UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Análisis espectral para matrices de Jacobi finitas y un modelo matemático de un sistema de partículas en interacción

Tesis para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Litzy Giselle Mejía Uribe

Director de tesis:
Dr. Sergio Palafox Delgado

H. Cd. de Huajuapan de León, Oaxaca *Junio de 2025*

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimientos

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca, mi más sincero agradecimiento por haberme formado académicamente y brindado un entorno propicio para el desarrollo personal y profesional.

Agradezco de manera especial al Dr. Sergio Palafox Delgado, director de esta tesis, por su valiosa guía, paciencia y compromiso durante todo el proceso. Su experiencia, orientación y disposición fueron fundamentales para la culminación de este proyecto.

Extiendo también mi agradecimiento a los distinguidos sinodales: el Dr. Salvador Sánchez Perales, el Dr. Tomás Pérez Becerra y el Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, por su tiempo, por sus observaciones enriquecedoras y por su disposición a participar en la evaluación de este trabajo.

A Dios, por haberme dado la fuerza, la salud y la perseverancia para continuar.

A mi familia, gracias por su amor incondicional, su apoyo constante y por estar presentes en cada etapa de mi vida.

Finalmente, a mis amigos, por acompañarme en este camino, por su compañía y por compartir conmigo esta etapa llena de retos y aprendizajes.

A todos ustedes, mi más profundo y sincero agradecimiento.

Índice general

Introducción

Los fundadores de la geometría analítica Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650) tienen una gran influencia en la teoría espectral, puesto que entre sus escritos se encuentra el principal teorema de los ejes de la geometría analítica, a este teorema se le puede reconocer como precursor directo del teorema espectral.

La generalización de la parte algebraica de este teorema la realizó Joseph Louis Lagrange (1736-1813) en un artículo sobre máximos y mínimos de funciones de varias variables.

David Hilbert (1862-1943) fue un matemático destacado del siglo XIX y principios del siglo XX quien trabajó en ecuaciones integrales, y por medio de una serie de seis artículos, los cuales fueron publicados en *Göttingen Nachrichten*, describió las definiciones y teoremas básicos de la teoría espectral.

John Von Neumann (1903-1957) durante 1927-29 revolucionó el estudio de la teoría espectral al introducir el concepto abstracto de un operador lineal en el espacio de Hilbert, esto fue un gran avance desde el punto de vista de la teoría espectral. La teoría de Von Neumann fue desarrollada en 1930 por Frederic Riesz (1880-1956) y más ampliamente, por Marshall H. Stone (1903-1989) en la Universidad de Yale.

Por último se tiene que Toeplitz (1881-1940) extendió el teorema espectral de Hilbert a formas cuadráticas normales completamente continuas al mostrar que dicha forma era unitariamente equivalente a una forma diagonal. De manera más general, la resolución espectral [9].

La teoría espectral es un término inclusivo para las teorías que extienden la teoría de vectores y valores propios (autofunciones y autovalores, respectivamente) de una matriz cuadrada a la más amplia teoría de la estructura de operadores en espacios matemáticos específicos. Con ayuda de esta teoría, un operador lineal que cumpla ciertas condiciones puede ser expresado como una combinación lineal de operadores, los cuales son más simples, a esta combinación se le conoce como descomposición espectral. Este trabajo solo se enfocará en estudiar esta teoría en espacios de dimensión finita.

El trabajo de tesis se encuentra enmarcado en la teoría de operadores lineales en espacios vectoriales con producto interior, este trabajo tiene como propósito reafirmar conocimientos adquiridos en asignaturas como álgebra lineal, análisis matemático y análisis funcional para poder utilizarlos de manera adecuada en el estudio de la teoría espectral de operadores en espacios de dimensión finita. Por una parte, el estudio de la teoría espectral durante la licenciatura es muy escaso, con este proyecto se podría complementar la formación y puede ser material de apoyo para el estudio de teoría espectral de operadores en espacios de dimensión infinita, que generalmente son impartidos en posgrado.

Por otra parte, la teoría espectral es muy amplia y tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, [6] describe cómo las vibraciones y ondas son propagadas a lo largo de un sistema semi infinito de masas y resortes, [14] utiliza la teoría espectral para estudiar ondas en redes y cristales, todos estos problemas se abordan en espacios de dimensión infinita. En [2, 7, 13] se abordan diversas aplicaciones en espacios de dimensión finita. Por ejemplo, problemas en física, tales como vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos, así como aplicaciones en biología, incluidos modelos de crecimiento poblacional e interacciones presa-depredador, también se exploran aplicaciones en finanzas (economía) mediante el análisis de sistemas de Markov.

Para poder presentar el teorema espectral y a su vez hacer uso de él, con el fin de analizar y resolver un modelo de un sistema mecánico de partículas en interacción, es necesario el estudio de algunos conceptos y teoremas que ayudan a la comprensión de este resultado, razón por la cual este trabajo considera estructurarse de cuatro capítulos en los cuales se planea alcanzar tal fin.

En el primer capítulo se presentan las definiciones y resultados fundamentales que constituyen la base para el teorema espectral. Entre estos conceptos destacan valores y vectores propios, la norma en un espacio vectorial y la representación matricial, entre otros, los cuales pueden ser consultados en [8, 10]. Cabe destacar que, en espacios de dimensión finita, el análisis espectral de operadores es equivalente al estudio de los datos espectrales de las matrices, lo cual se debe a la representación matricial única de los operadores en dichos espacios.

El segundo capítulo se centra en los operadores, se muestran las definiciones y propiedades de cada uno de ellos, teoremas en los cuales están involucrados y son importantes para el entendimiento del teorema espectral [8], todos estos resultados fueron trabajados y se muestran sus respectivas demostraciones. Además se presenta el teorema espectral con una demostración detallada, esto será posible contando con el análisis y estudio de este capítulo y el anterior.

El tercer capítulo se reduce a matrices de Jacobi, aquí se analizan sus propiedades, cómo están dados sus datos espectrales y cómo obtenerlos, así mismo, resultados de su función espectral, presentados en [12]. Este análisis se basa en resultados más generales que se presentan en [1, 4]. El estudio de las matrices de Jacobi será fundamental para el desarrollo del cuarto capítulo, ya que estas matrices no solo desempeñan un papel crucial en la formulación del problema sino que también de ellas surgen ecuaciones en diferencias [7]. Para complementar este capítulo se presentan ejemplos de matrices con el propósito de que se tenga una mayor comprensión de esta clase de matrices.

En el cuarto capítulo se plantea y formula el problema de un sistema mecánico de masas y resortes, para después construir un modelo de un sistema de partículas en interacción. Una vez definido el modelo, se utiliza la teoría espectral, desarrollada en el tercer capítulo, para resolverlo. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones de segundo orden que proporciona la solución al problema está relacionado a las entradas de una matriz de Jacobi, tal solución resulta ser una superposición de oscilaciones armónicas que dependen de las características mecánicas del sistema.

Además, en el cuarto capítulo se analiza el problema inverso asociado al sistema mecánico [11]. Para abordar el problema inverso, se parte de una función escalón, la cual permite construir un espacio vectorial con producto interior. La representación matricial del operador de multiplicación con respecto a polinomios ortonormales en este espacio, genera una matriz de Jacobi. Una vez obtenidos los elementos de la matriz de Jacobi, se procede a reconstruir un sistema de masas resortes. Esta reconstrucción se realiza mediante las razones entre las constantes de elasticidad y las longitudes de los resortes, así como los valores de las masas del sistema. Cabe destacar que para determinar todas las características del sistema, es indispensable conocer previamente el valor de al menos una masa y una razón. Finalmente, se presentan un par de ejemplos de reconstrucción de una matriz de Jacobi a partir de una función espectral.

Análisis espectral para matrices de Jacobi finitas y un modelo matemático de un sistema de partículas en interacción

Litzy Giselle Mejía Uribe

Junio 2025

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian algunas definiciones y resultados que son muy útiles para comprender enunciados posteriores. Todos estos conceptos son parte del conocimiento básico en el curso de Álgebra Lineal I. Solo algunos de estos resultados cuentan con su respectiva demostración debido a que esta tesis se está enfocando en presentar resultados más avanzados y reproducir las demostraciones limita el espacio, sin embargo se indicará la referencia bibliográfica confiable en donde se pueden consultar tales demostraciones.

1.1. Espacios vectoriales

A continuación se presenta la definición detallada de un espacio vectorial y de igual manera lo que se puede definir y analizar en tal espacio, como por ejemplo subconjuntos que poseen la misma estructura que el conjunto en sí. De manera resumida un espacio vectorial es un conjunto no vacío de elementos a los cuales se les nombran vectores, en tal conjunto se definen dos operaciones que son la adición y la multiplicación por escalares. Estos escalares pertenecen a un campo, denotado por F (véase [10, Def.1, Cap.1]) que en este trabajo corresponde al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o bien, al de los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Un *espacio vectorial* V sobre un campo F es un conjunto de elementos llamados *vectores*, en el que están definidas dos operaciones, (adición y multiplicación por escalares). Estas operaciones cumplen que para cualquier par de elementos v y w en V existe un elemento único $v + w$ en V, y para cada elemento c en F y cada elemento v en V existe un elemento único cv en V. Además, se deben satisfacer los siguientes axiomas:

a) Para toda $v, w \in V$, $v + w = w + v$ (conmutatividad de la suma).

b) Para toda $v, w, u \in V$, $v + (w + u) = (v + w) + u$ (asociatividad de la suma).

c) Existe en V un único vector 0 (el *origen*) tal que $v + 0 = v$ para todo vector v en V.

d) Si v en V le corresponde un único vector $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.

e) Para cada par $c, d \in F$ y $v \in V$, $c(dv) = (cd)v$ (asociatividad en el producto de escalares).

f) Para todo vector $v \in V$, $1v = v$, donde $1 \in F$ (*identidad*).

g) Para cada $c \in F$ y $v, w \in V$, $c(v + w) = cv + cw$, (la multiplicación por escalares es distributiva con respecto al vector suma).

h) Para cada $c, d \in F$ y $v \in V$, $(c + d)v = cv + dv$ (la multiplicación de vectores es distributiva con respecto a la suma de escalares).

A continuación se definen los conceptos de conjunto linealmente dependiente e independiente.

Definición 1.2. Sean V un espacio vectorial sobre un campo F y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto finito de vectores en V. El conjunto S es *linealmente dependiente*, si existe un conjunto correspondiente de escalares $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subseteq F$, no todos cero, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0.$$

Si, por el contrario, $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$ implica que $c_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto S es *linealmente independiente*.

Teorema 1.3. ([10, Teo. 1, Secc.6]). Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. El conjunto de vectores distintos de cero $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en V es linealmente dependiente si y solo si algún v_k, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, puede ser reescrito de la forma

$$v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i v_i,$$

donde $c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n$ son elementos de F.

Definición 1.4. Sean V un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores en V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S se define como *conjunto generado por* S y se denota por *gen(S)*.

Con ayuda de las Definiciones 1.2 y 1.4, es posible determinar el concepto de una base.

Definición 1.5. Sea V un espacio vectorial. Una *base* β es un conjunto de vectores linealmente independientes de V tales que todo vector en V es una combinación lineal de elementos de β.

La Definición 1.5 permite afirmar que si β es una base de un espacio vectorial V y $v \in V$ entonces $v \in gen(\beta)$.

Proposición 1.6. ([8, Cor. 2, Secc 1.6]). Sea V un espacio vectorial y β una base de V. Si β tiene exactamente n elementos, entonces cualquier subconjunto de V que contenga más de n elementos es linealmente dependiente. Consecuentemente, cualquier subconjunto de V linealmente independiente contiene como máximo n elementos.

Proposición 1.7. ([8, Cor. 3, Secc 1.6]) Sea V un espacio vectorial y β una base de V. Si β tiene exactamente n elementos, entonces toda base para V contendrá exactamente n elementos.

El número de elementos de una base da lugar al concepto de dimensión.

Definición 1.8. Un espacio vectorial V se dice de *dimensión finita* si tiene una base que consta de un número finito de elementos; el único número de elementos en cada base de V se llama *dimensión* de V y se denota por $dim(V)$.

Teorema 1.9. ([10, Teo. 1, Secc. 7]). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente en V, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es una base, o existen vectores $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{m+p}$, tales que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+p}\}$ forma una base de V. En otras palabras, cada conjunto linealmente independiente puede ser extendido a una base del espacio vectorial.

Definición 1.10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una *base ordenada* para V es una base para V establecida con un orden específico.

Un espacio vectorial consiste en un conjunto de elementos en el que se definen ciertas operaciones. Es posible analizar si un subconjunto no vacío de este conjunto hereda dichas propiedades, y por tanto pueda considerarse un espacio vectorial por sí mismo.

Definición 1.11. Sean V un espacio vectorial sobre un campo F y W un subconjunto de V. Se dice que W es un *subespacio* de V, si W es un espacio vectorial sobre F bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en V. Se denota que W es un subespacio de V mediante $W \leq V$.

Teorema 1.12. ([8, Teo. 1.3, Secc. 1.3]). Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y W un subconjunto de V. El subconjunto W es un subespacio de V si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones

a) $0 \in W$.

b) $v + w \in W$ para $v, w \in W$.

c) $cv \in W$ para $c \in F$ y $v \in W$.

A continuación se muestran algunas operaciones entre subespacios de un espacio vectorial.

Teorema 1.13. ([8, Teorema 1.4, Secc. 1.3]). Sea V un espacio vectorial. La intersección de toda colección de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio de V.

Teorema 1.14. ([8, Teorema 1.7, Secc. 1.4]). Sean V un espacio vectorial y $S \neq \emptyset$ un subconjunto de V. El subconjunto generado por S, denotado por gen(S) es el subespacio de V más pequeño que contiene a S.

Teorema 1.15. ([8, Teo. 1.12, Secc. 1.6]). Sean V un espacio vectorial de dimensión n. Si W es un subespacio de V, entonces W es de dimensión finita y $dim(W) \leq n$. Además, si $dim(W) = n$, entonces $W = V$.

Definición 1.16. Sean V un espacio vectorial, $W_1, W_2 \subset V$ tales que $W_1 \neq \emptyset$, $W_2 \neq \emptyset$. La *suma* de W_1 y W_2 se expresa como $W_1 + W_2$ y se define por

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\}.$$

Teorema 1.17. Sean V un espacio vectorial. Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Definición 1.18. Sean V un espacio vectorial y W_1,W_2 subespacios de V. Se dice que V es la *suma directa* de W_1 y W_2, expresada como $V = W_1 \oplus W_2$, si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y $W_1 + W_2 = V$.

Teorema 1.19. ([8, Teo. 1.6, Secc. 1.3]). Sean V un espacio vectorial y W_1,W_2 subespacios de V. El espacio vectorial V es la suma directa de W_1 y W_2 si y solo si cada elemento v de V puede ser escrito de manera única como $v = v_1 + v_2$, donde $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$.

Teorema 1.20. ([8, Teorema 1.13, Secc. 1.6]). Sea V un espacio vectorial. Si W_1 y W_2 son subespacios de V de dimensión finita, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2).$$

Corolario 1.21. Sea V un espacio vectorial. Si W_1 y W_2 son subespacios de V de dimensión finita tales que $V = W_1 + W_2$, entonces V es la suma directa de W_1 y W_2 si y solo si

$$dim(V) = dim(W_1) + dim(W_2).$$

1.2. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales desempeñan un papel fundamental en el álgebra lineal, debido a que son funciones específicas que establecen una relación entre dos espacios vectoriales. Tal relación preserva la estructura inherente de estos espacios.

Definición 1.22. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F. Una *transformación lineal* es una función $T \colon V \to W$ que satisface

$$T(cv + w) = cT(v) + T(w),$$

para cada $v, w \in V$ y $c \in F$.

Proposición 1.23. ([8, Cor. 2.7, Secc. 2.1]). Sean V y W espacios vectoriales, V un espacio de dimensión finita y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V. Si $U, T : V \to W$ son transformaciones lineales y $U(v_i) = T(v_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $U = T$.

Se define una operación entre transformaciones lineales, que es la composición.

Definición 1.24. Sean V, W y Z espacios vectoriales y sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales. La *composición de dos transformaciones lineales* S y T, es $U = ST$ y está definida por la ecuación $U(v) = S(T(v))$ para toda $v \in V$.

Definición 1.25. Sean V, W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transfromación lineal. Se dice que $U : W \to V$ es la *inversa* de T si $TU = I_W$ y $UT = I_V$. Además, T es *invertible* si T tiene una inversa.

Observación 1.26. En [8, Ap. B] se establece que si una transformación lineal T es invertible, su inversa es única. Debido a esto, la notación para la inversa de T es T^{-1}.

Teorema 1.27. ([10, Teo. 2, Secc. 36]). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y solo si para cualquier $v \in V$ que satisface que $T(v) = 0$ implica que $v = 0$.

Teorema 1.28. ([10, Teo. 3, Secc. 36]). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y $S, T : V \to V$ transformaciones lineales. Si S y T son invertibles, entonces

a) ST es invertible y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

b) cS es invertible y $(cS)^{-1} = \frac{1}{c}S^{-1}$, donde $c \in F \setminus \{0\}$.

c) S^{-1} es una transformación lineal invertible y $(S^{-1})^{-1} = S$.

Definición 1.29. Sean V, W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define el *espacio nulo* (o *kernel*) de T como $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ y el *rango* (o *imagen*) de T como $R(T) = \{T(v) : v \in V\}$.

Teorema 1.30. ([8, Teo. 2.2, Secc. 2.1]) Sean V,W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Los conjuntos $N(T)$ y $R(T)$ son subespacios de V y W, respectivamente.

En esta sección se introdujo el concepto de transformación lineal entre dos espacios vectoriales, a continuación se muestra una clase particular de transformaciones conocidas como proyecciones.

Definición 1.31. Sean V un espacio vectorial y W_1 un subespacio de V. Una transformación lineal $T : V \to W_1$ se llama *proyección* sobre W_1, si

a) Existe un subespacio W_2 tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

b) Para $v = v_1 + v_2$, donde $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, se tiene $T(v) = v_1$.

Teorema 1.32. ([10, Teo. 1, Secc. 41]). Sean V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Una transformación lineal $T : V \to W$ es una proyección en el subespacio W si y solo si $T^2 = T$.

Teorema 1.33. ([8, Teo. 2.1, Secc. 2.1]) Sean V un espacio vectorial, W_1 un subespacio de V y $T : V \to W_1$ una proyección sobre W_1. Si W_2 es un subespacio de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$, entonces

$$W_1 = R(T) \text{ y } W_2 = N(T).$$

La siguiente definición destaca en esta sección debido a que son conceptos que se usan directamente en el Teorema espectral.

Definición 1.34. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Un vector no nulo $v \in V$ se llama *vector propio* de la transformación T, si existe un escalar $\lambda \in F$ tal que $T(v) = \lambda v$. A λ se le conoce como *valor propio* de T correspondiente a v.

Observación 1.35. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal e $I_V : V \to V$ es la transformación identidad en V, es decir, $I_V(v) = v$ para todo $v \in V$, entonces $T - \lambda I_V : V \to V$ es una transformación lineal para cualquier valor propio λ de T. Asimismo, por el Teorema 1.30, se tiene que $N(T - \lambda I_V)$ es un subespacio vectorial. De modo que si $v \in N(T - \lambda I_V)$, entonces para todo $\alpha \in F$ se tiene que $\alpha v \in N(T - \lambda I_V)$. Esto es, si v es un vector propio de T asociado al valor propio λ, entonces cualquier múltiplo escalar αv, con $\alpha \neq 0$, también es un vector propio de T correspondiente al mismo valor propio λ.

1.3. Representación matricial de una transformación lineal

Posteriormente se verá que es útil poder representar una transformación lineal por medio de una matriz, debido a que a través de matrices se describen y operan transformaciones lineales. Además, en ocasiones resulta mucho más fácil hacer operaciones, cálculos y manipulación de transformaciones lineales por medio de matrices. La asociación entre transformaciones lineales y matrices se basa en fijar las bases de los espacios vectoriales (véase la Definición 1.5).

Definición 1.36. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada para V. Dado un elemento $v \in V$ se define al *vector coordenado de v relativo a β*, denotado por $[v]_\beta$, mediante

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_1, \cdots, a_n \in F$$

donde

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad a_i \in F.$$

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con respectivas bases ordenadas $\beta = \{v_1, \ldots v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Si $T \colon V \to W$ es una transformación lineal, entonces existen escalares únicos $a_{ij} \in F \quad (i = 1, \ldots, m \text{ y } \ j = 1, \ldots, n)$ tales que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \text{ para } j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Definición 1.37. La matriz A de $m \times n$ cuyos elementos son a_{ij} dados en (1.1), se llama *representación matricial* de la transformación lineal $T : V \to W$ respecto a las bases ordenadas β y γ. Además se denota por $A = [T]_\beta^\gamma$. Si $V = W$ y $\beta = \gamma$, entonces $A = [T]_\beta$.

La representación matricial $[T]_\beta^\gamma$ pertenece al espacio vectorial de matrices de $m \times n$ sobre el campo F. Este espacio será denotado por $M_{m \times n}(F)$ (véase [8, Ej.2, Secc. 1.2]). La siguiente afirmación se considera relevante, razón por la cual se muestra con detalles la prueba.

Lema 1.38. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F con bases ordenadas β y γ, respectivamente, y sean $T, U : V \to W$ transformaciones lineales. Si $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$ entonces $T = U$.

Demostración. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$ sus respectivas bases ordenadas.
Para cada $v_i \in \beta$ existen escalares a_{ij}, $b_{ij} \in F$ tales que

$$\begin{aligned} T(v_i) &= a_{i1} w_1 + \cdots + a_{im} w_m \\ U(v_i) &= b_{i1} w_1 + \cdots + b_{im} w_m, \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, n$.
Como $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$ entonces $a_{ij} = b_{ij}$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$, lo que implica que $T(v_i) = U(v_i)$, por el Corolario 1.23 se tiene que $T = U$. ■

Teorema 1.39. ([8, Teo. 2.9, Secc. 2.2]) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F y con bases ordenadas β y γ, respectivamente. Si $T, U : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces

a) $[T + U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$

b) $[aT]_\beta^\gamma = a[T]_\beta^\gamma$ para toda $a \in F$.

Teorema 1.40. ([8, Teo. 2.16, Secc. 2.3]) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas β y γ, respectivamente. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces para toda $v \in V$ se tiene

$$[T(v)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [v]_\beta.$$

La afirmación presentada a continuación es relevante para el desarrollo del trabajo y se incluye junto con su demostración para complementarlo.

Teorema 1.41. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas α, β, γ, respectivamente. Si $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ son transformaciones lineales, entonces

$$[UT]_\alpha^\gamma = [U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta.$$

Demostración. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas α, β y γ, respectivamente. Dado $v \in V$, sea $[v]_\gamma$ el vector de coordenadas de v relativo a γ. Aplicando la transformación T a v, del Teorema 1.40 se tiene

$$[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha.$$

Ahora aplicando la transformación U al vector $T(v)$ y sustituyendo $[T(v)]_\beta$

$$[U(T(v))]_\gamma = [U]_\beta^\gamma [T(v)]_\beta = [U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha. \tag{1.2}$$

Nuevamente por el Teorema 1.40,

$$[U(T(v))]_\gamma = [UT]_\alpha^\gamma [v]_\alpha. \tag{1.3}$$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) se sigue que

$$[UT]_\alpha^\gamma [v]_\alpha = [U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha,$$

para toda $v \in V$. Si se sustituye v por los elementos de α, se tiene que cada una de las columnas de $[UT]_\alpha^\gamma$ y $[U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$ son las mismas. Por lo tanto $[UT]_\alpha^\gamma = [U]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$. ■

En el Teorema 1.41, es posible considerar el caso particular $V = W = Z$ con el cual se tiene el siguiente corolario, que de igual manera este se menciona en [8, Secc. 2.3].

Corolario 1.42. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con una base ordenada β. Si $T, U : V \to V$ son transformaciones lineales, entonces

$$[UT]_\beta = [U]_\beta [T]_\beta.$$

Teorema 1.43. ([8, Teo. 2.13, Secc. 2.3]) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F. Si β es una base ordenada de V, entonces $[I_V]_\beta = I_n$, donde I_n es la matriz identidad en $M_{n\times n}(F)$ e $I_V : V \to V$ es la transformación identidad en V.

Proposición 1.44. ([8, Cor. 1, Secc. 2.4]) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, β una base ordenada de V y $T : V \to V$ una transformación lineal. La transformación T es invertible si y solo si $[T]_\beta$ es invertible. Además, $[T^{-1}]_\beta = [T]_\beta^{-1}$.

Proposición 1.45. ([8, Cor. 2, Secc. 4.3]) Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. La matriz A es no invertible si y solo si $\det(A) = 0$.

