UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Optimización de decisiones financieras bajo Incertidumbre: aplicación de la teoría de utilidad de von Neumann-Morgenstern

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Josué Rafael Bautista Zacarías

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán

CODIRECTORA DE TESIS:

Dra. Luz del Carmen Álvarez Marín

H. CD. DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.

27 de Junio de 2025

Dedicado con cariño a:

Mi mamá L.M.A. Adriana Zacarías Santiago por siempre tenerme paciencia, darme todo lo necesario para mi desarrollo académico y personal, alentarme en mi vida, darme su confianza, comprensión, amor y ser fuerte para mí en momentos difíciles.

Mi papá Gil (Hermenegildo Zacarías Mendoza Zurita), quien me enseñó a trabajar duro y siempre aprender lo mejor posible, aunque no pudo estar físicamente en este logro, sé que lo podrá leer y ver dónde él se encuentre, y en algún momento le platicaré todo lo que hice.

Mi mamá Guille (Guillermina Santiago Céliz) por siempre cuidarme y aconsejarme desde que nací. Así como platicar de canciones, música, del campo, las siembras y cómo le costó estudiar, luego trabajar para conseguir sus metas junto con papá Gil para seguir apoyándome y brindándome un hogar e inspiración para estudiar y permitirme crecer bajo sus enseñanzas.

Mi mamá José (Josefina López Cruz) quien me ha cuidado desde pequeño cargándome en su rebozo, que siempre me ha dado mis comidas favoritas, su consuelo y aliento para salir adelante, siendo ella un ejemplo para mí.

Mi hermana Karol Paola que me ha brindado compañía en mi vida.

Mis abuelos:Sofía, Marcelino, Feliciano, Pedro Mendoza Hernández y Juana Zurita, quienes, en palabras de mi papá Gil, les quisieron dar la máxima oportunidad de estudios a sus hijos y es lo que él inculcó con mi mamá y conmigo.

Al campo, las casas, la tierra, las parcelas, los parajes, las cosechas y los animales de la Mixteca que han permitido la vida de mi familia hasta llegar a proveerme vida.

Agradecimientos

A mi director de tesis, el Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán, por sus comentarios, acertadas correcciones a toda hora, orientación en el desarrollo de esta tesis y sus consejos en la universidad.

A mi codirectora de tesis, la Dra. Luz del Carmen Álvarez Marín, quien siempre estuvo para darme un consejo y ánimos por no dejar la carrera, así como sus valiosas sugerencias y una plática en momentos difíciles durante los cinco años de carrera.

A mis sinodales la Dra.Yannet Paz Calderón, al Dr. Adolfo Maceda Méndez y al Dr.José Margarito Hernández Morales por sus muy acertadas observaciones, correcciones y comentarios que me han servido enormemente en este escrito para mejorar mis presentaciones.

A Rita García Fernández por su apoyo en los procesos durante la elaboración y trámites de esta tesis, además de una buena plática fuera de las matemáticas al salir del IFM.

A la M.C.Alma Lidia Piceno Rivera, el Dr.Raúl Juárez Amaro y la M.C. Ana Delia Olvera Cervantes por ofrecerme consejos más allá del ámbito educativo, historias de motocicletas y como era la UTM antes.

A el Dr. Octavio Alberto Agustín Aquino y el Dr. Adolfo Maceda Méndez por enseñarme muchos hábitos que un buen matemático debe tener.

Al club Guerreros Mixtecos donde siempre me divertí practicando basquetbol después de días difíciles de estudio, no solo de universidad sino desde primaria y donde conocí muy buenos amigos que me dieron ánimos para acabar a tiempo la licenciatura, además del entrenador L.E.D. Héctor Árias Solano que me ha apoyado al pertenecer al club que en los últimos años de carrera no pude asistir con regularidad pero siempre fui bienvenido a un entrenamiento en la Unidad deportiva del Carmen.

Al Dr. Alan Martín Hernández Solano y el Dr. José Jorge Mora Rivera por recibirme en mis Estancias profesionales, por su amistad y consejos al platicarme su trayectoria académica, lo que me ayudó a no dejar la carrera de matemáticas.

A Luis Ángel Villalba Othón 'El Chino' que siempre platicábamos amenamente en la cafetería grande de la UTM por apoyarme y divertirnos en desayunos y comidas junto con los integrantes de la cafetería grande por ofrecerme más que alimentos, unas pláticas para despejarse de las clases.
Al sitio de taxis Nuevo Amanecer de Santiago Juxtlahuaca donde mi papá Gil pasaba buenos momentos con sus compañeros y clientes. En especial a sus compañeros de sitio que han apoyado a mi familia en momentos difíciles.
A los hermanos de mi mamá Guille por siempre apoyarme con algún consejo y apoyar a ella en momentos difíciles.
A los campesinos, ganaderos y comerciantes de la Mixteca que han ayudado a mí y a mi familia.

Prefacio

Naa kavi tu'un savi.
(Leamos en lengua mixteca)
Región mixteca

El análisis de las decisiones humanas ha sido durante mucho tiempo un puente entre la economía y la matemática. En particular, la teoría de la utilidad esperada ha ofrecido una base formal para comprender cómo los individuos toman decisiones cuando enfrentan riesgo o incertidumbre. Este marco teórico, desarrollado inicialmente por John von Neumann y Oskar Morgenstern a mediados del siglo XX, proporcionó los primeros fundamentos axiomáticos para representar matemáticamente las preferencias de los agentes económicos ante apuestas.

El interés por este tipo de modelos surge de una necesidad práctica: poder predecir, comparar y justificar decisiones racionales. En contextos como el consumo, la inversión, los seguros o cualquier elección bajo incertidumbre, contar con una función de utilidad permite cuantificar las preferencias individuales y hacer comparaciones entre distintas alternativas de manera sistemática.

Esta tesis comienza desarrollando la teoría bajo condiciones de certeza, además de mostrar términos que pudieran ser nuevos para un matemático, pero son usuales en teoría microeconómica, luego presentamos los axiomas básicos que garantizan la existencia de una función de utilidad, la cual permite representar las preferencias del consumidor cuando no hay riesgo. A partir de ello, se introduce el contexto de incertidumbre, donde se trabaja con loterías simples (o juegos de azar), y se presentan los axiomas adicionales que justifican la existencia de una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern.

También se examinan las condiciones bajo las cuales dicha función es única, salvo transformaciones positivas afines; es decir, cualquier otra función que represente las mismas preferencias debe estar relacionada con la original mediante una transformación del tipo $u'(x) = au(x) + b$, con $a > 0$.

En la ultima parte de la tesis se presentan aplicaciones empíricas usando datos públicos de productos financieros ofrecidos por aseguradoras, mostrando cómo estas ideas teóricas permiten entender mejor las decisiones del consumidor ante diferentes niveles de riesgo. Finalmente, se analiza el papel de la aversión al riesgo y se aplican herramientas como la medida de Arrow-Pratt y el equivalente cierto para ilustrar cómo las preferencias reveladas pueden ayudar a evaluar distintas alternativas desde una perspectiva cuantitativa.

La unión entre teoría económica y formalización matemática permite no solo describir comportamientos, sino también diseñar decisiones más informadas y racionales, aunque no llegamos a esto buscamos exponer de manera clara teoremas, dando en ocasiones solo su enunciado con el fin de llegar a una aplicación concreta. Este trabajo pretende ser una contribución sencilla y didáctica al entendimiento de esta relación.

Índice general

Prefacio V

Glosario de términos 1

Introducción 3

1. Conceptos preliminares 5
- 1.1. Notaciones matemáticas 5
- 1.2. Nociones económicas 9
- 1.3. Conceptos microeconómicos básicos 10
- 1.4. Canastas de consumo y relación de preferencias. Propiedades. . . 12
- 1.5. Relaciones de preferencia y funciones de utilidad 13
  - 1.5.1. La función de utilidad 20
- 1.6. Diferenciabilidad y la Tasa Marginal de Sustitución 22

2. Teoría del consumidor 25
- 2.1. El problema del consumidor 25
- 2.2. Análisis de la curva de demanda y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 30
- 2.3. Solución al problema de maximización 31
- 2.4. Propiedades de la función de demanda $x(\mathbf{p}, y)$ 36

3. La función de utilidad von Neumann-Morgenstern 39
- 3.1. Incertidumbre 39
- 3.2. Preferencias 41
- 3.3. Utilidad von Neumann-Morgenstern 45
  - 3.3.1. Relación entre la función de utilidad VNM y la utilidad bajo certeza 52
- 3.4. Aversión al riesgo 54

4. Algunas aplicaciones de la utilidad de von Neumann-Morgenster 63
4.1. Evaluación de productos financieros bajo incertidumbre: una aplicación de utilidad esperada con datos de la CONDUSEF 63
4.1.1. Selección del producto financiero 64
4.1.2. Obtención de datos 64
4.2. Modelo de incertidumbre 65
4.3. Aplicación de la Medida de Aversión Absoluta al Riesgo de Arrow-Pratt 70
4.3.1. Medida de Aversión Absoluta al Riesgo 70
4.3.2. Cálculo del Equivalente Cierto y Prima de Riesgo 71

Conclusiones 73

A. Continuidad, desigualdades y teoremas de optimización 75

Bibliografía 81

Índice de figuras

1.1. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1 y 1.2. . . . 15
1.2. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1 1.2 y 1.3. . 16
1.3. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4. 16
1.4. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4. 17
1.5. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 pero tiene regiones no-convexas. 18
1.6. Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3, 1.5 y 1.6 o 1.7. 19

2.1. Mapa de indiferencia para las preferencias que satisfacen 2.1 . . . 26
2.2. Conjunto presupuestario $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$. 27
2.3. Solución al problema de maximización de la utilidad del consumidor. 28
2.4. El problema del consumidor y el comportamiento de la demanda del consumidor. 29
2.5. Demanda del consumidor cuando hay preferencias representadas por una función de utilidad CES. 37

3.1. Aversión al riesgo y estricta concavidad de una función de utilidad VNM 56

Glosario de términos

- $\mathbb{R}^n_+$: Es el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ con todos sus componentes no negativos. Es decir, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

- $\mathbb{R}^n_{++}$: Es el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ con todos sus componentes estrictamente positivos, es decir, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

- $\gg$: Se utiliza para representar una **relación de preferencia fuerte** o una **desigualdad estricta en vectores**. En el contexto de preferencias estrictamente monótonas, si $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, significa que $\mathbf{x}$ es estrictamente preferido a $\mathbf{y}$, es decir, cada componente de $\mathbf{x}$ es estrictamente mayor que la correspondiente en $\mathbf{y}$:
$$\mathbf{x} \gg \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i > y_i \quad \forall i.$$
En términos de función de utilidad, una preferencia es estrictamente monótona si $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, implica que:
$$u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}).$$
Esto significa que una mayor cantidad de cada bien siempre genera una mayor utilidad.

- D: Conjunto dominio del problema de optimización. Es el conjunto de todos los pares admisibles $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n \times A$ para los cuales la función objetivo $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ está definida. El conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ representa el conjunto de parámetros del problema. En el contexto del Teorema del máximo, se asume que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua sobre D, y que las restricciones están definidas de manera que generan conjuntos factibles $S(\mathbf{a})$ no vacíos y compactos. Por tanto, D contiene la información sobre las decisiones y parámetros para los cuales el problema tiene sentido matemático.

Introducción

La utilidad de von Neumann-Morgenstern es fundamental en la teoría de decisiones, las finanzas y la economía, donde se utiliza para modelar la toma de decisiones bajo incertidumbre, especialmente en situaciones de riesgo en las que los individuos buscan maximizar su utilidad esperada en lugar de solo su ganancia o retorno esperado.
La teoría de elección bajo incertidumbre se aplica en diferentes contextos económicos. En el área de las matemáticas, la teoría de optimización y teoría de la utilidad esperada se utilizan para resolver problemas complejos en estos campos.

La utilidad de von Neumann-Morgenstern es una forma de representar las preferencias de un agente económico frente a situaciones de riesgo, es decir, cuando los resultados de una decisión no son seguros y están sujetos a probabilidades. Este concepto es parte de la teoría de utilidad esperada desarrollada por John von Neumann y Oskar Morgenstern, la cuál proporciona una base matemática para la toma de decisiones bajo incertidumbre.[11]

La importancia de este estudio radica en su capacidad para explicar el comportamiento financiero mediante un enfoque cuantitativo y riguroso, esto ha sido fundamental no solo en el desarrollo de la teoría de carteras y la administración de riesgos, sino también en la comprensión de fenómenos como la aversión al riesgo y las preferencias de inversión.

A pesar de su relevancia, el uso de modelos de utilidad esperada en el sector de inversiones aún presenta un amplio margen para investigaciones y aplicaciones prácticas. Profundizar en estos modelos y adaptarlos a los contextos actuales de volatilidad financiera y alta competencia representa un avance significativo tanto para el análisis económico como para la matemática aplicada.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

Kanu ko ini.
(Que muy grande sea su corazón)
Alusión mixteca

En este capítulo daremos los conceptos necesarios para la lectura de la teoría económica y la forma de escribir demostraciones de teoremas matemáticos, los cuales son fundamentales en las estructuras de la teoría moderna del consumidor.

1.1. Notaciones matemáticas

Presentaremos algunas definiciones concernientes para el capítulo dos y cuatro extraídas de [5], con algunas adaptaciones para usarlas en este texto.

Definición 1.1 (Conjunto convexo)**.** *Sea* $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$*. Decimos que* Θ *es un* conjunto convexo *si para cualesquiera puntos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Theta$ *y para todo* $\alpha \in [0, 1]$*, se cumple que la combinación convexa:*

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}$$

también pertenece a Θ*. Es decir,*

$$\alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v} \in \Theta.$$

Ahora expondremos las definiciones para funciones con base en [3, Cap. 3, p. 98] para su uso en los primeros teoremas del capítulo uno.

Definición 1.2 (Función estrictamente creciente)**.** *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función definida en un subconjunto* D *de los reales. Decimos que* f *es* ***estrictamente***

creciente *si para cualesquiera dos puntos* $x_1, x_2 \in D$*, con* $x_1 < x_2$*, se cumple que*

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Es decir, la función aumenta estrictamente su valor a medida que la variable independiente crece. Esta propiedad garantiza que no hay intervalos constantes ni decrecientes: todo incremento en la variable implica un incremento en la imagen.

Definición 1.3 (Función convexa)**.** *Sea* $f : S \to \mathbb{R}$*, donde* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo no vacío. La función* f *se dice* ***convexa*** *en* S *si para cualesquiera* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ *y para todo* $\lambda \in [0, 1]$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Definición 1.4 (Función estrictamente convexa)**.** *Sea* $f : S \to \mathbb{R}$*, donde* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo no vacío. La función* f *se dice* ***estrictamente convexa*** *en* S *si para todo par distinto* $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in S$ *y para todo* $\lambda \in (0, 1)$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) < \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Definición 1.5 (Función cóncava)**.** *Sea* $f : S \to \mathbb{R}$*, donde* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo no vacío. La función* f *se dice* ***cóncava*** *en* S *si* $-f$ *es convexa en* S*; es decir, si para todo* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ *y* $\lambda \in [0, 1]$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Definición 1.6 (Función estrictamente cóncava)**.** *Sea* $f : S \to \mathbb{R}$*, donde* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo no vacío. La función* f *se dice* ***estrictamente cóncava*** *en* S *si* $-f$ *es estrictamente convexa en* S*; es decir, si para todo par distinto* $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in S$ *y* $\lambda \in (0, 1)$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) > \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Definición 1.7 (Función cuasiconvexa)**.** *Sea* $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función definida en un conjunto convexo* S*. Se dice que* f *es* ***cuasiconvexa*** *si para cualesquiera* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ *y todo* $\lambda \in [0, 1]$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \leq \text{máx}\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}.$$

Definición 1.8 (Función estrictamente cuasiconvexa)**.** *Sea* $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función definida en un conjunto convexo* S*. Se dice que* f *es* ***estrictamente cuasiconvexa*** *si para cualesquiera* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ *con* $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$*, y todo* $\lambda \in (0, 1)$*, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) < \text{máx}\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}.$$

Definición 1.9 (Función cuasicóncava). *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto convexo S. Se dice que f es **cuasicóncava** si para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ y todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \text{mín}\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}.$$

Definición 1.10 (Función estrictamente cuasicóncava). *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto convexo S. Se dice que f es **estrictamente cuasicóncava** si para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, y todo $\lambda \in (0,1)$, se cumple:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) > \text{mín}\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}.$$

Cabe observar que aunque el término "cuasicóncava" pudiera sugerir que la función debe definirse sobre un conjunto cóncavo, en realidad se requiere que el dominio sea un **conjunto convexo**. Esto se debe a que la propiedad de cuasiconcavidad involucra combinaciones convexas de dos puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. Para que dichas combinaciones intermedias del tipo $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, con $\lambda \in [0,1]$, también pertenezcan al dominio, es necesario que dicho dominio sea convexo.

En otras palabras, la cuasiconcavidad de una función es una propiedad sobre el comportamiento de sus valores en los segmentos de línea entre dos puntos dados, lo cual sólo puede evaluarse si el conjunto sobre el cual está definida incluye esos segmentos. Por esta razón, tanto en análisis matemático como en teoría microeconómica, las funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas se definen sobre conjuntos convexos.

Definición 1.11 (Desigualdad componente a componente). *Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que:*

1. $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ *si y solo si $x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$,*

2. $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ *si y solo si $x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y además $x_j > y_j$ para al menos un j,*

3. $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ *si y solo si $x_i > y_i$ estrictamente para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Estas desigualdades se interpretan componente a componente y son ampliamente utilizadas en economía para expresar relaciones de dominancia entre vectores de consumo. Note que para inciso 3 hay una relación entre las notaciones matemáticas y económicas que es un punto a tratar en la metodología y propósito de este texto.
Observación: *La diferencia entre los incisos 2 y 3 radica en el grado de desigualdad:*

- *En $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, se permite que algunas componentes sean iguales, siempre que al menos una sea estrictamente mayor.*

- *En* $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, *todas las componentes de* $\mathbf{x}$ *deben ser estrictamente mayores que las correspondientes en* $\mathbf{y}$, *sin excepciones.*

Esta distinción es importante en teoría de preferencias, pues $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ *implica una dominancia clara, mientras que* $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ *representa una preferencia parcial.*

A continuación pondremos definiciones importantes para su uso en este texto. Han sido extraídas de [5, p. 65]

Definición 1.12 (Gradiente). *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. El gradiente de* f *en el punto* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *denotado por* $\nabla f(\mathbf{x})$, *es el vector columna que contiene las derivadas parciales de* f *con respecto a cada variable. Esto es,*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Este vector representa la dirección de máxima tasa de cambio de la función f *en* $\mathbf{x}$.

Definición 1.13 (Matriz Hessiana). *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función dos veces diferenciable. La matriz Hessiana de* f *en el punto* $\mathbf{x}$, *denotada por* $H(\mathbf{x})$, *es la matriz cuadrada de* $n \times n$ *que contiene las segundas derivadas parciales de* f, *de la siguiente manera:*

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es simétrica si las segundas derivadas parciales mixtas(es decir, que conmutan el orden de las derivadas) son continuas en un entorno(vecindad) de $\mathbf{x}$[1] *esto ultimo por el teorema A.4.*

Definición 1.14 (Lagrangiano). *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función objetivo y* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un conjunto de funciones de restricción de igualdad. El* ***Lagrangiano*** *asociado al problema de optimización con restricciones de igualdad se define como*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top h(\mathbf{x}),$$

[1] Con base el teorema de Schwarz (o Young)A.4, la igualdad de las derivadas mixtas está garantizada bajo continuidad.

donde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ *es el vector de multiplicadores de Lagrange. La condición de Lagrange para que* $\mathbf{x}^*$ *sea un minimizador local consiste en que el gradiente de* $\mathcal{L}$ *con respecto a todas sus variables sea nulo, es decir,*

$$\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}^\top.$$

1.2. Nociones económicas

Definición 1.15 (Numéraire)**.** *En teoría económica, el* ***numéraire*** *[14] es una unidad de cuenta normalizada utilizada para expresar los valores relativos de bienes y servicios.*

En otras palabras el *numéraire* es una unidad de valor sin unidades de dinero, sino con unidades de valor que permitan una comparación estática, lo cual permite un análisis gráfico claro en planos precio-calidad.

Definición 1.16 (Economía de mercado)**.** *Una* ***economía de mercado*** *o economía de libre mercado es un sistema económico en el cual las decisiones sobre producción, consumo y asignación de recursos se coordinan a través de los precios que surgen en mercados libres. En este tipo de economía, los individuos y las empresas interactúan voluntariamente en los mercados para intercambiar bienes y servicios, guiados por incentivos de beneficio y los precios relativos.*

El mecanismo de precios actúa como incentivo para productores y consumidores, reflejando la escasez y las preferencias. El papel del gobierno se limita generalmente a establecer y hacer cumplir las reglas del intercambio, proteger los derechos de propiedad y corregir ciertas fallas de mercado cuando estas surgen.

Este sistema contrasta con las economías planificadas, donde la asignación de recursos se determina mediante decisiones centralizadas. Con base en [17] planteamos la anterior definición centrándonos en la idea de economía como el querer más de lo que se tiene así como en la tensión entre el interés personal y el interés público, enfocándonos en preferencias para el interés de este texto.

También con base en [17] asumiremos el concepto de microeconomía siguiente.

Definición 1.17 (Microeconomía)**.** *La microeconomía es el estudio de las elecciones que realizan los individuos y las empresas, la manera en que dichas elecciones interactúan en los mercados y la influencia que los gobiernos ejercen sobre ellas. Este campo de la economía se centra en el análisis de cómo los agentes económicos responden a los incentivos, cómo se determinan los precios en distintos tipos de mercado, y cómo se asignan los recursos escasos entre diversas actividades productivas.*

Asimismo, la microeconomía examina los efectos de las políticas públicas como impuestos, subsidios o regulaciones. Tiene que ver sobre las decisiones individuales y el bienestar social. Su propósito es dar un marco analítico riguroso para entender el comportamiento económico a nivel individual y la estructura de los mercados.

