVA [20].

Posteriormente, Liu y Liu [20] propusieron el principio de optimización del NDVA, en términos de minimizar la respuesta de la amplitud media normalizada del sistema principal bajo excitación armónica. Aplicando el método de Brock, encontraron los parámetros óptimos para el NDVA, como se muestra en la Tabla 2.2.

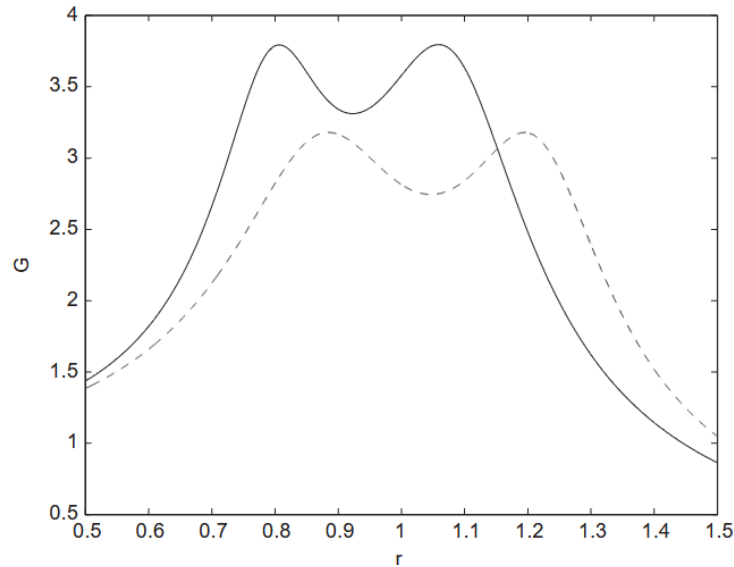


Figura 2.10: Gráfica de respuesta de la amplitud media normalizada del, DVA (línea sólida) y NDVA (línea discontinua) [20].

Los resultados demostraron que el NDVA es más efectivo en la supresión de vibraciones del sistema principal, en comparación con el DVA tradicional, como

se observa en la Figura 2.10.

En la Tabla 2.2 se observan los parámetros óptimos del DVA y NDVA, modelo A y modelo B respectivamente. Dónde, G es la respuesta de la amplitud media normalizada del sistema principal. Luego, en la Figura 2.11 se muestra la gráfica de la respuesta de la amplitud media normalizada del DVA y NDVA. Dónde, la línea sólida es el modelo A (DVA) y la línea punteada es el modelo B (NDVA).

Por otra parte, Cheung [21] logró la sintonización óptima del NDVA mediante la teoría de los puntos fijos. Además, se demostró analíticamente que el NDVA brinda mayor supresión a la respuesta de la velocidad máxima de vibración del sistema principal, comparado con el DVA clásico.

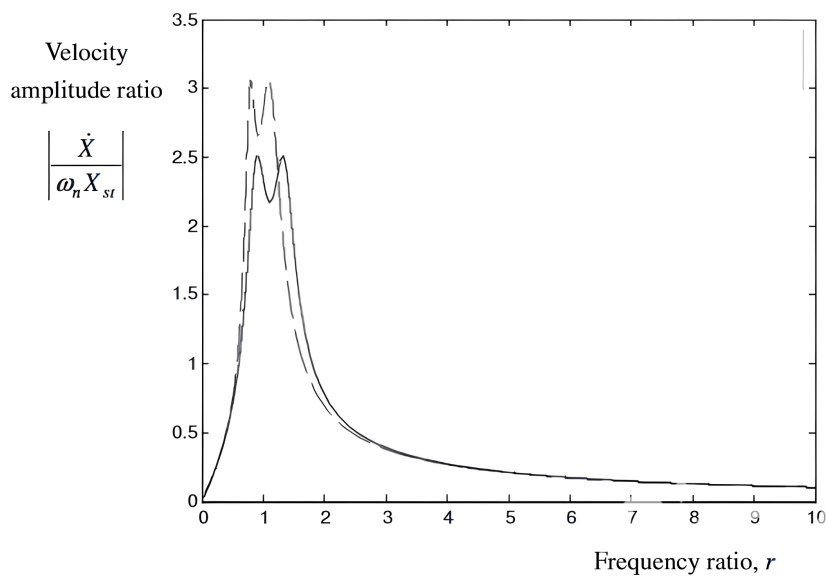


Figura 2.11: Comparación de gráficas de la relación de amplitud de velocidad entre la vibración del DVA y NDVA en la relación de masas [21].

El desempeño del NDVA puede ser mejor que el del DVA, en ciertas aplicaciones. Sin embargo, existen aplicaciones dónde no se puede utilizar el NDVA. Pues, es imposible conectar el absorbedor a tierra mediante un amortiguador. Por ello, se recomienda utilizar el absorbedor dinámico de vibración no tradicional (NDVA), siempre y cuando su configuración sea práctica para aplicaciones que requieran minimizar la respuesta de la velocidad máxima de vibración del

sistema principal [21].

Más tarde, Heidari y Monjezi aplicaron el DVA y el NDVA a un rotor tipo Jeffcott para supresión de vibraciones, como se muestra en la Figura 2.12. Obtuvieron los parámetros óptimos de ambos sistemas mediante la teoría de los puntos fijos [22].

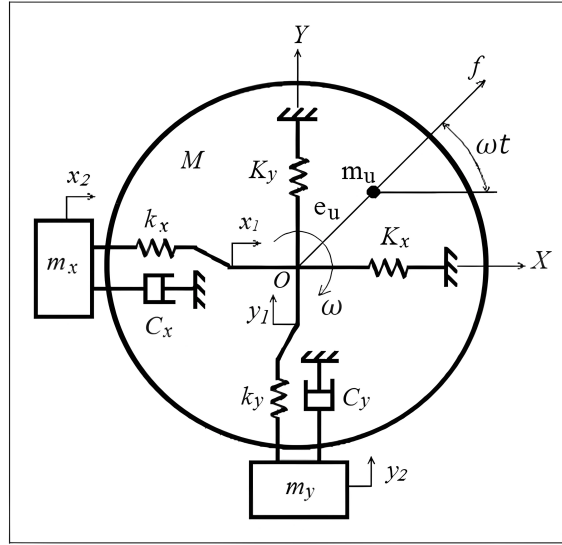


Figura 2.12: Absorbedor dinámico de vibraciones no tradicional, NDVA, implementado en Rotor tipo Jeffcott [22].

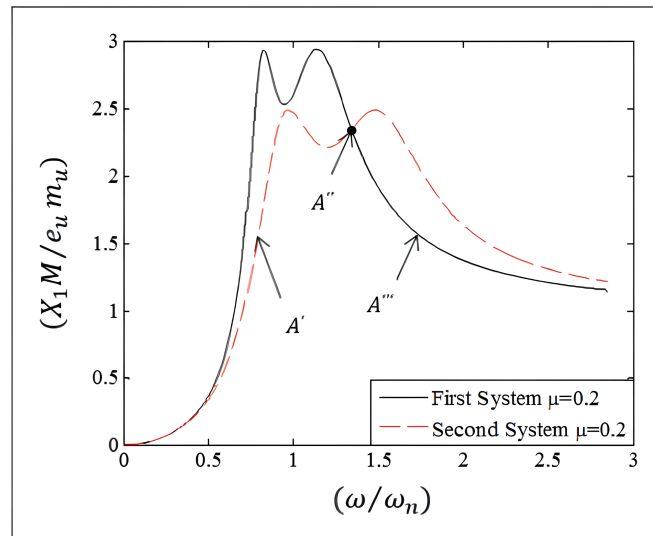


Figura 2.13: Respuesta en frecuencia del Rotor tipo Jeffcott con DVA y NDVA, relación de masa similar [22].

Los resultados indican que el NDVA tiene mejor control de vibraciones en

rotores tipo Jeffcott, en comparación con el DVA tradicional, como se observa en la Figura 2.13.

En 2022, Mendoza Larios et al. [23] realizaron un estudio para la supresión de vibraciones en una estructura sometida a excitación inercial ilustrada en la Figura 2.14. Donde obtuvieron ecuaciones simplificadas para los parámetros de diseño óptimo del NDVA, mediante la técnica de los puntos fijos.

También, implementaron la optimización del índice de rendimiento H_∞ para dicho sistema. También obtuvieron los parámetros de diseño óptimos del NDVA de forma numérica utilizando el método de Nishihara, los resultados de dicha optimización se ilustran en la Figura 2.15.

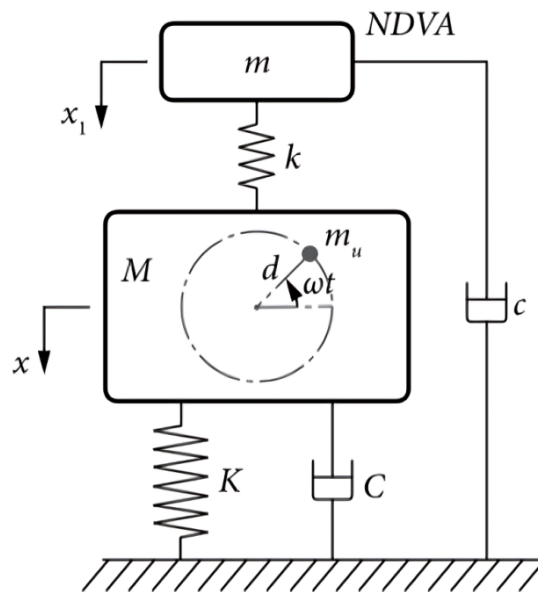


Figura 2.14: Sistema con NDVA bajo excitación inercial [23].

Además, expusieron el incremento de supresión de vibración que proporciona el NDVA en comparación con el DVA clásico. Para la relación de masa, tomaron el rango de valores $1\% \leq \mu \leq 20\%$. En base a este rango el NDVA presenta una mejora de 0.36 – 15.7 % en la supresión de vibración, comparado con el DVA.

Existen distintas fuentes de vibración en sistemas mecánicos; en sistemas rotodinámicos, la fuente principal es el desbalance de masas y los rodamientos defectuosos utilizados en el sistema.

El diseño del absorbedor dinámico de vibración no tradicional (NDVA) es eficaz en el control de vibraciones de sistemas sometidos a fuerzas periódicas y siempre que su configuración sea práctica en las aplicaciones.

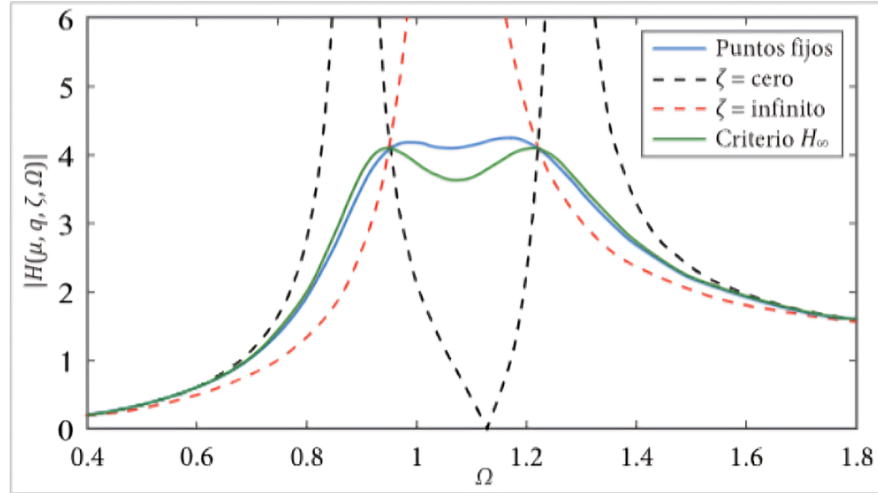


Figura 2.15: Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, norma $H(\Omega)_\infty$ y puntos fijos [23].

Sin embargo, en este punto siguen existiendo obstáculos para el desempeño óptimo de máquinas rotatorias con NDVA. Como la capacidad para mitigar vibraciones usando el absorbedor limitado a una frecuencia específica. Esto resulta ser un inconveniente en máquinas rotodinámicas con un amplio rango de operación, como turbinas, compresores, bombas, etc. Por ejemplo, una turbina ilustrada en la Figura 2.16.

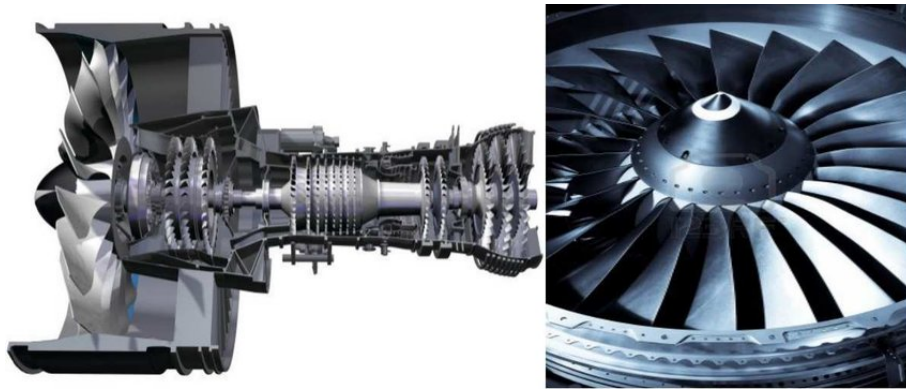


Figura 2.16: Turbina de un motor de avión. [24]

Más adelante, se presentan dispositivos, investigaciones y estudios que mejoran el desempeño dinámico de los absorbedores dinámicos de vibración amortiguados. Tal como el inersor, redes mecánicas con inersor y la técnica de los puntos fijos extendida.

2.6. ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE

En mecánica, el control de vibraciones es análogo al filtrado de señales en electricidad. Su implementación es con el fin de reducir o eliminar curvas no deseadas. En mecánica, llamadas vibraciones mecánicas o vibraciones de resonancia, y en electricidad, las señales de ruido o interferencia. Su objetivo común es aplanar las curvas de las gráficas correspondientes, ya sea en términos de amplitud de vibraciones o amplitud de las señales de interferencia. Logrando estabilizar el comportamiento del sistema y alcanzar un rendimiento óptimo.

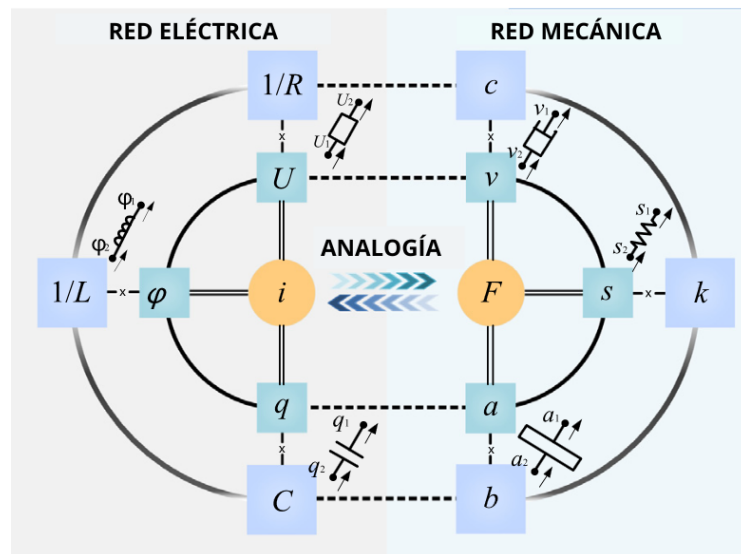


Figura 2.17: Analogía de la red eléctrica y mecánica [25].

El filtrado de señales en electricidad es implementado mediante circuitos eléctricos o redes eléctricas, integradas por componentes eléctricos (resistor, inductor, capacitor, etc.). De la misma forma, para supresión de vibraciones en el campo

de la mecánica, se utilizan redes mecánicas, esto se refiere a la analogía fuerza-corriente ilustrada en la Figura 2.17.

Una red mecánica es un sistema integrado por elementos mecánicos: masa, resorte, amortiguador. Unidos fijamente con el propósito de atenuar fuerza, movimiento o energía dentro de un sistema. En una red mecánica se restringe a que el movimiento sea paralelo a un eje fijo y relativo a un punto fijo, llamado suelo o tierra. Cada elemento mecánico como el resorte, consta de dos puntos extremos, conocidos como nodos o terminales.

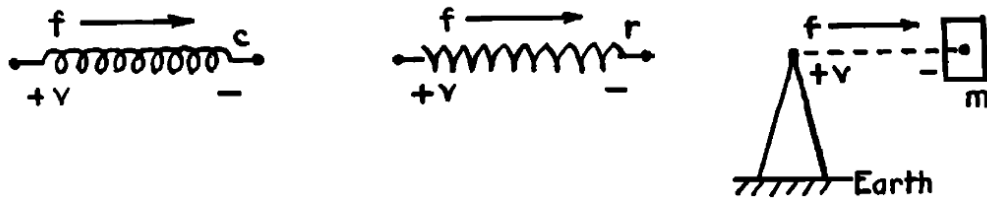


Figura 2.18: Diagrama de cuerpo libre del resorte, el resistor y la masa. [26]

En el caso de la masa, una de las terminales es al centro de gravedad y la otra es a tierra, como se observa en la Figura 2.18.

Firestone [26] introdujo una nueva analogía: fuerza - corriente. Donde la fuerza mecánica se relaciona con la corriente eléctrica, mientras que la velocidad se relaciona con el voltaje. También, estableció equivalencias entre componentes de redes mecánicas y eléctricas.

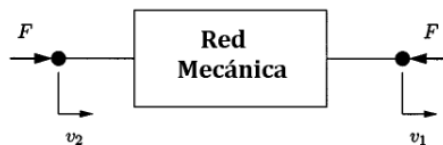


Figura 2.19: Diagrama de cuerpo libre de una red mecánica. [27]

Smith [27] en la Figura 2.19 presenta un diagrama de cuerpo libre de una red mecánica de un puerto (dos terminales). En esta red existe una convención de signos: una fuerza F positiva, que representa una fuerza de compresión y una velocidad relativa positiva ($v = v_2 - v_1$, con $v_2 > v_1$), esto indica que los nodos se

mueven juntos en la misma dirección. El producto de la fuerza F y la velocidad relativa v tiene unidades de potencia ($[W]$), conocido como par fuerza-velocidad. El par fuerza-velocidad describe la transferencia de energía en el sistema. Además, no es necesario que los nodos del puerto estén conectados a tierra, lo que permite un amplio análisis de la red mecánica.

Sistema mecánico	Equivalencia	Sistema eléctrico
fuerza	\longleftrightarrow	corriente
velocidad	\longleftrightarrow	voltaje
tierra mecánica	\longleftrightarrow	tierra eléctrica
resorte	\longleftrightarrow	inductor
amortiguador	\longleftrightarrow	resistencia
energía cinética	\longleftrightarrow	energía eléctrica
energía potencial	\longleftrightarrow	energía magnética
palanca	\longleftrightarrow	transformador
velocidad en el punto cero	\longleftrightarrow	potencial en el punto cero

Tabla 2.3: Analogía fuerza-corriente.

Por lo tanto, la analogía fuerza-corriente definida como la movilidad en sistemas mecánicos y eléctricos, se organiza de la forma presentada en la Tabla 2.3.

La equivalencia masa-capacitor se omite ya que no es tan general, para ello existe un nuevo elemento llamado inersor.

2.7. INERSOR

Malcom Smith [27] presentó un dispositivo mecánico de dos terminales, llamado inersor. Este dispositivo es considerado equivalente al capacitor en la relación mecánica-eléctrica.

Smith define el inersor como un elemento mecánico de dos terminales (como

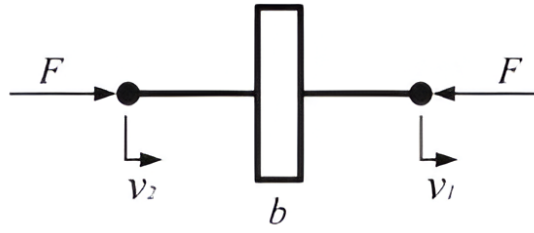


Figura 2.20: Símbolo del inersor [28].

se ilustra en la Figura 2.20) y tiene la propiedad de que la fuerza que es aplicada a los nodos, es proporcional a la aceleración relativa entre ellos [27].

Mechanical		Electrical	
$Y(s) = \frac{k}{s}$ $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$ <p>Spring</p>		$Y(s) = \frac{1}{Ls}$ $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$ <p>Inductor</p>	
$Y(s) = bs$ $F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ <p>Inerter</p>		$Y(s) = Cs$ $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ <p>Capacitor</p>	
$Y(s) = c$ $F = c(v_2 - v_1)$ <p>Damper</p>		$Y(s) = \frac{1}{R}$ $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$ <p>Resistor</p>	

Figura 2.21: Elementos de la red mecánica y eléctrica [29].

Debido a las características del inersor: es innecesario unir el inersor a la masa mecánica; el inersor funciona adecuadamente en cualquier orientación; tiene masa pequeña; es independiente del valor requerido de la inertancia. Por lo tanto, su elemento eléctrico análogo es el capacitor como se observa en la Figura 2.21.

La fuerza desarrollada en el inersor, esta dada por la siguiente ecuación:

$$F = b \cdot (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (2.1)$$

Donde b es la inertancia y se encuentra en unidades de masa. \dot{v}_1 y \dot{v}_2 son la aceleración en cada nodo del inersor.

Por lo tanto, en la ecuación (2.1) se observa que la fuerza aplicada igual y opuesta en cada nodo es proporcional a la aceleración relativa entre los nodos.