Teorema 1.46. ([8, Teo. 5.5, Secc. 5.1]) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si β y β' son bases para V, entonces se tiene que $\det([T]_\beta) = \det([T]_{\beta'})$.

La afirmación anterior muestra que el determinante de una representación matricial de una transformación lineal es independiente de la base elegida, lo que permite formular la siguiente definición.

Definición 1.47. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal. Se define el *determinante de* T como el determinante de $[T]_\beta$, donde β es cualquier base de V.

Teorema 1.48. ([8, Teo. 5.6, Secc. 5.1]) Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si λ es un escalar de F y β una base para V, entonces

$$\det(T - \lambda I_V) = \det(A - \lambda I_n)\,,$$

donde $A = [T]_\beta$.

Teorema 1.49. ([8, Teo. 5.7, Secc. 5.1]) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y $T : V \to V$ una transformación lineal. El valor $\lambda \in F$ es un valor propio de T si y solo si $\det(T - \lambda I_V) = 0$.

Corolario 1.50. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F, una transformación lineal $T : V \to V$ y β una base para V. El valor $\lambda \in F$ es un valor propio de T si y solo si es un valor propio de $[T]_\beta$.

Definición 1.51. Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $T : V \to V$ una transformación lineal y β una base para V. Se define al *polinomio característico* $p(\lambda)$ de T como

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

donde $A = [T]_\beta$.

Definición 1.52. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. La transformación lineal T es *diagonalizable* si existe una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

Teorema 1.53. ([8, Teo. 5.4, Secc. 5.1]) Sean V un espacio vectorial de dimesión finita sobre un campo F y $T : V \to V$ una transformación lineal. La transformación lineal T es diagonalizable si y solo si existe una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y escalares $\lambda_i \in F$ (no necesariamente distintos) tales que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, la representación matricial de T respecto a la base β que es $[T]_\beta$ coincide con la matriz diagonal cuyas componentes diagonales son $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, esta matriz diagonal se denota por $diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

1.4. Espacios con producto interior

En la Sección 1.1 ya se definió lo que es un espacio vectorial, se vio que cuenta con dos operaciones que son adición y producto escalar, ahora agregando una operación más que es el producto interior a un espacio vectorial, se obtiene un espacio con producto interior. La operación de producto interior ayuda a generar una norma y con ella se puede conocer la longitud que existe entre cualquier par de vectores en el espacio vectorial, de igual manera ayuda a obtener conceptos como ortogonalidad y ortonormalidad entre vectores, las propiedades y definiciones de los conceptos mencionados se muestran en esta sección. La definición formal de un producto interior es la siguiente.

Definición 1.54. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Un *producto interior* en V, es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$$

que asigna a cada par ordenado de vectores $(v, w) \in V \times V$ un escalar en F, representado como $\langle v, w \rangle$, tal que para toda v, w y z en V y todo $c_1, c_2 \in F$ se tiene que:

a) $\langle v, v \rangle \geq 0$; $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$.

b) $\langle c_1 v, c_2 w \rangle = c_1 \overline{c_2} \langle v, w \rangle$, donde $c_1, c_2 \in F$.

c) $\langle v + z, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$.

d) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

Al espacio vectorial sobre un campo F que cuenta con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama *espacio con producto interior*.

Teorema 1.55. ([8, Teo. 7.1, Secc. 7.1]). Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F. Para $v, w, u \in V$ y $c \in F$ se cumplen las siguientes propiedades

a) $\langle v, cw \rangle = \overline{c} \langle v, w \rangle$.

b) Si $\langle v, w \rangle = \langle v, u \rangle$ para toda $v \in V$, entonces $w = u$.

Teniendo ya definido lo que es un producto interior, se determina el concepto de norma en términos del producto interior.

Definición 1.56. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para $v \in V$ se define la *norma* de v mediante $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Teorema 1.57. ([8, Teo. 7.2, Secc. 7.1]). Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F. Para toda $v, w \in V$ y $c \in F$ se tiene:

a) $||cv|| = |c| \cdot ||v||$.

b) $||v|| \geq 0$; $||v|| = 0$ si y solo si $v = 0$.

c) $|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

d) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Desigualdad del triángulo).

Definición 1.58. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un vector $v \in V$ es un *vector unitario* si satisface que $||v|| = 1$.

Dado V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F y $v, w \in V$, el producto interior $\langle v, w \rangle$ da como resultado un valor del campo. En algunos casos, este valor es cero, y cuando esto ocurre, los vectores que cumplen esta propiedad reciben un nombre específico.

Definición 1.59. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Los vectores $v, w \in V$ se llaman *ortogonales* si $\langle v, w \rangle = 0$.

Definición 1.60. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un subconjunto S de V es un *subconjunto ortogonal* si cualquier par de elementos de S distintos entre sí son ortogonales. Un subconjunto S de V es un *subconjunto ortonormal* si S es ortogonal y está formado únicamente de vectores unitarios.

Al combinar el concepto de base y un conjunto ortonormal se obtiene un nuevo concepto.

Definición 1.61. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un subconjunto β de V es una *base ortonormal* para V, si β es una base ordenada ortonormal.

Teorema 1.62. ([8, Teo. 7.4, Secc. 7.2]) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un subconjunto de V linealmente independiente. Defínase el conjunto $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, donde $v_1 = w_1$ y

$$v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{||v_j||^2} v_j \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{1.4}$$

S' es un conjunto ortogonal de vectores no nulos tales que $\text{gen}(S') = \text{gen}(S)$.

A la construcción del conjunto S' por medio de la ecuación (1.4) se le conoce como *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Teorema 1.63. ([8, Teo. 7.6, Secc. 7.2]) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal para V y $v \in V$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i \,.$$

Definición 1.64. Sean V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y S un subconjunto de V. Se define $S^{\perp}$ como el conjunto de todos aquellos vectores de V que son ortogonales a todos los vectores de S; esto es, $S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \text{ para toda } w \in S\}$. A $S^{\perp}$ se le llama *complemento ortogonal* de S.

Teorema 1.65. ([8, Teo. 7.6, Secc. 7.2]). Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si W es un subespacio de dimensión finita de V, entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.

Capítulo 2

Operadores lineales y el Teorema espectral

La teoría presentada en este capítulo corresponde a resultados clásicos de álgebra lineal, la mayoría de estos están basados en [8].
Al hablar de operadores lineales se hace referencia a transformaciones lineales, los operadores lineales son un caso particular de las transformaciones. En otras palabras, se sabe que una transformación lineal es una función entre dos espacios vectoriales V y W, como caso particular es que V y W sean el mismo espacio vectorial. Por lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial. Se llama *operador lineal* en V a toda transformación lineal $T : V \to V$.

Definición 2.2. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y A en $M_{n\times n}(F)$. Se define el operador $L_A : F^n \to F^n$ por

$$L_A(v) = Av\,, \quad \forall v \in F^n\,.$$

Observación 2.3. Observe que de la Definición 2.2 se obtiene lo siguiente:

a) Si β es la base canónica del espacio vectorial F^n, se tiene que $[L_A]_\beta = A$.

b) Si $L_A = L_B$, entonces $A = B$.

En las secciones de este capítulo se presentan distintos tipos de operadores y algunas propiedades de estos. Se analizarán propiedades espectrales de los operadores normales, autoadjuntos y unitarios.

2.1. Operador adjunto

Un operador lineal T define un nuevo operador llamado adjunto de T, denotado por T^*. El operador adjunto se relaciona con el operador lineal T solo en espacios vectoriales con producto interior. Para determinar la existencia de dicho operador se analizan las siguientes afirmaciones para posteriormente dar su definición.

Teorema 2.4. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre un campo F. Si $g : V \to F$ es una transformación lineal, entonces existe un único vector $w \in V$ tal que $g(v) = \langle v, w\rangle$ para toda $v \in V$.

Demostración. Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal para V. Considere a $w \in V$ dado por

$$w := \sum_{i=1}^{n} \overline{g(v_i)} v_i$$

y la función $h : V \to F$ definida por $h(v) := \langle v, w\rangle$. La función h es una transformación lineal, debido a la linealidad del producto interior. Así, para cada $j = 1, \ldots n$.

$$\begin{aligned} h(v_j) &= \langle v_j, w\rangle \\ &= \langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{g(v_i)} v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v_j, \overline{g(v_i)} v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(v_i)\langle v_j, v_i\rangle \\ &= g(v_j)\langle v_j, v_j\rangle \\ &= g(v_j)\,. \end{aligned}$$

Como g y h son lineales y $h(v_j) = g(v_j)$ para $j = 1, \ldots, n$, por la Proposición 1.23 se tiene que $g = h$.
Ahora, para ver que w es único, supóngase que existe $w' \in V$ tal que $g(v) = \langle v, w'\rangle$, para todo $v \in V$. Así

$$\langle v, w\rangle = \langle v, w'\rangle$$

y por el Teorema 1.55, $w = w'$. Lo que concluye la prueba de la afirmación. ■

Teorema 2.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si T un operador lineal en V, entonces existe un único operador lineal T^* en V tal que se satisface $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$ para todo vector $v, w \in V$.

Demostración. Sea w un elemento fijo en V. Considere la función $g : V \to F$ como

$$g(v) := \langle T(v), w\rangle\,, \quad \forall v \in V\,. \tag{2.1}$$

La función g es una transformación lineal. En efecto, sean $v_1, v_2 \in V$ y $c \in F$. Se tiene que

$$\begin{aligned} g(cv_1 + v_2) &= \langle T(cv_1 + v_2), w\rangle \\ &= \langle cT(v_1) + T(v_2), w\rangle \\ &= \langle cT(v_1), w\rangle + \langle T(v_2), w\rangle \\ &= cg(v_1) + g(v_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, del Teorema 2.4 existe un único vector $w' \in V$ tal que $g(v) = \langle v, w' \rangle$. Así, de la ecuación (2.1)

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, w' \rangle\,, \quad \forall v \in V\,.$$

Ahora, definiendo la función $T^* : V \to V$ tal que $T^*(w) = w'$, se tiene que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle\,. \tag{2.2}$$

La función T^* es un operador lineal y es el único que satisface (2.2).
En efecto, sean $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in F$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle v, T^*(cv_1 + v_2) \rangle &= \langle T(v), cv_1 + v_2 \rangle \\
&= \langle T(v), cv_1 \rangle + \langle T(v), v_2 \rangle \\
&= \bar{c}\langle T(v), v_1 \rangle + \langle T(v), v_2 \rangle \\
&= \bar{c}\langle v, T^*(v_1) \rangle + \langle v, T^*(v_2) \rangle \\
&= \langle v, cT^*(v_1) \rangle + \langle v, T^*(v_2) \rangle \\
&= \langle v, cT^*(v_1) + T^*(v_2) \rangle\,.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.55, se tiene que $T^*(cv_1+v_2) = cT^*(v_1)+T^*(v_2)$. Para mostrar la unicidad de T^*, supóngase que existe $R : V \to V$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, R(w) \rangle\,, \quad \text{para todo } v, w \in V\,.$$

Luego, de (2.2)

$$\langle v, T^*(w) \rangle = \langle v, R(w) \rangle\,, \quad \text{para todo } v, w \in V\,,$$

de modo que $T^* = R$. ■

Definición 2.6. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y T un operador lineal en V. El operador T^* que satisface

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \text{ para todo vector } v, w \in V,$$

se llama operador *adjunto* de T.

Definición 2.7. Sea $A \in M_{m\times n}(F)$. Se define la matriz *transpuesta conjugada* (o *adjunta*) de A como la matriz A^* en $M_{n\times m}(F)$ donde $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ji}$.

Teorema 2.8. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y β una base ortonormal para V. Si T es un operador lineal en V, entonces la representación matricial de T^* con respecto a β coincide con la adjunta de la representación matricial de T respecto a la misma base. Esto es,

$$[T^*]_\beta = [T]^*_\beta.$$

Demostración. Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal para V y las matrices $A = [T]_\beta$ y $B = [T^*]_\beta$. Debido a la Definición 1.37, se tiene que $T(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij}v_i$ y $T^*(v_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij}v_i$ para cada $j = 1, \ldots, n$. De modo que por el Teorema 1.63 para cada $i, j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \langle T^*(v_j), v_i\rangle \\ &= \overline{\langle v_i, T^*(v_j)\rangle} \\ &= \overline{\langle T(v_i), v_j\rangle} \\ &= \overline{A_{ji}} \\ &= A^*_{ij}\,, \end{aligned}$$

es decir, $[T^*]_\beta = [T]^*_\beta$. ■

Corolario 2.9. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Se cumple que $L_{A^*} = (L_A)^*$.

Demostración. Sea β la base canónica para F^n. Así

$$[(L_A)^*]_\beta = [L_A]^*_\beta = A^* = [L_{A^*}]_\beta\,,$$

donde se ha utilizado el Teorema 2.8 e inciso (a) de la Observación 2.3. Además por el Lema 1.38 es posible concluir que $(L_A)^* = L_{A^*}$. ■

Teorema 2.10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre un campo F. Si T, U e I son operadores lineales en V, donde I es el operador identidad entonces

a) $(T + U)^* = T^* + U^*$.

b) $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$ para cualquier $c \in F$.

c) $(TU)^* = U^*T^*$.

d) $T^{**} = T$.

e) $I^* = I$.

Demostración. Considere a T, U operadores lineales en V, v, w elementos arbitrarios en V y c cualquier elemento del campo F.

a)

$$\begin{aligned} \langle v, (T+U)^*(w)\rangle &= \langle (T+U)(v), w\rangle \\ &= \langle T(v) + U(v), w\rangle \\ &= \langle T(v), w\rangle + \langle U(v), w\rangle \\ &= \langle v, T^*(w)\rangle + \langle v, U^*(w)\rangle \\ &= \langle v, T^*(w) + U^*(w)\rangle\,. \end{aligned}$$

Por el inciso (b) del Teorema 1.55, se tiene que $(T + U)^*(w) = T^*(w) + U^*(w)$ para todo $w \in V$, por tanto $(T + U)^* = T^* + U^*$.

b)

$$\begin{aligned}\langle v, (cT)^*(w)\rangle &= \langle (cT)(v), w\rangle \\ &= \langle cT(v), w\rangle \\ &= c\langle T(v), w\rangle \\ &= c\langle v, T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, \overline{c}T^*(w)\rangle\,.\end{aligned}$$

Debido al inciso (b) del Teorema 1.55, se tiene que $(cT)^*(w) = \overline{c}T^*(w)$ para todo $w \in V$, así $(cT)^* = \overline{c}T^*$.

c)

$$\begin{aligned}\langle v, (TU)^*(w)\rangle &= \langle (TU)(v), w\rangle \\ &= \langle T(U(v)), w\rangle \\ &= \langle U(v), T^*(w)\rangle \\ &= \langle v, U^*T^*(w)\rangle\,.\end{aligned}$$

Por el inciso (b) del Teorema 1.55, se tiene que $(TU)^*(w) = U^*T^*(w)$ para todo $w \in V$, por consiguiente, $(TU)^* = U^*T^*$.

d)

$$\begin{aligned}\langle v, T^{**}(w)\rangle &= \langle T^*(v), w\rangle \\ &= \langle v, T(w)\rangle.\end{aligned}$$

Así, $T^{**}(w) = T(w)$ para todo $w \in V$, esto debido al inciso (b) del Teorema 1.55, como w es arbitrario entonces $T^{**} = T$.

e)

$$\begin{aligned}\langle v, I^*(w)\rangle &= \langle I(v), w\rangle \\ &= \langle v, w\rangle \\ &= \langle v, I(w)\rangle.\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el inciso (b) del Teorema 1.55, se tiene que $I^*(w) = I(w)$ para todo $w \in V$, por tanto $I^* = I$.

Cada uno de los cinco incisos ha sido demostrado, con lo cual la demostración queda completada. ∎

Corolario 2.11. Sean $A, B \in M_{n\times n}(F)$. Se cumple lo siguiente

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

b) $(cA)^* = \overline{c}A^*$ para toda $c \in F$.

c) $(AB)^* = B^*A^*$.

d) $A^{**} = A$.

e) $I^* = I$

Demostración. Las afirmaciones serán probadas empleando la Definición 2.2, la Observación 2.3, el Corolario 2.9 y el Teorema 2.10.

a)
$$L_{(A+B)^*} = (L_{A+B})^* = (L_A + L_B)^* = (L_A)^* + (L_B)^* = L_{A^*} + L_{B^*} = L_{(A^*+B^*)}.$$

b)
$$L_{(cA)^*} = (L_{cA})^* = (cL_A)^* = \overline{c}(L_{A^*}) = L_{\overline{c}A^*}.$$

c)
$$L_{(AB)^*} = (L_{AB})^* = (L_A L_B)^* = (L_B)^*(L_A)^* = (L_{B^*})(L_{A^*}) = L_{B^*A^*}.$$

d)
$$L_{(A)^{**}} = (L_{A^*})^* = (L_A)^{**} = L_A.$$

e) Observe que $L_I(v) = I(v)$ para todo $v \in F^n$, es decir, es el operador identidad del espacio V que aparece en el inciso (e) del Teorema 2.10. Así,
$$L_{I^*} = (L_I)^* = L_I\,.$$

Se han demostrado los cinco incisos, por tanto, la demostración queda completa. ■

2.2. Operadores normales

Teniendo claro el concepto de operador adjunto T^* se define un nuevo tipo de operadores, llamados operadores normales, en pocas palabras, un operador normal es aquel operador que conmuta con su adjunto.

Definición 2.12. Sean V un espacio vectorial de dimensión fnita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y T un operador lineal en V. Se dice que T es un operador *normal* si $TT^* = T^*T$. Análogamente, una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ es normal si $AA^* = A^*A$.

Proposición 2.13. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, β una base ortonormal de V y T un operador lineal en V. El operador T es normal si y solo si $[T]_\beta$ es normal.

Demostración. Sea β una base ortonormal de V y $[T]_\beta$ la representación matricial del operador lineal T con respecto a β.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es un operador normal, es decir $TT^* = T^*T$.

$$\begin{aligned}
[T]_\beta[T]_\beta^* &= [T]_\beta[T^*]_\beta \\
&= [TT^*]_\beta \\
&= [T^*T]_\beta \\
&= [T^*]_\beta[T]_\beta \\
&= [T]_\beta^*[T]_\beta \,,
\end{aligned}$$

donde la primera y quinta igualdad se garantiza por el Teorema 2.8, la segunda y cuarta por el Corolario 1.42. Así, $[T]_\beta$ es normal.
($\Leftarrow$) Supóngase que $[T]_\beta$ es normal. De modo que

$$\begin{aligned}
[TT^*]_\beta &= [T]_\beta[T^*]_\beta \\
&= [T]_\beta[T]_\beta^* \\
&= [T]_\beta^*[T]_\beta \\
&= [T^*]_\beta[T]_\beta \\
&= [T^*T]_\beta \,.
\end{aligned}$$

Es decir, los operadores TT^* y T^*T tienen la misma representación matricial con respecto a β. Así por el Lema 1.38, se tiene que $TT^* = T^*T$. ■

Teorema 2.14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F. Si T es un operador normal en V, entonces se cumple lo siguiente

a) $||T(v)|| = ||T^*(v)||$ para toda $v \in V$.

b) $T - cI$ es normal para toda $c \in F$.

c) Si $\lambda \in F$ es un valor propio de T, entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^*. De hecho, $T(v) = \lambda v$ implica que $T^*(v) = \bar{\lambda} v$.

d) Si λ_1 y λ_2 son distintos valores propios de T con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

Demostración. Sean T un operador normal en V.

a) Utilizando el hecho de que T es normal, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
||T(v)||^2 &= \langle T(v), T(v) \rangle \\
&= \langle v, T^*(T(v)) \rangle \\
&= \langle v, T(T^*(v)) \rangle \\
&= \langle T^*(v), T^*(v) \rangle \\
&= ||T^*(v)||^2, \quad \text{para todo } v \in V \,.
\end{aligned}$$

b) Sea $c \in F$. Haciendo uso del Teorema 2.10, se tiene que

$$\begin{aligned}(T-cI)(T-cI)^* &= (T-cI)(T^*-\overline{c}I) \\ &= TT^* - \overline{c}T - cT^* + c\overline{c}I \\ &= T^*T - \overline{c}T - cT^* + c\overline{c}I \\ &= (T^*-\overline{c}I)(T-cI) \\ &= (T-cI)^*(T-cI)\,.\end{aligned}$$

c) Sea λ un valor propio de T y v su respectivo vector propio, esto es, $T(v) = \lambda v$. Luego

$$\begin{aligned}0 &= ||(T-\lambda I)(v)|| \\ &= ||(T-\lambda I)^*(v)|| \\ &= ||(T^*-\overline{\lambda}I)(v)|| \\ &= ||T^*(v) - \overline{\lambda}I(v)|| \\ &= ||T^*(v) - \overline{\lambda}v||\,,\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por (a) de este mismo teorema.
De modo que, $T^*(v) = \overline{\lambda}v$ debido al Teorema 1.57.

d) Sean λ_1 y λ_2 valores propios de T distintos entre sí, con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, esto es, $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Así

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle \\ &= \langle T(v_1), v_2\rangle \\ &= \langle v_1, T^*(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1, \overline{\lambda_2}v_2\rangle \\ &= \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle\,,\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se debe al inciso (c) del presente teorema. Así, dado que $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Es decir, v_1 y v_2 son ortogonales.

Se han demostrado cada uno de los cuatro incisos del teorema, por tanto, la demostración queda completa. ■

Definición 2.15. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V. Un subespacio W de V se llama *subespacio T-invariante de V*, si $T(W) \subseteq W$.

Observación 2.16. Dado T un operador lineal en un espacio vectorial V y W un subespacio de V, para mostrar que W es T-invariante, basta probar que para todo elemento $v \in W$ se cumple que $T(v)$ sigue estando en W.

Proposición 2.17. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$, T un operador lineal en V y W un subespacio T-invariante de V. Si $T_W : W \to W$ es un operador tal que $T_W(v) = T(v)$ para todo $v \in W$, entonces

a) El subespacio $W^{\perp}$ es T^*-invariante de V.

b) Si W es T-invariante de V y T^*-invariante de V, entonces $(T_W)^* = (T^*)_W$.

c) Si T es un operador normal de V y W es un subespacio T-invariante y T^*-invariante de V, entonces T_W es un operador normal en W.

Demostración. Considere a T un operador lineal en V y W un subespacio T-invariante de V.

a) Si $v \in W$ y $w \in W^{\perp}$, entonces por la Definición 1.64 y Definición 2.15 se obtiene que $T(v) \in W$ y $\langle T(v), w\rangle = 0$. De modo que,

$$\langle v, T^*(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle = 0\,,$$

esto es, $T^*(w) \in W^{\perp}$. Por lo tanto, $T^*(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$, es decir, $W^{\perp}$ es un subespacio T^*-invariante de V.

b) Supóngase que W es un subespacio T-invariante y T^*-invariante de V. Así $(T^*)_W$ se puede definir análogamente como se definió T_W. Observe que T_W y $(T^*)_W$ son operadores lineales debido a que W es un subespacio T-invariante y T^*-invariante de V. Dados v y w elementos arbitrarios de W, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle v, (T_W)^*(w)\rangle &= \langle T_W(v), w\rangle\\ &= \langle T(v), w\rangle\\ &= \langle v, (T^*)(w)\rangle\\ &= \langle v, (T^*)_W(w)\rangle\,.\end{aligned}$$

Por inciso (b) del Teorema 1.55 se tiene que $(T_W)^*(w) = (T^*)_W(w)$ para todo $w \in W$, por tanto $(T_W)^* = (T^*)_W$. Debido a la igualdad de operadores, a partir de ahora se omitirán los paréntesis, es decir, se considera el operador T_W^*.

c) Supóngase que T es un operador normal en V y W es T-invariante y T^*-invariante de V. Dados que v y w son elementos arbitrarios de W, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle T_W T_W^*(v), w\rangle &= \langle T_W^*(v), T_W^*(w)\rangle\\ &= \langle T^*(v), T^*(w)\rangle\\ &= \langle T(T^*(v)), w\rangle\\ &= \langle T^*T(v), w\rangle\\ &= \langle T_W^* T_W(v), w\rangle\,.\end{aligned}$$

Por inciso (b) del Teorema 1.55 se tiene que $T_W T_W^*(v) = T_W^* T_W(v)$, para todo $v \in W$, es decir, $T_W T_W^* = T_W^* T_W$, esto es que T_W en el subespacio W es un operador normal.

Así, se han probado los tres incisos, por lo que la demostración queda completa. ■

Teorema 2.18. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$. Si T es un operador lineal en V, entonces el operador T tiene un valor propio.