Definición 1.18 (Paquete de consumo)**.** *Un **paquete de consumo** (también llamado canasta de bienes) es una combinación específica de cantidades de bienes que un consumidor puede elegir. Matemáticamente, se representa como un vector* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$*, donde cada componente* $x_i \geq 0$ *indica la cantidad del bien* i *que compone dicho paquete.*

*Desde el punto de vista **económico**, este vector representa una elección factible del consumidor, y es el objeto sobre el cual se definen sus preferencias y niveles de utilidad. Comparando distintos paquetes, el consumidor manifiesta sus preferencias relativas entre alternativas de consumo.*

*Desde el punto de vista **matemático**, el paquete de consumo es un elemento del conjunto de consumo* $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$*.*

1.3. Conceptos microeconómicos básicos

Las preferencias del consumidor se caracterizan mediante un enfoque axiomático. Este método de modelación establece el menor número posible de supuestos significativos(axiomas) y distintos para describir la estructura y propiedades de las preferencias. A partir de estos axiomas, el resto de la teoría se construye lógicamente, y se estiman predicciones del comportamiento mediante deducción.

Estos axiomas de elección del consumidor buscan modelar formalmente los aspectos fundamentales del comportamiento del consumidor. En conjunto, formalizan la idea de que el consumidor es capaz de elegir y que sus decisiones son consistentes de una manera particular.

El uso de una relación binaria para caracterizar las preferencias es significativo y merece un breve análisis ya que la teoría depende relativamente poco del consumidor que describe. Solo exigimos que los consumidores sean capaces de realizar comparaciones binarias, es decir, que al examinar dos opciones de consumo puedan decidir cuál de las dos prefieren. Los axiomas que se presentan a continuación establecen los criterios básicos que dichas comparaciones binarias deben cumplir.

En el enfoque basado en preferencias, los objetivos del agente decisor se resumen en una relación de preferencia, denotada por $\succsim$. Técnicamente, $\succsim$ es una relación binaria definida sobre el conjunto de alternativas X, permitiendo la comparación entre pares de alternativas $x, y \in X$. La notación $x \succsim y$ se interpreta como “la alternativa x es al menos tan buena como la alternativa y". A partir de esta relación, se derivan dos relaciones fundamentales:

- La relación de preferencia estricta, $\succ$, definida como:

  $$x \succ y \iff x \succsim y \text{ pero no } y \succsim x,$$

  que se interpreta como “x es estrictamente preferido a y".

- La relación de indiferencia, $\sim$, definida como:

$$x \sim y \iff x \succsim y \text{ y } y \succsim x \tag{1.1}$$

que se interpreta como "x es indiferente a y".

Axioma 1.1 (Completitud)**.** Para todo $x, y \in X$, se tiene que $x \succsim y$ o $y \succsim x$ (o ambas).

Axioma 1.2 (Transitividad)**.** Para todo $x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.

La propiedad de completitud implica que el individuo posee una preferencia bien definida entre cualquier par de alternativas posibles. Este axioma supone que las decisiones han sido meditadas y completamente evaluadas, incluso en casos de alternativas que puedan ser ajenas a la experiencia común.

Por otro lado, la transitividad es fundamental para el concepto de racionalidad, ya que garantiza que dichas comparaciones binarias deben estar conectadas de manera coherente. La ausencia de transitividad generaría ciclos de preferencia, como preferir x a y, y a z, pero también z a x, lo cual resulta incompatible con una teoría económica coherente.

Definición 1.19 (Relación de preferencia)**.** *La relación binaria $\succsim$ en el conjunto del consumidor X es llamada relación de preferencia si satisface los axiomas 1.1 y 1.2*

Definición 1.20 (Relación de preferencia estricta)**.** *La relación binaria $\succ$ en el conjunto del consumidor X se define por: $x \succ y$ si y solo si $x \succsim y$ y $y \not\succsim x$.*

La relación $\succ$ se denomina relación de preferencia estricta inducida por $\succsim$, o simplemente relación de preferencia estricta cuando $\succsim$ es clara. La expresión $x \succ y$ se interpreta como 'x es estrictamente preferido a y'.

Definición 1.21 (Relación de indiferencia)**.** *La relación binaria $\sim$ en el conjunto del consumidor X se define por: $x \sim y$ si y solo si $x \succsim y$ y $y \succsim x$.*

La expresión $x \sim y$ se interpreta como 'x es indiferente a y'. Es decir da lo mismo la elección de cualquier opción.
Dado cualquier par x y y, exactamente una de tres posibilidades mutuamente excluyentes debe cumplirse: $x \succ y$, $y \succ x$ o $x \sim y$

Definición 1.22 (Curva de Indiferencia)**.** *Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad continua que representa las preferencias de un consumidor. Dado un paquete de consumo(1.18) $\mathbf{x}^1 = (x^1_1, x^1_2)$, la **curva de indiferencia** que pasa por $\mathbf{x}^1$ se define como el conjunto:*

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid u(x_1, x_2) = u(x^1_1, x^1_2)\}.$$

Este conjunto representa todas las combinaciones de bienes x_1 y x_2 que otorgan al consumidor el mismo nivel de utilidad que el paquete $\mathbf{x}^1$. Si la función u es diferenciable y satisface condiciones regulares[2] *, esta curva puede representarse localmente como una función $x_2 = f(x_1)$.*

Definición 1.23 (Tasa Marginal de Sustitución del bien 2 por el bien 1)**.** *Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ un paquete de consumo tal que $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad diferenciable que representa las preferencias del consumidor. La* ***tasa marginal de sustitución***[3] *del bien 2 por el bien 1 en $\mathbf{x}$ se define como:*

$$MRS_{12}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2}} \right|$$

Esta tasa representa cuánta cantidad del bien x_2 está dispuesto a sacrificar el consumidor para obtener una unidad adicional de x_1, manteniéndose indiferente. Equivale al valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia que pasa por $\mathbf{x}$. Bajo preferencias estrictamente monótonas y convexas, esta tasa es estrictamente decreciente a lo largo de una curva de indiferencia, lo cual expresa el ***principio de la Tasa Marginal de Sustitución Decreciente****.*

Lo que se buscamos capturar aquí son aquellas alternativas que son alcanzables considerando las realidades económicas a las que el consumidor se enfrenta. Sus elementos son los paquetes de consumo que el individuo puede consumir dadas las restricciones físicas impuestas por su entorno.

1.4. Canastas de consumo y relación de preferencias. Propiedades.

Para cada vector $\mathbf{x}$ del conjunto X sus coordenadas se relacionan con la cantidad de bienes asociados al consumidor.

Supuesto 1.1 (Propiedades del conjunto del consumidor, X)**.** Los requisitos mínimos sobre el conjunto de consumo son:

1. $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.

[2]Las *condiciones regulares* que permiten representar la curva de indiferencia como una función $x_2 = f(x_1)$ provienen del teorema de la función implícita. Estas requieren que la función de utilidad $u(x_1, x_2)$ sea continuamente diferenciable en un entorno del punto considerado, y que al menos una de las derivadas parciales, como $\partial u/\partial x_2$, no se anule en dicho punto. Económicamente, esto implica que el consumidor valora ambos bienes.

[3]Al final de este capítulo se da el desarrollo matemático de esta ecuación con base en su análisis económico.

2. X es cerrado.
3. X es convexo.
4. $\mathbf{0} \in X$.

El conjunto factible B se define como el subconjunto del conjunto del consumidor X que satisface las restricciones que limitan el acceso del consumidor a los bienes.
Dichas restricciones pueden derivarse de realidades prácticas, institucionales o económicas. La forma en que se especifiquen estas restricciones en una situación particular determinará las propiedades específicas de B. Por el momento, simplemente consideramos que $B \subset X$.

1.5. Relaciones de preferencia y funciones de utilidad

Ahora revisaremos cómo ha evolucionado el concepto de "utilidad" en economía y cómo se relaciona con las preferencias del consumidor.

En la teoría clásica, economistas como Edgeworth y Mill, desde una visión utilitarista, pensaban en la utilidad como algo medible y comparable entre personas, asociado a sensaciones como el placer o el dolor. Con el tiempo, esta idea se fue mejorando. Fue Debreu en 1959 ([8]) quién formalizó la teoría del consumidor, reduciéndola a sus ideas esenciales con un enfoque más general y riguroso.

Hoy en día, la utilidad se entiende como una forma de representar las preferencias del consumidor, que expresan cómo compara diferentes opciones según sus gustos. La relación de preferencia define cómo elige entre alternativas y si sus decisiones son consistentes. Para este punto ya podemos definir un conjunto débilmente convexo en el contexto de estas relaciones, él cual ocuparemos més adelante.

Definición 1.24 (Conjunto débilmente convexo). *Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n_+$ se dice* débilmente convexo con respecto a una relación de preferencia $\succsim$, *si para cualesquiera dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, y para todo $\alpha \in (0,1)$, se cumple que*[4]

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$$

Esta propiedad implica que el consumidor muestra una débil preferencia *por combinaciones balanceadas, es decir, por distribuciones intermedias entre dos cestas indiferentes.*

[4]Lo que dice exactamente esta implicación es que si $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, entonces cualquier combinación convexa estricta entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ (como $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}$) es al menos tan buena como $\mathbf{x}$, es decir, se encuentra en el conjunto de consumo débilmente preferido a $\mathbf{x}$.

Definición 1.25. ***Conjuntos en X derivados de la relación de preferencia*** *Sea $\mathbf{x}^0$ un punto cualquiera en el conjunto de consumo X. En relación con este punto, se pueden definir los siguientes subconjuntos de X:*

1. $\succsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^0\}$*, llamado el conjunto de las alternativas "al menos tan buenas como"* $\mathbf{x}^0$.
2. $\precsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}\}$*, llamado el conjunto de las alternativas "no mejores que"* $\mathbf{x}^0$.
3. $\prec(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}\}$*, llamado el conjunto de las alternativas "peores que"* $\mathbf{x}^0$.
4. $\succ(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0\}$*, llamado el conjunto de las alternativas "mejores a"* $\mathbf{x}^0$.
5. $\sim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \sim \mathbf{x}^0\}$*, llamado el conjunto de las alternativas "indiferentes a"* $\mathbf{x}^0$.

Un conjunto de preferencias que satisface los Axiomas 1.1 y 1.2 se ilustra en la Figura 1.1 para $X = \mathbb{R}^2_+$. Cualquier punto dentro del conjunto de consumo, como $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, representa un plan de consumo con una cantidad determinada x_1^0 del bien 1 y una cantidad x_2^0 del bien 2. Bajo el Axioma 1.1, el consumidor es capaz de comparar $\mathbf{x}^0$ con cualquier otro punto en X y decidir si la otra alternativa es al menos tan buena como $\mathbf{x}^0$ o si $\mathbf{x}^0$ es al menos tan buena como la otra opción.

Dados los conjuntos definidos en relación con $\mathbf{x}^0$, los Axiomas 1.1 y 1.2 garantizan que el consumidor es capaz de clasificar todos los puntos en X dentro de una de tres categorías mutuamente excluyentes con respecto a $\mathbf{x}^0$: cada otro punto en el conjunto de consumo es peor que $\mathbf{x}^0$, indiferente a $\mathbf{x}^0$ o preferido a $\mathbf{x}^0$. En consecuencia, para cualquier vector $\mathbf{x}^0$, los conjuntos $\prec(\mathbf{x}^0)$, $\sim(\mathbf{x}^0)$ y $\succ(\mathbf{x}^0)$ forman una partición del conjunto de consumo.

Las preferencias representadas en la Figura 1.1 pueden parecer poco convencionales. Poseen solo una estructura mínima, pero siguen siendo completamente consistentes con los primeros dos axiomas. Hasta el momento, no se ha asumido nada que impida ciertas "irregularidades" en la representación de las preferencias, como zonas de indiferencia "gruesas", "huecos" o "curvas" dentro del conjunto de indiferencia $\sim(\mathbf{x}^0)$. Estas características solo pueden descartarse imponiendo condiciones adicionales sobre las preferencias.

A partir de ahora, necesitamos nuevos axiomas sobre las preferencias. Uno de ellos tiene un impacto mínimo desde el punto de vista del comportamiento y se enfoca exclusivamente en los aspectos matemáticos de la representación de las preferencias. Las demás hipótesis se relacionan directamente con la caracterización de los gustos del consumidor sobre los bienes en el conjunto de consumo.

El primer axioma adicional que se considerará impone una cierta regularidad topológica sobre las preferencias. Su contribución principal será más evidente posteriormente. A partir de ahora consideraremos $X = \mathbb{R}^n_+$.

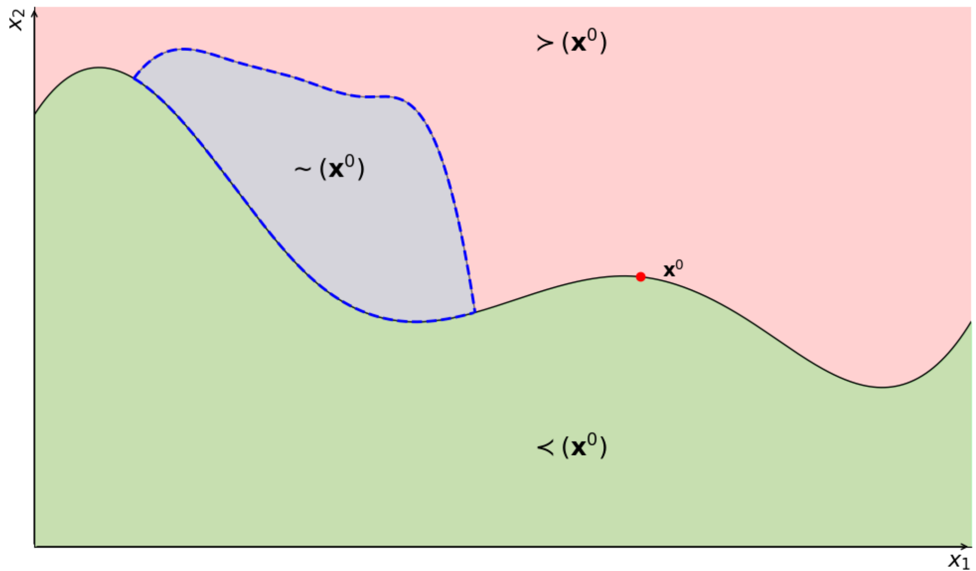

Figura 1.1: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1 y 1.2.

Axioma 1.3 (Continuidad)**.** Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, el conjunto "al menos tan bueno como" $\succsim(\mathbf{x})$ y el conjunto "no mejor que" $\precsim(\mathbf{x})$ son cerrados en $\mathbb{R}^n_+$.

En matemáticas un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. Por lo tanto, decir que $\succsim(x)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n_+$ implica que su complemento $\prec(x)$ es abierto en $\mathbb{R}^n_+$. La continuidad garantiza que no se produzcan inversiones repentinas de preferencias.

Axioma 1.4 (No satisfacción local)**.** Para todo $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x^0}) \cap \mathbb{R}^n_+$ tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{x^0}$.

Este axioma establece que, dentro de cualquier vecindad de un punto dado $\mathbf{x}^0$, por pequeña que sea, siempre habrá al menos un punto $\mathbf{x}$ que el consumidor prefiera estrictamente a $\mathbf{x}^0$. Este axioma tiene un impacto importante en la estructura de los conjuntos de indiferencia, ya que excluye la posibilidad de que existan "zonas de indiferencia" alrededor de un punto dado. Por ejemplo, si consideramos el punto $\mathbf{x^1}$ en la Figura 1.2, se puede encontrar un $\varepsilon > 0$ y una vecindad $B_\varepsilon(\mathbf{x^1})$ que contenga únicamente puntos indiferentes a $\mathbf{x^1}$, lo cual violaría el axioma de no satisfacción local, pues siempre debe existir un punto estrictamente preferido a $\mathbf{x^1}$ en cualquier vecindad elegida. Las preferencias mostradas en la Figura 1.3 satisfacen este axioma, así como los axiomas 1.1 al 1.3.

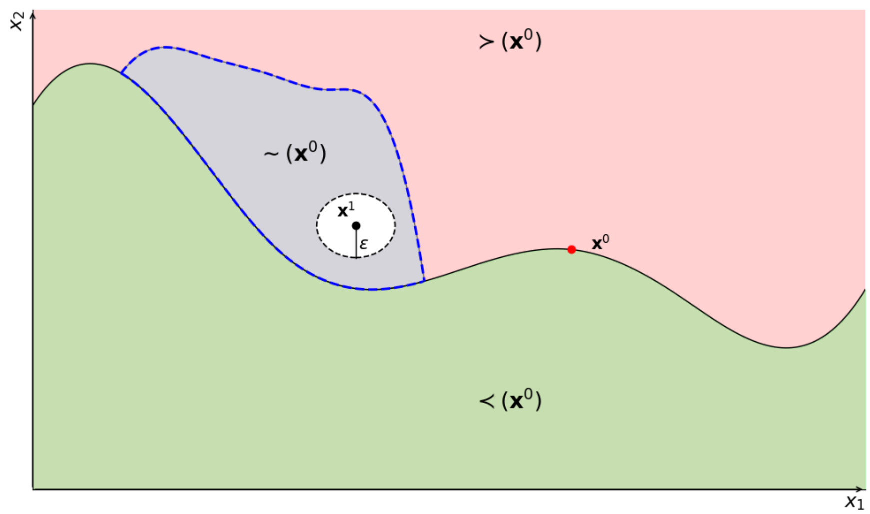

Figura 1.2: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1 1.2 y 1.3.

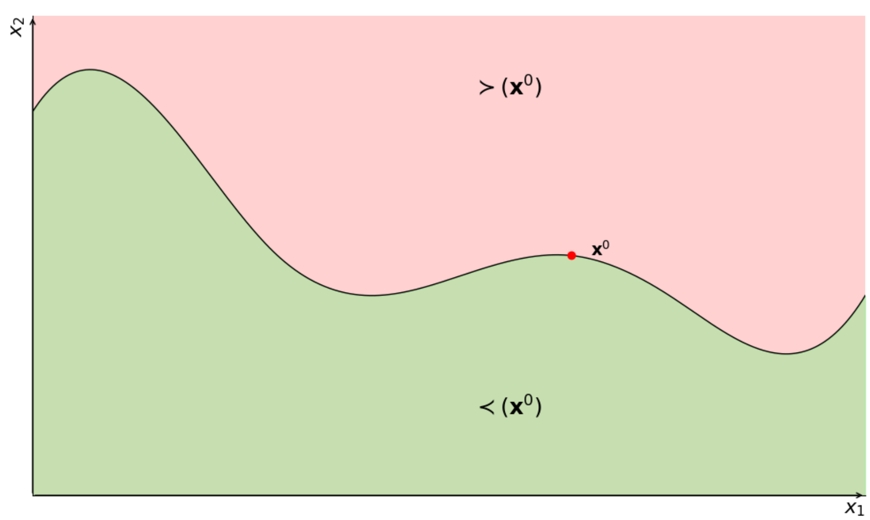

Figura 1.3: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Ahora para el siguiente axioma ocuparemos la definición 1.11

Axioma 1.5 (Monotonicidad estricta)**.** Para cualesquiera $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$, si $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$, entonces $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$, mientras que si $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, entonces $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$.

El Axioma 1.5 establece que si un vector contiene al menos la misma cantidad de cada bien que otro, entonces el primero es al menos tan bueno como el segundo. Además, si contiene estrictamente más de cada bien, será estrictamente preferido. Este axioma tiene implicaciones importantes en la estructura de los conjuntos de indiferencia y conjuntos relacionados. En particular, garantiza que los conjuntos de indiferencia en $\mathbb{R}^2_+$ no presenten segmentos con pendiente positiva ni se curven hacia arriba. También establece que los conjuntos de bienes preferidos se ubican "por encima" de los conjuntos de indiferencia, mientras que los conjuntos de bienes "peores" se encuentran "por debajo".

Para ilustrar este resultado, considérese el caso de un punto $\mathbf{x}^0$. Bajo el axioma 1.5, ningún punto ubicado al noreste o suroeste de $\mathbf{x}^0$ puede pertenecer al mismo conjunto de indiferencia. Un punto $\mathbf{x}^1$ situado al noreste de $\mathbf{x}^0$ contiene más de ambos bienes y, por lo tanto, es estrictamente preferido. De manera similar, cualquier punto $\mathbf{x}^2$ en el suroeste de $\mathbf{x}^0$ tiene menos de ambos bienes y debe ser estrictamente peor. Como consecuencia, $\mathbf{x}^0$ debe ser estrictamente preferido a $\mathbf{x}^2$ y a todos los puntos en el cuadrante suroeste, lo que implica que ninguno de ellos puede pertenecer al mismo conjunto de indiferencia que $\mathbf{x}^0$. Así, los puntos al noreste del conjunto de indiferencia pertenecen al conjunto $\succ(\mathbf{x}^0)$.

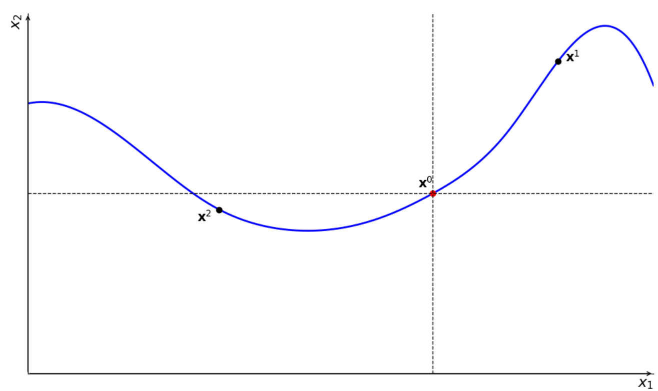

Figura 1.4: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Un conjunto de preferencias que satisface los Axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.5 se representa en la Figura 1.5.

Las preferencias mostradas en dicha figura son las más cercanas, hasta ahora, a aquellas que probablemente resulten familiares en teoría económica. No obstante, aún presentan una diferencia fundamental: la presencia de una región no convexa en la parte noroeste del conjunto de indiferencia $\sim(\mathbf{x}^0)$.

En la mayoría de los modelos estándar, este tipo de irregularidad se descarta explícitamente. Para esto se introducen dos últimos axiomas sobre las preferencias del consumidor.

Axioma 1.6 (Convexidad)**.** Si $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, entonces $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$ para todo $t \in [0, 1]$.

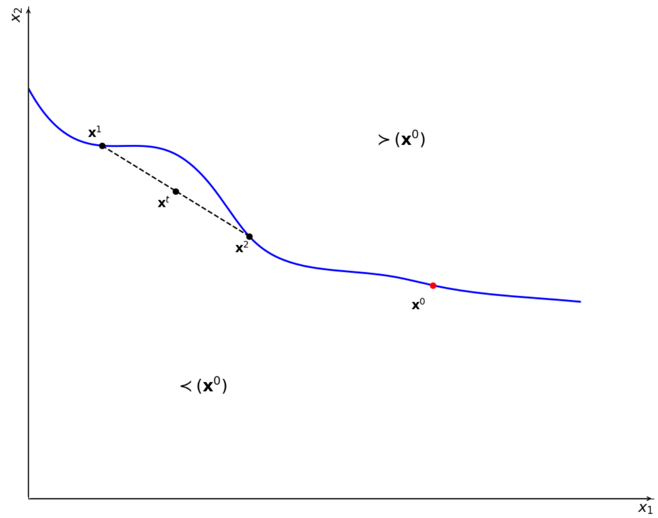

Figura 1.5: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 pero tiene regiones no-convexas.

