

Universidad Tecnológica de la Mixteca
Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz

**“Identificación algebraica del desbalance en un sistema rotor-cojinete
asimétrico de dos grados de libertad”**

Tesis

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico Automotriz

Presenta:

Félix Ambrocio Huerta

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Codirector de tesis:

Dr. Luis Vázquez Sánchez

Huajuapán de León, Oaxaca, México, julio de 2025.

Dedicatoria

El presente trabajo de tesis está dedicado con amor y cariño a toda mi familia. Su apoyo incondicional, sacrificio y amor han sido la base de mi formación académica.

A mis padres Elena y Félix por su sacrificio y apoyo incondicional, gracias por ser mi más grande inspiración.

A mis queridos hermanos, Omar, Tania y Sonia por su apoyo, cariño y motivación que me han brindado.

En memoria a los familiares y amigos que hemos perdido a lo largo de esta vida.

En memoria a mi perrito Buggy, un amigo que dejó grandes huellas en mi vida y en la de mis seres queridos.

Agradecimientos

Primeramente, quiero expresar mi agradecimiento a Dios por permitirme llegar a esta etapa de mi vida.

Agradezco a mis padres Elena Huerta Rojas y Félix Ambrosio González, ustedes han sido mi más grande inspiración para alcanzar esta meta. Les agradezco por siempre motivarme con sus consejos y enseñanzas, lo cual me ha ayudado a mejorar cada día. A ustedes les debo no solo mis logros académicos, sino todo lo que hoy en día soy. Este logro es el reflejo de su amor, sacrificio y apoyo incondicional que me han brindado.

A mis hermanos Omar, Tania y Sonia, su apoyo, consejos y regaños también han sido motivación para culminar con mis estudios. Este logro también es de ustedes.

A mi sobrinito Gael, quien forma parte de mi motivación para siempre dar lo mejor de mí.

A mis amigos y compañeros que formaron parte de esta trayectoria académica.

Agradezco al Dr. José Gabriel Mendoza Larios, por brindarme su confianza, conocimiento, experiencia y tiempo para llevar a cabo esta tesis. Al igual, le agradezco al Dr. Luis Vázquez Sánchez por sus observaciones y consejos.

A mis revisores de tesis, los Profesores Ing. José Eduardo Cruz Mayo, M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez y al Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría. Gracias por sus consejos, observaciones y sugerencias durante el desarrollo del presente trabajo.

Resumen

Son comunes las vibraciones en los sistemas rotodinámicos, sin embargo, excesivas vibraciones pueden ocasionar un mal funcionamiento de la máquina. El desbalance es el principal causante de las vibraciones en estos sistemas, y este puede aumentar las amplitudes de las mismas hasta un punto en el que el sistema entre en resonancia. Específicamente, los rotores con ejes de sección transversal asimétrica presentan un comportamiento dinámico con características diferentes a los rotores con ejes simétricos, y debido a que los métodos de balanceo de estos son escasos, el estudio de este tipo de rotores es de gran interés. Por ello en este trabajo se presenta el desarrollo del modelo matemático de un sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad considerando dos velocidades de operación del rotor: velocidad constante y velocidad variable. De la misma manera, considerando las dos condiciones de operación, se proponen los modelos matemáticos para los identificadores algebraicos de los parámetros de desbalance (magnitud y posición angular), con base en la técnica de identificación algebraica. La ventaja que ofrece la metodología propuesta es que funciona a bajas velocidades, sin ser necesario llevar el rotor a su velocidad nominal de operación para obtener la respuesta vibratoria del sistema. Los identificadores propuestos requieren como dato de entrada únicamente esta respuesta, es decir, solo quedan en función de los desplazamientos. En la condición de operación a velocidad variable, se considera una rampa de excitación de tipo lineal, estas respuestas son obtenidas por medio de la simulación del sistema. Los resultados numéricos muestran la rapidez de convergencia de los identificadores tanto de la magnitud del desbalance, como su posición angular, en un tiempo aproximado de 0.1 segundos a partir del inicio de la respuesta vibratoria del sistema.

Nomenclatura

a	Excentricidad	m
a^*	Desplazamiento en dirección U a partir del centro de rotación O_1	m
$a_{\eta e}$	Componente de la masa de desbalance en dirección X	-
$a_{\xi e}$	Componente de la masa de desbalance en dirección Y	-
a_e	Magnitud de la masa de desbalance	m
b^*	Desplazamiento en dirección V a partir del centro de rotación O_1	m
c	Coefficiente de amortiguamiento	$N \cdot s/m$
C	Matriz de amortiguamiento	-
d	Excentricidad	m
G	Gravedad	m/s^2
i	Vector unitario en dirección U del sistema rotatorio	-
I	Vector unitario en dirección X del sistema fijo	-
j	Vector unitario en dirección V del sistema rotatorio	-
J	Vector unitario en dirección Y del sistema fijo	-
k	Rigidez de los soportes	N/m
k_u	Rigidez del eje en dirección U del marco giratorio	N/m
k_v	Rigidez del eje en dirección V del marco giratorio	N/m
k_x	Rigidez del eje en dirección X del marco fijo	N/m
k_y	Rigidez del eje en dirección Y del marco fijo	N/m
K	Matriz de rigidez	-
m	Masa concentrada del sistema	kg
m_u	Masa de desbalance	kg
M	Matriz de masa	-
O	Eje de rotación respecto al marco fijo	-
O_1	Eje de rotación respecto al marco giratorio	-
t	Tiempo	s
T	Energía cinética	$J [Joules]$
u	Desplazamiento debido al desbalance en dirección U en el marco rotatorio	m
u_o	Desplazamiento inicial respecto al eje U	m
v	Desplazamiento debido al desbalance en dirección V en el marco rotatorio	m
v_o	Desplazamiento inicial respecto al eje V	m

α	Posición angular inicial de la masa (en condición de velocidad variable)	<i>rad</i>
α_e	Posición angular del desbalance	<i>rad</i>
φ	Posición angular inicial de la masa (en condición de velocidad constante)	<i>rad</i>
ϕ	Posición angular inicial de la masa concentrada	<i>rad</i>
ω_u	Velocidad crítica con respecto a la rigidez k_u	<i>rad/s</i>
ω_v	Velocidad crítica con respecto a la rigidez k_v	<i>rad/s</i>
Ω	Velocidad constante de rotación del rotor	<i>rad/s</i>
\cdot	Primera derivada con respecto al tiempo	
$\ddot{}$	Segunda derivada con respecto al tiempo	

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Justificación.....	4
1.3. Hipótesis.....	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos específicos	5
1.5. Metas	6
1.6. Metodología	6
2. Estado del arte.....	9
2.1. Comportamiento dinámico de los rotores asimétricos.	10
2.2. Balanceo de rotores asimétricos	13
2.3. Identificación de sistemas físicos.....	17
2.3.1. Modelos de sistemas	17
2.3.2. Señales.....	18
2.3.3. Criterios.....	19
2.4. Técnicas para la identificación de parámetros desconocidos de sistemas	19
2.5. Identificación algebraica para la estimación de parámetros en distintos sistemas...	20
3. Marco Teórico.....	24
3.1. Definición y características de los sistemas rotodinámicos	24
3.2. Análisis rotodinámico	24
3.3. Rotores	25
3.3.1. El eje.....	25
3.3.2. Soportes o cojinetes.....	26
3.3.3. El disco	26

3.3.4.	Masa de desbalance.....	26
3.4.	Rotores asimétricos	28
3.5.	Método de Newmark.....	31
3.6.	Técnica de identificación algebraica	33
3.6.1.	Base matemática.....	34
3.7.	Formulismo de Euler-Lagrange	36
3.8.	Rampa de excitación	37
4.	Modelado matemático.....	38
4.1.	Modelado del rotor asimétrico	38
4.2.	Solución de las ecuaciones.....	45
4.3.	El eje asimétrico en movimiento transitorio	48
4.4.	Identificación algebraica en línea de la excentricidad para un rotor asimétrico: Sistema de dos grados de libertad.	50
4.4.1.	Modelo matemático del identificador algebraico a velocidad variable	50
4.4.2.	Modelo del identificador algebraico a velocidad constante	54
5.	Simulación y resultados	57
5.1.	Identificación de los parámetros de desbalance a velocidad constante.....	57
5.2.	Identificación de los parámetros de desbalance a velocidad variable.....	62
	Conclusiones	66
	Bibliografía	69

Índice de Figuras

Figura 1.1. Metodología de la investigación implementada en el presente trabajo.	6
Figura 2.1. Diagrama polar de respuesta de un rotor simétrico [32].....	15
Figura 2.2. Diagramas polares de respuesta de un rotor asimétrico [33].	16
Figura 2.3. Gráfico obtenido con identificadores algebraicos para el parámetro de amortiguamiento de una suspensión automotriz regenerativa [53].....	22
Figura 2.4. Señales de los valores en simulación con los valores reales, en el análisis de un eje pitch de un helicóptero [54].	23
Figura 3.1. Esquema de un rotor [58].	25
Figura 3.2. Masa de desbalance.	26
Figura 3.3. Sección transversal simétrica y asimétrica de un eje [5].	29
Figura 3.4. Cigüeñal de un motor de combustión interna [59].	30
Figura 3.5. Rotor de dos polos de un turbogenerador [60].	30
Figura 4.1. Modelo del sistema.	39
Figura 5.1. Respuesta vibratoria del sistema rotor-cojinete asimétrico a velocidad constante.	58
Figura 5.2. Identificación de la magnitud del desbalance a $\Omega=1000$ "rpm".	59
Figura 5.3. Identificación de la posición angular del desbalance a $\Omega=1000$ "rpm".	60
Figura 5.4. Identificación de la magnitud del desbalance a $\Omega=3600$ "rpm".	60
Figura 5.5. Identificación de la posición angular del desbalance a $\Omega=3600$ "rpm".	61
Figura 5.6. Identificación de la magnitud del desbalance a velocidad variable.....	63
Figura 5.7. Identificación de la posición angular del desbalance a velocidad variable.	63
Figura 5.8. Diagrama de flujo del proceso de identificación de los parámetros de desbalance.	65

Índice de tablas

Tabla 3.1. Algoritmo con base al método numérico de Newmark.....	32
Tabla 5.1. Parámetros físicos de simulación del sistema a velocidad constante.....	58
Tabla 5.2. Parámetros físicos de simulación del sistema a velocidad variable.....	62

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Las vibraciones en los sistemas rotodinámicos están relacionadas con el desbalance existente en el rotor. Dicha condición se presenta debido a la no coincidencia entre el eje principal de inercia del rotor y el eje geométrico del sistema, lo cual puede ser generado, por ejemplo, por un montaje defectuoso de componentes o falta de simetría en partes rotativas de la máquina. Estas vibraciones son transmitidas a distintos componentes mecánicos, soportes y cojinetes del rotor [1]. Debido a esto, es de gran importancia mitigar los efectos de las vibraciones, por lo que el balanceo es el principal objetivo por tomar en cuenta. Este proceso consiste en agregar o remover material del rotor, de tal forma que el sistema quede en equilibrio, y de esta manera evitar amplitudes de vibración indeseables, garantizando así, el correcto funcionamiento del sistema.

La mayoría de los métodos de balanceo existentes funcionan solo para rotores simétricos, métodos como el balanceo por coeficientes de influencia y el balanceo modal son los más recurridos. Cabe mencionar que estos métodos funcionan óptimamente en rotores simétricos, los cuales poseen parámetros de rigidez igual en su sección transversal. Por otro lado, los rotores asimétricos son más complejos de balancear, debido a la diferencia entre los parámetros de rigidez en los ejes principales de inercia de su sección transversal, esta diferencia de rigidez conlleva a una excitación paramétrica, generando inestabilidad y perturbaciones en el comportamiento dinámico del rotor. Esta situación dificulta considerablemente la implementación de un método eficiente para su balanceo.

A través de los años, se ha desarrollado maquinaria rotatoria para que trabaje a velocidades cada vez más altas, esto ha provocado que su comportamiento dinámico sea de interés para su estudio. A causa del desbalance que se puede producir en estos sistemas, es de gran importancia establecer nuevos métodos de balanceo, lo cual requiere de identificar la masa de desbalance y su posición angular. Recientemente ha ido ganando campo la técnica de identificación algebraica, la cual tiene un enfoque distinto a las técnicas existentes para la identificación de parámetros. Esta se basa en el cálculo operacional y el álgebra diferencial. Para su implementación se requiere únicamente el modelo matemático del sistema que se requiere analizar, además, ofrece varias características favorables que la hacen atractiva para llevar a cabo distintos análisis tanto en sistemas lineales como no lineales. Una de las ventajas que ofrece esta técnica en la identificación de los parámetros del desbalance en sistemas rotodinámicos, es que la estimación de estos se realiza sin la necesidad de llevar al rotor hasta su velocidad nominal, evitando de esta manera las velocidades críticas del sistema.

Por otro lado, los sistemas físicos pueden ser representados mediante modelos matemáticos, que si bien, no logran describir con exactitud el comportamiento dinámico del sistema real, ayudan a llevar a cabo un análisis válido. En la mayoría de los casos los modelos se expresan por medio de ecuaciones diferenciales. En el caso de la ecuación general de movimiento de un sistema rotor-cojinete, se utiliza para conocer y predecir el comportamiento dinámico del sistema bajo diferentes condiciones de funcionamiento.

Por lo anterior, en este trabajo se presenta el desarrollo del modelo matemático de un sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad considerando dos velocidades de operación del rotor: velocidad constante y velocidad variable. Posterior a esto, con base en la técnica de identificación algebraica, se proponen los modelos matemáticos para los identificadores algebraicos de los parámetros del desbalance y su posición angular en los dos esquemas de operación antes mencionados.

1.1. Planteamiento del problema

A raíz de la revolución industrial surgió la necesidad de desarrollar máquinas rotatorias capaces de operar a velocidades elevadas, lo que introdujo nuevos desafíos en su diseño y operación. Debido a las altas velocidades, las máquinas se vieron obligadas a operar por encima de su frecuencia natural fundamental, lo cual obligó a los diseñadores a enfrentarse al fenómeno de resonancia. En esta condición de resonancia, las máquinas experimentan un incremento descontrolado en su actividad vibratoria, pudiendo alcanzar niveles tan altos como para provocar la fractura o el fallo de alguno de sus elementos que las conforman o de la máquina en sí.

La principal causa de vibraciones en la maquinaria rotatoria es el desbalance, este se produce cuando el eje principal de inercia del rotor no coincide con el eje geométrico del sistema, lo que genera la presencia de un punto pesado el cual se conoce como desbalance. En la literatura se han propuesto una gran cantidad de métodos orientados a la corrección del desbalance de las máquinas rotatorias, lo que se conoce como balanceo. Entre los métodos clásicos de balanceo se encuentran el de coeficientes de influencia y balanceo modal. Muchos de los métodos que se utilizan en la actualidad para el balanceo de la maquinaria rotatoria requieren varias corridas del sistema para la corrección del desbalance y algunos otros son complejos de implementar, lo que genera que el tiempo de balanceo se incremente y esto impacta negativamente en los costos de la implementación de estos procedimientos. De acuerdo con la literatura, la estimación de parámetros con la técnica de identificación algebraica se puede realizar en segundos, en comparación con otras técnicas que pueden tardar minutos, e incluso horas.

Aunado a los inconvenientes antes mencionados, si el eje de la máquina rotatoria es asimétrico ocasiona un problema adicional, debido a que se presenta una excitación paramétrica debido a la diferencia de rigidez en los dos ejes principales de inercia, por lo que los métodos clásicos ya no son aplicables para el balanceo de este tipo de rotores, y los métodos actuales son complejos.

Debido a que este tipo de rotores ha ido ganando campo en distintas aplicaciones, se sigue investigando hasta la fecha acerca del comportamiento dinámico y proponiendo métodos de balanceo que puedan lograr el equilibrio de los sistemas rotodinámicos con asimetría, en el menor tiempo posible.

1.2. Justificación

La resonancia es un fenómeno que sucede cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema, y puede ocasionar que los efectos del desbalance sean irreversibles. Este fenómeno puede generar consecuencias como: aumento de ruido y vibración en los rotores, una reducción de la vida útil de los rodamientos, así como aumentos de los esfuerzos de operación y el consumo de energía. La causa principal de las altas vibraciones en las máquinas rotativas se debe al desbalance, este se puede generar debido a la asimetría del diseño, tolerancias de fabricación y ensamblaje, no homogeneidad del material, distorsión en servicio, corrosión y desgaste, y acumulación de depósitos. Existen diversos métodos de balanceo (coeficientes de influencia, balanceo modal, gráficos, etc.) y a pesar de esto el rotor nunca se balancea perfectamente.

La eliminación total del desbalance en un rotor es técnica y prácticamente imposible, sin embargo, existen normas que establecen tolerancias de desbalance y procedimientos para tomar en cuenta al momento de balancear rotores, normas como la ISO 21940-11 que aplica para rotores con comportamiento rígido, o la ISO 21940-12 la cual es considerada para correcciones de balanceo de rotores con comportamiento flexible.

Un inconveniente adicional se tiene cuando el eje de la máquina rotatoria es asimétrico. Para este tipo de rotores de eje asimétrico ya no son aplicables los métodos de balanceo convencionales, ya que se genera una excitación paramétrica debido a la variación de rigidez del eje en sus ejes principales de inercia, lo que hace que la tarea de balanceo de este tipo de rotores sea compleja. Es por ello, que en este trabajo de investigación se propone la implementación de la técnica de identificación algebraica con el objetivo de desarrollar un

identificador de los parámetros de desbalance y que a partir de esto sea más sencillo balancear este tipo de rotores de eje asimétrico.

Si bien existen ya métodos de balanceo para este tipo de rotores, estos son complejos de implementar y necesitan de más tiempo para llevar a cabo el balanceo. Para implementar de manera óptima métodos como el balanceo modal o el de coeficientes de influencia, se requiere de la respuesta de vibración en estado estable para diferentes valores de frecuencia de la excitación, por lo que es necesario realizar varias corridas de prueba y llevar a la máquina hasta su velocidad nominal de operación, en comparación con la técnica de identificación algebraica, la cual algunas de sus ventajas son que solo requiere de una corrida del sistema para la identificación del desbalance y funciona a velocidades bajas, evitando así las velocidades críticas del sistema.