Demostración. Sean T un operador lineal en V sobre el campo $\mathbb{C}$ y f el polinomio característico de T. Como f tiene coeficientes complejos, el teorema fundamental del álgebra asegura la existencia de un número complejo λ en el cual el polinomio f evaluado en dicho número es cero. Esto es,

$$f(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0,$$

lo que implica que $T - \lambda I$ no es invertible. Así, existe un vector $v \neq 0$ en V tal que $(T - \lambda I)v = 0$, o bien, $Tv = \lambda v$. Lo que prueba que λ es un valor propio. ■

Teorema 2.19. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador lineal en V. El operador T es normal si y solo si V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Demostración.
($\Rightarrow$) La demostración será por inducción para $n = dim(V)$. Es decir, se mostrará que para todo espacio vectorial V de dimensión finita, si T es un operador lineal normal en V, entonces V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Caso $k = 1$: Sea V un espacio vectorial de dimensión 1 y T un operador normal en V. Se toma un vector propio v de T cuya existencia se debe al Teorema 2.18. Luego $v \neq 0$ y $V = gen\{v\}$. De modo que $\beta = \left\{ \frac{1}{||v||} v \right\}$ es una base ortonormal para V formada por vectores propios de T.

Caso $k = n - 1$: Por hipótesis de inducción supóngase que para todo espacio vectorial V de dimensión $n - 1$ se cumple que: si T es un operador normal en V entonces V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Caso $k = n$: Sean V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ de dimensión n y T un operador normal en V. Por el Teorema 2.18 el operador T tiene un valor propio, digamos λ_1 y v_1 su correspondiente vector propio, con el supuesto de $||v_1|| = 1$. Sea $W = gen\{v_1\}$. Ya que v_1 es un vector propio de T y al ser T normal, v_1 es también un vector propio de T^* debido al inciso (c) del Teorema 2.14. Además, W es T-invariante y T^*-invariante de V, esto es $T(W) \subseteq W$ y $T^*(W) \subseteq W$.
Por el inciso (a) de la Proposición 2.17 se tiene que $W^\perp$ es T^*-invariante de V. Además, dado que W es T^*-invariante, aplicando nuevamente el inciso (a) de la Proposición 2.17 junto con el inciso (d) del Teorema 2.10 se tiene que $W^\perp$ es T-invariante de V. Como T es normal y $W^\perp$ es un subespacio T-invariante y T^*-invariante de V por el inciso (c) de la Proposición 2.17 se deduce que $T_{W^\perp}$ es normal. Dado que $dim(V) = n$ y $dim(W) = 1$, por el Corolario 1.21 se tiene que $dim(W^\perp) = n - 1$. Aplicando la hipótesis de inducción a $T_{W^\perp}$ se obtiene una base ortonormal $\gamma = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ para $W^\perp$ y que está formada por vectores propios

de $T_{W^\perp}$, que a su vez son vectores propios de T. Por lo tanto, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es la base ortonormal para V, formada por vectores propios de T.

($\Leftarrow$) Supóngase que V tiene una base ortonormal β, formada por vectores propios de T. La matriz $[T]_\beta$ es una matriz diagonal y de la Definición 2.7 la matriz $[T]_\beta^*$ también es una matriz diagonal. Por el Teorema 2.8 se tiene que $[T]_\beta^* = [T^*]_\beta$, de donde se obtiene que $[T^*]_\beta$ es una matriz diagonal. Por tanto se tiene que $[T]_\beta[T^*]_\beta = [T^*]_\beta[T]_\beta$, esto es, $[T]_\beta$ es normal. Por la Proposición 2.13 se tiene que T es normal. ∎

2.3. Operadores autoadjuntos

Una clase más de operadores son los operadores autoadjuntos, estos son aquellos que cumplen con $T = T^*$ donde T^* es el operador adjunto de T. En esta sección se analizarán las propiedades de estos operadores.

Definición 2.20. Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un operador lineal T se llama *autoadjunto* si

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle, \quad \forall v, w \in V.$$

Con la definición anterior, claramente se obtiene la afirmación de que todo operador autoadjunto es un operador normal, pues $T^*T = T^2 = TT^*$.

Proposición 2.21. Sean V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F y T un operador lineal autoadjunto en V. Si λ es un valor propio de T, entonces λ es un número real.

Demostración. Sean T es un operador autoadjunto, es decir, λ un valor propio de T y v su correspondiente vector propio. Debido a que $T = T^*$ se tiene que

$$\lambda v = T(v) = T^*(v) = \overline{\lambda} v,$$

la última igualdad se debe al inciso (c) del Teorema 2.14 (dicho teorema tiene por hipótesis que T sea un operador normal pero al ser T un operador autoadjunto es normal). Así, $(\lambda - \overline{\lambda})v = 0$, dado que v es un vector propio, entonces $v \neq 0$, así $\lambda = \overline{\lambda}$, es decir, λ es un número real. ∎

Ya se ha mencionado la estrecha relación entre operadores y matrices. En particular, al abordar el caso de operadores autoadjuntos, esta relación se refleja directamente en el comportamiento de sus matrices asociadas, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.22. Una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, se dice *autoadjunta* si cumple que

$$A = A^*,$$

donde A^* es la matriz adjunta (véase Definición 2.7). En particular, si $F = \mathbb{R}$, entonces A es una matriz *simétrica*, y si $F = \mathbb{C}$, entonces A es una matriz *hermitiana*.

Proposición 2.23. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior y β una base ortonormal para V. Un operador lineal T es autoadjunto si y solo si $[T]_\beta$ es una matriz autoadjunta, es decir, $[T]_\beta = [T]^*_\beta$.

Demostración. Sea β una base ortonormal para V.
($\Rightarrow$) Si T es un operador autoadjunto, esto es, $T = T^*$, se tiene que

$$[T]_\beta = [T^*]_\beta = [T]^*_\beta \,,$$

donde la última igualdad se da por el Teorema 2.8. Así, $[T]_\beta$ es una matriz autoadjunta.
($\Leftarrow$) Supóngase que $[T]_\beta$ es una matriz autoadjunta. Se cumple que

$$[T]_\beta = [T]^*_\beta = [T^*]_\beta \,,$$

la última igualdad se da de nuevo por el Teorema 2.8. De modo que T es un operador autoadjunto. ∎

Observación 2.24. El Teorema 2.18 garantiza la existencia de un valor propio cuando el espacio V está definido sobre el campo $\mathbb{C}$. La Proposición 2.21 establece que este valor propio es real si el operador es autoadjunto. Sin embargo, cuando V está definido sobre el campo $\mathbb{R}$ para asegurar la existencia de un valor propio es necesario que T sea un operador autoadjunto, tal como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.25. Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{R}$. Si T es un operador lineal autoadjunto en V, entonces T tiene un valor propio real.

Demostración. Sea β una base ortonormal para V. Dado que T es un operador autoadjunto, por la Proposición 2.23 la matriz $[T]_\beta$ es autoadjunta. Denótese por $A := [T]_\beta$ la matriz donde sus elementos son reales y considérese al operador lineal T_A sobre $\mathbb{C}^n$ dado por la Definición 2.2. Por el Teorema 2.18 se tiene que T_A posee un valor propio, λ. Se sabe que si γ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ entonces $[T_A]_\gamma = A$ (véase la Observación 2.3), con esto $[T_A]_\gamma$ tiene elementos reales. Utilizando nuevamente la Proposición 2.23 se tiene que T_A es un operador autoadjunto. Ahora por la Proposición 2.21 se concluye que λ es un valor propio real de T_A y por lo tanto λ es un valor propio para A y a su vez de T debido al Corolario 1.50. ∎

Proposición 2.26. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T un operador lineal en V y W un subespacio T-invariante de V. Si T es un operador autoadjunto, entonces T_W es un operador autoadjunto.

Demostración. Supóngase que T es un operador lineal autoadjunto. Sean T_W y T^*_W los operadores en W definidos como en la Proposición 2.17. Así, para cualquier elemento v en W. Se tiene que

$$T_W(v) = T(v) = T^*(v) = T^*_W(v). \tag{2.3}$$

En particular, (2.3) es válida al sustituir v por cualquier elemento de una base W. Por lo tanto, de la Proposición 1.23 se tiene que $T_W = T^*_W$, es decir, T_W es un operador autoadjunto. ■

La Observación 2.24 muestra la importancia de distinguir entre los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La siguiente afirmación debe analizarse y notar las diferencias con respecto al Teorema 2.19, considerando los campos distintos.

Teorema 2.27. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{R}$ y T un operador lineal en V. El operador T es autoadjunto si y solo si V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Demostración.
($\Rightarrow$) La demostración será por inducción para $n = dim(V)$. Es decir, se mostrará que para todo espacio vectorial V de dimensión finita, si T es un operador lineal autoadjunto en V, entonces V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Caso $k = 1$: Sea V un espacio vectorial de dimensión 1 y T un operador normal en V. Se toma un vector propio v de T cuya existencia se debe al Teorema 2.25. Como $v \neq 0$ y $V = gen\{v\}$ entonces $\beta = \{v\}$ es una base ortonormal para V formada por vectores propios de T.

Caso $k = n - 1$: Por hipótesis de inducción supóngase que para todo espacio vectorial V de dimensión $n - 1$ se cumple que: si T es un operador autoadjunto en V entonces V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T.

Caso $k = n$: Sean V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ de dimensión n y T un operador autoadjunto en V. Por el Teorema 2.25 el operador T tiene un valor propio real, λ_1, con su correspondiente vector propio unitario v_1. Al ser T autoadjunto, T es normal y por el inciso (c) del Teorema 2.14, v_1 es un vector propio de T^*. Observese que si $W := gen\{v_1\}$, entonces se obtiene que W es un subespacio T-invariante y T^*- invariante de V. Así, por el inciso (a) de la Proposición 2.17 se tiene que $W^\perp$ es T^*-invariante de V. Aplicando nuevamente el inciso (a) de la Proposición 2.17 junto con el inciso (d) del Teorema 2.10 se concluye que $W^\perp$ es T-invariante de V. Luego al ser T autoadjunto, por la Proposición 2.26 el operador $T_{W^\perp}$ también es un operador autoadjunto.
Dado que $dim(V) = n$ y $dim(W) = 1$, por el Corolario 1.21 se obtiene que $dim(W^\perp) = n - 1$. Aplicando la hipótesis de inducción a $T_{W^\perp}$ se obtiene una base ortonormal denotada por $\gamma = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ para $W^\perp$ y que es formada por vectores propios de $T_{W^\perp}$, que a su vez son vectores propios de T.
Por lo tanto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es la base ortonormal para V, formada por vectores propios de T.

($\Leftarrow$) Supóngase que V tiene una base ortonormal β, formada por vectores propios de T. En la base β, la matriz $[T]_\beta$ es diagonal. Dado que V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, de la Definición 2.7 se tiene que la matriz $[T]^*_\beta = [T]^t_\beta$. Por el Teorema 2.8 se sigue que $[T]^*_\beta = [T^*]_\beta$. Con esto se tiene que

$$[T]_\beta = [T]^t_\beta = [T]^*_\beta = [T^*]_\beta.$$

Finalmente, por el Lema 1.38 se concluye que $T = T^*$, así T es autoadjunto. ■

Definición 2.28. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F, T un operador autoadjunto y β una base ortonormal para V. Se dice que T es un operador *definido positivo*, si $\langle T(v), v\rangle > 0$ para toda $v \in V$ y $v \neq 0$. Análogamente, una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ es una matriz *definida positiva*, si $z^t Az > 0$ para toda $z \in F^n \setminus \{0\}$.

Proposición 2.29. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F y T un operador autoadjunto. El operador T es definido positivo si y solo si todos sus valores propios son positivos.

Demostración. Sea T un operador autoadjunto.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es definido positivo, λ un valor propio de T y v su correspondiente vector propio. Como T es definido positivo, de la Definición 2.28 se tiene que

$$0 < \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda ||v||^2\,,$$

de aquí $\lambda > 0$.
($\Leftarrow$) Al ser T un operador autoadjunto, por el Teorema 2.27 el espacio V tiene una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por vectores propios de T. Considere el valor propio $\lambda_i > 0$ correspondiente al vector propio v_i para $i = 1, \ldots, n$. Además, sean $v \in V \setminus \{0\}$ y $c_i \in F$ tales que $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, observe que $c_i \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, n$ ya que $v \neq 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle T(v), v\rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right), \sum_{i=1}^n c_i v_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i T(v_i), \sum_{i=1}^n c_i v_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^n c_i v_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |c_i|^2 ||v_i||^2 \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es definido positivo. ■

2.4. Operadores unitarios

Los operadores unitarios se caracterizan por conservar la norma, es decir, cuando se aplica el operador unitario a un vector, la norma de este es igual a la norma del vector.

De igual manera preservan el producto interno entre dos vectores, esto es, el producto interno entre dos vectores es el mismo que el producto interno de sus imagenes bajo el operador unitario. En la presente sección se muestran los detalles de lo ya mencionado.

Definición 2.30. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo F y T un operador lineal en V. Si $||T(v)|| = ||v||$ para toda $v \in V$, se llama a T un *operador unitario* si $F = \mathbb{C}$ y un *operador ortogonal* si $F = \mathbb{R}$.

Lema 2.31. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F y U un operador autoadjunto en V. Si $\langle v, U(v) \rangle = 0$ para toda $v \in V$, entonces U es el operador cero en V.

Demostración. Como U es un operador autoadjunto, por el Teorema 2.19 el espacio V tiene una base ortonormal β formada por vectores propios de U. Si $v \in \beta$, entonces $U(v) = \lambda v$, donde λ es el valor propio asociado a v. Así,

$$0 = \langle v, U(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \overline{\lambda}\,,$$

pues $v \in \beta \subset V$. De modo que, para todo $v \in \beta$ se tiene que

$$U(v) = \lambda v = 0v = 0\,.$$

Concluyendo que $U = 0$ por el Corolario 1.23. ∎

Teorema 2.32. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un campo F y sea T un operador lineal en V, las siguientes condiciones son equivalentes.

a) $TT^* = T^*T = I$.

b) $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para toda $v, w \in V$.

c) Si β es una base ortonormal para V, entonces $T(\beta)$ es una base ortonormal para V.

d) Existe una base ortonormal β para V tal que $T(\beta)$ es una base ortonormal para V.

e) $||T(v)|| = ||v||$ para toda $v \in V$.

Demostración. Sea T un operador lineal.
$(a) \Rightarrow (b)$ Supóngase que $TT^* = T^*T = I$.
Si $v, w \in V$, entonces

$$\begin{aligned}\langle T(v), T(w) \rangle &= \langle v, T^*(T(w)) \rangle \\ &= \langle v, I(w) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle\,.\end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Supóngase ahora que se cumple $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in V$ y sea $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal para V. El conjunto $T(\beta)$, dado por $T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$, es un conjunto ortonormal. En efecto,

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

donde $i, j = 1, 2, \ldots, n$, e $i \neq j$. En el caso para $i = j$,

$$||T(v_i)||^2 = \langle T(v_i), T(v_i)\rangle = \langle v_i, v_i\rangle = 1\,.$$

Como $T(\beta)$ es un conjunto ortonormal, es linealmente independiente, ya que al considerar $\sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i) = 0$, se tiene que

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i), T(v_j) \right\rangle = c_j\,, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

De modo que $T(\beta)$ es base ortonormal de V pues $|T(\beta)| = n = \dim(V)$.
$(c) \Rightarrow (d)$ Dado que V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior, existe una base ortonormal β, por lo supuesto en el inciso (c), se tiene que $T(\beta)$ es una base ortonormal para V.
$(d) \Rightarrow (e)$ Por el inciso (d), existe una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V tal que $T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ también es una base ortonormal de V. Dado que β es una base, cualquier vector $v \in V$ puede expresarse como $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ para ciertos escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Así

$$\begin{aligned}
||v||^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} \overline{c_i} \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_i} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el operador lineal T a v, se tiene $T(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i)$, luego

$$\begin{aligned} ||T(v)||^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i), \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \left\langle T(v_i), \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} \overline{c_i} \langle T(v_i), T(v_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_i} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2. \end{aligned}$$

De aquí, $||T(v)|| = ||v||$.
$(e) \Rightarrow (a)$ Supóngase que $||T(v)|| = ||v||$ para todo $v \in V$.
Para cualquier vector arbitrario v de V se tiene que

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 = ||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^*(T(v)) \rangle \,,$$

esto es

$$\langle v, (I - T^*T)(v) \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V. \tag{2.4}$$

El operador $I - T^*T$ es autoadjunto. En efecto, debido a las propiedades de T^* dadas en los incisos (a), (e) y (d) del Teorema 2.10 se tiene que

$$(I - T^*T)^* = I^* - T^*T^{**} = I - T^*T.$$

Como $I - T^*T$ es autoadjunto y satisface (2.4), por el Lema 2.31 se obtiene que $I - T^*T = 0$, es decir, $I = T^*T$.
Dado que $I = T^*T$, se tiene que $[I]_\beta = [T^*T]_\beta$, para una base β de V. Por el Corolario 1.42 se tiene que $[I]_\beta = [T^*]_\beta [T]_\beta$. Por el Teorema 1.43 se sabe que $[I]_\beta = I_n$, de modo que

$$1 = \det(I_n) = \det([T^*]_\beta) \det([T]_\beta).$$

Así, de la Proposición 1.45 la matriz $[T]_\beta$ es invertible y por la Proposición 1.44 se sigue que el operador T es invertible. Como $T^*T = I$, entonces por la unicidad de la inversa (véase Observación 1.26) se tiene que $T^* = T^{-1}$, por lo tanto $I = T^*T = TT^*$. ■

Observación 2.33. El Teorema 2.32 sigue siendo válido si se remplaza T por T^* en los incisos (b)-(e).

Observación 2.34. Si T es un operador unitario, entonces es invertible y su inversa está dada por $T^{-1} = T^*$.

Definición 2.35. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Una matriz A se llama *matriz unitaria* si satisface

$$AA^* = A^*A = I_n \tag{2.5}$$

y $F = \mathbb{C}$. En el caso que la matriz cumpla con (2.5) y $F = \mathbb{R}$ entonces la matriz se llama *matriz ortogonal*.

Por la primera propiedad del Teorema 2.32 se tiene que todo operador unitario es un operador normal. Sin embargo el recíproco no es cierto, es decir no todo operador normal es necesariamente un operador unitario. Para ilustrar esto, considere el siguiente ejemplo de una matriz que es normal pero no unitaria.

Ejemplo 2.36. Considere a las matrices A y A^* definidas como,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

La matriz A es normal debido a que

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

esto es, $AA^* = A^*A$. Sin embargo la matriz A no es unitaria, $AA^* \neq I_2$.

Teorema 2.37. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador lineal en V. El operador T es unitario si y solo si el espacio V tiene una base ortonormal de vectores propios de T cuyos valores propios correspondientes tienen módulo uno.

Demostración. Sea T un operador lineal en V.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es un operador unitario, es decir, $TT^* = T^*T = I$ y por lo tanto T es normal. El Teorema 2.19 implica que el espacio V tiene una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada por vectores propios de T, esto es $T(v_i) = \lambda_i v_i$ para λ_i correspondientes, donde $i = 1, 2, \dots, n$. Así,

$$|\lambda_i| ||v_i|| = ||\lambda_i v_i|| = ||T(v_i)|| = ||v_i||,$$

la última igualdad se dio debido a que T es un operador unitario. Así se tiene que $|\lambda_i| = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
($\Leftarrow$) Supóngase que V tiene una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ donde cada v_i es un vector propio de T con valor propio correspondiente λ_i que satisface $|\lambda_i| = 1$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Por el Teorema 2.19, el operador T es normal, luego,

$$T(T^*(v_i)) = T^*T(v_i)) = T^*(\lambda_i v_i) = \lambda_i \overline{\lambda_i} v_i = |\lambda_i|^2 v_i = v_i = I(v_i),$$

por el Corolario 1.23 se tiene que $T^*T = T^*T = I$. Esta es una equivalencia a que el operador T sea unitario como se muestra en el Teorema 2.32. ■

Definición 2.38. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Se dice que A es *unitariamente equivalente* a una matriz B si existe una matriz unitaria Q tal que

$$B = Q^* A Q\,.$$

Se dice que A es *ortogonalmente equivalente* a una matriz B si existe una matriz ortogonal Q tal que

$$B = Q^t A Q\,.$$

Teorema 2.39. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. La matriz A es normal si y solo si A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Demostración. Sea A una matriz en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
($\Rightarrow$) Supóngase que A es una matriz normal. Por la Proposición 2.13 el operador L_A determinado en la Definición 2.2 es normal. Debido al Teorema 2.19, el espacio $\mathbb{C}^n$ tiene una base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por vectores propios de L_A. Por el Teorema 1.53 se tiene que el operador L_A es diagonalizable. Se sabe que la matriz $[L_A]_\beta$ es una matriz diagonal dada por $diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, donde λ_i es un valor propio del operador L_A correspondiente a v_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Denótese $D = [L_A]_\beta$, que satisface $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Luego $[L_A]_\beta = Q^{-1}AQ$, donde Q es una matriz de $n \times n$, en donde la columna i es el vector propio v_i para $i = 1, 2, \ldots, n$. De este modo $Q^*Q = I$, ya que $(Q^*Q)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Observe que debido a

$$\begin{aligned}
Q^*AQ &= Q^*A\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n\end{bmatrix}\\
&= Q^*\begin{bmatrix} Av_1 & \ldots & Av_n\end{bmatrix}\\
&= Q^*\begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \ldots & \lambda_n v_n\end{bmatrix}\\
&= Q^*\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n\end{bmatrix} D\\
&= Q^*QD\\
&= D\,,
\end{aligned}$$

la matriz A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal y la invertibilidad de la matriz Q se debe a que Q es unitaria.

($\Leftarrow$) Ahora supóngase que A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal D, esto es, existe una matriz unitaria Q tal que $D = Q^*AQ$. Así, por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
AA^* &= (QDQ^*)(QDQ^*)^*\\
&= (QDQ^*)((DQ^*)^*Q^*)\\
&= (QDQ^*)(QD^*Q^*)\\
&= QDD^*Q^*.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A^*A &= (QDQ^*)^*(QDQ^*) \\ &= ((DQ^*)^*Q^*)(QDQ^*) \\ &= (QD^*Q^*)(QDQ^*) \\ &= QD^*DQ^* \\ &= QDD^*Q^*. \end{aligned}$$

Lo que implica que A es normal. ■

2.5. Proyecciones ortogonales

En la Definición 1.31 se introdujo el concepto de proyección, un operador lineal cuya función es asignar a cada vector su proyección sobre un subespacio vectorial. Las proyecciones ortogonales son un caso particular de las proyecciones. De igual manera, estas pueden dividir el espacio vectorial en dos subespacios, con la diferencia de que ahora estos dos subespacios son ortogonales entre sí.

Definición 2.40. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $T : V \to V$ una proyección sobre V (véase Definición 1.31). Si la proyección T satisface que $R(T)^\perp = N(T)$ y $N(T)^\perp = R(T)$, se dice que T es una *proyección ortogonal.*

Teorema 2.41. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si W es un subespacio de V y $T : W \to W$ es una proyección ortogonal sobre W, entonces para cualquier $v \in V$, el vector $T(v)$ es el único elemento de W más cercano a v. Esto es, $||v - T(v)|| \leq ||v - w||$ para toda $w \in W$.

Demostración. Sean $v \in V$, W un subespacio de V y T una proyección ortogonal sobre W. Dado que W es un subespacio de dimensión finita, por el Teorema 1.65 se tiene que $V = W \oplus W^\perp$ y como T es una proyección ortogonal sobre W, se sigue que $W = R(T)$ y $V = R(T) \oplus R(T)^\perp = R(T) \oplus N(T)$.
Reescribiendo a v se tiene

$$v = T(v) + v - T(v)\,,$$

donde $T(v) \in R(T)$ y $(v - T(v)) \in N(T)$, esto debido a que $V = R(T) \oplus N(T)$ y T es una proyección ortogonal sobre W.
Si $w \in W$, entonces

$$\begin{aligned} ||v-w||^2 &= ||v - w + T(v) - T(v)||^2 \\ &= ||(v - T(v)) + (T(v) - w)||^2 \\ &= ||v - T(v)||^2 + ||T(v) - w||^2 + \langle v - T(v), T(v) - w\rangle + \langle T(v) - w, v - T(v)\rangle \\ &= ||v - T(v)||^2 + ||T(v) - w||^2 \qquad (2.6) \\ &\geq ||v - T(v)||^2\,, \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es debido a que $v - T(v) \in W^\perp$ y $T(v) - w \in W$, así se tiene la desigualdad $||v - T(v)|| \leq ||v - w||$ para todo $w \in W$.
Para probar la unicidad, supóngase que $||v - w||^2 = ||v - T(v)||^2$ para toda $w \in W$. De la ecuación (2.6) se sigue que $||T(v) - w||^2 = 0$ para toda $w \in W$, por tanto $T(v) = w$. Con esto se prueba que $T(v)$ es el único elemento de W más cercano a v. ■

El siguiente teorema tiene la finalidad de probar que toda proyección ortogonal es idempotente y tambien autoadjunta.