Axioma 1.7 (Convexidad estricta)**.** Si $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, entonces $t\mathbf{x}^1 + (1 - t)\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^0$ para todo $t \in (0, 1)$.

Esta convexidad es similar a la convexidad usual usada en optimización en $\mathbb{R}$, pero ahora con la relación de preferencia $\succsim$. Es importante notar que tanto el Axioma 1.6 como el Axioma 1.7, en conjunto con los Axiomas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.5, eliminan la posibilidad de segmentos cóncavos respecto al origen dentro de los conjuntos de indiferencia, como los observados en la región noroeste de la Figura 1.5. Para entender esto, tomemos dos puntos distintos en un conjunto de indiferencia. Como los puntos $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ son indiferentes respecto a $\mathbf{x}^0$, se cumple que $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$. Las combinaciones convexas de estos dos puntos, como $\mathbf{x}^t$, pertenecerán al conjunto $\prec (\mathbf{x}^0)$, lo que contradice los requisitos de los Axiomas 1.6 y 1.7.

Desde el punto de vista del desarrollo teórico del consumidor, el Axioma 1.6 puede imponerse sin pérdida de generalidad, ya que su contenido predictivo es equivalente a la versión sin él. Sin embargo, la versión más fuerte, el Axioma 1.7, aunque no es completamente equivalente, simplifica notablemente el análisis.

Para comprender de manera intuitiva las implicaciones de la convexidad en las preferencias del consumidor, consideremos las preferencias ilustradas en la Figura 1.5. Supongamos que $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$. El punto $\mathbf{x}^1$ representa un vector con una proporción relativamente alta del bien $\mathbf{x_2}$, en comparación con $\mathbf{x}^2$, que a su vez contiene una proporción relativamente alta del bien $\mathbf{x_1}$. Aunque cada una de estas canastas tiene una distribución sesgada hacia uno de los bienes, el consumidor es indiferente entre ellas. Ahora bien, cualquier combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, como $\mathbf{x}^t$, será un vector que presenta una combinación más "balanceada" de los bienes $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ en comparación con las opciones más extremas representadas por $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$.

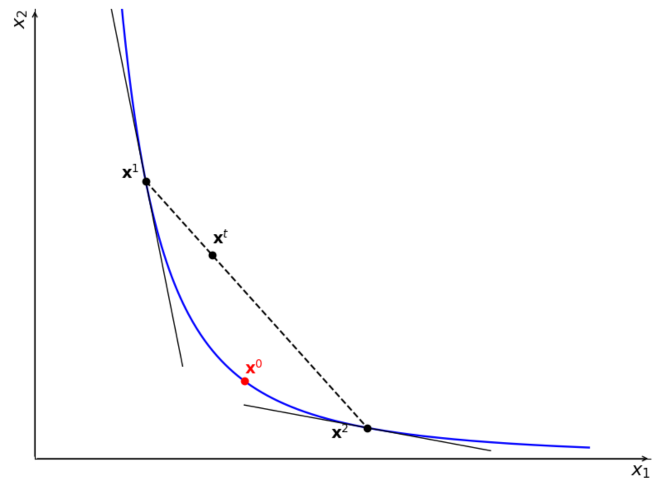

Figura 1.6: Preferencias hipotéticas que satisfacen los axiomas 1.1, 1.2, 1.3, 1.5 y 1.6 o 1.7.

Nota 1.1. Los Axiomas 1.6 y 1.7 expresan que el consumidor prefiere combinaciones equilibradas de bienes en lugar de combinaciones extremas o desproporisionadas.

El Axioma 1.6 asegura que una canasta balanceada es al menos tan buena como dos opciones entre las que es indiferente. El Axioma 1.7 va más allá, exigiendo que esa canasta sea estrictamente mejor.

Esto se relaciona con la forma curva de las curvas de indiferencia y con la **tasa marginal de sustitución** (1.23), que mide cuánta cantidad del bien x_2 está dispuesto a intercambiar el consumidor por más de x_1, sin perder satisfacción.

Ambos axiomas reflejan la idea de que, conforme se obtiene más de un bien, se está dispuesto a sacrificar cada vez menos del otro. Esto se conoce como el **principio de tasa marginal de sustitución decreciente**, ilustrado en la Figura 1.6.

Hasta ahora hemos dedicado un esfuerzo significativo a analizar distintos axiomas que describen las preferencias del consumidor, algunas pudieran demostrarse, pero no lo haremos, con el objetivo de comprender sus implicaciones tanto individuales como colectivas en la estructura y representación de las preferencias. Podemos resumir esta discusión de la siguiente manera:

- Los axiomas de completitud y transitividad aseguran que el consumidor puede realizar comparaciones consistentes entre diferentes alternativas.
- El axioma de continuidad garantiza la existencia de conjuntos “al menos tan buenos como” y “no mejores que” con propiedades topológicamente convenientes, desempeñando un rol primordialmente matemático.
- Los demás axiomas caracterizan las preferencias del consumidor sobre los

objetos de su elección. Por lo que se requiere que sus gustos tiendan a la no satisfacción y algún sesgo a favor del equilibrio del consumo.

1.5.1. La función de utilidad

En la teoría moderna, la función de utilidad es una herramienta para resumir la información de la relación de preferencia del consumidor. La relación de preferencia y sus conjuntos asociados son útiles, pero cuando se requieren emplear métodos de cálculo es más fácil usar la función de utilidad.

Definición 1.26 (Función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succsim$)**.** *Una función real $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es llamada función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succsim$ si, para todo $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1} \in \mathbb{R}^n_+$, se cumple que:*

$$u(\mathbf{x_0}) \geq u(\mathbf{x_1}) \iff \mathbf{x_0} \succsim \mathbf{x_1}.$$

En otras palabras una función de utilidad representa la relación de preferencia del consumidor si asigna números más grandes a las combinaciones de consumo preferidas, permitiendonos elegir una (esto lo aplicaremos en el capítulo final).

El estudio de las condiciones que debe satisfacer una relación de preferencia para ser representada por una función de utilidad continua ha sido un tema de gran interés en la teoría económica. Este problema es fundamental, ya que la posibilidad de trabajar con una función de utilidad en lugar de la relación de preferencia misma simplifica considerablemente el análisis en numerosos problemas de teoría del consumidor.

Desde un punto de vista matemático, el problema consiste en establecer la existencia de una función de utilidad continua que represente una relación de preferencia. Cabe aclarar que durante este texto se asumirán condiciones extras como monotonicidad en las preferencias.

Teorema 1.1. ***Existencia de una Función Real que representa la relación de preferencia***
Si la relación binaria $\succsim$ es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona, entonces existe una función continua de valores reales $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ que representa a $\succsim$.

Vale observar que este resultado es un *teorema de existencia*. Matemáticamente establece que, bajo las condiciones mencionadas, al menos una función continua de valores reales que represente la relación de preferencia debe existir. Puede haber, más de una función de este tipo. Sin embargo, el teorema no indica cuántas pueden existir ni de qué forma deben tomar. Por lo tanto, si podemos construir al menos una función que sea continua y represente las preferencias dadas, habremos probado el teorema. Esta es la estrategia que se debe seguir en la demostración.

Sin embargo como nuestro enfoque es llegar a un contexto de decisiones bajo incertidumbre no abordaremos esta demostración y este teorema solo será expositivo en esta tesis, pudiéndose consultar la prueba en ([11]).

Definición 1.27 (Utilidad marginal). *Sea $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad continuamente diferenciable que representa las preferencias del consumidor. La **utilidad marginal** del bien i en el paquete de consumo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ se define como la derivada parcial de u con respecto a la cantidad consumida del bien i, esto es:*

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Esta magnitud indica el cambio en el nivel de utilidad del consumidor ante un incremento infinitesimal en la cantidad del bien i, manteniendo constante el consumo de los demás bienes. Bajo el supuesto de preferencias estrictamente monótonas, esta derivada es estrictamente positiva para casi todos los paquetes $\mathbf{x}$.

Nota 1.2. Una función de utilidad representa las preferencias del consumidor asignando números a cada paquete de consumo(1.18). Sin embargo, lo único que importa es tipo que la relación (1.1) nos proporcione números para reflejar cual es más grande. Por eso, si una función u representa correctamente las preferencias, cualquier transformación que mantenga el mismo orden, como u^3 o $u+5$, también lo hará.

Esto significa que la función de utilidad no es única: sólo tiene sentido en términos numéricos. Esta propiedad se conoce como *invarianza bajo transformaciones monótonas positivas.*

Teorema 1.2. ***Invarianza de la Función de Utilidad ante Transformaciones Monótonas Positivas***
Sea $\succsim$ una relación de preferencia en $\mathbb{R}^n_+$ y supongamos que $u(\mathbf{x})$ es una función de utilidad que la representa. Entonces, $v(\mathbf{x})$ también representa $\succsim$ si y solo si $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x}$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y continua en el conjunto de valores que toma u.

Al igual que el teorema 1.1 y 1.3 no pondremos una demostración para este teorema solo lo usaremos de manera expositiva.

Teorema 1.3. ***Propiedades de las Preferencias y las Funciones de Utilidad*** *Sea $\succsim$ representada por $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *$u(\mathbf{x})$ es estrictamente creciente si y solo si $\succsim$ es estrictamente monótona.*

2. *$u(\mathbf{x})$ es cuasiconcava si y solo si $\succsim$ es convexa.*

3. *$u(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasiconcava si y solo si $\succsim$ es estrictamente convexa.*

Estos resultados establecen la conexión entre la estructura matemática de la función de utilidad y las propiedades de la relación de preferencia que representa. En particular, la monotonía estricta de $u(\mathbf{x})$ implica que una mejor cesta de bienes siempre es preferida, la cuasiconcavidad 1.9 refleja la convexidad(1.1) de las preferencias, y la estricta cuasiconcavidad(1.10) implica una convexidad más fuerte en la relación de preferencia.

1.6. Diferenciabilidad y la Tasa Marginal de Sustitución

Más adelante, vamos a querer analizar problemas utilizando herramientas del cálculo. Hasta ahora, nos hemos enfocado en la continuidad de la función de utilidad y en las propiedades de la relación de preferencia que la garantizan. La diferenciabilidad, por supuesto, es una condición más exigente que la continuidad. Intuitivamente, la continuidad asegura que no haya cambios bruscos en las preferencias, pero no excluye la posibilidad de "picos" o comportamientos continuos pero irregulares. La diferenciabilidad, en cambio, elimina tales irregularidades y garantiza que las curvas de indiferencia sean tanto suaves como continuas.

Por lo tanto, la diferenciabilidad de la función de utilidad requiere una restricción más fuerte sobre las preferencias que la mera continuidad. Al igual que en el caso del axioma de continuidad, lo que se necesita una condición matemática adecuada. El desarrollo de esta condición sobre la función pudiera parecer impuesta, pero desde el punto económico pedirle esta condición se sustenta en las adecuaciones para modelar el consumo o preferencias del consumidor. Esta explicación la expone Debreu en 1972 [8]. Para nuestros propósitos en esta tesis, asumiremos que la representación de la utilidad es diferenciable siempre que sea necesario.

Dado que el análisis de funciones diferenciables introduce un vocabulario específico, es útil familiarizarse con él. La derivada parcial de $u(\mathbf{x})$ con respecto a x_i se denomina *utilidad marginal*(1.27) del bien i. En el caso de dos bienes, definimos la *tasa marginal de sustitución*(1.23) del bien 2 por el bien 1 como el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia. Podemos obtener una expresión de esta tasa en términos de las utilidades marginales de los bienes.

Para verlo, consideremos un paquete de consumo(1.18) $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$. Como la curva de indiferencia(1.22) que pasa por $\mathbf{x}^1$ es una función en el plano (x_1, x_2), podemos escribirla como $x_2 = f(x_1)$[5]. En consecuencia, al variar x_1, el paquete

[5] La curva de indiferencia que pasa por un paquete $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ representa todas las combinaciones de bienes que otorgan el mismo nivel de utilidad que $\mathbf{x}^1$. Si la función de utilidad $u(x_1, x_2)$ es continua y diferenciable, entonces, en una vecindad cercana a $\mathbf{x}^1$, podemos describir esa curva como una función del tipo $x_2 = f(x_1)$. Esto significa que, al variar x_1, existe un único valor de x_2 que mantiene constante la utilidad, permitiendo trazar la curva como una gráfica en el plano (x_1, x_2).

$(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1))$ traza la curva de indiferencia que pasa por $\mathbf{x}^1$. Por lo tanto, para todo x_1:

$$u(x_1, f(x_1)) = \text{constante}. \tag{1.2}$$

La *tasa marginal de sustitución* del bien 2 por el bien 1 (1.23) en el paquete $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$, denotada por $MRS_{12}(x_1^1, x_2^1)$, se define como el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia en (x_1^1, x_2^1).

$$MRS_{12}(x_1^1, x_2^1) \equiv |f'(x_1^1)| = -f'(x_1^1). \tag{1.3}$$

Esto dado que $f' < 0$[6]. Ahora bien, como $u(x_1, f(x_1))$ es una función constante en x_1, su derivada con respecto a x_1 debe ser cero. Es decir,

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} f'(x_1) = 0. \tag{1.4}$$

La *tasa marginal de sustitución* del bien 2 por el bien 1 en el paquete $\mathbf{x}^1$, denotada $MRS_{12}(\mathbf{x}^1)$, se obtiene a partir de las ecuaciones 1.3 y 1.4:

$$MRS_{12}(\mathbf{x}^1) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x}^1)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\mathbf{x}^1)}{\partial x_2}}. \tag{1.5}$$

De manera similar, si consideramos más de dos bienes, definimos la *tasa marginal de sustitución* del bien j por el bien i como el cociente de sus utilidades marginales:

$$MRS_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}}. \tag{1.6}$$

Cuando las utilidades marginales son estrictamente positivas, la $MRS_{ij}(\mathbf{x})$ también lo es, lo que nos indica la cantidad del bien j que puede intercambiarse por una unidad del bien i sin alterar la utilidad del consumidor.

[6]Como las preferencias del consumidor son estrictamente monótonas, si se aumenta la cantidad del bien x_1, para mantener el mismo nivel de utilidad se debe reducir la cantidad del bien x_2. Por eso, la curva de indiferencia desciende: al aumentar x_1, x_2 disminuye. Esto implica que la pendiente $f'(x_1)$ es negativa, es decir, $f'(x_1) < 0$, ya que la derivada de una función decreciente siempre es menor que cero.

Capítulo 2

Teoría del consumidor

Kanu ña Savi sa'a nuu iñu ña ña'ivi.

(Que Dios dé buena y abundante cosecha de milpa)

Región mixteca alta

Hasta ahora, hemos analizado cómo estructurar y representar las preferencias, pero estas son solo uno de los cuatro elementos fundamentales en la teoría de la elección del consumidor.

En un nivel abstracto, el consumidor tiene un conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^n_+$, que contiene todas las alternativas de consumo concebibles. Sus inclinaciones y actitudes hacia estas alternativas se describen mediante la relación de preferencia definida en $\mathbb{R}^n_+$. Las circunstancias del consumidor limitan las alternativas que puede alcanzar, y estas se agrupan en un conjunto factible $B \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Finalmente, suponemos que el consumidor está motivado a elegir la alternativa factible más preferida según su relación de preferencia. Formalmente, el consumidor busca:

$$\mathbf{x}^* \in B \text{ tal que } \mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B. \tag{2.1}$$

2.1. El problema del consumidor

Para avanzar en el análisis, hacemos los siguientes supuestos, que se mantendrán a menos que se requiera lo contrario.

Supuesto 2.1. Preferencias del consumidor
La relación de preferencia $\succsim$ del consumidor es completa, transitiva, continua, estrictamente monótona y estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n_+$. Por lo tanto, según los

Teoremas 1.1 y 1.3 , puede ser representada por una función de utilidad u con valores reales, que es continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasicóncava en $\mathbb{R}^n_+$.

En el caso de dos bienes $\mathbb{R}^2_+$ este tipo de preferencias puede representarse mediante un mapa de indiferencia cuyas curvas de nivel no se interceptan, estrictamente convexas alejadas del origen y que crecen en dirección noreste, como se muestra en la Figura 2.1.

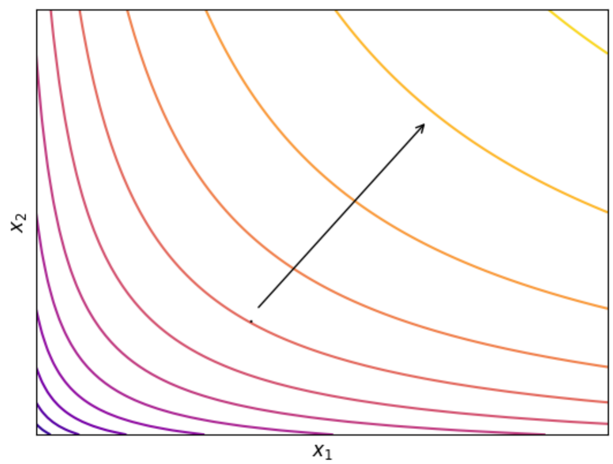

Figura 2.1: Mapa de indiferencia para las preferencias que satisfacen 2.1

Ahora analizaremos las circunstancias del consumidor y estructuraremos el conjunto factible. Nos enfocamos en un consumidor individual que opera dentro de una economía de mercado 1.16, definida como un sistema en el que las transacciones entre agentes se realizan a través de mercados. Se asume que existe un mercado para cada bien, y que cada bien i tiene un precio $p_i > 0$. Asimismo, se supone que el consumidor es un agente insignificante en todos los mercados, lo que significa que su demanda es tan pequeña en comparación con el tamaño del mercado que no afecta los precios de mercado. Formalmente, se toma el vector de precios de mercado $\mathbf{p} \gg 0$ fijo desde el punto de vista del consumidor.

El consumidor cuenta con un ingreso monetario fijo $y \geq 0$. Dado que al comprar x_i unidades del bien i a un precio p_i por unidad requiere un gasto de $p_i x_i$ dólares, pesos o otra cantidad como el numéraire(1.15), la restricción de que el gasto no supere el ingreso se expresa como $\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq y$, o de manera vectorial, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y$. Estas condiciones son el entorno del consumidor que definen la estructura del conjunto factible B, llamado el **conjunto presupuestario**, definido de la siguiente manera:

$$B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}. \tag{2.2}$$

En el caso particular de dos bienes $\mathbb{R}^2_+$, B incluye todos los conjuntos que se encuentran dentro o sobre los límites de la región sombreada en la Fig 2.2.

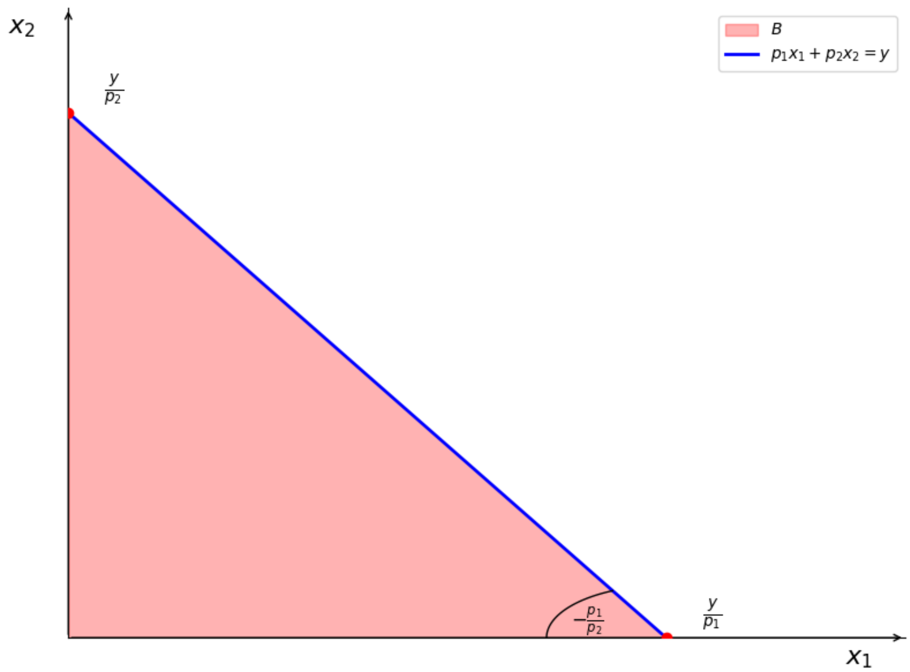

Figura 2.2: Conjunto presupuestario $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$.

Vamos a escribir este problema ahora con términos de funciones que resulten familiares en un contexto matemático.
Bajo el supuesto 2.1, las preferencias del consumidor pueden ser representadas por una función de utilidad $u(\mathbf{x})$ estrictamente creciente y estrictamente cuasicóncava(1.9) definida sobre el conjunto del consumidor $\mathbb{R}^n_+$. Dado que el gasto total no debe exceder el ingreso (siendo esta una restricción), el problema del consumidor planteado en (2.1) puede reformularse como el problema de maximización de la función de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria, dando paso a un problema de optimización. Formalmente, el problema de maximización de utilidad del consumidor se expresa como:

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad &\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nótese que si $\mathbf{x}^*$ es solución de este problema, entonces $u(\mathbf{x}^*) \geq u(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B$, lo que implica que $\mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in B$. Esto confirma que las soluciones de (2.3) son, de hecho, soluciones de (2.1) debido a la definición 1.26.

Además, el recíproco también es cierto.

Para el caso de dos bienes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos la figura(2.2) de ejemplo del conjunto presupuestario $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$. donde también se muestra la restricción presupuestaria.

Dado el anterior problema de maximización del consumidor este tiene una estructura matemática bien definida. Bajo los supuestos de preferencias, la función de utilidad $u(\mathbf{x})$ es continua y de valores reales. El conjunto presupuestario B 2.2 es no vacío, pues contiene $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_+$, recordando que y es mayor o igual que cero por ser los ingresos, B es cerrado, acotado y, por lo tanto, compacto en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema de Weierstrass ([2],[5]), existe un máximo de $u(\mathbf{x})$ sobre B.