Desde la introducción del inersor en 2001, se han desarrollado distintas configuraciones para la construcción del inersor práctico. A continuación se presentan los diseños más comunes de inersor.

2.7.1. Inersor Piñon Cremallera

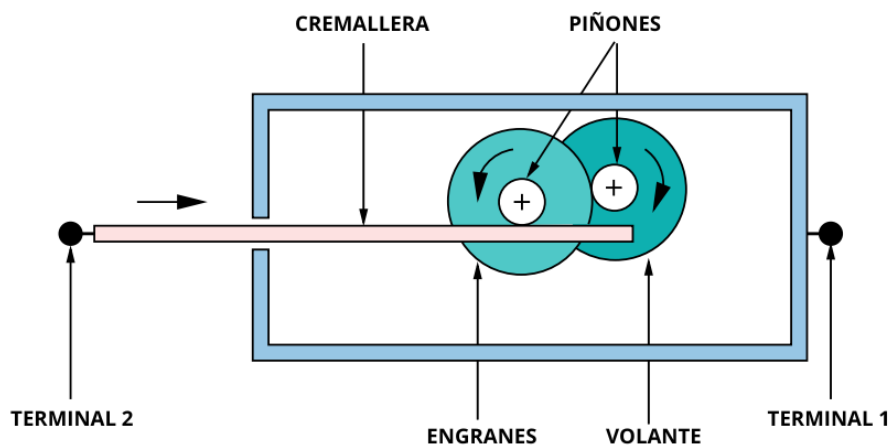


Figura 2.22: Esquema del modelo mecánico del inersor piñon-cremallera [28].

En la Figura 2.22 se presenta la configuración del inersor piñon cremallera, el cual está integrado principalmente por cremallera, piñones, engranes, volante y terminales.

También, se presenta en la Figura 2.23 una implementación física del inersor piñón cremallera, realizado en la Universidad de Cambridge.

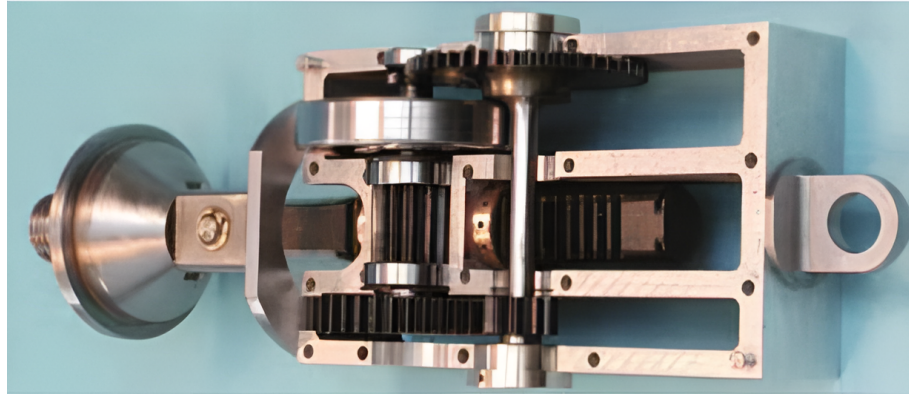


Figura 2.23: Implementación física del inersor realizada en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [28].

2.7.2. Inersor Husillo de Bolas

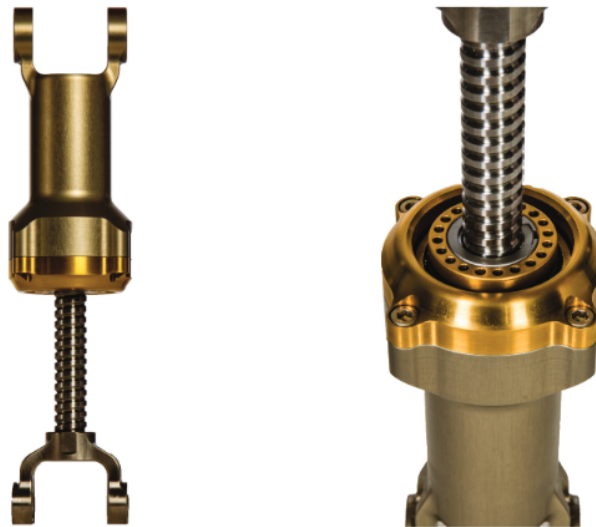


Figura 2.24: Inersor Husillo de Bolas [30]

El inersor husillo de bolas o ball-screw es un dispositivo de dos terminales integrado por una varilla roscada, una tuerca y un volante conectado rígidamente a la tuerca que puede girar dentro de la carcasa como se observa en las Figuras

2.24 y 2.25. La carcasa está unida a la terminal 1 y la varilla roscada a la terminal 2, y no pueden girar una respecto a otra [30].

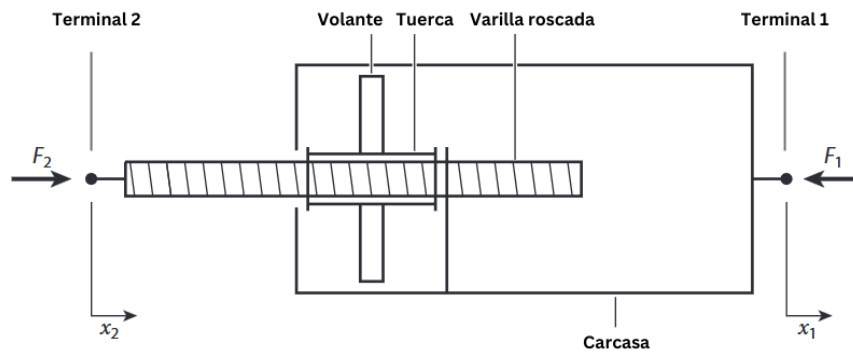


Figura 2.25: Esquema mecánico del inersor husillo de bolas [30].

2.7.3. Inersor Bomba de Engranajes

Las propiedades no lineales del inersor discutidas en [31] perjudicaron el rendimiento y beneficios alcanzados de las configuraciones del inersor. Por ello, se desarrolló el inersor bomba de engranajes (ilustrado en la Figura 2.26), utilizando elementos hidráulicos con el fin de incorporar un mayor nivel de amortiguación natural [32] [33].

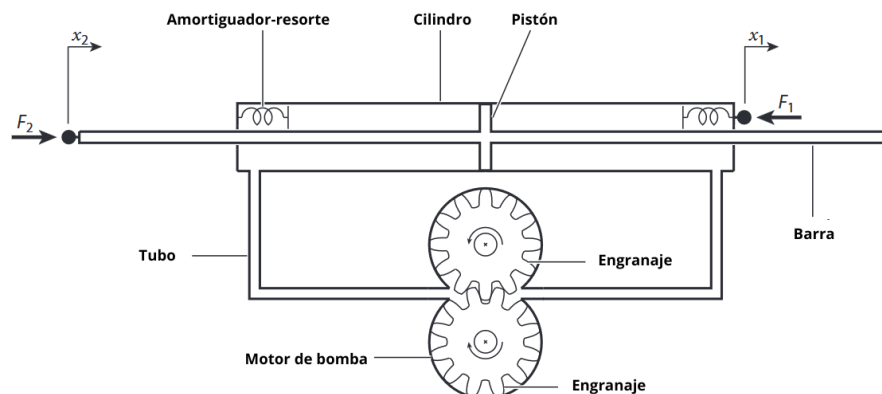


Figura 2.26: Esquema mecánico del inersor bomba de engranajes [30].

2.7.4. Inersor Hidráulico

En la Figura 2.27 se ilustra el inersor inspirado en la configuración bomba de engranajes, en 2010 se realizó un prototipo de inersor hidráulico.

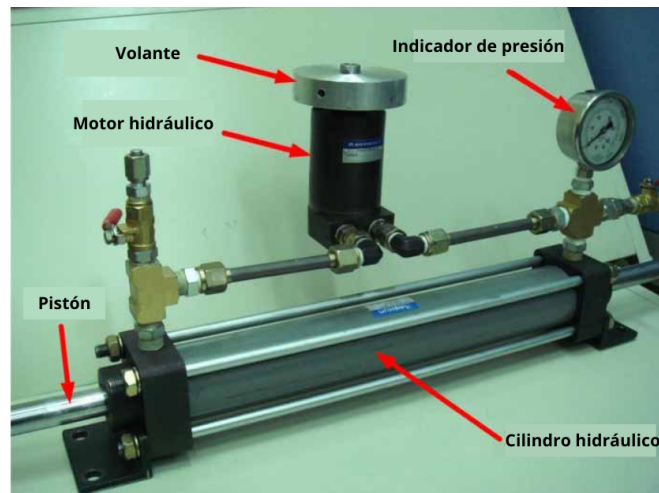


Figura 2.27: Prototipo de inersor hidráulico [33].

2.7.5. Inersor de Fluido

En el inersor de fluido, el flujo del canal helicoidal actúa como un volante de inercia, suministrando la fuerza inercial necesaria.

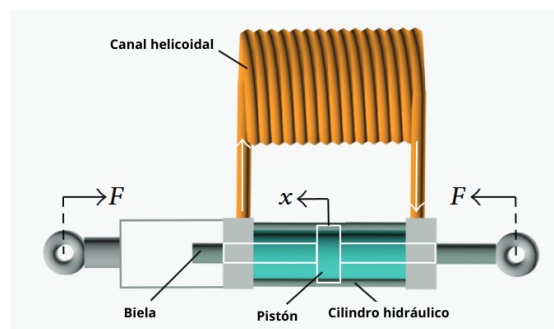


Figura 2.28: Prototipo de inersor de fluido [34].

La Figura 2.28 muestra que el cilindro hidráulico y la varilla del pistón actúan como los nodos o terminales del inersor. Por otro lado, cuando el pistón empuja el fluido en la parte izquierda del cilindro hidráulico, el fluido es forzado a través

del canal helicoidal hacia la parte derecha del cilindro. Este flujo a través del canal helicoidal ayuda a compensar la pérdida de presión, generando la respuesta inercial característica del sistema [34].

2.7.6. Inersor Rotacional

El inersor rotacional es un dispositivo mecánico rotacional de dos nodos, con la propiedad de que los pares iguales y opuestos $T(t)$ en los nodos son proporcionales a la aceleración angular relativa entre ellos [30]. Dicho inersor se ilustra en la Figura 2.29.

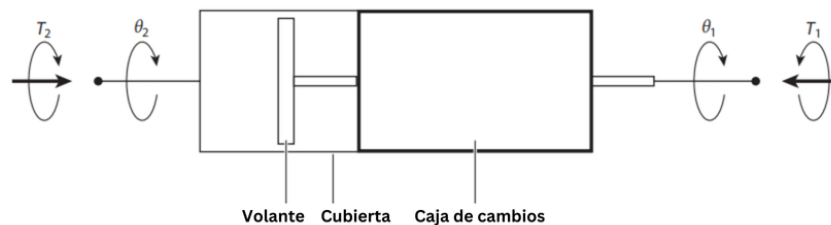


Figura 2.29: Diagrama mecánico del inersor rotacional [30].

2.8. REDES MECÁNICAS CON INERSOR

Una red mecánica convencional consta de elementos como masas, resortes y amortiguadores unidos rígidamente, entre dos nodos (terminales) a y b . Hu y Chen [28] realizaron un estudio donde el uso de inersores en redes mecánicas mejora en la supresión de vibraciones, comparándolos con las redes mecánicas resorte-amortiguador.

Entre dos nodos pueden existir distintas configuraciones de redes mecánicas. Las combinaciones de amortiguador, resorte e inersor para control de vibraciones resultaron en 8 redes mecánicas efectivas, presentadas en la Figura 2.30.

C1 : Red mecánica integrada por un inersor y un amortiguador en paralelo.

C2 : Red mecánica integrada por un inersor y un amortiguador en serie.

C3 : Red mecánica integrada por un resorte, un inersor y un amortiguador en serie.

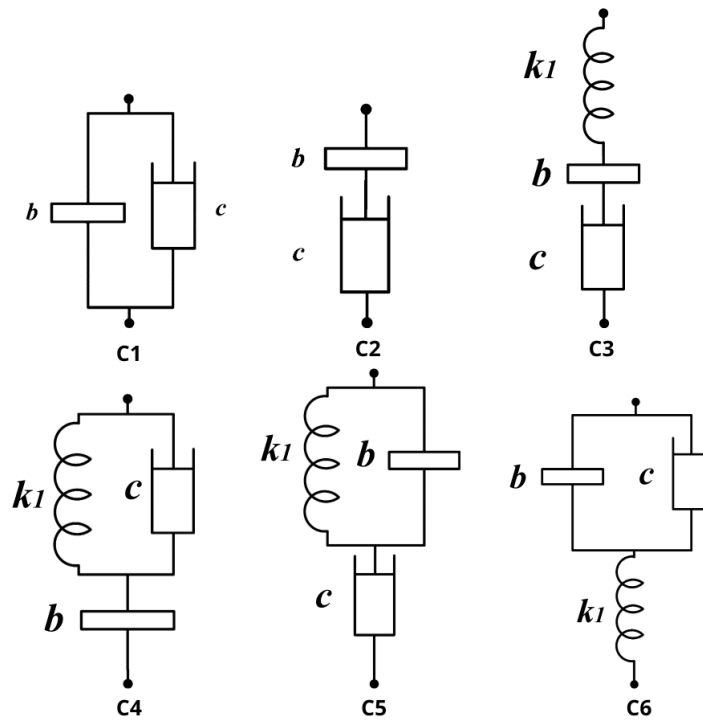


Figura 2.30: Redes mecánicas basadas en inersor [28].

C4 : Red mecánica integrada por un resorte y un amortiguador en paralelo, en serie con un inersor.

C5 : Red mecánica integrada por un resorte y un inersor en paralelo, en serie con un amortiguador.

C6 : Red mecánica integrada por un inersor y un amortiguador en paralelo, en serie con un resorte.

Liu et. al. [35] implementaron dichas redes mecánicas en el modelo de un

cuarto de vehículo. Debido a que el inersor y el amortiguador no poseen la característica de carga estática, estas 8 redes mecánicas tienen un mejor desempeño en el modelo de un cuarto de vehículo, añadiendo un resorte en paralelo a cada red mecánica. Así, se obtuvieron las 8 redes mecánicas optimizadas, ilustradas en la Figura 2.31.

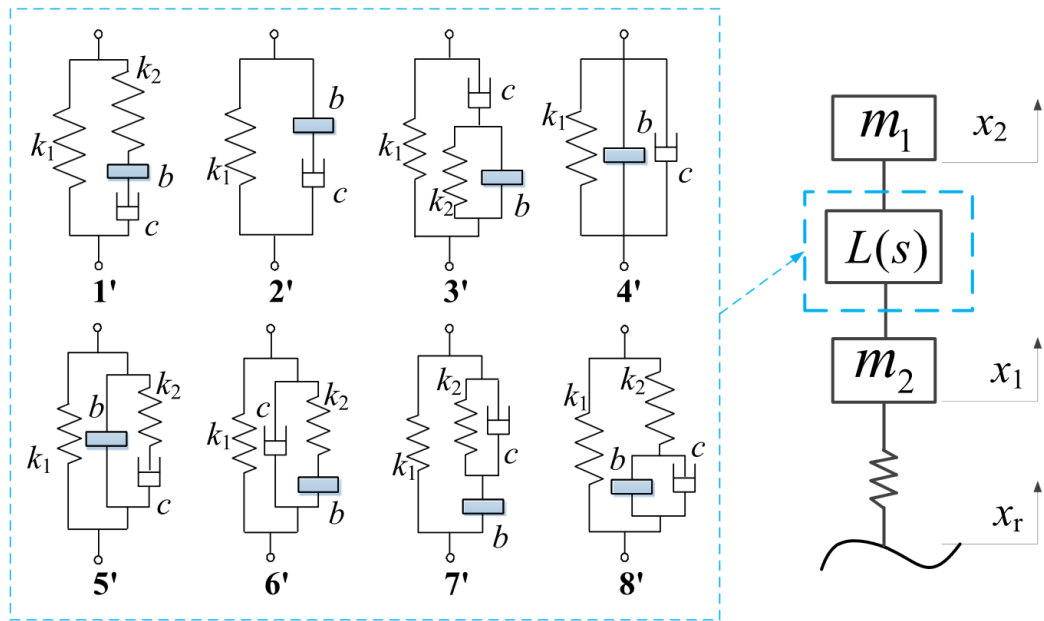


Figura 2.31: Ocho redes mecánicas optimizadas. [36].

2.9. IDVA

Un Absorbedor Dinámico de Vibraciones basado en Inersor (IDVA), es la sustitución de una red mecánica basada en inersor, en el lugar del amortiguador de un Absorbedor Dinámico de Vibraciones Tradicional (TDVA), como se observa en la Figura 2.32.

Hu y Chen propusieron tres configuraciones de IDVAs, C3, C4 y C6 [37].

IDVA - C3: integrado por un resorte, un inersor y un amortiguador en serie.

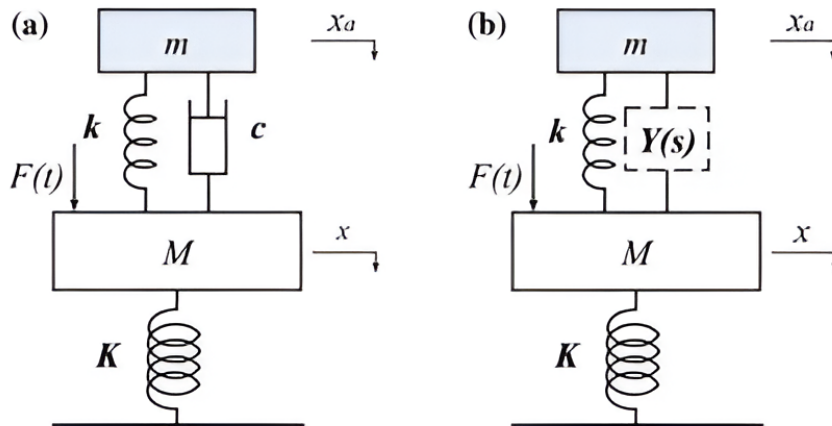


Figura 2.32: a) TDVA, b) IDVA [28].

IDVA - C4: consta de un inerte en serie con una conexión en paralelo de un resorte y un amortiguador.

IDVA - C6: formado por un resorte en serie con una conexión en paralelo de un inerte y un amortiguador.

Se demostró que el desempeño de estas configuraciones tiene una mejora de más del 20 % implementando el método H_∞ , en comparación con el TDVA. Añadiendo que, gracias al inersor existe un amplio rango de frecuencias efectivas para estos absorbedores.

A continuación se presenta evidencia gráfica de la supresión de vibraciones con IDVAs, mediante el método H_∞ .

Los IDVAs C4 y C6 tienen una respuesta en frecuencia similar al IDVA C3, en la Figura 2.33 se presenta la respuesta en frecuencia del IDVA-C4. Por lo tanto, los IDVAs presentan una curva de la respuesta en frecuencia, reducida en comparación con los dos primeros DVAs.

En el caso del IDVA C5, la respuesta en frecuencia del sistema sigue permaneciendo alta, en comparación con los IDVAs C3, C4 y C6.

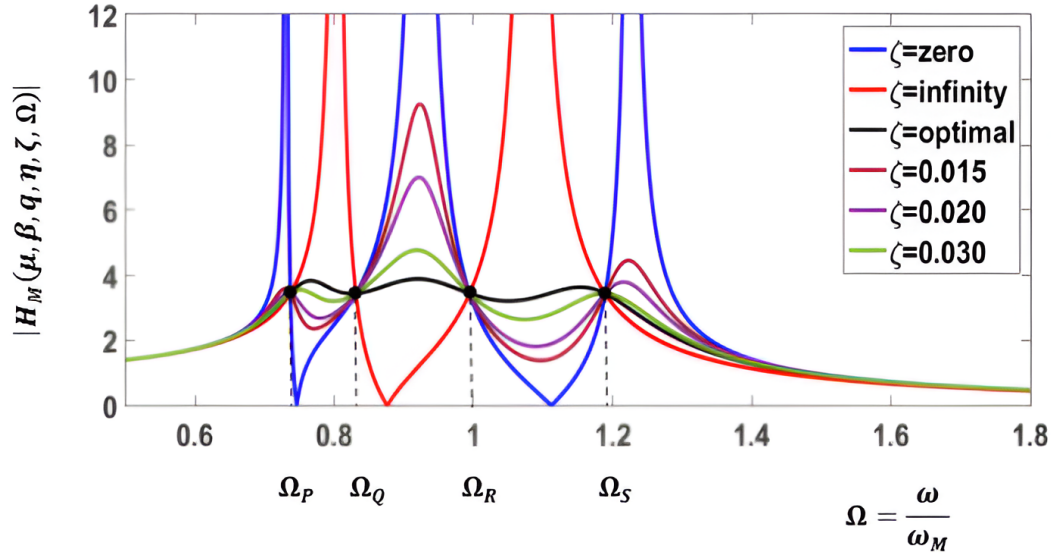


Figura 2.33: Respuesta en frecuencia del IDVA-C4 [38].

Por ello, se eligieron estas tres configuraciones para implementarlas en aplicaciones de control de vibraciones, como en suspensiones de vehículos, vigas y cables.

Por otro lado, Barredo et. al [38] presenta la técnica de los puntos fijos extendida, con la finalidad de encontrar soluciones analíticas para los IDVAs C3, C4 y C6. La técnica de los puntos fijos extendida permitió encontrar expresiones matemáticas de forma cerrada, obteniendo los parámetros óptimos para los IDVAs C3, C4 y C6.