Teorema 2.42. Sean V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y T un operador lineal en V. El operador T es una proyección ortogonal si y solo si $T^2 = T = T^*$.

Demostración. Sea T un operador lineal en V.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es una proyección ortogonal. Así, como T es una proyección, por el Teorema 1.32 se tiene que $T^2 = T$.
Como T es una proyección, por el Teorema 1.33 se tiene que $V = R(T) \oplus N(T)$ y al ser T una proyección ortogonal $R(T)^\perp = N(T)$. Sean $v, w \in V$, tales que $v = v_1 + v_2$ y $w = w_1 + w_2$, donde $v_1, w_1 \in R(T)$ y $v_2, w_2 \in N(T)$.
Por un lado se tiene,

$$\begin{aligned} \langle v, T(w) \rangle &= \langle v_1 + v_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w) \rangle &= \langle T(v), w \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle, \end{aligned}$$

por tanto $\langle v, T(w) \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$, por el Teorema 1.55 se tiene que $T = T^*$, luego $T^2 = T = T^*$.
($\Leftarrow$) Ahora supóngase que $T^2 = T = T^*$. Por el Teorema 1.32 se tiene que T es una proyección.
Falta probar que $R(T) = N(T)^\perp$ y $R(T)^\perp = N(T)$.
Sean $v \in R(T)$ y $w \in N(T)$. Dado que T es una proyección y $T = T^*$ se tiene que $v = T(v) = T^*(v)$. Luego,

$$\langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle T^*(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = 0,$$

esto es, $v \in N(T)^\perp$. Por lo tanto, $R(T) \subseteq N(T)^\perp$.
Ahora, sea $v \in N(T)^\perp$

$$\begin{aligned} ||y - T(v)||^2 &= \langle y - T(v), y - T(v) \rangle \\ &= \langle y, y - T(v) \rangle - \langle T(y), y - T(v) \rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) = 0$, entonces $v - T(v) \in N(T)$. Así, de (2.7) se tiene

$$\begin{aligned}
||v - T(v)||^2 &= -\langle T(v), v - T(v)\rangle \\
&= -\langle v, T^*(v - T(v))\rangle \\
&= -\langle v, T(v - T(v))\rangle \\
&= -\langle v, 0\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de aquí $v - T(v) = 0$, es decir, $v = T(v)$. Por tanto $N(T)^\perp \subseteq R(T)$. De ambas contenciones se tiene

$$R(T) = N(T)^\perp. \tag{2.8}$$

Nótese que $N(T) \subseteq R(T)^\perp$. En efecto, si $v \in N(T)$ y $w \in R(T)$, entonces

$$\langle v, w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle = 0\,,$$

esto es, $v \in R(T)^\perp$.
Supóngase que $v \in V$ y $w \in R(T)^\perp$,

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T^*(v)\rangle = \langle w, T(v)\rangle = 0,$$

esto es $w \in N(T)$. De modo que $R(T)^\perp \subseteq N(T)$.
De ambas contenciones se tiene

$$R(T)^\perp = N(T). \tag{2.9}$$

De las ecuaciones (2.8) y (2.9) se concluye que T es una proyección ortogonal. ■

2.6. Teorema espectral

En esta sección se presenta el teorema espectral, en el cual se muestra que un operador normal o autoadjunto se puede descomponer en una combinación lineal de proyecciones ortogonales cuyos coeficientes corresponden a los valores propios del operador normal, y donde se satisface que la suma de estas proyecciones corresponde al operador identidad de V. Lo anterior permite reescribir un operador normal o autoadjunto como una suma de operadores "más simples". Este y más resultados se analizan con detalle en la presente sección.

Definición 2.43. Sea T una transformación lineal en un espacio vectorial V. El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ se llama *espectro* de T, donde cada λ_i es un valor propio de T.

Con la teoría desarrollada hasta este punto, se cuentan con las condiciones de presentar el Teorema Espectral, que formaliza la descomposición de operadores normales y autoadjuntos en términos de sus valores propios y proyecciones ortogonales.

Teorema 2.44. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ (respectivamente, $\mathbb{R}$) y T un operador lineal en V. Si T es un operador normal (respectivamente, autoadjunto), entonces se satisface:

a) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

b) Si W_i' denota la suma directa de los subespacios W_j para $j \neq i$, entonces $W_i^{\perp} = W_i'$.

c) $T_i T_j = \delta_{ij} T_i$ para $1 \leq i, j \leq k$.

d) $I = T_1 + \cdots + T_k$.

e) $T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$.

Donde se ha considerado que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de T y $T_i : V \to W_i$ es la proyección ortogonal sobre el espacio propio $W_i = \{v \in V : T(v) = \lambda_i v\}$ correspondiente al valor propio λ_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demostración. Sea T un operador lineal.

a) Supóngase que T es un operador normal (respectivamente, autoadjunto). Por el Teorema 2.19 (respectivamente, Teorema 2.27) el espacio V tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T, digamos $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ donde $v_i \in W_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. En la Definición 1.18 se describe la operación $\oplus$, claramente $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i \subseteq V$. Ahora, si $v \in V$, entonces existen $c_i \in \mathbb{C}$ (respectivamente $\mathbb{R}$) tales que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in \bigoplus_{i=1}^{k} W_i.$$

Así $V \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$.

b) Supóngase que $W_i' = \bigoplus_{j \neq i} W_j$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $w \in W_i$. Si $v \in W_i'$, entonces existen $w_j \in W_j$ con $j \neq i$, tales que $v = \sum_{j \neq i} w_j$.

Por el inciso (d) del Teorema 2.14 se tiene que $\sum_{j \neq i} \langle w_j, w \rangle = 0 = \langle v, w \rangle$, esto es, $w \in W_i^{\perp}$. Por lo tanto $W_i' \subseteq W_i^{\perp}$.

Del inciso (a) del presente teorema resulta que $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$. Debido al Corolario 1.21 por un lado se obtiene que

$$dim(W_i') = dim\left(\bigoplus_{j \neq i} W_j\right) = \sum_{j \neq i} dim(W_j) = dim(V) - dim(W_i)\,.$$

Por otro lado, del Corolario 1.21 se sabe que

$$dim(V) = dim(W_i) + dim(W_i^{\perp}),$$

despejando $dim(W_i^{\perp}) = dim(V) - dim(W_i)$, como $W_i' \subseteq W_i^{\perp}$ por el Teorema 1.15 se concluye que $W_i^{\perp} = W_i'$.

c) Sea T_i una proyección ortogonal sobre w_i par $i = 1, \ldots, k$ y $v \in V$.
De acuerdo al inciso (a) de este teorema existen $v_i \in W_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i.$$

Caso $i \neq j$: Se satisface que $T_iT_j(v) = T_i(v_j) = 0 = \delta_{ij}T_i(v)$.

Caso $i = j$: Debido a que T_i es una proyección ortogonal sobre W_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$, se tiene que $T_iT_j(v) = T_i^2(v) = T_i(v) = \delta_{ii}T_i(v)$, donde la segunda igualdad se da por el Teorema 1.32.

d) Si $v \in V$, nuevamente por el inciso (a), existen $v_i \in W_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ tales que $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$. Así,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} T_i\right)(v) = \sum_{i=1}^{k} T_i(v) = \sum_{i=1}^{k} v_i = v = I(v),$$

con esto, $\sum_{i=1}^{k} T_i = I$.

e) Si $v \in V$ existen $v_i \in W_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ tales que $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$. Como $v_i \in W_i$ se tiene que $T(v_i) = \lambda_i v_i$. Luego,

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^{k} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} T(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i(v), \end{aligned}$$

por tanto, $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i$.

De este modo, la demostración del Teorema espectral queda completa. ∎

Observación 2.45. En el Teorema espectral 2.44, la suma $I = T_1 + \cdots + T_k$ se conoce como la *resolución del operador identidad inducida por* T, y la expresión $T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$ se denomina *descomposición espectral de* T.

Los siguientes resultados son consecuencias directas del Teorema espectral. Estos incluyen propiedades sobre la descomposición espectral y de los valores propios de operadores.

Proposición 2.46. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T un operador normal en V y $\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$ la descomposición espectral de T. Si $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ es un polinomio con $grad(g(x)) = n$, entonces

$$g(T) = \sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j) T_j \,.$$

Demostración. Sustituyendo a T por su descomposición espectral y utilizando el inciso (c) del Teorema 2.44, se tiene que

$$\begin{aligned}
g(T) &= \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \\
&= a_0 T^0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k)^i \\
&= a_0 I + \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda_1^i T_1^i + \cdots + \lambda_k^i T_k^i) \\
&= a_0 (T_1 + \cdots + T_k) + \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda_1^i T_1 + \cdots + \lambda_k^i T_k) \\
&= \sum_{j=1}^{k} T_j \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_j^i \\
&= \sum_{j=1}^{k} T_j g(\lambda_j) \,.
\end{aligned}$$

Con esto, la proposición queda demostrada. ∎

Corolario 2.47. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador lineal. El operador T es normal si y solo si existe un polinomio g tal que $T^* = g(T)$.

Demostración. Sea T un operador lineal sobre el espacio V.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es normal. Por el Teorema 2.44 su descomposición espectral de T está dada por $T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$. Asimismo, se tiene que $T^* = \overline{\lambda_1} T_1 + \cdots + \overline{\lambda_k} T_k$ ya que cada T_i para $i = 1, \ldots, k$ es una proyección ortogonal y en consecuencia autoadjunta, según el Teorema 2.42.
Haciendo uso de la interpolación de Lagrange, se construye un polinomio g tal que $grad(g(x)) = k$ y $g(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ para $i = 1, \ldots, k$.
Por el Corolario 2.46, resulta que $g(T)$ es:

$$\begin{aligned} g(T) &= \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) T_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i} T_i \\ &= T^*. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ahora si $T^* = g(T)$

$$\begin{aligned} TT^* &= Tg(T) \\ &= T \sum_{i=0}^{k} a_i T^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i T^{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i T^i \right) T \\ &= g(T)T \\ &= T^*T. \end{aligned}$$

Por lo tanto T es normal. ■

Corolario 2.48. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador lineal. El operador T es unitario si y solo si T es normal y $|\lambda| = 1$ para todo valor propio λ de T.

Demostración. Sea T un operador lineal.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es unitario. Por el Teorema 2.32 el operador T es normal. Sean λ un valor propio de T y $v \in V$ su correspondiente vector propio. Así $T(v) = \lambda v$, como T es unitario $||T(v)|| = ||v||$. Luego,

$$||v|| = ||T(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||,$$

como $v \neq 0$, $|\lambda| = 1$.
($\Leftarrow$) Considere que el operador T es normal y $|\lambda| = 1$ para todo valor propio λ de T. Sea $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i$ la descomposición espectral de T, donde λ_i es un valor propio de T y T_i una proyección ortogonal sobre W_i para $i = 1, 2, \ldots, k$. Se tiene que

$$\begin{aligned} TT^* &= \left. \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right) \left. \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right)^* \\ &= \left. \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right) \left. \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i} T_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 T_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} T_i \\ &= I, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por el inciso (d) del Teorema 2.44. Dado que T es normal $T^*T = TT^* = I$, por el Teorema 2.32 es equivalente a que T sea unitario. ∎

Corolario 2.49. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador lineal. El operador T es autoadjunto si y solo si todo valor propio de T es real.

Demostración. Sea T un operador lineal.
($\Rightarrow$) Supóngase que T es autoadjunto y que λ es un valor propio de T. Por el Corolario 2.21 se tiene que λ es un número real.

($\Leftarrow$) Supóngase que todo valor propio de T es real. Sea $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i$ la descomposición espectral de T, luego

$$\begin{aligned} T^* &= \left. \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right)^* \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i} T_i^* \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right) \\ &= T, \end{aligned}$$

así T es autoadjunto. ∎

Corolario 2.50. Sea T un operador lineal que satisface las hipótesis del teorema espectral cuya descomposición espectral es $T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$. Cada proyección ortogonal T_j es un polinomio en T.

Demostración. Sea g_j el polinomio dado por $g_j(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \frac{t-\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$ para $i, j = 1, \ldots, k$. Este polinomio satisface $g_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$. Por el Corolario 2.46 se tiene que

$$\begin{aligned} g_j(T) &= \sum_{i=1}^{k} g_j(\lambda_i) T_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} T_i \\ &= T_j. \end{aligned}$$

Por tanto, cada proyección ortogonal T_j es un polinomio en T. ∎

Capítulo 3

Matrices de Jacobi

En diferentes trabajos generalmente antes de mostrar cierta teoría se presenta una motivación mediante un problema a resolver. En esta ocasión, se presenta directamente la teoría, destacando que tiene un valor e importancia propia, basándose en los desarrollos presentados en [12]. La aplicación que se muestra posteriormente es solo un complemento adicional para ilustar su utilidad.
Las matrices de Jacobi son matrices simétricas si se definen sobre el campo de los reales. Se caracterizan por tener elementos nulos fuera de la diagonal principal y las diagonales que están inmediatamente por encima y por debajo. A las matrices que cumplen estas propiedades sobre sus diagonales, se les conoce como tridiagonales. En este capítulo se verá la forma general de obtener en principio los vectores propios de una matriz de Jacobi, posteriormente determinar sus respectivos valores propios mediante las propiedades de ciertos polinomios que se obtienen del análisis espectral. Se incluyen diversos resultados para ilustrar la teoría asociada a estas matrices, algunos de ellos más complejos que otros.

3.1. Datos espectrales de matrices de Jacobi

En los textos de álgebra lineal se aborda el tema de valores y vectores propios para matrices cuadradas generales y que comúnmente se imparten en los cursos de álgebra lineal II. Los valores propios λ de una matriz A son tales que satisfacen la ecuación $Av = \lambda v$ para $v \neq 0$, esto es $(A - \lambda I)v = 0$. Para que exista una solución no trivial $v \neq 0$, el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ no debe tener únicamente la solución trivial $v = 0$. Esto sucede si $A - \lambda I$ no es invertible, es decir, $\det(A - \lambda I) = 0$. Luego los valores propios son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, teniendo ya los valores propios se pueden encontrar sus respectivos vectores propios. En este trabajo de tesis se muestra una manera alternativa de encontrar tales valores y vectores propios de una matriz de Jacobi. En principio, los vectores propios se encuentran, por decirlo de alguna manera, antes que los valores propios y de una forma más sencilla. El enfoque de esta sección es determinar dichos valores y vectores propios que Marchenko en [13] define como los datos espectrales.

Para la siguiente definición, se utilizará la noción de matriz autoadjunta (véase Definición 2.22).

Definición 3.1. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$ una matriz autoadjunta. Al conjunto formado por valores y vectores propios se denominan *datos espectrales* de la matriz A.

Definición 3.2. Una *matriz de Jacobi* es una matriz simétrica que tiene la forma:

$$J_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ & & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, con la condición $b_i \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 3.3. Algunas matrices que son de Jacobi son las siguientes

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y algunas matrices que no lo son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices no son Jacobi porque tienen elementos distintos de cero fuera de la banda tridiagonal o bien, no es simétrica.

Si β es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, por la Observación 2.3 se tiene que $[L_{J_n}]_\beta = J_n$. Debido a que las matrices de Jacobi son simétricas por la Proposición 2.23 se obtendría que el operador L_{J_n} es autoadjunto.
A continuación se muestran algunas propiedades de los datos espectrales de una matriz de Jacobi. Sea λ un valor propio de J_n y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ un vector propio de J_n asociado a λ. Esto es, satisfacen la ecuación

$$J_n c = \lambda c. \tag{3.2}$$

Equivalentemente (3.2) genera un sistema de ecuaciones en recurrencias dadas por

$$a_1 c_1 + b_1 c_2 = \lambda c_1, \tag{3.3}$$

$$b_{i-1} c_{i-1} + a_i c_i + b_i c_{i+1} = \lambda c_i, \tag{3.4}$$

$$b_{n-1} c_{n-1} + a_n c_n = \lambda c_n, \tag{3.5}$$

para $i = 2, \ldots, n-1$. Ahora el enfoque está en resolver el sistema anterior.

Observación 3.4. Si $c_1 = 0$, de la ecuación (3.3) se tendría que $c_2 = 0$ debido a que $b_1 \neq 0$. Con el mismo análisis para la ecuación (3.4) para $i = 2, \ldots, n-1$, se obtendría $c_{i+1} = 0$. Por lo tanto $c = 0$, lo cual es una contradicción debido a que c es un vector propio de J_n.

Proposición 3.5. Dada una matriz de Jacobi J_n definida en la ecuación (3.1), existe una sucesión de polinomios $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}\}$ con $grad(P_i) = i$, para $i = 1, \ldots, n-1$, tal que para cualquier vector propio $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ asociado al valor propio λ de la matriz J_n, se satisface $c = k(1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \ldots, P_{n-1}(\lambda))$, para alguna constante k.

Demostración. Por lo mencionado en la Observación 3.4, supóngase que $c_1 \neq 0$. Despejando c_2 de la ecuación (3.3), se tiene que

$$c_2 = c_1 \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) = c_1 P_1(\lambda),$$

donde

$$P_1(\lambda) := \frac{\lambda - a_1}{b_1}. \tag{3.6}$$

Note que $grad(P_1) = 1$.
De la ecuación (3.4) para $i = 2$, resulta

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{\lambda c_2 - b_1 c_1 - a_2 c_2}{b_2} \\ &= \frac{\lambda c_1}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) - \frac{b_1}{b_2} c_1 - \frac{a_2 c_1}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) \\ &= c_1 \left[\frac{\lambda}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) - \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) - \frac{b_1}{b_2} \right] \\ &= c_1 P_2(\lambda), \end{aligned}$$

donde

$$P_2(\lambda) := \frac{\lambda}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) - \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{\lambda - a_1}{b_1} \right) - \frac{b_1}{b_2}. \tag{3.7}$$

Note que $grad(P_2) = 2$.
Así sucesivamente, de la ecuación (3.4) se tiene que $c_{i+1} = c_1 P_i(\lambda)$, con $grad(P_i) = i$, para $i = 3, \ldots, n-1$. Por lo tanto, $c = c_1(1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \ldots, P_{n-1}(\lambda))^t$. ■

Observación 3.6. La Proposición 3.5 establece que todo vector propio de la matriz de Jacobi J_n asociado a un valor propio λ, es un múltiplo escalar de un vector que tiene la forma $(1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \ldots, P_{n-1}(\lambda))$. Por consiguiente, sin pérdida de generalidad se toma $c_1 = 1$ y a su vez se considera $P_0 := 1$.

Con la finalidad de clarificar aún más el algoritmo anterior se presenta la siguiente proposición, para la cual se introduce primero la noción de coeficiente líder.

Definición 3.7. Sea P un polinomio de grado n expresado en su forma estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, \ldots, a_0$ son escalares en un campo F y $a_n \neq 0$. El *coeficiente líder* de P es el coeficiente a_n, es decir, el coeficiente que multiplica al término de mayor grado x^n.

Proposición 3.8. Dada una matriz de Jacobi J_n definida en la ecuación (3.1) y los polinomios P_i dados en la Proposición 3.5, el coeficiente líder denotado por α_i del polinomio P_i con $i = 1, \ldots, n-1$, está dado por $\alpha_i = (b_1 b_2 \ldots b_i)^{-1}$.

Demostración. Considerando $c_1 = 1$ (véase Observación 3.6), se tiene de la ecuación (3.6) que

$$P_1(\lambda) = \alpha_1 \lambda - \frac{a_1}{b_1}.$$

De la ecuación (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= \alpha_2 \lambda^2 - \frac{a_2 + a_1}{b_1 b_2}\lambda + \left(\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - \frac{b_1}{b_2}\right) \\ &= \alpha_2 \lambda^2 + R_1(\lambda), \end{aligned}$$

donde $R_1(\lambda)$ es un polinomio tal que $grad(R_1(\lambda)) = 1$. Sucesivamente por construcción se tendrá de la ecuación (3.4) que

$$\begin{aligned} P_i(\lambda) &= \frac{1}{b_i}(\lambda P_{i-1}(\lambda) - a_i P_{i-1}(\lambda) - b_{i-1}P_{i-2}(\lambda)) \\ &= \frac{1}{b_i}\lambda(\alpha_{i-1}\lambda^{i-1} + R_{i-2}(\lambda)) - \frac{a_i P_{i-1}(\lambda)}{b_i} - \frac{b_{i-1}P_{i-2}(\lambda)}{b_i} \\ &= \frac{\alpha_{i-1}}{b_i}\lambda^i + \frac{\lambda R_{i-2}(\lambda)}{b_i} - \frac{a_i P_{i-1}(\lambda)}{b_i} - \frac{b_{i-1}P_{i-2}(\lambda)}{b_i} \\ &= \alpha_i \lambda^i + \frac{\lambda R_{i-2}(\lambda)}{b_i} - \frac{a_i P_{i-1}(\lambda)}{b_i} - \frac{b_{i-1}P_{i-2}(\lambda)}{b_i} \\ &= \alpha_i \lambda^i + R_{i-1}(\lambda). \end{aligned}$$

donde los polinomios $R_{i-2}(\lambda)$ y $R_{i-1}(\lambda)$ son tales que cumplen con $grad(R_{i-2}(\lambda)) = i-2$ y $grad(R_{i-1}(\lambda)) = i-1$.
Por lo tanto, $\alpha_i = (b_1 b_2 \ldots b_i)^{-1}$ es el coeficiente líder para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. ∎

La Proposición 3.5 y la Proposición 3.8 involucran todas las ecuaciones del sistema que genera (3.2) salvo la última ecuación (3.5). Para que se satisfaga completamente el sistema, debe analizarse la expresión

$$b_{n-1}P_{n-2}(\lambda) + a_n P_{n-1}(\lambda) - \lambda P_{n-1}(\lambda) = 0\,. \tag{3.8}$$

La parte izquierda de la ecuación (3.8) es un polinomio que se define por

$$Q(\lambda) := \lambda P_{n-1}(\lambda) - a_n P_{n-1}(\lambda) - b_{n-1}P_{n-2}(\lambda), \tag{3.9}$$

donde $grad(Q) = n$.
La teoría presentada hasta este punto, muestra la forma de los vectores propios en términos de los valores propios. Ahora, un modo de determinar los valores propios de una matriz de Jacobi J_n es mediante la siguiente afirmación.

Proposición 3.9. Sean J_n una matriz de Jacobi y Q el polinomio dado en (3.9). Los ceros del polinomio Q son los valores propios de la matriz J_n.

Demostración. La ecuación (3.2) es equivalente al sistema de ecuaciones en recurrencias dadas en (3.3), (3.4) y (3.5). De acuerdo a la Proposición 3.5, si λ_0 es un valor propio de J_n, entonces el vector $(1, P_1(\lambda_0), P_2(\lambda_0), \ldots, P_{n-1}(\lambda_0))$ es un vector propio asociado a λ_0, donde los polinomios $P_i(\lambda)$ satisfacen las ecuaciones (3.3) y (3.4). Al sustituir este vector en la ecuación final del sistema (3.5), se obtiene

$$b_{n-1}P_{n-2}(\lambda_0) + a_n P_{n-1}(\lambda_0) = \lambda_0 P_{n-1}(\lambda_0),$$

lo cual es equivalente a la ecuación (3.8), por tanto de la ecuación (3.9) se obtiene

$$Q(\lambda_0) := b_{n-1}P_{n-2}(\lambda_0) + a_n P_{n-1}(\lambda_0) - \lambda_0 P_{n-1}(\lambda_0) = 0.$$

Con esto se tiene que λ_0 es una raíz del polinomio Q. ∎

La matriz del siguiente ejemplo es un matriz de Jacobi y debido a la teoría presentada en esta sección facilita el cálculo de sus datos espectrales.