Más aún, como B es convexo y la función objetivo es estrictamente cuasiconvexa(1.8), el Maximizador de $u(\mathbf{x})$ sobre B es único. Dado que las preferencias son estrictamente monótonas, la solución $\mathbf{x}^*$ satisfará la restricción presupuestaria con igualdad, ubicándose en la frontera del conjunto presupuesto. Por lo tanto, cuando $y > 0$ y dado que $\mathbf{x}^* \geq 0$, pero $\mathbf{x}^* \neq 0$, se sigue que $x_i^* > 0$ para al menos un bien i.

Un ejemplo típico de esta solución en el caso de dos bienes se muestra en la Fig. 2.3.

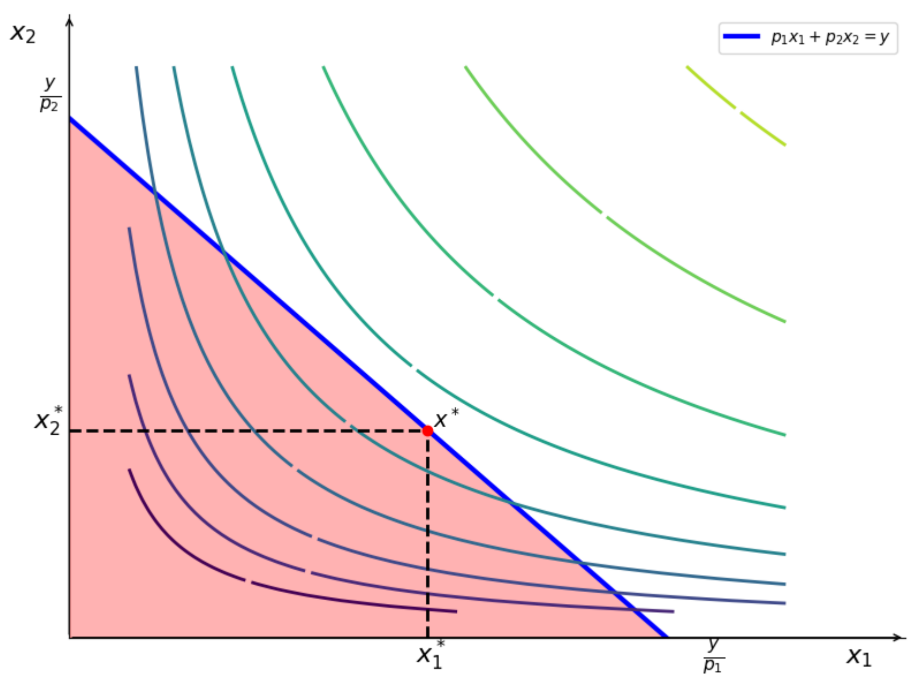

Figura 2.3: Solución al problema de maximización de la utilidad del consumidor.

Funciones de demanda marshalliana

El vector solución $\mathbf{x}^*$ del problema de maximización del consumidor depende de los parámetros $\mathbf{p}$ (precios) e y (ingreso). Dado que es único para valores dados de $\mathbf{p}$ e y, podemos ver la solución como una función del conjunto de precios e ingreso al conjunto de cantidades demandadas, $X = \mathbb{R}^n_+$. De este modo, se suele expresar como

$$x_i^* = x_i(\mathbf{p}, y), \quad i = 1, \ldots, n,$$

o, en notación vectorial,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y).$$

Estas soluciones se conocen como *funciones de demanda ordinaria* o *funciones de demanda marshalliana*. Si mantenemos fijo el ingreso y los precios de los demás bienes, el gráfico de la relación entre la cantidad demandada de x_i y su propio precio p_i es la curva de demanda estándar del bien i.

En la Fig. 2.4 superior, el consumidor enfrenta los precios p_1^0 y p_2^0 y tiene un ingreso y^0. Las cantidades $x_1(p_1^0, p_2^0, y^0)$ y $x_2(p_1^0, p_2^0, y^0)$ maximizan la utilidad bajo esas condiciones. En la Fig.2.4 inferior, si graficamos el precio p_1^0 contra la cantidad demandada del bien 1 a dicho precio (manteniendo fijo el precio p_2^0 y el ingreso y^0), obtenemos un punto en la curva de demanda marshalliana del bien 1.

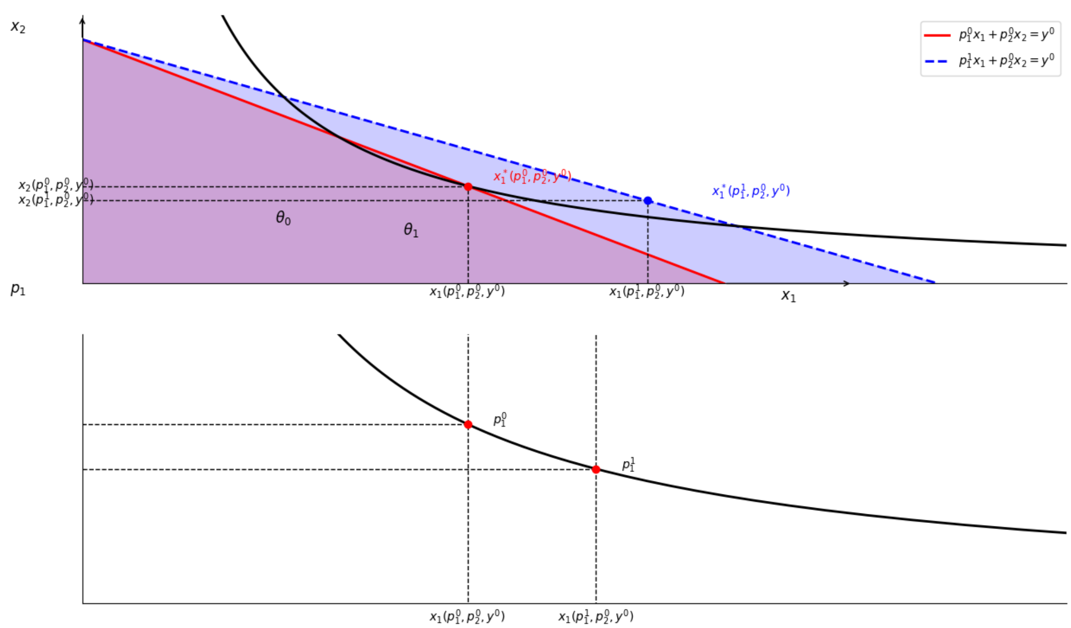

Figura 2.4: El problema del consumidor y el comportamiento de la demanda del consumidor.

2.2. Análisis de la curva de demanda y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

A continuación veremos las condiciones que generalizan el método de los multiplicadores de Lagrange de problemas de optimización con restricciones de desigualdad conocidas como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), esto pues aunque originalmente el crédito debe incluir a William Karush [12], quien las formuló en su tesis de 1939, estas condiciones se hicieron ampliamente conocidas a través del trabajo posterior de Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker[13] en 1951, razón por la cual se les llama comúnmente "condiciones Kuhn-Tucker" en muchos textos clásicos, especialmente en economía y optimización, para el interés de este texto las llamaremos condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) por nuestro enfoque matemático. Pero mencionando esto pues es una buena observación en la relación que tiene el campo de economía con el de matemáticas, sin dejar de señalar que este es el objetivo de esta tesis de lo cual se pretende dejar testimonio.

A un nivel de ingreso y^0 fijo y con el precio p_2^0 del bien 2, si el consumidor enfrenta un precio $p_1^1 < p_1^0$ del bien 1, las cantidades $x_1(p_1^1, p_2^0, y^0)$ y $x_2(p_1^1, p_2^0, y^0)$ resuelven el problema del consumidor y maximizan la utilidad. Graficando p_1^1 contra la cantidad demandada del bien 1 a ese precio, se obtiene otro punto en la curva de demanda marshalliana del bien 1. Considerando todos los valores posibles de p_1, se traza la curva de demanda completa del bien 1. Diferentes niveles de ingreso y precios del bien 2 alterarán la posición y forma de esta curva, determinada por las propiedades de las preferencias del consumidor.

Si $u(\mathbf{x})$ es diferenciable, podemos usar métodos de cálculo para analizar el comportamiento de la demanda. Tengamos en mente el problema de maximización del consumidor(2.3).

Reescribiendo la restricción como $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-y \leq 0$ y formando el lagrangiano 1.14, obtenemos:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) - \lambda[\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - y].$$

Asumiendo que la solución $\mathbf{x}^*$ es estrictamente positiva, podemos aplicar las condiciones KKT para caracterizarla. Si $\mathbf{x}^* \gg 0$ resuelve el problema 2.3, entonces, de acuerdo con el Teorema del ápendice A.7, existe un $\lambda^* \geq 0$ tal que el par $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ satisface las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* - y \leq 0 \tag{2.5}$$

$$\lambda^* [\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* - y] = 0 \tag{2.6}$$

Ahora, debido a la monotonicidad estricta, la condición 2.5 se cumple bajo la igualdad [5], de modo que la ecuación 2.6 o ecuación de holgura complementaria se vuelve redundante. Por lo tanto, estas condiciones se reducen a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} &= \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} - \lambda^* p_n = 0\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y = 0 \tag{2.8}$$

2.3. Solución al problema de maximización

Para el problema de maximización dado por 2.3, existen dos posibilidades:

- $\nabla u(\mathbf{x}^*) = 0$, aunque este caso es poco probable bajo la suposición de estricta monotonía.

- $\nabla u(\mathbf{x}^*) \neq 0$, lo cual asumiremos en adelante.

Bajo estricta monotonía, se tiene que $\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} > 0$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Dado que $p_i > 0$ para todo i, de la condición 2.4 se deduce que el multiplicador de Lagrange será estrictamente positivo en la solución:

$$\lambda^* = \frac{u_i(\mathbf{x}^*)}{p_i} > 0.$$

En consecuencia, para todo j:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = \lambda^* p_j > 0,$$

lo que implica que la utilidad marginal es proporcional al precio de cada bien en el óptimo.

Relación entre bienes. Para dos bienes cualesquiera j y k, podemos combinar las condiciones y concluir que:

$$\frac{\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j}}{\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k}} = \frac{p_j}{p_k}. \tag{2.9}$$

Esto indica que, en el óptimo, la tasa marginal de sustitución (MRS) entre dos bienes es igual a la relación de los precios de dichos bienes.

Caso de dos bienes. En el caso de dos bienes, las condiciones 2.7 exigen que la pendiente de la curva de indiferencia que pasa por $\mathbf{x}^*$ sea igual a la pendiente de la restricción presupuestaria, y que $\mathbf{x}^*$ esté sobre la línea presupuestaria, y no dentro de ella. Esto se muestra en las Figuras 2.3 y 2.4 superior.

Condiciones de optimalidad global. En general, las condiciones 2.7 son necesarias únicamente para un óptimo local. Sin embargo, en el caso particular de este problema, estas condiciones de primer orden son también suficientes para garantizar un óptimo global. Esto es importante señalar formalmente como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Suficiencia de las Condiciones de Primer Orden del Consumidor). *Sea u continua y cuasicóncava en $\mathbb{R}^n_+$, sea $(\mathbf{p}, y) \gg 0$. Si u es diferenciable en $\mathbf{x}^*$ y $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \gg 0$ resuelve 2.7, entonces $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de maximización del consumidor a los precios $\mathbf{p}$ y nivel de ingreso y.*

Demostración: Usaremos el escolio 2.1: Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x^1} \geq 0$, dado que u es **cuasicóncava**, se cumple que

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x^1} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{siempre que} \quad u(\mathbf{x^1}) \geq u(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad u \text{ es diferenciable en } \mathbf{x}.$$

Ahora, supongamos que $\nabla u(\mathbf{x}^*)$ existe y $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \gg \mathbf{0}$ resuelve 2.7. Entonces,

$$\nabla u(\mathbf{x}^*) = \lambda^* \mathbf{p}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y. \tag{2.11}$$

Si $\mathbf{x}^*$ no maximiza la utilidad, debe existir algún $\mathbf{x^0} \geq 0$ tal que

$$u(\mathbf{x^0}) > u(\mathbf{x}^*),$$
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x^0} \leq y.$$

Debido a que u es **continua** y $y > 0$, las desigualdades previas implican que

$$u(t\mathbf{x^0}) > u(\mathbf{x}^*) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{p} \cdot t\mathbf{x^0} < y, \tag{2.13}$$

para algún $t \in [0, 1]$ lo suficientemente cercano a uno. Sea $\mathbf{x^1} = t\mathbf{x^0}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\nabla u(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x^1}-\mathbf{x}^*) &= (\lambda^*\mathbf{p})\cdot(\mathbf{x^1}-\mathbf{x}^*)\\ &= \lambda^*(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x^1}-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^*)\\ &< \lambda^*(y-y)\\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde la primera igualdad se sigue de 2.10 y la segunda desigualdad de 2.11 y 2.13. Sin embargo, dado que por 2.12 $u(\mathbf{x^1}) > u(\mathbf{x}^*)$, 2.14 contradice el resultado establecido al inicio de la demostración. □

Con este resultado de suficiencia, basta encontrar una solución $(x^*, \lambda^*) \gg 0$ para 2.7. Nótese que 2.7 es un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas desconocidas $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda^*$. Estas ecuaciones pueden usarse típicamente para resolver las funciones de demanda $x_i(\mathbf{p}, y)$, $i = 1, \ldots, n$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Escolio 2.1. *Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función* ***cuasicóncava*** *y* ***diferenciable*** *en $\mathbf{x}$. Si $u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x})$, entonces se cumple:*

$$\nabla u(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0.$$

Demostración: Consideremos la función $\phi(t) = u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})$, que describe el valor de utilidad a lo largo de la combinación convexa entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, con $t \in [0,1]$ haciendo esta demostración por pasos.

1. Como u es cuasicóncava(1.9), y dado que $u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x})$, se tiene:

   $$\phi(t) = u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

   Por tanto, $\phi(t)$ alcanza un mínimo (local) en $t = 0$.

2. Como u es diferenciable en $\mathbf{x}$, entonces la función compuesta

   $$\phi(t) = u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})$$

   es diferenciable respecto a t. Podemos expresar esta función como $\phi(t) = u(\mathbf{z}(t))$, donde $\mathbf{z}(t) = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$ describe el segmento de recta entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

   Aplicando la regla de la cadena para funciones de varias varibles:

   $$\phi'(t) = \nabla u(\mathbf{z}(t))\cdot\mathbf{z}'(t).$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos:

$$\phi'(0) = \nabla u(\mathbf{z}(0)) \cdot \mathbf{z}'(0) = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Esto se debe a que:

$$\mathbf{z}(0) = (1-0)\mathbf{x} + 0\mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad \text{y} \quad \mathbf{z}'(t) = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{x}.$$

Así, el valor de la derivada $\phi'(0)$ representa el cambio instantáneo en la utilidad u cuando nos movemos desde $\mathbf{x}$ hacia $\mathbf{y}$, y se calcula como el producto punto entre el gradiente $\nabla u(\mathbf{x})$ y el vector de dirección $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

3. Como $t = 0$ es un mínimo local de $\phi(t)$, se cumple $\phi'(0) \geq 0$[1], por lo tanto:

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0.$$

Esto completa el resultado □

Ejemplo 2.1. Función de utilidad CES(Constant Elasticity of Substitution)
La función $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, donde $0 < \rho < 1$, es conocida como una *función de utilidad CES*. Esta función de utilidad representa preferencias estrictamente monótonas y estrictamente convexas.

Nota 2.1. La función CES representa **preferencias estrictamente monótonas** porque sus derivadas parciales respecto a cada bien son estrictamente positivas en el dominio $\mathbb{R}^2_{++}$. Sin perdida de generalidad, calculemos la derivada parcial de $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$ respecto a x_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \rho x_1^{\rho-1}$$

Dado que $\rho < 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, y $\rho \neq 0$, se concluye que esta expresión es estrictamente positiva. Por tanto, un incremento en x_1 siempre eleva la utilidad, lo que implica que el bien es deseado. Lo mismo se cumple para la derivada con respecto a x_2, por simetría.

Así, la función satisface el criterio de **monotonía estricta** en $\mathbb{R}^2_{++}$.

También representa **preferencias estrictamente convexas**, porque para $0 < \rho < 1$, la función es estrictamente cuasicóncava. Esto asegura que toda combinación convexa de dos canastas indiferentes es estrictamente preferida. Este resultado es ampliamente conocido en Microeconomía(1.17) y documentado en textos como [11] u [14].

[1]Si una función diferenciable alcanza un mínimo local en un punto interior de su dominio, entonces su derivada en ese punto es cero o positiva.

El problema del consumidor consiste en encontrar un conjunto de consumo no negativo que resuelva

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,\, x_2} \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{1/\rho} \\ &\text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 - y \leq 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para resolver este problema, primero se forma el Lagrangiano asociado:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) \equiv \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{1/\rho} - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y\right).$$

Dado que las preferencias son monótonas, la restricción presupuestaria se mantendrá con igualdad en la solución. Suponiendo una solución interior, las condiciones de Kuhn-Tucker coinciden con las condiciones de primer orden ordinarias del Lagrangiano, y las siguientes ecuaciones deben cumplirse en los valores solución x_1, x_2 y λ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - y = 0. \tag{2.18}$$

Reordenando las ecuaciones 2.16 y 2.17, dividiendo la primera por la segunda y reordenando, podemos reducir las tres ecuaciones con tres incógnitas a solo dos ecuaciones en las dos incógnitas de interés, x_1 y x_2:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \tag{2.19}$$

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2. \tag{2.20}$$

Primero, sustituimos 2.19 en 2.20 para obtener una ecuación solo en términos de x_2:

$$y = p_1 x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} + p_2 x_2 = x_2 \left[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}\right] p_2^{-1/(\rho-1)}. \tag{2.21}$$

Resolviendo 2.21 para x_2, obtenemos:

$$x_2 = \frac{p_2^{1/(\rho-1)} y}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}. \tag{2.22}$$

Para x_1, sustituimos 2.22 en 2.19:

$$x_1 = \frac{p_1^{1/(\rho-1)} y}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}. \tag{2.23}$$

Las ecuaciones 2.22 y 2.23, que son las soluciones al problema del consumidor 2.15, corresponden a las funciones de demanda marshallianas del consumidor. Si definimos el parámetro $r = \rho/(\rho - 1)$, podemos simplificar estas expresiones:

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \tag{2.24}$$

$$x_2(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}. \tag{2.25}$$

Estas soluciones dependen únicamente de los parámetros p_1, p_2 y y. Cambios en los precios y el ingreso, a través de 2.24 y 2.25, generarán diferentes cantidades demandadas de cada bien. Por ejemplo, en la Figura 2.5, con precios $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ e ingreso $\bar{y}$, las soluciones al problema del consumidor serán las cantidades $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$. El par $(p_1, x_1(p_1, \bar{p}_2, \bar{y}))$ será un punto en una de las curvas de demanda del consumidor para el bien x_1.

2.4. Propiedades de la función de demanda $x(\mathbf{p}, y)$

La función de demanda $x(\mathbf{p}, y)$, obtenida del problema de maximización del consumidor, satisface ciertas propiedades importantes. Hemos realizado suficientes supuestos para garantizar, mediante el Teorema A.8 (teorema del máximo), que $x(\mathbf{p}, y)$ es continua en $\mathbb{R}^n_+$. Sin embargo, generalmente requeriremos algo más: deseamos considerar las pendientes de las curvas de demanda y, por tanto, necesitamos que $x(\mathbf{p}, y)$ sea diferenciable.

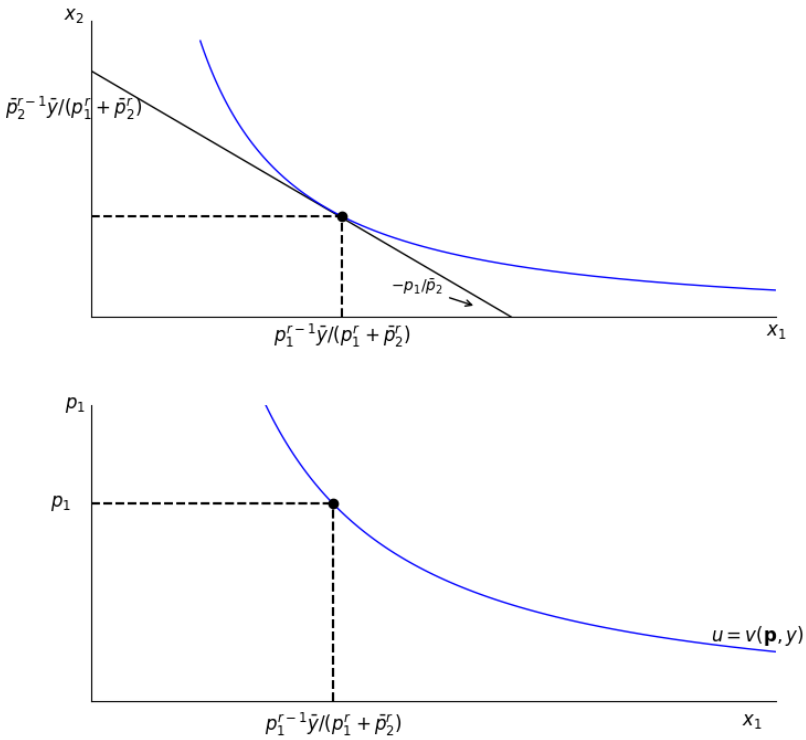

Figura 2.5: Demanda del consumidor cuando hay preferencias representadas por una función de utilidad CES.

A partir de este punto, asumiremos que $x(\mathbf{p}, y)$ es diferenciable siempre que sea necesario para nuestros análisis. Aunque no probaremos este resultado, vale observar la nota 2.2, ya que es importante señalar que esta diferenciabilidad implica ciertas condiciones adicionales sobre la función.

Nota 2.2. En particular, asumimos que $x(\mathbf{p}, y)$ es diferenciable porque este supuesto permite estudiar cómo responden las cantidades demandadas a pequeños cambios en los precios y el ingreso, a través del uso de derivadas parciales. La diferenciabilidad es una propiedad técnica útil que facilita el análisis de propiedades como la elasticidad precio de la demanda, la convexidad de las curvas de demanda y los efectos de sustitución e ingreso. Además, bajo ciertos supuestos regulares sobre la función de utilidad (como continuidad, diferenciabilidad y condiciones de segundo orden), puede demostrarse que la solución óptima varía suavemente con los parámetros del problema, lo que justifica este supuesto en contextos económicos bien comportados.

