



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

MODELOS MATEMÁTICOS DE  
CONTRAPUNTO Y MODULACIÓN  
EN LA MÚSICA DE CLAUDIO  
MONTEVERDI

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

**BRANDON JAIME CURIEL LÓPEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. OCTAVIO ALBERTO AGUSTÍN AQUINO**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.

MAYO DE 2025



*Dedicado a mis padres*



# Prefacio

Desde siempre me he sentido impulsado a entender aquello que desafía mis creencias y amplía mi comprensión. A lo largo de mi vida, ciertas inquietudes han llamado mi atención (si no es que todas), aunque en ese instante no conozca la respuesta o no las comprenda, pero tal vez la encuentre mucho tiempo después, en el lugar menos esperado. Una de esas inquietudes surgió cuando ingresé a la licenciatura, durante la bienvenida a los estudiantes de nuevo ingreso de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Entre las presentaciones de profesores y estudiantes, uno de los profesores mencionó que trabajaba en musicología matemática. Me pregunté a mi mismo “¿Eso qué es?”. Aquella pregunta quedó flotando por un tiempo hasta ahora me encuentro formulando una respuesta.

Esta tesis explora cómo los modelos matemáticos permiten describir, las obras de compositores que vivieron siglos atrás. Las matemáticas y la música están profundamente entrelazadas, revelando relaciones que han pasado inadvertidas a lo largo del tiempo. Un claro ejemplo es la obra de Monteverdi, donde conceptos que hoy asociamos con estructuras matemáticas como los grupos parecen estar presentes de manera natural, aunque no de forma consciente por aquellos en su época. Tal vez haya más conexiones aún ocultas, esperando a ser descubiertas.

Cuando elegí este tema, debo aclarar que mis conocimientos de música eran mínimos. Además, este trabajo es un problema de modelación matemática. Entonces, para poder aplicar las matemáticas a la música, aprendí lo necesario para poder desarrollar este trabajo, y ahora tengo un mejor dominio de la música. Aprendí a escuchar las canciones, porque cada canción posee su propia estructura, muchas fueron compuestas de técnicas modernas, que se han desarrollado desde la época de Monteverdi.



# Índice general

Prefacio	III
Introducción	1
<b>1. Monteverdi en la transición del Renacimiento al Barroco</b>	<b>5</b>
1.1. Los géneros polifónicos en los siglos XVI y XVII . . . . .	6
1.1.1. Misa . . . . .	6
1.1.2. Madrigal . . . . .	6
1.1.3. Frottola . . . . .	7
1.1.4. Motete . . . . .	7
1.1.5. Ópera . . . . .	7
1.2. La <i>prima pratica</i> y la <i>seconda pratica</i> . . . . .	8
1.2.1. La <i>prima pratica</i> . . . . .	8
1.2.2. La <i>seconda pratica</i> . . . . .	9
<b>2. Modelo de contrapunto</b>	<b>11</b>
2.1. Preliminares históricos . . . . .	11
2.2. Dicotomías fuertes, de intervalos y polaridad . . . . .	13
2.2.1. Dicotomías fuertes . . . . .	13
2.2.2. Simetrías de contrapunto . . . . .	14
2.3. Algoritmo de Hichert y verificación de pasos permitidos . . . . .	19
<b>3. Modelos de modulación</b>	<b>25</b>
3.1. Preliminares históricos . . . . .	25
3.2. Modelo cuántico . . . . .	26
3.2.1. Escalas y tonalidades . . . . .	26
3.2.2. Cadencias . . . . .	28
3.2.3. Modulador . . . . .	28

3.2.4. Cuantos de modulación . . . . .	29
3.3. Modulaciones por dualidad . . . . .	31
3.3.1. Las transformaciones T e I . . . . .	31
3.3.2. Las transformaciones P, L y R . . . . .	34
3.3.3. El isomorfismo entre PLR y TI . . . . .	35
3.3.4. La dualidad de los grupos TI y PLR . . . . .	36
<b>4. Análisis de pasajes de obras selectas de Monteverdi</b>	<b>39</b>
4.1. Contrapunto . . . . .	39
4.2. Modulaciones . . . . .	44
4.3. Comparación de resultados . . . . .	50
4.3.1. Acerca del contrapunto . . . . .	50
4.3.2. Sobre las modulaciones . . . . .	52
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>
<b>A. Letras de <i>L'Orfeo</i></b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.1. Retrato de Claudio Monteverdi por Bernardo Strozzi, c. 1630 . . . . .	5
2.1. Ejemplos de movimientos directos . . . . .	12
2.2. Ejemplos de movimientos contrarios . . . . .	12
2.3. Ejemplos de movimientos oblicuos . . . . .	12
3.1. La banda de Möbius de la escala mayor de $C$ . . . . .	27
3.2. Acordes correspondientes a los grados de la escala de $C$ . . . . .	27
3.3. Acordes en el <i>Canon en D</i> , P. 37, de Pachelbel . . . . .	37
4.1. <i>Contitebor primo (1640)</i> , compases del 64 al 67 . . . . .	39
4.2. <i>Ma tu, più che mai dura (1640)</i> , compases del 6 al 8 . . . . .	40
4.3. <i>Io mi son giovinetta</i> , compases del 52 al 53 . . . . .	41
4.4. <i>Laudate Dominum (1640)</i> , compases del 98 al 103 . . . . .	42
4.5. <i>Gloria a 7</i> , compases del 1 al 5 . . . . .	43
4.6. <i>In questo lieto e fortunato giorno</i> , primera aria de <i>L'Orfeo</i> , compases del 1 al 9 . . . . .	45
4.7. <i>In questo lieto e fortunato giorno</i> , primera aria de <i>L'Orfeo</i> , compases del 10 al 20 . . . . .	46
4.8. <i>Ecco pur</i> , segundo acto de <i>L'Orfeo</i> , compases del 4 al 9. . . . .	49
4.9. <i>Mira, deh mira Orfeo</i> , segundo acto de <i>L'Orfeo</i> , compases del 10 al 12. . . . .	49



# Lista de tablas

2.1. Simetrías y sucesores admisibles para consonancias con <i>cantus firmus</i> 0 . . . . .	24
A.1. Letra del aria <i>In questo lieto e fortunato giorno</i> de “L’Orfeo”, con traducción al español . . . . .	61
A.2. Letra de la <i>arietta Ecco pur</i> de “L’Orfeo”, con traducción al español	62
A.3. Letra de la <i>arietta Mira, deh mira, Orfeo</i> de “L’Orfeo”, con traducción al español . . . . .	62



# Introducción

Cuando escuchamos música, como la regional mexicana o la tradicional japonesa, si prestamos atención, podemos concluir que son distintas; esto es así porque la música tiene connotaciones culturales e históricas. A pesar de todo, la música en diferentes culturas tiene estructuras que son susceptibles de ser comprendidas con los métodos de la matemática, y de ello se ocupa la musicología matemática. La matemática tiene la capacidad de abstraer las propiedades que comparten fenómenos físicos, sociales, etcétera; con la música no es diferente.

Los conceptos del álgebra moderna<sup>1</sup> abstraen la esencia de la música y la describen matemáticamente. Un ejemplo de ello es la llamada “aritmética del reloj”, donde las notas musicales se pueden representar usando la estructura<sup>2</sup> de  $\mathbb{Z}_{12}$ , dado que se repiten periódicamente debido al temperamento<sup>3</sup> igual, algo propio de la teoría de grupos.

Es oportuno precisar lo anterior. A mediados del siglo XVI y principios del siglo siguiente, había una fuerte discusión entre distintos teóricos (entre ellos Artusi, del que hablaremos más adelante) sobre el tipo de afinación que debían tener los instrumentos musicales. Era imprescindible definir una manera de afinar a todos los instrumentos por igual, pues no hacerlo traería demasiados problemas de coordinación en la ejecución de una pieza. Por esos años, entra al debate Vincenzo Galilei, padre de Galileo Galilei y figura crucial en el desarrollo del estilo del laúd en el Renacimiento tardío y el Barroco temprano [21].

En 1584, Galilei muestra en su obra *Libro d'intavolatura di liuto* que es más práctico un sistema de afinación equitemperado, pues es adecuado para las 24 tonalidades, y justifica el afirmar que es el que mejor representa a la música a partir de entonces y justifica el aparato algebraico de esta tesis [21].

---

<sup>1</sup>Se presupone en lo siguiente una familiaridad con el álgebra básica que se estudia en una licenciatura en matemática, como se puede estudiar en [5] y [16].

<sup>2</sup>Vid. [5, p. 10].

<sup>3</sup>Vid. [9, p. 25].

En este trabajo, nos centraremos en el aprendizaje de conceptos clave como las simetrías, el contrapunto de primera especie, las cadencias<sup>4</sup> y los modelos de modulación. Con estos conocimientos, analizaremos fragmentos representativos desde el punto de vista musicológico de las obras de Claudio Monteverdi, que incluyen motetes, madrigales y óperas. A lo largo de su vida, fue incorporando conceptos novedosos y es ahí donde vamos a enfocarnos para hallar la relación entre la armonía y el contrapunto. Esto es, porque Monteverdi se halla en la transición del Renacimiento al Barroco temprano.

Retomando lo dicho en el párrafo anterior, en el capítulo I titulado como *Monteverdi en la transición del Renacimiento al Barroco*, daremos a conocer las características de los diferentes géneros de expresión de la música donde Monteverdi incursionó. En esos años, estos géneros musicales eran comunes por las celebraciones religiosas o porque estaban de moda entre lo que escuchaban los nobles en sus cortes, como la de Mantua, donde él trabajó muchos años. También, eran años de innovaciones en la composición de las obras musicales y existían personas que no escuchaban con buenos oídos los cambios, como Giovanni Artusi.

El capítulo II, nombrado como *Modelo de contrapunto* se enfoca en el contrapunto de *primera especie*, donde el ingrediente principal son las notas musicales y dentro de estas están las consonancias. El modelo de contrapunto tiene un fuerte sustento en el álgebra, pero por parte de la música existen reglas que hay que respetar y el modelo las reconsidera. En especial, exponemos conceptos esenciales como las *simetrías de contrapunto* y los *sucesores admisibles*, que son calculados con el algoritmo de Hichert y los resultados se sintetizan en la tabla 2.1; examinaremos con cierto detalle la teoría que sustenta estas herramientas.