Ejemplo 3.10. Dada la matriz de Jacobi de $n \times n$ por

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & & \cdots & & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

se analizarán sus datos espectrales.
Un vector c es un vector propio de J_n si se satisface

$$J_n c = \lambda_0 c\,. \tag{3.10}$$

Sean $a_i = (1, t, \ldots, t^{n-1})^t$ y $a_2 = (1, \frac{1}{t}, \ldots, \frac{1}{t^{n-1}})^t$. Si a_1 es un vector tal que satisface (3.10) entonces

$$\frac{1}{2}t = \lambda_0,$$

$$\frac{1}{2}t^{i-2} + \frac{1}{2}t^i = \lambda_0 t^{i-1}, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{2}t^{n-2} = \lambda_0 t^{n-1}, \tag{3.12}$$

para $i = 2, \ldots, n-1$. Análogamente para a_2 se cumple

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} =& \lambda_0, \\ \frac{1}{2t^{i-2}} + \frac{1}{2t^i} =& \lambda_0 \frac{1}{t^{i-1}}, \qquad (3.13) \\ \frac{1}{2t^{n-2}} =& \lambda_0 \frac{1}{t^{n-1}}. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.11) y (3.13), las cuales son equivalentes para valores $i = 2, \ldots, n-1$, se tiene que

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right). \qquad (3.15)$$

La forma de los vectores a_1 y a_2 permiten considerar a estos como posibles soluciones de (3.10). Sin embargo, de las ecuaciones generadas por (3.10), el valor de λ_0, dado en (3.15), solo se satisface en las ecuaciones (3.11) y (3.13), esto es, falta satisfacer las ecuaciones (3.12) y (3.14). De este modo, a continuación se propone la solución mediante el método de variación de parámetros comúnmente utilizado en la teoría de ecuaciones diferenciales (véase [5, Secc. 2.4]) el cual consiste en proponer la solución c de la forma

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t = f_1(t)a_1 + f_2(t)a_2\,, \qquad (3.16)$$

esto, con el fin de determinar las condiciones sobre f_1 y f_2, para que finalmente la ecuación (3.16) determine la solución de (3.10).
Las componentes del vector c definido en (3.16) satisfacen,

$$c_i = f_1(t)t^{i-1} + f_2(t)t^{1-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.17)$$

Si c es un vector propio, es decir, satisface (3.10), entonces se genera el sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_2 =& \lambda_0 c_1, \qquad (3.18) \\ \frac{1}{2}c_{j-1} + \frac{1}{2}c_{j+1} =& \lambda_0 c_j, \qquad (3.19) \\ \frac{1}{2}c_{n-1} =& \lambda_0 c_n \qquad (3.20) \end{aligned}$$

para $j = 2, \ldots, n-1$. La ecuación (3.19) se cumple al sustituir (3.16), utilizando (3.11) y (3.13), por lo que basta conocer bajo qué condiciones satisface (3.18) y (3.20), ya que estas ecuaciones sustituyen a (3.12) y (3.14). Para esto se sustituye (3.17) en la ecuación (3.18) y (3.20). De esto se tiene que

$$f_1(t)\left(\frac{1}{2}t - \lambda_0\right) + f_2(t)\left(\frac{1}{2t} - \lambda_0\right) = 0, \qquad (3.21)$$

$$f_1(t)\left(\frac{1}{2}t^{n-2} - \lambda_0 t^{n-1}\right) + f_2(t)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t^{n-2}} - \lambda_0 \frac{1}{t^{n-1}}\right) = 0\,. \qquad (3.22)$$

Se verifica que las soluciones de las ecuaciones (3.21) y (3.22) están determinadas por $f_1(t) = \lambda_0 - \frac{1}{2t}$ y $f_2(t) = \frac{t}{2} - \lambda_0$.
Retomando el vector propio dado en (3.16), al sustituir las funciones f_1 y f_2, se tiene que

$$c = f_1(t)a_1 + f_2(t)a_2 = \left(\lambda_0 - \frac{1}{2t}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} - \lambda_0\right)\begin{pmatrix} 1 \\ t^{-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{t^{-(n-1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - t^{-1}) \\ \frac{1}{2}(t^2 - t^{-2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(t^n - t^{-n}) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, al considerar $t = e^{i\phi}$, donde ϕ es un ángulo a determinar, de la ecuación (3.15) se tiene que

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) = \cos(\phi). \tag{3.23}$$

Además, $\frac{1}{2}(t^r - t^{-r}) = i\,\mathrm{sen}(r\phi)$, así

$$c = \begin{pmatrix} i\,\mathrm{sen}(\phi) \\ i\,\mathrm{sen}(2\phi) \\ \vdots \\ i\,\mathrm{sen}(n\phi) \end{pmatrix}.$$

De la Observación 1.35, los vectores propios de J_n son de la forma

$$c' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mathrm{sen}(2\phi)}{\mathrm{sen}(\phi)} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{sen}(n\phi)}{\mathrm{sen}(\phi)} \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

asociado al valor propio λ_0 que satisface (3.23). Para determinar explícitamente éstos, se analizan las siguientes ecuaciones

$$f_1(t)t^{-1} + f_2(t)t = 0, \tag{3.25}$$
$$f_1(t)t^{2(n-1)+1} + f_2(t)t^{-1} = 0\,, \tag{3.26}$$

que se obtienen de sustituir (3.16) en (3.18) y (3.20). Multiplicando a (3.26) por $-t^2$ y sumando (3.25) se tiene $f_1(t)(t^{-1} - t^{2(n+1)+3}) = 0$. Lo cual implica que

$$t^{2(n+1)} = 1.$$

De esta forma, las raíces $n-$ésimas de t se describen mediante

$$t = e^{i\frac{k\pi}{n+1}},$$

y de la ecuación (3.23) se obtiene que los valores propios satisfacen

$$\lambda_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) , \tag{3.27}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Concluyendo que los datos espectrales están determinados por (3.27) y de (3.24) su correspondiente vector propio es

$$c_k = \left(1, \dots, \frac{\operatorname{sen}(j \arccos(\lambda_k))}{\operatorname{sen}(\arccos(\lambda_k))}, \dots, \frac{\operatorname{sen}(n \arccos(\lambda_k))}{\operatorname{sen}(\arccos(\lambda_k))}\right)^t . \tag{3.28}$$

En el siguiente ejemplo se aplica el teorema espectral a una matriz de Jacobi, mostrando explícitamente los subespacios propios, operadores proyección, entre otros resultados presentados en el capítulo anterior. El objetivo es ilustrar el alcance e importancia del teorema espectral, al igual que mejorar su comprensión.

Ejemplo 3.11. Un caso particular del Ejemplo 3.10 para el caso $n = 3$, está dado por la matriz

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Los vectores propios de J_3 tienen la forma dada en (3.28) mientras que los valores propios se determinan por (3.27), donde $n = 3$ y $k = 1, 2, 3$. Obteniendo que sus respectivos datos espectrales están dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que el conjunto $\{c_1, c_2, c_3\}$ es un conjunto ortogonal. Teniendo los vectores propios de J_3 se definen los espacios propios correspondientes a cada valor propio. Esto es,

$$W_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad W_2 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \quad W_3 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Por el Teorema 1.14 se tiene que W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Utilizando el Teorema 1.17 se obtiene que $W_1 + W_2 + W_3$ también es un subespacio de de V. Ahora, observe que $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 3$. Por el Teorema 1.15 y Corolario 1.21 se concluye que

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = \mathbb{R}^3.$$

Considere los subespacios W_i' dados por $W_1' = W_2 \oplus W_3$, $W_2' = W_1 \oplus W_3$, $W_3' = W_1 \oplus W_2$, estos cumplen $W_i' = W_i^{\perp}$, para $i = 1, 2, 3$. En efecto, como

$$\begin{aligned} W_1' &= \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\} \\ &= gen\,\{c_2, c_3\}, \end{aligned}$$

para todo $u \in W$ y $v \in W_1'$ se tiene que existen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = a_1 c_1$ y $v = a_2 c_2 + a_3 c_3$. Así

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle a_1 c_1, a_2 c_2 + a_3 c_3 \rangle \\ &= \langle a_1 c_1, a_2 c_2 \rangle + \langle a_1 c_1, a_3 c_3 \rangle \\ &= a_1 a_2 \langle c_1, c_2 \rangle + a_1 a_3 \langle c_1, c_3 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da debido a que $\{c_1, c_2, c_3\}$ son ortogonales. Análogamente, se satisface el caso $i = 2, 3$.
Sea $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ y considere los operadores T_i para $i = 1, 2, 3$ dados por

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+\sqrt{2}y+z}{4} \\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{4} \end{pmatrix}.$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-z}{2} \\ 0 \\ \frac{z-x}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{2}y+z}{4} \\ \frac{-x+\sqrt{2}y-z}{2\sqrt{2}} \\ \frac{x-\sqrt{2}y+z}{4} \end{pmatrix}.$$

De manera general, los operadores T_i para $i = 1, 2, 3$ se pueden expresar mediante

$$T_i = \frac{c_i c_i^t}{||c_i||^2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.29}$$

Estos operadores satisfacen $T_i = T_i^2 = T_i^*$ para $i = 1, 2, 3$, así que por el Teorema 2.42 se tiene que cada T_i es una proyección ortogonal. En efecto

$$T_i^2 = \frac{c_i c_i^t}{||c_i||^2} \frac{c_i c_i^t}{||c_i||^2} = \frac{c_i}{||c_i||} \frac{\langle c_i, c_i \rangle}{||c_i||^2} \frac{c_i^t}{||c_i||} = T_i\,. \tag{3.30}$$

$$T_i^* = \left(\frac{c_i c_i^t}{||c_i||^2} \right)^* = \frac{1}{||c_i||^2} (c_i c_i^t)^* = \frac{1}{||c_i||^2} \overline{c_i^{tt} c_i^t} = \frac{1}{||c_i||^2} c_i^t c_i = T_i.$$

Además, satisfacen que

$$T_iT_j = \frac{c_ic_i^t}{||c_i||^2}\frac{c_jc_j^t}{||c_j||^2} = \frac{c_i}{||c_i||^2}\langle c_i, c_j\rangle\frac{c_j^t}{||c_j||^2} = \delta_{ij}Ti\,. \tag{3.31}$$

Por lo tanto, de (3.30) y (3.31) se tiene que $T_iT_j = \delta_{ij}Ti$, para $i, j = 1, 2, 3$.
Para un elemento $x \in \mathbb{R}^3$, se tiene de la ecuación (3.29) que

$$T_i(x) = \frac{c_ic_i^t}{||c_i||^2}x = \frac{\langle x, c_i\rangle}{||c_i||^2}c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dado que $a := \langle x, c_i\rangle/||c_i||^2 \in \mathbb{R}$. Se sigue que $ac_i \in W_i$, lo que implica que T_i es una proyección sobre W_i, para $i = 1, 2, 3$.
Considere las proyecciones ortogonales sobre cada W_i, para $i = 1, 2, 3$ dadas por T_1, T_2, T_3 y $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$. Estas proyecciones ortogonales satisfacen que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} T_i\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{x+\sqrt{2}y+z}{4}\\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{2\sqrt{2}}\\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{x-z}{2}\\ 0\\ \frac{z-x}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{x-\sqrt{2}y+z}{4}\\ \frac{-x+\sqrt{2}y-z}{2\sqrt{2}}\\ \frac{x-\sqrt{2}y+z}{4}\end{pmatrix}\\ &= I\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Esto es, la resolución de la identidad. Además, note que

$$\begin{aligned}\lambda_1T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \lambda_2T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \lambda_3T_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{x+\sqrt{2}y+z}{4}\\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{2\sqrt{2}}\\ \frac{x+\sqrt{2}y+z}{4}\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{x-\sqrt{2}y+z}{4}\\ \frac{-x+\sqrt{2}y-z}{2\sqrt{2}}\\ \frac{x-\sqrt{2}y+z}{4}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{y}{2}\\ \frac{x}{2}+\frac{z}{2}\\ \frac{y}{2}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\end{aligned}$$

es decir, $\lambda_1T_1+\lambda_2T_2+\lambda_3T_3 = T$, esto es, la descomposición espectral. Por todo lo mostrado anteriormente, se verifica que en este caso particular se satisfacen todas las conclusiones del teorema espectral.

Retomando las propiedades de las matrices de Jacobi, la siguiente afirmación proporciona una condición para garantizar que los valores propios de una matriz de Jacobi sean positivos, haciendo uso de la Proposición 2.29.

Proposición 3.12. Sea J_n una matriz de Jacobi de $n \times n$ dada por la ecuación (3.1) con $a_i > 0$. Si se satisface la condición $a_ia_{i+1} > 4b_i^2$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces la matriz J_n es definida positiva.

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t$ un vector no nulo. Para mostrar que la matriz J_n es definida positiva, de la Definición 2.28 se debe probar que

$$x^t J_n x > 0\,.$$

En ese sentido, se tiene que

$$\begin{aligned}
x^t J_n x &= (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \vdots \\ b_{i-1} x_{i-1} + a_i x_i + b_i x_{i+1} \\ \vdots \\ b_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n \end{pmatrix} \\
&= \left. \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 + 2 b_i x_i x_{i+1} \right) + a_n x_n^2 \\
&= \left. \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i x_i^2}{2} + \frac{a_i x_i^2}{2} + 2 b_i x_i x_{i+1} \right) + \frac{a_n x_n^2}{2} + \frac{a_n x_n^2}{2} \\
&\geq \left. \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i x_i^2}{2} + \frac{2 b_i x_i^2}{a_{i+1}} + 2 b_i x_i x_{i+1} \right) + \frac{a_n x_n^2}{2} + \frac{a_n x_n^2}{2} \\
&= \frac{a_1 x_1^2}{2} + \left. \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{2} b_i x_i}{\sqrt{a_{i+1}}} + \frac{\sqrt{a_{i+1}} x_{i+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{a_n x_n^2}{2} \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

La condición $a_i a_{i+1} > 4 b_i^2$ se utilizó al proponer la primer desigualdad, concluyendo que la matriz J_n es definida positiva. ■

Observación 3.13. La condición $a_i a_{i+1} > 4 b_i^2$ presentada en la Proposición 3.12 no es necesaria para garantizar la positividad de una matriz de Jacobi. En efecto, considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual es definida positiva ya que dado cualquier $x^t = (x_1, x_2)^t \neq 0$

$$\begin{aligned}
x^t A x &= 3x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \\
&= 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

pero no cumple la condición $a_1 a_2 > 4 b_1^2$, pues $a_1 a_2 = 3 \neq 4 = 4 b_1^2$.

3.2. Polinomios generados por una matriz de Jacobi

Tal como se establece en la Proposición 3.5, una matriz de Jacobi J_n, determina un conjunto de polinomios $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ que tienen una relación estrecha con los vectores propios de la matriz , estos polinomios desempeñan un papel fundamental para el estudio del análisis espectral. En esta sección se analizarán más propiedades que satisfacen estos polinomios.

Definición 3.14. Se denominan *polinomios generados* de la matriz de Jacobi J_n a los polinomios $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}\}$ descritos en la Proposición 3.5 y $P_0 := 1$, tomando en consideración la Observación 3.6.

Lema 3.15. Sean J_n una matriz de Jacobi en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ los polinomios dados en la Definición 3.14. Para variables arbitrarias λ y μ, dichos polinomios satisfacen que

$$(\lambda-\mu)\sum_{i=0}^{n-2} P_i(\lambda)P_i(\mu) = b_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)P_{n-2}(\mu) - P_{n-1}(\mu)P_{n-2}(\lambda)].$$

donde $b_{n-1} = (J_n)_{n-1,n}$, esto es, la $n-1, n$ componente de la matriz J_n (véase ecuación de (3.1)).

Demostración. En consideración a la Proposición 3.5, los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ satisfacen las $n-1$ ecuaciones del sistema generado por la ecuación (3.2), las cuales se dan en (3.3) y (3.4). Así que para valores arbitrarios λ y μ se satisfacen tales ecuaciones, esto es,

$$\begin{aligned}
a_1P_0(\lambda) + b_1P_1(\lambda) &= \lambda P_0(\lambda), && \text{(3.3 a)}\\
a_1P_0(\mu) + b_1P_1(\mu) &= \mu P_0(\mu), && \text{(3.3 b)}\\
b_{i-1}P_{i-2}(\lambda) + a_iP_{i-1}(\lambda) + b_iP_i(\lambda) &= \lambda P_{i-1}(\lambda), && \text{(3.4 a)}\\
b_{i-1}P_{i-2}(\mu) + a_iP_{i-1}(\mu) + b_iP_i(\mu) &= \mu P_{i-1}(\mu)\,, && \text{(3.4 b)}
\end{aligned}$$

para $i = 2, \ldots, n-1$. Multiplicando (3.3 a), (3.3 b), (3.4 a), (3.4 b) por $P_0(\mu)$, $P_0(\lambda)$, $P_{i-1}(\mu)$ y $P_{i-1}(\lambda)$, respectivamente, para posteriormente restarlas, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\lambda-\mu)P_0(\lambda)P_0(\mu) &= b_1(P_1(\lambda)P_0(\mu) - P_1(\mu)P_0(\lambda)),\\
(\lambda-\mu)P_1(\lambda)P_1(\mu) &= b_1(P_0(\lambda)P_1(\mu) - P_0(\mu)P_1(\lambda)) + b_2(P_1(\mu)P_2(\lambda) - P_1(\lambda)P_2(\mu)),\\
(\lambda-\mu)P_{i-1}(\lambda)P_{i-1}(\mu) &= b_{i-1}(P_{i-2}(\lambda)P_{i-1}(\mu) - P_{i-2}(\mu)P_{i-1}(\lambda))\\
&\quad + b_i(P_{i-1}(\mu)P_i(\lambda) - P_{i-1}(\lambda)P_i(\mu)).
\end{aligned}$$

Sumando las tres igualdades anteriores se obtiene

$$(\lambda-\mu)\sum_{i=0}^{n-2} P_i(\lambda)P_i(\mu) = b_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)P_{n-2}(\mu) - P_{n-1}(\mu)P_{n-2}(\lambda)],$$

para valores arbitrarios λ y μ. ∎

Teorema 3.16. Sean J_n una matriz de Jacobi en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ los polinomios dados en la Definición 3.14. Todos los valores propios de la matriz J_n son distintos.

Demostración. Sean $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ y Q los correspondientes polinomios generados por la matriz J_n, que están dados en la Definición 3.14 y la ecuación (3.9) respectivamente. Por el Lema 3.15 se cumple que

$$(\lambda-\mu)\sum_{i=0}^{n-2} P_i(\lambda)P_i(\mu) = b_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)P_{n-2}(\mu) - P_{n-1}(\mu)P_{n-2}(\lambda)]. \tag{3.32}$$

De la ecuación (3.9) evaluando en μ y λ se tiene

$$a_nP_{n-1}(\mu) + b_{n-1}P_{n-2} = \mu P_{n-1} - Q(\mu). \tag{3.33}$$

$$a_nP_{n-1}(\lambda) + b_{n-1}P_{n-2} = \lambda P_{n-1} - Q(\lambda). \tag{3.34}$$

Multiplicando (3.34), (3.33) por $P_{n-1}(\mu)$ y $P_{n-1}(\lambda)$ respectivamente para después restarlas se obtiene

$$\begin{aligned} b_{n-1}(P_{n-2}(\mu)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)P_{n-1}(\mu)) =&(\mu-\lambda)P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu) + Q(\lambda)P_{n-1}(\mu) \\ &- Q(\mu)P_{n-1}(\lambda). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Sustituyendo la parte derecha de (3.35) en (3.32) se tiene que

$$(\lambda-\mu)\sum_{i=0}^{n-2} P_i(\lambda)P_i(\mu) = (\mu-\lambda)P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu) + Q(\lambda)P_{n-1}(\mu) - Q(\mu)P_{n-1}(\lambda)\,,$$

esto es,

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_i(\lambda)P_i(\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}(Q(\lambda)P_{n-1}(\mu) - Q(\mu)P_{n-1}(\lambda)). \tag{3.36}$$

Si en la ecuación anterior se hace tender $\lambda \to \mu$, por un lado haciendo uso de la regla de L´Hôpital en la parte izquierda de (3.36) se tiene

$$\lim_{\lambda\to\mu}\left(\frac{1}{\lambda-\mu}(Q(\lambda)P_{n-1}(\mu) - Q(\mu)P_{n-1}(\lambda))\right) = Q'(\mu)P_{n-1}(\mu) - Q(\mu)P'_{n-1}(\mu). \tag{3.37}$$

Por otro lado, de la parte derecha de (3.36) se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\mu}\left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(\lambda)P_i(\mu)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^2(\mu) \geq 1. \tag{3.38}$$

Por lo tanto de (3.36), (3.37) y (3.38) muestra que si μ es un valor propio, entonces $Q(\mu) = 0$ y $Q'(\mu)$ no se pueden anular en tal valor, por tanto el polinomio Q no tiene raíces con multiplicidad mayor a 1, lo cual prueba que la matriz J_n tiene valores propios distintos. ■

Observación 3.17. Por la Definición 1.51 y el Teorema 3.16 las raíces del polinomio característico son los valores propios de la matriz J_n, así el polinomio Q definido en la ecuación (3.9) y el polinomio característico son iguales, a excepción de un factor constante.

La Observación 3.17 muestra la relación existente entre la teoría presentada en esta sección con la teoría que comunmente se presenta en libros clásicos de álgebra lineal (veáse [8, Secc. 5]). Mediante el siguiente ejemplo se mostrará a detalle lo ya mencionado.

Ejemplo 3.18. Dada la matriz J_3, una matriz de Jacobi de 3×3, se procederá a determinar sus vectores propios. Sean

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

donde $c \in \mathbb{R}^3$ es un vector no nulo.
Por un lado, de la ecuación $J_3 c = \lambda c$ y considerando $c_1 = 1$ (veáse Observación 3.6) se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 c_2 &= \lambda, \\ b_1 + a_2 c_2 + b_2 c_3 &= \lambda c_2, \\ b_2 c_2 + a_3 c_3 &= \lambda c_3. \end{aligned}$$

Despejando c_2 y c_3, se obtiene

$$\begin{aligned} c_2 = P_1(\lambda) &= \frac{\lambda}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}, \\ c_3 = P_2(\lambda) &= \frac{1}{b_1 b_2}\lambda^2 - \frac{a_2 + a_1}{b_1 b_2}\lambda + \left(\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - \frac{b_1}{b_2}\right). \end{aligned}$$

El poliniomio $Q(\lambda)$ está dado por

$$\begin{aligned} Q(\lambda) =& \lambda P_2(\lambda) - a_3 P_2(\lambda) - b_2 P_1(\lambda) \\ =& (\lambda - a_3)\left[\frac{1}{b_1 b_2}\lambda^2 - \frac{a_2 + a_1}{b_1 b_2}\lambda + \left(\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} - \frac{b_1}{b_2}\right)\right] - b_2\left(\frac{\lambda}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}\right) \\ =& \frac{-1}{b_1 b_2}[-\lambda^3 + (a_3 + a_2 + a_1)\lambda^2 + (b_1^2 + b_2^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_1 a_3)\lambda \\ & + a_1 a_2 a_3 - a_3 b_1^2 - a_1 b_2^2]. \end{aligned}$$

Por otro lado, el polinomio característico R se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R(\lambda) = \det(J_3 - \lambda I) =& \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 - \lambda & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 - \lambda \end{vmatrix} \\ =& (a_1 - \lambda)[a_2 a_3 - \lambda a_2 - \lambda a_3 + \lambda^2 - b_2^2] - b_1[b_1 a_3 - b_1 \lambda] \\ =& -\lambda^3 + (a_3 + a_2 + a_1)\lambda^2 + (b_1^2 + b_2^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_1 a_3)\lambda \\ & + a_1 a_2 a_3 - a_3 b_1^2 - a_1 b_2^2. \end{aligned}$$

Como se afirma en la Observación 3.17, los polinomios Q y R coinciden salvo por un factor constante. En consecuencia tienen las mismas raíces, lo que implica que los valores propios de J_3 no cambian sin importar el polinomio utilizado para encontrarlos.

3.3. La función espectral

En la Definición 3.14 se presentaron los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, los cuales serán retomados a lo largo de esta sección para el desarrollo de nuevos resultados. Además, se introduce la función espectral asociada a una matriz de Jacobi. Como se sabe bien, los datos espectrales caracterizan completamente a un operador lineal. Por ello, se busca construir una función que preserve dicha información espectral de una matriz de Jacobi J_n. Para alcanzar este objetivo, se trabajará directamente en el espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$, en lugar del espacio $\mathbb{C}^n$.

Teorema 3.19. Sean J_n una matriz de Jacobi en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ los polinomios dados en la Definición 3.14. Los polinomios pertenecen al espacio $\mathbb{P}_{n-1}$, el cual denota al espacio de todos los polinomios con grado menor o igual a $n-1$. Los polinomios forman una base en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$.