1.3. Hipótesis

Mediante la implementación de la técnica de identificación algebraica se logrará la determinación de los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Determinar los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad, utilizando la técnica de identificación algebraica, con el fin de optimizar el procedimiento de balanceo.

1.4.2. Objetivos específicos

- 1.- Obtener el modelo matemático del sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad mediante la aplicación del formulismo Euler-Lagrange.

- 2.- Desarrollar el modelo del identificador de los parámetros de desbalance empleando la técnica de identificación algebraica.
- 3.- Realizar un programa del identificador de los parámetros de desbalance en la plataforma de programación Matlab Simulink.
- 4.- Analizar los resultados en simulación del identificador algebraico de los parámetros de desbalance.

1.5. Metas

- 1.- Desarrollar el modelo matemático del sistema rotor-cojinete de dos grados de libertad.
- 2.- Desarrollar del modelo matemático del identificador de los parámetros de desbalance.
- 3.- Realizar la simulación del identificador de los parámetros de desbalance.

1.6. Metodología

La metodología implementada para llevar a cabo el presente trabajo de tesis se muestra en el esquema de la Figura 1.1. Este método propuesto por Canales *et al.* [2] básicamente consta de 7 etapas que se describen a continuación.



Figura 1.1. Metodología de la investigación implementada en el presente trabajo.

- I. Documentación. Antes de comenzar un desarrollo de una investigación es necesario documentarse sobre el tema a desarrollar. Se recopilaron artículos científicos relevantes relacionados con el comportamiento dinámico de rotores asimétricos y técnicas de balanceo. Acerca de la identificación algebraica, se reunieron artículos y documentos para tener un mejor panorama de lo que implica esta técnica, y de las aplicaciones en donde se ha implementado.
- II. Determinación del problema. En esta parte se da a conocer el problema general con el que se va a enfrentar. Específicamente el problema en este trabajo de investigación es identificar los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico de dos grados de libertad.
- III. Creación de la hipótesis. Con la información recabada durante el proceso de la *documentación* se puede realizar una proposición aceptable a la que se espera llegar. La hipótesis formulada en el presente trabajo es la siguiente: Mediante la implementación de la técnica de identificación algebraica se logrará la determinación de los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad.
- IV. Definición del método de trabajo. Se hará uso del Formulismo de Euler-Lagrange para obtener el modelo matemático del sistema roto-cojinete de eje asimétrico de dos grados de libertad. Así también se implementará la técnica de identificación algebraica para el desarrollo del modelo matemático de los identificadores.
- V. Resolución, validación y verificación. Se realizará un programa en la herramienta computacional Matlab para los identificadores, y así obtener los resultados numéricos y sus gráficas correspondientes.
- VI. Análisis de resultados y elaboración de conclusiones. Posterior a la obtención de los resultados, se proseguirá a realizar una comparación con los resultados presentados en

el documento. Se deberá informar si los resultados obtenidos respaldan la hipótesis y los objetivos establecidos al inicio del trabajo de investigación.

- VII. Redacción del informe final. Una vez que se ha finalizado con el desarrollo se redactará de manera concisa acerca de los resultados, descubrimientos, comprobaciones y análisis determinados a lo largo de todo el proceso de investigación.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

Durante los últimos tres siglos se han desarrollado teorías sobre sistemas rotodinámicos, centradas en el análisis del comportamiento dinámico y en la determinación de los parámetros que influyen en el comportamiento inestable del rotor, así como propuestas de balanceo de estos sistemas.

A finales del siglo XIX hubo un gran desarrollo de la teoría de vibraciones y a la vez un rápido progreso en el desarrollo de maquinaria, destacando los avances de locomotoras y turbinas de vapor. Luego, durante el siglo XX varias compañías proveedoras de máquinas eléctricas tomaron como fundamento el estudio realizado por Jeffcott [3] con el fin de desarrollar generadores de dos polos para que operaran con velocidades de trabajo por encima de sus velocidades críticas. El rotor de estos generadores presenta una sección transversal asimétrica, esta asimetría sería la causante del comportamiento dinámico distinto al de los rotores que hasta ese entonces se habían analizado. A partir de entonces se han diseñado rotores con ejes flexibles y más largos, con el fin de trabajar por encima de sus velocidades críticas y aumentar la energía de salida, como consecuencia, el rotor se volvió más sensible a las vibraciones, y por consiguiente al desbalance.

Según la literatura, se han realizado investigaciones acerca del comportamiento dinámico de los rotores asimétricos y se han propuestos métodos de balanceo, sin embargo, estos suelen ser idealizados, complejos de aplicar y es necesario realizar múltiples corridas de prueba para lograr el estado de equilibrio del sistema. Por ejemplo, Parkinson [4] en una investigación empleó el método de balanceo modal con el uso de diagramas polares de respuesta, para estimar la magnitud y posición angular del plano de desbalance en un rotor con eje asimétrico. Es importante recalcar que en [5] el autor menciona que este método resulta impreciso al aplicarlo en un sistema real, debido a que se requiere identificar puntos en el diagrama polar de respuesta para calcular la posición angular del desbalance.

2.1. Comportamiento dinámico de los rotores asimétricos.

Los primeros estudios sobre los rotores asimétricos se remiten entre los años de 1930-1940, trabajos de Smith [6] y Taylor [7], abordan temas sobre el comportamiento de los rotores con asimetría. El interés sobre el estudio de estos rotores se dio a causa de que estos operaban por encima de sus velocidades críticas, y presentaban un comportamiento dinámico muy diferente al de los rotores con ejes simétricos. El modelo utilizado en [7] es una versión basada del presentado por Jeffcott [3], y tenía como finalidad estudiar la inestabilidad de un turbogenerador de dos polos, por lo que verifica sus resultados experimentalmente mediante un rotor a escala, revelando que la influencia de pesos adicionadas en una misma posición angular del rotor no guarda proporcionalidad con la respuesta vibratoria. Durante la década de los 40's también se cuentan con trabajos de Foote *et al.* [8] y Dick [9]. En este último se menciona que cuando un eje gira horizontalmente, la fuerza de gravedad produce un giro inducido, lo cual sucede a dos veces de la velocidad del eje. A principios de los 60's se cuentan con trabajos como el de Hull [10], quien realizó un estudio sobre el efecto del giro generado en tres casos distintos; en el cual realiza configuraciones de asimetría y/o simetría entre los ejes y cojinetes. En general se muestra que este tipo de combinaciones tiene una influencia en la dinámica del giro del rotor, generando efectos como los giros inversos o frecuencia doble. Ampliando de esta manera el trabajo de Smith [6].

Durante la misma década, con la finalidad de ampliar el panorama sobre la vibración de segundo orden y por consiguiente obtener un mejor análisis acerca de los rotores asimétricos, en particular sobre los rotores de los generadores de dos polos, Bishop y Parkinson [11], presentaron un trabajo en el que realizaron un análisis modal. Este análisis fue la base del trabajo presentado en [4]. También Yamamoto *et al.* [12], [13], llevaron a cabo investigaciones acerca de las vibraciones inestables generadas en los rotores asimétricos. Demuestran tanto teórica como experimentalmente, que las regiones inestables de un rotor asimétrico pueden ser eliminadas mediante una combinación adecuada de desigualdades de rigidez e inercia.

A partir de estas investigaciones, distintos autores presentaron más trabajos en los cuales tomaron en cuenta más efectos que influyen en el comportamiento dinámico de este tipo de rotores. A continuación, se enlista una serie de investigaciones:

En 1976 Ardayfio y Frohrib [14], presentaron un trabajo sobre el estudio del comportamiento dinámico de un rotor con asimetría tanto en la inercia como en la rigidez del eje, el modelo de rotor empleado fue el propuesto por Yamamoto y Ota [13], con la diferencia de que agregaron la flexibilidad de los soportes, y concluyeron que esta tiene un gran efecto en la tendencia de las regiones de velocidad inestable. Un trabajo similar realizó Ota en colaboración con Mizutani [15]. Otro trabajo realizado en ese año fue elaborado por Childs [16], en el cual desarrolla una formulación modal para una simulación transitoria de un rotor flexible asimétrico con soportes flexibles asimétricos.

A principios de los 80's Inagaki *et al.* [17] llevaron a cabo un trabajo de investigación en el que tratan el análisis de la respuesta de un sistema rotor-cojinete asimétrico. Consideraron la rigidez del eje ligeramente asimétrica tanto en flexión como en corte, y el momento de inercia de una masa transversal también la consideraron asimétrica. Los resultados numéricos obtenidos comparados con los experimentales muestran una variación aceptable, así que el autor menciona que los resultados pueden ser utilizados para el diseño y balanceo de sistemas rotor-cojinete, así como para el diagnóstico de problemas de vibración.

Por otro lado, Genta [18], realizó un estudio sobre el comportamiento dinámico de flexión de un rotor asimétrico. Para abordar su análisis, utilizó el Método del Elemento Finito y

coordenadas complejas. El autor menciona que el modelo propuesto puede contemplar parámetros de amortiguación, y partes no rotatorias de la máquina. Además, alude a que la formulación del modelo se le puede agregar grados de libertad adicionales en los nodos para estudiar problemas acoplados, como los que se encuentran en los cigüeñales o en máquinas complejas.

En la década de los 90's se cuentan con trabajos realizados por Jei y Lee [19], en el cual llevan a cabo un análisis de un sistema rotor-cojinete asimétrico, considerando los efectos de la inercia rotatoria y el momento giroscópico. Desarrollan un método de solución para el análisis de vibración de un eje asimétrico uniforme en rotación, además analizaron las resonancias de sistemas rotor-cojinete asimétricos. Otro trabajo de estos autores se muestra en [20], en el cual analizaron las características modales de rotores asimétricos asociadas con la rotación del rotor, con diferentes grados de asimetría. Mediante los desplazamientos modales complejos, identificaron los modos hacia delante y hacia atrás.

Kang *et al.* [21] desarrollaron una matriz de transferencia modificada para analizar la inestabilidad de sistemas rotor-cojinete asimétrico. Como conclusiones de su trabajo obtienen que las regiones inestables se amplían al aumentar la asimetría del eje en el mismo modo, así también mencionan que la amortiguación en los cojinetes tiene efectos de estabilización y desestabilización en estos sistemas.

En los últimos 25 años se ha seguido investigando acerca del comportamiento de los rotores asimétricos. Oncescu *et al.* [22], incorporan el efecto de la asimetría del eje en un procedimiento de Elemento Finito junto con la teoría de Floquet. Evalúan la eficiencia de la estabilidad de un sistema general de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos al aplicarlo a rotores asimétricos. Con ejemplos numéricos demostraron que el método del elemento finito y el método de la matriz de transferencia-tiempo es una forma conveniente de predecir el comportamiento de rotores asimétricos.

Nandi y Neogy [23] realizaron un estudio sobre la eficiencia de estabilidad del análisis de elemento finito de rotores asimétricos en un plano rotatorio. Los autores mencionan que para este tipo de análisis se requiere lidiar con un gran conjunto de ecuaciones diferenciales lineales

homogéneas con coeficientes periódicos, considerando que el marco giratorio gira alrededor de la línea central no deformada del rotor a una velocidad igual a la velocidad de giro del eje. Una de sus conclusiones es que se puede utilizar una amortiguación isotrópica suficientemente alta para estabilizar un rotor asimétrico inestable.

Según la literatura la implementación del elemento finito para el estudio de la inestabilidad en rotores asimétricos ha mostrado tener una gran eficiencia. Por otro lado, existen trabajos en los que se han implementado modelos de rotor de elementos finitos en 3D que muestran también buenos resultados, puesto que se pueden considerar geometrías complicadas y condiciones de contorno, por ejemplo. Nandi y Neogy [24] desarrollaron una formulación de elemento finito en 3D para analizar la velocidad crítica y giros de rotores con secciones transversales variables. Wang *et al.* [25] presentan un modelo generalizado y eficiente para sistemas rotatorios con anisotropía en el rotor y cojinetes (anisotropía en rigidez, inercia y amortiguamiento). El movimiento está regido por ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicamente variables en el tiempo. Para poder resolver dichas ecuaciones hacen uso de un método de síntesis de modos de componentes complejos (CMS) para generar modelos de orden reducido, y emplean una variante del método de Hill para sistemas con múltiples excitaciones armónicas. Una de las conclusiones de sus resultados numéricos es que la anisotropía en los cojinetes respecto a coeficientes de amortiguamiento afecta principalmente a las amplitudes de respuesta del sistema. Otro trabajo sobre modelos sólidos de elemento finito en 3D fueron realizados por Zuo *et al.* [26] y Lazarus *et al.* [27].

2.2. Balanceo de rotores asimétricos

Existen métodos convencionales para el balanceo de sistemas rotodinámicos; el método de balanceo modal, el de coeficientes de influencia, junto con el uso de diagramas polares de respuesta, son los que se han utilizado para el balanceo de rotores simétricos. Con el método de coeficientes de influencia se mide físicamente la amplitud de vibración y la fase del eje con pesos de prueba. Esto se realiza con la finalidad de obtener el coeficiente de influencia a partir de ecuaciones que integran estos datos de vibración, para posteriormente determinar la masa de balanceo que se requiere para equilibrar el rotor. Además, existen dos formas de balancear el

rotor; agregando o removiendo masa en una dirección específica. Mientras que el balanceo modal consiste en determinar un arreglo de masas específico para cada modo de vibración del sistema, de tal forma que el siguiente modo a balancear no afecte a los modos previamente balanceados. En el balanceo modal clásico se hace la suposición de que la respuesta del rotor es lineal.

Por otro lado, para los rotores asimétricos, los métodos de balanceo antes mencionados ya no son aplicables tal como fueron establecidos para los rotores simétricos, debido a la excitación paramétrica generada en estos por la asimetría del eje. Sin embargo, el método de coeficientes de influencia ha sido modificado para proponer nuevas técnicas que sean aplicables a rotores asimétricos.

Matsukura *et al.* [28], analizaron los desequilibrios residuales después de una serie de compensaciones a rotores flexibles con asimetría, utilizaron el método de coeficientes de influencia, al cual le agregaron un factor de convergencia (similar a un factor de convergencia en los métodos iterativos de cálculo numérico), con la finalidad de que los desequilibrios residuales convergieran y disminuyeran rápidamente. Dicho factor es verificado teóricamente, obteniendo resultados favorables, pero debido a que el factor que agregaron depende de varios parámetros, hacen que este método sea complicado para lograr el balanceo.

Kang *et al.* [29], llevaron a cabo un trabajo en el que presentan la formulación de matrices de coeficientes de influencia a partir de las ecuaciones de movimiento para rotores asimétricos mediante la representación de coordenadas complejas y el método de elementos finitos. Con base a esto proponen un método de balanceo modificado, el cual consiste en aplicar dos masas de prueba en cada plano de balanceo. Durante su formulación observaron que para determinar los coeficientes de influencia modificados es necesario realizar dos operaciones de prueba y precesiones hacia adelante calculadas a partir de la medición de respuestas desequilibradas.

Kang *et al.* [30], presentaron un método modificado para el balanceo de cigüeñales, mediante el uso de máquinas de pedestal blando. Este enfoque modificado lo verificaron mediante la teoría de coeficientes de influencia modificado para rotores asimétricos y la técnica de corrección iterativa, concluyendo que se puede lograr una mayor calidad de balanceo

mediante este método. Otro estudio en el que también hacen uso del método de coeficientes de influencia para el balanceo de cigüeñales de motores se muestra en [31].

Por otro lado, también se ha hecho uso de diagramas polares de respuesta para representar el comportamiento de la respuesta vibratoria de rotores asimétricos, esta respuesta se grafica en función del ángulo de fase. En el caso de los rotores simétricos, los gráficos tienen forma geométrica circular como se muestra en la Figura 2.1, con lo cual es fácil determinar la posición de la respuesta en resonancia; trazando una línea desde el centro del diagrama al punto más alejado del círculo, y la masa de desbalance se posicionará con un desfase negativo de 90° . Sin embargo, para los rotores asimétricos, esto no funciona de la misma manera.

En la Figura 2.2 se muestran dos diagramas polares de respuesta de un rotor asimétrico, en donde θ_d representa la posición angular f_d la fuerza de desbalance, y la velocidad angular ω del eje tiene sentido positivo, la frecuencia natural promedio está representada por ω^* . Las formas geométricas elípticas son características de la respuesta vibratoria de este tipo de rotores, para cada posición angular diferente se generan estas formas.

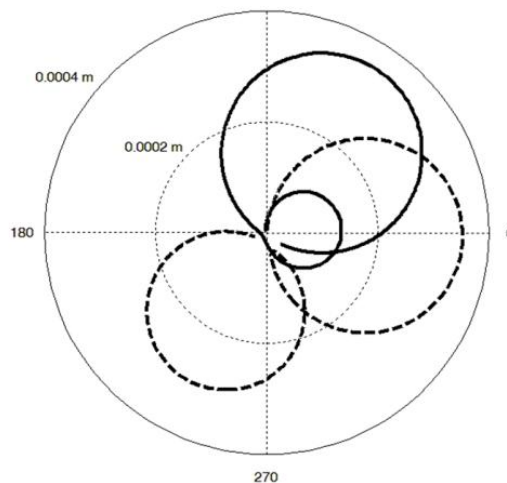


Figura 2.1. Diagrama polar de respuesta de un rotor simétrico [32].