En la Figura 2.34 se observa que la curva de la respuesta en frecuencia del sistema, disminuye con el amortiguamiento óptimo obtenido mediante la técnica de los puntos fijos extendida. Del mismo modo muestra los resultados del método H_∞ .

Comparando con la técnica de optimización H_∞ , en la Figura 2.34 se observa que las curvas son similares.

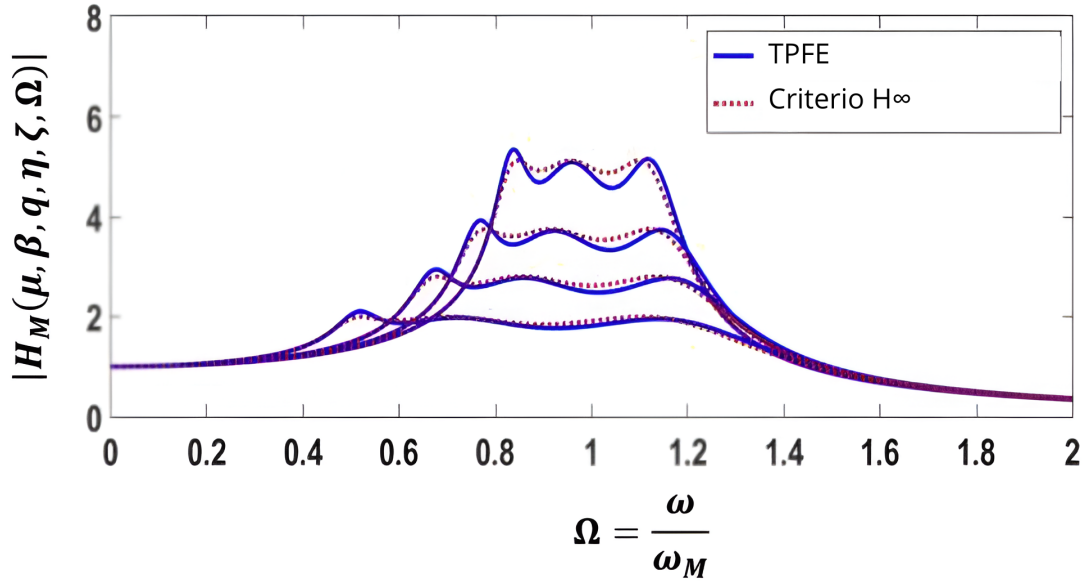


Figura 2.34: Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica de optimización H_∞ de las curvas de la respuesta en frecuencia del NIDVA C4 [38].

Concluyendo que la técnica de optimización H_∞ tiene mejores resultados para valores β menores a 0,1. Además, en [38] se demostró que, con la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida es posible obtener ecuaciones simplificadas para el diseño de los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor.

Sin embargo, a pesar de las mejoras y beneficios de los IDVAs, la relación de masas fija sigue siendo un obstáculo para su desempeño.

2.10. NIDVA

Debido a la limitante de los IDVAs, Zhou et al. idearon un IDVA no tradicional, que consta de la red mecánica C3 conectada entre la masa del DVA clásico y el suelo (en lugar de estar conectado al sistema primario) [39], como se ilustra en la

Figura 2.35. Este dispositivo fue inspirado en los DVAs no tradicionales (NDVAs) que introdujo Ren en 2001 [19].

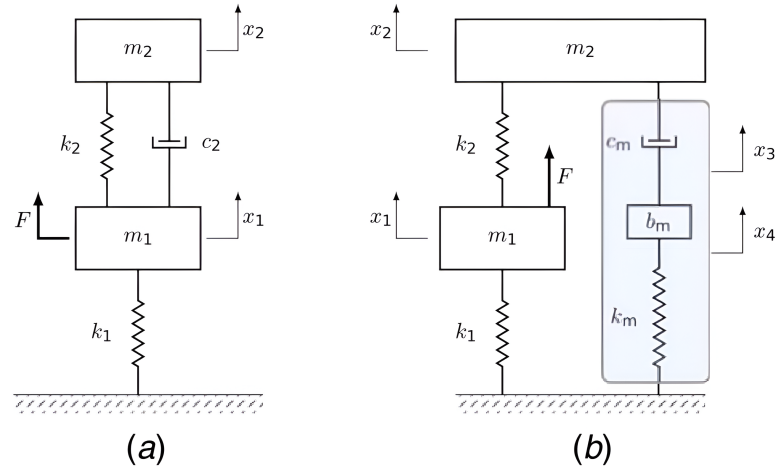


Figura 2.35: a) TDVA, b) NIDVA-C3 [39].

Se demostró que el absorbedor dinámico de vibraciones basado en inersor (IDVA-C3) y el absorbedor dinámico de vibraciones basado en inersor no tradicional (NIDVA-C3), implementando la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT), tienen un comportamiento similar en el control de vibraciones, Figura 2.36.

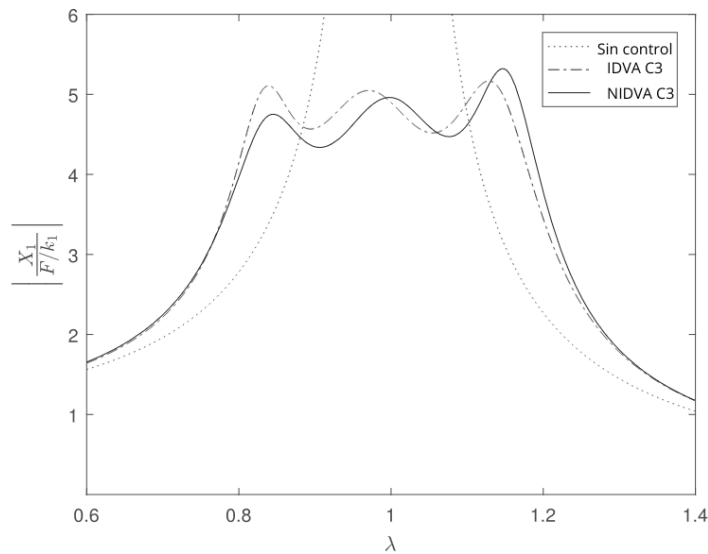


Figura 2.36: Respuesta en frecuencia normalizada del sistema primario, optimizado mediante la técnica de los puntos fijos extendida, cuando $\mu = 0,05$ [39].

Sin embargo, el NIDVA C3 puede atenuar las perturbaciones transitorias con mayor rapidez. Debido a que, cuando se optimiza mediante el criterio de maximización de estabilidad, el NIDVA C3 presenta valores mayores en sus índices de desempeño, comparado con el IDVA C3.

Por lo tanto, se mostró cómo el NIDVA tiene ventaja sobre el IDVA y el DVA tradicional. Pues, con el NIDVA se logra una reducción del 29.1 % en la amplitud máxima de vibración de la respuesta en frecuencia del sistema primario, y una reducción del 14 % en la longitud de carrera del absorbedor, en comparación con el TDVA (mediante el criterio de maximización de estabilidad) [39].

Más tarde, Barredo et al. presentaron un diseño de absorbedor dinámico de vibración basado en inersor no tradicional utilizando la red mecánica C4, NIDVA-C4 [40].

En la Figura 2.37 se observa que el NIDVA-C4 fue inspirado en el TID (amortiguador sintonizado con inersor) conectado a tierra.

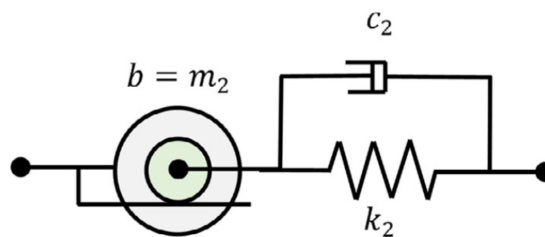


Figura 2.37: Red mecánica C4 o TID [40].

Optimizando el dispositivo NIDVA-C4, presentado en la Figura 2.38, mediante la técnica de los puntos fijos, se demostró que se obtienen mejoras en el rendimiento dinámico del 2-15 % y del 23-33 % comparando el NIDVA-C4 con el IDVA-C6 y el DVA clásico, respectivamente.

En cambio, el rendimiento dinámico del NIDVA-C3 con respecto al IDVA-C6 y al DVA clásico es del 1-6 % y del 22-26 %, respectivamente.

Luego, se calculó el índice máximo de supresión de banda para NIDVA-C4 como 16 % y 50 % con respecto al IDVA-C6 y al DVA clásico. Por lo tanto, el

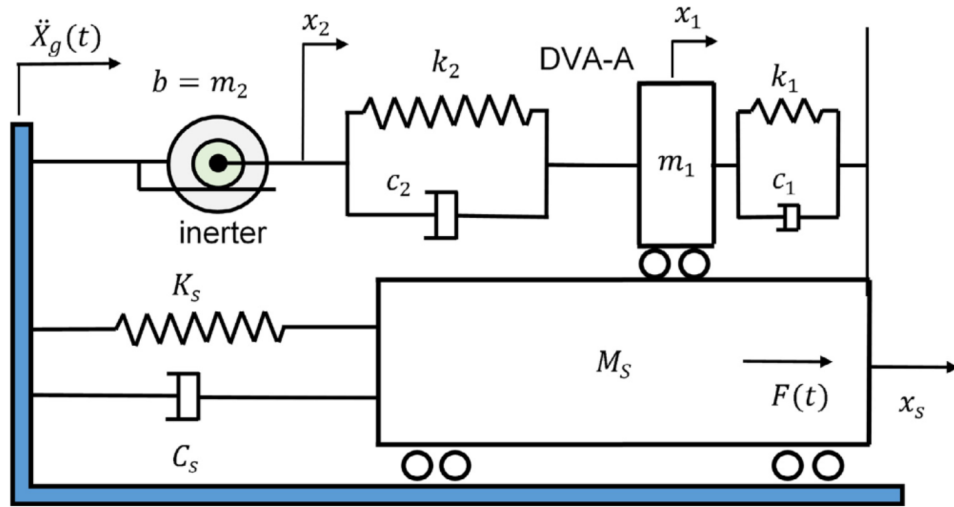


Figura 2.38: Dispositivo de alto rendimiento NIDVA-C4 [40].

NIDVA-C4 de alto rendimiento supera a NIDVA-C3, y en consecuencia a los IDVAs y al DVA clásico, como se observa en la Figura 2.39.

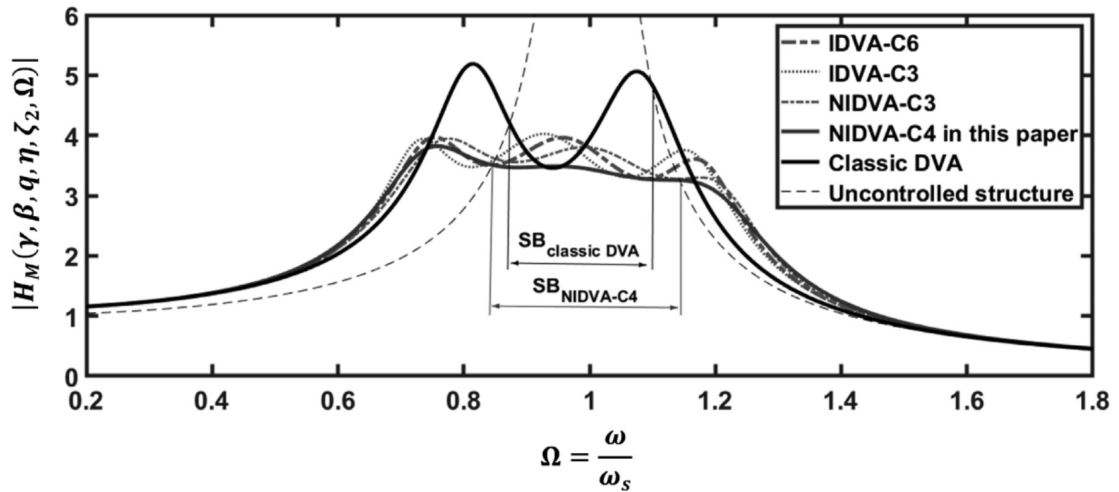


Figura 2.39: Gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema mediante la técnica de los puntos fijos [40].

Sin embargo, la implementación del dispositivo propuesto no es tan común como el uso de absorbedores dinámicos de vibraciones basados en inersor ya que, el NIDVA-C4 solo puede usarse para mitigar vibraciones en estructuras de ingeniería civil o estructuras mecánicas estacionarias, según lo concluido en [40]. Debido a esta limitante, en este proyecto se proponen los modelos NIDVA C3,

C4 y C6 implementados en sistemas rotodinámicos. Específicamente para un sistema rotor cojinete tipo Jeffcott.

2.11. NIDVAs EN ROTOR TIPO JEFFCOTT

Con el fin de atender la limitante de NIDVAs de solo poder implementarse en sistemas estacionarios y al mismo tiempo minimizar la curva de la función de respuesta en frecuencia (FRF) en sistemas rotodinámicos. En esta investigación se realiza la implementación y optimización de los NIDVAs C3, C4 y C6, en un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott, mediante la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT) y la técnica de optimización H_∞ .

A continuación, se presentan los esquemas mecánicos de los modelos NIDVA C3, C4 y C6 aplicados en un rotor tipo Jeffcott, ilustrados en las Figuras 2.40, 2.41 y 2.42.

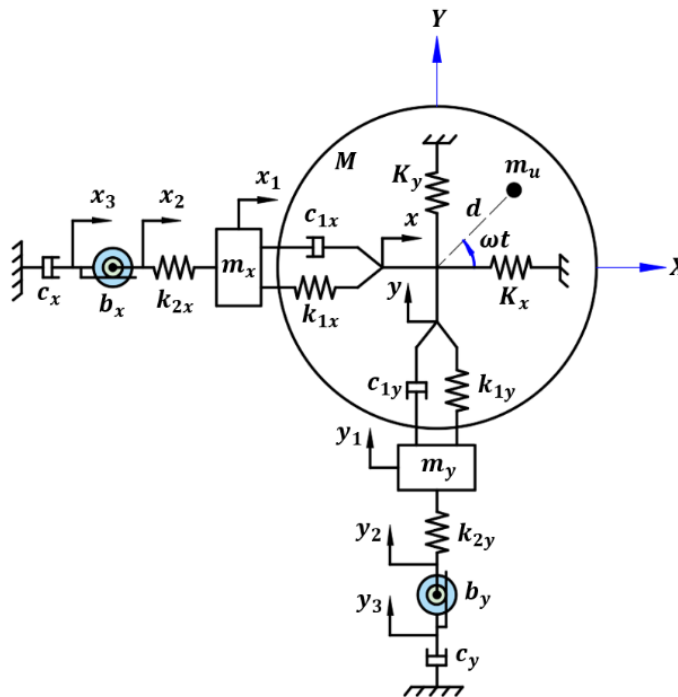


Figura 2.40: NIDVA-C3 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

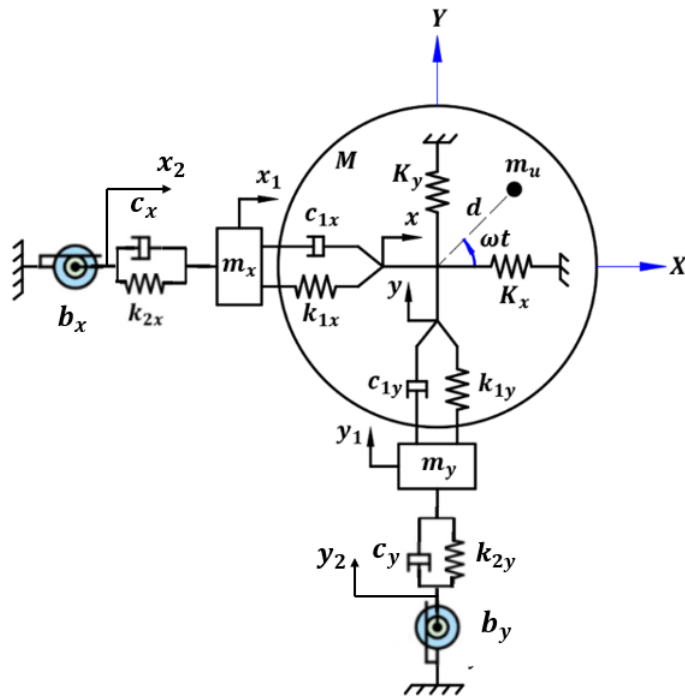


Figura 2.41: NIDVA-C4 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

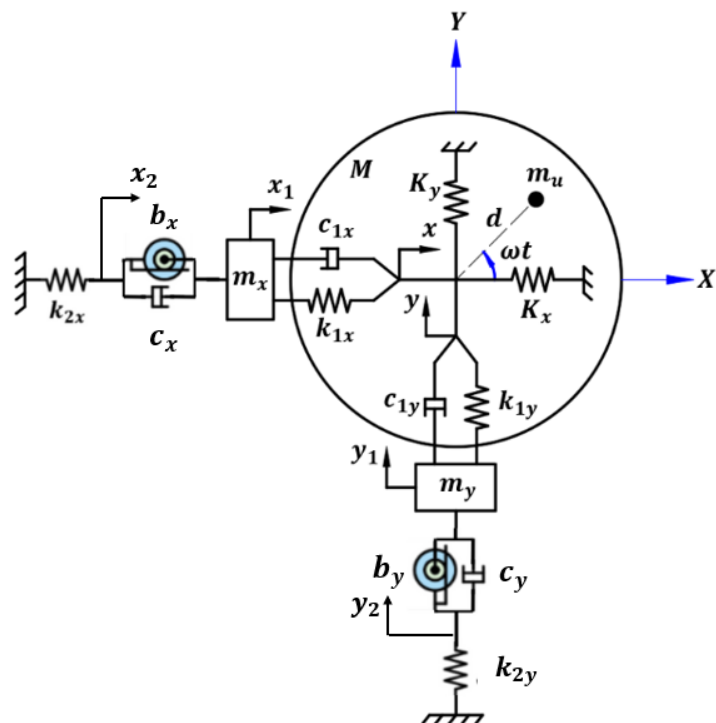


Figura 2.42: NIDVA-C6 en Sistema Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

3.1. ANÁLISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional permite estudiar las relaciones entre distintas magnitudes físicas, mediante unidades fundamentales. Las dimensiones de una magnitud física (mecánica) son expresadas en términos de tres cantidades elementales: longitud (L), masa (M) y tiempo (T), expresadas en unidades de metros (m), kilogramos (kg) y segundos (s), respectivamente, según el sistema internacional de unidades (SI) [41].

El fundamento del análisis dimensional es garantizar que ambos lados de una ecuación tengan las mismas dimensiones. Por ejemplo para la ecuación de movimiento rectilíneo uniforme $x = v \cdot t$, la comprobación de sus dimensiones es la siguiente,

$$[L] = [LT^{-1}][T] \quad (3.1)$$

$$[L] = [L] \quad (3.2)$$

Por lo tanto, la ecuación es físicamente consistente.

De esta manera, el análisis dimensional permite convertir unidades de una magnitud a otra, deducir fórmulas y comprobar errores en ecuaciones.

A continuación se observa en la Tabla 3.1 algunas variables físicas, sus dimensiones y abreviaturas, expresadas en términos de las dimensiones fundamentales L, M, T.

Variable física	Dimensión	Abreviatura
velocidad	$\frac{\textit{longitud}}{\textit{tiempo}}$	LT^{-1}
aceleración	$\frac{\textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	LT^{-2}
densidad	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{longitud})^3}$	ML^{-3}
fuerza	$\frac{\textit{masa} \cdot \textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	MLT^{-2}
trabajo	$\frac{\textit{masa} \cdot (\textit{longitud})^2}{(\textit{tiempo})^2}$	ML^2T^{-2}
amortiguamiento	$\frac{\textit{masa}}{\textit{tiempo}}$	MT^{-1}
rigidez	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{tiempo})^2}$	MT^{-2}

Tabla 3.1: Dimensiones y abreviaturas de algunas variables físicas, en unidades del SI [17].

Así, el análisis dimensional permite la comprensión de los fenómenos físicos sin necesidad de realizar experimentos directos, el desarrollo de modelos teóricos y la simplificación de problemas complejos. Su aplicación es esencial en el desarrollo de nuevas ecuaciones, la validación de fórmulas y la resolución de problemas en diversas áreas científicas y tecnológicas.

3.2. TEOREMA Π DE BUCKINGHAM

Teorema π de Buckingham, también conocido como *el método de repetición de variables*. Introducido por el científico ruso Dimitri Riabouchinski en 1911, dicho teorema se popularizó en 1912 por los estudios del ingeniero Edgar Buckingham.

El teorema π de Buckingham es parte fundamental del análisis dimensional, pues dicho teorema permite describir un fenómeno físico con una cantidad menor o igual de parámetros físicos, en comparación con los parámetros adimensionales involucrados inicialmente [42].

Teorema 1. Si q_1, q_2, \dots, q_n son n variables físicas involucradas en un problema particular y si existe entre dichas variables una relación funcional de la forma:

$$\phi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0. \quad (3.3)$$

Entonces, las n variables se pueden combinar para formar exactamente $(n - j)$ variables adimensionales independientes, donde j es el rango de la matriz dimensional.

Cada variable adimensional es llamada un número Π o factor adimensional. El símbolo Π se utiliza debido a que las variables adimensionales se pueden escribir como un producto de las variables q_1, q_2, \dots, q_n elevadas a alguna potencia [42].