Demostración. Sean $\beta = \{1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}\}$ la base canónica del espacio $\mathbb{P}_{n-1}$ y $S \in \mathbb{P}_{n-1}$ un polinomio arbitrario. Como β es una base, existen $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$S(\lambda) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^k \tag{3.39}$$

Observe que λ^k puede ser representado de la forma

$$\lambda^k = \sum_{i=0}^{k} b_i R_i(\lambda), \tag{3.40}$$

donde R_i es un polinomio de grado i y b_i escalar para $i = 0, 1, \ldots, k$. En efecto, si se considera a $R_i(\lambda) = c_0^i + c_1^i\lambda + \cdots + c_i^i\lambda^i$ y $c_i^i \neq 0$ entonces,

$$\lambda^i = (b_0c_0^0 + b_1c_0^1 + b_2c_0^2 + \cdots + b_kc_0^k) + (b_1c_1^1 + b_2c_1^2 + \cdots + b_kc_1^k)\lambda + \cdots + (b_kc_k^k)\lambda^k\,,$$

con c_i^k, b_k escalares, para $i = 0, 1, \ldots, k$. Esto implica encontrar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} b_0c_0^0 + b_1c_0^1 + b_2c_0^2 + \cdots + b_kc_0^k &= 0, \\ b_1c_1^1 + b_2c_1^2 + \cdots + b_kc_1^k &= 0, \\ b_2c_2^2 + \cdots + b_kc_2^k &= 0, \\ &\vdots \\ b_ic_k^k &= 1, \end{aligned}$$

el cual se puede reescribir en forma matricial por

$$
Ab = \begin{pmatrix} c_0^0 & c_0^1 & c_0^2 & \cdots & c_0^k \\ 0 & c_1^2 & c_1^2 & \cdots & c_1^k \\ 0 & 0 & c_2^2 & \cdots & c_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

donde A es una matriz triangular superior, cuyos coeficientes de la diagonal principal son distintos de cero, así que $\det(A) = \prod_{k=0}^{i} c_k^k \neq 0$. Por la Proposición 1.45 se tiene que A es invertible. Por lo tanto,

$$
b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

lo que prueba que λ^k puede ser representado como en (3.40). Ahora, para la unicidad, supóngase que la representación de λ^k a tráves de (3.40) no es única. Esto es, sean

$$
\lambda^k = \sum_{i=0}^{k} b_i R_i(\lambda), \qquad \lambda^k = \sum_{i=0}^{k} d_i R_i(\lambda).
$$

Restando las dos igualdades anteriores, se tiene

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{k} (b_i - d_i) R_i(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} (b_i - d_i) R_i(\lambda) + (b_k - d_k) R_k(\lambda) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (b_i - d_i) R_i(\lambda) + [(b_k - d_k)c_0^k + (b_k - d_k)c_1^k \lambda + \cdots + (b_k - d_k)c_i^k \lambda^k]. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

De la hipótesis, $c_k^k \neq 0$, esto es, $b_k - d_k = 0$, así $b_k = d_k$. De modo que (3.41) se reduce a $\sum_{i=0}^{k-1} (b_i - d_i) R_i(\lambda)$. Bajo el mismo argumento, se tiene que $b_{k-1} = d_{k-1}$. Lo que probaría de forma recurrente que $b_k = d_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Por lo tanto la representación de λ^k es única. Sustituyendo (3.40) en (3.39) se tiene

$$
S(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{k=0}^{i} b_k R_k(\lambda).
$$

Dado que R_k es un polinomio abitrario de grado k, en particular se pueden considerar los polinomios P_k para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales están descritos en la Definición 3.14. En la Proposición 3.5 se establece explícitamente que el grado de cada P_k es k. Como cualquier polinomio $S \in \mathbb{P}_{n-1}$ puede expresarse como combinación lineal de los P_k, se concluye que los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ forman una base en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$. ■

Como se mencionó al inicio de la sección, es necesario trasladar el análisis desde el espacio $\mathbb{C}^n$ al espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$. Para lograr esto, se introducirá la transformada discreta de Fourier, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 3.20. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ un vector y $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ los polinomios dados en la Definición 3.14. La *transformada de Fourier discreta* del vector x denotada por $\tilde{x}$ está dada por

$$\tilde{x}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} x_k P_{k-1}(\lambda). \tag{3.42}$$

Observación 3.21. La transformada de Fourier es un mapeo lineal del espacio $\mathbb{C}^n$ al espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$. Por el Teorema 3.19 los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ forman una base del espacio $\mathbb{P}_{n-1}$ y cada vector $x \in \mathbb{C}^n$ determina de forma única una combinación lineal de estos polinomios, lo cual garantiza que la transformada es un isomorfismo entre estos espacios.

Mediante el proceso de ortonormalización se obtiene una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, formada por elementos en $\mathbb{C}^n$

$$u_j = \frac{c_j}{||c_j||} = \frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)\right)^{\frac{1}{2}}} \left(P_0(\lambda_j), P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j) \ldots, P_{n-1}(\lambda_j)\right)^t, \tag{3.43}$$

Estos vectores se utilizarán para poder expresar el producto interior de un vector $x \in \mathbb{C}^n$ con cada vector u_j en función de la transformada de Fourier discreta, tal como se muestra a continuación

$$\langle x, u_j \rangle = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k P_{k-1}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)}} = \frac{\tilde{x}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)}}, \tag{3.44}$$

donde $\{x_k\}_{k=1}^n$ son las coordenadas del vector x en la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y u_j el vector unitario definido en (3.43). Para elementos $x, y \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \langle y, u_j \rangle u_j,$$

esto debido a que el conjunto de vectores u_j es ortonormal y utilizando el Teorema 1.63.

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, u_j\rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i, \langle y, u_j\rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \langle x, u_i\rangle u_i, \langle y, u_j\rangle u_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_j\rangle} \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_j\rangle \overline{\langle y, u_j\rangle} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\tilde{x}(\lambda_j)\overline{\tilde{y}(\lambda_j)}}{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)},
\end{aligned}$$

donde $\tilde{y}(\lambda)$ es la transformada de Fourier del vector y, que resulta de sustituir (3.44). El último término de la igualdad anterior puede ser expresado como una integral de Riemman- Stieltjes (véase [3, Secc. 7.9]). Así

$$\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{x}(\lambda)\overline{\tilde{y}(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \tag{3.45}$$

donde $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalón no decreciente, constante en todas partes a excepción de los puntos donde ocurren los saltos, que son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y cero para $\lambda < \lambda_1$, y

$$\Delta\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)}. \tag{3.46}$$

La ecuación (3.45) se justifica de la siguiente manera: sea ρ una función no decreciente y continua a la izquierda, para $-\infty < \lambda < \infty$ y S una función arbitraria continua. Si se toman subintervalos semi-abiertos y disjuntos del intervalo $[a, b)$, esto es $[a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_n, a_{n+1})$, $(-\infty < a = a_0 < b = a_{n+1} < \infty)$, entonces la suma de Riemman-Stieljes para la función S en todo el eje real está dada por

$$\sum_{j=0}^{n} S(c_j)(\rho(a_{j+1}) - \rho(a_j)),$$

donde $c_j \in [a_j, a_{j+1})$. Luego, la integral de Riemman-Stieljes de S en todo el eje real es

$$\int_{\mathbb{R}} S(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b S(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Si la función ρ es una función escalón, no decreciente, constante en todas partes a excepción de los puntos donde ocurren los saltos, que son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cuyo valor del salto es $\Delta\rho_j = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0)$, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} S(\lambda)\ d\rho(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} S(\lambda_j)\Delta\rho_j\,. \tag{3.47}$$

La ecuación (3.47) se deriva directamente de [3, Teo. 7.11], que aborda la reducción de una integral de Riemman-Stieltjes a una suma finita.

Lema 3.22. Dada una matriz de Jacobi J de $n \times n$, existe una función escalón $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociada, la cual es no decreciente y constante en todas partes. Esta función presenta exactamente n saltos y la suma de los valores de dichos saltos es 1.

Demostración. Sea e_1 el primer vector de la base cánonica del espacio $\mathbb{C}^n$ y $\tilde{e}_1$ su transformada de Fourier. De las ecuaciones (3.42), (3.45) se obtiene que

$$1 = \langle e_1, e_1\rangle = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1\rangle_\rho = \langle P_0, P_0\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} P_0^2(\lambda)\ d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta\rho(\lambda_j).$$

Por lo tanto la suma de los saltos de la función $\rho(\lambda)$ es igual a 1. ■

A continuación se muestran propiedades que satisface el producto escalar dado por (3.45) y que permitirán definir un producto para el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$.

Lema 3.23. Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función escalón, no decreciente, continua por la izquierda y que cumple con las implicaciones de (3.45). Si R, S son polinomios arbitrarios en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$ sobre el campo $\mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{R(\lambda)}\ d\rho(\lambda) \geq 0;\quad \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{R(\lambda)}\ d\rho(\lambda) = 0$ si y solo si $R(\lambda) = 0$.

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} a_1 R(\lambda)\overline{a_2 S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) = a_1\overline{a_2}\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda)$.

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \overline{S(\lambda)}\ \overline{\overline{R(\lambda)}}\ d\rho(\lambda).$

d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (R(\lambda) + Q(\lambda))\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} Q(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda).$

Demostración. a) Considerando que $R(\lambda) \neq 0$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{R(\lambda)}\ d\rho(\lambda) \geq 0\,.$$

Para el caso en que $R(\lambda)=0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{R(\lambda)}\ d\rho(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} 0[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Esto muestra que la integral es cero cuando $R(\lambda)=0$.
Ahora considere el caso en que $\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{R(\lambda)}\ d\rho(\lambda)=0$. Esto implica que

$$\sum_{j=1}^{n} R(\lambda_j)\overline{R(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]=0.$$

Ahora, dado que $[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]>0$ para $j=1,\ldots,n$, se sigue que $R(\lambda_j)\overline{R(\lambda_j)}=0$ para cada j, esto es, $R(\lambda_j)=0$ para todos los puntos λ_j. Como $R\in\mathbb{P}_{n-1}$ y $R(\lambda_j)=0$ para $j=1,\ldots,n$, entonces $R(\lambda)=0$.

b) La linealidad respecto a escalares se cumple, en efecto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} a_1R(\lambda)\overline{a_2S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} a_1R(\lambda_j)\overline{a_2S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]\\ &= a_1\overline{a_2}\sum_{j=1}^{n} R(\lambda_j)\overline{S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]\\ &= a_1\overline{a_2}\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda).\end{aligned}$$

c) La integral conjugada resulta ser simétrica,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} R(\lambda_j)\overline{S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]\\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{S(\lambda_j)}\ \overline{\overline{R(\lambda_j)}}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)]\\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{S(\lambda)}\ \overline{\overline{R(\lambda)}}\ d\rho(\lambda).\end{aligned}$$

d) Por último, la propiedad de linealidad respecto a la suma se satisface,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (R(\lambda)+Q(\lambda))\overline{S(\lambda)}\, d\rho(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} (R(\lambda_j)+Q(\lambda_j))\overline{S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)] \\ &= \sum_{j=1}^{n} R(\lambda_j)\overline{S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} Q(\lambda_j)\overline{S(\lambda_j)}[\rho(\lambda_j+)-\rho(\lambda_j-)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\, d\rho(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} Q(\lambda)\overline{S(\lambda)}\, d\rho(\lambda).\end{aligned}$$

Se han demostrado los cuatro incisos, por tanto la demostración queda completa. ■

El Lema 3.23 permite definir un espacio con producto interior de elementos de $\mathbb{P}_{n-1}$.

Definición 3.24. Sea ρ una función escalón asociada a una matriz de Jacobi de tamaño $n \times n$. Se define un producto interior en el espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$ mediante

$$\langle R, S\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\,\overline{S(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \tag{3.48}$$

para todo $R, S \in \mathbb{P}_{n-1}$.
Con este producto interior, el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$ se denota por $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$, y se convierte en un espacio con producto interior de dimensión finita.

Observación 3.25. De las ecuaciones (3.45) y (3.48) es posible concluir que

$$\langle x, y\rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_\rho. \tag{3.49}$$

A esta ecuación se le conoce como identidad de Parseval.

Teorema 3.26. El espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$ es un espacio con producto interior de dimensión n, en el cual, el conjunto $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$, forma una base ortonormal.

Demostración. Sean $\tilde{x} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}_{n-1}$, la transformada de Fourier y P_k los polinomios descritos en la Definición 3.14, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
Sean e_i para $i = 1, 2, \ldots, n$, los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Así

$$0 = \langle e_i, e_j\rangle = \langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle_\rho = \langle P_{i-1}, P_{j-1}\rangle_\rho, \tag{3.50}$$

para $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$. Con esto, se obtiene que los polinomios P_k son ortonormales y por el Teorema 3.19 se tiene que estos forman una base en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}$. ■

Definición 3.27. Sea J una matriz de Jacobi en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde λ_j son sus valores propios para $j = 1, 2, \ldots, n$ y $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ son los polinomios generados por esta matriz (véase Definición 3.14). La función escalón dada por

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_j<\lambda} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\lambda_j)},$$

se llama la *función espectral* de la matriz J.

Nótese que la función espectral contiene información de los datos espectrales de la matriz de Jacobi, debido a que aparecen los polinomios definidos en la Proposición 3.5 y los valores propios λ_j de la matriz.
Por el Lema 3.22 se sabe que la suma de todos los valores de los saltos es 1, esto implica que $\rho(-\infty) = 0$ y $\rho(+\infty) = 1$. La gráfica de la Figura 3.1 ilustra un ejemplo de una función espectral.

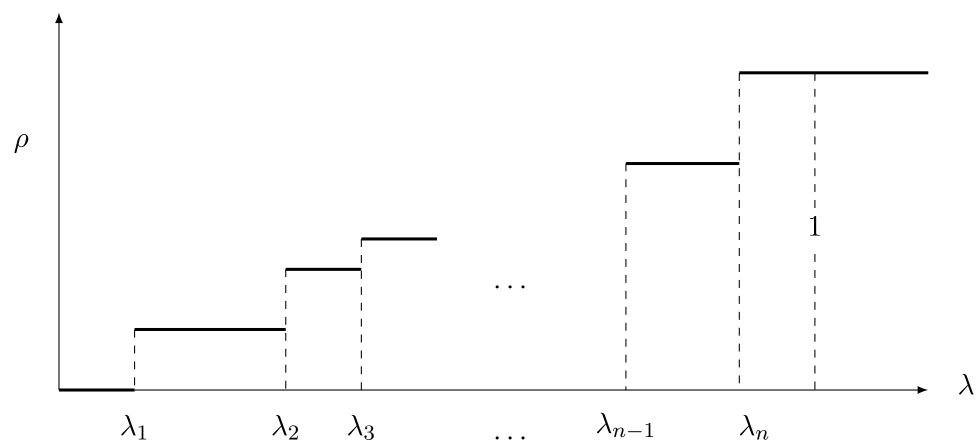

Figura 3.1: Función espectral ρ.

El siguiente ejemplo utiliza el método visto en la Sección 3.1 para obtener los polinomios generados por una matriz, además se construirá su función espectral asociada, al igual que su respectiva gráfica.

Ejemplo 3.28. Para la matriz

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

del Ejemplo 3.11 se obtendrá su función espectral asociada. Los polinomios generados de la matriz J_3 son, $P_0(\lambda) = 1, P_1(\lambda) = 2\lambda, P_2(\lambda) = 4\lambda^2 - 1$. En el ejemplo 3.11 se obtuvieron como valores propios a $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De la ecuación (3.46), se tiene

$$\Delta\rho(\lambda_1) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{2} P_k^2(\lambda_1)} = \frac{1}{4},$$
$$\Delta\rho(\lambda_2) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{2} P_k^2(\lambda_2)} = \frac{1}{2},$$
$$\Delta\rho(\lambda_3) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{2} P_k^2(\lambda_3)} = \frac{1}{4}.$$

Con esto, la función espectral queda determinada por

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{4}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 0, \\ \frac{3}{4}, & 0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1, & \frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda, \end{cases}$$

cuya gráfica se presenta en la Figura 3.2.

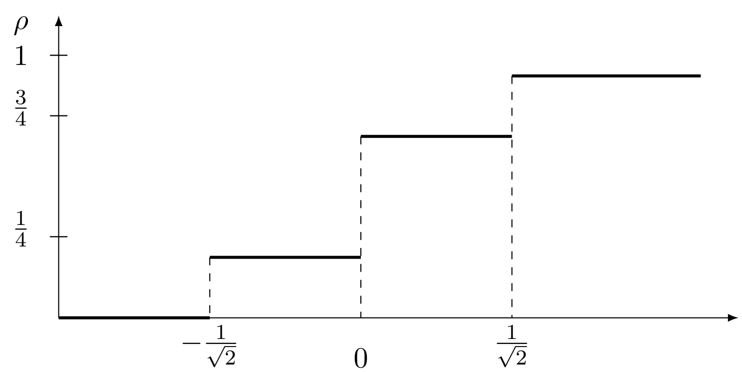

Figura 3.2: Gráfica de la función espectral ρ.

A continuación se detallan un par de ejemplos del producto escalar $\langle R, S\rangle_\rho$ para funciones ρ dadas.

Ejemplo 3.29. Considere las funciones

$$R(\lambda) = \lambda^2,\ S(\lambda) = \lambda \qquad \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < \lambda < 1, \\ 1, & 1 < \lambda. \end{cases}$$

La ecuación (3.48), implica que

$$\langle R, S\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda^3 \, d\rho(\lambda) = (0)^3 \left[\frac{1}{2} - 0\right] + (1)^3 \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.30. Se consideran a las funciones

$$R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad S(\lambda) = R(\lambda), \qquad\qquad \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 < \lambda < 2, \\ \frac{2}{3}, & 2 < \lambda < 3, \\ 1, & 3 < \lambda. \end{cases}$$

De la ecuación (3.48) el producto interior es

$$\langle R, S\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} (a\lambda^2 + b\lambda + c)^2 \, d\rho(\lambda) = \frac{1}{3}\left(97a^2 + 13b^2 + 3c^2 + 70ab + 26ac + 10bc\right).$$

El siguiente ejemplo emplea el método de ortogonalización de Gram-Schmidt visto en el Teorema 1.62, utilizando el producto escalar ordinario en un conjunto de vectores.

Ejemplo 3.31. Considere el proceso de ortonormalización mediante el método de Gram-Schmidt aplicado al sistema de vectores

$$\begin{aligned} d_1 &= (1, 0, \ldots, 0)^t, \\ d_2 &= (1, 1, \ldots, 0)^t, \\ &\vdots \\ d_n &= (1, 1, \ldots, 1)^t, \end{aligned}$$

utilizando el producto escalar ordinario de $\mathbb{C}^n$. Este procedimiento permitirá transformar este conjunto en un sistema ortonormal. En efecto, note que

$$\begin{aligned} v_1 &= d_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^t, \\ v_2 &= d_2 - \frac{\langle d_2, d_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\, d_1 \\ &= (0, 1, 0, \ldots, 0)^t, \\ v_3 &= d_3 - \frac{\langle d_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle d_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \\ &= (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t, \\ v_4 &= d_4 - \frac{\langle d_4, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle d_4, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle d_4, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle} v_3 \\ &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t, \\ &\vdots \\ v_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)^t. \end{aligned}$$

Como $||v_k|| = 1$, para $k = 1, \ldots, n$, se tiene que $\{v_k\}_{k=1}^n$, es una sucesión de vectores ortonormales.

El ejemplo anterior fue útil para comprender el método de ortogonalización. Ahora se utilizará este mismo método pero empleando el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ definido en esta sección, utilizando funciones arbitrarias, no necesariamente espectrales. Lo anterior, con el propósito de comprender cómo se pueden construir conjuntos ortonormales de funciones en el espacio de polinomios con un producto interior, que es parte de lo que se abordará en el siguiente capítulo.

Ejemplo 3.32. Utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt se construirá un conjunto ortogonal en el espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$, a partir de

$$T_j(\lambda) = \lambda^j, \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

utilizando el producto interior definido en (3.48) para las funciones φ_1, φ_2 y φ_3.

a) $\varphi_1(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \in (0,1), \\ 0, & \lambda \notin (0,1). \end{cases}$

Para esta función se determinarán los vectores ortogonales $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ en el espacio de polinomios con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_1}$. Por el Teorema 1.62 estos vectores están dados por

$$\begin{aligned}
R_0(\lambda) &= T_0(\lambda) = 1, \\
R_1(\lambda) &= T_1(\lambda) - \frac{\langle T_1, v_0 \rangle_{\varphi_1}}{\langle v_0, v_0 \rangle_{\varphi_1}} \, v_0 \\
&= \lambda - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda \; d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} \; d\varphi_1} \, (1) \\
&= \lambda - \frac{1}{2}, \\
R_2(\lambda) &= T_2(\lambda) - \frac{\langle T_2, v_0 \rangle_{\varphi_1}}{\langle v_0, v_0 \rangle_{\varphi_1}} v_0 - \frac{\langle T_2, v_1 \rangle_{\varphi_1}}{\langle v_1, v_1 \rangle_{\varphi_1}} v_1 \\
&= \lambda^2 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \; d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} \; d\varphi_1} \, (1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 (\lambda - \frac{1}{2}) \; d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \frac{1}{2})^2 \; d\varphi_1} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \\
&= \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3(\lambda) &= T_3(\lambda) - \frac{\langle T_3, v_0\rangle_{\varphi_1}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_1}} v_0 - \frac{\langle T_3, v_1\rangle_{\varphi_1}}{\langle v_1, v_1\rangle_{\varphi_1}} v_1 - \frac{\langle T_3, v_2\rangle_{\varphi_1}}{\langle v_2, v_2\rangle_{\varphi_1}} v_2 \\
&= \lambda^3 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 \, d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} \, d\varphi_1} (1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 (\lambda - \frac{1}{2}) \, d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \frac{1}{2})^2 \, d\varphi_1} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \\
&\quad - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 (\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6}) \, d\varphi_1}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6})^2 \, d\varphi_1} \left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{\frac{1}{4}}{1}(1) - \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} \left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{5}\lambda - \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Así, se obtiene el siguiente conjunto, dado por

$$\left\{1,\ \lambda - \frac{1}{2}, \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6},\ \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{5}\lambda - \frac{1}{20}\right\},$$

el cual es ortogonal en el espacio de polinomios bajo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_1}$.

b) $\varphi_2(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ 1, & 0 < \lambda < 1, \\ 2, & 1 < \lambda < 2, \\ 3, & 2 < \lambda\,. \end{cases}$

El conjunto de vectores ortogonales para la función φ_2 se construye de forma análoga. Esto es

$$\begin{aligned}
R_0(\lambda) &= T_0(\lambda) = 1, \\
R_1(\lambda) &= T_1(\lambda) - \frac{\langle T_1, v_0\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_2}} \, v_0 \\
&= \lambda - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} \, d\varphi_2} \, (1) \\
&= \lambda - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2(\lambda) &= T_2(\lambda) - \frac{\langle T_2, v_0\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_2}} v_0 - \frac{\langle T_2, v_1\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_1, v_1\rangle_{\varphi_2}} v_1 \\
&= \lambda^2 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \; d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} \; d\varphi_2} \, (1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\lambda-1) \; d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda-1)^2 \; d\varphi_2} (\lambda - 1) \\
&= \lambda^2 - \frac{5}{3}(1) - \frac{4}{2}(\lambda - 1) \\
&= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{6}, \\
R_3(\lambda) &= T_3(\lambda) - \frac{\langle T_3, v_0\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_2}} v_0 - \frac{\langle T_3, v_1\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_1, v_1\rangle_{\varphi_2}} v_1 - \frac{\langle T_3, v_2\rangle_{\varphi_2}}{\langle v_2, v_2\rangle_{\varphi_2}} v_2 \\
&= \lambda^3 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 \; d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} \; d\varphi_2} \, (1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3(\lambda-1) \; d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda-1)^2 \; d\varphi_2} (\lambda - 1) \\
&\quad - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{6}) \; d\varphi_2}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{6})^2 \; d\varphi_2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{6}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{9}{3}(1) - \frac{8}{2}(\lambda - 1) - \frac{\frac{42}{3}}{\frac{31}{6}} \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{7}{6}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{84}{31}\lambda^2 - \frac{82}{31}\lambda + \frac{129}{31}.
\end{aligned}$$

Se obtiene el siguiente conjunto

$$\left\{1, \; \lambda - 1, \; \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{6}, \; \lambda^3 - \frac{84}{31}\lambda^2 - \frac{82}{31}\lambda + \frac{129}{31}\right\},$$

que es ortogonal en es espacio de polinomios con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_2}$.

c) $\varphi_3(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \in [-1, 1], \\ 0, & \lambda \notin [-1, 1]. \end{cases}$

Finalmente, para este caso se determinan los vectores ortogonales $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ análogamente a los casos anteriores.

$$
\begin{aligned}
R_0(\lambda) &= T_0(\lambda) = 1, \\
R_1(\lambda) &= T_1(\lambda) - \frac{\langle T_1, v_0\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_3}}\ v_0 \\
&= \lambda - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}}\ d\varphi_3}(1) \\
&= \lambda, \\
R_2(\lambda) &= T_2(\lambda) - \frac{\langle T_2, v_0\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_3}} v_0 - \frac{\langle T_2, v_1\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_1, v_1\rangle_{\varphi_3}} v_1 \\
&= \lambda^2 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}}\ d\varphi_3}(1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\lambda)\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\ d\varphi_3}(\lambda) \\
&= \lambda^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}(1) - \frac{0}{\frac{2}{3}}(\lambda) \\
&= \lambda^2 - \frac{1}{3}, \\
R_3 &= T_3(\lambda) - \frac{\langle T_3, v_0\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_0, v_0\rangle_{\varphi_3}} v_0 - \frac{\langle T_3, v_1\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_1, v_1\rangle_{\varphi_3}} v_1 - \frac{\langle T_3, v_2\rangle_{\varphi_3}}{\langle v_2, v_2\rangle_{\varphi_3}} v_2 \\
&= \lambda^3 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}}\ d\varphi_3}(1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3(\lambda)\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\ d\varphi_3}(\lambda) \\
&\quad - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^3(\lambda^2 - \frac{1}{3})\ d\varphi_3}{\int_{\mathbb{R}} (\lambda^2 - \frac{1}{3})^2\ d\varphi_3}\left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{0}{2}(1) - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}(\lambda) - \frac{0}{\frac{8}{45}}\left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \lambda^3 - \frac{3}{5}\lambda.
\end{aligned}
$$

Se obtiene el siguiente conjunto

$$
\left\{1,\ \lambda,\ \lambda^2 - \frac{1}{3},\ \lambda^3 - \frac{3}{5}\lambda\right\},
$$

que es ortogonal en el espacio de polinomios con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_3}$.