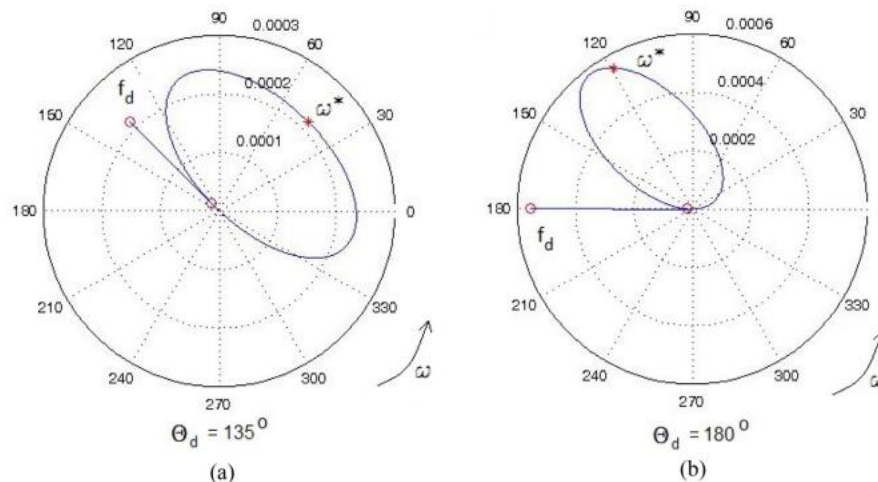


Figura 2.2. Diagramas polares de respuesta de un rotor asimétrico [33].

Esta forma elíptica generada en estos diagramas debido a la excitación paramétrica presente en el comportamiento dinámico de los rotores asimétricos hace que los métodos tradicionales de balanceo sean complejos a la hora de querer implementarlos en este tipo de rotores. En este caso, la respuesta vibratoria no guarda proporcionalidad con la fuerza de desbalance, y tanto depende de la posición angular del desbalance, como del factor de amortiguamiento modal. Además, es necesario realizar múltiples corridas y llevar al rotor hasta su velocidad nominal de operación.

Una propuesta de balanceo en donde emplean estos diagramas es la que presentan Colín *et al.* [33], en su investigación proponen una metodología para identificar la posición angular de la fuerza de desbalance en rotores asimétricos, la cual consiste en el desarrollo de un modelo identificador que requiere la información de la respuesta vibratoria de al menos cuatro puntos del diagrama polar de respuesta. Para resolver el identificador emplean el método numérico de Newton-Rhapson. Sus diagramas polares obtenidos experimentalmente muestran una pequeña diferencia con los teóricos, sin embargo, es necesario realizar más de una corrida, y llevar al rotor a su velocidad nominal de operación.

Trabajos recientes muestran un buen resultado al implementar la identificación algebraica a los sistemas rotodinámicos. Baltazar-Tadeo [5] expone el control de vibraciones en línea de un sistema rotor asimétrico-cojinete con discos de balanceo activo, en el cual toma ventajas del

balanceo modal convencional (arreglo de pesos modales) y lo integra con la metodología de identificación algebraica. En simulaciones numéricas logra reducciones de más del 90% en la amplitud de vibración del rotor, mientras que en pruebas experimentales logra reducciones mayores al 80%, (con condiciones de resonancia de cuatro modos de vibración en la primera, y dos en la segunda).

En [34], proponen un método integrado para el balanceo de sistemas rotor-cojinete asimétrico, el cual consiste en la implementación del método de balanceo modal convencional, en combinación con la técnica de identificación algebraica. En su trabajo utilizaron discos de balanceo activo (ABD) para llevar el sistema al estado de equilibrio. Sus resultados obtenidos avalan una reducción del 90% de la amplitud de respuesta vibratoria del rotor para los primeros cuatro modos de vibración. Otro trabajo similar se realizó en [35], en el cual, con la implementación del método algebraico ya mencionado, equilibraron numéricamente un rotor de múltiples grados de libertad considerando momentos principales de inercia diferentes en la sección transversal del eje y desequilibrio discreto. Sus resultados presentan una reducción del 95 % de la amplitud vibratoria del rotor en resonancia para cuatro modos de vibración.

2.3. Identificación de sistemas físicos

Según Zadeh [36] la identificación de sistemas se puede explicar de acuerdo con tres factores: La clase del modelo utilizado, el tipo de señales disponibles y el criterio de estimación. Si se cumple con estos tres requisitos se obtendrán resultados satisfactorios.

2.3.1. Modelos de sistemas

Para la identificación de un sistema se requiere de conocimiento previo de la relación de sus componentes, y se pueden expresar con distintos grados de fórmula matemática, a esto se le conoce como modelo del sistema. El modelo de un sistema describe su comportamiento, estas descripciones pueden presentarse en forma verbal, diagramas, gráficas o mediante modelos matemáticos, depende del sistema que se desea modelar. El uso previsto determinará el grado de sofisticación necesario para que el modelo sea útil.

El modelo matemático de un sistema es una representación aproximada de su comportamiento real. Esta representación se estructura mediante expresiones matemáticas; generalmente ecuaciones diferenciales, que describen las relaciones entre las variables del sistema. Los modelos matemáticos se pueden clasificar en modelos lineales y no lineales.

- *Modelos lineales y no lineales*

Existe una multitud de modelos matemáticos lineales, por lo que en una investigación se debe restringir a cierta clase definida de modelos (por ejemplo, modelos EE en tiempo continuo, modelos en Espacio de los Estados y modelos de función de transferencia). Los sistemas no lineales tienen estructuras más complejas, pueden mostrar diferentes tipos de patrones de comportamiento según los parámetros y características del sistema. Por lo que se debe aprovechar el conocimiento físico que se tenga del sistema para tratar de expresar las no linealidades de una manera concisa.

Entonces, dado que es imposible estructurar un modelo matemático exacto del comportamiento dinámico real del sistema, la exactitud de los resultados dependerá de la proximidad entre la respuesta que el modelo es capaz de generar y la respuesta medida del sistema.

2.3.2. Señales

La interpretación o manejo de señales es esencial para la identificación de sistemas, la mayoría de los sistemas físicos poseen una naturaleza continua en el tiempo. Sin embargo, debido a los avances digitales, se ha permitido hacer mediciones de señales continuas tomando muestras cada cierto periodo (señales discretas en el tiempo). Aunado a lo anterior, se tiene un error debido a esta discretización de la señal, ya que entre muestra y muestra, no se logra observar el curso de la señal verdadera.

Si bien la mayoría de los sistemas físicos se rigen por una naturaleza continua en el tiempo, se pueden encontrar sistemas en los que es necesario identificarlos con señales discretas en el tiempo. Por otro lado, si es requerido, estas señales se pueden transformar mediante la transformada de Fourier para trabajarlas en el dominio de la frecuencia.

2.3.3. Criterios

Por último, para que la identificación del sistema pueda tener solución, es necesario elegir un criterio para ajustar los parámetros del modelo seleccionado ante el conjunto de datos recabados en las señales. De esta manera, se puede generar una expresión matemática con el objetivo de realizar una evaluación del modelo, y, por consiguiente, describir el proceso generador de los datos observados. Esto se puede expresar según Trapero [37], mediante el error de predicción de un determinado modelo $M(\theta_*)$, de tal forma que:

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t, \theta_*) \quad (2.1)$$

y contemplando el siguiente conjunto de datos:

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad (2.2)$$

se pueden calcular los errores de predicción para $t = 1, 2, \dots, N$. De tal modo que se puede hallar una norma escalar o alguna función que permita medir el tamaño de ε , o bien hacer que $\varepsilon(t, \theta_*)$ sea cero, para obtener el menor error de predicción.

2.4. Técnicas para la identificación de parámetros desconocidos de sistemas

Existen distintas técnicas para la estimación de parámetros, dependiendo del tipo del sistema, el enfoque matemático utilizado y los datos disponibles. El filtro integral lineal, filtro de Kalman, e identificación por Series de Fourier, son algunas de estas técnicas, sin embargo, en [38] se menciona que, debido a la naturaleza de estos métodos son difíciles de implementar en sistemas más realistas. Algunos trabajos que implementan técnicas para la identificación de parámetros se muestran en [39], [40].

Estas técnicas se pueden clasificar en:

Técnicas paramétricas: tienen como objetivo estimar parámetros dentro de un modelo especificado (como funciones de transferencia o ecuaciones diferenciales), por lo que es necesario integrar un vector de parámetros dentro del modelo.

Técnicas no paramétricas: en este tipo de técnicas no se emplea un vector de parámetros de dimensión finita para buscar la mejor descripción. Se intenta estimar un modelo genérico a partir de respuestas de impulso, de frecuencia, respuestas escalonadas, etc.

Debido a la necesidad de interpretar sistemas reales en modelos matemáticos más precisos, estos métodos han resultado tener un gran impacto en la investigación y tecnología. Con esto se puede obtener un mejor análisis, simulación, control y detectar fallas de varios sistemas.

2.5. Identificación algebraica para la estimación de parámetros en distintos sistemas

De acuerdo con la literatura, existen trabajos en los que ha utilizado una técnica diferente a los métodos clásicos, conocida como técnica de identificación algebraica. La técnica de identificación algebraica fue propuesta en un inicio por Fliess y Sira Ramírez [41], como un procedimiento de identificación paramétrica de ciclo cerrado para sistemas lineales, la cual mediante simulaciones computacionales demostraron la robustez de esta técnica frente a una variedad de perturbaciones. Luego, en [42], Sira-Ramírez *et al.*, tratan dos enfoques distintos pero equivalentes para el método de identificación algebraica, un enfoque en el dominio del tiempo, el cual ya se había tratado en [41], y el otro en el dominio de la frecuencia.

Desde la propuesta de la técnica de identificación algebraica para la identificación de parámetros desconocidos de sistemas físicos, distintos autores han implementado esta técnica para identificar parámetros en distintos sistemas eléctricos, mecánicos y señales [43], [44], [45], [46], [47], [48].

También, es importante destacar que la técnica de identificación algebraica ya se ha utilizado para identificar parámetros de desbalance en sistemas rotor-cojinete; Arias-Montiel *et al.* [49] hicieron uso de esta técnica para la identificación de parámetros de desbalance en línea en un sistema rotor-cojinete. Junto con el Método de Elementos Finitos, sintetizaron un

esquema de control activo con el fin de atenuar las amplitudes de vibración lateral en el sistema mencionado.

Colín *et al.* [1] desarrollaron un modelo matemático de un identificador algebraico en línea para determinar el desbalance y su posición angular en sistemas rotodinámicos vibratorios de múltiples grados de libertad. El modelo matemático del identificador fue abordado por el método de identificación algebraica, y toma como dato de entrada la respuesta de vibración debido al desbalance a velocidad constante del sistema rotodinámico.

Mendoza-Larios *et al.* [50] en su trabajo presentan una metodología para balancear varios modos de vibración a la vez en un sistema rotor-cojinete. La metodología consiste en desarrollar un identificador en línea basado en la técnica de identificación algebraica para determinar la magnitud y posición angular del desbalance en el rotor, para posteriormente poder llevar el sistema al estado de equilibrio mediante el uso de discos de balanceo activo. Los resultados obtenidos son favorables, en donde los identificadores convergen a los valores reales en menos de 0.02 segundos.

También Mendoza-Larios *et al.* [51], desarrollaron una metodología con la implementación de la técnica de identificación algebraica para la determinación de coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento en un sistema rotor-cojinete. En el cual consideran efectos de la inercia rotacional, momentos giroscópicos, amortiguamiento externo, deformaciones por cortante y fuerzas atribuibles a los parámetros de rigidez y amortiguamiento de los soportes. Respecto a sus resultados, se puede observar en gráficos, como el identificador propuesto determina los parámetros identificados de los cojinetes, en menos de 0.06 seg. Lo que vuelve a demostrar la rapidez de la técnica de identificación algebraica para la determinación de parámetros.

Luego, Landa-Damas *et al.* [52], proponen el desarrollo de un método para identificar los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada, por medio de la técnica de identificación algebraica en línea, considerando un modelo de un sistema rotor-chumacera de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante. Validaron los coeficientes rotodinámicos identificados, mediante la comparación de la respuesta de vibración

experimental con la respuesta de vibración obtenida con el modelo de múltiples grados de libertad, tomando como dato de entrada los parámetros rotodinámicos identificados. Sus resultados demuestran como la identificación algebraica ayuda a determinar los parámetros en un tiempo menor a 0.1 segundos.

En las siguientes figuras, se muestran los gráficos de algunos resultados en el análisis de dos sistemas físicos obtenidos con la implementación de identificadores algebraicos. En la Figura 2.3, se tiene la respuesta del identificador del parámetro de amortiguamiento de una suspensión automotriz regenerativa, en la cual se puede observar, como los valores del identificador convergen al valor real alrededor de 0.1 segundos.

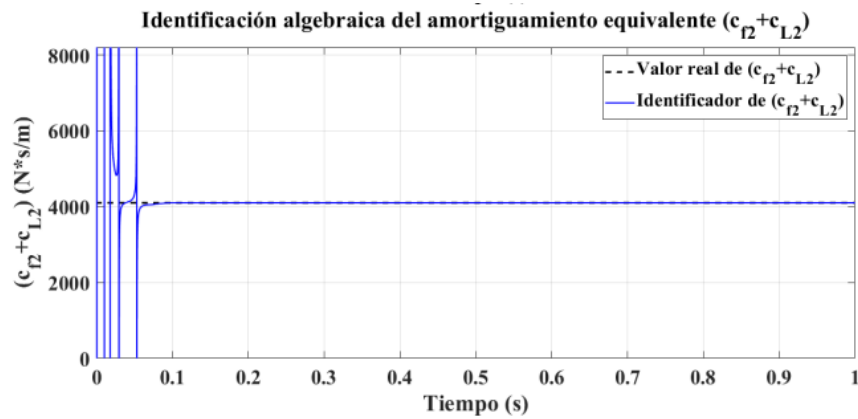


Figura 2.3. Gráfico obtenido con identificadores algebraicos para el parámetro de amortiguamiento de una suspensión automotriz regenerativa [53].

En la Figura 2.4, los valores de simulación fueron obtenidos con la técnica de identificación algebraica aunada con observadores GPI. En donde se hace uso de identificadores algebraicos para la estimación de los parámetros de interés. En la figura se puede ver como las señales de los valores de simulación convergen a los valores reales.

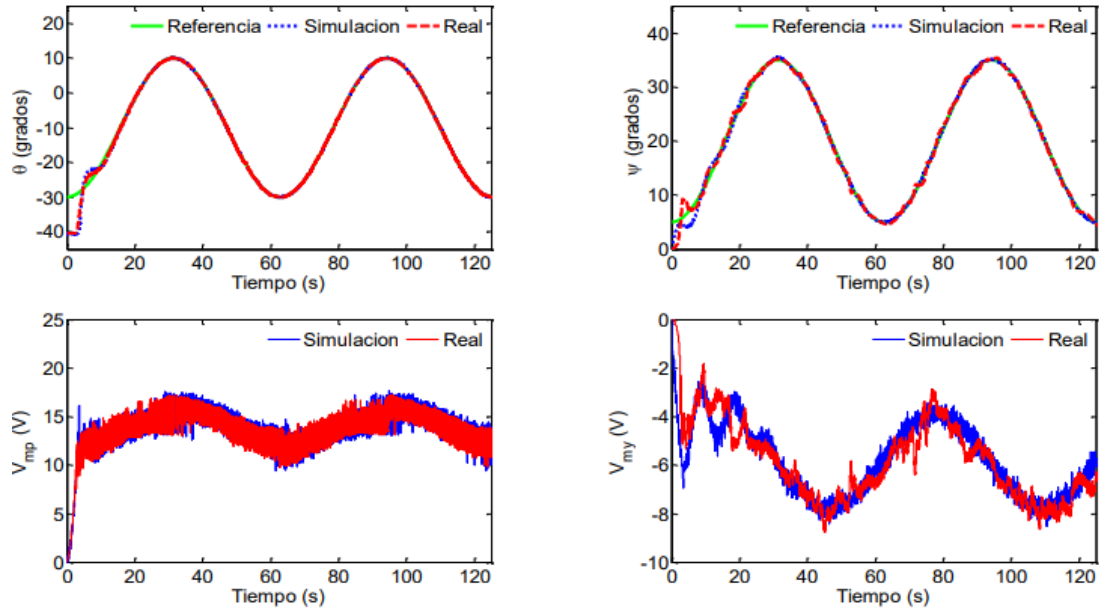


Figura 2.4. Señales de los valores en simulación con los valores reales, en el análisis de un eje pitch de un helicóptero [54].

Esto muestra como la técnica de identificación algebraica ha ido ganando campo en la investigación, convirtiéndola en un método que, a diferencia de otras técnicas de identificación, muestra tener una gran robustez frente a incertidumbres que pudieran afectar a la obtención correcta de las señales de respuesta de los sistemas.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

3.1. Definición y características de los sistemas rotodinámicos

Se define como sistema rotodinámico a la máquina conformada por rotores, engranajes, ejes y turbinas. Estos sistemas involucran fuerzas inerciales, efectos de velocidad angular, efecto Coriolis y efectos giroscópicos, así como vibraciones y resonancias, los cuales son efectos que impactan en el rendimiento de la máquina rotativa [55]. Estos sistemas están diseñados para convertir energía mecánica en eléctrica o viceversa.

3.2. Análisis rotodinámico

Según [56] el análisis rotodinámico “es la dinámica de las máquinas rotatorias”, es decir, se analizan todos los efectos generados por las fuerzas que actúan en el exterior o en el mismo sistema. Debido a que estos efectos provocan el mal funcionamiento de la máquina, algunos de los objetivos que tiene este análisis son: predecir velocidades críticas, amplitudes de vibración síncrona debido al desbalance, así como la corrección del desbalance, permitiendo de esta manera la reducción de la inestabilidad del rotor.

3.3. Rotores

Los rotores son quizá las máquinas rotatorias más conocidas en las distintas industrias, ya que estos pueden llegar a tener un gran impacto negativo en toda la maquinaria debido a los efectos producidos por las altas vibraciones, es debido a esto por lo que en ellos se centran los análisis rotodinámicos para propósitos de balanceo.

En la Figura 3.1, se muestra un esquema de los elementos que conforman un rotor [57]. Consta de un eje (S), soportes o cojinetes (B), representados por resortes y/o amortiguadores, y un disco (D), este último es el principal responsable en el aumento del pico de resonancia en las velocidades críticas. La masa de desbalance (m_u) también es considerada como un elemento más del rotor.