Capítulo 3

La función de utilidad von Neumann-Morgenstern

Ityi kani kuu ñuu.
(Camino largo hacia nuestro pueblo)
Región mixteca baja

3.1. Incertidumbre

Hasta ahora, hemos asumido que los agentes encargados de la toma de decisiones actúan en un mundo de certeza absoluta. El consumidor conoce los precios de todos los bienes y sabe que cualquier combinación de consumo factible puede obtenerse con certeza. Sin embargo, en el mundo real estas condiciones no se tienen. Muchas decisiones económicas tienden a tomarse bajo incertidumbre. Por ejemplo, al asegurar un automóvil, el consumidor debe considerar el precio futuro de la gasolina, los gastos en reparaciones, mantenimientos, pago de tenencias y el valor de reventa del automóvil varios años después; ninguno de estos factores se conoce con certeza en el momento de tomar la decisión. Decisiones como esta implican incertidumbre sobre el resultado de la elección realizada. Aunque un agente que toma decisiones puede conocer las probabilidades de diferentes resultados posibles, el resultado final de la decisión no puede saberse hasta que ocurra.
Antes de pasar al problema de modelar la incertidumbre, es bueno observar que en todo el capítulo dos no se definió formalmente un

Definición 3.1 (Agente racional)**.** *Un **agente racional** es un individuo que toma decisiones siguiendo un comportamiento sistemático. De acuerdo con la teoría de la elección racional, un agente racional:*

1. *Tiene objetivos bien definidos (como maximizar su utilidad, beneficio o bienestar).*

2. *Elige entre alternativas disponibles comparando sus costos y beneficios, dados sus recursos limitados (como tiempo, ingreso o información).*

3. *Toma decisiones de manera consistente, con base en la mejor información disponible, buscando siempre maximizar su ganancia neta o minimizar sus pérdidas.*

Este concepto es central en la teoría económica, pues permite predecir el comportamiento de consumidores, empresas y otros agentes bajo distintas restricciones y escenarios. En particular, supone que los individuos responden a incentivos, y que sus elecciones reflejan un cálculo racional de ventajas relativas entre opciones. Pero vale observar que en muchas ocasiones los individuos no toman las decisiones de manera lógica y consistente sino que toman decisiones de manera impulsiva.

Nota 3.1. Ejemplo: Supongamos que un consumidor entra a una tienda con \$100 disponibles. Este agente racional:

- Sabe qué productos prefiere y en qué orden (por ejemplo, prefiere unas manzanas a unas naranjas o una combinación de ambos y si esta elección es indiferente a otra combinación).

- Compara precios y sabe que no puede gastar más de \$100, esto es una restricción.

- Elige la combinación de productos que le proporciona mayor satisfacción sin exceder su presupuesto.

  Este comportamiento refleja una toma de decisiones lógica y consistente, que es precisamente lo que caracteriza a un agente racional en economía.

En un principio, la incertidumbre puede parecer algo complicado de entender o resolver. Sin embargo, la teoría económica ha encontrado formas útiles de estudiarla. Una de las ideas más importantes para analizar decisiones cuando no se sabe con certeza qué pasará fue desarrollada por von Neumann y Morgenstern en 1944, esto también marca una unión de áreas ya que un investigador era matemático y otro por su parte era economista y su enfoque en conjunto pudo modelar un problema de la vida real al sentido matemático para darle una solución con las herramientas que se tienen. Su propuesta ayuda a entender cómo las personas pueden tomar decisiones cuando enfrentan distintos posibles resultados[16].

Definición 3.2 (Incertidumbre). *En teoría económica, **incertidumbre** se refiere a una situación en la que los resultados futuros de las decisiones de un agente no son conocidos con certeza, sino que están asociados a distintas probabilidades. Es decir, el agente enfrenta un conjunto de posibles estados del mundo, cada uno con una probabilidad asignada, pero desconoce de antemano cuál ocurrirá realmente.*

Esta noción permite modelar decisiones bajo riesgo, en donde las preferencias del agente se representan a través de funciones de utilidad esperada.

*Para la **Probabilidad** en el área Matemática([10]) **incertidumbre** se refiera a no saber con certeza el resultado de un experimento aleatorio, asignando a cada evento posible de un espacio muestral un valor numérico.*

3.2. Preferencias

Anteriormente en esta tesis, se asumió que el consumidor tenía una relación de preferencia definida sobre algún conjunto de consumo $\mathbb{R}^2_+$. Para incorporar la incertidumbre, necesitamos cambiar ligeramente nuestra perspectiva. Mantendremos la noción relación de preferencia, pero, en lugar de conjuntos de consumo, asumiremos que el individuo tiene una relación de preferencia definida sobre juegos de azar.

Necesitamos ver las siguientes definiciones y notaciones.
Denotamos por G al conjunto de todos los juegos de azar. Si $g \in G$ es un juego cualquiera, entonces puede escribirse como

$$g = (p_1 \circ g_1, \ldots, p_k \circ g_k),$$

donde $g_1, \ldots, g_k \in G$ también son juegos de azar (simples o compuestos), los coeficientes $p_1, \ldots, p_k$ son no negativos y suman 1, es decir, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. En otras palabras, g representa un sorteo que con probabilidad p_i conduce a jugar el juego g_i, el cual puede ser compuesto.

Para formalizar esto, sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de resultados. Los a_i pueden ser conjuntos de consumo, cantidades de dinero (positivas o negativas). Lo importante es que los a_i no tengan incertidumbre en sí mismos. Por otro lado, utilizaremos el conjunto A como base para crear juegos de azar.

Por ejemplo, sea $A = \{1, -1\}$, donde 1 representa el resultado de "ganar un dólar" y -1 el resultado de "perder un dólar". Supongamos que se ha realizado la siguiente apuesta con un amigo: si el lanzamiento de una moneda justa resulta en cara, él te paga un dólar; si resulta en cruz, tú le pagas un dólar. Desde tu perspectiva, este juego de azar tendrá como resultado uno de los dos resultados en A: ganar un dólar (1) o perder un dólar (-1), y cada uno ocurre con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, dado que la moneda es justa.

De manera más general, un juego de azar simple asigna una probabilidad p_i a cada uno de los resultados a_i en A. Por supuesto, dado que los p_i son probabilidades, deben ser no negativos, y la suma de los p_i debe ser igual a uno, ya que el juego debe resultar en algún resultado en A. Denotamos este juego de azar simple como $(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$. Definimos el conjunto de juegos de azar simples G_S como sigue:

Definición 3.3 (Apuestas Simples)**.** *Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de resultados posibles. El conjunto de apuestas simples G_S, definido sobre A, se expresa como:*

$$G_S \equiv \{(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) \mid p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}.$$

Cuando alguno de los p_i es igual a cero, es habitual omitir estos componentes para simplificar la notación. Por ejemplo, la apuesta $(\alpha \circ a_1, 0 \circ a_2, \ldots, 0 \circ a_{n-1}, (1-\alpha) \circ a_n)$ puede escribirse como $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$. Es importante notar que G_S contiene a A, ya que para cada i, la apuesta $(1 \circ a_i)$, que produce a_i con probabilidad uno, pertenece a G_S. Para simplificar aún más, denotaremos a_i en lugar de $(1 \circ a_i)$ cuando el resultado a_i sea garantizado con certeza.

Definición 3.4 (Apuesta compuesta)**.** *Una* ***apuesta compuesta*** *es un juego de azar en el que los premios no son directamente resultados finales, sino otros juegos de azar. Es decir, si $g \in G$ es una apuesta compuesta, entonces puede expresarse como*

$$g = (p_1 \circ g_1, \ldots, p_k \circ g_k),$$

donde cada $g_i \in G$ es a su vez un juego (posiblemente compuesto), y $p_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. En este contexto, g representa un sorteo que, con probabilidad p_i, lleva a jugar el juego g_i.

Volvamos al ejemplo del lanzamiento de una moneda, donde el conjunto de resultados es $A = \{1, -1\}$. En este caso, el agente se enfrenta a un juego de azar simple de la forma $\left(\frac{1}{2} \circ 1, \frac{1}{2} \circ -1\right)$, es decir, una lotería que paga 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y paga -1 con probabilidad $\frac{1}{2}$. No todos los juegos de azar son simples: por ejemplo, en algunas loterías nacionales los premios pueden consistir en boletos para participar en futuras loterías. Este tipo de situaciones corresponde a **juegos de azar compuestos**, los cuales, por simplicidad, no serán considerados en este trabajo, solo para las demostraciones.

En este contexto, los objetos de elección del agente son los juegos de azar. Siguiendo el enfoque adoptado en la teoría del consumidor, supondremos que el agente tiene una relación de preferencias $\succsim$ definida sobre G, que describe su forma de comparar y elegir entre distintos juegos. Como antes, denotamos por $\sim$ la relación de indiferencia inducida por $\succsim$, y por $\succ$ la relación de preferencia estricta.

A continuación, presentaremos los axiomas fundamentales conocidos como **axiomas de preferencia bajo incertidumbre**. Los primeros axiomas serán muy similares a los del capítulo dos.

Axioma 3.1. Completitud. Para cualquier par de apuestas g y g' en G, se cumple que $g \succsim g'$ o $g' \succsim g$.

Axioma 3.2. Transitividad. Para cualquier tres apuestas g, g' y g'' en G, si $g \succsim g'$ y $g' \succsim g''$, entonces $g \succsim g''$.

Axioma 3.3. Continuidad. Para cualquier apuesta g en G, existe una probabilidad $\alpha \in [0, 1]$ tal que $g \sim (\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n)$.

Axioma 3.4. Monotonicidad. Para todas las probabilidades $\alpha, \beta \in [0, 1]$, se cumple que

$$(\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n) \succsim (\beta \circ a_1, (1 - \beta) \circ a_n) \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \geq \beta.$$

Axioma 3.5. Sustitución. Si $g = (p_1 \circ g_1, \ldots, p_k \circ g_k)$ y $h = (p_1 \circ h_1, \ldots, p_k \circ h_k)$ son apuestas en G, y $g_i \sim h_i$ para todo i, entonces $g \sim h$.

Para definir el siguiente axioma necesitamos una definición antes, nos apoyaremos con las definiciones que ya llevamos en este capítulo.

Definición 3.5 (Apuesta simple inducida)**.** *Dado un juego de azar $g \in G$, la **apuesta simple inducida** por g es una lotería de la forma:*

$$(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n),$$

donde cada $a_i \in A$ es un resultado final, y cada p_i es la probabilidad efectiva de que el resultado a_i ocurra al jugar g, considerando todas las etapas posibles en caso de que g sea un juego compuesto. Esta apuesta simple tiene la misma distribución de probabilidades sobre los resultados finales que g, y según el axioma 3.6, es indiferente a g, es decir, $g \sim (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$.

Axioma 3.6. Reducción a Apuestas Simples. Para cualquier apuesta $g \in G$, si $(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ es la apuesta simple inducida por g, entonces $g \sim (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$.

Nota 3.2. En el contexto de la teoría de utilidad bajo incertidumbre, es importante distinguir entre los distintos niveles de objetos involucrados en los juegos de azar:

- Los a_i representan **resultados finales** o desenlaces básicos, como obtener una cantidad fija de dinero (por ejemplo, $a_i = \$100$). Son los elementos del conjunto de resultados A.

- Los g_i son **juegos de azar**, es decir, loterías que pueden ser simples o compuestas. En un *juego compuesto*, jugar g puede llevar, con cierta probabilidad, a jugar uno de estos g_i como sub-juego.

- Los w_i denotan **cantidades monetarias** que el agente recibe si ocurre el resultado a_i. Se trata de variables cuantitativas asociadas a los desenlaces.

Por ejemplo, en una apuesta compuesta $g = (p_1 \circ g_1, \ldots, p_k \circ g_k)$, con $g_i = (\alpha_i \circ a_1, (1-\alpha_i) \circ a_n)$, primero se selecciona con probabilidad p_i uno de los juegos g_i, y luego este juego produce un desenlace específico a_j, el cual a su vez genera una cantidad monetaria w_j.

Un matemático riguroso podría haber notado que el axioma 3.1 no se ocupa para la demostración del Teorema 3.1. Esto se debe a que este axioma es consecuencia del resto de axiomas, vale observar el escolio 3.1. Consecuentemente, podríamos haber procedido sin mencionar explícitamente la completitud. Sin embargo, asumir transitividad sin completitud generaría confusión. Para evitar ese tipo de discusión, optamos por el enfoque presentado.

Escolio 3.1. *Supóngase que $\succsim$ es una relación binaria sobre apuestas en G que satisface los Axiomas 3.2 (Transitividad), 3.3 (Continuidad) y 3.4 (Monotonía). Entonces $\succsim$ también satisface el Axioma 3.1(Completitud)*[1] .

Demostración: Sea $g, g' \in G$ dos juegos de azar arbitrarios. Por el Axioma 3.3 (Continuidad), existen probabilidades $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que:

$$g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \quad \text{y} \quad g' \sim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n). \tag{3.1}$$

Por tanto, para comparar g y g', basta comparar las loterías $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$ y $(\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n)$.

Por el axioma 3.4 (Monotonía), se cumple por un lado asumiendo $\alpha \geq \beta$:

$$(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \succsim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n) \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \geq \beta.$$

De aquí que $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \succsim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n)$
Por 3.1 y transitividad (axioma 3.2) se sigue que $g \succsim g'$

De manera similar, asumiendo $\beta \geq \alpha$, por el axioma 3.4

$$(\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n) \succsim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \quad \text{si y solo si} \quad \beta \geq \alpha.$$

De aquí que $(\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n) \succsim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$
Por 3.1 y transitividad (axioma 3.2) se sigue que $g' \succsim g$
Por lo tanto

$$g \succsim g' \quad \text{o bien} \quad g' \succsim g.$$

Esto demuestra que $\succsim$ es completa. $\square$

[1]Note que este axioma nos puede parecer familiar al orden en los números reales o como su nombre lo indica a la completitud en los números reales.

Definición 3.6 (Nivel de riqueza)**.** *En el contexto de la teoría de utilidad bajo incertidumbre, el* ***nivel de riqueza*** w_i *representa la cantidad de recursos monetarios que un agente económico tendrá si ocurre el estado del mundo* i*, donde* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Estos niveles de riqueza están asociados a los distintos resultados posibles de una lotería o decisión incierta.*

Por su parte, w_0 *denota el nivel de riqueza inicial o actual del agente antes de que ocurra la resolución de la incertidumbre, es decir, antes de que se sepa cuál estado del mundo se realizará.*

Note ahora que podemos tomar la siguiente definición para una lotería donde no se toma ningún riesgo, es decir que no existe una función que altere el nivel de riqueza w_i.

Definición 3.7 (Valor esperado de un juego de azar simple)**.** *El valor esperado de un juego de azar simple* g*, o valor esperado monetario (VEM), que otorga* w_i *con probabilidad* p_i*, está dado por:*

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i.$$

3.3. Utilidad von Neumann-Morgenstern

Una vez que hemos establecido los axiomas que deben cumplir las preferencias sobre juegos de azar, nos preguntamos si es posible representarlas mediante una función de utilidad, como se hizo en el caso de elecciones bajo certeza en el capítulo dos. La respuesta es que sí, y no debería sorprendernos. Lo cual tiene sentido ya que si una relación de preferencia cumple ciertas las condiciones mencionadas antes como completitud, transitividad y continuidad es posible representarla con una función real y continua.

Sin embargo, en el contexto de decisiones bajo incertidumbre, hemos asumido axiomas adicionales. Esto nos permite obtener una función de utilidad que no solo sea continua, sino también **lineal**en las probabilidades. Es decir, su valor dependerá de los desenlaces posibles y de las probabilidades con que ocurren, de forma que cada juego de azar se evalúa mediante una media ponderada de las utilidades de sus resultados.

Formalmente, si $u : G \to \mathbb{R}$ representa las preferencias del agente sobre el conjunto de juegos de azar G, entonces $u(g)$ es el valor de utilidad asignado al juego g. En particular, para cada desenlace seguro a_i, consideramos el juego degenerado $(1 \circ a_i)$, y denotamos su utilidad como $u(a_i)$.

Estamos ahora preparados para describir la propiedad de linealidad mencionada anteriormente.

Definición 3.8 (Propiedad de utilidad esperada)**.** *Una función de utilidad* u *:* $G \to \mathbb{R}$ *tiene la* propiedad de utilidad esperada *si, para cada apuesta* $g \in G$*, se* *cumple:*

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i),$$

donde $(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ *es la apuesta simple inducida por* g*, y* $u(a_i)$ *representa la utilidad del resultado* a_i*.*

Decir que una función u cumple con la **propiedad de utilidad esperada** significa que el valor que asigna a un juego de azar es el promedio ponderado de las utilidades de sus posibles desenlaces. Cada utilidad se multiplica por la probabilidad con la que ocurre su desenlace correspondiente. En otras palabras, si un juego puede dar como resultado el desenlace a_i con probabilidad p_i, entonces la utilidad esperada de ese juego es la suma de cada $u(a_i)$ ponderada por p_i, es decir, por su probabilidad efectiva.

Si u tiene la propiedad de utilidad esperada y $g_s = (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ es un juego de azar simple, entonces, se cumple que:

$$u(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i), \quad \text{para todo vector de probabilidad } (p_1, \ldots, p_n).$$

Con todo lo anterior, la función u queda completamente determinada en todo G por los valores que asume sobre el conjunto finito de desenlaces A.

Si las preferencias de un individuo son representadas por una función de utilidad que posee la propiedad de utilidad esperada(3.8), y si esta persona siempre elige la alternativa más preferida en A, entonces ese individuo elegirá un juego de azar sobre otro si, y solo si, la utilidad esperada del primero supera a la del segundo. Por lo tanto, dicho individuo es un **Maximizador de utilidad esperada**.

Una función con la propiedad de utilidad esperada resulta muy útil, ya que nos permite calcular fácilmente la utilidad de cualquier juego de azar sumando las utilidades de los posibles desenlaces, cada una ponderada por su probabilidad. Sin embargo, esta propiedad es más exigente que la que pedimos en situaciones sin incertidumbre. Por eso, cuando una función cumple con esta propiedad, la llamamos **función de utilidad de von Neumann-Morgenstern (VNM)**.

Lema 1 (Unicidad de la probabilidad de indiferencia)**.** Sea $g \in G$ un juego de azar. Si existen $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que

$$g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \quad \text{y} \quad g \sim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n),$$

entonces se tiene necesariamente que $\alpha = \beta$. Es decir, la probabilidad de indiferencia de g es única.

Demostración: Supongamos, por contradicción, que existen dos probabilidades distintas $\alpha \neq \beta$ tales que:

$$g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \quad \text{y} \quad g \sim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha > \beta$. Entonces, por la **transitividad** del axioma 3.2, tenemos:

$$(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \sim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n).$$

Ahora, aplicando el axioma 3.4 de **monotonicidad**, que establece que:

$$(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \succ (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n) \quad \text{si } \alpha > \beta.$$

Esto contradice la suposición de que ambos juegos son **indiferentes**. Por tanto, no puede haber dos valores distintos $\alpha \neq \beta$ que cumplan:

$$g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \quad \text{y} \quad g \sim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n).$$

Concluimos entonces que $\alpha = \beta$, es decir, la probabilidad de indiferencia es única, como se quería demostrar.

□

A continuación, presentamos un teorema fundamental en la teoría de elección bajo incertidumbre.

Teorema 3.1. ***Existencia de una Función de Utilidad VNM en*** G
Sea una relación de preferencias $\succsim$ *sobre juegos de azar en* G *que satisfaga los axiomas* 3.1 *a* 3.6*. Entonces, existe una función de utilidad* $u : G \to \mathbb{R}$ *que representa* $\succsim$ *en* G*, y dicha función posee la propiedad de utilidad esperada.*

Demostración: Para esta demostración la haremos de manera constructiva. Sea un juego de azar arbitrario g de G. Definimos $u(g)$ como el número que satisface:

$$g \sim (u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n).$$

Por el Axioma 3.3, dicho número debe existir, y se demuestra en el lema 1 que, por el Axioma 3.4, este número es único. Esto define una función real u en G.(Note que, por definición, $u(g) \in [0, 1]$ para todo g[2]).

Resta probar que u representa $\succsim$, y que posee la propiedad de utilidad esperada(3.8). Comenzaremos con la primera de estas propiedades.

Sean $g, g' \in G$ juegos de azar arbitrarios. Afirmamos que las siguientes equivalencias son ciertas:

$$g \succsim g' \tag{3.2}$$

si y solo si

$$(u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n) \succsim (u(g') \circ a_1, (1 - u(g')) \circ a_n) \tag{3.3}$$

[2] $u(g) \in [0, 1]$ para todo $g \in G$, ya que representa la probabilidad asignada al mejor resultado a_1 en una lotería binaria del tipo $(\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n)$ con la cual el individuo es indiferente frente al juego g. Dado que α es una probabilidad, debe pertenecer al intervalo [0, 1].

si y solo si

$$u(g) \geq u(g') \tag{3.4}$$

En efecto, note que (3.2) $\iff$ (3.3) debido a la transitividad de $\succsim$, y dado que $g \sim (u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n)$ y $g' \sim (u(g') \circ a_1, (1 - u(g')) \circ a_n)$, ambas por la definición de u. Además, (3.3) $\iff$ (3.4 sigue directamente de la monotonía (Axioma 3.4).

Para completar la demostración, debemos probar que u posee la propiedad de utilidad esperada. Sea $g \in G$ un juego de azar arbitrario, y sea $g_s \equiv (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) \in G_S$ el juego de azar simple asociado. Debemos mostrar que:

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i).$$

Dado que por 3.6 se tiene que $g \sim g_s$, y dado que u representa $\succsim$, debe cumplirse que $u(g) = u(g_s)$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que:

$$u(g_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i). \tag{3.5}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, por definición, $u(a_i)$ satisface:

$$a_i \sim (u(a_i) \circ a_1, (1 - u(a_i)) \circ a_n). \tag{3.6}$$

Sea q_i el juego de azar simple en el lado derecho de 3.6. Es decir, $q_i \equiv (u(a_i) \circ a_1, (1 - u(a_i)) \circ a_n)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, $q_i \sim a_i$ para todo i, por lo que, aplicando el axioma de sustitución 3.5:

$$g' \equiv (p_1 \circ q^1, \ldots, p_n \circ q^n) \sim (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) = g_s. \tag{3.7}$$

Queremos encontrar el juego de azar simple que resulta de g'. Como cada q_i solo puede dar como resultado a_1 o a_n, entonces g' también terminará en uno de esos dos. La probabilidad de que ocurra a_1 es la siguiente: para cada i, se necesita que ocurra q_i (lo cual pasa con probabilidad p_i) y que dentro de ese q_i, se obtenga a_1, lo que ocurre con probabilidad $u(a_i)$. Así, en total, la probabilidad de que ocurra a_1 es $p_i u(a_i)$ para cada i, y sumando sobre todos los i, obtenemos la probabilidad total:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i).$$

De manera similar, la probabilidad efectiva de que a_n ocurra es $1 - \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i)$.