El capítulo III, se titula *Modelos de modulación*. Aquí algo fundamental son los acordes<sup>5</sup>, que son subconjuntos de notas de alguna escala<sup>6</sup>. Se presentan dos modelos: uno es el *modelo cuántico de modulación*, que utiliza un concepto conocido como *modulador*, que explica la fuerza de transición; es decir, la que media en la transformación de una tonalidad a otra, y es análogo a lo que se ve en física con la interacción de partículas. Para esto, un concepto muy importante es el de *cadencia*, y un conjunto especial de tonos conocido como *cuanto de modulación*. El otro modelo, corresponde a las *modulaciones por dualidad*, que se sustenta en el álgebra moderna; más precisamente, en el grupo de transformación e inversión,

---

<sup>4</sup>Vid. [25, p. 160].

<sup>5</sup>Vid. [9, pp. 41 y 56].

<sup>6</sup>Vid. [9, p. 40].

y en el grupo de paralela, intercambio de la séptima y relativa, conceptos propios de la música.

El capítulo IV, se ha nombrado *Análisis de pasajes de obras selectas de Monteverdi*, las cuales se eligieron con base en dos artículos muy interesantes que analizan las obras de Monteverdi desde el punto de vista puramente musicológico. Lo que haremos es aplicar los modelos expuestos en los capítulo II y III a las obras examinadas por los artículos. Para finalizar este capítulo, compararemos sus resultados con los nuestros, es decir, tejemos un puente entre la musicología y la matemática, lo que resultará en un refinamiento y extensión a lo analizado por Kang y Perritt, lo que resalta la importancia de Monteverdi en una época de transición de las artes, en especial la música.

El capítulo V, tiene como título *Conclusiones y trabajo futuro*, en este apartado se exponen los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta tesis. Las conclusiones se dividen en dos partes, uno resume la genial composición contrapuntística de Monteverdi en algunos pasajes seleccionados; lo otro corresponde a la armonía presente en ciertas piezas de la ópera *L'Orfeo*. De estas conclusiones, se puede dar una posible línea de investigación para seguir explorando la relación entre la música de Monteverdi y la matemática.



# Capítulo 1

## Monteverdi en la transición del Renacimiento al Barroco

Claudio Giovanni Antonio Monteverdi nació en 1567 en Cremona y falleció en Venecia el 15 de mayo de 1643. En esa época, las obras de muchos compositores eran olvidadas poco después de su muerte, y algo similar ocurrió con Monteverdi. El interés en este compositor revive entre los siglos XVIII y XIX en Italia y Alemania. Muchas obras de Monteverdi se perdieron en el tiempo, otras fueron modificadas, pero las que han sobrevivido nos ayudan a entender cómo la música comienza a tomar la forma que hoy escuchamos a diario [1].



Figura 1.1: Retrato de Claudio Monteverdi por Bernardo Strozzi, c. 1630

## 1.1. Los géneros polifónicos en los siglos XVI y XVII

### 1.1.1. Misa

La misa polifónica del Renacimiento tiene cinco “movimientos” litúrgicos:

- Kyrie
- Gloria
- Credo
- Sanctus
- Agnus Dei

Es de especial mención la llamada misa *cíclica*, en el sentido de que un mismo “tema” melódico o multivocal se usa (o sea, se *recicla*) en todos los movimientos y los unifica [15]. Hans Ott enfatizó la oportunidad que da la misa cíclica para desplegar una *variedad* composicional, en la que los compositores constantemente adornaban y readornaban al *cantus firmus* recurrente con un nuevo atavío polifónico, lo que evitaba el aburrimiento [15].

Un ejemplo, de este género polifónico en el cual Monteverdi incursionó es su *Messa da capella a quattro voci* de 1641.

### 1.1.2. Madrigal

Durante el Renacimiento, el madrigal alcanzó mayor auge. Este tipo de composición se escribía para grupos de tres a seis voces distintas; es decir, era de corte polifónico, pero manteniendo la coherencia. La mayoría de los madrigales se ejecutaban *a capella*, es decir, no tenían acompañamiento musical.

Los madrigales se pueden dividir en dos etapas: el temprano, del siglo XIV, y el tardío, del siglo XVI. El temprano es polifónico y contrapuntístico, recitado sobre textos no estróficos con combinaciones de dos o tres estrofas de versos, ejecutado principalmente por dos voces. En contraste, el madrigal tardío, del cual Claudio Monteverdi es un exponente, añade elementos como el bajo continuo y toma dirección hacia un estilo homofónico, dependiendo del poema en que se basa asemejándose a la *frottola* guiándose de acordes más simples. El ritmo presente en

los madrigales no sigue un compás fijo; se adapta a las necesidades de la recitación, subrayando su vínculo con la poesía [12].

Un ejemplo de madrigal es *Io mi son giovinetta* incluida en el libro IV de madrigales de Monteverdi.

### 1.1.3. Frottola

La *frottola* es una canción secular italiana popular a finales del siglo XV y principios del XVI. Por lo general, era una composición para cuatro partes de voz con la melodía en la línea superior. Podía ser interpretada por voces sin acompañamiento o por una voz solista con acompañamiento instrumental. La *frottola* tenía una textura guiada por acordes y un ritmo claro, generalmente de 3/4 o 4/4. Las voces tenían rangos estrechos y había duplicaciones con frecuencia. Su estilo musical era simple, en contraste deliberado con la complejidad de la música más sofisticada de su época [11].

Un ejemplo de este género polifónico es *So ben hor non scopra il foco* del compositor italiano Bartolomeo Tromboncino.

### 1.1.4. Motete

El motete es una obra polifónica basada en un texto sagrado latino, a veces litúrgico, a veces no, aparentemente seleccionado para expresar sentimientos de un tipo particular. Por otra parte, la temática de sus textos, de nuevo, casi sin excepción, es sagrada. Podría decirse que el motete es un madrigal religioso.

Un ejemplo interesante de motete es una obra llamada *Xicochi Conetzintle* compuesta por el portugués Gaspar Fernandes (1566-1629). El manuscrito de esta obra fue encontrada en la catedral de Oaxaca, y es de la misma época de las óperas de Monteverdi [27]. Un motete compuesto por Monteverdi es *Confitebor tibi Domine (Primo)* incluido en la colección *Selva morale e spirituale* de 1640 [17].

### 1.1.5. Ópera

En un intento de mejorar la inteligibilidad del texto y conseguir mayor espectacularidad en la interpretación, al empezar el Barroco, se tiene como resultado la ópera. Su razón de ser es intentar recuperar el modo de representación del antiguo teatro griego y romano.

La primera ópera documentada es *Dafne* de 1597, cuya partitura no se conservó. En 1607, Monteverdi presenta *L'Orfeo* y luego *L'Arianna*. La música de esta última se perdió (salvo el famoso *Lamento*) [14].

La ópera es una representación artística costosa, en los años anteriores a Monteverdi tenían acceso las clases más acomodadas como la nobleza y comerciantes ricos. Algunos tenían una excelente condición económica que se permitían las representaciones en sus hogares. Esto cambia en 1637 cuando en Venecia se inaugura el primer teatro. Esta segunda etapa, se empieza a dirigir al público. En sus inicios, la ópera representa actos heroicos, de dioses o mortales, griegos o romanos de las diferentes mitologías. En esta segunda etapa, las representaciones teatrales empiezan a tomar la vida cotidiana como fuente de inspiración.

## 1.2. La *prima pratica* y la *seconda pratica*

Claudio Monteverdi escribió diez libros de madrigales, de los cuales los dos últimos fueron póstumos. Dentro de ellos, podemos identificar la *prima pratica* y la *seconda pratica*.

### 1.2.1. La *prima pratica*

También conocido como *stilo antico* o *stilo grave*. Trata sobre utilizar el contrapunto “propio” de la etapa anterior, donde priman las composiciones *a capella*. Sus características son:

- Los pasajes más contrapuntísticos contrastan con los homofónicos.
- Son de cuatro a seis voces abarcando todas las tesituras posibles de bajo a soprano.

A veces, utilizan dos o más coros llegando a ocho, doce, dieciséis o más voces para crear efectos estereofónicos situando los coros en distintas partes de la iglesia.

Giulio Cesare Monteverdi, quien defendió a su hermano Claudio en una nota al final de su *Scherzi musicali a tre voci* publicado en 1607, explica la *prima pratica* como se sigue:

La primera práctica se entiende que es aquella que versa sobre la perfección de la armonía; es decir, que considera la armonía no como mandada, sino como mandante, y no como sierva, sino como señora

de la oración; y esta, iniciada por aquellos primeros que en nuestros caracteres compusieron sus cantilenas a más de una voz, fue luego continuada y ampliada por Ockeghem, Josquin des Prez, Pierre de la Rue, Giovan Motton, Créquillon, Clemens non Papa, Gombert, y otros de aquellos tiempos, perfeccionada últimamente por Messer Adriano [Willlaert] con el acto práctico, y por el excelentísimo Zarlino con reglas juiciosísimas [20].

### 1.2.2. La *seconda pratica*

El teórico Giovanni Artusi, ataca la música de Monteverdi en su ensayo *Delle imperfettioni della moderna musica* en 1600 y 1603, donde condenaba el uso de la armonía y las innovaciones musicales.

Artusi, ilustra sus argumentos precisamente con un madrigal de Monteverdi que escuchó (específicamente, *Oh, Mirtillo*). Le llamó la atención porque, la composición comenzaba en una cuerda del modo duodécimo de  $b\flat$  (si bemol), lo reduce a  $b\natural$  (si becuadro) y regresa al anterior; a él le resultó aberrante la noción de cambio de tonalidad, y pensó “¿Cómo un compositor experimentado puede cometer un error tan pueril?”.