Entonces, reescribiendo la ecuación 3.3 se tiene,

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0. \quad (3.4)$$

La ecuación que permite calcular los números Π_i es:

$$\Pi_i = VD_i \prod_{k=1}^j V^{a_k} F_k, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n - j. \quad (3.5)$$

Donde VD son las variables físicas relevantes en el problema y VF son las variables dinámicas que hacen las veces de variables fundamentales (variables repetidas) y los a_k se escogen de manera tal que cada Π_i sea adimensional. Finalmente, se puede establecer una relación entre los números Π_i , de la forma:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-j}) \quad (3.6)$$

La forma arbitraria de escoger las variables repetidas lleva a diferentes conjuntos de factores adimensionales; sin embargo, en cada caso $(n - j)$ son independientes y, de acuerdo con el álgebra lineal, forman un conjunto completo.

3.3. ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de Euler-Lagrange surgieron a raíz de la idea de que la evolución de un sistema puede determinarse minimizando una integral, denominada *integral de acción*. En esta integral, el integrando es conocido como la lagrangiana \mathcal{L} , y hace referencia a la diferencia entre las energías cinéticas y las energías potenciales asociadas al sistema en estudio [17] [43]. Debido a esto, el formalismo de Lagrange y el principio de Hamilton son las bases de la mecánica clásica.

El principio de Hamilton establece que la evolución de un sistema físico se determina con ayuda de un principio variacional, que se basa en la lagrangiana \mathcal{L} del sistema, la cual contiene toda la información sobre las variables del sistema y las fuerzas que actúan sobre él [44].

De este modo, las ecuaciones que rigen el movimiento de un sistema mecánico se obtienen mediante el método Euler-Lagrange. A continuación, se presenta la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas mecánicos conservativos.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.7)$$

Donde L es el lagrangiano y q_i es la i -ésima variable generalizada del sistema. Luego, el lagrangiano es la resta de la energía cinética T menos la energía potencial U del sistema.

$$L = T - U \quad (3.8)$$

Por otra parte, para sistemas no conservativos la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i - \frac{\partial D_i}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.9)$$

Donde F_i representa la i -ésima fuerza ejercida sobre el sistema, y D_i es la disipación de energía del sistema [45].

3.4. TEOREMA DE VIETA

El Teorema de Vieta, formulado por François Viète en el siglo XVI, es una serie de relaciones entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces. Este teorema es fundamental en el campo del álgebra y proporciona herramientas útiles para el análisis de polinomios.

Mediante el teorema de Vieta, es posible resolver ecuaciones complejas, encontrar raíces faltantes y construir ecuaciones polinómicas a partir de sus raíces.

En el teorema de Vieta, se considera un polinomio mónico (donde el coefi-

ciente del término de mayor grado es igual a 1, ($a_n = 1$), de la forma [46]:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (3.10)$$

En la ecuación (3.10) existen n raíces x_1, x_2, \dots, x_n . Dichas raíces se pueden encontrar en los términos independientes del polinomio: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Relacionando las raíces con los términos independientes, se tiene:

$$a_{n-1} = -(x_1 + \cdots + x_n) \quad (3.11)$$

$$a_{n-2} = (x_1 x_2 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) \quad (3.12)$$

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j} \quad (3.13)$$

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n \quad (3.14)$$

En el caso de un polinomio mónico cuártico, de la forma:

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.15)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.15) pueden ser expresados en función de las sumas y productos de sus raíces x_1, x_2, x_3, x_4 , presentados a continuación:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.16)$$

$$a_2 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \quad (3.17)$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \quad (3.18)$$

$$a_0 = x_1x_2x_3x_4 \quad (3.19)$$

3.5. OPTIMIZACIÓN

La optimización es un proceso que se centra en identificar y mejorar la respuesta frente a un problema. Los problemas de optimización se clasifican en lineales y no lineales.

Los problemas de optimización principalmente se integran por:

- Un conjunto de restricciones.
- Un conjunto de soluciones factibles que tenga todas las combinaciones posibles de valores de variables independientes que satisfacen el conjunto de restricciones.
- Una función objetivo, que vincula las soluciones factibles con el desempeño/rendimiento del sistema [47].

En problemas de optimización, es importante identificar las primeras y segundas derivadas de la función en estudio. La información que se obtiene al calcular la primera derivada de una función es:

- Proporciona una trayectoria de máxima inclinación de la función objetivo.
- Indica si se ha alcanzado la trayectoria óptima.

Y la información obtenida a través de la segunda derivada es:

- Indicará si es un máximo cuando $f''(x)$ es negativa o un mínimo cuando $f''(x)$ es positiva [48].

3.6. TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS

La técnica de los puntos fijos fue presentada por Den Hartog y tiene la finalidad de minimizar la amplitud máxima de la respuesta adimensional de un sistema mecánico en los puntos invariantes [49].

Esta técnica de optimización se basa en dos condiciones de amortiguamiento, cuando $\zeta \rightarrow 0$ y, cuando $\zeta \rightarrow \infty$, como se observa en la Figura 3.1.

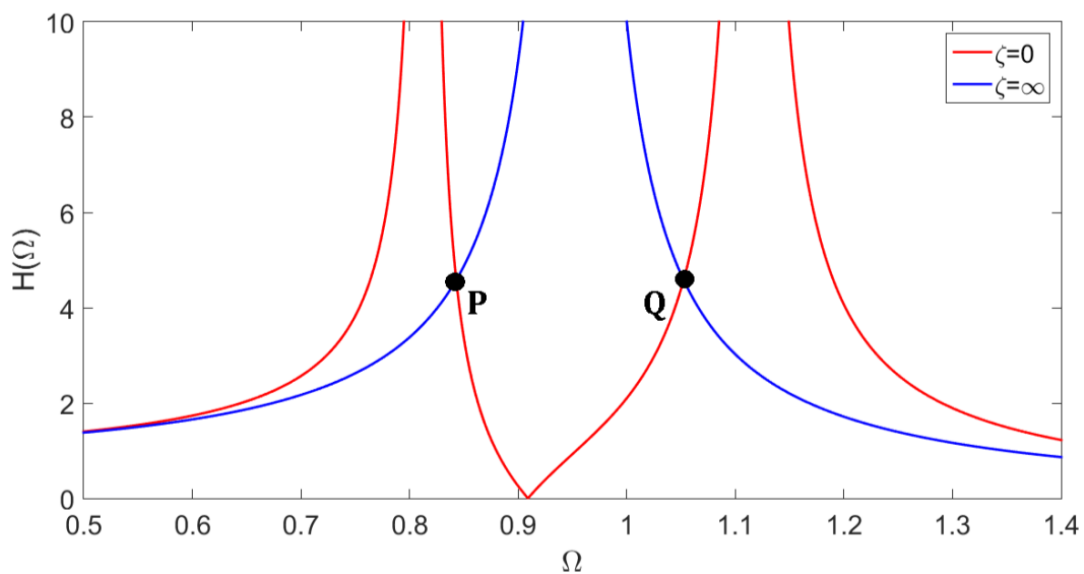


Figura 3.1: Gráfica del comportamiento del sistema cuando los coeficientes amortiguamiento de un DVA son: $\zeta \rightarrow 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$ [17].

Mediante dichas condiciones de amortiguamiento, se obtienen los puntos fijos o puntos invariantes que se determinan a través de la respuesta en estado estable del sistema.

Den Hartog establece que todas las curvas pasan a través de los puntos fijos y son independientes del amortiguamiento.

Esto quiere decir que todas las funciones de respuesta en frecuencia del sistema intersectan estos puntos fijos, sin importar cuánto varíe el amortiguamiento, como se observa en la Figura 3.2.

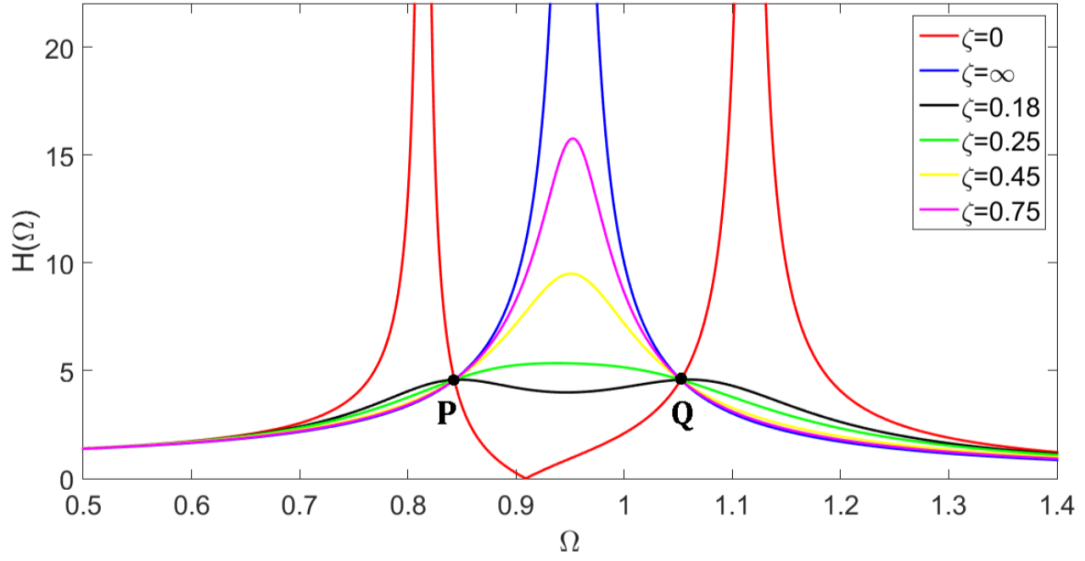


Figura 3.2: Gráfica de la FRF del sistema primario de un DVA clásico, considerando distintos coeficientes de amortiguamiento [17].

Esta técnica se emplea con el fin obtener los parámetros óptimos mediante un tratamiento matemático y así, encontrar la curva FRF óptima del sistema, la cual será la curva más plana en todo el rango de frecuencias de excitación.

3.7. TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA

La técnica de los puntos fijos extendida (EFPT), desarrollada por Barredo et. al. [38], es empleada para el desarrollo de expresiones algebraicas de forma cerrada con el fin de obtener el diseño óptimo de absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor.

La técnica de optimización de los puntos fijos extendida se basa en ajustar los puntos invariantes del sistema para determinar parámetros óptimos. Estas variables están vinculadas a la respuesta del sistema $R(s)$ y a su norma euclidiana $\|H\|$. Su representación matemática es la siguiente:

$$R(s) = \|H\| \quad (3.20)$$

A continuación se presenta la metodología a seguir en esta técnica de optimización.

1. Obtener el modelo matemático del sistema, la ecuación de movimiento resultante se encontrará en el dominio s de Laplace.

2. Encontrar la función de transferencia $H(s)$ del sistema, llamada también la respuesta $R(s)$ del sistema, ecuación (3.20).

3. Sustituir la siguiente expresión $s = jw$, en la función de transferencia $H(s)$.
Donde j representa la unidad imaginaria. Debido a que solo nos interesa la respuesta en estado estable del sistema.

4. Reescribir la función de transferencia $H(s)$, de la forma:

$$H(s) = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (3.21)$$

5. Definir las variables A, B, C, D y sustituir los parámetros encontrados con el teorema Pi de Buckingham.

6. Determinar el módulo de la ecuación $H(s)$ mediante la multiplicación del conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.22)$$

7. Implementar las condiciones de amortiguamiento $\zeta \rightarrow 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$.

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} |H(s)|^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.23)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |H(s)|^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.24)$$

8. Igualar las ecuaciones cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$.

9. Realizar el siguiente cambio de variable $\lambda = \Omega^2$ con el fin de reducir el grado de la ecuación.

10. Transformar la ecuación anterior en un polinomio mónico.

11. Obtener soluciones óptimas mediante el teorema de Vieta.

12. Encontrar valores numéricos de los parámetros óptimos, sustituyendo el valor de β .

13. Sustituir los valores de los parámetros óptimos en la aproximación de la norma H_∞ , que es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes $\|H_\infty\|$.

14. Determinar la solución óptima para el factor de amortiguamiento ζ_{opt} a partir de la teoría de Steen Krenk [50].

En la Figura 3.3 se puede observar que la técnica de los puntos fijos es más eficiente que la técnica de Den Hartog al aplanar la curva FRF y, por lo tanto, mejor en la supresión de vibraciones.

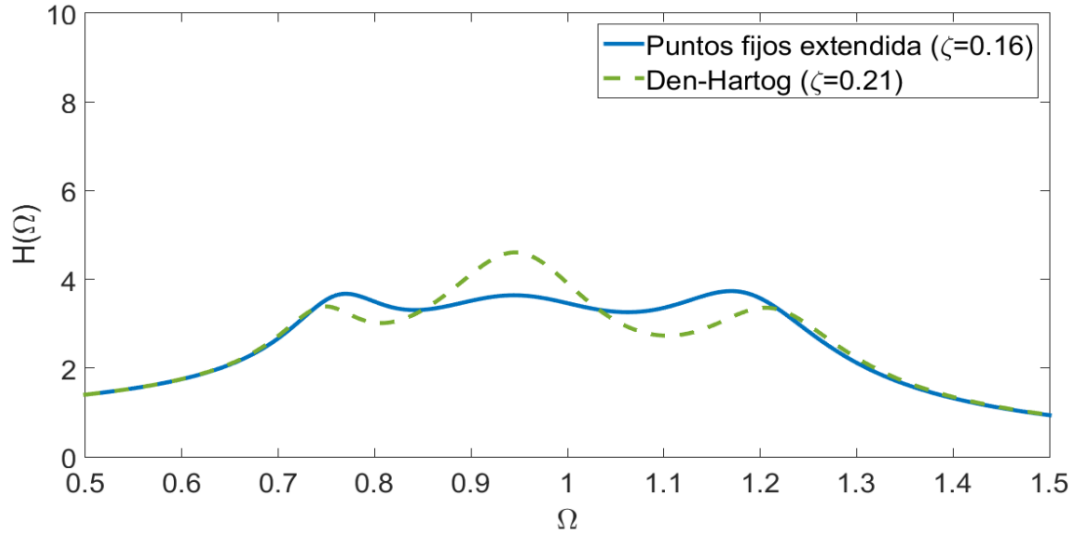


Figura 3.3: Gráfica de la FRF vs. la relación de frecuencias Ω del IDVA-C3, comparando la técnica de Den Hartog y la técnica de los puntos fijos extendida [38].

3.8. CRITERIO H_∞

Este criterio de optimización es para obtener soluciones efectivas para lograr estabilizar la respuesta vibratoria del sistema mediante el método de Nishihara [51]. Las admitancias para cada red mecánica basada en inersor se presentan en la Tabla 3.2.

$Y_1(s) = bs + c$	$Y_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{bs} + \frac{1}{c}}$	$Y_3(s) = \frac{1}{\frac{s}{k_1} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bs}}$
$Y_4(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1}{s} + c} + \frac{1}{bs}}$	$Y_5(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1}{s} + bs} + \frac{1}{c}}$	$Y_6(s) = \frac{1}{\frac{1}{bs+c} + \frac{s}{k_1}}$

Tabla 3.2: Admitancias $Y(s)$ para cada red mecánica basada en inersor [37].

La técnica de optimización H_∞ tiene el objetivo de minimizar la magnitud máxima de la respuesta en frecuencia del sistema $|H_i(j\lambda)|$, $i = 1, \dots, 6$, también

conocida como la norma H_∞ de $H_i(s)$ donde $s = j\lambda$ [37].

Esta técnica de optimización es común en la minimización de la respuesta vibratoria en DVA's. Esto garantiza que el sistema mantenga un desempeño estable ante incertidumbres y perturbaciones externas. Al minimizar la norma H_∞ se mejora la respuesta del estado estable del sistema. En consecuencia, se tiene el siguiente problema de optimización.

$$\min \left(\max_{P_{\text{opt}}} |H_{\text{IDVA}}(\Omega)| \right) = \max (|H_{\text{IDVA}}(P_{\text{opt}}, \beta, \Omega)|) \quad (3.25)$$

P_{opt} son parámetros a optimizar en el sistema y se limita a que sean soluciones reales y positivas $P_{\text{opt}} \geq 0$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial |H_{\text{IDVA}}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) se refiere al intervalo físico admisible para analizar la relación de frecuencias Ω y a las limitaciones físicas de diseño del dispositivo.

Para lograr la optimización en un sistema mediante esta técnica se emplean las frecuencias de resonancia para minimizar de forma exacta la norma $\|H_\infty\|$, como se observa en la Figura 3.4.

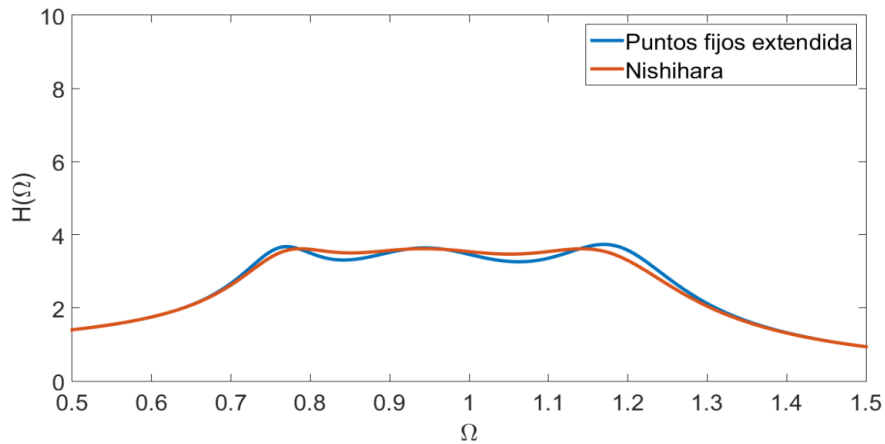


Figura 3.4: Gráfica de comparación de resultados entre la técnica de los puntos fijos y la técnica de optimización H_∞ [17].

Capítulo 4

MODELOS MATEMÁTICOS

Dentro de la ingeniería mecánica, un modelo matemático es la representación cuantitativa del comportamiento de sistemas físicos (por ejemplo: mecanismos, estructuras o fluidos) mediante expresiones matemáticas como funciones, ecuaciones algebraicas o ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales son de gran importancia debido a que, describen la variación de magnitudes como la fuerza, velocidad, temperatura o vibración a lo largo del tiempo. Por ejemplo, dichas ecuaciones permiten estudiar el comportamiento vibratorio de componentes como ejes giratorios en turbinas (ilustrada en la Figura 4.1), generadores o motores eléctricos.

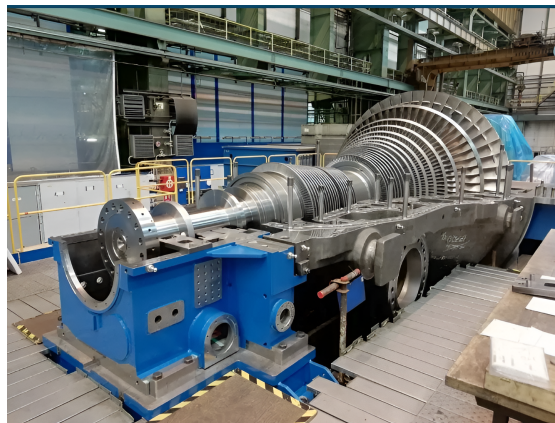


Figura 4.1: Aplicaciones de Rotor- Cojinete Tipo Jeffcott: Turbina industrial de vapor [49].

A continuación, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para describir el

análisis basado en la diferencia entre las energías cinética y potencial. Para ello, se define el Lagrangiano L como la diferencia entre la energía cinética total T y la energía potencial total U del sistema como se denota en la ecuación (3.8).

Se definen las variables D , T y U a partir de un análisis cinemático del sistema NIDVA-C3 en un rotor-cojinete tipo Jeffcott. Cabe aclarar que el análisis se realiza en una sola dirección, es decir en el eje y . Considerando que la función de disipación de Rayleigh se define $D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$, la energía cinética se expresa $Ec = \frac{1}{2} m v^2$ y que la energía potencial asociada a elementos elásticos se denota $Ep = \frac{1}{2} k x^2$, se obtiene:

$$D = \frac{1}{2} C_y (\dot{y} - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} C_y \dot{y}_3^2 \quad (4.1)$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M_y \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_y (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 \quad (4.2)$$

$$U = \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_y (y - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_{2y} (y_1 - y_2)^2 \quad (4.3)$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M_y \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_y (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 - \frac{1}{2} k_y y^2 - \frac{1}{2} k_{1y} (y - y_1)^2 - \frac{1}{2} k_{2y} (y_1 - y_2)^2 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -k_y y - k_y (y - y_1) \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = M \ddot{y} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = C_y (\dot{y} - \dot{y}_1) \quad (4.6)$$

Aplicando el Lagrangiano se obtiene la ecuación (4.4), luego evaluando la ecuación (3.9) en cada coordenada generalizada y, y_1, y_2, y_3 , da como resultado las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del sistema.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = M_y \ddot{y}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = k_{1y}(y - y_1) - k_{2y}(y_1 - y_2) \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = M_y \ddot{y}_1 \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = -C_{1y}(\dot{y} - \dot{y}_1) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = b_y(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = k_{2y}(y_1 - y_2) \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = b_y(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3) \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = -b_y(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \quad \frac{\partial L}{\partial y_3} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) = b_y(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3) \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} = C_y \dot{y}_3 \quad (4.12)$$

Luego, siguiendo la estructura de la ecuación (3.9) de Euler- Lagrange para sistemas no conservativos, se obtiene como resultado los siguientes grupos de ecuaciones, los cuales rigen el comportamiento dinámico del sistema, en el eje y y eje x respectivamente:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + C_y(\dot{y} - \dot{y}_1) + k_y y + k_{1y}(y - y_1) = 0 \\ m_y \ddot{y}_1 - C_y(\dot{y} - \dot{y}_1) - k_{1y}(y - y_1) + k_{2y}(y_1 - y_2) = 0 \\ b_y(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3) - k_{2y}(y_1 - y_2) = 0 \\ b_y(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3) + C_y \dot{y}_3 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{X} + C_x(\dot{X} - \dot{X}_1) + k_x X + k_{1x}(X - X_1) = 0 \\ m_x \ddot{X}_1 - C_x(\dot{X} - \dot{X}_1) - k_{1x}(X - X_1) + k_{2x}(X_1 - X_2) = 0 \\ b_x(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) - k_{2x}(X_1 - X_2) = 0 \\ b_x(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) + C_x \dot{X}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Nuevamente se elige una dirección de movimiento para seguir con el tratamiento matemático. En este caso se toma el modelo matemático que rige el comportamiento dinámico del NIDVA-C3 en el eje X de un rotor-cojinete tipo Jeffcott, ecuaciones (4.14).