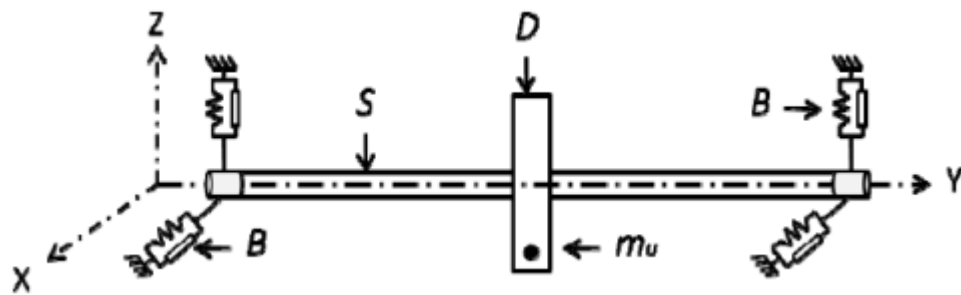


Figura 3.1. Esquema de un rotor [58].

3.3.1. El eje

Generalmente, en el análisis de los sistemas rotodinámicos, el eje se ha considerado como una serie de elementos lineales o de viga. Es la pieza o elemento fundamental, ya que rige el funcionamiento y determina la velocidad de giro de la máquina, además, es el principal responsable de transmitir las vibraciones a los mecanismos presentes en estos sistemas, como los rodamientos, acoples, soportes, etc.

3.3.2. Soportes o cojinetes

Habitualmente, en los trabajos presentados sobre el análisis dinámico de las máquinas rotatorias, los cojinetes han sido considerados como los únicos elementos entre el eje y la carcasa para llevar a cabo el análisis del rotor. Estos son caracterizados en términos de rigidez k , y amortiguamiento c , los cuales son considerados conocidos.

3.3.3. El disco

El disco es asumido como rígido o como una masa concentrada, por lo que es caracterizado únicamente por su energía cinética.

3.3.4. Masa de desbalance

El desbalance se define como una masa m_u , la cual se localiza a una distancia a , a partir del centro geométrico del eje. Permanece en un plano perpendicular al eje y , y su coordenada permanece constantes a lo largo de este eje.

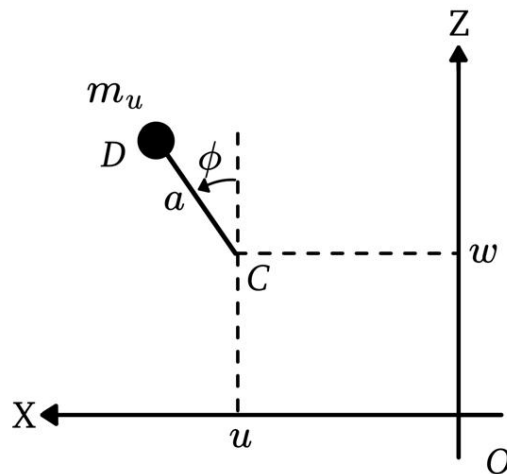


Figura 3.2. Masa de desbalance.

De acuerdo con el diagrama mostrado en la Figura 3.2 las coordenadas del desbalance se expresan como:

$$OD = \begin{bmatrix} u + a\sin(\phi) \\ constante \\ w + a\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A partir de la ecuación (3.1), se puede obtener la velocidad, derivando respecto al tiempo:

$$V = \frac{d(OD)}{t} = \begin{bmatrix} \dot{u} + a\dot{\phi}\cos(\phi) \\ constante \\ \dot{w} - a\dot{\phi}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La expresión para la energía cinética se expresa como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.3)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad y la masa de desbalance m_u en la ecuación (3.3), se obtiene:

$$T = \frac{m_u}{2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}a\dot{u}\cos(\phi) - 2\dot{\phi}a\dot{w}\sin(\phi)) \quad (3.4)$$

El termino $\frac{m_u}{2}a^2\dot{\phi}^2$ es una constante y no tiene influencia en las ecuaciones. Además, la masa de desbalance se considera pequeña respecto a la masa del rotor. Con estas consideraciones, la expresión para la energía cinética se puede escribir de la siguiente manera:

$$T \cong m_u\dot{\phi}a(\dot{u}\cos(\phi) - \dot{w}\sin(\phi)) \quad (3.5)$$

Para obtener el vector de fuerza generado por la masa m_u , se aplican las ecuaciones de Lagrange.

3.4. Rotores asimétricos

Los rotores pueden ser clasificados en rígidos o flexibles, en el primero existe una mínima deformación en el eje, en comparación con los flexibles, los cuales presentan una deformación más notable. Estas deformaciones se presentan dentro del rango de velocidades de operación de los rotores, independientemente de las dimensiones del eje o del mismo rotor. Por otro lado, la ISO clasifica en cinco grupos a los rotores según el tipo de balanceo requerido; rotores rígidos, flexibles, cuasi flexibles, de acoplamiento flexible, y rotores flexibles de una única velocidad.

De acuerdo con la rigidez que poseen los rotores en su sección transversal estos pueden clasificarse en simétricos o asimétricos; los primeros poseen parámetros de rigidez igual en toda su sección transversal, por otro lado, si los parámetros de rigidez son distintos en los ejes principales de inercia, se trata de un rotor asimétrico. La asimetría afecta a las velocidades críticas y a la magnitud de la respuesta al desbalance de este. También es importante mencionar que los rotores simétricos se pueden volver asimétricos solo si se desarrolla una fisura en el eje, esto hace que su rigidez ya no sea simétrica.

Por otro lado, la rigidez implica parámetros como el momento de inercia y el área. En la Figura 3.3, se tienen dos secciones transversales, en la primera, el momento de inercia será el mismo tanto en x y z , por lo que la rigidez es la misma para ambos planos del sistema, los planos xy y yz respectivamente. En la segunda sección transversal, a un eje con geometría circular se le han realizado unos cortes. La asimetría generada hace que el momento de inercia con respecto de x y z sea diferente. En el caso de esta sección, el momento de inercia respecto a z es mayor que el generado respecto a x , debido a que existe una mayor área de rotación, esto hace que se tenga una rigidez diferente, afectando directamente el comportamiento dinámico del sistema.

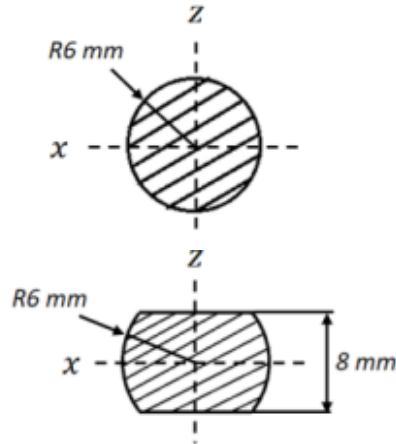


Figura 3.3. Sección transversal simétrica y asimétrica de un eje [5].

En [6], Smith menciona que las velocidades críticas de los rotores con partes giratorias asimétricas ocurren en pares que engloban rangos de velocidad altamente inestables, además, la fricción interna (la cual él llamó “amortiguación rotatoria”) puede contribuir a la inestabilidad del rotor. Al igual en [7], el autor concluye que la fuerza elástica tiene una componente radial que es paralela al desplazamiento y una tangencial que es perpendicular a la dirección del desplazamiento, esta segunda componente la consideró como una característica única de las flechas asimétricas.

De acuerdo con diversos investigadores, el factor de asimetría modal y de amortiguamiento provocan que la respuesta de vibración del rotor presente cambios en los valores de amplitud y ángulos de fase para distintas posiciones angulares de la fuerza de excitación. Esto provoca que el estudio de estos rotores sea más complejo al momento de utilizar alguno de los métodos existentes para llevar a cabo el balanceo.

El cigüeñal (Figura 3.4), el rotor de dos polos de los turbogeneradores (Figura 3.5), las hélices de dos palas, y el árbol de levas, son claros ejemplos de rotores asimétricos.



Figura 3.4. Cigüeñal de un motor de combustión interna [59].



Figura 3.5. Rotor de dos polos de un turbogenerador [60].

3.5. Método de Newmark

El método de Newmark es un método numérico de integración directa utilizado para resolver ecuaciones diferenciales, y se basa en la aceleración promedio. Permite la solución directa de ecuaciones diferenciales de segundo orden o de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden sin la necesidad de transformarlas en un par de ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas. Este puede ser aplicado en varios campos de la ingeniería, particularmente a sistemas de respuesta dinámica.

En este método, son necesarios los parámetros β y γ , cuyos valores se deben elegir correctamente para lograr la precisión y estabilidad deseada en la integración, por lo que pueden cambiar dependiendo el enfoque del problema en particular. En el presente trabajo, el uso de este método es para solucionar las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad. Los valores de los parámetros que se consideran para la solución de estas ecuaciones son: $\beta=1/2$ y $\gamma=1/4$, esto implica que la aceleración se mantiene constante en un valor promedio de $(^{(t)}\ddot{\delta} + ^{(t+\Delta t)}\ddot{\delta})/2$.

Para poder implementar este método se supone que se conoce el comportamiento del sistema rotor-cojinete asimétrico, es decir, se conocen $\delta(t)$, $\dot{\delta}(t)$ y $\ddot{\delta}(t)$, desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente, en el instante t .

En el método de Newmark las expresiones para la velocidad y desplazamiento están dadas por:

$$^{(t+\Delta t)}\dot{\delta} = ^{(t)}\dot{\delta} + [(1 - \beta)^{(t)}\ddot{\delta} + \beta ^{(t+\Delta t)}\ddot{\delta}]\Delta t \quad (3.6)$$

$$^{(t+\Delta t)}\delta = ^{(t)}\delta + ^{(t)}\dot{\delta}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)^{(t)}\ddot{\delta} + \gamma ^{(t+\Delta t)}\ddot{\delta}\right]\Delta t^2 \quad (3.7)$$

A continuación, se muestra el algoritmo del método de Newmark utilizado en este caso para determinar el vector de desplazamientos (respuesta vibratoria) del sistema:

Tabla 3.1. Algoritmo con base en el método numérico de Newmark.

Cálculos iniciales	Para cada paso de tiempo
<p>1) Formular las matrices de rigidez $[K]$, masa $[M]$ y amortiguamiento $[C]$.</p> <p>2) Condiciones iniciales $\delta_0, \dot{\delta}_0, \ddot{\delta}_0$.</p> <p>3) Seleccionar el paso de tiempo Δt, los parámetros β y γ, y calcular las constantes de integración.</p> $\beta \geq \frac{1}{2}; \gamma \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \beta \right)^2$ $a_0 = \frac{1}{\gamma(\Delta t)^2}; a_1 = \frac{\beta}{\gamma(\Delta t)}; a_2 = \frac{1}{\gamma(\Delta t)}$ $a_3 = \frac{1}{2\gamma} - 1; a_4 = \frac{\beta}{\gamma} - 1;$ $a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\gamma} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \gamma);$ $a_7 = \beta \Delta t$ <p>4) Formular la matriz de rigidez efectiva: $[\hat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$</p> <p>5) Triangularizar $[\hat{K}]$: $[\hat{K}] = [L][D][L]^T$</p>	<p>1) Calcular el vector de fuerza efectiva en el tiempo $t + \Delta t$:</p> ${}^{(t+\Delta t)}\hat{F} = {}^{(t+\Delta t)}F + [M] \left(a_0 {}^{(t)}\delta + a_2 {}^{(t)}\dot{\delta} + a_3 {}^{(t)}\ddot{\delta} \right) + [C] \left(a_1 {}^{(t)}\delta + a_4 {}^{(t)}\dot{\delta} + a_5 {}^{(t)}\ddot{\delta} \right)$ <p>2) Resolver para los desplazamientos en el tiempo $t + \Delta t$</p> $[\hat{K}]^{t+\Delta t} \delta = {}^{(t+\Delta t)}\hat{F}$ <p>3) Calcular $\dot{\delta}$ y $\ddot{\delta}$ en el tiempo $t + \Delta t$:</p> ${}^{(t+\Delta t)}\ddot{\delta} = a_0 \left({}^{(t+\Delta t)}\delta - {}^{(t)}\delta \right) - a_2 {}^{(t)}\dot{\delta} - a_3 {}^{(t)}\ddot{\delta}$ ${}^{(t+\Delta t)}\dot{\delta} = {}^{(t)}\dot{\delta} + a_6 {}^{(t)}\ddot{\delta} + a_7 {}^{(t+\Delta t)}\ddot{\delta}$

3.6. Técnica de identificación algebraica

La técnica de identificación algebraica toma como base el álgebra diferencial y cálculo operacional para el desarrollo de estimadores que permiten identificar parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Es importante mencionar que la estimación de estos parámetros se realiza en línea y en tiempo continuo o discreto, esto significa que los parámetros de desbalance se pueden obtener mientras el rotor está ejecutando su tarea, además los identificadores que se obtienen son completamente independientes de las condiciones iniciales. Otra de las ventajas de esta técnica es que presenta buena robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones como: incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas y ruido.

Por otro lado, con esta técnica se puede trabajar por medio de dos enfoques:

Enfoque en dominio de la frecuencia: en este enfoque se emplea la transformada de Laplace y solo funciona para sistemas lineales.

La metodología para llevar a cabo el desarrollo del modelo del identificador es la siguiente:

- Aplicar la transformada de Laplace en la ecuación diferencial del modelo dinámico, y posteriormente se reordena con un polinomio en s .
- Derivar dos veces las ecuaciones con respecto a la variable s con el fin de eliminar las condiciones iniciales.
- Multiplicar las ecuaciones por s^{-2} con la finalidad de evitar las derivadas y regresar al dominio del tiempo.
- Finalmente, aplicar la transformada inversa de Laplace y despejar las variables de interés.

Enfoque en dominio del tiempo: en este caso, se recurre al uso de integrales, y funciona tanto para sistemas lineales, como no lineales.

En este enfoque se mantiene una analogía con respecto a la metodología en el dominio de la frecuencia.

- Multiplicar las ecuaciones por t^2 y se integra el resultado dos veces con respecto al tiempo t .
- Se hace uso de integrales iteradas para integrar toda la ecuación y obtener expresiones lineales en los parámetros usando el método de integración por partes. Se integra tantas veces sea necesario para igualar el número de ecuaciones al número de incógnitas.

El enfoque que quizá es el menos complicado, es el que se trabaja en dominio de la frecuencia, sin embargo, en este trabajo de tesis se trabajará con el enfoque en el dominio del tiempo, puesto que se tiene un sistema no lineal. El uso de esta técnica en sistemas rotodinámicos es principalmente para determinar la masa de desbalance y su posición angular. Posterior a la determinación de los parámetros mencionados, se puede proseguir a agregar o remover material al rotor para llevarlo al estado de equilibrio.

3.6.1. Base matemática

La configuración matemática para la identificación de los parámetros en sistemas lineales es la siguiente:

Sea k el campo de números \mathbb{R} o \mathbb{C} (números reales y/o complejos). Se denota K como la extensión algebraica finita del campo $k(\theta)$, generado por el conjunto finito $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ de parámetros desconocidos. Considere el anillo $K[\frac{d}{dt}]$ de operadores diferenciales con coeficientes en k :

$$\sum_{finito} c_v \frac{d^v}{dt^v}, \quad c_v \in K \quad (3.8)$$

Se supone que los parámetros son constantes, es decir, $\frac{d\theta_i}{dt} = 0, i = 1, \dots, r$. Así que, $K[\frac{d}{dt}]$ es un dominio de ideales principales conmutativos. Se considera un conjunto finito de

indeterminaciones, tal que (y_1, \dots, y_m) , en asociación con el anillo de operadores lineales diferenciales.

Estas indeterminaciones representan las variables que describen en el dominio del tiempo, las señales de donde se obtienen los parámetros desconocidos.

La forma más general en que los parámetros pueden aparecer en los coeficientes de una expresión diferencial incluye expresiones algebraicas las cuales implican sumas, multiplicaciones, raíces, etc., de tales parámetros. Es decir, las expresiones de los parámetros provienen de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que envuelven los parámetros desconocidos.

Sea S/K una extensión algebraica diferencial de dimensión finita, donde una señal es un elemento de S . Sea L/K una extensión algebraica diferencial y N un subconjunto de L . El sobre-campo diferencial de K generado por N se escribe tal que $K \langle N \rangle$.

Identificabilidad

El conjunto θ de parámetros desconocidos se dice ser algebraicamente identificable si, y solo si, cualquier componente de θ es algebraico sobre $k \langle t, y \rangle$. Se dice ser linealmente identificable si, y solo si,

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q \quad (3.9)$$

donde:

- P y Q son matrices $r \times r$ y $r \times 1$.
- Las entradas de P y Q pertenecen al rango $K[\frac{d}{dt}](1, y)$
- $\det(P) \neq 0$.

El rango $_{K[\frac{d}{dt}]}(1, y)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, y_1, \dots, y_m)$, es decir $D_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m D_i y_i$. Donde los coeficientes D_i pertenecen a $K[\frac{d}{dt}]$. Por tanto, D_i es un operador diferencial de la forma:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{k=0}^{k_j} a_{k,j} t^k}{\sum_{l=0}^{l_j} b_{l,j} t^l} \right) \frac{d^j}{dt^j} \quad (3.10)$$

con $a_{k,j}, b_{l,j} \in k$.

3.7. Formulismo de Euler-Lagrange

Todo lo que pasa a nuestro alrededor se puede modelar mediante las Leyes de Newton, estas leyes estudian las fuerzas que se ejercen en la interacción de los cuerpos. La naturaleza de estas leyes es vectorial, por lo que implican el uso de magnitudes con dirección y sentido, lo cual complica el análisis para sistemas complejos. Por otro lado, existe otra formulación que, partiendo de la física vectorial de Newton, hace generalizaciones en cuanto a los sistemas coordinados y tipos de fuerzas que interactúan en un evento, esto hace que se pueda llevar ese análisis vectorial a un estudio de componentes escalares del movimiento, basado en condiciones energéticas, llamado formulismo de Euler-Lagrange.

La ecuación fundamental de Lagrange se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.11)$$

donde q_i es el desplazamiento generalizado y \dot{q}_i es la velocidad generalizada, con $i = 1, 2, \dots, N$. Las coordenadas generalizadas son un conjunto de coordenadas linealmente independientes que especifican la configuración del sistema, y son independientes de cualquier restricción.