La obra de Monteverdi, se puede resumir en el lema “Sea la palabra señora de la armonía y no su esclava”, de modo que lo esencial es poder expresar de mejor forma los sentimientos del corazón humano. Pero, es el hermano de Monteverdi quien clarifica que la *seconda pratica* existe porque, es el resultado de la evolución de los estilos anteriores como la *prima pratica*, donde ahora toma la batuta la melodía y hay un tratamiento más libre del contrapunto, de las consonancias y las disonancias en las composiciones [1, 29].



# Capítulo 2

## Modelo de contrapunto

### 2.1. Preliminares históricos

Al emitir simultáneamente dos sonidos con distinta frecuencia puede tenerse una *consonancia* o una *disonancia*. Las consonancias fundamentales son la octava y la quinta, ya que la escala pitagórica se construye a partir de ellas [7, p. 154]. Dicha escala recibe su nombre justamente porque, su descubrimiento en cuanto a las proporciones que las engendran se atribuye a Pitágoras [3]. Otras consonancias son las terceras menor y mayor y las sextas menor y mayor. Con el paso del tiempo, los músicos y cantantes se dieron cuenta que se podían ensayar otros intervalos consonantes aparte de la octava y la quinta, lo que condujo a lo que en el siglo XVI se denominaba *contrapunto*. El contrapunto más simple requiere dos voces (una se denomina *cantus firmus* y la otra *discanto*) y que canten notas de idéntica duración separadas por consonancias (lo que se denomina *contrapunto de primera especie*), Johann Fux acuña este concepto en su famoso libro *Gradus ad Parnassum* de 1725.

Fux clasifica las consonancias en perfectas e imperfectas. Las perfectas son la octava y la quinta; y las imperfectas son la tercera mayor y menor y la sexta menor y mayor. El movimiento se define como la distancia recorrida de un intervalo entre las voces hacia otro, en cualquier dirección. Esto ocurre de tres maneras, los cuales son:

- *movimiento directo*, que se da cuando dos o más partes ascienden o descienden en la misma dirección por grado conjunto o salto;
- *movimiento contrario*, que ocurre cuando una parte asciende por grado con-

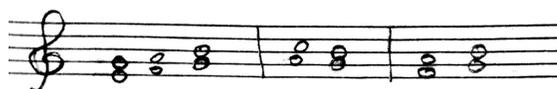


Figura 2.1: Ejemplos de movimientos directos

junto o salto y la otra desciende o viceversa;



Figura 2.2: Ejemplos de movimientos contrarios

- *movimiento oblicuo*, que ocurre cuando una parte se mueve por grado conjunto o salto mientras el otro permanece inmóvil.

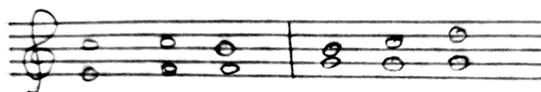


Figura 2.3: Ejemplos de movimientos oblicuos

Los movimientos anteriores, obedecen a ciertas reglas que se han refinado y simplificado a lo largo de los años. Las cuatro reglas fundamentales son:

1. De una consonancia perfecta a otra perfecta, se puede elegir el movimiento contrario u oblicuo.
2. De una consonancia perfecta a otra imperfecta, cualquiera de los tres movimientos es válido.
3. Pasar de una consonancia imperfecta a una perfecta, sólo son permitidos los movimientos oblicuo o contrario.
4. Moverse de una consonancia imperfecta a otra imperfecta, los tres movimientos son permitidos.

A pesar de que son cuatro las reglas fundamentales de los movimientos permitidos, Beethoven observó que se pueden reducir a dos. Giovanni Battista Martini

(mejor conocido como el *padre Martini*), la reduce solo a una: *la única progresión prohibida es el movimiento directo hacia una consonancia perfecta* [13].

Las restricciones sobre el contrapunto fueron objeto de disputa entre Monteverdi y Giovanni Artusi; además, el hermano de Monteverdi, Giulio Cesare, se mete en la discusión defendiendo la *seconda pratica*, que describe como la práctica musical donde la armonía “se convierte en la sierva de las palabras”. No obstante, la técnica fundamental de composición aún para Monteverdi era el contrapunto. Sin embargo, las teorías del contrapunto fueron mejorando y para el siglo XVII abordaban temas como contrapunto estricto, composición, pedagogía e improvisación [17].

Las teorías de contrapunto, se siguieron perfeccionando hasta llegar al modelo de contrapunto por simetrías, el cual fue propuesto por Guerino Mazzola y posteriormente desarrollado por Jens Hichert y Thomas Noll. El modelo, nos dice que siempre es posible hacer una composición contrapuntística (de primera especie) iniciando en cualquier intervalo dado entre dos voces, que las quintas paralelas están prohibidas en general, lo mismo que los saltos de tritono; Hichert demostró que asertos similares son válidos para otros esquemas de consonancias [2, 6].

## 2.2. Dicotomías fuertes, de intervalos y polaridad

### 2.2.1. Dicotomías fuertes

Un “intervalo”, es la distancia que hay entre un tono y otro. Sólo hay doce distancias posibles (ignorando las octavas), por lo cual pueden modelarse con  $\mathbb{Z}_{12}$ . El contrapunto clásico descrito en el *Gradus ad Parnassum* de Johann Fux nos dice que las consonancias son el unísono, la quinta justa y las terceras y sextas (menores y mayores). El resto son disonancias. Al ubicarlos en  $\mathbb{Z}_{12}$  el conjunto de consonancias es  $K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\}$  y el conjunto de disonancias es  $D = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}$  [4].

**Definición 2.1.** *Una simetría en un anillo es sinónimo de transformación afin: es decir, una transformación lineal invertible seguida de una traslación.*

Una observación fundamental de Mazzola es que la simetría  $p(x) = 5x + 2$

transforma consonancias y disonancias es decir:

$$p(0) = 2, p(3) = 5, p(4) = 10, p(7) = 1, p(8) = 6, p(9) = 11,$$

y

$$p(1) = 7, p(2) = 0, p(5) = 3, p(6) = 8, p(10) = 4, p(11) = 9$$

o sea  $p(K) = D$ ,  $p(D) = K$ . Además,  $p$  es la única simetría con esa propiedad (es la *polaridad*).

**Definición 2.2.** Una partición  $(K/D)$  de  $\mathbb{Z}_{12}$  tal que  $|K| = |D|$  y hay una única simetría  $p$  tal que  $p(K) = D$  y  $p(D) = K$  se denomina *dicotomía fuerte* [4].

### 2.2.2. Simetrías de contrapunto

**Definición 2.3.** Dado un anillo conmutativo  $R$ , las simetrías las denotaremos según  $e^t.v : R \rightarrow R : x \mapsto vx + t$ , donde  $v$  pertenece al subgrupo multiplicativo  $R^\times$  de  $R$  de sus elementos invertibles y  $t \in R$ .

Dado un anillo conmutativo  $R$ , los números duales sobre  $R$  son

$$R[x]/\langle x^2 \rangle = \{a + xb + \langle x^2 \rangle : a, b \in R\} = \{a + \epsilon.b : a, b \in R, \epsilon^2 = 0\}.$$

De manera explícita, las operaciones aritméticas con los números duales son

$$\begin{aligned} (a + \epsilon.b) + (c + \epsilon.d) &= (a + c) + \epsilon.(b + d), \\ (a + \epsilon.b) \cdot (c + \epsilon.d) &= ac + \epsilon.ad + \epsilon.bc + \epsilon^2.bd = ac + \epsilon.(ad + bc). \end{aligned}$$

Un número dual  $a + \epsilon.b$  también, se puede representar como la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

pues así

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc + ad \end{pmatrix},$$

que es lo mismo que  $(a + \epsilon.b) \cdot (c + \epsilon.d) = ac + \epsilon.(ad + bc)$ .

Se ha mencionado previamente, que existe una transformación afín  $e^2 \cdot 5$  que actúa según  $x \mapsto 5x+2$  y es la única que cambia a  $K$  por  $D = \mathbb{Z}_{12} \setminus K$ <sup>1</sup>. Pero, para el contrapunto de la primera especie se necesitan dos tonos. Para eso, usaremos

$$\mathbb{Z}_{12}[\epsilon] = \{x + \epsilon.y : x, y \in \mathbb{Z}_{12}, \epsilon^2 = 0\},$$

donde  $x$  es el cantus firmus y  $y$  el intervalo al discanto. Así, podemos formar los intervalos consonantes

$$K[\epsilon] = \{x + \epsilon.k : x \in \mathbb{Z}_{12}, k \in K\}$$

y los disonantes

$$D[\epsilon] = \{x + \epsilon.d : x \in \mathbb{Z}_{12}, d \in D\},$$

que son una bipartición de  $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$ . Se puede dar la siguiente definición.

**Definición 2.4.** Una bipartición  $(K[\epsilon], D[\epsilon])$  de  $\mathbb{Z}_{12}$  es una dicotomía de intervalos (de contrapunto).

En  $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$ , también hay simetrías afines de la forma  $e^{s+\epsilon.t} \cdot (u + \epsilon.v)$ ,  $s, t, v \in \mathbb{Z}_{12}$ ,  $u \in \mathbb{Z}_{12}^{\times 2}$ . Denotaremos a este conjunto de simetrías con  $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$ . Buscamos simetrías  $p[\epsilon] \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$  tales que  $p[\epsilon](K[\epsilon]) = \mathbb{Z}_{12}[\epsilon] \setminus K[\epsilon] = D[\epsilon]$ . Hay por lo menos una obvia:

$$e^{\epsilon.2} \cdot 5,$$

esto quiere decir, la polaridad de los intervalos deja invariantes a los intervalos con *cantus firmus* 0. En efecto, dada  $x + \epsilon.k \in K[\epsilon]$ , tenemos

$$e^{\epsilon.2} \cdot 5(x + \epsilon.k) = 5x + \epsilon.p(k) \in D[\epsilon],$$

donde  $p = e^2 \cdot 5$ .