Por lo tanto, g' es equivalente al juego de azar simple:

$$g'_s \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \circ a_1, \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \right) \circ a_n \right).$$

Por el axioma de reducción 3.6, debe cumplirse que $g' \sim g'_s$. Sin embargo, la transitividad de $\sim$, junto con la ecuación (3.7), implica que:

$$g_s \sim \left(\sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \circ a_1, \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \right) \circ a_n \right). \tag{3.8}$$

Sin embargo, por definición y el lema 1, $u(g_s)$ es el único número que satisface:

$$g_s \sim (u(g_s) \circ a_1, (1 - u(g_s)) \circ a_n). \tag{3.9}$$

Por lo tanto, de (3.8) y (3.9, concluimos que:

$$u(g_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i),$$

como se deseaba probar. □

La conclusión del Teorema 3.1 es la siguiente: si las preferencias de un individuo sobre juegos de azar satisfacen los Axiomas 3.1 a 3.6, entonces existen números de utilidad que pueden ser asignados a los resultados en A de forma que el individuo prefiera un juego sobre otro si y solo si el primero tiene una utilidad esperada mayor que el segundo.

El Teorema 3.1 no solo nos dice que existe una función de utilidad con la propiedad de utilidad esperada (3.8), sino que también explica cómo construirla en la práctica.

Para encontrar la utilidad de un resultado a_i, basta con preguntarle al agente económico qué probabilidad del mejor resultado lo haría indiferente entre una apuesta del tipo $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$ y recibir a_i con certeza.

Si hacemos esta misma pregunta para cada resultado en A, entonces ya podemos calcular la utilidad de cualquier juego $g \in G$ como el valor esperado de esas utilidades. Siempre que las preferencias del agente cumplan con los axiomas 3.1 al 3.6, el teorema asegura que esa función representa correctamente sus preferencias.

Ejemplo 3.1 (Construcción de una función de utilidad VNM)**.** Supongamos que $A = \{\$10, \$4, -\$2\}$, donde cada valor representa miles de dólares. Es razonable asumir que el mejor resultado es \$10 y el peor es $-\$2$.

Para construir la función de utilidad VNM utilizada en la demostración del Teorema 3.1, primero debemos determinar las probabilidades de indiferencia asociadas a cada uno de los tres resultados. Esto se logra componiendo apuestas que ofrecen \$10 y $-\$2$ con probabilidades desconocidas que suman 1. Luego, se le pregunta al individuo: *¿Qué probabilidad para el mejor resultado te haría indiferente entre la apuesta compuesta y el resultado a_i con certeza?* Las respuestas obtenidas serán los valores de utilidad asignados a cada resultado. Supongamos que encontramos lo siguiente:

$$\$10 \sim (1 \circ \$10, 0 \circ -\$2), \quad \text{por lo que} \quad u(\$10) \equiv 1. \tag{3.10}$$

$$\$4 \sim (0.6 \circ \$10, 0.4 \circ -\$2), \quad \text{por lo que} \quad u(\$4) \equiv 0.6 \tag{3.11}$$

$$-\$2 \sim (0 \circ \$10, 1 \circ -\$2), \quad \text{por lo que} \quad u(-\$2) \equiv 0. \tag{3.12}$$

Nota 3.3. La utilidad asignada al resultado intermedio \$4, es decir $u(\$4) = 0.6$, se determina con base en una pregunta clave al individuo: *¿Qué probabilidad de obtener el mejor resultado (\$10) te haría indiferente entre una apuesta entre \$10 y -\$2, y recibir \$4 con certeza?*

Si la persona responde que se siente indiferente cuando la probabilidad de obtener \$10 es 0.6 (y de -\$2 es 0.4), entonces se establece, por construcción de la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern, que:

$$\$4 \sim (0.6 \circ \$10, 0.4 \circ -\$2),$$

y por lo tanto:

$$u(\$4) = 0.6.$$

Este valor refleja la disposición del individuo a aceptar riesgo: cuanto más alto sea $u(\$4)$, mayor será su aversión al riesgo. Un valor de utilidad cercano a 1 para \$4 indica que el individuo prefiere la seguridad de ese monto frente a una apuesta riesgosa, mientras que un valor bajo sugiere mayor disposición a aceptar riesgo. La función de utilidad VNM se construye a partir de estas indiferencias observadas o declaradas, por lo que estos valores no se derivan matemáticamente, sino que se asignan empíricamente o mediante juicio informado del comportamiento del agente.

Es importante destacar que, bajo este mapeo, la utilidad del mejor resultado siempre será 1 y la del peor resultado siempre será 0. Sin embargo, la utilidad asignada a resultados intermedios, como \$4 en este caso, dependerá de la actitud del individuo hacia el riesgo.

Una vez obtenidos los valores de utilidad para cada resultado, tenemos toda la información necesaria para clasificar todas las apuestas que los involucren. Por ejemplo, consideremos las siguientes apuestas:

$$g_1 \equiv (.2 \circ \$4, .8 \circ \$10) \tag{3.13}$$

$$g_2 \equiv (.07 \circ -\$2, .03 \circ \$4, .9 \circ \$10) \tag{3.14}$$

Este enfoque permite modelar y analizar las decisiones bajo incertidumbre, integrando conceptos de la teoría de la utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern.

Asumiendo que las preferencias del individuo sobre las apuestas satisfacen los axiomas 3.1 a 3.6, podemos recurrir al Teorema 3.1. Este teorema nos indica que solo necesitamos calcular la utilidad esperada de cada apuesta, utilizando los valores de utilidad generados en (3.10) a (3.12), para determinar cuál es preferida. Al hacer estos cálculos, obtenemos:

$$\begin{aligned} u(g_1) &= 0.2u(\$4) + 0.8u(\$10) \\ &= 0.2(0.6) + 0.8(1) = 0.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(g_2) &= 0.07u(-\$2) + 0.03u(\$4) + 0.9u(\$10) \\ &= 0.07(0) + 0.03(0.6) + 0.9(1) = 0.918 \end{aligned}$$

Dado que g_1 tiene una mayor utilidad esperada, debe ser la apuesta preferida. De manera similar, utilizando solo los valores de utilidad generados en (3.10) a (3.12), podemos clasificar cualquier cantidad infinita de apuestas que podrían construirse a partir de los tres resultados en A.

Analizando sobre la información que hemos descubierto en este ejemplo. Al comparar \$4 con certeza y la apuesta mejor–peor en (3.11), notamos que la apuesta g ofrecida tiene un valor esperado de $\mathbb{E}(g) = 0.6(\$10) + 0.4(-\$2) = \$5.2$. Este valor supera el \$4 que obtendría con certeza, pero el individuo es indiferente entre ambas opciones. Dado que asumimos que sus preferencias son monótonas, podemos concluir que preferiría estrictamente \$4 con certeza a cualquier apuesta mejor–peor que ofrezca el mejor resultado con una probabilidad menor a 0.6. Esto incluye apuestas con probabilidades iguales de 0.5 para \$10 y -\$2, a pesar de que dicha apuesta y \$4 con certeza tienen el mismo valor esperado de \$4. Esto sugiere que el individuo prefiere evitar el riesgo.

Esta tendencia también se refleja en su clasificación de g_1 y g_2 en (3.13) y (3.14).

Aquí, se prefiere g_1 a g_2, a pesar de que el valor esperado(3.7) de g_1.

$$\mathbb{E}(g_1) = 0.2(4) + 0.8(10) = \$8.80$$

es menor que el de g_2.

$$\mathbb{E}(g_2) = 0.07(-2) + 0.03(4) + 0.9(10) = \$8.98$$

En este caso, g_2 se evita porque incluye un riesgo significativo del peor resultado. Más adelante, mencionaremos la aversión al riesgo y su medición, pero este ejemplo ayuda a ilustrar cómo una función de utilidad VNM resume aspectos importantes sobre la disposición de un individuo a asumir riesgos. Y este ejemplo muestra el caso en que las decisiones entre apuestas difieren según las condiciones de incertidumbre o certeza.

3.3.1. Relación entre la función de utilidad VNM y la utilidad bajo certeza

Veremos la relación entre la función de utilidad VNM con la función de utilidad ordinaria bajo certeza. En el caso estándar, si un individuo es indiferente entre dos canastas de bienes, ambas reciben el mismo número de utilidad, mientras que si una canasta es preferida sobre otra, su número de utilidad debe ser mayor. Esto también es cierto para la función de utilidad VNM $u(g)$, aunque debemos sustituir "canasta de bienes" por "apuesta", al decir sustituir nos referimos a la interpretación de los términos que ahora manejaremos.

Sin embargo, en la teoría del consumidor, los números de utilidad tienen solo un significado ordinal. Cualquier transformación monótona de una representación de utilidad da lugar a otra representación válida. Por otro lado, los números de utilidad asociados con una representación VNM de preferencias sobre apuestas tienen un contenido que va más allá de la ordinalidad.

Para ilustrar esto, supongamos que $A = \{a, b, c\}$, donde $a \succ b \succ c$, y que las preferencias satisfacen 3.1 a 3.6. Por 3.3 y 3.4, existe un $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$$b \sim (\alpha \circ a, (1 - \alpha) \circ c).$$

Este resultado nos permite entender cómo la función de utilidad VNM no solo ordena las preferencias, sino que también captura la actitud del individuo hacia el riesgo, lo que es fundamental para el análisis de decisiones bajo incertidumbre.

Note que el número de probabilidad α está determinado por las preferencias del individuo o agente que toma las decisiones. Este número tiene un significado intrínseco y no puede ser modificado (duplicado, sumado a una constante o transformado de cualquier manera) sin alterar las preferencias que representa.

Supongamos que u es una representación de utilidad VNM de las preferencias $\succsim$. Entonces, la relación de indiferencia mencionada anteriormente implica que:

$$\begin{aligned} u(b) &= u(\alpha \circ a, (1 - \alpha) \circ c) \\ &= \alpha u(a) + (1 - \alpha) u(c), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se deriva de la propiedad de utilidad esperada de u. Esta igualdad puede reorganizarse para obtener:

$$\frac{u(a) - u(b)}{1 - \alpha} = \frac{u(b) - u(c)}{\alpha}.$$

$$\frac{u(a) - u(b)}{u(b) - u(c)} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Por lo tanto, los cocientes de las diferencias entre los números de utilidad están únicamente determinados por α. Dado que α está determinado de manera única por las preferencias del agente que toma decisiones, este cociente de diferencias de utilidad también está determinado de manera única.

Se concluye que el cociente de diferencias de utilidad tiene un significado inherente con respecto a las preferencias del individuo y debe tomar el mismo valor para cualquier representación de utilidad VNM de $\succsim$. Por lo tanto, las representaciones de utilidad VNM proporcionan información que va más allá de lo ordinal, ya que, de lo contrario, mediante transformaciones monótonas adecuadas, estos cocientes podrían asumir muchos valores diferentes.

Claramente, una transformación estrictamente creciente de una representación de utilidad VNM no necesariamente dará lugar a otra representación de utilidad VNM. (Por supuesto, sigue siendo una representación de utilidad, pero no necesariamente conserva la propiedad de utilidad esperada). Esto plantea la siguiente pregunta: ¿cuál es la clase de representaciones de utilidad VNM para un orden de preferencia dado?. Con base en las consideraciones anteriores, estas representaciones deben preservar los cocientes de diferencias de utilidad. Como muestra el siguiente resultado, esta propiedad proporciona una caracterización completa.

Teorema 3.2 (Unicidad de funciones de utilidad VNM salvo transformaciones afines positivas)**.** *Supongamos que la función de utilidad VNM $u(\cdot)$ representa las preferencias $\succsim$. Entonces, la función de utilidad VNM $v(\cdot)$ representa las mismas preferencias si y solo si, para algún escalar α y algún escalar $\beta > 0$, se cumple que:*

$$v(g) = \alpha + \beta u(g),$$

para todas las apuestas g.

Este teorema solo lo pondremos de manera expositiva.
Antes de enunciar el Teorema 3.2, mencionamos que la clase de representaciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern (VNM) de una relación de preferencia única se caracteriza por la constancia de los cocientes entre las diferencias de utilidad.

El Teorema 3.2 dice que las funciones de utilidad esperada (VNM) no son únicas: se pueden transformar multiplicando por un número positivo y/o sumando una constante, y aún así seguir representando las mismas preferencias y manteniendo la propiedad de utilidad esperada.

Sin embargo, esto no significa que el valor numérico de la utilidad tenga un significado absoluto. Solo podemos decir si un juego es preferido a otro, pero no podemos medir cuánta más utilidad da, ni comparar utilidades entre personas.

3.4. Aversión al riesgo

En el Ejemplo 3.1 se argumentó que la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern (VNM) construida es afectada por cierta aversión al riesgo. Ahora estamos en condiciones de definir y describir formalmente la aversión al riesgo con base en la teoría desarrollada hasta ahora.

Consideramos juegos de azar cuyos **resultados son niveles de riqueza** $w_i \geq 0$, con probabilidades p_i que suman 1. Aunque el conjunto de resultados $A = \mathbb{R}^+$ es infinito, supondremos que cada juego tiene sólo un número finito de resultados con probabilidad estrictamente positiva.

Además, se asume que la **función de utilidad VNM** $u(w)$ del agente es **diferenciable y estrictamente creciente**, es decir, $u'(w) > 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^+$. Esto refleja que niveles más altos de riqueza son siempre preferibles.

Bajo estas condiciones, podemos estudiar la **actitud del agente frente al riesgo** comparando el valor esperado de un juego con la utilidad esperada que le asigna. La definición 3.7 nos permite calcular dicho valor esperado para analizar estas decisiones, dando paso a dos definiciones.

Definición 3.9 (Utilidad esperada de un juego de azar (VNM)). *Sea $g = (p_1 \circ w_1, \ldots, p_n \circ w_n)$ un juego de azar simple, donde cada w_i representa un nivel de riqueza y cada $p_i \in [0, 1]$ es la probabilidad asociada a ese resultado, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Si $u(\cdot)$ es una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern que representa las preferencias del individuo sobre G, entonces la **utilidad esperada del juego de azar** g está dada por:*

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i) \tag{3.15}$$

Esta expresión corresponde al valor esperado de la función de utilidad u aplicada a los posibles niveles de riqueza del juego. Se asume que el individuo elige entre juegos de azar maximizando esta utilidad esperada.

Definición 3.10 (Utilidad VNM del valor esperado de un juego). *Sea $g = (p_1 \circ w_1, \ldots, p_n \circ w_n)$ un juego de azar simple con valor esperado $\mathbb{E}(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i$. Entonces, la **utilidad de recibir con certeza el valor esperado del juego** g está dada por:*

$$u(\mathbb{E}(g)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i\right) \tag{3.16}$$

Esta expresión representa la utilidad que tendría el individuo si, en lugar de enfrentar la incertidumbre del juego, recibiera con certeza la riqueza promedio que dicho juego ofrece. Comparar esta cantidad con la utilidad esperada del juego (3.9) permite estudiar la actitud del individuo frente al riesgo.

Si las preferencias del agente satisfacen los Axiomas 3.1 a 3.6, entonces siempre elegirá el juego con mayor utilidad esperada. En este contexto, si una persona prefiere recibir con certeza el valor esperado de un juego en lugar de asumir el riesgo, decimos que es **aversa al riesgo**.

Sin embargo, también es posible que un individuo sea **neutral** o incluso **amante del riesgo** sin violar los axiomas anteriores. Estas diferencias se reflejan en la forma de su función de utilidad.

Como se explicó tras la Definición 3.8, una función de utilidad VNM queda completamente determinada por los valores que asigna a cada resultado posible. Por ello, es suficiente analizar la función en juegos de azar simples G_S para entender cómo una persona percibe y reacciona ante el riesgo.

Esta idea nos lleva a clasificar formalmente las distintas actitudes frente al riesgo.

Definición 3.11 (Aversión, Neutralidad y Preferencia por el Riesgo)**.** *Sea $u(\cdot)$ la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern (VNM) de un individuo para juegos de azar sobre niveles no negativos de riqueza. Dado un juego de azar simple $g = (p_1 \circ w_1, \ldots, p_n \circ w_n)$, se dice que el individuo es:*

1. ***Adverso al riesgo en** g si $u(\mathbb{E}(g)) > u(g)$.*
2. ***Neutral al riesgo en** g si $u(\mathbb{E}(g)) = u(g)$.*
3. ***Preferente del riesgo en** g si $u(\mathbb{E}(g)) < u(g)$.*

Si el individuo exhibe una de estas actitudes para todo juego de azar simple no degenerado g [3], se dice simplemente que es adverso al riesgo, neutral al riesgo o preferente al riesgo (sobre G para enfatizarlo).

Las actitudes de: adverso, neutral o preferente al riesgo, equivalen matemáticamente a las propiedades de la función de utilidad: cóncava, lineal y estricatamente convexa, respectivamente.

Para ilustrar la aversión al riesgo, consideremos un juego de azar simple con dos posibles resultados:

$$g \equiv (p \circ w_1, (1-p) \circ w_2).$$

Supongamos que el individuo debe elegir entre recibir con certeza el valor esperado del juego, $\mathbb{E}(g) = pw_1 + (1-p)w_2$, o participar en el juego mismo. Evaluamos ambas opciones:

$$u(g) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)$$
$$u(\mathbb{E}(g)) = u(pw_1 + (1-p)w_2).$$

En la Figura 3.1, se ha representado gráficamente una función de utilidad estrictamente cóncava en la riqueza. La linea entre los puntos $R = (w_1, u(w_1))$ y $S =$

[3]Un juego de azar simple es no degenerado si asigna una probabilidad estrictamente positiva a al menos dos niveles de riqueza distintos.

$(w_2, u(w_2))$ representa sus combinaciones convexas, con el punto $T = pR+(1-p)S$. Como se observa en la gráfica, la concavidad de $u(w)$ implica que $u(\mathbb{E}(g)) > u(g)$, lo que confirma la aversión al riesgo del individuo.

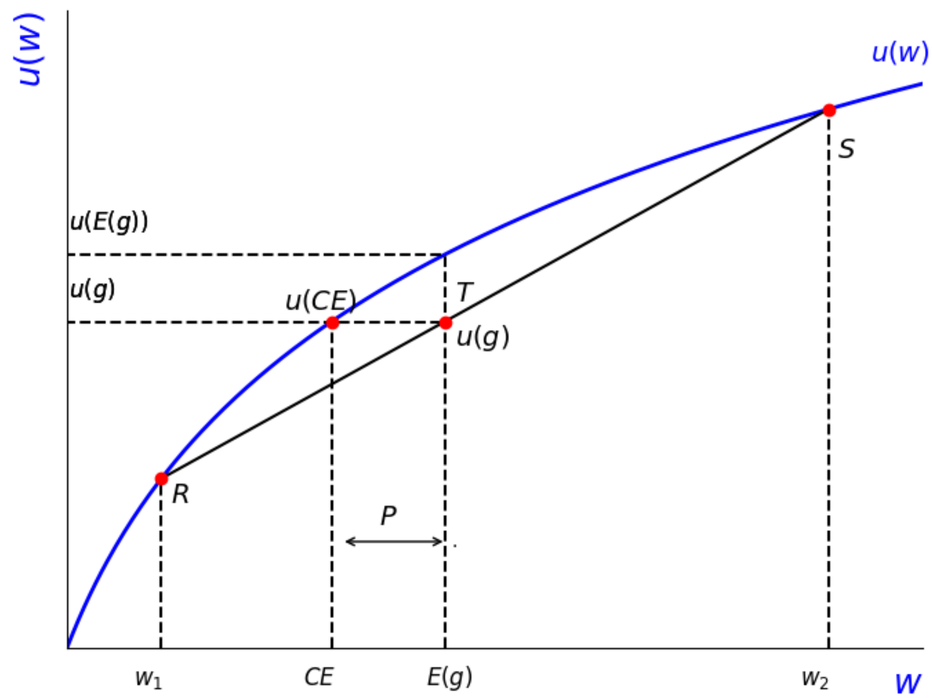

Figura 3.1: Aversión al riesgo y estricta concavidad de una función de utilidad VNM

El individuo prefiere recibir $\mathbb{E}(g)$ con certeza en lugar de enfrentar la apuesta g. Sin embargo, existe un nivel de riqueza que haría al individuo indiferente entre aceptar dicha cantidad con certeza o enfrentar la apuesta g. A este nivel de riqueza se le denomina *equivalente cierto* de la apuesta g. En esencia, una persona adversa al riesgo está dispuesta a pagar una cantidad positiva de riqueza para evitar la incertidumbre inherente a la apuesta. Esta disposición a pagar para evitar el riesgo se mide mediante la *prima de riesgo*.

Tanto el *equivalente cierto* como la *prima de riesgo* se ilustran en la Figura 3.1.

Definición 3.12 (Equivalencia de certeza y Prima de Riesgo)**.** *El equivalente cierto de una apuesta simple g sobre niveles de riqueza es la cantidad de riqueza CE ofrecida con certeza tal que $u(g) \equiv u(CE)$.*

La prima de riesgo es la cantidad de riqueza P tal que $u(g) \equiv u(\mathbb{E}(g) - P)$. Claramente, se cumple que $P \equiv \mathbb{E}(g) - CE$.

Ejemplo 3.2. Supongamos que la función de utilidad del individuo está dada por $u(w) \equiv \ln(w)$. Dado que esta función es estrictamente cóncava en la riqueza, el individuo es adverso al riesgo.

Consideremos una apuesta g con probabilidades 50–50 de ganar o perder una cantidad de riqueza h, de modo que si la riqueza inicial del individuo es w_0, la apuesta se expresa como:

$$g \equiv \left(\frac{1}{2} \circ (w_0 + h), \frac{1}{2} \circ (w_0 - h) \right),$$

note que $\mathbb{E}(g) = w_0$.