Para las fuerzas que poseen potencial, donde las fuerzas generalizadas Q_i actúan sobre el sistema, las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir de la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.12)$$

El Lagrangiano se define como $\mathcal{L} = T - U$, donde T es la energía cinética y U es la energía potencial del sistema. Por lo tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.11), se obtiene la siguiente ecuación para un sistema conservativo.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (3.13)$$

En el presente trabajo de tesis se hace uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F q_i \quad (3.14)$$

en donde $F q_i$ representa las fuerzas generalizadas.

3.8. Rampa de excitación

Se denomina rampa de excitación al cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo, y puede ser expresada mediante una función creciente o decreciente. Según la literatura para la mayoría de los sistemas reales esta frecuencia no varía linealmente con el tiempo. Sin embargo, si se considera que la variación de la frecuencia es lo suficientemente lenta, la función de rampa de excitación puede aproximarse a una función lineal de la forma:

$$\phi(t) = \phi_0 + \ddot{\phi} t \quad (3.15)$$

donde:

ϕ_0 = frecuencia de excitación al inicio de la rampa.

$\ddot{\phi}$ = tasa de cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo t.

Capítulo 4

MODELADO MATEMÁTICO

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad. Para el modelo matemático del sistema se consideran dos condiciones de operación del rotor asimétrico: velocidad constante y velocidad variable. Posteriormente, en este mismo capítulo se muestra el desarrollo de los identificadores algebraicos de los parámetros de desbalance del sistema rotor-cojinete asimétrico bajo los dos esquemas de velocidad antes mencionados.

4.1. Modelado del rotor asimétrico

El modelo del eje es una masa concentrada (m) en M situada a una distancia a (excentricidad), desde el eje de rotación: O en reposo, O_1 cuando el eje gira. Las componentes de rigidez del eje son k_u y k_v en el marco de referencia giratorio, UV , fijo al eje. Las componentes de rigidez de los soportes son $k_x = k_y = k$ en el marco de referencia fijo, XY . Las coordenadas de O_1 son (u,v) y (x,y) . El amortiguamiento no se considera, y las ecuaciones se escriben tanto en el marco de referencia fijo como en el giratorio, para ello se utiliza la siguiente relación:

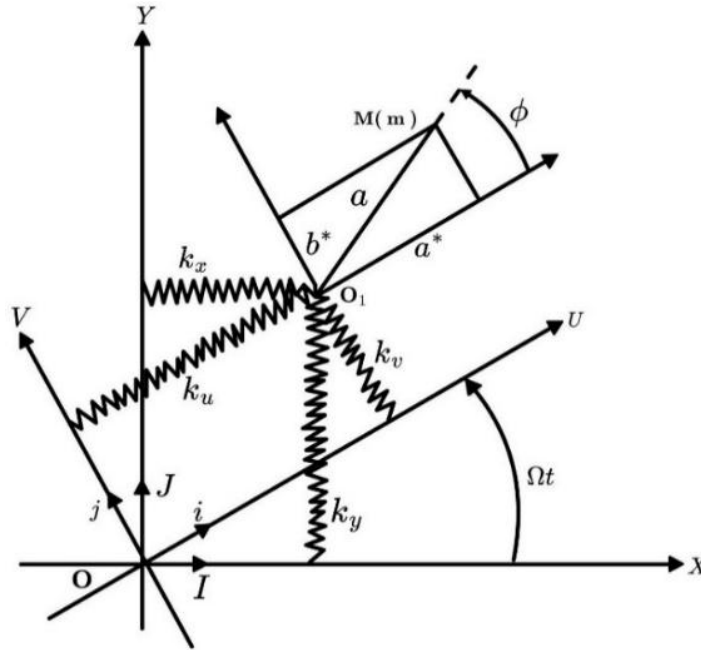


Figura 4.1. Modelo del sistema.

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) se obtiene a partir de la relación de las variables que se muestra en la Figura 4.1, en donde i, j son vectores unitarios en las direcciones U y V . Al igual, I, J son vectores unitarios en las direcciones X y Y respectivamente, y Ω representa la velocidad de rotación constante.

Las coordenadas del centro de masa M se expresan en los dos marcos de referencia, de modo que:

$$OM = OO_1 + O_1M \quad (4.2)$$

la cual en el marco de referencia fijo se expresa como:

$$OM = [x + a \cos (\Omega t + \phi)]I + [y + a \sin (\Omega t + \phi)]J \quad (4.3)$$

y en el marco giratorio:

$$OM = (u + a^*)i + (v + b^*)j \quad (4.4)$$

Por lo tanto, las expresiones para la velocidad V en los dos marcos de referencia están dadas respectivamente por:

$$V = \frac{dOM}{dt} = [\dot{x} - a\Omega \sin(\Omega t + \phi)]I + [\dot{y} + a\Omega \cos(\Omega t + \phi)]J \quad (4.5)$$

$$V = \frac{dOM}{dt} = [\dot{u} - \Omega(v + b^*)]i + [\dot{v} + \Omega(u + a^*)]j \quad (4.6)$$

La expresión para la energía cinética en el marco de referencia fijo es:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} \left\{ \sqrt{[\dot{x} - a\Omega \sin(\Omega t + \phi)]^2 + [\dot{y} + a\Omega \cos(\Omega t + \phi)]^2} \right\}^2 \quad (4.7)$$

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\Omega^2 - 2a\Omega\dot{x}\sin(\Omega t + \phi) + 2a\Omega\dot{y}\cos(\Omega t + \phi)] \quad (4.8)$$

y en el marco giratorio:

$$T = \frac{m}{2} \left\{ \sqrt{[\dot{u} - \Omega(v + b^*)]^2 + [\dot{v} + \Omega(u + a^*)]^2} \right\}^2 \quad (4.9)$$

$$T = \frac{m}{2} [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \Omega^2 u^2 + \Omega^2 v^2 + 2\Omega^2 b^* v + 2\Omega a^* u + \Omega^2 a^{*2} + \Omega^2 b^{*2} - 2\Omega b^* \dot{u} + 2\Omega a^* \dot{v} - 2\Omega \dot{u} v + 2\Omega u \dot{v}] \quad (4.10)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a (4.8) y (4.10), se pueden obtener las fuerzas inerciales que actúan en las direcciones X, Y, U y V respectivamente:

-En el marco fijo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = m\ddot{x} - ma\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = m\ddot{y} - ma\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi) \quad (4.12)$$

-En el marco giratorio:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = m(\ddot{u} - 2\Omega\dot{v} - \Omega^2 u - \Omega^2 a^*) \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = m(\ddot{v} - 2\Omega\dot{u} - \Omega^2 v - \Omega^2 b^*) \quad (4.14)$$

Fuerzas que actúan sobre el rotor

-Gravedad

Debido a que la gravedad tiene solo dirección en J, entonces:

$$F = -mgJ \quad (4.15)$$

y de la ecuación (4.1) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

de tal modo que la ecuación (4.15) se puede escribir como:

$$F = -mg(\text{sen}\Omega t i + \cos \Omega t j) \quad (4.17)$$

-Rigidez del eje

La fuerza que actúa sobre la masa es:

$$F = -k_u u i - k_v v j \quad (4.18)$$

De la ecuación (4.1) se tienen las componentes de la fuerza en el marco fijo,

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \text{sen } \Omega t \\ -\text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \text{sen } \Omega t \\ -\text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

por lo que sustituyendo estas componentes en la ecuación (4.18) se tiene:

$$F = -k_u(x\cos(\Omega t) + y\text{sen}(\Omega t))(\cos(\Omega t) I + \text{sen}(\Omega t) J) - k_v(y\cos(\Omega t) - x\text{sen}(\Omega t))(\cos(\Omega t) J - \text{sen}(\Omega t) I) \quad (4.19)$$

y después de realizar un tratamiento algebraico correspondiente a la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$F = -\frac{1}{2}[(k_u + k_v)x + (k_u - k_v)y\text{sen}(2\Omega t) + (k_u - k_v)x\cos(2\Omega t)]I - \frac{1}{2}[(k_u + k_v)y + (k_u - k_v)x\text{sen}(2\Omega t) - (k_u - k_v)y\cos(2\Omega t)]J \quad (4.20)$$

-Rigidez de los soportes

Para expresar la rigidez de los soportes se asume que son simétricos, esto para evitar ecuaciones con coeficientes periódicos.

De tal modo que, la expresión para la fuerza queda como:

$$F = -kxI - kyJ \quad (4.21)$$

Del esquema presentado en la Figura (4.1), se tienen las relaciones:

$$\begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

con acuerdo a estas relaciones, se realiza un tratamiento algebraico a la ecuación (4.21), por lo que se llega a la ecuación siguiente:

$$F = -kui - kvj \quad (4.22)$$

Ecuaciones

Para reducir las próximas expresiones a tratar, Se asignan los términos de rigidez a las variables K_1 y K_2 , como se muestra a continuación:

$$K_1 = \frac{k_u + k_v}{2} + k \quad (4.23)$$

$$K_2 = \frac{k_u - k_v}{2} \quad (4.24)$$

donde k es la rigidez de los soportes.

Las ecuaciones respecto al marco de referencia fijo se expresan como:

$$m\ddot{x} - ma\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) = -\frac{1}{2}[(k_u + k_v)x + (k_u - k_v)y\sin(2\Omega t) + (k_u - k_v)x\cos(2\Omega t)] - kx \quad (4.25)$$

$$m\ddot{y} - ma\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi) = -mg - \frac{1}{2}[(k_u + k_v)y + (k_u - k_v)x\sin(2\Omega t) - (k_u - k_v)y\cos(2\Omega t)] - ky \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.23) y (4.24) en las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes expresiones:

$$m\ddot{x} + k_1x + k_2y\sin(2\Omega t) + k_2x\cos(2\Omega t) = ma\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.27)$$

$$m\ddot{y} + k_1y + k_2x\sin(2\Omega t) - k_2y\cos(2\Omega t) = -mg + ma\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi) \quad (4.28)$$

Las ecuaciones (4.27) y (4.28) se pueden expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sin(2\Omega t) \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \cos(2\Omega t) \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + ma\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \phi) \\ \sin(\Omega t + \phi) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Análogamente, para el marco de referencia giratorio se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_u - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k + k_v - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma^*\Omega^2 \\ mb^*\Omega^2 \end{bmatrix} - mg \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.2. Solución de las ecuaciones

-Masa de desbalance

Los desplazamientos debido al desbalance de la solución de la ecuación (4.30) en estado estable son:

$$u = \frac{ma^*\Omega^2}{k + k_u - m\Omega^2} \quad (4.31)$$

$$v = \frac{mb^*\Omega^2}{k + k_v - m\Omega^2} \quad (4.32)$$

De las ecuaciones (4.31) y (4.32), se obtienen los términos:

$$k + k_u - m\Omega^2 = 0 \quad y \quad k + k_v - m\Omega^2 = 0$$

Suponiendo que $k_u < k_v$, las velocidades críticas están dadas por:

$$\Omega_2 = \omega_v = \sqrt{\frac{k + k_v}{m}} \quad (4.33)$$

$$\Omega_1 = \omega_u = \sqrt{\frac{k + k_u}{m}} \quad (4.34)$$

-Gravedad

La influencia de la gravedad se obtiene de la ecuación (4.30). Multiplicando dicha ecuación por $\frac{1}{m}$, y realizando algunas sustituciones se obtienen las ecuaciones:

$$\ddot{u} - 2\Omega\dot{v} + (\omega_u^2 - \Omega^2)u = -g \sin(\Omega t) \quad (4.35)$$

$$\ddot{v} + 2\Omega\dot{u} + (\omega_v^2 - \Omega^2)v = -g \cos(\Omega t) \quad (4.36)$$

Los desplazamientos debido a la gravedad, de las soluciones en estado estable de las ecuaciones (4.35) y (4.36), se pueden escribir en la forma:

$$u = u_o \sin(\Omega t) \quad (4.37)$$

$$v = v_o \cos(\Omega t) \quad (4.38)$$

En donde u_o y v_o son los desplazamientos iniciales del rotor con respecto al centro O. Las ecuaciones (4.37), (4.38) y sus respectivas derivadas se sustituyen en (4.35) y (4.36). Posterior a esto, se realiza un tratamiento algebraico para obtener las ecuaciones siguientes:

$$u_o = \frac{-g(\omega_v^2 - 4\Omega^2)}{\omega_u^2\omega_v^2 - 2\Omega^2(\omega_u^2 + \omega_v^2)} \quad (4.39)$$

$$v_o = \frac{-g(\omega_u^2 - 4\Omega^2)}{\omega_u^2\omega_v^2 - 2\Omega^2(\omega_u^2 + \omega_v^2)} \quad (4.40)$$

De las ecuaciones anteriores se tiene que una velocidad crítica debido a la gravedad es:

$$\Omega^2 = \frac{\omega_u^2 \omega_v^2}{2(\omega_u^2 + \omega_v^2)} \quad (4.41)$$

De acuerdo con la relación $k_u < k_v$, se plantea la expresión; $\omega_v = \omega_u + \varepsilon \omega_u = \omega_u(1 + \varepsilon)$, en donde ε es un factor agregado, debido a que ω_v tiene que ser mayor a ω_u por la suposición de rigidez. Por lo que la ecuación (4.41), se puede escribir como:

$$\Omega^2 = \frac{\omega_u^4(1 + \varepsilon)^2}{2\omega_u^2[1 + (1 + \varepsilon)^2]} \quad (4.42)$$

Después de realizar un tratamiento algebraico a la ecuación anterior, se obtiene la expresión (4.43).

$$\Omega \simeq \frac{\omega_u + \omega_v}{4} \quad (4.43)$$

Esta velocidad crítica es conocida comúnmente como una velocidad crítica secundaria debido a la gravedad, es igual a más o menos la mitad de la velocidad crítica debido a la masa de desbalance. Y debido a que un rotor puede llegar a ser asimétrico cuando una grieta aparece y crece, esta velocidad puede ser utilizada para monitorearlas.

-Fuerza debido al amortiguamiento externo

En este caso el amortiguamiento considerado es de tipo viscoso, por lo que es proporcional a la velocidad del centro de giro del rotor. En el sistema de coordenadas fijo, puede expresarse como:

$$F = c\dot{x}I - c\dot{y}J \quad (4.44)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento externo.

Agregando la ecuación (4.44) a la ecuación (4.29) se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sin(2\Omega t) \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \\ \cos(2\Omega t) \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + m\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \phi) \\ \sin(\Omega t + \phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.3. El eje asimétrico en movimiento transitorio

Los movimientos transitorios aparecen cuando un rotor inicia, se detiene o pasa por una velocidad crítica.

Ahora se considera que la velocidad angular $\dot{\phi}$ ya no es constante y es una función del tiempo, es decir:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}(t) \quad (4.46)$$

De la Figura 4.1, las coordenadas de M se expresan en el marco de referencia inercial como:

$$OM = [x + a\cos(\phi + \alpha)]I + [y + a\sin(\phi + \alpha)]J \quad (4.47)$$

a partir de esta ecuación se obtienen la velocidad y la energía cinética.

La expresión para la velocidad es:

$$V = [\dot{x} - a\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha)]I + [\dot{y} + a\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha)]J \quad (4.48)$$

y para la energía cinética se tiene:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\phi}^2 - 2a\dot{x}\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha) + 2a\dot{y}\dot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] \quad (4.49)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a la ecuación (4.49), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = m\ddot{x} - ma[\ddot{\phi}\sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2\cos(\phi + \alpha)] \quad (4.50)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = m\ddot{y} - ma[\dot{\phi}^2\sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] \quad (4.51)$$

Ecuaciones

Las ecuaciones en el marco de referencia fijo se expresan de forma matricial como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sin(2\phi) \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \\ & \cos(2\phi) \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + ma \begin{bmatrix} \ddot{\phi}\sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2\cos(\phi + \alpha) \\ \dot{\phi}^2\sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi}\cos(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

La ecuación (4.52) tiene la forma de la ecuación general de movimiento del sistema rotor-cojinete asimétrico:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{W\} + \dot{\phi}^2 F_1(\phi) + \ddot{\phi} F_2(\phi) \quad (4.53)$$

En donde, $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Y del lado derecho de la expresión se tiene a las fuerzas generalizadas.

4.4. Identificación algebraica en línea de la excentricidad para un rotor asimétrico: Sistema de dos grados de libertad.

4.4.1. Modelo matemático del identificador algebraico a velocidad variable

Se tiene el modelo matemático del sistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_2y\text{sen}(2\phi) + k_2x\cos(2\phi) \\ = m_u d[\ddot{\phi}\text{sen}(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2\cos(\phi + \alpha)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1y + k_2x\text{sen}(2\phi) - k_2y\cos(2\phi) \\ = m_u d[\dot{\phi}^2\text{sen}(\phi + \alpha) - \ddot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde las medidas de las coordenadas de posición del disco (x,y) se conocen y están disponibles para utilizarse en el esquema de identificación.

Multiplicando las ecuaciones (4.54) y (4.55) por t^2 e integrado el resultado dos veces con respecto al tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} \int^{(2)} [m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_2y\text{sen}(2\phi) + k_2x\cos(2\phi)]t^2 \\ = \int^{(2)} m_u d[\ddot{\phi}\text{sen}(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2\cos(\phi + \alpha)]t^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
& \int^{(2)} [m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1y + k_2x\text{sen}(2\phi) - k_2y\cos(2\phi)]t^2 \\
& = \int^{(2)} m_u d[\dot{\phi}^2 \text{sen}(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)]t^2
\end{aligned} \tag{4.57}$$

las cuales se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}
& \int^{(2)} [m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_2y\text{sen}(2\phi) + k_2x\cos(2\phi)]t^2 \\
& = \int^{(2)} m_u d \frac{d}{dt} [\dot{\phi} \text{sen}(\phi + \alpha)]t^2
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
& \int^{(2)} [m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1y + k_2x\text{sen}(2\phi) - k_2y\cos(2\phi)]t^2 \\
& = - \int^{(2)} m_u d \frac{d}{dt} [\dot{\phi} \cos(\phi + \alpha)]t^2
\end{aligned} \tag{4.59}$$

donde $\int^n \varphi(t)$ son integrales iteradas de la forma $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_1$, con $\int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$ y n un número entero positivo.