Capítulo 4

Sistema mecánico de partículas en interacción

En este último capítulo el objetivo es mostrar una aplicación concreta de la teoría espectral desarrollada para matrices de Jacobi, a partir de un sistema mecánico de partículas en interacción. Con base en dicho sistema, se propone un modelo matemático utilizando una matriz de Jacobi. El análisis del modelo se realiza a través de las propiedades espectrales asociadas a esta matriz. Se plantea la solución de una ecuación diferencial, la cual depende directamente de los datos espectrales de la matriz de Jacobi J.
Posteriormente, se considera un problema inverso, en donde se tiene el conocimiento de una función que posee las propiedades de la función espectral, la cual está asociada a una matriz de Jacobi, por tanto se busca reconstruir el sistema a partir de sus características mecánicas.

4.1. Modelo de un sistema de partículas en interacción

En esta sección se analizará un sistema de n masas puntuales, cada una de ellas determinanda por $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Estas masas estarán unidas por resortes ideales sin peso, tal como se muestra en la Figura 4.1. Los resortes cuentan con un coeficiente de elasticidad $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ y sus longitudes en estado de equilibrio son $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$.

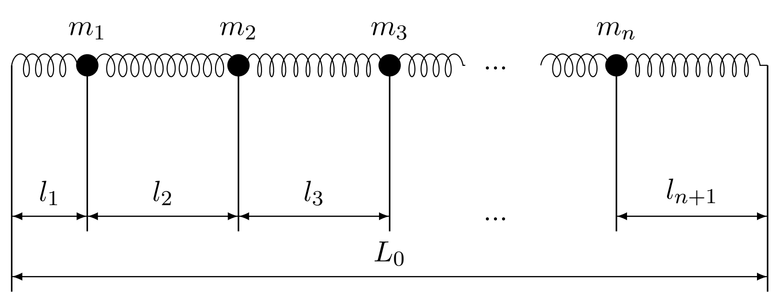

Figura 4.1: Sistema de masas y resortes en estado de equilibrio.

La longitud L_0 del sistema es la suma de cada una de las longitudes de los resortes, es decir $L_0 = \sum_{i=1}^{n+1} l_i$. Nótese que al estirar el sistema a una longitud L_1 y fijarlo en ambos extremos, l_1 y de l_{n+1}, se obtiene un nuevo sistema (Figura 4.2). Es importante introducir un sistema de coordenadas porque ayudará a describir la posición de cada masa del sistema. El sistema de coordenas tiene como origen el extremo izquierdo del resorte de longitud l_0.

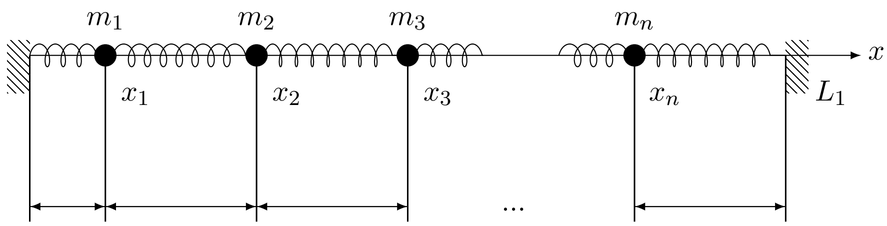

Figura 4.2: Sistema fijado en sus extremos.

Las nuevas coordenadas para las masas en estado de equilibrio para este sistema están determinadas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente. El i-ésimo resorte estirado tendrá una longitud de $x_i - x_{i-1}$, de donde su elongación relativa está dada por $\frac{x_i - x_{i-1} - l_i}{l_i}$.
Dado el sistema en estado de equilibrio se puede notar que para la masa m_i, la suma resultante de las fuerzas aplicada a esta es 0. Por la ley de Hooke se tienen dos fuerzas que actúan sobre ella, que son

$$-k_i \tfrac{x_i - x_{i-1} - l_i}{l_i} \quad \text{y} \quad k_{i+1} \tfrac{x_{i+1} - x_i - l_{i+1}}{l_{i+1}},$$

debido al i-ésimo y $(i+1)$-ésimo resorte respectivamente. Por lo antes mencionado se tendría que la suma de ambas fuerzas es nula, esto es,

$$-\tfrac{k_i}{l_i}(x_i - x_{i-1} - l_i) + \tfrac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(x_{i+1} - x_i - l_{i+1}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n,$$

donde $x_0 = 0$ (el origen) y $x_{n+1} = L_1$ (longitud total del nuevo sistema). La ecuación anterior genera un sistema de n ecuaciones lineales, con variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, las cuales son las coordenadas de las masas m_i en estado de equilibrio.
Ahora, considerando que el sistema se mantiene fijo respecto a los extremos y solo se genera movimiento horizontal sobre el eje x, la masa m_i tendrá un desplazamiento determinado por $u_i(t)$. Esta función que depende de t determinará la posición de m_i en el tiempo t a partir de la posición de equilibrio x_i. Así, se tendría que la coordenada de m_i en el tiempo t es $x_i + u_i(t)$ para $i = 1, \ldots, n$.
Debido a que las coordenadas x_i son conocidas, basta con conocer a $u_i(t)$ para poder obtener la posición de cada masa m_i para $i = 1, \ldots, n$ del sistema.
Anteriormente se mencionó que son únicamente dos fuerzas que actúan sobre la masa m_i.

Considerando las nuevas coordenadas $x_i + u_i(t)$ se tiene que la suma de ambas es F_i :

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{k_i}{l_i}[(x_i + u_i(t)) - (x_{i-1} + u_{i-1}(t)) - l_i] \\ &\quad + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}[(x_{i+1} + u_{i+1}(t)) - x_i + u_i(t)) - l_{i+1}] \\ &= -\frac{k_i}{l_i}(x_i - x_{i-1} - l_i) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(x_{i+1} - x_i - l_{i+1}) \\ &\quad - \frac{k_i}{l_i}(u_i(t) - u_{i-1}(t)) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(u_{i+1}(t) - u_i(t)) \\ &= \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}u_{i+1}(t) - \left(\frac{k_i}{l_i} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\right)u_i(t) + \frac{k_i}{l_i}u_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

De la segunda ley de Newton, se tiene

$$F_i = m_i w_i = m_i \frac{d^2}{dt^2}(x_i + u_i(t)) = m_i \ddot{u}_i(t). \tag{4.2}$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) se produce un sistema de ecuaciones, con la variable $u_i(t)$:

$$r_{i+1}u_{i+1}(t) - (r_{i+1} + r_i)u_i(t) + r_i u_{i-1}(t) = m_i \ddot{u}_i(t), \tag{4.3}$$

donde $r_i = \frac{k_i}{l_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$.
El sistema (4.3) reescrito de forma matricial está dado por

$$\frac{d^2}{dt^2}Mu(t) = -Au(t). \tag{4.4}$$

donde,

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & m_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} r_2 + r_1 & -r_2 & 0 & \ldots & 0 \\ -r_2 & r_3 + r_2 & -r_3 & & 0 \\ 0 & -r_3 & r_4 + r_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & r_{n+1} + r_n \end{pmatrix},$$

y $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))^t$.

Proposición 4.1. La matriz A de la ecuación (4.4) es una matriz definida positiva.

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t$ un vector no nulo. De la Definición 2.28 se debe probar que

$$x^t A x > 0\,.$$

Así, se tiene que

$$
\begin{aligned}
x^t A x &= (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \begin{pmatrix} (r_2 + r_1)x_1 - r_2 x_2 \\ \vdots \\ -r_i x_{i-1} + (r_{i+1} + r_i)x_i - r_{i+1}x_{i+1} \\ \vdots \\ -r_n x_{n-1} + (r_{n+1} + r_n)x_n \end{pmatrix} \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} + r_i)x_i^2 - 2r_{i+1}x_i x_{i+1} \Bigg) + (r_{n+1} + r_n)x_n^2 \\
&= r_1 x_1^2 + \quad \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{r_{i+1}}x_i - \sqrt{r_{i+1}}x_{i+1})^2 \Bigg) + r_{n+1}x_n^2 \\
&> 0\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la matriz A es definida positiva. ∎

Retomando la ecuación (4.3), la cual es equivalente a

$$
\sqrt{m_i}\ddot{u}_i(t) = \tfrac{r_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}\sqrt{m_{i+1}}u_{i+1}(t) - \tfrac{r_{i+1}+r_i}{m_i}\sqrt{m_i}u_i(t) + \tfrac{r_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}}\sqrt{m_{i-1}}u_{i-1}(t).
$$

Introduciendo la notación

$$
\sqrt{m_i}u_i(t) = v_i(t), \qquad \tfrac{r_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} = -b_{i-1}, \qquad \tfrac{r_{i+1}+r_i}{m_i} = a_i,
$$

se obtiene que

$$
\ddot{v}_i(t) = -b_i v_{i+1}(t) - a_i v_i(t) - b_{i-1}v_{i-1}(t).
$$

De esta forma, el sistema (4.4) puede reescribirse por

$$
\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -Jv(t),
$$

donde J es una matriz de Jacobi dada por

$$
J = \begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\
b_1 & a_2 & b_2 & & & & \\
0 & b_2 & a_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\
 & & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\
0 & & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n
\end{pmatrix}
$$

cuyas componentes están dadas por

$$
a_i = \frac{1}{m_i}\left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i}\right), \quad b_i = -\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}\sqrt{m_i m_{i+1}}}. \tag{4.5}
$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones que modela el sistema de masas y resortes está dado por

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -Jv(t). \tag{4.6}$$

Proposición 4.2. La matriz de Jacobi J que aparece en la ecuación (4.6) es una matriz definida positiva cuyas componentes están descritas en (4.5).

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t$ un vector no nulo. La matriz J está relacionada con la matriz A que aparece en la ecuación (4.4) debido a que los sistemas a los que están asociadas estas matrices son equivalentes. La relación se da mediante la expresión $J = M^{\frac{-1}{2}}AM^{\frac{-1}{2}}$, donde M es la matriz que también aparece en la ecuación (4.4), la cual es una matriz diagonal con entradas positivas. De la Proposición 4.1 se tiene que la matriz es definida positiva, por tanto se sigue que

$$x^tJx = (Jx)^tx = \langle Jx, x\rangle = \langle M^{\frac{-1}{2}}AM^{\frac{-1}{2}}x, x\rangle = \langle AM^{\frac{-1}{2}}x, M^{\frac{-1}{2}}x\rangle > 0.$$

Esto es, la matriz de Jacobi es una matriz definida positiva. ∎

4.2. Solución del comportamiento de partículas en interacción (Problema directo)

El problema consiste en determinar el desplazamiento de un sistema compuesto por un número finito de partículas en interacción. En esta sección se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que describe dicho comportamiento, el cual fue previamente modelado en (4.6) a partir de las constantes de elasticidad, las masas y las longitudes de los resortes que conforman el sistema. Al reescribir el sistema de ecuaciones que describen el sistema masas y resortes, se llega a una ecuación que involucra a una matriz de Jacobi y la cual será resuelta en esta sección. Esta solución es una superposición de oscilaciones armónicas que dependen tanto de las características mecánicas del problema como de los vectores propios de la matriz de Jacobi.

De esta forma, se busca dar solución a

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -Jv(t), \tag{4.7}$$

donde J es una matriz de Jacobi, cuyas componentes están dadas en (4.5), las cuales poseen información de las características mecánicas del sistema. Se propone buscar soluciones de una forma general que es $v(t) = e^{wt}c$, a manera que al sustituir en la ecuación se cumple $-w^2c = Jc$. Nótese que $-w^2$ es un valor propio de la matriz de Jacobi, y por la Proposición 4.2, esta es una matriz definida positiva, por tanto sus valores propios son positivos.

La solución general de (4.7) está dada por

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + B_k\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}t))c_k, \tag{4.8}$$

donde A_k y B_k se obtienen de las condiciones iniciales del problema y $\sqrt{\lambda_k}$, c_k los valores y vectores propios de la matriz J respectivamente, para $k = 1, \ldots, n$. Cabe aclarar que c_k es el k-ésimo vector propio y no una componenete de un vector.

Observación 4.3. El desplazamiento de cada masa m_i, representado por los valores u_i, se obtiene a partir de las componentes del vector $v(t)$, ya que $u_i = \frac{v_i}{\sqrt{m_i}}$. Por lo tanto, para conocer el desplazamiento de todas las partículas, es necesario determinar $v(t)$ dada por (4.8). Cabe mencionar que la matriz J de (4.7) posee las características mecánicas del sistema.

De este modo, basta conocer métodos que den solución a la ecuación (4.7). Así, considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.4. Dada la ecuación,

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} v(t), \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix},$$

con sus condiciones iniciales $v(0) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $\dot{v}(0) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, el sistema tiene asociado una matriz de Jacobi $J = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene como valores propios a $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 14$, con correspondientes vectores propios $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Como la matriz J es una matriz definida positiva la solución del sistema de ecuaciones se determina por (4.8), por tanto

$$\begin{aligned} v(t) = {} & A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) + B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{6}t) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{14}t) \\ & + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{14}t), \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde A_1, A_2, B_1 y B_2 se obtienen de las condiciones iniciales. Al sustituir la primera condición inicial en (4.9) se obtiene que

$$A_1 = \frac{d_1 + d_2}{2}, \quad A_2 = \frac{d_1 - d_2}{2}.$$

Derivando (4.9) se tiene

$$\begin{aligned} v'(t) = {} & A_1\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{6}t) + B_1\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{14}t) \\ & + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{14}t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

De la segunda condición inicial y de (4.10) se obtiene que

$$B_1 = \frac{f_1 + f_2}{2\sqrt{6}}, \quad B_2 = \frac{f_1 - f_2}{2\sqrt{14}}.$$

La matriz J del Ejemplo 4.4 se construyó a partir de un sistema mecánico cuyas características están dadas por masas $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, constantes de elasticidad de los resortes $k_1 = 6\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = 4\,\mathrm{N/m}$, $k_3 = 6\,\mathrm{N/m}$, y longitudes en equilibrio $l_1 = l_2 = l_3 = 1\,\mathrm{m}$. En los siguientes dos ejemplos se hace uso de dos formas distintas que puede resolverse el sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 4.5. Dada la ecuación,

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} v(t), \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix},$$

con sus condiciones iniciales $v(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \dot{v}(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, puede ser reescrita como un sistema de ecuaciones diferenciales

$$v_1(t)'' = -\frac{1}{2}v_2(t), \tag{4.11}$$

$$v_2(t)'' = -\frac{1}{2}v_1(t), \tag{4.12}$$

con condiciones iniciales $v_1(0) = a_1$, $v_2(0) = a_2$, $v_1'(0) = b_1$,$v_2'(0) = b_2$.
De (4.11) y (4.12) se obtiene la siguiente ecuación diferencial homogénea de orden cuatro (véase [5, Secc. 2.2]):

$$v_1^{(4)} = \tfrac{1}{4}v_1(t),$$

cuya solución es:

$$v_1(t) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + C_3 \cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}t\right),$$

donde

$$C_1 = \tfrac{b_1}{2\sqrt{2}} - \tfrac{b_2}{2\sqrt{2}} + \tfrac{a_1}{4} - \tfrac{a_2}{4}, \quad C_2 = -\tfrac{b_1}{2\sqrt{2}} + \tfrac{b_2}{2\sqrt{2}} + \tfrac{a_1}{4} - \tfrac{a_2}{4}$$
$$C_3 = \tfrac{a_1+a_2}{2}, \quad C_4 = \tfrac{b_1+b_2}{\sqrt{2}}$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales.
De (4.11) se obtiene la solución $v_2(t)$ que es

$$v_2(t) = -C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} - C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + C_3 \cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}t\right).$$

Otra forma de resolver el sistema de ecuaciones de segundo orden es convirtiéndolo en un sistema de cuatro ecuaciones de orden uno (véase [5, Secc. 3.6]):

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{2}v_2, \\ u_2' &= -\frac{1}{2}v_1, \\ v_1' &= u_1, \\ v_2' &= u_2\,. \end{aligned}$$

Sean

$$X=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\v_1\\v_2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\a_1\\a_2\end{pmatrix}.$$

De esta manera el sistema se escribe de forma matricial como $X'=AX$. El polinomio característico de A es $p(\lambda)=\lambda^4-\frac{1}{4}$, sus valores propios son $\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3=\frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\lambda_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}i$, y los vectores propios son

$$c_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-1\\1\end{pmatrix},\quad c_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\\-1\\1\end{pmatrix},\quad c_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\quad c_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Se obtiene

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\sqrt{2}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\sqrt{2}&0\\-1&-1&0&2\\1&1&0&2\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

La solución está dada por

$$X(t)=P\begin{pmatrix}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}&0&0&0\\0&e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}&0&0\\0&0&\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)&-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\\0&0&\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)&\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\end{pmatrix}P^{-1}X_0,$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}v_1=&b_1\left(\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\right)+b_2\left(\frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\right)\\&+a_1\left(\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{4}\right)+a_2\left(\frac{-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{4}\right),\\v_2=&b_1\left(\frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\right)+b_2\left(\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\right)\\&+a_1\left(\frac{-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{4}\right)+a_2\left(\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{4}\right).\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo J ya no es una matriz de Jacobi, lo cual hace un poco más complicada su solución.

Ejemplo 4.6. Dada la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} v(t) = 0,$$

con las condiciones $v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se reescribe como sistema de ecuaciones diferenciales

$$v_1(t)'' = -v_1(t) + \frac{1}{2}v_2(t) \tag{4.13}$$

$$v_2(t)'' = -\frac{1}{2}v_1(t) - v_2(t). \tag{4.14}$$

con $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$,$v_2'(0) = 1$.
De ambas ecuaciones del sistema se obtiene la siguiente ecuación diferencial homogénea de orden cuatro

$$v_1^{(4)} + 2v_1'' + \tfrac{5}{4}v_1 = 0,$$

cuya solución es

$$v_1(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) + C_3 e^{-\alpha t}\cos(\beta t) + C_4 e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),$$

$$v_2(t) = C_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) - C_1 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) - C_4 e^{-\alpha t}\cos(\beta t) + C_3 e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),$$

donde,

$$\alpha = \frac{\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{-2+\sqrt{5}}}, \qquad C_1 = \frac{1}{2} - \frac{(2\sqrt{5}+5)\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{10},$$

$$C_2 = C_4 = \frac{1}{(10+4\sqrt{5})\sqrt{-2+\sqrt{5}}}, \quad C_3 = \frac{1}{2} + \frac{(2\sqrt{5}+5)\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{10}.$$

De manera similar al ejemplo anterior, se plantea este mismo ejercicio como un sistema de cuatro ecuaciones de orden uno

$$\begin{aligned} u_1' &= -v_1 + \frac{1}{2}v_2, \\ u_2' &= -\frac{1}{2}v_1 - v_2, \\ v_1' &= u_1, \\ v_2' &= u_2\,. \end{aligned}$$

Sean

$$X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + \frac{5}{4}$, los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}i}{2}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}i}{2},$$

y sus vectores propios son

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con los vectores propios se obtiene la matriz P

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} & -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} & \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} & -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solución está dada por

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & -e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) & 0 & 0 \\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) & e^{\alpha t}\cos(\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha t}\cos(\beta t) & -e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) & e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

donde, $\alpha = \frac{\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{2}$, $\beta = \frac{1}{2\sqrt{-2+\sqrt{5}}}$, así las soluciones de (4.13) y (4.14) son

$$\begin{aligned} v_1(t) = {} & \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta + \frac{1}{2}\right) e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\right) e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\beta + \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\right) e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t), \\ v_2(t) = {} & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\right) e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\beta - \frac{1}{2}\right) e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\right) e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\beta + \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t). \end{aligned}$$

De ambas maneras de resolución se llegó al mismo resultado.

Observación 4.7. El ejemplo 4.4 corresponde a un caso particular del modelo de un sistema mecánico, ya que la matriz involucrada es una matriz de Jacobi y definida positiva. En cambio, en el ejemplo 4.5 también considera una matriz de Jacobi, pero al no ser definida positiva no se asocia a un sistema mecánico. Mientras que en el ejemplo 4.6, ni si quiera cumple con las condiciones para ser una matriz de Jacobi.

4.3. Solución del problema inverso

En esta sección se partirá de una función escalón $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual se utilizará para ortonormalizar la base canónica del espacio de polinomios con el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$. Posteriormente esta base será de ayuda para obtener los elementos de una matriz de Jacobi. Es importante mencionar que para que esta matriz resultante esté asociada a un sistema de masas y resortes, es necesario contar con la positividad de ésta, para ello, considere la Proposición 3.12. Con las componenetes de la matriz, es posible obtener las características mecánicas del sistema, esto con base a la ecuación (4.5)

Definición 4.8. Se denota por $\mathcal{M}_n$ al conjunto de todas las funciones $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes propiedades

a) ρ es una función escalón no decreciente.

b) Están normalizada, es decir, que $\rho(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to -\infty$ y $\rho(\lambda) \to 1$ cuando $\lambda \to +\infty$.

c) Tiene exactamente n saltos, los cuales están dados en los valores λ_k, para valores $k = 1, 2, \ldots, n$, donde $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

Dada una función $\rho \in \mathcal{M}_n$, por el Teorema 3.26 se tiene que $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$ denota al espacio de polinomios de grado a lo más $n-1$, dotado con el producto interior definido en (3.48). Como se realizó en la Sección 3.3, a partir de de los polinomios $1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}$ se determina una base ortonormal en este espacio de polinomios. Con ayuda del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se tiene que una base ortogonal está determinada por

$$\hat{P}_0(\lambda) := 1, \quad \hat{P}_k := \lambda^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle \lambda^k, \hat{P}_j \rangle}{||\hat{P}_j||^2} \hat{P}_j, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Normalizando estos polinomios se obtiene una base ortonormal $\gamma = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$, donde

$$P_k(\lambda) = (-1)^k \langle \hat{P}_k, \hat{P}_k \rangle_\rho^{-\frac{1}{2}} \hat{P}_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.15}$$

Proposición 4.9. Sean $\rho \in \mathcal{M}_n$, M el operador de multiplicación por la variable independiente λ, es decir, $M : \mathbb{P}_{n-1}(\rho) \to \mathbb{P}_n(\rho)$, tal que $(MP)(\lambda) = \lambda P(\lambda)$ y γ la base ortonormal dada por (4.15). El operador M actuando sobre la base γ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$(MP)(\lambda) = \lambda P_k(\lambda) = a_{k,k-1} P_{k-1}(\lambda) + a_{k,k} P_k(\lambda) + a_{k,k+1} P_{k+1}(\lambda),$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-2$, y además

$$(MP_0)(\lambda) = \lambda P_0(\lambda) = a_{0,0}P_0(\lambda) + a_{0,1}P_1(\lambda),$$

donde los coeficientes $a_{k,i}$ están dados por

$$a_{k,i} = \langle \lambda P_k, P_i \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_k(\lambda)\overline{P_i(\lambda)}\, d\rho(\lambda),$$

y cumplen que $a_{k,i} = \overline{a_{i,k}}$. Además, $a_{k,i} = 0$ si $|k-i| > 1$.