El equivalente cierto de g debe satisfacer:

$$\ln(CE) = \frac{1}{2} \ln(w_0 + h) + \frac{1}{2} \ln(w_0 - h) = \ln \left(\sqrt{w_0^2 - h^2} \right).$$

Por lo tanto, se obtiene que:

$$CE = \sqrt{w_0^2 - h^2} < \mathbb{E}(g),$$

$$P = w_0 - \sqrt{w_0^2 - h^2} > 0.$$

En muchos casos, no solo nos interesa saber si un individuo es adverso al riesgo, sino también en *cuánto* adverso es, es decir medir el riesgo. Idealmente, deseamos una medida que nos permita comparar el grado de aversión al riesgo entre distintos individuos y analizar cómo varía esta aversión en función del nivel de riqueza de un mismo individuo.

Dado que la aversión al riesgo y la concavidad de la función de utilidad VNM en términos de riqueza son equivalentes, una medida natural de la aversión al riesgo es la segunda derivada de la función de utilidad, $u''(w)$, la cual cuantifica la *curvatura* de la función. En principio, podríamos pensar que cuanto mayor sea el valor absoluto de esta derivada, mayor será el grado de aversión al riesgo.

La segunda derivada de la función de utilidad proporciona información sobre la actitud del individuo hacia el riesgo. Sin embargo, su magnitud por sí sola no es una medida adecuada de la aversión al riesgo. El Teorema 3.2 establece que las funciones de utilidad VNM son únicas bajo transformaciones afines, lo que implica que cualquier segunda derivada puede modificarse arbitrariamente mediante la multiplicación de $u(\cdot)$ por una constante positiva apropiada.

Tomando en cuenta este problema, Arrow [1] y Pratt [18] propusieron la siguiente medida de aversión absoluta al riesgo.

Definición 3.13 (Medida de Aversión Absoluta al Riesgo de Arrow-Pratt)**.** *La medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt está dada por:*

$$R_a(w) \equiv -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

El signo de esta medida proporciona inmediatamente información sobre la actitud del individuo frente al riesgo:

- Si $R_a(w) > 0$, el individuo es adverso al riesgo.
- Si $R_a(w) = 0$, el individuo es neutral al riesgo.
- Si $R_a(w) < 0$, el individuo es preferente al riesgo.

Además, esta medida es invariante ante transformaciones afines de la función de utilidad.Para demostrar la relevancia de la medida de Arrow-Pratt, se puede establecer que los consumidores con mayores valores de $R_a(w)$ son efectivamente más adversos al riesgo. Para ilustrar esta idea, supongamos que existen dos consumidores, 1 y 2, con funciones de utilidad VNM $u(w)$ y $v(w)$, respectivamente. La riqueza w puede tomar cualquier valor no negativo.
Suponemos que, para todo nivel de riqueza w, la medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt del consumidor 1 es mayor que la del consumidor 2:

$$R_a^1(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} > -\frac{v''(w)}{v'(w)} = R_a^2(w), \quad \forall w \geq 0.$$

donde asumimos que $u'(w)$ y $v'(w)$ son estrictamente positivas.

Para simplificar, suponemos que $v(w)$ toma todos los valores en $[0, \infty)$. Definimos la función auxiliar $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ como:

$$h(x) = u(v^{-1}(x)), \quad \forall x \geq 0 \tag{3.17}$$

Dado que u y v son dos veces diferenciables, la función h hereda esta propiedad y satisface:

$$h'(x) = \frac{u'(v^{-1}(x))}{v'(v^{-1}(x))} > 0,$$

$$h''(x) = \frac{u'(v^{-1}(x))}{[v'(v^{-1}(x))]^2}\left[\frac{u''(v^{-1}(x))}{u'(v^{-1}(x))} - \frac{v''(v^{-1}(x))}{v'(v^{-1}(x))}\right] < 0.$$

La primera desigualdad se debe a que u' y v' son estrictamente positivas, mientras que la segunda sigue de la condición inicial sobre $R_a^1(w)$ y $R_a^2(w)$. Por lo tanto, h es estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Ahora consideremos una apuesta $g = (p_1 \circ w_1, \ldots, p_n \circ w_n)$ sobre distintos niveles de riqueza. Podemos usar la función h (3.17) y el hecho de que es cóncava para demostrar que esta apuesta es menor para el consumidor 1 que para el consumidor 2.

Sea $\hat{w}_i$ el monto que hace indiferente entre la apuesta y recibir dicho monto con certeza para el consumidor i:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i) = u(\hat{w}_1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v(w_i) = v(\hat{w}_2).$$

Queremos demostrar que $\hat{w}_1 < \hat{w}_2$. Sustituyendo $x = v(w)$ en la función h y aplicando las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$u(\hat{w}_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i h(v(w_i)) < h\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v(w_i)\right) = h(v(\hat{w}_2)) = u(\hat{w}_2).$$

La desigualdad proviene de *la desigualdad de Jensen* A.3 [9, p. 25], ya que h es estrictamente cóncava. Dado que u es estrictamente creciente, se sigue que $\hat{w}_1 < \hat{w}_2$.

Por lo tanto para cualquier apuesta es menor para el consumidor 1 que para el consumidor 2. Esto implica que, si ambos consumidores tienen la misma riqueza inicial, el consumidor 2 aceptará cualquier apuesta que el consumidor 1 acepte, pero no necesariamente al revés. Es decir, el consumidor 1 está menos dispuesto a aceptar apuestas en comparación con el consumidor 2.

Además, hemos demostrado que si la medida de Arrow-Pratt satisface la relación $R_a^1(w) > R_a^2(w)$ para todo w, entonces la función de utilidad $u(w)$ es una transformación cóncava de $v(w)$ en el sentido de que:

$$u(w) = h(v(w)), \quad \forall w \geq 0,$$

donde h es una función estrictamente cóncava. Esto refuerza la idea de que el consumidor 1 es más adverso al riesgo que el consumidor 2.

La medida de aversión absoluta al riesgo $R_a(w)$ es una medida local, por lo que no necesariamente se mantiene constante en todos los niveles de riqueza. En general, se espera que las actitudes hacia el riesgo varíen con la riqueza de manera coherente. Arrow propuso una clasificación de funciones de utilidad VNM basada en la forma en que $R_a(w)$ cambia con la riqueza. Específicamente, se dice que una función de utilidad exhibe aversión absoluta al riesgo constante, decreciente o creciente sobre un cierto dominio de riqueza si $R_a(w)$ permanece constante, disminuye o aumenta a medida que la riqueza aumenta, respectivamente.

Entre estas clasificaciones, la aversión absoluta al riesgo decreciente (*Decreasing Absolute Risk Aversion*, DARA) es una restricción generalmente razonable de imponer. Si la aversión absoluta al riesgo fuera constante, un individuo no mostraría mayor disposición a aceptar pequeñas apuestas a medida que su riqueza aumenta. Por otro lado, si la aversión absoluta al riesgo fuera creciente, se presentaría un comportamiento poco intuitivo: a mayor riqueza, mayor aversión a aceptar una misma apuesta. En contraste, la condición DARA impone la restricción más plausible de que un individuo con mayor riqueza sea menos adverso a tomar pequeños riesgos.

Ejemplo 3.3. Considérese a un inversionista que debe decidir cuánto de su riqueza inicial w asignar a un activo riesgoso. Dicho activo puede generar tasas de retorno r_i positivas o negativas con probabilidades p_i, donde $i = 1, \ldots, n$. Si β representa la cantidad de riqueza invertida en el activo riesgoso, la riqueza final en el estado i estará dada por:

$$(w - \beta) + (1 + r_i)\beta = w + \beta r_i.$$

El problema del inversionista consiste en elegir β para maximizar la utilidad esperada de su riqueza, lo cual se puede formular como el siguiente problema de optimización en una variable:

$$\begin{aligned} &\max_{\beta} \sum_{i=1}^{n} p_i u(w + \beta r_i) \\ &\text{s.a.} \quad 0 \leq \beta \leq w. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Primero, se analiza en qué condiciones un inversionista adverso al riesgo decidiría no invertir en el activo riesgoso. En tal caso, se obtendría una solución en la frontera, es decir, $\beta^* = 0$, lo que implica que la derivada de la función objetivo en β^* debe ser no positiva. Derivando la utilidad esperada respecto de β y evaluando en $\beta^* = 0$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u'(w + \beta^* r_i) r_i = u'(w) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \leq 0.$$

La sumatoria del lado derecho es el retorno esperado del activo riesgoso. Como $u'(w) > 0$, se concluye que un inversionista adverso al riesgo evitará completamente el activo riesgoso si y solo si su retorno esperado es no positivo. Alternativamente, si el activo riesgoso tiene un retorno esperado estrictamente positivo, el inversionista siempre preferirá invertir parte de su riqueza en él.

Supongamos ahora que el activo riesgoso tiene un retorno esperado positivo, de modo que se descarta la posibilidad de $\beta^* = 0$. Además, asumimos que la solución óptima es interior, es decir, $\beta^* < w$. Las condiciones de primer y segundo orden para un máximo interior de la función objetivo son:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u'(w+\beta^* r_i) r_i = 0 \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i^2 < 0 \tag{3.20}$$

donde la segunda condición es estricta debido a la aversión al riesgo del inversionista.
A continuación, se analiza cómo varía la cantidad de riqueza invertida en el activo riesgoso conforme la riqueza inicial w aumenta. La observación empírica sugiere que, en general, a mayor riqueza, el inversionista destina una cantidad absoluta mayor de su riqueza a activos riesgosos, lo que sugiere que estos activos se comportan como *bienes normales*. Se demostrará que esto es cierto bajo la hipótesis de *Decreasing Absolute Risk Aversion* (DARA).
Tratando a β^* como una función de w, diferenciando la ecuación de primer orden (3.20) respecto a w, se obtiene:

$$\frac{d\beta^*}{dw} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i^2} \tag{3.21}$$

La aversión al riesgo asegura que el denominador en (3.21) es negativo, por lo que los activos riesgosos serán normales si el numerador también es negativo. En textos como [14] y [11] se tiene que DARA es suficiente para garantizar esto.

Se usa la definición de la medida de aversión absoluta al riesgo $R_a(w+\beta^* r_i)$:

$$-u''(w+\beta^* r_i) r_i = R_a(w+\beta^* r_i) r_i u'(w+\beta^* r_i), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.22}$$

Bajo la hipótesis DARA, se cumple que $R_a(w) > R_a(w+\beta^* r_i)$ cuando $r_i > 0$ y $R_a(w) < R_a(w+\beta^* r_i)$ cuando $r_i < 0$. Multiplicando ambos lados de estas desigualdades por r_i, se obtiene en ambos casos:

$$R_a(w) r_i > R_a(w+\beta^* r_i) r_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.23}$$

Sustituyendo $R_a(w)$ en la ecuación (3.22) y usando la ecuación (3.23), se obtiene:

$$-u''(w+\beta^* r_i) r_i < R_a(w) r_i u'(w+\beta^* r_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tomando valores esperados en ambos lados, se obtiene:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i < R_a(w) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i u'(w+\beta^* r_i) = 0 \tag{3.24}$$

donde la última igualdad se sigue de (3.19).

Se concluye entonces que, cuando el comportamiento del individuo exhibe DARA, la expresión obtenida en (3.21) es positiva, lo que implica que la cantidad de riqueza invertida en el activo riesgoso aumenta conforme la riqueza inicial se incrementa.

Para terminar este capítulo debemos notar que toda la teoría desarrollada en los capítulos es sobre una economía ideal y no consideramos variaciones en los precios ni tampoco como afecta la situación global al mercado.

Nota 3.4. En el contexto de la teoría económica, los mercados bursátiles representan un entorno ideal para aplicar y evaluar el comportamiento de un **agente racional**(3.1). Según esta teoría, los individuos toman decisiones para maximizar su utilidad esperada bajo condiciones de incertidumbre.

En los mercados financieros, los agentes eligen entre diversas alternativas de inversión como acciones, bonos, derivados que implican distintos niveles de riesgo y retorno. Desde este enfoque, cada alternativa se modela como un *juego de azar*, lo que permite aplicar la teoría de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

La racionalidad económica implica que los agentes evalúan las decisiones según sus preferencias y actitud frente al riesgo. Sin embargo, la evidencia empírica muestra que los agentes no siempre se comportan racionalmente. Estos fenómenos han motivado el desarrollo de la **economía del comportamiento**, que extiende el modelo tradicional del agente racional para capturar desviaciones observadas en los mercados reales.

Capítulo 4

Algunas aplicaciones de la utilidad de von Neumann-Morgenster

Ituvi-Shaa.
(Nuevo Amanecer)
Región mixteca baja

Para este capítulo se construye una aplicación acorde al titulo de la tesis y damos una breve descripción de como se extiende la teoría del consumidor a contextos de incertidumbre, donde la probabilidad juega un papel importante en la utilidad ya que nos ayuda a comprender la ocurrencia de un evento y su influencia en la toma de decisiones donde se busca maximizar la utilidad esperada.

4.1. Evaluación de productos financieros bajo incertidumbre: una aplicación de utilidad esperada con datos de la CONDUSEF

El objetivo de esta sección es aplicar de forma sencilla la teoría de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern (VNM) para modelar la elección racional de un consumidor entre distintas alternativas de productos financieros ofrecidos por instituciones registradas ante la CONDUSEF. La comparación se realiza bajo condiciones de riesgo, utilizando funciones de utilidad específicas que capturan la aversión al riesgo.

4.1.1. Selección del producto financiero

Después de una revisión de los datos públicos ofrecidos por la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (CONDUSEF), se eligieron **seguros de automóvil de cobertura amplia**, debido a su alta disponibilidad de datos comparativos, su impacto directo sobre el bienestar financiero de los usuarios, y su relevancia práctica como decisión de consumo bajo incertidumbre.

4.1.2. Obtención de datos

La CONDUSEF publica periódicamente evaluaciones de aseguradoras con base en el número de reclamaciones por cada millón de riesgos asegurados, así como el porcentaje de resoluciones favorables al usuario. Estos datos se encuentran disponibles en la herramienta "Buró de Entidades Financieras", en el sitio web oficial de la CONDUSEF obtenidos en su página oficial [4] y [7]. Vale observar la siguiente definición para la tabla de datos recopilados de CONDUSEF para la cuarta columnas de la tabla.

Definición 4.1 (Prima estimada)**.** *La prima estimada en un seguro de auto es el precio que el asegurado paga a la aseguradora para recibir la cobertura de la póliza. Es decir, es la cantidad de dinero que pagas para que la aseguradora te cubra los daños o gastos en caso de accidente, robo u otros eventos contemplados en tu póliza.*

Con esto en mente para la prima estimada de este ejercicio usaremos de base un auto compacto 2022 ya que para la columna 4 se consultaron los precios en simuladores en linea ofrecidos por las aseguradoras correspondientes seleccionando el código postal de Oaxaca (68000), obteniendo así el precio anual de cobertura amplia. [1] A continuación incluimos las referencias de estos simuladores de precios.

Aseguradora 1:[15]

Aseguradora 2:[20]

Aseguradora 3:[19]

Para esta aplicación se utilizaron los siguientes datos correspondientes al año 2023:

[1]Para efectos ilustrativos y sin pérdida de generalidad, se han asumido primas promedio anuales basadas en simulaciones aproximadas de mercado con vehículos estándar en la región de Oaxaca, esto también debido a las diferentes versiones del auto compacto. Estos valores se mantienen constantes para facilitar la comparación.

Aseguradora	**Reclamaciones / millón**	**% Resoluciones a favor**	**Prima estimada**
1	1146	24 %	\$7,500
2	909	10 %	\$6,800
3	866	40 %	\$6,200

Tabla 4.1: Datos de aseguradoras disponibles en CONDUSEF (2023).

4.2. Modelo de incertidumbre

Para cada uno de los productos financieros anteriores (seguros), representamos el posible resultado de contratar el producto como una lotería:

$$g = (p_1 \circ a_1, p_2 \circ a_2)$$

Donde:

- a_1 representa el resultado favorable para el usuario: recibir la indemnización en caso de siniestro (por ejemplo,\$300,000 - prima estimada(4.1).)[2]
- a_2 representa el resultado desfavorable: no recibir indemnización, incurriendo en una pérdida total por daños (asumida en \$0).
- p_1 es la probabilidad de resolución favorable (éxito), estimada mediante el porcentaje de resoluciones a favor del cliente.
- $p_2 = 1 - p_1$ es la probabilidad de no recibir compensación.

[3]

$$g_1 \equiv (0.24 \circ \$300000, 0.76 \circ \$0) \tag{4.1}$$

$$g_2 \equiv (0.10 \circ \$300000, 0.9 \circ \$0) \tag{4.2}$$

$$g_3 \equiv (0.40 \circ \$300000, 0.60 \circ \$0) \tag{4.3}$$

Observese que para nuestro ejemplo el nivel de riqueza asegurado w_0 de \$3000,000 lo tomamos con base en que el valor del auto esta dentro del tope que cubren las asegurados para el informe del 18 de enero de 2024 consultado en [6].

[2]Note que esta indemnización la tomamos con base en el valor comercial asegurado que cubren los seguros según la CONDUSEF para enero de 2024, esto pues no en su sitio no tenian información para 2023.

[3]Vale observar que el símbolo $\equiv$ se esta usando aquí de esta manera pues este no es el resultado total favorable o desfavorable de la apuesta, falta restar la prima estimada(4.1) y falta aplicar la función de utilidad VNM.

Función de utilidad

Para capturar la actitud del consumidor frente al riesgo, utilizamos una función de utilidad VNM con aversión al riesgo, definida sobre la riqueza final del individuo:

$$u(w) = \sqrt{w}$$

Vale observar que a diferencia del ejemplo (3.1) aquí estamos dando esta función exponiendo que el consumidor es adverso al riesgo. Dado que el consumidor cuenta con una riqueza inicial $w_0 = \$300,000$ este valor con base al precio de agencia del auto tomado, que por las versiones puede variar (además de que la versión "austera" superaba esta cantidad), pero nosotros por estas razones tomaremos su valor inferior en ciento de miles de pesos mexicanos.

Nota 4.1. Note que la función $u(w) = \sqrt{w}$ la pudimos haber tomado como $u(w) = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{300{,}000}}$ la cual garantiza que $u(0) = 0$ y $u(3000, 000) = 1$ esto si queremos modelar una apuesta del tipo mejor-peor, pero no es nuestro caso ya que las probabilidades están dadas por el porcentaje de resoluciones a favor de la tabla 4.1, con base a esto contruimos las apuestas mejor-peor, pero vale observar que el teorema 3.2 garantiza unicidad de la función VNM salvo transformaciones afines además que el axioma 3.6 da la seguridad de poder reducir esta apuesta a alguna apuesta simple con las condiciones sobre la utilidad que hablamos en el teorema 3.1 ya que aquí se utilizo $u(g) \in [0, 1]$ pero al final se trabajo sobre $u(g_s)$.

La utilidad esperada al contratar un seguro de auto se modela como una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern:

$$\begin{aligned} u(g) &= \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \\ &= p_1 \cdot u(w_0 - \text{prima}) + p_2 \cdot u(0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que para a_1 la modelamos como $a_1 = w_0 - prima$, para a_2 la modelamos como 0 pues para nuestras funciones no tienen dominio en los números negativos, pues es el nivel de riqueza que tiene un individuo, esto es la cantidad asegurada menos la cantidad que paga por contar con el seguro que es la prima.
Cada aseguradora puede ser evaluada con esta fórmula.

Para la aseguradora 1 ($p_1 = 0.24$, prima = \$7,500):

$$\begin{aligned} u(g_1) &= 0.24 \cdot \sqrt{300{,}000 - 7{,}500} + 0.76 \cdot \sqrt{0} \\ &= 129.8 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para la aseguradora 2 ($p_1 = 0.10$, prima = \$6,800):

$$\begin{aligned} u(g_2) &= 0.10 \cdot \sqrt{300{,}000 - 6{,}800} + 0.90 \cdot \sqrt{0} \\ &= 54.148 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para la aseguradora 3 ($p_1 = 0.40$, prima = \$6,200):

$$\begin{aligned} u(g_3) &= 0.40 \cdot \sqrt{300{,}000 - 6{,}200} + 0.60 \cdot \sqrt{0} \\ &= 216.81 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Los valores resultantes permiten comparar las opciones disponibles desde la perspectiva de un consumidor racional con aversión al riesgo, eligiendo la aseguradora 3.
Analicemos la información obtenida hasta aquí, con base en el ejemplo 3.1, necesitamos también calcular el valor esperado(3.7).

Para la aseguradora 1 ($p_1 = 0.24$, prima = \$7,500):
$\mathbb{E}(g_1) = 0.24(300{,}000 - 7{,}500) + 0.76(0) = 70200$.

Para la aseguradora 2 ($p_1 = 0.10$, prima = \$6,800):
$\mathbb{E}(g_2) = 0.10(300{,}000 - 6{,}800) + 0.90(0) = 29320$.

Para la aseguradora 3 ($p_1 = 0.40$, prima = \$6,200):
$\mathbb{E}(g_3) = 0.4(300{,}000 - 6{,}200) + 0.6(0) = 117520$.

Ahora con base en la definición 3.10, conviene evaluar este resultado en la función de untilidad VNM $\sqrt{w}$.
Para la aseguradora 1:

$$u(\mathbb{E}(g_1)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i\right) = u(70200) = \sqrt{70200} = 264.95$$

Para la aseguradora 2:

$$u(\mathbb{E}(g_2)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i\right) = u(29320) = \sqrt{29320} = 171.23$$

Para la aseguradora 3:

$$u(\mathbb{E}(g_3)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i\right) = u(117520) = \sqrt{117520} = 342.81$$

Aquí a diferencia del ejemplo 3.1 tenemos que g_3 se prefiere pues su valor

Aseguradora	**Utilidad esperada** $u(g_i)$	**Utilidad del valor esperado** $u(\mathbb{E}(g_i))$
1	129.80	264.95
2	54.148	171.23
3	216.81	342.81

Tabla 4.2: Comparación entre utilidad esperada y utilidad del valor esperado con función $u(w) = \sqrt{w}$.

esperado del juego(3.7) es mayor al de g_2 y g_1, además que en este caso coincidió que la utilidad del valor esperado del juego(3.10), sea también mayor para g_3 que para g_2 y g_1. Esto implica que el agente encargado de tomar decisiones tiene una actitud positiva a tomar el riesgo de elegir el juego g_3, es decir escogerá la aseguradora 3.