Considerando que, la transformada de Laplace convierte las derivadas temporales en expresiones algebraicas de la variable compleja s de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) \quad (4.15)$$

Se procede a convertir el modelo matemático del NIDVA-C3, ecuación (4.14) al dominio de Laplace. Con ello se obtiene una representación algebraica (ecuaciones 4.15-4.18) que permiten analizar el comportamiento dinámico del sistema y determinar su función de transferencia.

$$Ms^2X + KX + K_1(X - X_1) = m_u d \omega^2 \quad (4.16)$$

$$ms^2X_1 + K_1(X_1 - X) + K_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (4.17)$$

$$bs^2(X_2 - X_3) + K_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (4.18)$$

$$bs^2(X_3 - X_2) + CsX_3 = 0 \quad (4.19)$$

$$Ms^2X + K_1(X - X_1) + KX = m_u d\omega^2 \quad (4.20)$$

$$ms^2X_1 + Cs(X_1 - X_2) + K_1(X_1 - X) + K_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (4.21)$$

$$bs^2X_2 + Cs(X_2 - X_1) + K_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (4.22)$$

En resumen, el modelo propuesto proporciona una herramienta eficaz para determinar el comportamiento dinámico del NIDVA-C4 bajo diversas condiciones de amortiguamiento. Su aplicación resulta fundamental para el diseño, la optimización y el control del sistema NIDVA-C4 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott.

4.3. NIDVA-C6

Considerando la Figura 4.4, para modelar el comportamiento dinámico de un sistema masa-resorte-amortiguador incorporado en un absorbedor dinámico de vibraciones no tradicional (NDVA), se utiliza la red mecánica C6, integrada por un inersor y un amortiguador en paralelo, en serie con un resorte.

A diferencia de otras configuraciones, como la red mecánica C3 o C4, la red mecánica C6 puede alcanzar un mejor desempeño en ciertos rangos de frecuencias o condiciones de operación, debido a su capacidad para redistribuir energía vibratoria entre los componentes del absorbedor. Esta característica influye directamente en la amplitud de vibración de la masa principal, permitiendo una mayor atenuación cuando el sistema es correctamente sintonizado.

De manera análoga al procedimiento seguido para obtener el modelo matemático del NIDVA C3, se desarrolla el modelo matemático correspondiente al NIDVA-C6 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott.

4.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

A diferencia de la ecuación diferencial, donde entrada, salida y dinámica del sistema están combinadas en una sola expresión, la función de transferencia permite representar estos elementos de manera clara y estructurada, facilitando su análisis por separado.

Después de convertir el modelo matemático del NIDVA-C3 al dominio de Laplace, se realizó el despeje y sustitución de las variables X_3 , X_2 y X_1 (en las ecuaciones 4.16-4.19), para poder despejar a X . Luego, la función de transferencia del sistema NIDVA-C3 se denota como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.26)$$

Los valores de $G(s)$, $Y(s)$ y $U(s)$ se encuentran en el apéndice A.

Después de realizar un análisis dimensional a la ecuación (4.26), se obtiene la función de transferencia del sistema de forma adimensional.

$$G(r) = \frac{N(r)}{D(r)} \quad (4.27)$$

Los valores de $G(r)$, $N(r)$ y $D(r)$ se encuentran en el apéndice A.

Del mismo modo, para obtener la función de transferencia del NIDVA-C4, se convierten las ecuaciones (4.20 - 4.22) al dominio de Laplace. Después de realizar despeje y sustitución, siguiendo el procedimiento utilizado en el NIDVA-C3, se obtiene la función de transferencia del NIDVA-C4 en rotor-cojinete tipo Jeffcott.

$$G_4(s) = \frac{Y_4(s)}{U_4(s)} \quad (4.28)$$

Los valores de $G_4(s)$, $Y_4(s)$ y $U_4(s)$ se encuentran en el apéndice A.

Luego, aplicando análisis dimensional a la ecuación (4.28) se tiene la siguien-

te ecuación, que es la función de transferencia del sistema de forma adimensional. Donde $G_4(r)$, $Y_4(r)$ y $U_4(r)$ se describen en el apéndice A.

$$G_4(r) = \frac{Y_4(r)}{U_4(r)} \quad (4.29)$$

En resumen, la función de transferencia del sistema con NIDVA-C4, implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, se obtiene mediante la transformación de las ecuaciones del modelo dinámico al dominio de Laplace, seguida de un proceso de despeje y sustitución análogo al utilizado para el NIDVA-C3. Posteriormente, al aplicar análisis dimensional, se expresa la función de transferencia en forma adimensional lo que permite generalizar el comportamiento dinámico del sistema independientemente de sus parámetros físicos específicos.

En el caso del NIDVA-C6 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, siguiendo el procedimiento anterior, se obtiene la función de transferencia:

$$G_6(s) = \frac{Y_6(s)}{U_6(s)} \quad (4.30)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del NIDVA-C6 de forma adimensional es:

$$G_6(r) = \frac{Y_6(r)}{U_6(r)} \quad (4.31)$$

Donde $G_6(s)$, $Y_6(s)$, $U_6(s)$, $G_6(r)$, $Y_6(r)$ y $U_6(r)$ se describen en el apéndice A.

4.5. RESPUESTA EN FRECUENCIA

La respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden, como un sistema masa-resorte-amortiguador, describe el comportamiento del sistema en estado estacionario cuando se le aplica una entrada sinusoidal. Esta respuesta permite analizar cómo varía la amplitud y fase de la salida en función de las diferentes frecuencias de dicha entrada [50].

Se sustituye $s = i\omega$ en la función de transferencia porque únicamente interesa conocer cómo responde el sistema una vez que ya pasó el movimiento transitorio, es decir, cuando el sistema ya se estabilizó y responde de forma constante a una señal senoidal.

Así, se obtiene la respuesta en frecuencia del sistema de forma adimensional y en el dominio de la frecuencia, ecuación (4.32) la cual rige el movimiento dinámico del sistema NIDVA-C3 en un rotor tipo Jeffcott.

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{U(i\omega)} \quad (4.32)$$

Los valores de $Y(i\omega)$ y $U(i\omega)$ se encuentran en el apéndice A.

Esta sustitución es válida porque, en este estado, el sistema vibra con una frecuencia fija ω , y analizarlo con $s = i\omega$ permite conocer la amplitud y fase de esa respuesta sin tomar en cuenta los efectos transitorios iniciales.

Luego, se definen las variables A, B, C, D, P, (apéndice A) para reescribir la ecuación de la forma:

$$H = \frac{(A + iB)P}{(C + iD)} \quad (4.33)$$

Posteriormente, se sustituyen los siguientes parámetros adimensionales obtenidos mediante el teorema Pi de Buckingham.

$$K = M \omega_1^2 \quad (4.34) \quad M = \frac{m}{\beta} \quad (4.39)$$

$$k_1 = m \omega_2^2 \quad (4.35) \quad \omega_3 = \omega_2 \eta \quad (4.40)$$

$$k_2 = b \omega_3^2 \quad (4.36) \quad \omega_2 = \omega_1 q \quad (4.41)$$

$$c = 2 \zeta m \omega_2 \quad (4.37) \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\Omega} \quad (4.42)$$

$$b = m \mu \quad (4.38)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.34-4.42) en las ecuaciones A, B, C, D, P, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{\eta^2 q^4} \quad (4.43)$$

$$B = -\frac{1}{2} \mu \Omega \cdot \frac{\Omega^2 - q^2}{\zeta q^3} \quad (4.44)$$

$$C = -\frac{\Omega^2 \beta \eta^2 \mu q^4 - \Omega^4 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^2 \beta \eta^2 q^4 - \Omega^4 \eta^2 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^4 - \Omega^4 \beta q^2 + \Omega^2 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2}{\eta^2 q^4} \quad (4.45)$$

$$D = \frac{1}{2} \mu \Omega \cdot \frac{-\Omega^2 \beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2}{\zeta q^3} \quad (4.46)$$

Así, se reescribe la ecuación (4.33) de la forma:

$$H(\Omega) = \frac{(A + iB) P}{C + iD} \quad (4.47)$$

Del mismo modo, siguiendo el procedimiento anterior se obtiene la respuesta en frecuencia de forma adimensional del NIDVA-C4 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, la cual rige su comportamiento dinámico.

$$H_4(\Omega) = \frac{(A_4 + iB_4) P_4}{C_4 + iD_4} \quad (4.48)$$

dónde los valores de A,B,C,D y P se encuentran en el apéndice A.

A continuación, se presenta la respuesta en frecuencia de forma adimensional del NIDVA-C6 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott.

$$H_6(\Omega) = \frac{(A_6 + iB_6) P_6}{C_6 + iD_6} \quad (4.49)$$

A,B,C,D y P se describen en el apéndice A.

En resumen, en este apartado se desarrollaron los modelos matemáticos de cada sistema, mediante el formulismo de Euler-Lagrange. También, se realizó la obtención de la función de transferencia de cada rotor-cojinete tipo Jeffcott con NIDVAs C3, C4 Y C6. Posteriormente, se calculó la respuesta en frecuencia de cada sistema, con el fin de conocer su comportamiento dinámico de forma adimensional y en el dominio de la frecuencia.

Capítulo 5

RESULTADOS

Implementando la técnica de los puntos fijos extendida, en este capítulo se presentan resultados numéricos de los parámetros óptimos de los sistemas NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6 en un rotor-cojinete tipo Jeffcott. De la misma manera, se considera la respuesta en estado estable del sistema y se analiza en solo una dirección de movimiento.

5.1. TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS EXTENDIDA

La técnica de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo et. al. [38] es una metodología analítica utilizada en el diseño óptimo de sistemas de control pasivo de vibraciones, particularmente en absorbedores de vibración dinámica. Se fundamenta en la teoría de puntos fijos aplicada a la función de transferencia del sistema acoplado, con la finalidad de minimizar la amplitud de respuesta del sistema primario frente a una excitación inercial, en este caso. De esta manera, se evalúa la respuesta del sistema en los puntos invariantes, cuando el amortiguamiento es igual a 0 e ∞ .

5.1.1. NIDVA-C3 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott

La técnica de los puntos fijos propuesta por Barredo[31], se enfoca en dos condiciones de operación. Cuando el amortiguamiento es cero $\zeta \rightarrow 0$ y cuando el amortiguamiento es infinito $\zeta \rightarrow \infty$.

$$H^2 = \frac{(A^2 + B^2)P^2}{C^2 + D^2} \quad (5.1)$$

A partir de los valores de amortiguamiento antes mencionados, se obtienen dos ecuaciones linealmente independientes de la ecuación (5.1).

Cuando $\zeta \rightarrow 0$:

$$H^2 = \frac{(A^2)P^2}{C^2} \quad (5.2)$$

Cuando $\zeta \rightarrow \infty$:

$$H^2 = \frac{(B^2)P^2}{D^2} \quad (5.3)$$

Se igualan las ecuaciones (5.2) y (5.3). Con la finalidad de eliminar los exponentes de segundo grado en ambos lados de la ecuación, se añade el signo \pm delante del signo igual.

$$\frac{(A^2)P^2}{C^2} = \pm \frac{(B^2)P^2}{D^2} \quad (5.4)$$

Evalutando la ecuación (5.4) con el signo positivo, y sustituyendo las variables A, B, C, D, P, se tiene la siguiente expresión:

$$-\Omega^2 \beta \eta^2 \mu q^6 = 0 \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) proporciona un resultado trivial cuando $\Omega = 0$, la ecuación indica que $\beta = 0, \eta = 0, \mu = 0, q = 0$.

Ahora, considerando la ecuación (5.4) con el signo negativo, resulta una ecuación que depende de $\beta, \eta, \mu, \Omega, q$ y se denota a continuación.

$$\Theta_1(\beta, \eta, \mu, \Omega, q) = 0 \quad (5.6)$$

Con el fin de reducir el grado de la ecuación (5.6), se realiza un cambio de variable $\lambda = \Omega^2$ y se convierte a polinomio mónico, dividiendo toda la ecuación entre el coeficiente del término de cuarto grado, así se obtiene la siguiente ecuación y se puede utilizar el Teorema de Vieta.

$$\Theta_{\lambda 1}(\beta, \eta, \mu, \lambda, q) = 0 \quad (5.7)$$

Ahora, considerando $h = H^2$, se toma la ecuación (5.3) para obtener el segundo polinomio mónico.

$$h = \frac{(B^2)P^2}{D^2} \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) se iguala a cero y después se le aplica el mismo procedimiento que a la ecuación (5.6), obteniendo lo siguiente:

$$\Theta_{\lambda 2}(\beta, \mu, \lambda, q, h) = 0 \quad (5.9)$$

El teorema de Vieta para un polinomio mónico establece una relación directa entre las raíces del polinomio y sus coeficientes. Además, las fórmulas de Vieta permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar los coeficientes de ese polinomio.

Secuencia 1:

La suma de las raíces reales de las ecuaciones cuárticas (5.7) y (5.9) se pueden expresar de la siguiente forma: (Coeficientes de λ_3)

$$-1 + ((-\mu - 1)\eta^2 - \beta - 2) q^2 \quad (5.10)$$

$$\frac{(-2 + (-2\beta - 2)q^2) h + 2q^2}{h - 1} \quad (5.11)$$

Igualando las ecuaciones (5.10) y (5.11), luego despejando para q , se tiene:

$$q^2 = \frac{h + 1}{(\mu + 1)\eta^2(h - 1) - \beta(h + 1)} \quad (5.12)$$

Secuencia 2:

Luego, se toma la ecuación 4 del conjunto de ecuaciones del Teorema de Vieta para obtener h : (Se igualan términos independientes de λ de las ec. (5.7) y (5.9) y se despeja para h)

$$h = \frac{\delta_1}{\Psi_1} \quad (5.13)$$

Secuencia 3:

Ahora, se toma la ecuación 3 del conjunto de ecuaciones del Teorema de Vieta, y se repite el procedimiento para obtener h : (Coeficientes de λ de las ec. (5.7) y (5.9))

$$h = \frac{\delta_2}{\Psi_2} \quad (5.14)$$

Secuencia 4:

A continuación, se obtiene la última solución para h , a partir de la ecuación 2 del teorema de Vieta: (Coeficientes de λ^2 de las ec. (5.7) y (5.9))

$$h = \frac{\delta_3}{\Psi_3} \quad (5.15)$$

Secuencia 5:

Considerando, las tres soluciones para h , se igualan las ecuaciones (5.13) y (5.14), resolviendo para q , se tiene:

$$q^2 = \frac{\Phi_2}{\phi_2} \quad (5.16)$$

Secuencia 6:

Igualando las ecuaciones (5.13) y (5.15), resolviendo para q , se tiene:

$$q^2 = \frac{\Phi_3}{\phi_3} \quad (5.17)$$

Secuencia 7:

Se tienen tres soluciones para q^2 , para calcular η y μ se igualan las ecuaciones (5.12) y (5.16), despejando para η :

$$\eta^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{(-2 + (\mu - 2)\beta)^2 ((\mu + 2)^2 \beta^2 + (-12\mu^2 - 8\mu)\beta + 4\mu^2) + (-\mu^2 + 4)\beta^2 + (-2\mu^2 - 10\mu + 4)\beta + 4\mu}}{\mu ((\mu^2 + \mu + 2)\beta - 2\mu + 2)} \quad (5.18)$$

Secuencia 8:

Del mismo modo, se igualan las ecuaciones (5.16) y (5.17), despejando η^2 :

$$\eta^2 = \frac{\sqrt{-(4\beta - 1)(\beta\mu + \beta - 2)^2} + 2 + (-\mu - 5)\beta}{2(\mu + 1)^2\beta - 4\mu + 4} \quad (5.19)$$

Secuencia 9:

Luego, igualando las ecuaciones (5.18) y (5.19) se obtiene el valor óptimo para μ :

$$\mu = -\frac{2\beta - 1 + \sqrt{-4\beta + 1}}{\beta} \quad (5.20)$$

Para encontrar el siguiente valor óptimo es necesario repetir las secuencias

1-9, empezando por despejar μ .

Secuencia 1:

$$-1 + ((-\mu - 1)\eta^2 - \beta - 2) q^2 \quad (5.21)$$

$$\frac{(-2 + (-2\beta - 2)q^2) h + 2q^2}{h - 1} \quad (5.22)$$

De la misma forma, se igualan las ecuaciones (5.21) y (5.22), dando como resultado:

$$\mu = \frac{-\eta^2 h q^2 + \beta h q^2 + \eta^2 q^2 + \beta q^2 + h + 1}{(h - 1)\eta^2 q^2} \quad (5.23)$$

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtiene el valor óptimo para q :

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{-4\beta + 2 - 2\sqrt{-4\beta + 1}}}{\beta} \quad (5.24)$$

Después se sustituyen los valores óptimos de μ y q en una ecuación para despejar η :

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{-4\beta + 1}} \quad (5.25)$$

Las ecuaciones (5.20), (5.24) y (5.25), son los valores óptimos para μ , q y η respectivamente. Se sustituyen los valores óptimos para el NIDVA-C3 en la ecuación (5.13) y el resultado es:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{-4\beta + 1}}{\beta} \quad (5.26)$$

En la ecuación (5.26) h es la aproximación de la norma H_∞ . Además, h es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes. Por lo tanto, si $h = H^2$:

$$H = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{-4\beta + 1}}{2\beta}} \quad (5.27)$$

Las ecuaciones (5.20), (5.24) y (5.25) determinan los parámetros requeridos para igualar la amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del sistema NIDVA-C3. No obstante, dichos parámetros por sí solos no resultan suficientes para lograr un aplanamiento completo de la curva de la respuesta en frecuencia del NIDVA-C3 ante todas las posibles frecuencias de excitación.

Variable		Valor
β	=	0.1
ζ	=	0.30

Tabla 5.1: Valores establecidos para las variables independientes.

Parámetro		Valor
μ	=	0.2540333080
q	=	1.127016659
η	=	0.9419651450

Tabla 5.2: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos.

A continuación, se sustituyen los valores de la Tabla 5.1 y Tabla 5.2 en la ecuación (5.2), dando como resultado la FRF del NIDVA-C3 en rotor-cojinete tipo Jeffcott cuando $\zeta \rightarrow 0$:

$$H = \sqrt{\frac{(\Omega^4 (-2,683482985 \Omega^2 + 1,431498868 + \Omega^4)^2)}{(-3,810499640 \Omega^4 + 4,294496579 \Omega^2 + \Omega^6 - 1,431498868)^2}} \quad (5.28)$$

Del mismo modo, sustituyendo los valores de la Tabla 5.1 y Tabla 5.2 en

la ecuación (5.3), se obtiene la función de respuesta en frecuencia (FRF) del NIDVA-C3 cuando $\zeta \rightarrow \infty$:

$$H = \sqrt{\frac{\Omega^4 (\Omega^2 - 1,270166550)^2}{(\Omega^4 - 2,397183205 \Omega^2 + 1,270166550)^2}} \quad (5.29)$$

También, se propone un valor de $\zeta \rightarrow 0,30$ para observar el comportamiento del sistema en un valor arbitrario de ζ .

$$H = \sqrt{\frac{E}{G}} \quad (5.30)$$

Después, se realiza el procedimiento de Steen Krenk con el fin de obtener el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} , dando como resultado:

$$\zeta = \sqrt{\frac{(-\beta - 18)\sqrt{-4\beta + 1} - 2\beta + 18}{9\beta + 108}} \quad (5.31)$$

Sustituyendo $\beta = 0,1$ en la ecuación (5.31), se obtiene el valor numérico de ζ_{opt} :

$$\zeta_{opt} = 0,1863032740 \quad (5.32)$$

Una vez obtenido ζ_{opt} , se sustituye en la ecuación (5.1), por lo tanto, se obtiene:

$$H = \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (5.33)$$

En el apéndice B se describen los elementos E, G, R, r. En la siguiente gráfica se muestra la FRF del sistema utilizando el factor de amortiguamiento óptimo.

En la Figura 5.1 se presenta la gráfica de la respuesta en frecuencia del rotor-cojinete tipo Jeffcott con el NIDVA-C3 bajo excitación inercial, cuando $\zeta = 0,30$ y cuando el factor de amortiguamiento es óptimo, $\zeta_{opt} = 0,1863032740$, considerando $\beta = 0,1$.