**Ejemplo 2.1.** La sexta menor  $k = 8$  sobre  $D$  es  $2 + k.8$ . Si aplicamos la polaridad entonces resulta

$$\begin{aligned} e^{\epsilon.2} \cdot 5(2 + \epsilon.8) &= 5(2) + \epsilon.(5 \cdot 8 + 2) \\ &= 10 + \epsilon.6 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>El símbolo  $\setminus$  denota la diferencia de conjuntos.

<sup>2</sup>Denota al grupo de los elementos con inverso multiplicativo.

que es un tritono sobre  $B\flat$ .

De manera matricial, se puede representar así

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Si uno va de un intervalo consonante a otro ¿cómo podemos contrastarlo, si es ir de uno agradable a otro? La idea es deformar a  $K[\epsilon]$  y a  $D[\epsilon]$  usando una simetría  $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$ . Se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.5.** Sean la dicotomía  $\Delta[\epsilon] = (X[\epsilon]/Y[\epsilon])$  y  $\xi \in K[\epsilon]$ . Una simetría  $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12})$  es de contrapunto para  $\xi$  si:

1.  $\xi \in gD[\epsilon]$ ,
2. se satisface  $p[\epsilon]$  es una polaridad de  $gK[\epsilon]$ , es decir,  $p[\epsilon](gK[\epsilon]) = gD[\epsilon]$  y  $p[\epsilon](gD[\epsilon]) = gK[\epsilon]$ ,
3. la intersección  $gK[\epsilon] \cap K[\epsilon]$  es de cardinalidad máxima para las  $g$  que cumplen 1 y 2.

Denotamos con  $H = e^{\epsilon \cdot \mathbb{Z}_{12}} \circ \mathbb{Z}_{12}[\epsilon]^\times$ .

**Teorema 2.1.** Para  $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}[\epsilon])$  existe  $h \in H$  tal que

$$gK[\epsilon] = hK[\epsilon].$$

**Demostración.** Ver [2, p.65]. □

Esto reduce el número de simetrías que hay que examinar.

**Definición 2.6.** Dada una dicotomía  $\Delta[\epsilon] = (X[\epsilon]/Y[\epsilon])$  y un intervalo  $\xi \in X[\epsilon]$ , decimos que el intervalo  $\eta$  es un sucesor admisible para  $\xi$  si está contenido en la intersección  $g(X[\epsilon]) \cap X[\epsilon]$  para una simetría de contrapunto para  $\xi$ .

**Teorema 2.2.** Si  $\xi = x + \epsilon \cdot k \in K[\epsilon]$  y  $g$  es una simetría de contrapunto entonces existe  $h \in H$  tal que también es de contrapunto y determina los mismos sucesores admisibles. Además, para encontrar los sucesores de  $\xi$  basta calcular los de  $0 + \epsilon \cdot k$  con alguna simetría  $h^{(x)} \in H$  y trasladar según

$$e^x (h^{(x)} K[\epsilon] \cap K[\epsilon]).$$

**Demostración.** Ver [2, p.66].  $\square$

**Ejemplo 2.2.** Ya sabemos que  $g = e^{\epsilon.6}(1 + \epsilon.6) \in H$  es de contrapunto para  $0 + 0.\epsilon$ , y determina los sucesores

$$\begin{aligned} z + \epsilon.\{3, 9\}, & \text{ si } z \text{ es par,} \\ z + \epsilon.K, & \text{ si } z \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Representando los cálculos de manera matricial, al aplicar la simetría de contrapunto a los intervalos consonantes con *cantus firmus* 0 obtenemos lo que sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \notin K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \notin K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

En resumen, hay 2 sucesores admisibles, pues  $0 + \epsilon.\{3, 9\}$  son consonantes.

Para  $1 + \epsilon.k$ , se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in K[\epsilon].$$

Vemos que hay 6 sucesores admisibles. De manera similar para los restantes *cantus firmus* obtenemos

$$\begin{aligned} 2 + \epsilon\{3, 9\}, & \quad 2 \text{ sucesores admisibles,} \\ 3 + \epsilon.K & \quad 6 \text{ sucesores admisibles,} \\ 4 + \epsilon\{3, 9\}, & \quad 2 \text{ sucesores admisibles,} \\ 5 + \epsilon.K & \quad 6 \text{ sucesores admisibles,} \\ 6 + \epsilon\{3, 9\}, & \quad 2 \text{ sucesores admisibles,} \\ 7 + \epsilon.K & \quad 6 \text{ sucesores admisibles,} \\ 8 + \epsilon\{3, 9\}, & \quad 2 \text{ sucesores admisibles,} \\ 9 + \epsilon.K & \quad 6 \text{ sucesores admisibles,} \\ 10 + \epsilon\{3, 9\}, & \quad 2 \text{ sucesores admisibles,} \\ 11 + \epsilon.K, & \quad 6 \text{ sucesores admisibles.} \end{aligned}$$

En conclusión, para esta simetría se tienen 48 sucesores admisibles. Para obtener otros sucesores no tenemos que repetir todos estos cálculos, sino basta trasladar según el *cantus firmus*. Por ejemplo, los sucesores de  $1 + 0.\epsilon$  son entonces

$$\begin{aligned} z + 1 + \epsilon.\{3, 9\} &= z' + \epsilon.\{3, 9\}, \quad \text{si } z' \text{ es impar,} \\ z + 1 + \epsilon.K &= z' + \epsilon.K, \quad \text{si } z' \text{ es par.} \end{aligned}$$

**Nota 2.1.** Los sucesores obtenidos para  $0 + 0.\epsilon$  son de acuerdo a esta simetría, puede que otra permita otros sucesores.

En la siguiente demostración,  $[P]$  es el corchete de Iverson [24], que vale 1 si  $P$  es verdadera y 0 si es falsa.

**Teorema 2.3.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{Z}_n$  y  $u \in \mathbb{Z}_n^\times$ . Entonces*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_n} |e^m \circ u(K) \cap K| = |K|^2.$$

**Demostración.** Sea  $U(K) = \{u_1, \dots, u_k\}$  la imagen de  $K$  al multiplicarlo por  $u$  y  $r$  un generador de  $\mathbb{Z}_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} |e^m \circ u(K) \cap K| &= \sum_{t=0}^{n-1} |e^{tr} \circ u(K) \cap K| = \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=1}^k |\{e^{tr}(u_s)\} \cap K| = \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=1}^k [u_s + tr \in K] = \sum_{s=1}^k \sum_{t=0}^{n-1} [u_s + tr \in K] = \sum_{s=1}^k |K| = |K|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Más adelante, demostraremos que maximizar  $gK[\epsilon] \cap K[\epsilon]$  se puede reducir a calcular

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}_{12}} e^t \circ u(K) \cap K$$

para algunos casos, por lo que entonces

$$|gK[\epsilon] \cap K[\epsilon]| \geq 6^2 = 36$$

pues  $|K| = 6$ . Este es el pequeño teorema de contrapunto.

## 2.3. Algoritmo de Hichert y verificación de pasos permitidos

**Nota 2.2.** En esta sección denotaremos a una dicotomía fuerte con  $\Delta = (X/Y)$ , esto se hace para no congestionar la notación.

Los detalles respecto al algoritmo de cálculo de simetrías y sucesores admisibles fueron dados por Hichert y Mazzola. Sea  $\xi = \epsilon.k$  con  $k \in K$  y la simetría  $g = e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv) \in H$ ; sin pérdida de generalidad, podemos elegir  $uv$  en la segunda componente, por ser  $u$  invertible. Reformularemos las condiciones primeras

y segunda para ser simetría de contrapunto. Tenemos

$$\begin{aligned} g.K[\epsilon] &= \bigcup_{x \in \mathbb{Z}_{12}} g(x + \epsilon.K) = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}_{12}} (ux + \epsilon.(uvx + t) + \epsilon.uK) \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_{12}} (y + \epsilon(vy + t) + \epsilon.uK) = \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_{12}} (y + \epsilon.e^{vy+t} \circ uK). \end{aligned}$$

Haciendo  $f(y) = e^{vy+t} \circ u$ , reescribimos lo anterior como

$$\begin{aligned} g.K[\epsilon] &= \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_{12}} (y + \epsilon.f(y).X), \tag{2.1} \\ g.K[\epsilon] \cap K[\epsilon] &= \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_{12}} (y + \epsilon.(f(y).K \cap K)). \end{aligned}$$

De la ecuación (2.1), se sigue que la primera condición de contrapunto es equivalente a que  $k \notin f(0).K$ . En otras palabras,  $k \in f(0).Y = f(0) \circ pX$ , lo que implica que

$$k = f(0) \circ p(s) = t + up(s)$$

para algún  $s \in K$ . Así,

$$t \in \{k - u.p(s) : s \in K\}.$$

Existe, pues,  $s \in K$  tal que

$$g.K[\epsilon] = \bigcup_{y \in \mathbb{Z}_{12}} (y + \epsilon.(e^{vy+k-up(s)} \circ u.K)),$$

luego

$$|g.K[\epsilon] \cap K[\epsilon]| = \sum_{y \in \mathbb{Z}_{12}} |e^{vy+k-up(s)} \circ u.K \cap K|. \tag{2.2}$$

**Lema 2.1.** Sean  $g = e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.v) \in H$  y  $p_{\Delta}^0 = e^{\epsilon.r} \circ w \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}[\epsilon])$  tal que  $p_{\Delta}^0(K[\epsilon]) = D[\epsilon]$ . Entonces

$$p_{\Delta}^0 \circ g.K[\epsilon] = g \circ p_{\Delta}^0.K[\epsilon] = g.Y[\epsilon] \iff p_{\Delta}^0 \circ g = g \circ p_{\Delta}^0.$$

**Demostración.** La recíproca es casi obvia

$$p_{\Delta}^0 \circ g.K[\epsilon] = g \circ p_{\Delta}^0.K[\epsilon] = g.(p_{\Delta}^0.K[\epsilon]) = g.Y[\epsilon].$$

Para la directa, sea  $\alpha + \epsilon.\beta$  un intervalo arbitrario con  $\beta \in K$ . Por hipótesis, debe existir un intervalo  $\gamma + \epsilon.\delta$  con  $\delta \in K$  tal que

$$p_{\Delta}^0 \circ g(\alpha + \epsilon.\beta) = g \circ p_{\Delta}^0(\gamma + \epsilon.\delta).$$