Después de integrar por partes y realizar un tratamiento algebraico a dichos resultados se obtienen las siguientes expresiones en términos de los parámetros del desbalance:

$$\begin{aligned}
& mt^2x + \int [ct^2x - 4mtx] + \int^{(2)} [2mx - 2ctx + k_1t^2x + k_2t^2\text{sen}(2\phi)y + \\
& k_2t^2\cos(2\phi)x] = m_u d\cos(\alpha) \left[\left(\int t^2 \dot{\phi} \text{sen}(\phi) - 2 \int^{(2)} t \dot{\phi} \text{sen}(\phi) \right) \right] + \\
& m_u d\text{sen}(\alpha) \left[\left(\int t^2 \dot{\phi} \cos(\phi) - 2 \int^{(2)} t \dot{\phi} \cos(\phi) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
mt^2y + \int [ct^2y - 4mty] + \int^{(2)} [2my - 2cty + k_1t^2y + k_2t^2\text{sen}(2\phi)x - \\
k_2t^2\cos(2\phi)y] = -m_ud\cos(\alpha) \left[\left(\int t^2\dot{\phi}\cos(\phi) - 2\int^{(2)} t\dot{\phi}\cos(\phi) \right) \right] + \quad (4.61) \\
m_ud\text{sen}(\alpha) \left[\left(\int t^2\dot{\phi}\text{sen}(\phi) - 2\int^{(2)} t\dot{\phi}\text{sen}(\phi) \right) \right]
\end{aligned}$$

del lado izquierdo de estas expresiones se puede observar que el modelo del identificador de desbalance queda en función de los desplazamientos, es decir en función de la respuesta de vibración del sistema.

Posteriormente las ecuaciones (4.60) y (4.61) se puede expresar como un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$[A(t)]\{\theta\} = \{b(t)\} \quad (4.62)$$

donde $\{\theta\} = [a_\eta = m_ud\cos(\alpha), a_\xi = m_ud\text{sen}(\alpha)]^T$ denota el vector de los parámetros a ser identificados (los subíndices η y ξ atienden a las direcciones X y Y respectivamente), $[A(t)]$ y $\{b(t)\}$ son matrices de 2×2 y 2×1 , las cuales están dadas por:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ -a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

donde,

$$a_{11} = \left(\int t^2\dot{\phi}\text{sen}(\phi) - 2\int^{(2)} t\dot{\phi}\text{sen}(\phi) \right)$$

$$a_{12} = \left(\int t^2\dot{\phi}\cos(\phi) - 2\int^{(2)} t\dot{\phi}\cos(\phi) \right)$$

$$b_1 = mt^2x + \int [ct^2x - 4mtx] \\ + \int^{(2)} [2mx - 2ctx + k_1t^2x + k_2t^2\text{sen}(2\phi)y + k_2t^2\cos(2\phi)x]$$

$$b_2 = mt^2y + \int [ct^2y - 4mty] \\ + \int^{(2)} [2my - 2cty + k_1t^2y + k_2t^2\text{sen}(2\phi)x - k_2t^2\cos(2\phi)y]$$

De la ecuación (4.62), se puede concluir que el vector θ es identificable algebraicamente, si y solo si, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [41], es decir, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición $\det[A(t)] \neq 0$. En general esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_o, t_o + \delta]$ donde δ es un valor positivo y suficientemente pequeño.

Posteriormente, se soluciona la ecuación (4.62) para obtener el identificador algebraico para los parámetros de la excentricidad desconocidos.

$$\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ -a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\eta e} \\ a_{\xi e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

Luego, la solución se expresa de la forma:

$$\{\theta\} = [A^{-1}]\{b(t)\} \forall t \in (t_o, t_o + \delta] \quad (4.63)$$

de la ecuación anterior se observa que los parámetros de desbalance están en función únicamente de los desplazamientos del sistema:

$$a_{\eta e} = \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}; a_{\xi e} = \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

por lo tanto, el modelo para el identificador de los parámetros del desbalance se denota como:

$$\left. \begin{aligned} a_{\eta e} &= \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ a_{\xi e} &= \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ m_u d_e &= \sqrt{a_{\eta e}^2 + a_{\xi e}^2} \\ \alpha_e &= \cos^{-1} \left(\frac{a_{\eta e}}{a_e} \right) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_o, t_o + \delta] \quad (4.64)$$

Siendo $a_{\eta e}$, $a_{\xi e}$ las componentes del desbalance en dirección X y Y respectivamente, $m_u d_e$ su magnitud y α_e la posición angular.

4.4.2. Modelo matemático del identificador algebraico a velocidad constante

Anteriormente, se obtuvo el modelo del sistema rotor-cojinete asimétrico considerando una velocidad constante, el cual está expresado en la ecuación (4.45). Esta ecuación se puede reescribir en la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_2 y \sin(2\Omega t) + k_2 x \cos(2\Omega t) = m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.65)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1 y + k_2 x \sin(2\Omega t) - k_2 y \cos(2\Omega t) = m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) \quad (4.66)$$

De manera similar al desarrollo presentado en la subsección anterior, se desarrollaron las expresiones para el identificador algebraico considerado una velocidad constante.

Una vez que se multiplica por t^2 , se integran dos veces el resultado con respecto al tiempo t , y se realiza el debido tratamiento matemático a las ecuaciones (4.65) y (4.66), se obtienen las siguientes:

$$\begin{aligned}
 & mt^2x + \int [ct^2x - 4mtx] + \int^{(2)} [2mx - 2ctx + k_1t^2x + k_2t^2\text{sen}(2\Omega t)y + \\
 & k_2t^2\cos(2\Omega t)x] = m_ud\Omega^2\cos(\varphi) [(\int^{(2)} t^2\cos(\Omega t))] - \\
 & m_ud\Omega^2\text{sen}(\varphi) [(\int^{(2)} t^2\text{sen}(\Omega t))]
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
 & mt^2y + \int [ct^2y - 4mty] + \int^{(2)} [2mx - 2cty + k_1t^2y + k_2t^2\text{sen}(2\Omega t)x + \\
 & k_2t^2\cos(2\Omega t)y] = m_ud\Omega^2\cos(\varphi) [(\int^{(2)} t^2\text{sen}(\Omega t))] + \\
 & m_ud\Omega^2\text{sen}(\varphi) [(\int^{(2)} t^2\cos(\Omega t))]
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Estas ecuaciones al igual que las ecuaciones (4.60) y (4.61), se expresan en un sistema de ecuaciones linealmente independientes de la forma de la ecuación (4.62).

con:

$$\{\theta\} = [a_\eta = m_ud\cos(\varphi), a_\xi = m_ud\text{sen}(\varphi)]^T$$

y las expresiones siguientes:

$$a_{11} = \left(\Omega^2 \int^{(2)} t^2 \cos(\Omega t) \right)$$

$$a_{12} = \left(\Omega^2 \int^{(2)} t^2 \sin(\Omega t) \right)$$

$$b_1 = mt^2x + \int [ct^2x - 4mtx] \\ + \int^{(2)} [2mx - 2ctx + k_1t^2x + k_2t^2\sin(2\Omega t)y + k_2t^2\cos(2\Omega t)x]$$

$$b_1 = mt^2y + \int [ct^2y - 4mty] \\ + \int^{(2)} [2mx - 2cty + k_1t^2y + k_2t^2\sin(2\Omega t)x + k_2t^2\cos(2\Omega t)y]$$

el identificador algebraico se puede expresar en la forma de la ecuación (4.64). Como resultado de la solución se obtienen los parámetros: desbalance y su posición angular, considerando una velocidad de operación del rotor constante.

Capítulo 5

SIMULACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones de los identificadores algebraicos de los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad, al considerar dos condiciones de operación de la velocidad del rotor: velocidad constante y velocidad variable. Para el caso de velocidad variable se considera una rampa de excitación de tipo lineal.

5.1. Identificación de los parámetros de desbalance a velocidad constante

En esta sección se muestran los resultados de la simulación del identificador algebraico de los parámetros de desbalance del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad. La determinación en línea, mediante la técnica de identificación algebraica, tanto de la magnitud como de la ubicación angular del desbalance, se realiza a partir del análisis de la respuesta vibratoria del rotor en el dominio temporal. Para ello, se emplea como dato de entrada el vector de desplazamientos (es decir, la respuesta vibratoria del sistema), el cual se obtiene resolviendo la ecuación (4.45) mediante el método de integración numérica de Newmark, programada en la herramienta computacional Matlab Simulink, asumiendo que el rotor opera a velocidad constante. Es importante señalar que se utilizó un intervalo de muestreo de 0.1 milisegundos, ya que se comprobó que con dicho periodo el método de Newmark presenta convergencia en la

solución de la ecuación (4.45). Asimismo, se confirmó que dicho intervalo es compatible con las capacidades de los sistemas experimentales de adquisición de datos. En la Tabla 5.1 se presentan los parámetros utilizados para la simulación. Estos parámetros se establecen de acuerdo con la literatura [57].

Tabla 5.1. Parámetros físicos de simulación del sistema a velocidad constante.

$m = 14.29 \text{ kg}$	$c = 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	$\Omega = 1000 \text{ y } 3600 \text{ rpm}$
$m_u = 1 \times 10^{-4} \text{ kg}$	$k_v = 3.195 \times 10^6 \text{ N/m}$	$\alpha = 45, 125 \text{ y } 250^\circ$
$d = 0.5 \text{ m}$	$k_u = 1.195 \times 10^6 \text{ N/m}$	

m : masa del disco.

m_u : masa de desbalance.

d : excentricidad.

c : coeficiente de amortiguamiento.

k_v : rigidez del eje del rotor respecto al eje V.

k_u : rigidez del eje del rotor respecto al eje U.

Ω : velocidad de operación cte. del rotor.

α : ángulo del desbalance.

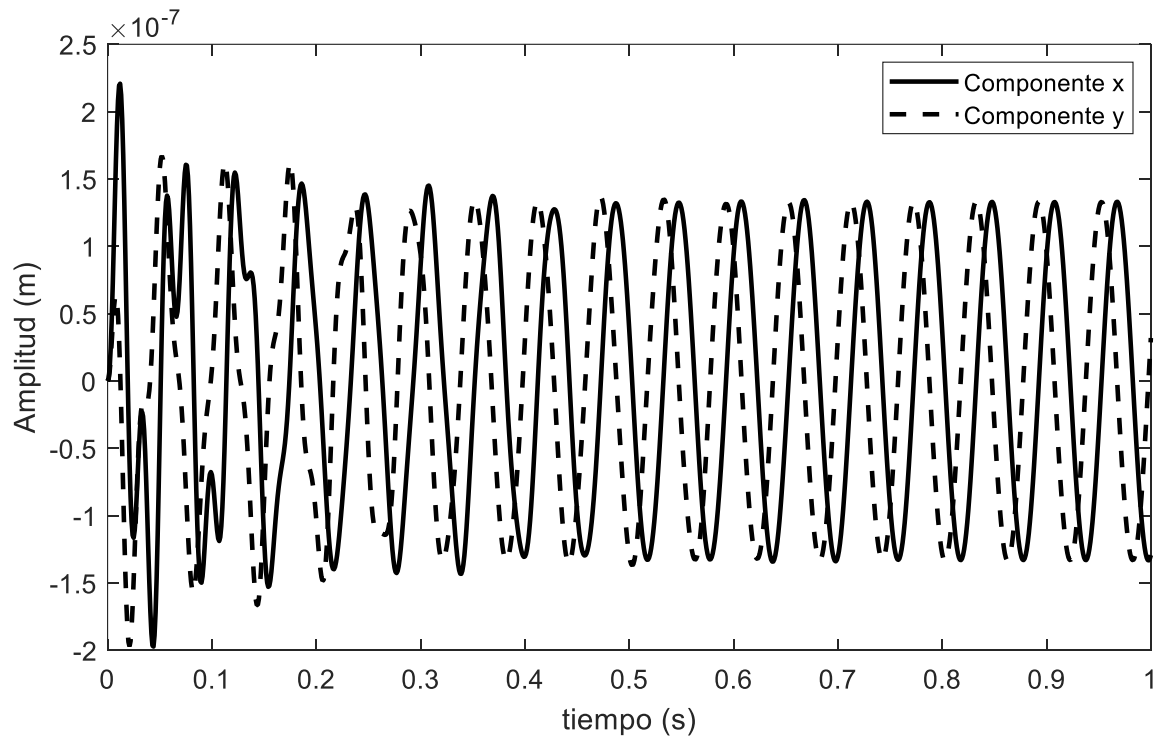


Figura 5.1. Respuesta vibratoria del sistema rotor-cojinete asimétrico a velocidad constante.

En la Figura 5.1 se muestran las respuestas de vibración del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad en las direcciones x y y , considerando una velocidad de operación constante $\Omega = 1000$ rpm. Estas señales de vibración constituyen los datos de entrada que alimentan al identificador algebraico propuesto.

Por otro lado, en las Figuras 5.2 y 5.3 se muestra el comportamiento en el tiempo del identificador algebraico de los parámetros de desbalance del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad a velocidad constante. Cabe señalar que solo se consideró un valor de desbalance en tres posiciones angulares diferentes. De acuerdo con los resultados que se presentan en las figuras, el identificador algebraico converge rápidamente a los valores de referencia de los parámetros de desbalance, de hecho, la convergencia se alcanza en menos de 0.1 segundos. Además, una vez que el identificador ha convergido se mantiene constante en el tiempo.

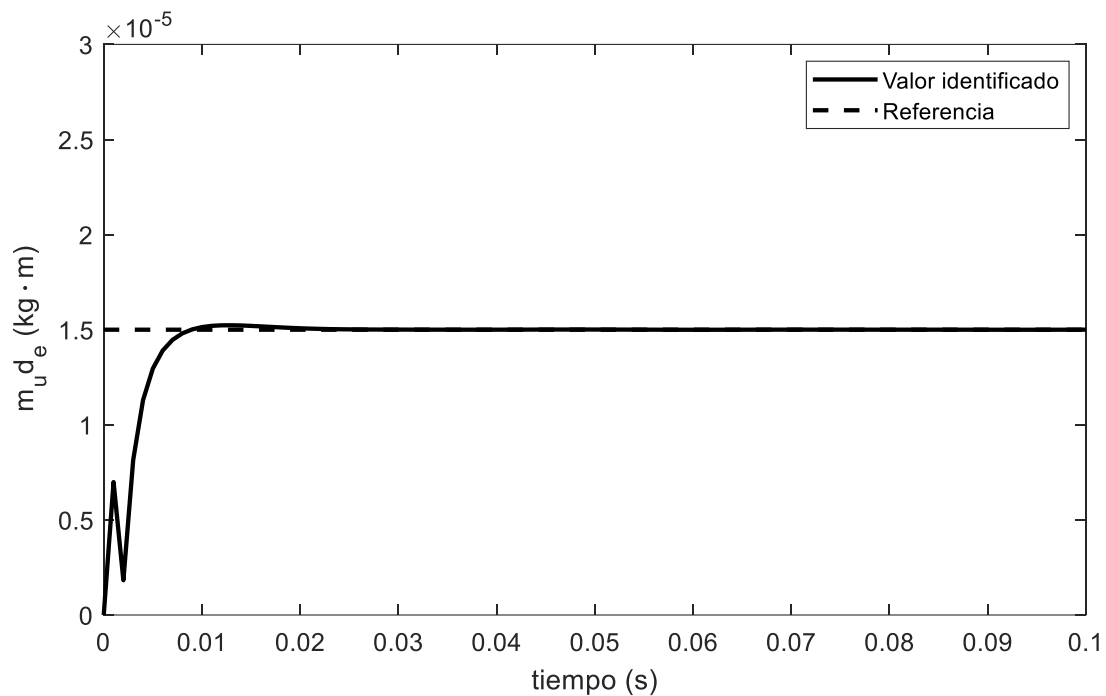


Figura 5.2. Identificación de la magnitud del desbalance a $\Omega=1000$ "rpm".

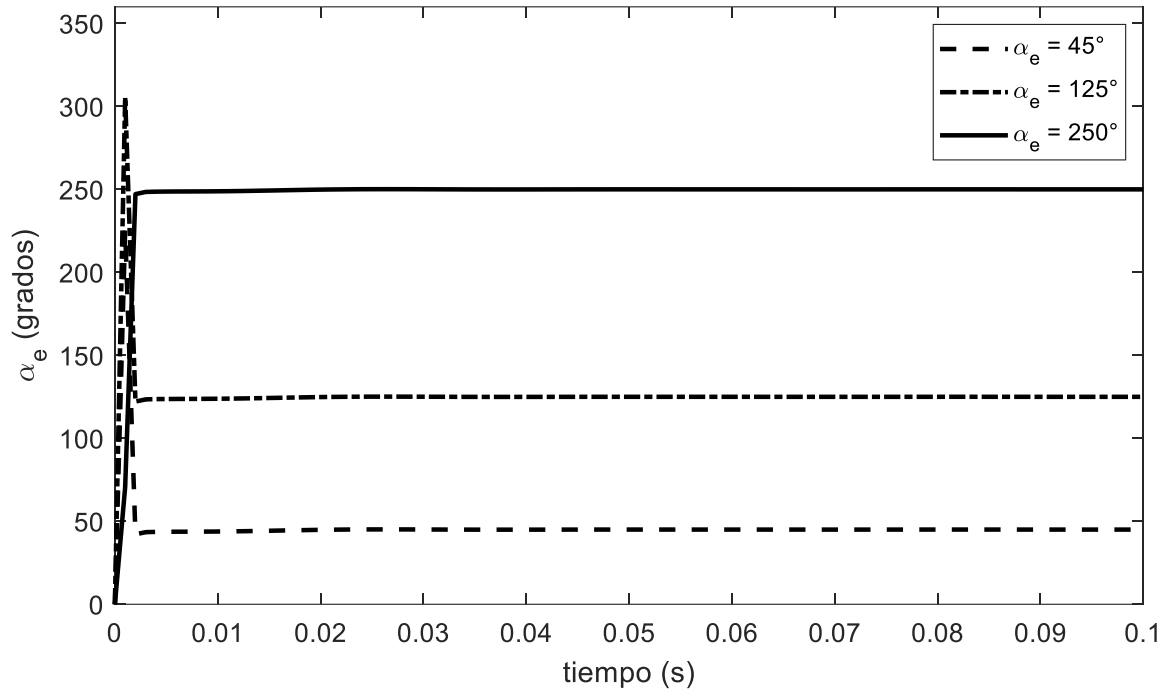


Figura 5.3. Identificación de la posición angular del desbalance a $\Omega=1000$ "rpm".