Demostración. Como $grad(\lambda P_k(\lambda)) = k+1$, estos polinomios pertenecen al espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$ para $k \leq n-2$. Es por ello que el operador de multiplicación por la variable independiente es

$$(MP)(\lambda) = \lambda P_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i}P_i(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, \tag{4.16}$$

donde

$$a_{k,i} = \langle \lambda P_k, P_i \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_k(\lambda)\overline{P_i(\lambda)}\ d\rho(\lambda) = \langle \overline{\lambda P_i, P_k} \rangle_\rho = \overline{a}_{i,k}. \tag{4.17}$$

Los escalares $a_{k,i}$ tienen tal expresión debido al Teorema 1.63. A causa de que los polinomios $P_j(\lambda)$ son ortogonales con cualquier otro polinomio $R(\lambda)$ tal que $grad(R(\lambda)) < j$, se tiene que $a_{k,i} = 0$, si $i > k+1$ o $k > i+1$. Con ayuda de esto se puede reducir la ecuación (4.16) de la siguiente forma,

$$\lambda P_0(\lambda) = a_{0,0}P_0(\lambda) + a_{1,0}P_1(\lambda),$$

$$\lambda P_k(\lambda) = a_{k,k-1}P_{k-1}(\lambda) + a_{k,k}P_k(\lambda) + a_{k,k+1}P_{k+1}(\lambda),$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-2$. ■

Observación 4.10. El término $a_{n-1,n-1}$ no es posible expresarlo como producto escalar porque el polinomio $\lambda P_{n-1}(\lambda)$ no pertenece al espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$. Se define $a_{n-1,n-1}$ de la siguiente manera

$$a_{n-1,n-1} = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_{n-1}(\lambda)\overline{P_{n-1}(\lambda)}\ d\rho(\lambda). \tag{4.18}$$

Proposición 4.11. Sea $\rho \in \mathcal{M}_n$, y γ la base ortonormal de $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$, donde sus elementos están dados en (4.15). El operador de multiplicación M, tiene como representación matricial con respecto a la base ortonormal γ la matriz de Jacobi dada por:

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ & & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

donde $a_i > 0$ y $b_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mas aún, se satisface la relación de recurrencia

$$b_{k-1}P_{k-1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_k P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

donde $b_{-1} := 0$.

Demostración. De la Proposición 4.9 se tiene que el operador M actúa sobre la base γ de la forma dada en (4.16), y los coeficientes $a_{k,i}$ cumplen $a_{k,i} = 0$ siempre que $|k - i| > 1$, estos coeficientes están descritos explícitamente en (4.17). Esta propiedad implica que la matriz asociada al operador M en la base γ es tridiagonal. Además, los coeficientes $a_{k,i}$ son reales debido a que $a_{k,i} = \overline{a_{i,k}}$, por tanto la matriz es simétrica. Se definen los coeficientes de la siguiente manera $a_i := a_{i,i} = \langle \lambda P_{i-1}, P_{i-1} \rangle_\rho$, $b_j := \langle \lambda P_{j-1}, P_j \rangle_\rho$, y se considera $b_{-1} := 0$, esto para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. Por un lado

$$\langle \lambda P_i, P_i \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_i \overline{P_i}\, d\rho = ||\lambda P_i||^2 \int_{\mathbb{R}} \lambda d\rho = ||\lambda P_i||^2 \left[\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(\lambda_j) \right] > 0,$$

debido a que ρ satisface la propiedad (a) y (c) de la Definición 4.8. Y por otro lado, de la ecuación de recurrencias dada en la ecuación (3.4), que es

$$b_{k-1}P_{k-1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_k P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-2$, se tiene que $b_k \neq 0$, debido a que $grad(\lambda P_k) = k + 1$. Con esto se establece que la matriz del operador de multiplicación M en la base γ es una matriz de Jacobi J. ■

Proposición 4.12. Sean J la matriz de Jacobi en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que se obtuvo de la Proposición 4.11, ρ_J la función espectral asociada a J, $\rho \in \mathcal{M}_n$ y γ la base ortonormal dada en (4.15). Las funciones ρ y ρ_J inducen el mismo producto interior en $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\, d\rho_J(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \tag{4.19}$$

para todo par de polinomios $R(\lambda), S(\lambda) \in \mathbb{P}_{n-1}(\rho)$.

Demostración. En la Sección 3.3 se analizó a la función ρ_J, la cual es una función escalón no decreciente y que además, los saltos de esta función están dados en las raíces del polinomio

$$Q(\lambda) := \lambda P_{n-1}(\lambda) - a_n P_{n-1}(\lambda) - b_{n-1} P_{n-2}(\lambda),$$

que fue establecido en (3.9). Además, por el Teorema 3.26 los polinomios $P_k(\lambda)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho_J)$ y que a su vez por construcción de estos, forman una base ortonormal en $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$. Por tanto, las funciones $\rho_J(\lambda)$ y ρ generan en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$ el mismo producto escalar, así ,

$$\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho_J(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)\overline{S(\lambda)}\ d\rho(\lambda), \tag{4.20}$$

donde $grad(R(\lambda)), grad(S(\lambda)) \leq n - 1$. ■

Corolario 4.13. Bajo las hipótesis de la Proposición 4.12, los productos interiores inducidos por ρ y ρ_J coinciden en el espacio de polinomios $\mathbb{P}_{n-1}$. Es decir,

$$\langle R, S\rangle_\rho = \langle R, S\rangle_{\rho_J}, \quad \text{para todo } R(\lambda), S(\lambda) \in \mathbb{P}_{n-1}(\rho).$$

Proposición 4.14. Sea $\rho \in \mathcal{M}_n$. Si ρ_J es la función espectral asociada a la matriz de Jacobi que se obtuvo en la Proposición 4.11, entonces

$$\rho(\lambda) = \rho_J(\lambda), \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Si al polinomio $Q(\lambda)$ dado en (3.9) se multiplica por $\overline{P_j(\lambda)}$ y se integra con respecto a la medida $d\rho(\lambda)$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} Q(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_{n-1}(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}\, d\rho(\lambda) - a_{n-1}\langle P_{n-1}, P_j\rangle_\rho - b_{n-2}\langle P_{n-2}, P_j\rangle_\rho. \tag{4.21}$$

Nótese que si $j < n-2$, entonces la parte derecha de la ecuación (4.21) es cero. Ahora, si $j = n-2$, entonces, de (4.17) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda P_{n-1}(\lambda)\overline{P_{n-2}(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = b_{n-2}.$$

Y por la ortonormalidad de los polinomios se tiene

$$\langle P_{n-1}, P_{n-2}\rangle_\rho = 0, \quad \langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle_\rho = 1.$$

Con esto, la parte derecha de (4.21) nuevamente es cero. Por último, se analiza cuando $j = n-1$. De (4.17) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda P_{n-1}(\lambda)\overline{P_{n-1}(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = a_{n-1}.$$

Por la ortonormalidad de los polinomios se tiene que

$$\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle_\rho = 1, \quad \langle P_{n-2}, P_{n-1}\rangle_\rho = 0,$$

así que la parte derecha de (4.21) también se anula. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} Q(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = 0 \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

Dado que los polinomios $P_j(\lambda)$ forman una base en el espacio $\mathbb{P}_{n-1}(\rho)$, tal como se muestra en el Teorema 3.19, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}\, d\rho(\lambda) = 0,$$

donde $R(\lambda)$ es un polinomio definido en $\mathbb{P}_{n-1}$. En particular para $R(\lambda) = \prod_{j \neq j_0} \lambda - \lambda_j$, para $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, que son los puntos en donde ocurren los saltos de la función ρ. Así

$$Q(\lambda_{j_0}) \prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)\Delta_{j_0} = 0, \tag{4.22}$$

donde $\Delta_{j_0} = \Delta\rho(\lambda_{j_0})$, el cual es el valor del salto en el punto λ_{j_0}.
Debido a que $\prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)\Delta_{j_0} \neq 0$, se tiene que $Q(\lambda_{j_0})$. Esto implica que los valores λ_i son las raíces del polinomio Q, para $i = 1, \ldots, n$.
Con esto, se tiene que los saltos de la función ρ_J y ρ se dan en los mismos puntos.
Ahora, si en (4.20) se considera $R(\lambda) = S(\lambda) = \prod_{i \neq j_0} \lambda - \lambda_i$, entonces

$$\prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0}(J) = \prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0}.$$

De aquí $\Delta_{j_0}(J) = \Delta_{j_0}$, donde $\Delta_{j_0}(J)$ y Δ_{j_0} son los valores de los saltos de las funciones ρ_J y ρ en el punto λ_{j_0} respectivamente. Por lo tanto, se concluye que $\rho_J = \rho$. ■

Observación 4.15. A partir de una función espectral $\rho \in \mathcal{M}_n$, las Proposiciones 4.12 y 4.14 permiten reconstruir una matriz de Jacobi J de un sistema de masas y resortes. Conocer la función espectral ρ (véase la Definición 3.27) equivale a conocer el comportamiento del desplazamiento de las partículas en el sistema. Por lo tanto, la reconstrucción de la matriz de Jacobi a partir de dicha función se interpreta como la determinación de las características mecánicas del sistema.

Ahora, se mostrará cómo obtener explícitamente las características mecánicas del sistema. En la ecuación (4.5) se tiene que los coeficientes a_i y b_i de la matriz de Jacobi asociada a un sistema mecánico están determinados por las expresiones

$$a_i = \frac{1}{m_i}\left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i}\right) \qquad b_j = -\frac{k_{j+1}}{l_{j+1}\sqrt{m_j m_{j+1}}},$$

donde m_i representa el valor i-ésima masa, k_i la constante de elasticidad del i-ésimo resorte y l_i su longitud en estado de equilibrio. Se introduce la razón $r_i := \frac{k_i}{l_i}$, la cual influye en los procesos que se desarrollan en el sistema. A partir de estas relaciones, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, en donde se necesitan encontrar los valores $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{r_i\}_{i=1}^{n+1}$

$$m_i a_i = r_{i+1} + r_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sqrt{m_j m_{j+1}} b_j + r_{j+1} = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Este sistema cuenta con $2n-1$ ecuaciones con $2n+1$ incógnitas. Para resolver este sistema es necesario conocer al menos el valor de alguna masa y una razón para determinar de

manera única las incógnitas restantes.
Si se conoce a la matriz de Jacobi que modela el sistema mecánico, entonces el sistema de ecuaciones que tiene por incógnitas a las masas y las razones, permite reconstruir las características mecánicas del sistema, esto es, encontrar el valor de las masas y las propiedades de los resortes.
A continuación se muestra la reconstrucción de una matriz utilizando la teoría vista en esta sección y partiendo de una función escalón no decreciente.

Ejemplo 4.16. Sea

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 6, \\ \frac{1}{2}, & 6 < \lambda < 14, \\ 1, & 14 < \lambda, \end{cases}$$

una función espectral, cuya gráfica está dada en la Figura 4.3.

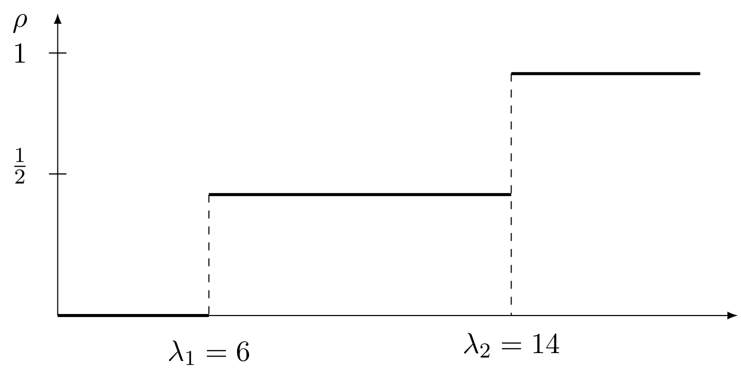

Figura 4.3: Gráfica de la función espectral ρ.

A partir de la función espectral se reconstruirá una matriz de Jacobi de un sistema de masas y resortes, para después obtener las características mecánicas.
Sea $\{R_0, R_1\}$ la base canónica para el espacio $\mathbb{P}_1$. Es decir, $R_0(\lambda) = 1$, $R_1(\lambda) = \lambda$. Por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se obtiene una base ortogonal:

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(\lambda) &= R_0(\lambda) = 1, \\ \hat{P}_1(\lambda) &= R_1(\lambda) - \frac{\langle R_1, \hat{P}_0 \rangle_\rho}{\langle \hat{P}_0, \hat{P}_0 \rangle_\rho} \hat{P}_0 \\ &= \lambda - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\rho}{\int_{\mathbb{R}} \, d\rho} \, (1) \\ &= \lambda - 10. \end{aligned}$$

Normalizando cada $\hat{P}_k$ para $k = 0, 1$:

$$P_0(\lambda) = \frac{\hat{P}_0(\lambda)}{||\hat{P}_0(\lambda)||} = \frac{\hat{P}_0(\lambda)}{\sqrt{\langle \hat{P}_0, \hat{P}_0 \rangle_\rho}} = 1,$$

$$P_1(\lambda) = -\frac{\hat{P}_1(\lambda)}{||\hat{P}_1(\lambda)||} = \frac{\hat{P}_1(\lambda)}{\sqrt{\langle \hat{P}_1, \hat{P}_1 \rangle_\rho}} = -\frac{\lambda - 10}{4}.$$

se obtiene la base ortonormal dada por $\left\{1, \ -\frac{\lambda - 10}{4}\right\}$. Utilizando estos polinomios se obtienen las entradas de la matriz de Jacobi

$$a_1 = \langle \lambda P_0, P_0 \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ d\rho = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \Delta\rho(\lambda_j) = 10,$$

$$b_1 = \langle \lambda P_0, P_1 \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda \left(-\frac{\lambda - 10}{4}\right) \ d\rho = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \left(-\frac{\lambda_j - 10}{4}\right) \Delta\rho(\lambda_j) = -4,$$

$$a_2 = \langle \lambda P_1, P_1 \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda \left(-\frac{\lambda - 10}{4}\right)^2 \ d\rho = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \left(-\frac{\lambda_j - 10}{4}\right)^2 \Delta\rho(\lambda_j) = 10.$$

La matriz de Jacobi del sistema de masas y resortes queda determinada por:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Si se conoce que $m_1 = 1$ y $r_1 = 6$, por medio del siguiente sistema se pueden obtener los valores restantes, que son m_2, r_2 y r_3

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= r_2 + r_1 \\ m_2 a_2 &= r_3 + r_2 \\ \sqrt{m_1 m_2} b_1 + r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema, se tiene que $m_2 = 1, r_2 = 4$ y $r_3 = 6$. La determinación de las características mecánicas del sistema fue posible en este ejemplo debido a que la matriz de Jacobi asociada a la función ρ, es una matriz definida positiva.

Ejemplo 4.17. Sea

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{-1}{\sqrt{2}} < \lambda < 0, \\ \frac{3}{4}, & 0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1, & \frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda, \end{cases}$$

una función espectral, cuya gráfica está dada en la Figura 4.4.

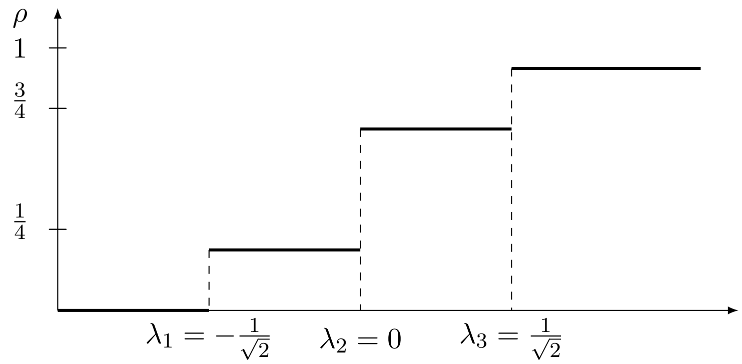

Figura 4.4: Gráfica de la función espectral ρ.

Por medio de la función espectral se reconstruirá una matriz de Jacobi. Sea el conjunto $\{R_0, R_1, R_2\}$ la base canónica para el espacio $\mathbb{P}_2$. Utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se obtiene una base ortogonal:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0(\lambda) &= R_0(\lambda) = 1, \\
\hat{P}_1(\lambda) &= R_1(\lambda) - \frac{\langle R_1, \hat{P}_0\rangle_\rho}{\langle \hat{P}_0, \hat{P}_0\rangle_\rho}\hat{P}_0 = \lambda \\
&= \lambda - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda \; d\rho}{\int_{\mathbb{R}} \; d\rho}\,(1) \\
&= \lambda, \\
\hat{P}_2(\lambda) &= R_2(\lambda) - \frac{\langle R_2, \hat{P}_0\rangle_\rho}{\langle \hat{P}_0, \hat{P}_0\rangle_\rho}\hat{P}_0 - \frac{\langle R_2, \hat{P}_1\rangle_\rho}{\langle \hat{P}_1, \hat{P}_1\rangle_\rho}\hat{P}_1 \\
&= \lambda^2 - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \; d\rho}{\int_{\mathbb{R}} \; d\rho}\,(1) - \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\lambda) \; d\rho}{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \; d\rho}(\lambda) \\
&= \lambda^2 - \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Normalizando cada $\hat{P}_k$ para $k = 0, 1, 2$:

$$P_0(\lambda) = \frac{\hat{P}_0(\lambda)}{||\hat{P}_0(\lambda)||} = \frac{\hat{P}_0(\lambda)}{\sqrt{\langle \hat{P}_0, \hat{P}_0\rangle_\rho}} = 1,$$

$$P_1(\lambda) = -\frac{\hat{P}_1(\lambda)}{||\hat{P}_1(\lambda)||} = \frac{\hat{P}_1(\lambda)}{\sqrt{\langle \hat{P}_1, \hat{P}_1\rangle_\rho}} = -2\lambda,$$

$$P_2(\lambda) = \frac{\hat{P}_2(\lambda)}{||\hat{P}_2(\lambda)||} = \frac{\hat{P}_2(\lambda)}{\sqrt{\langle \hat{P}_2, \hat{P}_2\rangle_\rho}} = 4\lambda^2 - 1\,,$$

se obtiene la base ortonormal dada por $\{1,\ 2\lambda,\ 4\lambda^2 - 1\}$. Con ayuda de estos polinomios se encuentran las entradas de la matriz de Jacobi:

$$a_1 = \langle \lambda P_0, P_0\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \Delta\rho(\lambda_j) = 0,$$

$$b_1 = \langle \lambda P_0, P_1\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} -2\lambda^2\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} -2\lambda_j^2 \Delta\rho(\lambda_j) = -\frac{1}{2},$$

$$a_{1,3} = \langle \lambda P_0, P_2\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} 4\lambda^3 - \lambda\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} (4\lambda_j^3 - \lambda_j)\Delta\rho(\lambda_j) = 0,$$

$$a_2 = \langle \lambda P_1, P_1\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} 4\lambda^3\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} 4\lambda_j^3 \Delta\rho(\lambda_j) = 0.$$

$$a_{3,1} = \langle \lambda P_2, P_0\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} 4\lambda^3 - \lambda\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} (4\lambda_j^3 - \lambda_j)\Delta\rho(\lambda_j) = 0,$$

$$b_2 = \langle \lambda P_1, P_2\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} -2\lambda^2(4\lambda^2 - 1)\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} (-2\lambda_j^2(4\lambda_j^2 - 1))\Delta\rho(\lambda_j) = -\frac{1}{2},$$

$$a_3 = \int_{\mathbb{R}} \lambda P_2 P_2\ d\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda(4\lambda^2 - 1)^2\ d\rho = \sum_{j=1}^{3} (\lambda_j(4\lambda_j^2 - 1)^2)\Delta\rho(\lambda_j) = 0.$$

De esta manera la matriz de Jacobi buscada queda determinada por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo de igual manera se reconstruyó una matriz de Jacobi, sin embargo esta matriz no está asociada a un modelo mecánico de masas y resortes, debido a que no es una matriz definida positiva.

Conclusiones

En este trabajo se ha logrado cumplir con los objetivos planteados en la introducción, abordando de manera rigurosa el estudio de la teoría espectral en espacios de dimensión finita y su aplicación al modelo del sistema de masas y resortes. A través del análisis y desarrollo de los cuatro capítulos, se han presentado las definiciones, conceptos fundamentales, resultados teóricos con sus respectivas demostraciones, y ejemplos que permiten una comprensión profunda de la teoría.

En el primer capítulo se estableció una base sólida mediante la revisión de conceptos fundamentales. Estos conceptos son esenciales para el análisis espectral, donde en espacios de dimensión finita, por ejemplo, la representación matricial única de los operadores permite interpretar el análisis espectral de matrices como equivalente al de operadores.

Posteriormente, en el segundo capítulo, se profundizó en el estudio de los operadores lineales, definiendo sus propiedades y presentando teoremas clave junto con sus demostraciones. Este enfoque detallado permitió una preparación exhaustiva para la comprensión del teorema espectral, el cual fue presentado al final de este capítulo. Los dos primeros capítulos permitieron reafirmar conocimientos de distintos cursos que se tomaron durante los estudios de la licenciatura, además de conocer y profundizar más detalles de estas teorías.

El tercer capítulo se centró en el análisis de las matrices de Jacobi, destacando sus propiedades y sus datos espectrales. Un resultado relevante en este capítulo fue que, al considerar una matriz de Jacobi, todos sus valores propios son distintos. Analizar las matrices de Jacobi no solo sirvió para desarrollar herramientas teóricas, sino también para presentar resultados que complementan la comprensión de estas matrices y proporcionan ejemplos prácticos.

En el cuarto capítulo se integró la teoría desarrollada en los capítulos anteriores para abordar el problema de un sistema mecánico de partículas en interacción. Este modelo demostró cómo la teoría espectral permite resolver sistemas de ecuaciones de segundo orden mediante matrices de Jacobi, vinculando sus propiedades espectrales con las características dinámicas del sistema. Además, se exploró el problema inverso asociado, reconstruyendo el sistema de masas y resortes a partir de la función espectral y las propiedades de la matriz de Jacobi.

En particular, este trabajo ha demostrado cómo las matrices de Jacobi desempeñan un papel crucial en la conexión entre propiedades espectrales y características dinámicas de sistemas mecánicos. Además, se ha presentado un enfoque claro y accesible para resolver tanto el problema directo como el inverso, ofreciendo un ejemplo concreto de reconstrucción basado en una función espectral. Cabe mencionar que esta teoría no se estudia comúnmente en los cursos de licenciaturas y el fin es conocer resultados clásicos de ésta para abordar futuros problemas complejos bajo una teoría más general.

Finalmente, este trabajo no solo aporta una visión accesible y completa de la teoría espectral en espacios de dimensión finita, sino que también establece una base sólida para futuros estudios en la teoría de operadores en espacios de dimensión infinita, abriendo nuevas posibilidades para aplicaciones más complejas en matemáticas y física.

Bibliografía

[1] *N. I. Akhiezer* and *I. M. Glazman*, Theory of linear operators in Hilbert space. Transl. from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications (1993).

[2] *H. Anton* and *C. Rorres*, Elementary linear algebra with supplemental applications, international student version. 11th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons (2014).

[3] *T. M. Apostol*, Análisis matemático. 2nd edition. Translation of the original published by Addison-Wesley Plublishing Company. Reverté (2020).

[4] *M. S. Birman* and *M. Z. Solomjak*, Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. Vol. 5. Springer Science and Business Media (2012).

[5] *M. Braun*, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Translation of the original published by Springer-Verlag New York. Iberoamericana (1991).

[6] *R. del Rio* and *L. O. Silva*, Spectral analysis for linear semi-infinite mass-spring systems. Math. Nachr. 288, No. 11–12, 1241–1253 (2015).

[7] *S. N. Elaydi*, An introduction to difference equations. New York, NY: Springer (1996).

[8] *S. H. Friedberg*, *A. J. Insel*, and *L. E. Spence*, Álgebra lineal. Publicaciones Cultural (1982).

[9] *J. V. Grabiner*, Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. Am. Math. Mon. 90, 185–194 (1983).

[10] *P. R. Halmos*, Finite-dimensional vector spaces. 2nd edition. Reprint of the 1958 original published by D. van Nostrand Company. Mineola, NY: Dover Publications (2017).

[11] *A. Kirsch*, An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Vol. 120. New York: Springer (2011).

[12] *V. A. Marchenko* and *T. V. Misyura*, Señalamientos Metodológicos y Didácticos al Tema: Problemas Inversos de la Teoría Espectral de Operadores de Dimensión Finita. Monografías IIMAS-UNAM 12, no. 28 (2004).

[13] *V. A. Marchenko* and *V. Slavin*, Inverse problems in the theory of small oscillations. Vol. 247. Translated from the Russian. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2018).

[14] *G. Teschl*, Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Providence, RI: American Mathematical Society (2000).