Siendo  $p = e^r \circ w$ , calculamos

$$\begin{aligned} p_{\Delta}^0 \circ g(\alpha + \epsilon.\beta) &= e^{\epsilon.r} \circ w(u\alpha + \epsilon.(v\alpha + u\beta + t)) \\ &= uw\alpha + \epsilon.(vw\alpha + uw\beta + wt + r) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g \circ p_{\Delta}^0(\gamma + \epsilon.\delta) &= e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.v)(w\gamma + \epsilon.(w\delta + r)) \\ &= uw\gamma + \epsilon.(uw\delta + vw\gamma + ur + t), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} uw\alpha &= uw\gamma, \\ vw\alpha + uw\beta + wt + r &= uw\delta + vw\gamma + ur + t. \end{aligned} \tag{2.3}$$

De estas ecuaciones se deduce, por la invertibilidad de  $u$  y de  $w$ , que

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \beta + ut(1 - w) + wr(u - 1) \in K.$$

Como  $\Delta$  es fuerte, es necesario que  $ut(1 - w) + wr(u - 1) = 0$  pues la segunda ecuación vale para un  $\beta \in K$  arbitrario. Por lo tanto,  $\delta = \beta$  y se sigue que  $p_{\Delta}^0 \circ g = g \circ p_{\Delta}^0$ .  $\square$

**Escolio 2.1.** Lo anterior es falso si  $g \notin H$ . Por ejemplo, tomemos  $g = e^1 \circ 1$  y la polaridad  $p[\epsilon] = e^{\epsilon.2} \circ 5$ . Es evidente que  $p[\epsilon]$  es una polaridad de  $(g.K[\epsilon]/g.Y[\epsilon]) = K[\epsilon]/Y[\epsilon]$ , pues  $g$  deja invariante la parte dual de la dicotomía original. No obstante,

$$g \circ p[\epsilon] = e^1 \circ 1 \circ e^{\epsilon.2} \circ 5 = e^{1+\epsilon.2} \circ 5 \neq e^{5+\epsilon.2} \circ 5 = e^{\epsilon.2} \circ 5 \circ e^1 \circ 1 = p[\epsilon] \circ g.$$

El lema anterior, nos da un criterio para verificar rápidamente si la dicotomía deformada por  $g$  es polarizada por  $p_{\Delta}^0$ . Obsérvese, que de la ecuación (2.3) deducimos que debe satisfacerse

$$wt + r = ur + t$$

pues ya sabemos que forzosamente  $\alpha = \gamma$  y  $\beta = \delta$ .

Para dar el algoritmo de Hichert, solo resta estudiar con más detalle (2.2) según el valor de  $\nu$ . Cuando  $\nu$  es invertible,  $\nu\mathbb{Z}_{12} + k - up(s) = \mathbb{Z}_{12}$ , y obtenemos

$$|g.K[\epsilon] \cap K[\epsilon]| = \sum_{y \in \mathbb{Z}_{12}} |e^y \circ u.K \cap K| = |K|^2$$

por el teorema 2.3. Si  $\nu = 0$ , (2.2) se reduce a

$$|g.K[\epsilon] \cap K[\epsilon]| = \sum_{y \in \mathbb{Z}_{12}} |e^{k-up(s)} \circ u.K \cap K| = 12|e^{k-up(s)} \circ u.K \cap K|.$$

Por último, si  $\nu \neq 0$ , hacemos  $\rho = \text{mcd}(\nu, 12)$  y (2.2) se puede escribir como

$$|g.K[\epsilon] \cap K[\epsilon]| = \rho \sum_{j=0}^{\frac{12}{\rho}-1} |e^{j\rho+k-up(s)} \circ u.K \cap K|.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.4** (Pequeño teorema de contrapunto). *Todo intervalo consonante tiene al menos 36 sucesores admisibles con alguna simetría de contrapunto.*

El cómputo explícito de las simetrías de contrapunto se debe a Jens Hichert.

**Algoritmo 2.1** (Hichert, 1993). Calcula las simetrías de contrapunto en  $H$  para los intervalos  $\epsilon.k \in K[\epsilon]$ . Aquí,  $\chi(x, y)$  es la función que devuelve  $|(e^x \circ y.K) \cap K|$ .

**Entrada:** La dicotomía fuerte  $\Delta = (X/Y)$  y su polaridad  $e^r \circ w$ .

**Salida:** El conjunto de simetrías de contrapunto  $\Sigma_k \subseteq H$  de  $\epsilon.k \in X[\epsilon]$ .

```

1 para todo  $k \in X$  hacer
2    $M \leftarrow 0, \Sigma_k \leftarrow \emptyset;$ 
3   para todo  $u \in \mathbb{Z}_{12}^\times$  hacer
4     para todo  $s \in X$  hacer
5       para todo  $v \in \mathbb{Z}_{12}$  hacer
6          $t \leftarrow k - u(ws + r);$ 
7         si  $wt + r = ur + t$  entonces
8           si  $v = 0$  entonces
9              $S \leftarrow 12\chi(t, u);$ 
10          si no si  $v \in GL(\mathbb{Z}_{12})$  entonces
11             $S \leftarrow 36;$ 
12          sino
13             $\rho \leftarrow \text{mcd}(v, 12), S \leftarrow \rho \sum_{j=0}^{\frac{12}{\rho}-1} \chi(j\rho + t, u);$ 
14          si  $S > M$  entonces
15             $\Sigma_k \leftarrow \{e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv)\}, M \leftarrow S;$ 
16          si no si  $S = M$  entonces
17             $\Sigma_k \leftarrow \Sigma_k \cup \{e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv)\};$ 
18 devolver  $\Sigma_k$ .
```

El siguiente cuadro, corresponde a las simetrías de contrapunto para la dicotomía  $(K \setminus D)$  obtenidas por medio de este algoritmo. Las columnas primera y segunda corresponden a los intervalos  $\xi = \epsilon.y$  y, al número de sucesores admisibles, respectivamente. Se dan en detalle los conjuntos de sucesores admisibles  $gK[\epsilon] \cap K[\epsilon]$  para cada  $g$  en la cuarta columna. Es de resaltar que, en la fila correspondiente al intervalo 7 (la quinta perfecta), todo sucesor consonante es admisible salvo el de la quinta perfecta. En otras palabras: las quintas paralelas siempre están prohibidas según este modelo de contrapunto. Lo mismo ocurre en la teoría de Fux.

$y$	$N$	Simetrías	Sucesores admisibles
0	48	$e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)$	$z + \epsilon.\{3, 9\}$ , $z$ par $z + \epsilon.K$ , $z$ impar
		$e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)$	$z + \epsilon.\{3, 7, 9\}$ , $z$ par $z + \epsilon.(K \setminus \{7\})$ , $z$ impar
		$e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{3, 4, 7, 8\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.\{0, 3, 7, 8\}$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.\{0, 3, 4, 7\}$
		$e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{3, 4, 7, 8\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.\{0, 3, 4, 7\}$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.\{0, 3, 7, 8\}$
		$e^{\epsilon.11} \circ 11$	$\mathbb{Z}_{12} + \epsilon.\{3, 4, 7, 8\}$
3	56	$e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{0, 4, 7, 8\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.(K \setminus \{7\})$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.(K \setminus \{9\})$
		$e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{0, 4, 7, 8\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.(K \setminus \{9\})$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.(K \setminus \{7\})$
4	48	$e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)$	Ver $y = 0$
		$e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)$	Ver $y = 0$
7	60	$e^0 \circ 7$	$\mathbb{Z}_{12} + \epsilon.(K \setminus \{7\})$
8	48	$e^{\epsilon.3} \circ 7$	$\mathbb{Z}_{12} + \epsilon.\{0, 3, 4, 7\}$
		$e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)$	Ver $y = 0$
		$e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)$	Ver $y = 0$
		$e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.4)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{0, 3, 4, 7\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.\{3, 4, 7, 8\}$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.\{0, 3, 7, 8\}$
		$e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8)$	$\{0, 3, 6, 9\} + \epsilon.\{0, 3, 4, 7\}$ $\{1, 4, 7, 10\} + \epsilon.\{0, 3, 7, 8\}$ $\{2, 5, 8, 11\} + \epsilon.\{3, 4, 7, 8\}$
9	56	$e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8)$	Ver $y = 3$
		$e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)$	Ver $y = 3$

Tabla 2.1: Simetrías y sucesores admisibles para consonancias con *cantus firmus*

# Capítulo 3

## Modelos de modulación

### 3.1. Preliminares históricos

Jean-Philippe Rameau (1683-1764) fue un intelectual, clavecinista y teórico musical francés. Su trabajo es considerado un pilar del desarrollo de la teoría de la armonía. En 1730 publica *Méthode d'accompagnement*, posteriormente en 1737 ve la luz *Traité de la musique harmonique et poétique* y en 1750 *Démonstration du principe de l'harmonie*, con los que establece los fundamentos de la armonía clásica. En sus publicaciones, podemos encontrar conceptos clave como el bajo fundamental, el acorde de la triada y sus inversiones y el estudio de los armónicos. No sólo precisa conceptos como las tonalidades mayor y menor, sino que además desarrolla una teoría coherente sobre modulación y las cadencias, ingredientes esenciales que permitieron comprender la transición entre tonalidades. Así, Rameau sentó las bases para el estudio moderno de la armonía y su transformación a sistemas más complejos [10].

Un siglo y medio después, Arnold Schönberg publicó en 1911 *Harmonielehre*, un tratado sobre armonía. En esta influyente obra, repasa y profundiza los conceptos de armonía tonal y modulación y, podemos encontrar de manera explícita el mecanismo de modulación y la noción de *acordes pivote*. Posteriormente, Guerino Mazzola, en su trabajo acerca de teoría musical, propone el modelo cuántico de modulación. Este modelo, formaliza la noción de tonalidad, cadencia, pivotes y el mecanismo de modulación de Schönberg. El modelo fue utilizado para describir estructuras musicales complejas como, el primer movimiento de la sonata *Hammerklavier* de Beethoven [18, Sección 28.2]. Actualmente, las herramientas analíticas muy sofisticadas poseen la esencia de las ideas concebidas por Rameau.