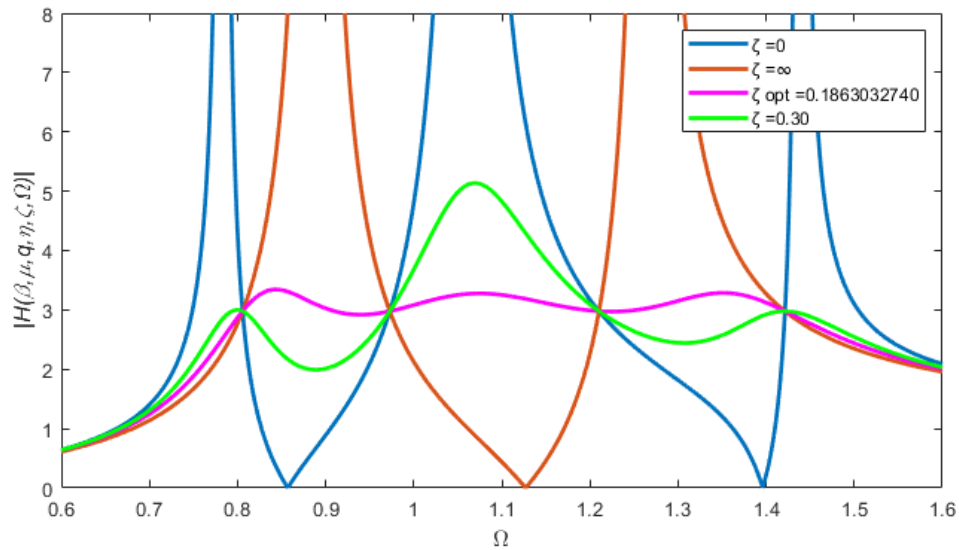


Figura 5.1: Gráfica de la FRF del NIDVA-C3 en Rotor-Cojinete tipo Jeffcott, incluyendo el factor de amortiguamiento óptimo.

La técnica de los puntos fijos extendida permitió obtener la respuesta del sistema de forma estable y precisa. Esto evidencia que el método ha funcionado adecuadamente para las condiciones planteadas.

5.1.2. NIDVA-C4 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

Parámetro	Valor
μ	$= 0.2984378815$
q	$= 1.221552048$
η	$= 0.5445826798 \sqrt{2}$
ζ_{opt}	$= 0.07095696245$

Tabla 5.3: Valores numéricos de los parámetros óptimos del NIDVA-C4 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

Para obtener valores numéricos de los parámetros de este sistema, se realiza

el procedimiento descrito anteriormente. Tomando $\beta = 0,1$, los valores óptimos del sistema se presentan en la Tabla 5.3.

La siguiente gráfica describe el comportamiento de la FRF del NIDVA-C4 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott, utilizando los parámetros óptimos.

Del mismo modo, para este rotor-cojinete tipo Jeffcott con el NIDVA-C4, se obtiene la FRF del sistema, ilustrada en la Figura 5.2. Donde se observa el comportamiento dinámico del sistema y de la misma forma la efectividad de la TPFE.

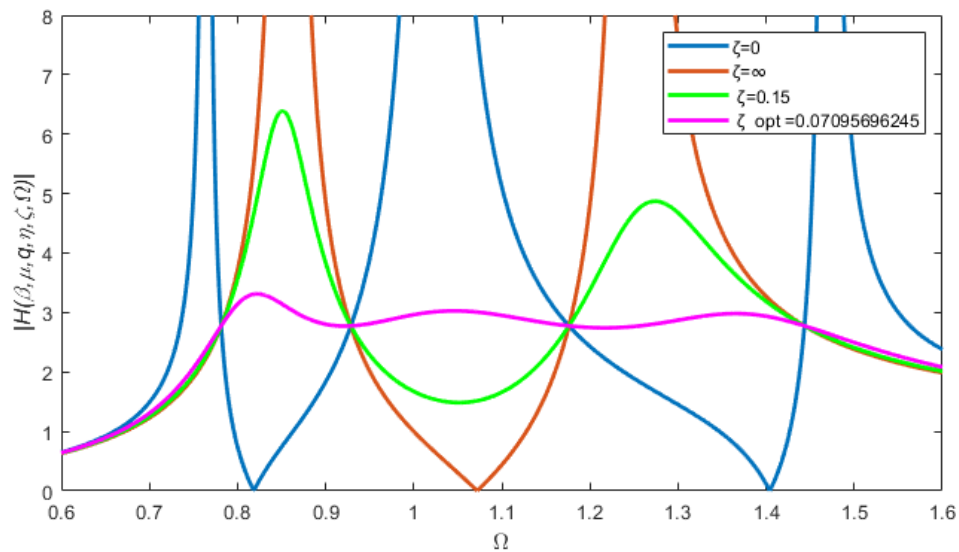


Figura 5.2: Gráfica de la FRF de NIDVA-C4 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott, con factor de amortiguamiento óptimo.

5.1.3. NIDVA-C6 En Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott.

De la misma forma, en este sistema, siguiendo el procedimiento de la técnica de los puntos fijos extendida, los valores numéricos de los parámetros óptimos para este sistema, se presentan en la Tabla 5.4.

Parámetro	Valor
μ	$= 0.1568925885$
q	$= 1.064472696$
η	$= 1.089076900$
ζ_{opt}	$= 0.04559467054$

Tabla 5.4: Valores numéricos de los parámetros óptimos para el NIDVA-C6.

Posteriormente, se presenta la gráfica de la FRF del sistema, donde se puede apreciar el comportamiento dinámico del sistema.

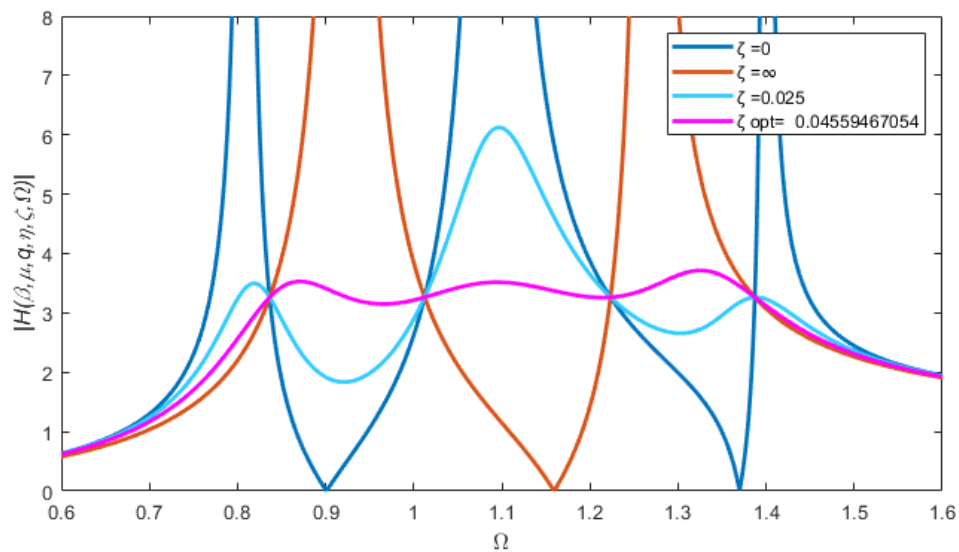


Figura 5.3: Gráfica de la FRF del NIDVA-C6 en Rotor-Cojinete Tipo Jeffcott, con factor de amortiguamiento óptimo.

Para el sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con el NIDVA-C6, se obtiene la FRF con los parámetros óptimos obtenidos mediante la TPFE, ilustrada en la Figura 5.3. Donde se observa nuevamente la minimización de la curva de la FRF del sistema.

A continuación, se presenta la gráfica de la FRF de los tres sistemas de estudio, NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6 implementados en un rotor-cojinete tipo Jeffcott.

Se presentan las FRF de los sistemas en la Figura 5.4, donde se observa el comportamiento dinámico de los mismos.

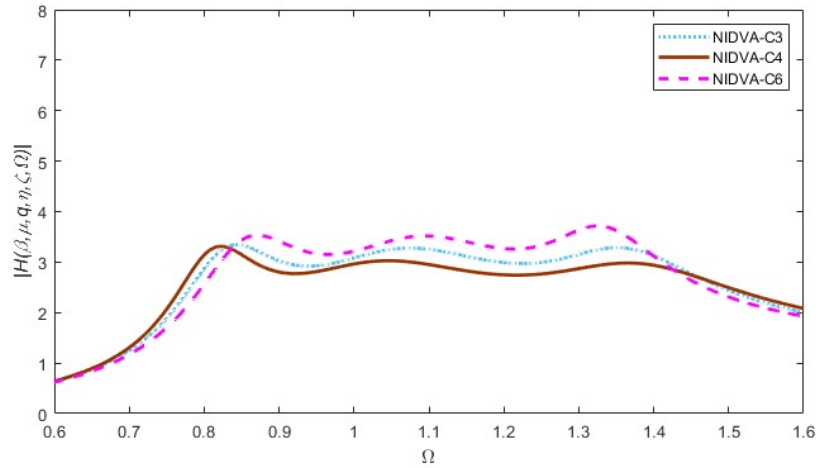


Figura 5.4: FRF de NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6 obtenida mediante la técnica de los puntos fijos.

En la Figura 5.4 se observa que el NIDVA-C4 mantiene una FRF más controlada en el rango de frecuencias analizado.

5.2. CRITERIO H_∞

El método H_∞ es una técnica de optimización utilizada en sistemas dinámicos para minimizar la ganancia máxima de la función de transferencia entre una entrada y una salida, es decir, su norma H_∞ . Este criterio tiene como objetivo asegurar que la respuesta del sistema se mantenga limitada, aún si es perturbado por distintas señales dentro de un rango previamente definido. Debido a esto, el criterio H_∞ es una herramienta robusta para el diseño y análisis de control pasivo de vibraciones.

Por lo tanto, el método de optimización H_∞ ofrece una validación robusta de los parámetros determinados a través de la técnica de los puntos fijos extendida, al garantizar un comportamiento dinámico óptimo frente a las variaciones de frecuencia, es decir, al demostrar que el sistema mantiene un comportamiento controlado incluso frente a variaciones paramétricas o perturbaciones dentro del rango considerado.

5.3. NIDVA-C3

Una vez formulado el modelo dinámico del sistema, compuesto por la estructura principal y el Absorbedor de Vibraciones Dinámico No Tradicional basado en Inersor (NIDVA-C3), se aplica el método de optimización H_∞ con el fin de minimizar la respuesta del sistema ante excitación inercial.

Se tiene la función de respuesta en frecuencia (FRF) del NIDVA-C3 implementado en un rotor tipo Jeffcott y se eleva al cuadrado de la forma:

$$H^2(\Omega) = \frac{(A^2 + iB^2) P^2}{C^2 + iD^2} \quad (5.34)$$

Luego, se definen numerador y denominador de la ecuación (5.34)

$$Num = Y(\Omega) \quad (5.35)$$

$$Den = U(\Omega) \quad (5.36)$$

Dónde $A, B, C, D, P, Y(\Omega), U(\Omega)$ se definen en el apéndice C.

Posteriormente, se emplea la ecuación propuesta por Nishihara [17], la cual se denota de la forma:

$$h = \sqrt{\frac{1}{-r^2 + 1}} \quad (5.37)$$

$$Den - \frac{Num}{h^2} = 0 \quad (5.38)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (5.38), se obtiene una ecuación polinómica de grado 12, de la forma:

$$a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (5.39)$$

Por lo tanto, se convierte la ecuación (5.39) en polinomio mónico, obteniendo como resultado,

$$x^{12} + a_{11}x^{11} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (5.40)$$

Las variables a_1, a_2, \dots, a_n se definen en el apéndice C. Considerando que las sumas y productos de las raíces de la ecuación (5.40) se pueden expresar mediante el siguiente sistema de ecuaciones,

$$f_1 : \quad (-c_1^2 + 4c_2) \sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (5.41)$$

$$f_2 : \quad c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} = 0 \quad (5.42)$$

$$f_3 : \quad 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (5.43)$$

Ahora, se definen las variables $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ presentadas en el apéndice C. Sustituyendo las variables anteriores en las ecuaciones (5.41), (5.42), (5.43), y simplificando a su mínima expresión, se obtienen los siguientes resultados,

$f_1 :$

$$\begin{aligned} & \left[\eta^2(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + r(1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r \right] (r - 1) \zeta_2^4 \\ & - \frac{1}{8}\eta^2 r (\eta^2 ((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1) q^2 - \eta^2 + r) q^2 \mu^2 \zeta_2^2 \\ & + \frac{1}{128}\eta^8 \mu^4 q^4 r = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$f_2 :$

$$\begin{aligned} & - 8 \left[((\beta\mu r - \beta - 1)q^2 + r(\mu + 1))(\mu + 1)q^2\eta^4 \right. \\ & + ((\beta + 1)(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + (-\beta\mu r^2 + ((\beta + 2)\mu + \beta + 3)r - \beta - 1)q^2 - r^2(\mu + 1))\eta^2 \\ & + ((\beta + 1)q^2 - r)r \left. \right] (r - 1) \zeta_2^4 \\ & + \eta^2 \left[((\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1))q^2\eta^4 \right. \\ & - r((\beta + 1)^2q^4 + ((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q^2 + r^2)\eta^2 + r^2(1 + (\beta + 1)q^2) \left. \right] \mu^2 \zeta_2^2 \\ & - \frac{1}{8}q^2 r^2 \mu^4 \eta^6 = 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

$f_3 :$

$$\begin{aligned} & \left(2r^3 - 2r^2((\mu + 1)\eta^2 + \beta + 1)q^2 + q^4\eta^2(\beta + 1)^2r + q^4\eta^2(\beta + 1)^2 \right) (r - 1) \zeta_2^4 \\ & + \frac{1}{4}r^2 \left[(q^2\mu\eta^2\beta + 1 + (\mu - 1)\eta^2)r^2 + q^2r\eta^4 - q^2\eta^2(\beta + 1) \right] \mu^2 \zeta_2^2 \\ & - \frac{1}{64}r^4 \mu^4 \eta^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Luego, con el fin de facilitar la visualización de las relaciones entre los diferentes elementos del sistema, se tienen las siguientes matrices,

$$N := \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$M := \begin{bmatrix} D_1 & A_1 & C_1 \\ D_2 & A_2 & C_2 \\ D_3 & A_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Después de encontrar las variables $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$, definidas en el apéndice C, se obtiene el determinante de cada matriz.

$$\text{Det}(N) = 0$$

$$A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 = 0 \quad (5.49)$$

$$\text{Det}(M) = 0$$

$$A_1 C_2 D_3 - A_1 C_3 D_2 - A_2 C_1 D_3 + A_2 C_3 D_1 + A_3 C_1 D_2 - A_3 C_2 D_1 = 0 \quad (5.50)$$

A continuación, se obtienen las funciones f_4 y f_5 apartir de la sustitución de variables $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ en las ecuaciones (5.49) y (5.50). Obteniendo como resultado:

$$f_4 : (\mu, q, \eta, r, \zeta, \beta) = 0 \quad (5.51)$$

$$f_5 : (\mu, q, \eta, r, \zeta_2, \beta) = 0 \quad (5.52)$$

Considerando las ecuaciones 5.44, 5.45, 5.46, 5.51, 5.52, se realiza la sustitución de $\beta = 0,1$, posteriormente se resuelve el sistema de ecuaciones resultante, mediante Maple software. Por lo tanto, se obtienen los parámetros óptimos para el NIDVA-C3 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, presentados en la Tabla 5.5.

Los parámetros óptimos del NIDVA-C3 minimizan la respuesta máxima del sistema en el dominio de la frecuencia.

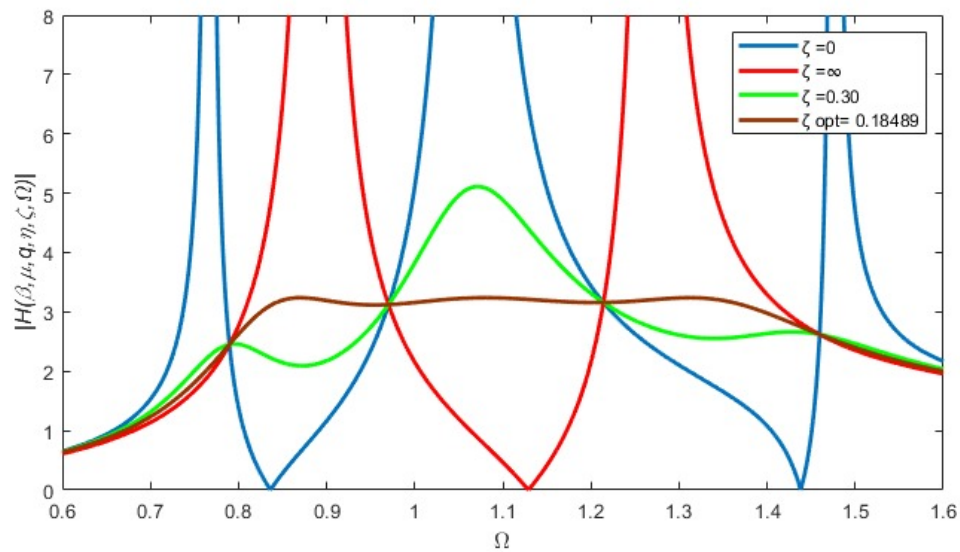


Figura 5.5: Gráfica de la FRF del NIDVA-C3 mediante el criterio H_∞ .

En la Figura 5.5 se presenta la función de respuesta en frecuencia del NIDVA-C3, obtenida a partir del criterio H_∞ .

Parámetro	Valor
μ	$= 0.31557$
q	$= 1.12897$
η	$= 0.94356$
ζ_{opt}	$= 0.18489$

Tabla 5.5: Parámetros óptimos del NIDVA-C3 por el criterio H_∞ , cuando $\beta = 0$.

Se observa en la Figura 5.5 el comportamiento de la FRF del NIDVA-C3, cuando el factor de amortiguamiento es trivial y cuando el factor de amortiguamiento es óptimo.

Además, se realiza la comparación entre ambos métodos de optimización, para el NIDVA-C3 la gráfica es la siguiente:

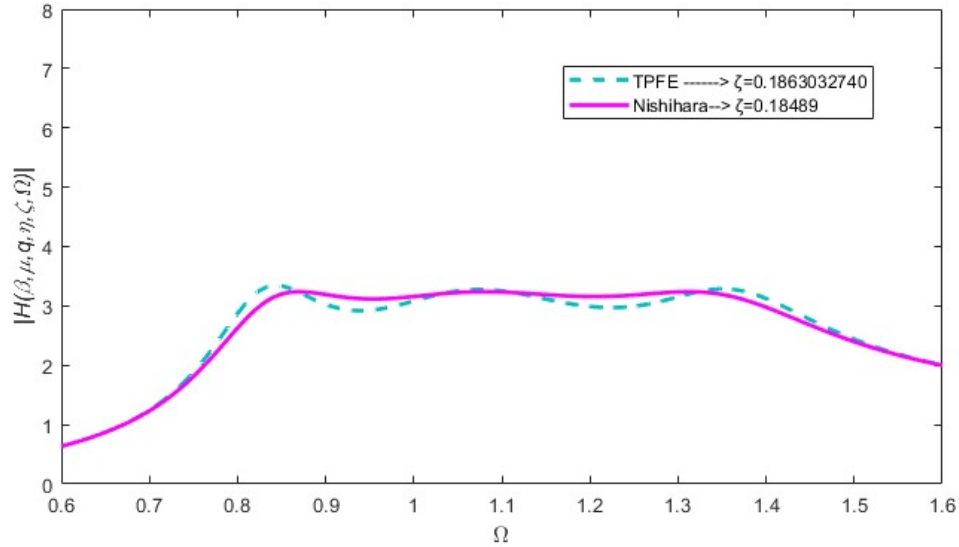


Figura 5.6: FRF del NIDVA-C3 mediante dos técnicas de optimización.

Considerando que, el criterio H_∞ es una técnica de optimización robusta, en la Figura 5.6 se observa que la FRF del NIDVA-C3 obtenida con el criterio H_∞ , tiene mejor comportamiento dinámico que la FRF obtenida con la TPFE.

5.4. NIDVA-C4

Criterio H_∞ (NIDVA-C4)					
β	μ_{opt}	q_{opt}	η_{opt}	ζ_{opt}	$\ H_\infty\ $
0.03	0.08801	1.05693	0.91883	0.01692	6.09984
0.05	0.17712	1.11040	0.84952	0.04449	4.58716
0.08	0.32672	1.20194	0.75332	0.09259	3.41242
0.1	0.43318	1.27034	0.69643	0.12345	2.92793

Tabla 5.6: Valores numéricos para los parámetros óptimos del NIDVA-C4.

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen los valores numéricos para

los parámetros óptimos del NIDVA-C4, tomando distintos valores para β , como se presenta en la Tabla 5.6.

La gráfica para la FRF del NIDVA-C4 implementado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, se ilustra en la Figura 5.7.

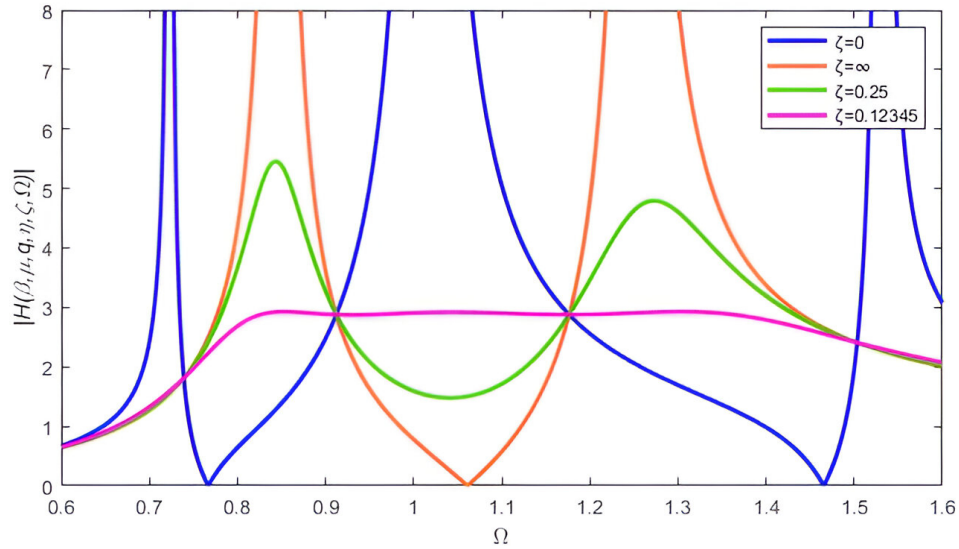


Figura 5.7: FRF del NIDVA-C4 implementado en un rotor tipo Jeffcott.