A diferencia del ejemplo 3.1, donde el individuo evita apuestas con mayor valor esperado debido a su aversión al riesgo, en este caso se prefiere g_3 (la aseguradora 3) tanto por su valor esperado como por la utilidad que genera bajo una función VNM. Esto indica que, en el contexto específico del seguro automotriz evaluado, la alternativa con mayor exposición al riesgo es también la que ofrece mayor beneficio esperado y mayor satisfacción esperada para un consumidor racional.
Este resultado sugiere que el consumidor percibe que los posibles beneficios de contratar con la aseguradora 3 compensan el riesgo involucrado. La coincidencia entre el valor esperado y la utilidad esperada indica que, en este caso, el consumidor no evita el riesgo, sino que lo acepta como parte de una decisión racional. Esto muestra cómo la teoría de utilidad VNM permite entender mejor cómo se toman decisiones financieras bajo incertidumbre.

Note que en caso contrario modelando un consumidor preferente del riesgo debemos tomar la funcion convexa $u(w) = w^2$.

Función de utilidad

Para capturar la actitud del consumidor frente al riesgo, ahora utilizamos una función de utilidad VNM con **preferencia al riesgo**, definida sobre la riqueza final del individuo:

$$u(w) = w^2$$

A diferencia del caso anterior, esta función representa a un consumidor que prefiere tomar riesgos, ya que su utilidad crece más que proporcionalmente con la riqueza. Conservamos la misma riqueza inicial $w_0 = \$300{,}000$.

Nota 4.2. La función $u(w) = w^2$ también cumple las condiciones necesarias para ser una función de utilidad VNM, y su elección refleja actitudes distintas frente al riesgo. De acuerdo con el teorema 3.2, cualquier otra función que represente las mismas preferencias debe ser una transformación afín positiva de esta.

La utilidad esperada al contratar un seguro de auto se modela como una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern:

$$\begin{aligned} u(g) &= \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \\ &= p_1 \cdot u(w_0 - \text{prima}) + p_2 \cdot u(0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para la aseguradora 1 ($p_1 = 0.24$, prima = \$7,500):

$$\begin{aligned} u(g_1) &= 0.24 \cdot (300{,}000 - 7{,}500)^2 + 0.76 \cdot 0 \\ &= 20{,}533{,}500{,}000 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para la aseguradora 2 ($p_1 = 0.10$, prima = \$6,800):

$$\begin{aligned} u(g_2) &= 0.10 \cdot (300{,}000 - 6{,}800)^2 + 0.90 \cdot 0 \\ &= 8{,}596{,}624{,}000 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para la aseguradora 3 ($p_1 = 0.40$, prima = \$6,200):

$$\begin{aligned} u(g_3) &= 0.40 \cdot (300{,}000 - 6{,}200)^2 + 0.60 \cdot 0 \\ &= 34{,}527{,}376{,}000 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora evaluamos el valor esperado en la función de utilidad:

Para la aseguradora 1:

$$u(\mathbb{E}(g_1)) = (70{,}200)^2 = 4{,}928{,}040{,}000$$

Para la aseguradora 2:

$$u(\mathbb{E}(g_2)) = (29{,}320)^2 = 859{,}662{,}400$$

Para la aseguradora 3:

$$u(\mathbb{E}(g_3)) = (117{,}520)^2 = 13{,}810{,}950{,}400$$

Aseguradora	**Utilidad esperada** $u(g_i)$	**Utilidad del valor esperado** $u(\mathbb{E}(g_i))$
1	20,533,500,000	4,928,040,000
2	8,596,624,000	859,662,400
3	34,527,376,000	13,810,950,400

Tabla 4.3: Comparación entre utilidad esperada y utilidad del valor esperado con función $u(w) = w^2$.

Nota 4.3. En resumen, al comparar los dos escenarios uno con un consumidor **adverso al riesgo** utilizando $u(w) = \sqrt{w}$ y otro con un consumidor **preferente del riesgo** utilizando $u(w) = w^2$ se observa una diferencia clave en las decisiones. El agente adverso al riesgo valora más la seguridad que el beneficio potencial, por lo que podría evitar opciones con alta variabilidad en los resultados, incluso si su valor esperado es alto. En cambio, el agente preferente del riesgo se inclina por alternativas con mayor exposición al riesgo si estas prometen una utilidad esperada más elevada. Esta comparación ilustra cómo la forma funcional de la utilidad captura distintas actitudes frente al riesgo y permite modelar decisiones financieras personalizadas bajo incertidumbre.

4.3. Aplicación de la Medida de Aversión Absoluta al Riesgo de Arrow-Pratt

En esta sección aplicamos la medida propuesta por Arrow y Pratt para evaluar el grado de aversión al riesgo de un consumidor, con base en la función de utilidad usada en nuestro modelo anterior. Esto nos permite entender mejor cómo la actitud hacia el riesgo puede influir en la decisión de contratar un seguro.

Es bueno observar, aunque pueda ser redundante, que $u(\mathbb{E}(g_3)) = 342.81 > 216.81 = u(g_3)$, esto por la definición 3.11 tenemos que la función de utilidad $u(w) = \sqrt{w}$ es adversa al riesgo, aunque esto ya lo sabíamos pues así la elegimos.

4.3.1. Medida de Aversión Absoluta al Riesgo

La medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt se define(3.13) como:

$$Ra(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Esta fórmula nos dice cuánto cambia la utilidad marginal cuando aumenta la riqueza. Si esta medida es mayor a cero, el consumidor es adverso al riesgo.

Para nuestra función de utilidad usada anteriormente $u(w) = \sqrt{w}$, derivamos lo siguiente:

$$u'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}, \quad u''(w) = -\frac{1}{4w^{3/2}}.$$

Luego:

$$Ra(w) = \frac{1}{2w}.$$

Esto muestra que el consumidor es adverso al riesgo, pues es el primer caso de la definición (3.13) y que, conforme aumenta su riqueza, se vuelve más tolerante al riesgo. Este comportamiento se conoce como **DARA** (Decreasing Absolute Risk Aversion).

4.3.2. Cálculo del Equivalente Cierto y Prima de Riesgo

Otra forma de ver la aversión al riesgo es a través del *equivalente cierto* (CE)[4], que se define como la cantidad de dinero segura que da la misma utilidad que una apuesta riesgosa(3.12) . Para una función $u(w)$, el equivalente cierto de una lotería g se obtiene resolviendo:

$$u(CE) = u(g).$$

Por ejemplo, para la aseguradora 3 calculamos:

$$u(g_3) = 216.81 \quad \Rightarrow u(CE) = 216.81 \quad \Rightarrow \quad CE = (216.81)^2 = 47{,}008.$$

Esto debido a que la inversa de $u(w) = \sqrt{w}$ es $u^{-1}(w) = w^2$

La *prima de riesgo* se calcula como la diferencia entre el valor esperado y el equivalente cierto:

$$\text{Prima de riesgo} = \mathbb{E}(g_3) - CE = 117{,}520 - 47{,}008 = 70{,}512$$

Este valor nos dice cuánto estaría dispuesto a pagar el consumidor para evitar el riesgo. En este caso, aunque la aseguradora 3 tiene buen valor esperado, el consumidor estaría dispuesto a aceptar una cantidad mucho menor si fuera segura,

[4] El equivalente cierto (CE) es la cantidad de dinero que el consumidor considera igual, en términos de utilidad, a una apuesta con resultado incierto. Es decir, aunque la apuesta podría dar más dinero en promedio, el consumidor preferiría recibir el CE con seguridad. Esto refleja cuánto valora la certeza frente al riesgo. Cuanto menor sea el CE comparado con el valor esperado, mayor es la aversión al riesgo del individuo.

lo que confirma su aversión al riesgo. La medida de Arrow-Pratt y el cálculo del equivalente cierto nos permiten analizar con más detalle el comportamiento del consumidor ante el riesgo. En particular, muestran que incluso cuando un producto como el de la aseguradora 3 tiene buen desempeño esperado, un consumidor muy adverso podría no estar dispuesto a tomar el riesgo completo. De aquí la importancia de considerar el perfil del consumidor al momento de evaluar productos financieros.

Conclusiones

> "If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is."
> [Si las personas no creen que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida.]
>
> *John von Neumann* (discurso en Yale, 1954)

El presente trabajo ofrece una exposición clara y rigurosa de la teoría del consumidor, así como de los axiomas fundamentales que permiten su formalización matemática. Se recurre a herramientas analíticas adquiridas a lo largo de la formación de licenciatura, adoptando un enfoque económico que posibilita cierta flexibilización de las condiciones matemáticas tradicionales, al fundamentarlas en el comportamiento empírico de los consumidores.
En el capítulo final se presentan las conclusiones derivadas del análisis desarrollado a lo largo de esta tesis, en el cual se aplicó la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern a decisiones financieras reales, utilizando datos publicados por la CONDUSEF relativos a seguros de automóvil.

Se mostró cómo la estructura de preferencias del consumidor, así como su actitud frente al riesgo influyen de manera determinante en la elección de un producto financiero. Se mostró una aplicación del tema desarrollado, usando datos del informe de seguros de automóviles 2023, publicado en la página de la CONDUSEF.
Una de las principales conclusiones es que el comportamiento del consumidor ante el riesgo influye directamente en su elección. Al modelar su utilidad mediante una función cóncava como $u(w) = \sqrt{w}$, observamos que la opción más arriesgada (la aseguradora 3) fue también la preferida, debido a que ofrecía una mayor utilidad esperada.
En contraste con el caso anterior, al utilizar la función de utilidad convexa $u(w) = w^2$, que representa a un consumidor preferente del riesgo, observamos que la ase-

guradora 3 sigue siendo la opción preferida, pero ahora con una diferencia aún más marcada en términos de utilidad esperada. Además, la utilidad del valor esperado resulta menor que la utilidad esperada del juego, lo que indica que este tipo de consumidor valora positivamente la incertidumbre.
En este caso, el agente estaría dispuesto a rechazar un pago cierto equivalente al valor esperado si con ello puede asegurar mejores pólizas de seguro con posibles ganancias mayores, incluso si hay riesgo de perderlo todo.
Sin embargo, regresando al consumidor adverso al riesgo, al calcular el equivalente cierto(CE) y la prima de riesgo(P), notamos que el consumidor estaría dispuesto a aceptar mucho menos que el valor esperado a cambio de certeza, lo que refleja su aversión al riesgo.

La aplicación de la medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt permitió cuantificar este comportamiento. El resultado confirmó que el consumidor es adverso al riesgo y que, conforme aumenta su riqueza, su disposición a asumir riesgos también se incrementa, lo cuál confirma (DARA) desarrollada en los primeros capítulos.

Finalmente, esta aplicación muestra cómo las herramientas de la teoría de utilidad permiten ir más allá del análisis puramente monetario, integrando las preferencias individuales frente al riesgo y brindando un marco sólido para evaluar productos financieros.

Apéndice A

Continuidad, desigualdades y teoremas de optimización

En esta parte del apéndice se definen conceptos y enuncian teoremas concernientes a la caracterización de funciones necesarios para completar el texto y su relación con la teoría económica.

Teorema A.1 (Todo Conjunto Abierto es una Unión de Bolas Abiertas). *Sea S un conjunto abierto. Para cada $\mathbf{x} \in S$, existe $\varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \subset S$. Entonces,*

$$S = \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}).$$

Demostración: Los conceptos clave ya han sido discutidos, por lo que podemos demostrar esto de manera directa.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Para cada $\mathbf{x} \in S$, existe $\varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \subset S$, ya que S es abierto. Debemos probar que $\mathbf{x} \in S$ implica $\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$ y, recíprocamente, que $\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$ implica $\mathbf{x} \in S$.

Si $\mathbf{x} \in S$, entonces, por la definición de bola abierta, $\mathbf{x} \in B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$. Como esta bola abierta está incluida en una unión que la contiene, se sigue que $\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$, completando la primera parte de la prueba.

Para la otra dirección, si $\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$, entonces $\mathbf{x} \in B_{\varepsilon_s}(s)$ para algún $s \in S$. Como cada bola abierta elegida está completamente contenida en S, se tiene que $\mathbf{x} \in S$.

Esto completa la demostración. $\square$

Teorema A.2 (Continuidad e Imágenes Inversas). *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $f : D \to \mathbb{R}^n$ es continua.

2. Para todo conjunto abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, la preimagen $f^{-1}(S)$ es abierta en D.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2)**.** Supongamos que f es continua y sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $\mathbf{x} \in f^{-1}(S)$, lo cual implica que $f(\mathbf{x}) \in S$. Como S es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(\mathbf{x})) \subseteq S$. Por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B_\delta(\mathbf{x}) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\mathbf{x})) \subseteq S.$$

Por lo tanto, $B_\delta(\mathbf{x}) \cap D \subseteq f^{-1}(S)$. Como esto ocurre para todo $\mathbf{x} \in f^{-1}(S)$, concluimos que $f^{-1}(S)$ es abierto en D.

(2) $\Rightarrow$ (1)**.** Supongamos ahora que para todo conjunto abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, la preimagen $f^{-1}(S)$ es abierta en D. Para probar que f es continua en $\mathbf{x} \in D$, tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces, $B_\varepsilon(f(\mathbf{x}))$ es abierto, por lo que su preimagen $f^{-1}(B_\varepsilon(f(\mathbf{x})))$ es abierta en D y contiene a $\mathbf{x}$. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_\delta(\mathbf{x}) \cap D \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(\mathbf{x}))).$$

Esto implica que:

$$f(B_\delta(\mathbf{x}) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\mathbf{x})),$$

y por tanto f es continua en $\mathbf{x}$. Como $\mathbf{x}$ fue arbitrario, f es continua en todo D. $\square$

El siguiente lema y teorema la usamos en el capítulo 3 y lo extrajimos de [9].

Lema 2. Un subconjunto C de un espacio vectorial E es convexo si y solo si, para todo $x_1, \dots, x_n \in C$ y $p_1, \dots, p_n$ números positivos tales que $p_1 + \dots + p_n = 1$, se cumple que

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \in C.$$

Demostración: La condición es ciertamente suficiente. Demostraremos la necesidad por inducción sobre n. El resultado es trivialmente cierto para $n = 1$, y es cierto para $n = 2$, ya que esto reduce a la definición de conjunto convexo.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$, y consideremos $x_1, \dots, x_n \in C$ y $p_1, \dots, p_n > 0$ tales que $p_1 + \dots + p_n = 1$. Definimos

$$y = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + p_n} x_{n-1} + \frac{p_n}{p_{n-1} + p_n} x_n.$$

Por la convexidad de C, se tiene que $y \in C$. Usando la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = p_1 x_1 + \dots + p_{n-2} x_{n-2} + (p_{n-1} + p_n) y \in C,$$

lo cual completa la demostración. $\square$

Teorema A.3 (Desigualdad de Jensen). *Sea f una función convexa sobre un conjunto convexo C, y sean $p_1, \dots, p_n$ números positivos tales que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Entonces,*

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n).$$

Si además f es estrictamente convexa, entonces la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Demostración: El primer enunciado se deduce directamente aplicando el lema 2 al conjunto Uf. Supongamos ahora que f es estrictamente convexa, y que los puntos $x_1, \dots, x_n$ no son todos iguales. Sin pérdida de generalidad (re-etiquetando si es necesario), podemos suponer que $x_{n-1} \neq x_n$.

Definimos

$$y = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + p_n} x_{n-1} + \frac{p_n}{p_{n-1} + p_n} x_n.$$

Entonces, por la estricta convexidad de f,

$$f(y) < \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + p_n} f(x_{n-1}) + \frac{p_n}{p_{n-1} + p_n} f(x_n).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) &= f(p_1 x_1 + \cdots + p_{n-2} x_{n-2} + (p_{n-1} + p_n) y) \\ &\leq p_1 f(x_1) + \cdots + p_{n-2} f(x_{n-2}) + (p_{n-1} + p_n) f(y) \\ &< p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n), \end{aligned}$$

lo que demuestra que la desigualdad es estricta cuando $x_1, \dots, x_n$ no son todos iguales. □

En esta parte del apéndice se definen conceptos y enuncian (sin demostración) teoremas concernientes a la teoría de optimización necesarios para completar el texto.

Teorema A.4 (Teorema de Young). *Sea $f(\mathbf{x})$ una función dos veces continuamente diferenciable. Entonces, para todo i y j, se cumple que:*

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{A.1}$$

Los siguientes teoremas se puede consultar su demostración en [11] de donde nos basamos en gran parte para el capítulo de Teoría del consumidor.

Teorema A.5 (Pendiente, curvatura y concavidad en varias variables). *Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío y sea f dos veces continuamente diferenciable en D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es cóncava.*

2. *La matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa para todo $\mathbf{x}$ en el interior de D.*

3. *Para todo $\mathbf{x}^0 \in D$, se cumple:*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Además, si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es definida negativa para todo $\mathbf{x} \in D$, entonces f es estrictamente cóncava.

Teorema A.6 (Concavidad, convexidad y derivadas parciales segundas propias)**.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable.*

1. *Si f es cóncava, entonces $f_{ii}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$ en el interior de D, $i = 1, \ldots, n$.*

2. *Si f es convexa, entonces $f_{ii}(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$ en el interior de D, $i = 1, \ldots, n$.*

Teorema A.7 (Condiciones de Kuhn-Tucker para máximos con restricciones de desigualdad)**.** *Sean $f(\mathbf{x})$ y $g^j(\mathbf{x})$, con $j = 1, \ldots, m$, funciones reales continuas definidas sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ es un punto interior de D y que $\mathbf{x}^*$ maximiza $f(\mathbf{x})$ sujeto a las restricciones $g^j(\mathbf{x}) \leq 0$, con $j = 1, \ldots, m$, y además que tanto f como cada g^j son continuamente diferenciables en un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}^*$.*

Si los vectores gradiente $\nabla g^j(\mathbf{x}^*)$ correspondientes a las restricciones activas en $\mathbf{x}^*$ son linealmente independientes, entonces existe un único vector $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que el par $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ satisface las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad g^j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda_j^* g^j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Definición A.1 (Continuidad en las restricciones)**.** *Se dice que se satisface la continuidad en las restricciones si cada función $g^j : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ es continua y, para todo par $(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0) \in \mathbb{R}^n \times A$ que satisface las m restricciones $g^1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq 0, \ldots, g^m(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq 0$, y para toda sucesión $\mathbf{a}^k$ en A que converge a $\mathbf{a}^0$, existe una sucesión $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ que converge a $\mathbf{x}^0$ tal que cada par $(\mathbf{x}^k, \mathbf{a}^k)$ satisface las restricciones para todo k.*[1]

[1] Esta definición es equivalente a las nociones de semicontinuidad superior e inferior en la teoría de correspondencias.

Para los siguientes teoremas se ocupara resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x},\mathbf{a}) \\ \text{sujeto a} \quad & g^j(\mathbf{x},\mathbf{a}) \le 0, \quad j = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Teorema A.8 (Teorema del máximo)**.** *Sean D como en el glosario y A compacto, que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y que se satisface la continuidad en las restricciones. Entonces se tiene:*

1. *Existe solución para la ecuación (A.2) para todo $\mathbf{a} \in A$, y por lo tanto, la función valor $V(\mathbf{a})$ está definida en todo A.*

2. *La función valor $V : A \to \mathbb{R}$ es continua.*

3. *Sea $(\mathbf{x}^k, \mathbf{a}^k)$ una sucesión en $\mathbb{R}^n \times A$ tal que $(\mathbf{x}^k, \mathbf{a}^k) \to (\mathbf{x}^*, \mathbf{a}^*) \in \mathbb{R}^n \times A$, y supóngase que para todo k, $\mathbf{x}^k$ es solución de (A.2) cuando $\mathbf{a} = \mathbf{a}^k$. Entonces $\mathbf{x}^*$ es solución de (A.2) cuando $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$.*

4. *Si para cada $\mathbf{a} \in A$ la solución de (A.2) es única y está dada por una función $\mathbf{x}(\mathbf{a})$, entonces $\mathbf{x} : A \to \mathbb{R}^n$ es continua.*

Bibliografía

[1] K.J. Arrow. "The Theory of Risk Aversion". En: *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Ed. por K. J. Arrow. Chicago: Markham, 1970, págs. 90-109.

[2] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis y H.D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. 4ª edición. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

[3] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali y C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3ª edición. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.

[4] Buró Comercial. *Sitio oficial del Buró de Entidades Comerciales*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2023. URL: `https://www.buro.gob.mx` (visitado 12-06-2025).

[5] E.K.P. Chong y S.H. Zak. *An Introduction to Optimization*. 4ª edición. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.

[6] CONDUSEF. *¿Quién es quién en los seguros de auto. Enero-junio 2024*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2024. URL: `https://www.condusef.gob.mx/documentos/rcd/quien_es_quien/qq-seguro-auto-ene-jun-24.pdf` (visitado 12-06-2025).

[7] CONDUSEF. *Reporte de aseguradoras - Cuentas Claras (junio 2023)*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2023. URL: `https://www.condusef.gob.mx/documentos/rcd/cuentas_claras/cc-ASEGURADORAS-redes-junio-auto-23.pdf` (visitado 12-06-2025).

[8] G. Debreu. "Smooth Preferences". En: *Econometrica* 40 (1972), págs. 603-615.

[9] D.J.H. Garling. *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[10] R.V. Hogg y A.T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*. 8ª edición. Boston: Pearson, 2019.

[11] G.A. Jehle y P.J. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*. 3ª edición. New York: Pearson, 2011.

[12] W. Karush. "Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints". Tesis doct. Chicago, IL: Department of Mathematics, University of Chicago, 1939. URL: `http://pi.lib.uchicago.edu/1001/cat/bib/4111654`.

[13] H.W. Kuhn y A. W. Tucker. "Nonlinear Programming". En: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Ed. por J. Neyman. Berkeley, CA: University of California Press, 1951, págs. 481-492.

[14] A. Mas-Colell, M.D. Whinston y J.R. Green. *Microeconomic Theory*. 1ª edición. New York: Oxford University Press, 1995.

[15] MAPFRE México. *Sitio oficial de MAPFRE México — Cotizador en línea*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2025. URL: `https://mapfre.rastreator.mx` (visitado 12-06-2025).

[16] J. von Neumann y O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. 3ª edición. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1953.

[17] M. Parkin y E. Loría. *Microeconomía. Versión para Latinoamérica*. 9ª edición. México: Pearson Educación, 2010.

[18] J.W. Pratt. "Risk Aversion in the Small and in the Large". En: *Econometrica* 32 (1964), págs. 122-136.

[19] Afirme Seguros. *Cotización de Seguro de Auto | Afirme*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2025. URL: `https://afirmesegurosautos.mx/` (visitado 12-06-2025).

[20] GNP Seguros. *Cotizador de seguro de auto | GNP México*. Consultado el 12 de junio de 2025. 2025. URL: `https://www.gnp.com.mx/content/gnp-pp/mx/es/cotizador-auto/datos-vehiculo.html` (visitado 12-06-2025).