## 3.2. Modelo cuántico

### 3.2.1. Escalas y tonalidades

Para el modelo de modulaci3n cu3ntica, consideramos escalas  $E$  en  $\mathbb{Z}_{12}$ , que simplemente son subconjuntos de  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Ejemplo 3.1.** La escala mayor en t3nica en  $C$  es

$$C = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}.$$

En particular, nos interesan todas las escalas que son traslaci3n de  $C$ .

Ocurre que  $C$  tiene 7 elementos. A cada uno lo llamaremos *grado* y los denotaremos con n3meros romanos

$$\{I, II, III, IV, V, VI, VII\}.$$

El acorde del grado  $n$ -3simo es

$$S_n = \{E_n, E_{n+2 \bmod 7}, E_{n+4 \bmod 7}\},$$

con  $E = \{E_1, \dots, E_{|E|}\}$ , donde los elementos est3n ordenados seg3n su m3nimo representante no negativo de su clase. As3, los acordes de  $C$  son

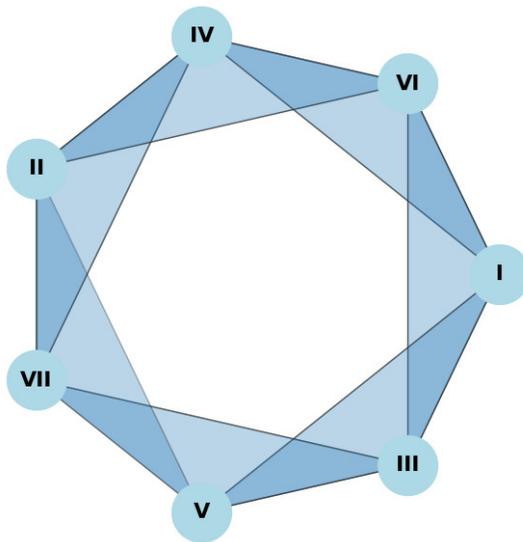
T3nica	$I = \{0, 4, 7\}$	( $C$ mayor)
Supert3nica	$II = \{2, 5, 9\}$	( $D$ menor)
Mediante	$III = \{4, 7, 11\}$	( $E$ menor)
Subdominante	$IV = \{5, 9, 0\}$	( $F$ mayor)
Dominante	$V = \{7, 11, 2\}$	( $G$ mayor)
Submediante	$VI = \{9, 0, 4\}$	( $A$ menor)
Sensible	$VII = \{11, 2, 5\}$	( $B$ disminuido)

En notaci3n musical, tenemos lo que se muestra en la figura 3.2.

Obs3rvese que los grados forman una cubierta<sup>1</sup> de  $\mathbb{Z}_{12}$ . Si se calcula el nervio<sup>2</sup> de dicha cubierta se obtiene una banda de M3bius (figura 3.1). A esta cubierta le

<sup>1</sup>Vid. [28, p.104, definici3n 15.9].

<sup>2</sup>Vid. [23, p.108, secci3n 2.5].

Figura 3.1: La banda de Möbius de la escala mayor de  $C$ Figura 3.2: Acordes correspondientes a los grados de la escala de  $C$ .

llamaremos *tonalidad* de la escala subyacente (en este caso de  $C$  mayor).

La escala mayor de  $C$  tiene una simetría no trivial aparte de la identidad, a saber  $e^4$ .<sup>11</sup> En efecto,

$$\begin{aligned} & \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} \cdot 11 + 4 \\ &= \{0 + 4, -2 + 4, -4 + 4, -5 + 4, -7 + 4, -9 + 4, -11 + 4\} = \\ & \qquad \{4, 2, 0, 11, 9, 7, 5\} = C. \end{aligned}$$

Por esta razón, sabemos que entre dos tonalidades sobre la escala mayor siempre hay dos simetrías, una traslación y otra de la forma  $e^t \cdot -1$ .

**Ejemplo 3.2.** Entre las tonalidades de  $C$  mayor y la de  $D$  mayor median las

simetrías  $e^2 \cdot 1$  y  $e^6 \cdot -1$ , pues

$$\begin{aligned} & \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} \cdot -1 + 6 \\ &= \{0 + 6, -2 + 6, -4 + 6, -5 + 6, -7 + 6, -9 + 6, -11 + 6\} = \\ & \qquad \qquad \qquad \{6, 4, 2, 1, 11, 9, 7\} = C + 2 = D. \end{aligned}$$

### 3.2.2. Cadencias

Un aspecto clave de la música tonal es establecer la tonalidad. Para ello se vale de las cadencias, que son conjuntos de grados que caracterizan a una tonalidad. Es decir: dicho conjunto identifica unívocamente a la tonalidad, y además es minimal, lo que significa que, si se quita un grado, entonces deja de identificar.

Hay cinco cadencias posibles:

$$\begin{aligned} k_1 &= \{II, V\}, & k_2 &= \{II, III\}, & k_3 &= \{III, IV\}, \\ k_4 &= \{IV, V\}, & k_5 &= \{VII\}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.3.** Para una explicación más clara sobre la definición de cadencia, consideremos la  $k_5$ . Al construir los acordes de  $C$ , observamos que el acorde del grado séptimo es  $\{11, 11 + 3 = 2, 2 + 3 = 5\}$  (esto es, el acorde  $B^\circ$ ). Cuando lo intentamos con otra escala entonces, es fácil ver que esa triada no vuelve aparecer, pues el resto de los acordes están contruidos con distancias 4, 3 (como  $C = \{0, 0 + 4 = 4, 4 + 3 = 7\}$ ) o bien 3, 4 (como  $d = \{2, 2 + 3 = 5, 5 + 4 = 9\}$ ); si a pesar de todo lograra salir entre las triadas de otra escala, entonces tendría que ser como el séptimo grado. Pero todos los séptimos grados son distintos.

### 3.2.3. Modulador

Schönberg propone el siguiente proceso para modular (es decir, ir de una tonalidad a otra) [25, p.186].

1. Usar acordes “neutrales” de la tonalidad de partida  $S$ .
2. Introducir acordes comunes a ambas tonalidades.
3. Desplegar una cadencia de la tonalidad de llegada.

Para formalizar esto, debemos elegir una simetría  $m = e^s \circ u : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$  de modo que  $e^s \cdot u(S) = T$  y una cadencia  $K$  de  $T$ . A  $m$  se le llama *modulador*.

### 3.2.4. Cuantos de modulación

**Definición 3.1.** Dadas las tonalidades  $S$  y  $T$ , el modulador  $m$  y la cadencia  $k$  de  $T$  decimos que un cuanto de modulación  $M \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  es tal que satisface:

1.  $m(M) = M$ .
2. Los elementos de  $k$  están contenidos en  $M$ .
3. El conjunto  $M \cap T$  es rígido, es decir, si  $f(M \cap T) = M \cap T$  entonces  $f = e^0$ .
4.  $M$  es el mínimo entre los conjuntos con las tres propiedades anteriores.

**Teorema 3.1** (Mazzola, 1990). Entre dos tonalidades mayores  $S$  y  $T$  siempre existe un cuanto de modulación  $M$  para alguna cadencia  $k$  de  $T$  tal que

- $M$  es la unión de los grados de  $S$  y  $T$  que están contenidos en  $M$  y que definen los grados de  $M$ .
- Los grados comunes de  $T$  y  $M$  son los pivotes.
- El modulador está unívocamente determinado por los grados de la modulación.

Una modulación como la del teorema se dice *cuantizada*.

Para los ejemplos siguientes, los cuantos de modulación se pueden consultar en [18, p.1199].

**Ejemplo 3.4.** Para la modulación de  $C$  a  $D$  con la cadencia  $k_4 = \{IV_D, V_D\}$ , tenemos el modulador  $m = e^6 \cdot -1$ . El cuanto de modulación es

$$M = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} = II_C \cup III_C \cup V_C \cup VII_C \cup \underbrace{II_D \cup VII_D \cup IV_D \cup V_D}_{\text{Pivotes}}.$$

En efecto, como  $C = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  y  $D = \{2, 4, 6, 7, 9, 11, 1\}$  tenemos  $M \cap D = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$ , que sabemos que es rígido porque es, precisamente, una dicotomía fuerte.

**Ejemplo 3.5.** La escala mayor con tónica en  $G$  es

$$G = \{7, 9, 11, 0, 2, 4, 6\}.$$

Los acordes de los grados en  $G$  son

$$\begin{aligned} I &= \{7, 11, 2\}, & V &= \{2, 6, 9\}, \\ II &= \{9, 0, 4\}, & VI &= \{4, 7, 11\}, \\ III &= \{11, 2, 6\}, & VII &= \{6, 9, 0\}, \\ IV &= \{0, 4, 7\}. \end{aligned}$$

Para la modulaci3n de  $C$  a  $G$  con la cadencia  $k_5 = \{VII_G\}$ , tenemos el modulador  $m = e^{11} \cdot -1$ . El cuanto de modulaci3n es

$$M = \{0, 2, 5, 6, 9, 11\} = II_C \cup VII_G.$$

Se tiene  $M \cap G = \{0, 2, 6, 9, 11\}$  y es r3gida porque, la 3nica que lo deja invariante es la identidad. Los grados sobre  $M$  que tambi3n son de  $G$  son

$$\left. \begin{aligned} III_G &= \{11, 2, 6\} \\ V_G &= \{2, 6, 9\} \\ VII_G &= \{6, 9, 0\} \end{aligned} \right\} \text{ estos son los pivotes.}$$

Como  $e^{11} \cdot -1(\{0, 2, 6, 9, 11\}) = \{11, 9, 5, 2, 0\}$ , se debe agregar el 5 a  $M$  para asegurar que  $m$  es su simetr3a, pues  $e^{11} \cdot -1(5) = -5 + 11 = 6$ . Esto prueba que  $M$  es m3nimo.