Se observa que el criterio H_∞ es un método de optimización robusto, pues en distintas condiciones muestra una minimización de la FRF máxima del NIDVA-C4.

En este trabajo, el criterio H_∞ se empleó como método complementario de validación, brindando respaldo a los parámetros obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida.

De la misma forma, para comparar ambos enfoques, dónde se observó una cercanía entre los valores de los parámetros óptimos, lo cual refuerza la confiabilidad del diseño de los NIDVAs C3 y C4 implementados en un rotor-cojinete tipo Jeffcott. Para el NIDVA-C6 no se encontraron soluciones mediante el criterio H_∞ . Debido a que el software no pudo resolver el sistema de ecuaciones relacionado a este sistema.

En la Figura 5.8, se presenta la gráfica de la FRF del NIDVA-C4 implemen-

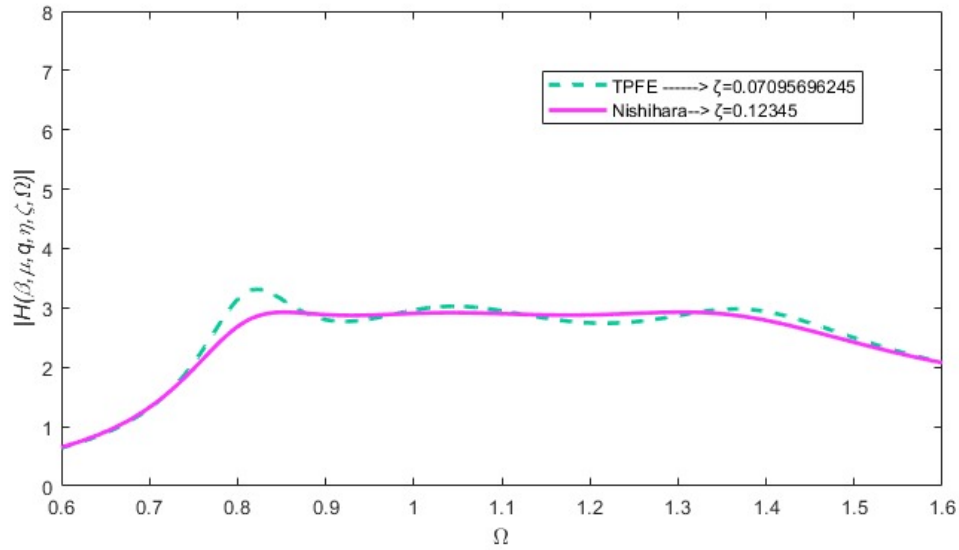


Figura 5.8: FRF del NIDVA-C4 mediante los dos métodos de optimización TPFE y Criterio H_∞ ,

tado en un rotor-cojinete tipo Jeffcott, dónde se observa la efectividad de ambas técnicas de optimización en el diseño de absorbedores de vibración no tradicionales basados en inersor, como el NIDVA-C4.

La técnica de los puntos fijos extendida es un método heurístico y analítico, por su parte el criterio H_∞ es una técnica de optimización robusta que busca minimizar la ganancia máxima del sistema (la norma H_∞ de la función de transferencia). Asegura que la respuesta en frecuencia del sistema sea lo más baja posible en las frecuencias resonantes.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se obtuvieron los modelos matemáticos mediante las ecuaciones de Euler- Lagrange, de los sistemas NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6 implementados en un rotor- cojinete tipo Jeffcott, Así mismo, se presenta el desarrollo matemático que muestra el comportamiento dinámico de los sistemas antes mencionados. El modelo propuesto, NIDVA-C3 considera un rotor montado sobre un eje flexible, el cual está acoplado a un sistema de absorción de vibraciones compuesto por una masa conectada en serie con un inersor, un resorte y un amortiguador. Además, de esta configuración se tiene el NIDVA-C4, formado por la masa del absorbedor conectado en serie a un amortiguador que a su vez esta conectado en paralelo a un resorte y conectado en serie a un inersor. Del mismo modo, el NIDVA-C6 es formado por un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de inersor y amortiguador, conectados a la masa del absorbedor.

Las ecuaciones de movimiento fueron obtenidas utilizando la formulación de Euler-Lagrange, y posteriormente transformadas a una forma adimensional, lo que facilitó su análisis en el dominio de la frecuencia. La formulación resultante permitió identificar las condiciones necesarias para lograr una respuesta vibratoria uniforme en las frecuencias críticas del sistema.

El modelo fue validado numéricamente y mostró concordancia con resultados reportados en la literatura. Además, se abordó un problema de optimización

enfocado en minimizar la función de respuesta en frecuencia del sistema (FRF). Para ello, se empleó la técnica de los puntos fijos extendida, mediante el Teorema de Vieta y del Teorema de Steen Krenk, con el fin de obtener los parámetros óptimos de los NIDVA-C3, NIDVA-C4 y NIDVA-C6.

Se empleó una segunda técnica de optimización con el propósito de validar y otorgar mayor fiabilidad a los resultados obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida. Para ello, mediante el criterio H_∞ se determinaron los parámetros óptimos de los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott con los NIDVAs C3 y C4, donde se observó similitud entre los valores numéricos de los parámetros óptimos obtenidos mediante ambas técnicas de optimización, sobresaliendo el comportamiento dinámico del sistema NIDVA-C4 con los parámetros óptimos obtenidos mediante el criterio H_∞ . En el caso del NIDVA-C6, no se encontraron soluciones mediante dicho criterio.

Los resultados obtenidos demuestran que la implementación de NIDVAs C3, C4 y C6 en rotores permite mejorar significativamente el control pasivo de vibraciones, ampliando el rango de frecuencias de operación estable y reduciendo el riesgo de resonancia estructural, lo cual resulta especialmente útil en aplicaciones de alta velocidad o condiciones variables de funcionamiento.

6.1. TRABAJOS FUTUROS

El estudio y desarrollo de absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersor representa una línea de investigación y aplicación con un alto potencial de crecimiento en los próximos años. Estos dispositivos, al incorporar elementos inerciales no convencionales, permiten una mejora significativa en el rendimiento de los sistemas de supresión de vibraciones, tanto en términos de eficiencia como de adaptabilidad frente a diversas frecuencias.

Los resultados obtenidos en este proyecto respaldan la proyección de futuras

oportunidades laborales y científicas en torno a la implementación de NIDVAs en dispositivos rotodinámicos. Existe un creciente interés por explorar las propiedades dinámicas de estos sistemas, principalmente en el diseño de estructuras civiles antisísmicas, en la dinámica vehicular y en la optimización de maquinaria de precisión. Además, los absorbedores con inersor han demostrado un gran desempeño en comparación con el DVA clásico.

En resumen, los NIDVAs constituyen una solución innovadora y efectiva frente a los retos que presentan los sistemas mecánicos contemporáneos. Sus aplicaciones abarcan desde la protección sísmica hasta la industria automotriz y la generación de energía, lo que posiciona a esta tecnología como una vía prometedora para el desarrollo profesional, tecnológico y científico en el corto y mediano plazo.

Bibliografía

- [1] Y. Li, Q. Zhang, Y. Xu, J. Wen, Z. Wang, “Performance Evaluation of Inerter-Based Dynamic Vibration Absorbers for Wind-Induced Vibration Control of a Desulfurization Tower”, *Buildings* 14 (2024), pp. 150. Doi:10.3390/buildings14010150.
- [2] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), pp. 297–307.
- [3] S. Zhou, C. Jean-Mistral, S. Chesne, “Optimal design of an inerter-based dynamic vibration absorber connected to ground”, *Journal of Vibration and Acoustics* 1 (2019). Doi:10.1115/1.4043945.
- [4] M. Canales, W. Paucar, N. Juipa, “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica”, *Investigación y Amazonía, Tingo María, Perú* 7.4 (2017), pp. 5-9. Issn: 2224-445X.
- [5] R. Udayakumar, R. Ponnusamy, “Computer aided design and analysis of disc brake rotors for passenger cars”, *2013 International Conference on Computer Applications Technology* (2013). Doi:10.1109/ICCAT.2013.6521979.

- [6] J. E. Morales Calvache, J. B. Toapanta Lincango. "Diseño y construcción de un prototipo de turbina eólica de eje vertical para su utilización en equipos de baja potencia hasta 20W". Trabajo de titulación de grado. Universidad Politécnica Salesiana, Quito, Ecuador, 2024.
- [7] E. J. Gunter, "Fundamentals of rotor-bearing dynamics using Dyrobes: The Jeffcott rotor", Dyrobes (2002).
- [8] C. Y. Mendivelso Duarte. "Modelamiento y análisis del comportamiento roto-dinámico de un eje asimétrico sometido a carga combinada lateral y torsional". Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2014.
- [9] T. Barszcz, M. Zabaryllo, "Concept of automated malfunction detection of large turbomachinery using Machine Learning on transient data", *Diagnostyka* 20.1 (2019), pp. 63-71. Doi: 10.29354/diag/100399.
- [10] R. Cerpa, L. Mónico, D. Cortés, S. Mustafa, A. Bonilla, "Selección del sistema de propulsión de un vehículo urbano con bajo consumo de combustible", *Ingenium* 17.33 (2015), pp. 41-53.
- [11] B. V. Siqueira, D. J. T. de Andrade, F. G. Farinha, R. de S. Pereira, R. S. O. Vicente. "Desenvolvimento de um módulo para ensaio de resistência à cavitação". Trabajo de titulación de grado. Universidad Santa Cecília, Santos, São Paulo, Brasil, 2019.
- [12] J. Colín Ocampo, J. G. Mendoza Larios, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, E. Simón Gutiérrez Winga, "Determinación del desbalance en sistemas rotor-cojinete a velocidad constante: Método de identificación algebraica", *Ingeniería mecánica, tecnología y desarrollo* 5.4 (2016), México.
- [13] J. G. Mendoza Larios, J. Colín Ocampo, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, E. S. Gutiérrez Wing, "Balanceo automático de un sistema rotor-

- cojinete: Identificador algebraico en línea del desbalance para un sistema rotonidámico”, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 13 (2016), pp. 281–292.
- [14] Y. Liu, Q. Wang, X. Zhang, “ H_∞ and H_2 optimization for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *Nonlinear Dynamics* 102.4 (2020), pp. 2435-2449. Doi: 10.1007/s11071-020-06064-w.
- [15] E. Rodríguez Hernández. “Diseño y construcción de un absorbedor no lineal para el control semi-activo de vibraciones”. Tesis de maestría. Tecnológico de Pachuca, Pachuca de Soto, Hidalgo, México, 2022.
- [16] Frahm Hermann. “Device for damping vibrations of bodies.” Pat. 0989958. 1911.
- [17] G. López García. “Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga”. Tesis de licenciatura. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, 2021.
- [18] J. Ormondroyd, J. P. Den Hartog, “The Theory of the Dynamic Vibration Absorber”, *Trans., ASME, Applied Mechanics* 50 (1928), pp. 9-22.
- [19] M. Z. REN, “A VARIANT DESIGN OF THE DYNAMIC VIBRATION ABSORBER”, *Journal of Sound and Vibration* 245.4 (2001), pp. 762–770. Doi:10.1006/jsvi.2001.3564.
- [20] K. Liu, J. Liu, “The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result”, *Journal of Sound and Vibration* 284.3 (2005), pp. 1181-1189. Issn: 0022-460X. Doi: 10.1016/j.jsv.2004.08.002.
- [21] Y. L. Cheung, W. O. Wong, “Design of a non-traditional dynamic vibration

- absorber”, *The Journal of the Acoustical Society of America* 126.2 (2009), pp. 564–567. Doi: 10.1121/1.3158917.
- [22] H. Heidari, B. Monjezi, “Vibration control of imbalanced Jeffcott rotor by virtual passive dynamic absorber with optimal parameter values”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 232.23 (2018). Doi:10.1177/0954406217752024.
- [23] J. G. Mendoza Larios, E. Barredo Hernández, I. A. Maldonado Bravo, “Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para el control de vibraciones en una estructura de un grado de libertad bajo excitación inercial”, *Cultura Científica y Tecnológica* 2.2 (2022), pp. 1-10. Doi: 10.20983/culcyt.2022.2.2.1
- [24] M. Tannous. “Desarrollo y evaluación de enfoques de modelado numérico acoplados 1D y 3D del contacto rotor-estator”. Tesis de Doctorado. Ingeniería Mecánica, Escuela Central de Nantes (ECN), Francia, 2013.
- [25] C. Liu, L. Chen, H. P. Lee, Y. Yang, X. Zhang, “A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: Theory, devices, and applications”, *Journal of the Franklin Institute* 359 (2022), pp. 7677–7707.
- [26] F. A. Firestone, “A new analogy between mechanical and electrical systems”, *The Journal of the Acoustical Society of America* 4.3 (1933), pp. 249-267.
- [27] M. C. Smith, “Synthesis of mechanical networks: the inerter”, *IEEE Transactions on automatic control* 47.10 (2002), pp. 1648-1662. Doi: 10.1109/TAC.2002.803532
- [28] M. Z. Q. Chen, Y. Hu. “Inerter and Its Application in Vibration Control Systems”. Springer (2019). Doi:10.1007/978-981-10-7089-1

- [29] M. Z. Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, F. C. Wang, M. C. Smith, “The missing mechanical circuit element”, *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9.1 (2009), pp. 10–26.
- [30] M. C. Smith, “The Inerter: A Retrospective”, *Annual Review of Control Robotics and Autonomous Systems* 3.1 (2020), pp. 361-391. Doi: 10.1146/annurev-control-053018-023917.
- [31] F. C. Wang, W. J. Su, “Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control”, *Vehicle System Dynamics* 46.7 (2008), pp. 575–595. Doi:10.1080/00423110701519031.
- [32] M. C. Smith, Mechanical network with inerter, U.S. Patent No. 7316303B2, United States Patent and Trademark Office, 2008.
- [33] F. C. Wang, M. F. Hong, T. C. Lin, “Designing and testing a hydraulic inerter”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 225.1 (2010), pp. 66–72. Doi:10.1243/09544062jmes2199.
- [34] Y. Shen, L. Chen, Y. Liu, X. Zhang, “Modeling and optimization of vehicle suspension employing a nonlinear fluid inerter”, *Shock and Vibration* 2016, pp. 1–9, 2016. Doi: 10.1155/2016/2623017.
- [35] Y. Liu, L. Chen, X. Yang, Y. Yang, “Structural Design and Inertial Impact Analysis of Vehicle ISD Suspension”, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 252, 022119, 2019. Doi:10.1088/1755-1315/252/2/022119.
- [36] C. Liu, L. Chen, H. P. Lee, Y. Yang, X. Zhang, “A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: Theory, devices, and applications”, *Journal of the Franklin Institute* 359 (2022), pp. 7677–7707.

- [37] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, "Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers", *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), pp. 297–307.
- [38] E. Barredo, A. Blanco, J. Colín, V. M. Penagos, A. Abúndez, L. G. Vela, V. Meza, R. H. Cruz, J. May, "Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers", *International Journal of Mechanical Sciences* (2018). Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025.
- [39] S. Zhou, C. Jean-Mistral, S. Chesne, "Optimal design of an inerter-based dynamic vibration absorber connected to ground", *Journal of Vibration and Acoustics* 1 (2019). Doi:10.1115/1.4043945.
- [40] E. Barredo, J.G. Mendoza Larios, J. Colín, J. Mayén, A. A. Flores Hernández, M. Arias Montiel, "A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber", *Journal of Sound and Vibration* 485 (2020), 115583.
- [41] D. C. Baird, *Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, México, DF: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1991.
- [42] M. A. Bernal Yermanos. "Teorema II-construyendo ciencia en el aula". Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia, 2015.
- [43] A. C. Simunovic, *Mecánica*, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, 2013.
- [44] K. V. Weinstein, "Mathematical Methods Of Classical Mechanics", 2nd. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1989.

- [45] W. Manhães, R. Sampaio, R. Lima, P. Hagedorn, J. F. Deü, J. G. Etse, B. M. Luccioni, M. A. Pucheta, M. A. Storti, “Lagrangians for Electromechanical Systems”, *Mecánica Computacional* 36.42 (2018), pp. 1911–1934.
- [46] I. Gelfand, V. Retakh, “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”, *The Gelfand Mathematical Seminars 1993–1995*, Springer, 1996, pp. 93-100.
- [47] E. Baquela, A. Redchuk, *Optimización Matemática con R, Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de problemas*, 2013.
- [48] James Stewart. *Cálculo trascendentes tempranas*. 8.a ed. CENGAGE Learning, 2017. Isbn: 9786075265490,607526549X.
- [49] J. P. Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.
- [50] S. Krenk, J. Høgsberg, “Tuned resonant mass or inerter-based absorbers: unified calibration with quasi-dynamic flexibility and inertia correction”, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472.2185 (2016), 20150718. Doi: 10.1098/rspa.2015.0718.
- [51] T. Asami, Y. Mizukawa, T. Ise, “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function”, *Journal of Vibration and Acoustics* 140.6 (2018), 061012. Doi:10.1115/1.4040229.

Apéndice

Apéndice A

Funciones de Transferencia.

NIDVA-C3 en rotor-cojinete tipo Jeffcott.

$$G(s) = \frac{X}{m_u d \omega^2}$$

$$Y(s) = Cbm s^4 + K_2bm s^3 + (CK_1b + CK_2b + CK_2m)s^2 + K_1K_2bs + CK_1K_2$$

$$\begin{aligned} U(s) = & CMbm s^6 + K_2Mbm s^5 + (CKbm + CK_1Mb + CK_1bm + CK_2Mb + CK_2Mm)s^4 \\ & + (KK_2bm + K_1K_2Mb + K_1K_2bm)s^3 \\ & + (CKK_1b + CKK_2b + CKK_2m + CK_1K_2M + CK_1K_2b + CK_1K_2m)s^2 \\ & + KK_1K_2bs + CKK_1K_2 \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned}
 G(r) &= \frac{X M}{m_u d} \\
 N(r) &= M\omega^2 \left(\frac{bms^4}{K_1 K_2} + \frac{bms^3}{CK_1} + \frac{(CK_1 b + CK_2 b + CK_2 m)s^2}{CK_1 K_2} + \frac{bs}{C} + 1 \right) \\
 D(r) &= K \left(\frac{Mbm s^6}{KK_1 K_2} + \frac{Mbm s^5}{CKK_1} \right. \\
 &\quad + \frac{(CKbm + CK_1 Mb + CK_1 bm + CK_2 Mb + CK_2 Mm)s^4}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad + \frac{(KK_2 bm + K_1 K_2 Mb + K_1 K_2 bm)s^3}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad + \frac{(CKK_1 b + CKK_2 b + CKK_2 m + CK_1 K_2 M + CK_1 K_2 b + CK_1 K_2 m)s^2}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad \left. + \frac{bs}{C} + 1 \right) \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(i\omega) &= M\omega^2 \left(\frac{bm\omega^4}{K_1 K_2} - i \frac{bm\omega^3}{CK_1} - \frac{(CK_1 b + CK_2 b + CK_2 m)\omega^2}{CK_1 K_2} + i \frac{b\omega}{C} + 1 \right) \\
 D(i\omega) &= K \left(- \frac{Mbm\omega^6}{KK_1 K_2} + i \frac{Mbm\omega^5}{CKK_1} \right. \\
 &\quad + \frac{(CKbm + CK_1 Mb + CK_1 bm + CK_2 Mb + CK_2 Mm)\omega^4}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad - i \frac{(KK_2 bm + K_1 K_2 Mb + K_1 K_2 bm)\omega^3}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad - \frac{(CKK_1 b + CKK_2 b + CKK_2 m + CK_1 K_2 M + CK_1 K_2 b + CK_1 K_2 m)\omega^2}{CKK_1 K_2} \\
 &\quad \left. + i \frac{b\omega}{C} + 1 \right) \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{bm\omega^4}{K_1K_2} - \frac{(CK_1b + CK_2b + CK_2m)\omega^2}{CK_1K_2} + 1 \quad (\text{A.4})$$

$$B = -\frac{bm\omega^3}{CK_1} + \frac{b\omega}{C} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} C = & -\frac{Mbm\omega^6}{KCK_1K_2} \\ & + \frac{1}{KCK_1K_2}(CKbm + CK_1Mb + CK_1bm)\omega^4 \\ & + \frac{1}{KCK_1K_2}(CK_2Mb + CK_2Mm)\omega^4 \\ & - \frac{1}{KCK_1K_2}(CKK_1b + CKK_2b + CKK_2m)\omega^2 \\ & - \frac{1}{KCK_1K_2}(CK_1K_2M + CK_1K_2b + CK_1K_2m)\omega^2 + 1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$D = \frac{Mbm\omega^5}{KCK_1} - \frac{(KK_2bm + K_1K_2Mb + K_1K_2bm)\omega^3}{KCK_1K_2} + \frac{b\omega}{C} \quad (\text{A.7})$$

$$P = \frac{M\omega^2}{K} \quad (\text{A.8})$$

NIDVA-C4 en rotor-cojinete tipo Jeffcott.