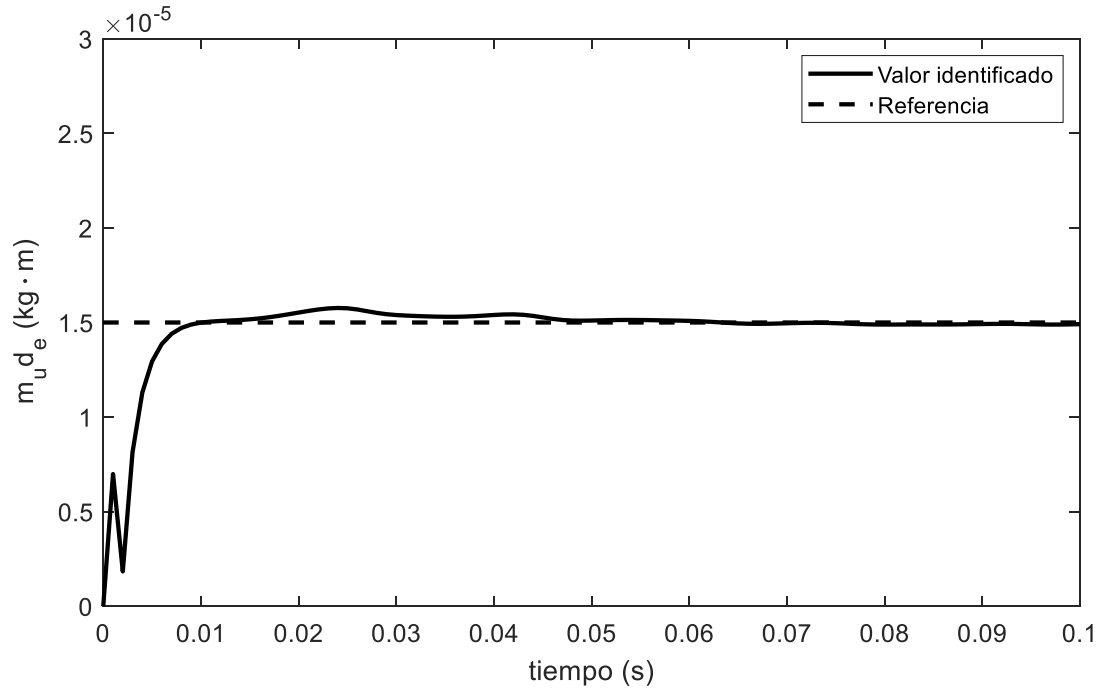


Figura 5.4. Identificación de la magnitud del desbalance a $\Omega=3600$ "rpm".

Posteriormente, en las Figuras 5.4 y 5.5 se puede observar el comportamiento del identificador algebraico del sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad, al considerar una velocidad de operación constante de magnitud $\Omega = 3600$ rpm. Esto con la finalidad de mostrar que el identificador algebraico funciona correctamente para la identificación de los parámetros de desbalance del sistema para diferentes condiciones de velocidad. Los parámetros de desbalance utilizados tanto en la simulación del sistema rotor-cojinete asimétrico, como en la simulación del identificador algebraico, son los que se muestran en la Tabla 5.1.

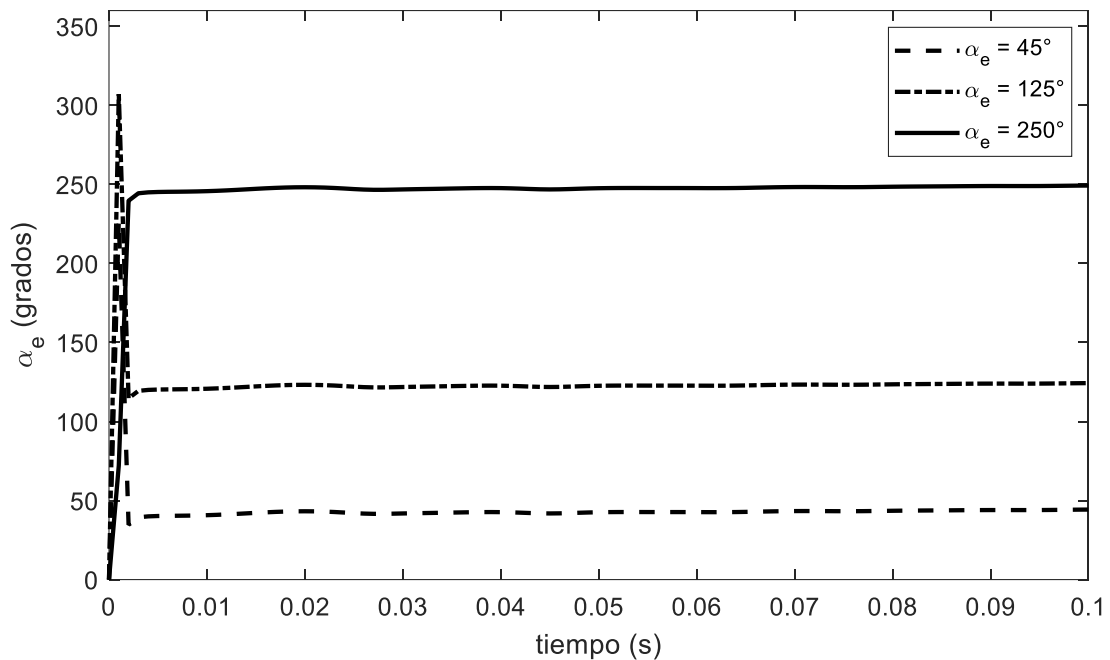


Figura 5.5. Identificación de la posición angular del desbalance a $\Omega=3600$ "rpm".

Como es de observarse en las Figuras 5.4 y 5.5 la identificación de los parámetros de desbalance se realiza en tiempos menores a 0.1 segundos, de manera similar a los resultados obtenidos en la simulación anterior.

5.2. Identificación de los parámetros de desbalance a velocidad variable

La identificación en tiempo real del desbalance y su posición angular se llevó a cabo utilizando la respuesta vibratoria del rotor como función del tiempo. Esta respuesta se calculó resolviendo la ecuación (4.52) mediante el método de integración numérica de Newmark, el cual también se programó en la herramienta computacional Matlab Simulink. Para simular el funcionamiento del sistema, se aplicó una rampa de excitación de tipo lineal, con una aceleración angular constante de $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$. Se utilizó un periodo de muestreo de 0.1 milisegundos, el cual demostró ser adecuado para garantizar la convergencia del método de Newmark en la resolución de la ecuación (4.52), considerando los parámetros $\beta = 0.5$ y $\gamma = 0.25$ (según lo indicado en la sección 3.5). En la Tabla 5.2 se presentan los parámetros físicos utilizados en la simulación del sistema rotor-cojinete asimétrico bajo la condición de operación de velocidad variable.

Tabla 5.2. Parámetros físicos de simulación del sistema a velocidad variable.

$m = 14.29 \text{ kg}$	$c = 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	$\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$
$m_u = 1 \times 10^{-4} \text{ kg}$	$k_v = 3.195 \times 10^6 \text{ N/m}$	$\alpha = 45, 125 \text{ y } 250^\circ$
$d = 0.5 \text{ m}$	$k_u = 1.195 \times 10^6 \text{ N/m}$	

El análisis gráfico presentado en las Figuras 5.6 y 5.7 permite observar que el método de identificación algebraica propuesto es altamente eficiente, ya que logra estimar tanto la magnitud del desbalance como su posición angular en un tiempo inferior a 0.1 segundos. Este corto periodo de identificación es indicativo de la rapidez con la que el algoritmo responde ante las condiciones dinámicas iniciales del sistema. Una vez que el parámetro es identificado correctamente, se mantiene estable y constante a lo largo del tiempo, incluso mientras el rotor incrementa su velocidad hasta alcanzar el régimen nominal de operación. Para facilitar el estudio del proceso de convergencia del identificador, se ha limitado la visualización de los resultados en las figuras mencionadas a los primeros 0.1 segundos del análisis. Esta ventana temporal es suficiente para mostrar el momento exacto en que el identificador en línea alcanza el valor final, y permite evaluar con claridad su desempeño en términos de rapidez y estabilidad.

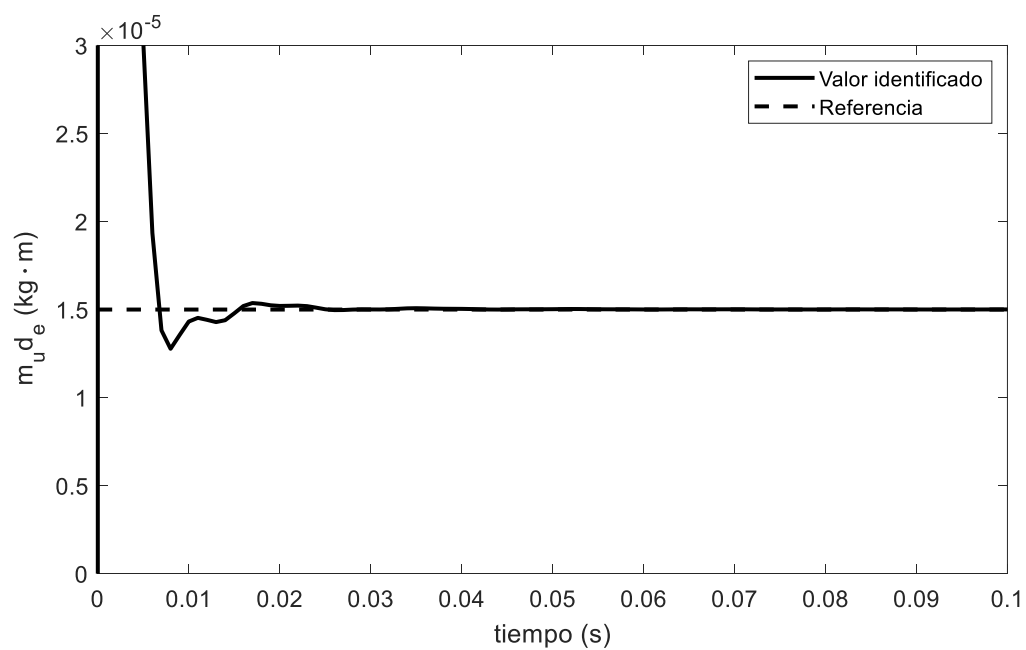


Figura 5.6. Identificación de la magnitud del desbalance a velocidad variable.

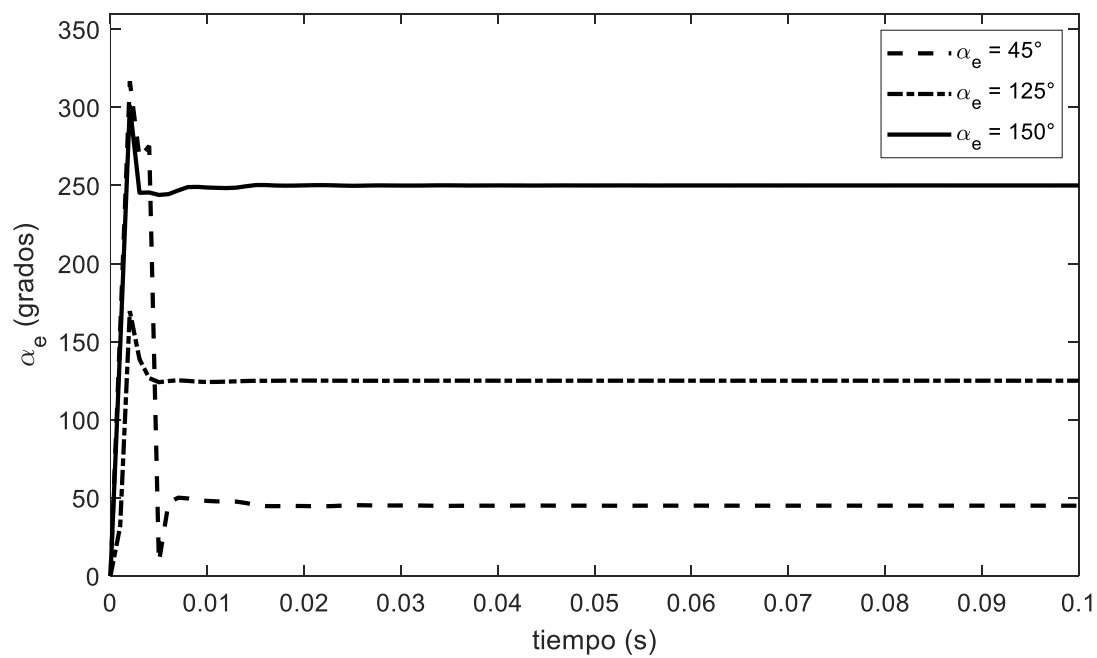


Figura 5.7. Identificación de la posición angular del desbalance a velocidad variable.

A partir de las simulaciones realizadas en este capítulo con los identificadores algebraicos propuestos, se ha comprobado que es factible estimar con precisión los parámetros asociados al desbalance en sistemas rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad. Esta validación se llevó a cabo tanto para condiciones de operación del rotor a velocidad constante como para escenarios de velocidad variable, en particular utilizando una rampa de aceleración lineal en el tiempo.

Los resultados obtenidos permiten destacar dos aspectos clave del desempeño de los identificadores: su capacidad de convergencia y la rapidez con la que logran determinar los parámetros del desbalance. En ambos esquemas de velocidad de operación: velocidad constante y velocidad variable los identificadores mostraron un comportamiento consistente, con tiempos de convergencia reducidos y estimaciones de los parámetros de desbalance precisas.

A continuación, en la Figura 5.8 se muestra un diagrama de flujo indicando la metodología que se llevó a cabo en esta investigación, para la identificación algebraica de los parámetros de desbalance de un sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad.

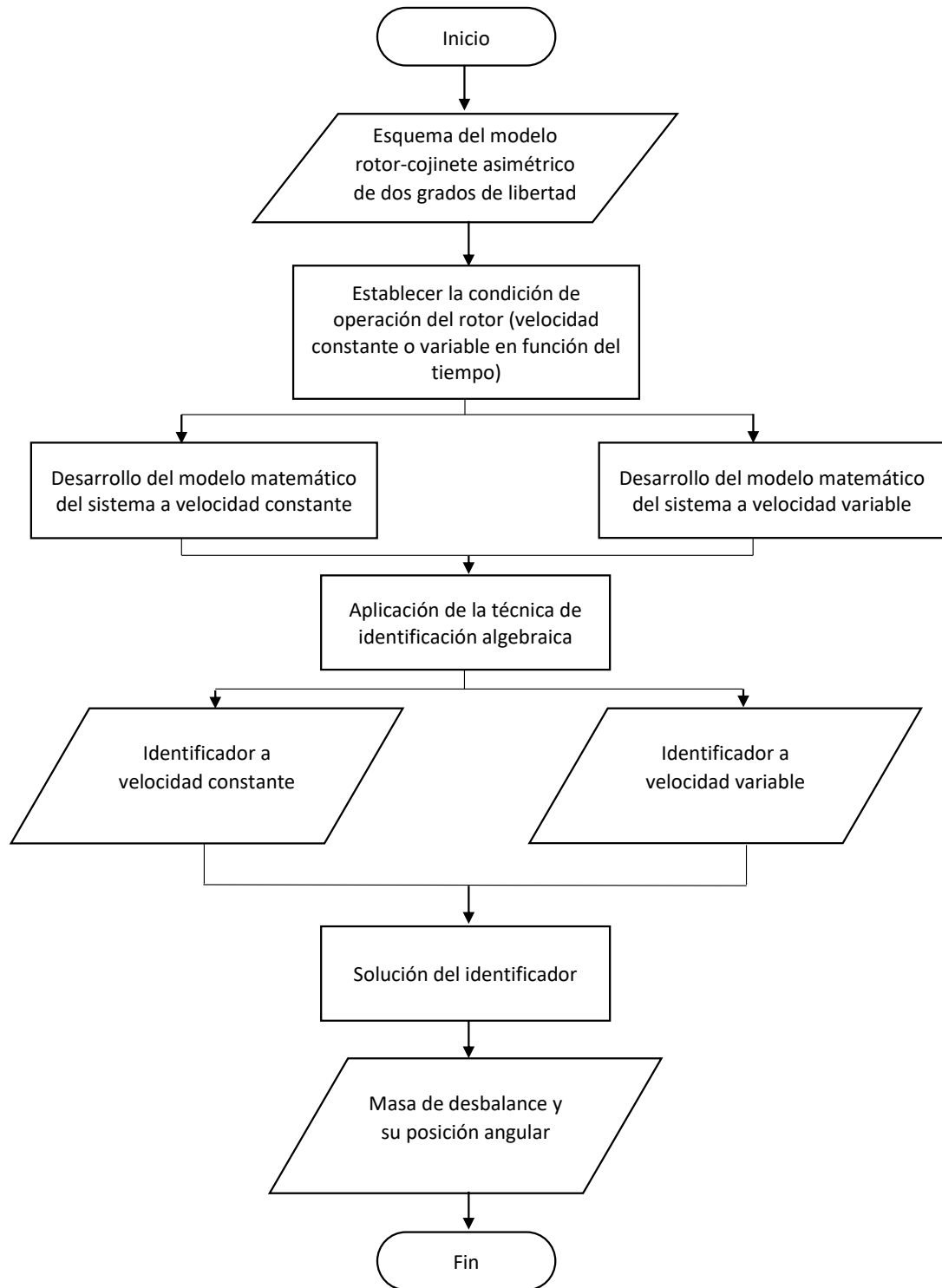


Figura 5.8. Diagrama de flujo del proceso de identificación de los parámetros de desbalance.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se presenta el desarrollo de un modelo matemático de un sistema rotor-cojinete asimétrico de dos grados de libertad considerando las velocidades de operación constante y variable. El modelo matemático se desarrolló mediante la implementación del formulismo Euler-Lagrange. Con la finalidad de desarrollar una nueva metodología de balanceo de rotores asimétricos, se propuso la implementación de la técnica de identificación algebraica para la generación de modelos algebraicos de identificación, capaces de determinar los parámetros de desbalance desconocidos de un sistema rotor-cojinete asimétrico simplificado de dos grados de libertad. De la implementación de la técnica de identificación algebraica se obtuvieron dos identificadores: uno que identifica la magnitud del desbalance presente en el sistema y el otro capaz de estimar la posición angular de la masa de desbalance. Cabe destacar que los identificadores algebraicos mencionados se desarrollaron considerando las dos condiciones de operación del sistema rotor-cojinete asimétrico. Asimismo, estos identificadores requieren como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor, en este caso obtenida en simulación. Al igual se corrobora, que para la identificación de los parámetros de desbalance y su posición angular se requiere un mínimo de datos de respuesta de vibración del rotor durante la rampa de excitación, evitando así, la zona de resonancia y llevar el rotor a su velocidad nominal, como no sucede con la mayoría de las técnicas de balanceo.