**Ejemplo 3.6.** La escala mayor con t3nica en  $E^b$  es

$$E^b = \{3, 5, 7, 8, 10, 0, 2\}.$$

Los acordes de los grados en  $E^b$  son

$$\begin{aligned} I &= \{3, 7, 10\}, & V &= \{10, 2, 5\}, \\ II &= \{5, 8, 0\}, & VI &= \{0, 3, 7\}, \\ III &= \{7, 10, 2\}, & VII &= \{2, 5, 8\}, \\ IV &= \{8, 0, 3\}. \end{aligned}$$

Para la modulaci3n de  $C$  a  $E^b$  con la cadencia  $k_1 = \{II_{E^b}, V_{E^b}\}$ , tenemos el modulador  $m = e^7 \cdot 11$ . El cuanto de modulaci3n es

$$M = \{0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

La intersección es

$$M \cap Eb = \{0, 2, 5, 7, 8, 10\},$$

y es rígida porque es una dicotomía fuerte. Los grados de  $M$ , que también son de  $Eb$  son

$$II_{Eb}, III_{Eb}, V_{Eb}, VII_{Eb},$$

que son los pivotes.

Observemos que,  $Eb$  es equivalente a  $D\sharp$ , esto viene del hecho de que trabajamos en la escala equitemperada.

### 3.3. Modulaciones por dualidad

Algunas modulaciones del modo mayor al menor se rigen por la dualidad de los grupos PLR y T/I, que explicaremos a continuación. Si bien, ya hemos introducido los acordes como grados de una tonalidad, necesitamos hacer algunas distinciones de los mismos.

**Definición 3.2.** *El conjunto  $\{a, b, c\} \in \wp(\mathbb{Z}_{12})$  es un acorde mayor si  $b = a + 4$  y  $c = a + 7$ .*

Los acordes mayores son designados con mayúsculas, por ejemplo  $F = \{5, 9, 0\}$ . En este caso de  $F$ , la fundamental es  $F = 5$ , la tercera mayor es  $A = 9$ , y la quinta es  $C = 0$ .

**Definición 3.3.** *El conjunto  $\{a, b, c\} \in \wp(\mathbb{Z}_{12})$  es un acorde menor si  $b = a + 3$  y  $c = a + 7$ .*

Los acordes menores son designados con minúsculas, por ejemplo  $f = \{5, 8, 0\}$ . En este caso de  $f$ , la fundamental es  $f = 5$ , la tercera menor es  $g\sharp = ab$ , y la quinta es  $c = 0$ .

**Definición 3.4.** *El conjunto completo de los 24 acordes mayores y menores se denotará con  $\mathcal{M}$ . Es decir,*

$$\mathcal{M} = \{\{x, x + 3, x + 7\}, \{X, X + 4, X + 7\} : x, X \in \mathbb{Z}_{12}\}.$$

#### 3.3.1. Las transformaciones T e I

La transposición de acuerdo a la teoría musical, es el proceso de trasladar un tono, o un conjunto de tonos por un intervalo constante. El concepto matemático,

que nos ayuda a representar esto, son las transformaciones, como las que vemos en las siguientes dos definiciones.

**Definición 3.5.** Sea  $x \in \mathcal{M}$ , donde  $x = \{a, b, c\}$ . Una transposición es una función  $T_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  dada por

$$T_n(x) = x + n = \{a + n, b + n, c + n\},$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$ .

Al aplicar  $T_n$  a los elementos de  $\mathcal{M}$  en principio, hay una cantidad infinita de transposiciones de cualquier triada, ya que  $n \in \mathbb{Z}$ . No obstante, después de haber transpuesto cualquier triada 12 veces, se obtiene la misma sucesión de triadas.

**Ejemplo 3.7.** Observemos las transposiciones de  $F$ .

$$\begin{aligned} T_0(F) &= T_0(\{5, 9, 0\}) = \{5, 9, 0\} \\ T_1(F) &= T_1(\{5, 9, 0\}) = \{6, 10, 1\} \\ T_2(F) &= T_2(\{5, 9, 0\}) = \{7, 11, 2\} \\ &\vdots \\ T_{12}(F) &= T_{12}(\{5, 9, 0\}) = \{5, 9, 0\} = T_0(F) \\ T_{13}(F) &= T_{13}(\{5, 9, 0\}) = \{6, 10, 1\} = T_1(F) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vale recalcar que  $T_0$  se comporta como la función identidad.

**Definición 3.6.** Sea  $x \in \mathcal{M}$ , donde  $x = \{a, b, c\}$ . Una inversión es una función  $I_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  dada por

$$I_n(x) = -x + n = \{-A + n, -B + n, -C + n\},$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$ .

Similarmente al caso de las transposiciones, los elementos de  $\mathcal{M}$  se pueden invertir y existe un número infinito de inversiones de cada triada. De igual manera, cuando se invierte una triada y la transponemos 12 veces se obtiene la misma sucesión de triadas.

**Ejemplo 3.8.** Observemos las inversiones de  $F$ .

$$\begin{aligned}
I_0(F) &= I_0(\{5, 9, 0\}) = \{7, 3, 0\} \\
I_1(F) &= I_1(\{5, 9, 0\}) = \{8, 4, 1\} \\
I_2(F) &= I_2(\{5, 9, 0\}) = \{9, 5, 2\} \\
&\vdots \\
I_{12}(F) &= I_{12}(\{5, 9, 0\}) = \{7, 3, 0\} = I_0(F) \\
I_{13}(F) &= I_{13}(\{5, 9, 0\}) = \{8, 4, 1\} = I_1(F) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Resulta que  $I_0$  se comporta como la función identidad.

**Definición 3.7.** *El conjunto de todas las funciones de transposición e inversión se denota  $TI$ , y se define como:*

$$TI = \{T_n, I_n : n = 0, \dots, 11\}.$$

El siguiente lema, clasifica los elementos del conjunto  $TI$ , analizando las composiciones de las funciones de  $T$  e  $I$ .

**Lema 3.1.** Se tiene las siguientes relaciones en el conjunto  $TI$ :

$$\begin{aligned}
T_m \circ T_n &= T_{m+n \text{ mód } 12} \\
T_m \circ I_n &= I_{m+n \text{ mód } 12} \\
I_m \circ T_n &= I_{m-n \text{ mód } 12} \\
I_m \circ I_n &= I_{m-n \text{ mód } 12}
\end{aligned}$$

**Demostración.** Ver [5, p.95]. □

Al aplicar de manera sucesiva las funciones del conjunto  $TI$  a cualquier elemento de  $\mathcal{M}$ , se obtiene el mismo  $\mathcal{M}$ . Los ejemplos 3.7 y 3.8 ejemplifican lo dicho en el enunciado anterior a  $F = \{5, 9, 0\}$ .

**Teorema 3.2.** *El conjunto  $TI$  forma un grupo bajo composición.*

**Demostración.** Ver [5, p.95]. □

### 3.3.2. Las transformaciones P, L y R

Además de las transformaciones  $T$  e  $I$ , también se tienen las funciones paralela ( $P$ ), intercambio de la séptima, o *Leittonwechsel* ( $L$ ) y relativa ( $R$ ).

Dos tríadas o acordes son paralelas si tienen la misma letra como nombre, pero la paridad es opuesta, es decir si el acorde es mayor o menor. Por ejemplo, para  $F$  mayor  $F = \{5, 9, 0\}$  es  $F$  menor  $f = \{5, 8, 0\}$ .

Dos tríadas o acordes son relativas si son de paridad opuesta y, la raíz de la que es menor se encuentra tres semitonos por debajo de la raíz de la tríada mayor. Por ejemplo, para  $F$  mayor  $\{5, 9, 0\}$  a 5 se resta tres semitonos el cual es 2. Luego, se construye un acorde menor que empiece con 2, el cual resulta ser el acorde  $D$  menor,  $\{2, 5, 9\}$ ,  $D$  menor es la relativa de  $F$  mayor.

Por último, el intercambio de la séptima ( $L$ ) es de paridad opuesta, pero en este caso la raíz de la triada a tratar se reemplaza con su séptima. Para ejemplificarlo, para  $F$  mayor  $\{5, 9, 0\}$  como su raíz es 5, la reemplazamos con su séptima que es 4; resulta en el acorde de  $A$  menor,  $\{4, 0, 9\}$ , que es el intercambio de la séptima de  $F$ .

Lo anterior expuesto se resume en la siguiente definición.

**Definición 3.8.** Si  $x, Y \in \mathcal{M}$ , donde  $x = \{a, b, c\}$  es una tríada menor y  $Y = \{A, B, C\}$  es una tríada mayor, entonces

$$\begin{aligned} P(x) &= P(\{a, b, c\}) = \{a, b + 1, c\}, \\ P(Y) &= P(\{A, B, C\}) = \{A, B - 1, C\}, \\ L(x) &= L(\{a, b, c\}) = \{c + 1, a, b\}, \\ L(Y) &= L(\{A, B, C\}) = \{B, C, A - 1\}, \\ R(x) &= R(\{a, b, c\}) = \{b, c, a - 2\}, \\ R(Y) &= R(\{A, B, C\}) = \{C + 2, A, B\}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9.**

$$\begin{aligned} P(g) &= P(\{7, 10, 2\}) = \{7, 11, 2\} = G \text{ y } P(E) = P(\{4, 8, 11\}) = \{4, 7, 11\} = e, \\ L(a) &= L(\{9, 0, 4\}) = \{5, 9, 0\} = F \text{ y } L(D) = L(\{2, 6, 9\}) = \{6, 9, 1\} = f\#, \\ R(c) &= R(\{0, 3, 7\}) = \{3, 7, 10\} = D\# \text{ y } R(F) = R(\{5, 9, 0\}) = \{2, 5, 9\} = d. \end{aligned}$$