$$\begin{aligned} G_4(s) &= \frac{X}{m_u d\omega^2} \\ Y_4(s) &= (bm s^4 + (bc + cm) s^3 + (bk_1 + bk_2 + mk_2) s^2 \\ &\quad + csk_1 + k_1k_2) \\ U_4(s) &= Mbm s^6 + (Mbc + Mcm) s^5 \\ &\quad + (Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1) s^4 \\ &\quad + (Kbc + Kcm + Mck_1 + bck_1 + cmk_1) s^3 \\ &\quad + (Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 + bk_1k_2 + mk_1k_2) s^2 \\ &\quad + Kcsk_1 + Kk_1k_2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
 G_4(r) &= \frac{X M}{m_u d} \\
 Y_4(r) &= \left(\frac{bm s^4}{k_1 k_2} + \frac{(bc + cm) s^3}{k_1 k_2} + \frac{(bk_1 + bk_2 + mk_2) s^2}{k_1 k_2} + \frac{c s}{k_2} + 1 \right) M \omega^2 \\
 U_4(r) &= \left(\frac{Mbm s^6}{K k_1 k_2} + \frac{(Mbc + Mcm) s^5}{K k_1 k_2} + \frac{(Kbm + Mb k_1 + Mb k_2 + Mmk_2 + bmk_1) s^4}{K k_1 k_2} \right. \\
 &\quad + \frac{(Kbc + Kcm + Mck_1 + bck_1 + cmk_1) s^3}{K k_1 k_2} \\
 &\quad \left. + \frac{(Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1 k_2 + bk_1 k_2 + mk_1 k_2) s^2}{K k_1 k_2} + \frac{c s}{k_2} + 1 \right) K
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4 \eta^2} \tag{A.11}$$

$$B = -\frac{2\zeta\Omega(\Omega^2\mu + \Omega^2 - q^2)}{q^3\mu\eta^2} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
 C &= -\frac{1}{q^4\eta^2} \left(\Omega^2\beta\eta^2\mu q^4 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2 \right)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{q^3\mu\eta^2} \left(2\zeta\Omega(-\Omega^2\beta\mu q^2 + \Omega^4\mu - \Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \Omega^2\mu - \Omega^2 + q^2) \right)
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$P = \Omega^2 \tag{A.15}$$

NIDVA-C6 en rotor-cojinete tipo Jeffcott.

$$\begin{aligned}
 G_6(s) &= \frac{X}{m_u d \omega^2} \\
 Y_6(s) &= (bms^4 + Cms^3 + (K_1b + K_2m)s^2 + (CK_1 + CK_2)s + K_1K_2) \\
 U_6(s) &= Mbm s^6 + CMm s^5 + (Kbm + K_1Mb + K_1bm + K_2Mm) s^4 \\
 &\quad + (CKm + CK_1M + CK_1m + CK_2M) s^3 \\
 &\quad + (KK_1b + KK_2m + K_1K_2M + K_1K_2m) s^2 \\
 &\quad + (CKK_1 + CKK_2 + CK_1K_2) s + KK_1K_2
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 G_6(r) &= \frac{X M}{m_u d} \\
 Y_6(r) &= M\omega^2 \left(\frac{bm s^4}{K_1K_2} + \frac{Cm s^3}{K_1K_2} + \frac{(K_1b + K_2m) s^2}{K_1K_2} + \frac{(CK_1 + CK_2) s}{K_1K_2} + 1 \right) \\
 U_6(r) &= K \left(\frac{Mbm s^6}{KK_1K_2} + \frac{CMm s^5}{KK_1K_2} + \frac{(Kbm + K_1Mb + K_2Mm + K_1bm) s^4}{KK_1K_2} \right. \\
 &\quad + \frac{(CKm + CK_1M + CK_2M + CmK_1) s^3}{KK_1K_2} \\
 &\quad + \frac{(KK_1b + KK_2m + K_1K_2M + K_1K_2m) s^2}{KK_1K_2} \\
 &\quad \left. + \frac{(CKK_1 + CKK_2 + CK_1K_2) s}{KK_1K_2} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4 \eta^2} \quad (\text{A.18})$$

$$B = -\frac{2\Omega\zeta(-\eta^2 \mu q^2 + \Omega^2 - q^2)}{q^3 \mu \eta^2} \quad (\text{A.19})$$

$$C = -\frac{1}{q^4 \eta^2} (\Omega^2 (\beta \eta^2 q^4 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 - \Omega^2 \beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 + \eta^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)) \quad (\text{A.20})$$

$$D = \frac{1}{q^3 \mu \eta^2} (2\Omega\zeta(\beta \eta^2 \mu q^4 - \Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \beta q^2 + \eta^2 \mu q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)) \quad (\text{A.21})$$

$$P = \Omega^2 \quad (\text{A.22})$$

Apéndice B

Técnica de los puntos fijos extendida.

Para sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con el NIDVA-C3:

$$\frac{(A_2)P_2}{C_2} = \frac{\Omega^4 (\Omega^4 - (1 + (\mu + 1)\eta^2) q^2 \Omega^2 + q^4 \eta^2)^2}{[\Omega^6 + (-1 + (-\mu - 1)\eta^2 - \beta - 1) q^2 \Omega^4 + (\eta^2(\beta\mu + \beta + 1)q^2 + 1 + (\mu + 1)\eta^2) q^2 \Omega^2 - q^4 \eta^2]^2} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{(B_2)P_2}{D_2} = \frac{\Omega^4 (-\Omega^2 + q^2)^2}{(-\Omega^4 + (1 + (\beta + 1)q^2) \Omega^2 - q^2)^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\delta_1}{\Psi_1} = \frac{\eta^2 q^2}{\eta^2 q^2 - 1} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\delta_2}{\Psi_2} = \frac{q^2 [(2 + (\mu + 2)\beta) \eta^2 q^2 + 2 + (2\mu + 4)\eta^2]}{-4 + (2 + (\mu + 2)\beta) \eta^2 q^4 + ((2\mu + 4)\eta^2 - 4\beta - 2) q^2} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\delta_3}{\Psi_3} = \frac{q^2 [(((\mu + 1)\beta + \mu + 2)\eta^2 + \beta) q^2 + 2 + (\mu + 1)\eta^2]}{-1 + (((\mu + 1)\beta + \mu + 2)\eta^2 - \beta^2 - \beta) q^4 + ((\mu + 1)\eta^2 - 2\beta - 2) q^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\Phi_2}{\phi_2} = \frac{-2\eta^2 \mu - 2}{(-2 + (\mu - 2)\beta) \eta^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_3}{\phi_3} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{((\mu+1)^2\beta^2 + (2\mu^2 + 2\mu + 4)\beta + (\mu-2)^2)\eta^4 + 2\beta((\mu+3)\beta + \mu + 6)\eta^2 + \beta^2}}{\beta\eta^2(\beta+2)} \\ & + \frac{(1 + (\mu-1)\eta^2)\beta + \eta^2(\mu-2)}{\beta\eta^2(\beta+2)} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\eta^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu((\mu^2 + \mu + 2)\beta - 2\mu + 2)} \cdot \left[\frac{\sqrt{(-2 + (\mu-2)\beta)^2((\mu+2)^2\beta^2 + (-12\mu^2 - 8\mu)\beta + 4\mu^2)}}{+ (-\mu^2 + 4)\beta^2 + (-2\mu^2 - 10\mu + 4)\beta + 4\mu} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\eta^2 = \frac{\sqrt{-(4\beta-1)(\beta\mu + \beta - 2)^2 + 2 + (-\mu - 5)\beta}}{2(\mu+1)^2\beta - 4\mu + 4} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} E = & \left(0,4879979332 (-2,683482985 \Omega^2 + 1,431498868 + \Omega^4)^2 \right. \\ & \left. + 0,08747759057 \Omega^2 (\Omega^2 - 1,270166550)^2 \right) \Omega^4 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} G = & \left(0,4879979332 (-3,810499640 \Omega^4 + 4,294496579 \Omega^2 + \Omega^6 - 1,431498868)^2 \right. \\ & \left. + 0,08747759057 \Omega^2 (\Omega^4 - 2,397183205 \Omega^2 + 1,270166550)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} R = & \left(0,4879979332 (-2,683482985 \Omega^2 + 1,431498868 + \Omega^4)^2 \right. \\ & \left. + 0,2268288797 \Omega^2 (\Omega^2 - 1,270166550)^2 \right) \Omega^4 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} r = & \left(0,4879979332 (-3,810499640 \Omega^4 + 4,294496579 \Omega^2 + \Omega^6 - 1,431498868)^2 \right. \\ & \left. + 0,2268288797 \Omega^2 (\Omega^4 - 2,397183205 \Omega^2 + 1,270166550)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Apéndice C

Criterio H_∞

Para sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con el NIDVA-C3:

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{\eta^2 q^4} \quad (\text{C.1})$$

$$B = -\frac{1}{2} \mu \Omega \cdot \frac{\Omega^2 - q^2}{\zeta q^3} \quad (\text{C.2})$$

$$C = -\frac{\Omega^2 \beta \eta^2 \mu q^4 - \Omega^4 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^2 \beta \eta^2 q^4 - \Omega^4 \eta^2 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^4 - \Omega^4 \beta q^2 + \Omega^2 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2}{\eta^2 q^4} \quad (\text{C.3})$$

$$D = \frac{1}{2} \mu \Omega \cdot \frac{-\Omega^2 \beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2}{\zeta q^3} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Num} = Y(\Omega) = \Omega^4 & \left[\Omega^8 \mu^2 + 2\Omega^6 q^2 (2a^2 - \eta^2 \mu^3 - \mu^2(\eta^2 + 1)) \right. \\ & + \Omega^4 q^4 (-8a^2 + \eta^4 \mu^4 + 2\eta^2 \mu^3(\eta^2 + 1) + \mu^2(\eta^4 + 4\eta^2 + 1)) \\ & \left. + 2\Omega^2 q^6 (2a^2 - \eta^4 \mu^3 - \eta^2 \mu^2(\eta^2 + 1)) + \eta^4 \mu^2 q^8 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Den} = U(\Omega) = & 4\Omega^{12}\zeta_2^2 + (((-8\mu - 8)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4)q^2\Omega^{10} - 8\zeta_2^2\Omega^{10} \\
 & + \left[(4(\mu + 1)^2\eta^4 + ((16\beta + 8)\mu + 16\beta + 16)\eta^2 + 4(\beta + 1)^2)\zeta_2^2 \right. \\
 & \quad \left. - 2\mu^2\eta^4(\beta + 1) \right] q^4\Omega^8 \\
 & + (((16\mu + 16)\eta^2 + 8\beta + 16)\zeta_2^2 - 2\mu^2\eta^4)q^2\Omega^8 + 4\zeta_2^2\Omega^8 \\
 & + q^6\eta^4 \left[-8((\mu + 1)\eta^2 + \beta + 1)(\beta\mu + \beta + 1)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1)^2 \right] \Omega^6 \\
 & + q^4 \left(-8(\mu + 1)^2\eta^4 + ((-16\beta - 16)\mu - 16\beta - 32)\eta^2 - 8\beta - 8 \right) \zeta_2^2 \\
 & \quad + 2\mu^2\eta^4(\beta + 2)\Omega^6 \\
 & + (-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4\Omega^6 \\
 & + q^4\Omega^4 \left\{ 4\eta^4\zeta_2^2(\beta\mu + \beta + 1)^2 + 2\eta^2[(\mu + 1)(\beta\mu + \beta + 2)\eta^2 + \beta\mu + 2\beta + 2]\zeta_2^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4(\beta + 1) + (1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4 \right\} \\
 & - q^6\eta^2\Omega^2 \left[8 \left(\eta^2\zeta_2^2(\beta\mu + \beta + 1)q^2 + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2 \right) \right] \\
 & + 4q^8\eta^4\zeta_2^2
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$c_1 = a_{10} = \frac{((((-8\mu - 8)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4)q^2 - 8\zeta_2^2)}{4\zeta_2^2} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = a_8 = & \frac{1}{4\zeta_2^2} \left(\left((4(\mu + 1)^2\eta^4 + ((16\beta + 8)\mu + 16\beta + 16)\eta^2 + 4(\beta + 1)^2)\zeta_2^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2\mu^2\eta^4(\beta + 1) \right) q^4 + (((16\mu + 16)\eta^2 + 8\beta + 16)\zeta_2^2 - 2\mu^2\eta^4)q^2 \right. \\
 & \quad \left. + 4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1) \right)
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 = a_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\zeta_2^2} & \left(-8 \left(\left((\beta\mu + \beta + 1) ((\mu + 1)\eta^2 + \beta + 1) \zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2(\beta + 1)^2 \right) \eta^2 q^4 \right. \right. \\
 & + \left((\mu + 1)^2\eta^4 + ((2\beta + 2)\mu + 2\beta + 4)\eta^2 + \beta + 1 \right) \zeta_2^2 - \frac{1}{4}\mu^2\eta^4(\beta + 2) \Big) q^2 \\
 & + \left(1 + (\mu + 1)\eta^2 \right) \zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^4 \Big) q^2 \\
 & + 8 \left(q^2\mu\eta^2\zeta_2^2\beta + (1 + (\mu + 1)\eta^2) \zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^4 \right) q^2(-r^2 + 1) \Big)
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 = a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\zeta_2^2} & \left(4 \left(\eta^4\zeta_2^2(\beta\mu + \beta + 1)^2 q^4 + 2 \left(((\mu + 1)(\beta\mu + \beta + 2)\eta^2 + \beta\mu + 2\beta + 2)\zeta_2^2 - \frac{1}{4}\mu^2\eta^2(\beta + 1) \right) \eta^2 q^2 \right) \right. \\
 & + \left(1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2 \right) \zeta_2^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4 \Big) q^4 \\
 & - 4 \left(q^4\mu^2\eta^4\zeta_2^2\beta^2 + 2\eta^2(1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta_2^2\mu\beta q^2 \right) \\
 & \left. - 4 \left(1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2 \right) \zeta_2^2 q^4(-r^2 + 1) + 2\mu^2\eta^4 q^4(-r^2 + 1) \right)
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}
 c_5 = a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\zeta_2^2} & \left(-8\eta^2 \left(\eta^2\zeta_2^2(\beta\mu + \beta + 1)q^2 + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2 \right) q^6 \right. \\
 & \left. + 8 \left(q^2\mu\eta^2\zeta_2^2\beta + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2 \right) \eta^2 q^6(-r^2 + 1) \right)
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$c_6 = a_1 = q^8\eta^4 r^2 \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q} = & (4\eta^2(\beta\mu r - \beta - 1)q^3 + 2r(1 + (\mu + 1)\eta^2)q)(r - 1)\zeta_2^4 \\
 & - \frac{1}{4}\eta^4 r ((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1) q^3 \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{4}\eta^2 r (\eta^2 ((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1) q^2 - \eta^2 + r) q \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & + \frac{1}{32}\eta^8 \mu^4 q^3 r
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q} = & -8 \left(2(\beta\mu r - \beta - 1)q^3(\mu + 1)\eta^4 + 2((\beta\mu r - \beta - 1)q^2 + r(\mu + 1))(\mu + 1)q\eta^4 \right. \\
 & + (4(\beta + 1)(\beta\mu r - \beta - 1)q^3 + 2(-\beta\mu r^2 + ((\beta + 2)\mu + \beta + 3)r - \beta - 1)q)\eta^2 \\
 & + 2(\beta + 1)qr \left. \right) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & + \eta^2 \left(2(\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^3\eta^4 + 2((\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1))q\eta^4 \right. \\
 & - r(4(\beta + 1)^2q^3 + 2((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q)\eta^2 \\
 & + 2r^2(\beta + 1)q \left. \right) \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{4}qr^2\mu^4\eta^6
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = \frac{\partial f_3}{\partial q} = & \left(-4r^2((\mu + 1)\eta^2 + \beta + 1)q + 4q^3\eta^2(\beta + 1)^2r + 4q^3\eta^2(\beta + 1)^2 \right) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & + \frac{1}{4}r^2(2q\mu\eta^2\beta r^2 + 2qr\eta^4 - 2q\eta^2(\beta + 1))\mu^2\zeta_2^2
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \eta} = & (2\eta(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + 2r(\mu + 1)\eta q^2) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & - \frac{1}{4}\eta r (\eta^2((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1)q^2 - \eta^2 + r) q^2 \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{8}\eta^2 r (2\eta((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1)q^2 + 2\eta^3(\mu + 1)q^2 - 2\eta) q^2 \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & + \frac{1}{16}\eta^7 \mu^4 q^4 r
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \eta} = & -8 \left(4((\beta\mu r - \beta - 1)q^2 + r(\mu + 1)) (\mu + 1)q^2 \eta^3 \right. \\
 & + 2 \left((\beta + 1)(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + (-\beta\mu r^2 + ((\beta + 2)\mu + \beta + 3)r - \beta - 1) q^2 - r^2(\mu + 1) \right) \eta \Big) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & + 2\eta \left(((\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1)) q^2 \eta^4 - r((\beta + 1)^2 q^4 + ((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q^2 + r^2) \eta^2 \right. \\
 & \left. + r^2(1 + (\beta + 1)q^2) \right) \mu^2 \zeta_2^2 + \eta^2 \left(4((\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1)) q^2 \eta^3 \right. \\
 & \left. - 2r((\beta + 1)^2 q^4 + ((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q^2 + r^2) \eta \right) \mu^2 \zeta_2^2 - \frac{3}{4}q^2 r^2 \mu^4 \eta^5
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 = \frac{\partial f_3}{\partial \eta} = & (-4r^2(\mu + 1)\eta q^2 + 2q^4\eta(\beta + 1)^2 r + 2q^4\eta(\beta + 1)^2) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & + \frac{1}{4}r^2 \left((2q^2\mu\eta\beta + 2(\mu - 1)\eta)r^2 + 4q^2 r \eta^3 - 2q^2\eta(\beta + 1) \right) \mu^2 \zeta_2^2 - \frac{1}{32}r^4 \mu^4 \eta
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} = & 4 \left(\eta^2(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + r(1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r \right) (r - 1)\zeta_2^3 \\
 & - \frac{1}{4}\eta^2 r (\eta^2((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1)q^2 - \eta^2 + r) q^2 \mu^2 \zeta_2
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} = & -32 \left(((\beta\mu r - \beta - 1)q^2 + r(\mu + 1)) (\mu + 1)q^2\eta^4 \right. \\
 & + ((\beta + 1)(\beta\mu r - \beta - 1)q^4 + (-\beta\mu r^2 + ((\beta + 2)\mu + \beta + 3)r - \beta - 1)q^2 - r^2(\mu + 1))\eta^2 \\
 & \left. + ((\beta + 1)q^2 - r)r \right) (r - 1)\zeta_2^3 \\
 & + 2\eta^2 \left(((\beta\mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1))q^2\eta^4 \right. \\
 & \left. - r((\beta + 1)^2q^4 + ((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q^2 + r^2)\eta^2 + r^2(1 + (\beta + 1)q^2) \right) \mu^2\zeta_2
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} = & 4 \left(2r^3 - 2r^2((\mu + 1)\eta^2 + \beta + 1)q^2 + q^4\eta^2(\beta + 1)^2r + q^4\eta^2(\beta + 1)^2 \right) (r - 1)\zeta_2^3 \\
 & + \frac{1}{2}r^2 \left((q^2\mu\eta^2\beta + 1 + (\mu - 1)\eta^2)r^2 + q^2r\eta^4 - q^2\eta^2(\beta + 1) \right) \mu^2\zeta_2
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \mu} = & (\beta\eta^2q^4r + \eta^2q^2r)(r - 1)\zeta_2^4 - \frac{1}{8}\eta^6\mu^2q^4r\zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{4}\eta^2r(\eta^2((\mu + 1)\eta^2 - \beta - 1)q^2 - \eta^2 + r)q^2\mu\zeta_2^2 + \frac{1}{32}\eta^8\mu^3q^4r
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \mu} = & -8 \left((\beta q^2 r + r)(\mu + 1)q^2 \eta^4 + ((\beta \mu r - \beta - 1)q^2 + r(\mu + 1))q^2 \eta^4 \right. \\
 & \left. + ((\beta + 1)\beta r q^4 + (-\beta r^2 + (\beta + 2)r)q^2 - r^2)\eta^2 \right) (r - 1)\zeta_2^4 \\
 & + \eta^2 ((\beta q^2 r^2 + r^2)q^2 \eta^4 + \eta^2 q^2 r^2) \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & + 2\eta^2 \left(((\beta \mu r^2 + \beta + 1)q^2 + r^2(\mu + 1))q^2 \eta^4 \right. \\
 & \left. - r((\beta + 1)^2 q^4 + ((-\mu - 2)r + 2\beta + 4)q^2 + r^2)\eta^2 + r^2(1 + (\beta + 1)q^2) \right) \mu \zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{2} q^2 r^2 \mu^3 \eta^6
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 = \frac{\partial f_3}{\partial \mu} = & -2\eta^2 q^2 r^2 (r - 1)\zeta_2^4 + \frac{1}{4} r^4 (\beta \eta^2 q^2 + \eta^2) \mu^2 \zeta_2^2 \\
 & + \frac{1}{2} r^2 \left((q^2 \mu \eta^2 \beta + 1 + (\mu - 1)\eta^2)r^2 + q^2 r \eta^4 - q^2 \eta^2 (\beta + 1) \right) \mu \zeta_2^2 \\
 & - \frac{1}{16} r^4 \mu^3 \eta^2
 \end{aligned} \tag{C.24}$$