Por otro lado, los resultados obtenidos mediante simulación numérica evidencian que el método de identificación algebraica propuesto posee una elevada eficacia en términos de rapidez y precisión. En particular, se observó que al igual que se han obtenido resultados correctos con la implementación de la técnica de identificación algebraica para identificar parámetros de desbalance en rotores simétricos, el algoritmo es también capaz de estimar con éxito los parámetros del desbalance en un sistema rotor-cojinete asimétrico, específicamente su magnitud y su posición angular en un tiempo aproximado de 0.1 segundos desde el inicio de la respuesta vibratoria del sistema, y esto es independiente de las condiciones de operación del sistema: velocidad constante o velocidad variable. Una de las principales fortalezas del enfoque desarrollado radica en que permite llevar a cabo la identificación del desbalance sin necesidad de operar el rotor a su velocidad nominal. Este aspecto resulta fundamental desde el punto de vista operativo, ya que evita el cruce por las distintas velocidades críticas del sistema. Dichas velocidades representan zonas de resonancia donde la vibración alcanza amplitudes máximas, lo que puede comprometer tanto la integridad mecánica del equipo como la seguridad del entorno de operación.

6.1. Trabajos futuros

Los resultados obtenidos en el presente trabajo demuestran la efectividad de la técnica de identificación algebraica para identificar la magnitud del desbalance y su posición angular en un sistema rotor-cojinete con eje asimétrico de dos grados de libertad. Para complementar el presente trabajo desarrollado, se sugieren los siguientes proyectos a futuro, con el objetivo de mejorar aspectos en el desarrollo de los identificadores y extender los resultados:

- Realizar pruebas experimentales implementando los identificadores propuestos en este trabajo.
- Realizar una comparación entre los resultados obtenidos experimentalmente y los presentados en esta investigación, con el fin de demostrar la exactitud de los identificadores.

- Obtener el modelo del sistema rotor-cojinete asimétrico considerando más efectos que afectan el comportamiento dinámico de este tipo de sistemas.
- Implementar con alguna técnica de balanceo, por ejemplo, con el uso de discos de balanceo activo (DBAs).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Colín Ocampo, J. G. Mendoza Larios, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego y E. S. Gutiérrez Wing, «Determinación del Desbalance en Sistemas Rotor-cojinete a velocidad constante: Método de Identificación Algebraica,» *Ing. Mecánica, Tecnol y Desarro.*, vol. 5, n° 4, pp. 385-393, 2016. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76846501001>
- [2] M. Canales, W. Paucar y N. Juipa, «Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica,» *RevIA*, vol. 7, n° 4, pp. 5-9, 2020. <https://revistas.unas.edu.pe/index.php/revia/article/view/172>
- [3] H. H. Jeffcott, «XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed .— The effect of want of balance,» *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 37, n° 219, p. 304–314, 1919, doi: 10.1080/14786440308635889.
- [4] A. Parkinson, «On the balancing of shafts whit axial asymmetry,» *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 294, n° 1436, pp. 66-79, 1966, doi: 10.1098/rspa.1966.0194.
- [5] L. A. Baltazar Tadeo, «Control de vibraciones en línea de un sistema rotor asimétrico-cojinete con discos de balanceo activo,» Cuernavaca, Mor, 2022.
- [6] D. Smith, «The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings,» *Proc. R. Soc. London. Ser. A, Contain. Pap. a Math. Phys. Character.*, vol. 142, n° 846, pp. 92-118, Oct. 1933, doi: 10.1098/rspa.1933.0158.
- [7] H. Taylor, «Critical Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts,» *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 7, n° 2, pp. A71-A79, Jun. 1940, doi: 10.1115/1.4009017.
- [8] W. R. Foote, H. Poritsky y J. J. Slade, «Critical Speeds of a Rotor With Unequal Shaft Flexibilities, Mounted in Bearings of Unequal Flexibility—I,» *ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 10, n° 2, p. A77–A84, Jun. 1943, doi: 10.1115/1.4009262.
- [9] J. Dick, «CXI. The whirling of shafts having sections with unequal principal bending moduli,» *London. Edinburgh. Dublin. Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 39, n° 299, p. 946–955, 1948, doi: 10.1080/14786444808521703.

- [10] E. H. Hull, «Shaft Whirling as Influenced by Stiffness Asymmetry,» *ASME J. Eng. Ind.*, vol. 83, n° 2, pp. 219-226, May. 1961, doi: 10.1115/1.3664468.
- [11] R. E. D. Bishop y A. G. Parkinson, «Second order vibration of flexible shafts,» *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, vol. 259, n° 1095, p. 1-31, Dic. 1965, doi: 10.1098/rsta.1965.0052.
- [12] T. Yamamoto y H. O⁻ta, «On the Unstable Vibrations of a Shaft Carrying an Unsymmetrical Rotor,» *ASME. J. App. Mech.*, vol. 31, n° 3, pp. 515-522, Sep. 1964, doi: 10.1115/1.3629670.
- [13] T. Yamamoto, H. O⁻ta y K. Ko⁻no, «On the Unstable Vibrations of a Shaft With Unsymmetrical Stiffness Carrying an Unsymmetrical Rotor,» *ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 35, n° 2, pp. 313-321, Jun. 1968, doi: 10.1115/1.3601197.
- [14] D. Ardayfio y D. A. Frohrib, «Inestabilities of an Asymmetric Rotor With Asymmetric Shaft Mounted on Symmetric Elastic Supports,» *ASME. J. Eng. Ind.*, vol. 98, n° 4, pp. 1161-1165, Nov. 1976, doi: 10.1115/1.3439074.
- [15] H. O⁻ta y K. Mizutani, «Influence of Unequal Pedestal Stiffness on the Instability Regions of a Rotating Asymmetric Shaft,» *ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 45, n° 2, pp. 400-408, Jun. 1978, doi: 10.1115/1.3424309.
- [16] D. W. Childs, «A Modal Transient Simulation Model for Flexible Asymmetric Rotors,» *ASME. J. Eng. Ind.*, vol. 98, n° 1, pp. 312-319, Feb. 1976, doi: 10.1115/1.3438840.
- [17] T. Inagaki, H. Kanki y K. Shiraki, «Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing,» *ASME. J. Mech. Des.*, vol. 102, n° 1, pp. 147-157, Ene. 1980, doi: 10.1115/1.3254705.
- [18] G. Genta, «Whirling of unsymmetrical rotors: A finite element approach based on complex coordinates,» *J. Sound Vib.*, vol. 124, n° 1, pp. 27-53, Jul. 1988, doi: 10.1016/s0022-460x(88)81404-4.
- [19] Y.-G. Jei y C.-W. Lee, «Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems,» *J. Sound Vib.*, vol. 152, pp. 245-262, Ene. 1992, doi: 10.1016/0022-460x(92)90359-6.
- [20] Y.-G. Jei y C.-W. Lee, «Modal Characteristics Of Asymmetrical Rotor-bearing Systems,» *J. Sound Vib.*, vol. 162, pp. 209-229, Abr. 1993, doi: 10.1006/jsvi.1993.1114.
- [21] Y. Kang, Y.-G. Lee y S.-C. Chen, «INSTABILITY ANALYSIS OF UNSYMMETRICAL ROTOR-BEARING SYSTEMS USING THE TRANSFER MATRIX METHOD,» *J. Sound Vib.*, vol. 199, pp. 381-400, Ene. 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0655.
- [22] F. Oncescu, A. A. Lakis y G. Ostiguy, «INVESTIGATION OF THE STABILITY AND STEADY STATE RESPONSE OF ASYMMETRIC ROTORS, USING FINITE

- ELEMENT FORMULATION,» *J. Sound Vib.*, vol. 245, pp. 303-328, Ago. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2001.3570.
- [23] A. Nandi y S. Neogy, «An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame,» *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 41, pp. 1343-1364, Ago. 2005, doi: 10.1016/j.finel.2005.03.001.
- [24] A. Nandi y S. Neogy, «Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements,» *J. Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 36, n° 4, pp. 359-371, May. 2001, doi: 10.1243/0309324011514539.
- [25] S. Wang, Y. Wang, Y. Zi y Z. He, «A 3d finite element-based model order reduction method for parametric resonance and whirling analysis of anisotropic rotor- bearing systems,» *J. Sound Vib.*, vol. 359, pp. 116-135, Dic. 2015, doi: 10.1016/j.jsv.2015.08.027.
- [26] Y. Zuo, W. Jianjun y W. Ma, «Quasimodes instability analysis of uncertain asymmetric rotor system based on 3D solid element model,» *J. Sound Vib.*, vol. 390, pp. 192-204, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.jsv.2016.10.047.
- [27] A. Lazarus, B. Prabel y D. Combescure, «A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines,» *J. Sound Vib.*, vol. 329, n° 18, pp. 3780-3797, Ago. 2010, doi: 10.1016/j.jsv.2010.03.029.
- [28] Y. Matsukura, M. Kiso, T. Inoue y M. Tomisawa, «On the balancing convergence of flexible rotors, with special reference to asymmetric rotors,» *J. Sound Vib.*, vol. 63, n° 3, pp. 419-428, Abr. 1979, doi: 10.1016/0022-460x(79)90684-9.
- [29] Y. Kang, C.-P. Liu y G.-J. Sheen, «A MODIFIED INFLUENCE COEFFICIENT METHOD FOR BALANCING UNSYMMETRICAL ROTOR-BEARING SYSTEMS,» *J. Sound Vib.*, vol. 194, n° 2, pp. 199-218, Jul. 1996, doi: 10.1006/jsvi.1996.0353.
- [30] Y. Kang, Y.-P. Chang, M.-H. Tseng, P.-H. Tang y Y.-F. Chang, «A MODIFIED APPROACH BASED ON INFLUENCE COEFFICIENT METHOD FOR BALANCING CRANK-SHAFTS,» *J. Sound Vib.*, vol. 234, n° 2, pp. 277-296, Jul. 2000, doi: 10.1006/jsvi.1999.2873.
- [31] Y. Kang, M.-H. Tseng, S.-M. Wang, C.-P. Chiang y C.-C. Wang, «An accuracy improvement for balancing crankshafts,» *Mech. Mach. Theory.*, vol. 38, n° 12, pp. 1449-1467, Dic. 2003, doi: 10.1016/s0094-114x(03)00097-1.
- [32] E. S. Gutiérrez Wing, J. E. Aguirre Romano, J. Colín Ocampo y C. Cortés García, «Balanceo de Rotores Rígidos sin Emplear Rodados de Prueba,» *Ing. Mecánica, Tecnol. y Desarro.*, vol. 3, n° 6, pp. 195-205, 2011. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76818389001>
- [33] J. Colín Ocampo, E. S. Gutiérrez Wing, F. J. Ramírez Moroyoquí, A. Abúndez Pliego, A. Blanco Ortega y J. Mayén, «A novel methodology for the angular position identification

- of the unbalance force on asymmetric rotors by response polar plot analysis,» *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 95, pp. 172-186, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.ymssp.2017.03.028.
- [34] L. A. Baltazar-Tadeo, J. Colín-Ocampo, A. Abúndez-Pliego, J. G. Mendoza-Larios, E. Martínez-Rayón y A. García-Villalobos, «Balancing of Asymmetric Rotor-Bearing Systems Using Modal Masses Array Calculated by Algebraic Identification of Modal Unbalance,» *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 12, p. 4765–4788, Oct. 2023, doi: 10.1007/s42417-023-01151-9.
- [35] L. A. Baltazar-Tadeo, J. Colín-Ocampo, J. G. Mendoza-Larios, A. Abúndez-Pliego, M. Nango-Blanco, A. Blanco-Ortega y S. J. Landa-Damas, «An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks,» *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 11, p. 619–645, Jul. 2022, doi: 10.1007/s42417-022-00598-6.
- [36] L. A. Zadeh, «From Circuit Theory to System Theory,» *Proceedings of the IRE*, vol. 50, n° 5, pp. 856-865, May. 1962, doi: 10.1109/jrproc.1962.288302.
- [37] J. R. Trapero Arenas, «Técnicas de identificación Algebraicas y Espectrales de señales Armónicas. Aplicaciones en Mecatrónica y Economía,» 2008.
- [38] E. Barredo Hernández, J. G. Mendoza Larios, L. A. Baltazar Tadeo y S. J. Landa Damas, «Identificación algebraica de los parámetros físicos de un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad,» *Cultura Científica y Tecnológica*, vol. 21, n° 1, pp. 4-12, Ene. 2024, doi: 10.20983/culcyt.2024.1.2.1.
- [39] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, «Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter,» *Int. J. Control.*, vol. 50, n° 2, pp. 457-477, 1989, doi: 10.1080/00207178908953377.
- [40] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, «Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems,» *Automatic.*, vol. 26, n° 1, pp. 63-74, Ene. 1990, doi: 10.1016/0005-1098(90)90158-e.
- [41] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, «An algebraic framework for linear identification,» *ESAIM: COCV*, vol. 9, pp. 151-168, Feb. 2003, doi: 10.1051/cocv:2003008.
- [42] H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, J. Cortés-Romero y A. Luviano-Juárez, *Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems*, vol. 1, Wiley Online Library, 2014, doi: 10.1002/9781118730591.
- [43] J. Kasac, T. Zilic, V. Milic y A. Jokic, «Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems,» *J. Franklin Inst.*, vol. 355, n° 18, pp. 9224-9244, Dic. 2018, doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.03.008.
- [44] J. R. Trapero, H. Sira-Ramírez y V. Feliu Batlle, «An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal,» *Signal Process.*, vol. 87, n° 6, pp. 1188-1201, Jun. 2007, doi: 10.1016/j.sigpro.2006.10.006.

- [45] F. Beltran-Carbajal, R. Tapia-Olvera, A. Valderrabano-Gonzalez y H. Yanez-Badillo, «An asymptotic and algebraic estimation method of harmonics,» *Electric Power Syst. Res.*, vol. 206, p. 107771, May. 2022, doi: 10.1016/j.epsr.2022.107771.
- [46] F. Beltran-Carbajal, H. F. Abundis-Fong, L. G. Trujillo-Franco, H. Yañez-Badillo, A. Favela-Contreras y E. Campos-Mercado, «Online Frequency Estimation on a Building-like Structure Using a Nonlinear Flexible Dynamic Vibration Absorber,» *Math.*, vol. 10, n° 5, Feb. 2022, doi: 10.3390/math10050708.
- [47] C. Garcia-Rodriguez, J. A. Cortes-Romero y H. Sira-Ramirez, «Algebraic Identification and Discontinuous Control for Trajectory Tracking in a Perturbed 1-DOF Suspension System,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, n° 9, pp. 3665-3674, Sep. 2009, doi: 10.1109/tie.2009.2026383.
- [48] R. Morales, V. Feliu y H. Sira-Ramirez, «Nonlinear Control for Magnetic Levitation Systems Based on Fast Online Algebraic Identification of the Input Gain,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 19, n° 4, pp. 757-771, Jul. 2011, doi: 10.1109/tcst.2010.2057511.
- [49] M. Arias-Montiel, F. Beltrán-Carbajal y G. Silva-Navarro, «On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems,» *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 85, pp. 152-159, Ago. 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027.
- [50] J. G. Mendoza Larios, J. Colín Ocampo, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego y E. S. Gutiérrez Wing, «Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico,» *Rev. Iberoam. Autom. Inform. Ind. RIAI*, vol. 13, n° 3, pp. 281-292, Jul. 2016, doi: 10.1016/j.riai.2016.03.004.
- [51] J. G. Mendoza-Larios, E. Barredo, M. Arias-Montiel, L. A. Baltazar-Tadeo, S. J. Landa-Damas, R. Tapia-Herrera y J. Colín-Ocampo, «An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients,» *Math.*, vol. 9, n° 21, p. 2747, Oct. 2021, doi: 10.3390/math9212747.
- [52] S. J. Landa Damas, «Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas,» Cuernavaca, Mor., 2023.
- [53] J. E. Martínez Pérez, «Modelado e identificación paramétrica de una suspensión automotriz regenerativa implementando la técnica de identificación algebraica,» Huajuapán de León, 2024.
- [54] H. D. Rojas, H. E. Rojas y J. A. Cortés, «Identificación Algebraica de Parámetros Asistida por Observadores GPI para un Helicóptero de Dos Grados de Libertad,» *Inf. Tecnol.*, vol. 29, n° 5, pp. 3-18, Oct. 2018, doi: 10.4067/s0718-07642018000500003.
- [55] R. López, «Experimentación y análisis de estabilidad dinámica en sistemas rotor-chumacera con y sin desalineamiento,» INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, 2006.

- [56] J. M. Vance, F. J. Zeidan y B. Murphy, Machinery Vibration and Rotordynamics, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [57] M. Lalanne y G. Ferraris, Rotordynamics Prediction in Engineering, 2 ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [58] M. Nanco Blanco, «Identificación Algebraica en Línea de Parámetros para el Balanceo de Rotores Asimétricos,» Cuernavaca, Mor., 2015.
- [59] [En línea]. Available: <https://aerb.com.mx/que-es-el-ciguenal/>.
- [60] [En línea]. Available: <https://hwr.bhel.com/bhelweb/portfolio-details-tg.jsp>.