**Definición 3.9.** El conjunto de las funciones paralela, relativa e intercambio de

la séptima se denota con  $PLR$ . Es decir,

$$PLR = \{(L \circ R)^n, R \circ (L \circ R)^n : n = 0, \dots, 11\}.$$

De la definición anterior, notemos que  $P$  y  $L$  no aparecen implícitamente. Pero, podemos representarlos de la siguiente manera:

$$P = R \circ (L \circ R)^3,$$

$$L = R \circ (L \circ R)^{11}.$$

**Teorema 3.3.** *El conjunto  $PLR$  forma un grupo bajo composición. Se tiene las siguientes relaciones,*

$$(R \circ (LR)^n)^{-1} = R \circ (LR)^n \quad y \quad ((LR)^n)^{-1} = (LR)^k$$

donde  $k = -n \pmod{12}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.102]. □

### 3.3.3. El isomorfismo entre $PLR$ y $TI$

El isomorfismo entre los grupos  $TI$  y  $PLR$  se construye primero, identificando los generadores y las identidades de los grupos  $TI$  y  $PLR$ . Para ser mas precisos, los generadores de  $TI$  son  $T_1$  e  $I_0$  en las relaciones

$$(T_1)^{12} = i \quad y \quad (I_0)^2 = i.$$

Además, los generadores del grupo  $PLR$  son  $LR$  y  $R$ , con las relaciones

$$(LR)^{12} = i \quad y \quad R^2 = i.$$

**Teorema 3.4.** *Existe un homomorfismo biyectivo  $\phi : PLR \rightarrow TI$  tal que*

$$\phi((LR)^x) = T_x, \quad \phi(R \circ (LR)^x) = I_n,$$

donde  $n = -x \pmod{12}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.104]. □

### 3.3.4. La dualidad de los grupos TI y PLR

**Lema 3.2.** El conjunto  $\mathcal{M}$  es un *TI*-conjunto. Esto quiere decir, el grupo *TI* actúa sobre  $\mathcal{M}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.106]. □

**Lema 3.3.** El conjunto  $\mathcal{M}$  es un *PLR*-conjunto. Esto quiere decir, el grupo *PLR* actúa sobre  $\mathcal{M}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.106]. □

**Lema 3.4.** Para todo  $x \in \mathcal{M}$ , la órbita  $TIx$  de  $x$  es  $\mathcal{M}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.107]. □

**Lema 3.5.** Sea  $x \in \mathcal{M}$ . Entonces el estabilizador de  $x$  bajo *PLR* es

$$PLR_x = \{f \in PLR : f * x = x\} = i = (LR)^0$$

**Demostración.** Ver [5, p.107]. □

**Definición 3.10.** Una acción del grupo  $G$  en el conjunto  $X$  es libre si para cualesquiera  $g, h \in G$  con  $g \neq h$  y  $x \in X$  se cumple que  $g * x \neq h * x$ .

**Corolario 3.1.** Los grupos *TI* y *PLR* actúan libremente sobre  $\mathcal{M}$ .

**Demostración.** Ver [5, p.107]. □

**Definición 3.11.** Una acción del grupo  $G$  en el conjunto  $X$  es transitiva si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe  $g \in G$  tal que  $g * x = y$ .

**Definición 3.12.** Una acción del grupo  $G$  en el conjunto  $X$  es regular si es transitiva y libre.

**Teorema 3.5.** Las acciones de los grupos *TI* y *PLR* sobre  $\mathcal{M}$  son regulares.

**Demostración.** Ver [5, p.108]. □

**Teorema 3.6.** Todos los elementos de los grupos *PLR* y *TI* conmutan. Es decir, si  $g \in PLR$  y  $h \in TI$  entonces  $g \circ h = h \circ g$ .

**Demostración.** Ver [5, p.108]. □

**Ejemplo 3.10.** Un ejemplo de la dualidad de los grupos  $PLR$  y  $TI$ , se puede ver claramente en un fragmento del *Canon en D* de Johann Pachelbel.

Esto se puede representar con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{T_7} & A \\ R \downarrow & & \downarrow R \\ b & \xrightarrow{T_7} & f\# \end{array}$$

que de manera explícita dice  $T_7 \circ R(D) = R \circ T_7(D)$ .



Figura 3.3: Acordes en el *Canon en D*, P. 37, de Pachelbel



# Capítulo 4

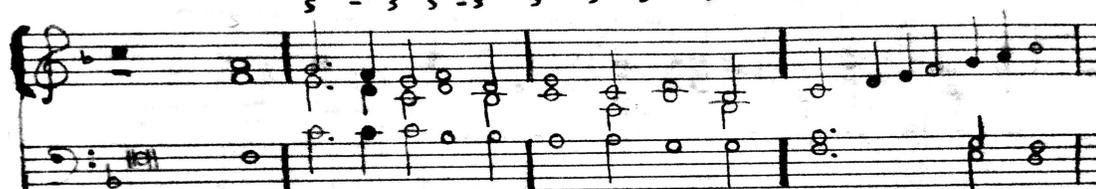
## Análisis de pasajes de obras selectas de Monteverdi

### 4.1. Contrapunto

A continuación, examinaremos ciertas transiciones comunes en las obras de Monteverdi, válidas tanto en el modelo de contrapunto como en el riguroso de Fux. Los fragmentos de las obras que analizaremos son algunas de las que aparecen en el artículo *Monteverdi's Early Seventeenth-Century 'Harmonic Progressions'* [17]. El primero, se titula *Confitebor primo (1640)* en los compases<sup>1</sup> 64-67. Se tiene la siguiente sucesión de intervalos de contrapunto:

Tema *Confitebor primo (1640)*

S - 3 S - 3 S - 3 S



ATB : Me-mo-ri-am fe-cit mi-ra-bi-li-um

Figura 4.1: *Confitebor primo (1640)*, compases del 64 al 67

<sup>1</sup>Vid. [9, p.76].

$$\xi_1 = 0 + \epsilon.7, \xi_2 = 0 + \epsilon.4, \xi_3 = 10 + \epsilon.7, \xi_4 = 10 + \epsilon.4,$$

$$\xi_5 = 9 + \epsilon.7, \xi_6 = 9 + \epsilon.3, \xi_7 = 7 + \epsilon.7, \xi_8 = 7 + \epsilon.4, \xi_9 = 5 + \epsilon.7.$$

Las simetrías de contrapunto asociadas a la sucesión anterior son:

Conjunto de simetrías	Cardinalidad del conjunto
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_5 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_6 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1
$\{g_7 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_8 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1

También, se analiza el fragmento de *Ma tu, più che mai dura* del libro V en los compases 6-8, se tienen los siguientes intervalos de contrapunto:

Tema *Ma tu, più che mai dura*

5 - 3 5 - 3 5

Fa - vil - la di pie - tà non sen - tian -

Figura 4.2: *Ma tu, più che mai dura* (1640), compases del 6 al 8

$$\xi_1 = 5 + \epsilon.7, \xi_2 = 5 + \epsilon.4, \xi_3 = 3 + \epsilon.7, \xi_4 = 3 + \epsilon.4, \xi_5 = 2 + \epsilon.7.$$

Las simetrías de contrapunto asociadas a la sucesión anterior son:

Conjunto de simetrías	Cardinalidad del conjunto
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1

Otro fragmento que se analiza, corresponde a la obra titulada *Io mi son giovinetta* del libro IV en los compases 52-53, se tienen los siguientes intervalos de contrapunto:



Figura 4.3: *Io mi son giovinetta*, compases del 52 al 53

$$\xi_1 = 7 + \epsilon.7, \xi_2 = 7 + \epsilon.3, \xi_3 = 5 + \epsilon.7, \xi_4 = 5 + \epsilon.4,$$

$$\xi_5 = 3 + \epsilon.7, \xi_6 = 3 + \epsilon.4, \xi_7 = 2 + \epsilon.7, \xi_8 = 2 + \epsilon.3, \xi_9 = 0 + \epsilon.7.$$

Las simetrías de contrapunto asociadas a la sucesión anterior son:

Conjunto de simetrías	Cardinalidad del conjunto
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_5 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_6 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_7 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1



compás, además están presentes las sucesiones 8–6 y 10–8. Se tienen los siguientes intervalos de contrapunto para la sucesión 8 – 6:



Figura 4.5: *Gloria a 7*, compases del 1 al 5

$$\xi_1 = 2 + \epsilon.0, \xi_2 = 2 + \epsilon.9, \xi_3 = 0 + \epsilon.0, \xi_4 = 0 + \epsilon.9,$$

$$\xi_5 = 11 + \epsilon.0, \xi_6 = 11 + \epsilon.8, \xi_7 = 9 + \epsilon.0, \xi_8 = 9 + \epsilon.8, \xi_9 = 7 + \epsilon.0.$$

Las simetrías de contrapunto asociadas a la sucesión son:

Conjunto de simetrías	Cardinalidad del conjunto
$\{g_1 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_3 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_4 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_5 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_6 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_7 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_9 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{10} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{11} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{12} = e^{\epsilon.3} \circ 7, g_{13} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8)\}$	2
$\{g_{14} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{15} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{16} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{17} = e^{\epsilon.3} \circ 7, g_{18} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8)\}$	2

Los intervalos de contrapunto para la sucesión 10 – 8 son:

$$\xi_1 = 11 + \epsilon.3, \xi_2 = 11 + \epsilon.0, \xi_3 = 9 + \epsilon.3, \xi_4 = 9 + \epsilon.0, \xi_5 = 7 + \epsilon.4.$$

Las simetrías de contrapunto asociadas a esta sucesión son:

Conjunto de simetrías	Cardinalidad del conjunto
$\{g_1 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_2 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_3 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6),$ $g_5 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_6 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_7 = e^{11} \circ 11\}$	5
$\{g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_9 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_{10} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{11} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	2

## 4.2. Modulaciones

Estudiaremos las modulaciones presentes en distintos fragmentos de la ópera *L'Orfeo*, que validan el modelo cuántico de modulación y las modulación entre mayor y menor. Los fragmentos de nuestro análisis fueron tomados del artículo *From Modal to Tonal: The Influence of Monteverdi on Musical Development* [22]. Empezamos, examinando las modulaciones presentes en el aria *In questo lieto e fortunato giorno*, donde la intersección del cuanto de modulación con la escala de la tonalidad de destino es además una dicotomía fuerte. Se puede ver reproducida en las figuras 4.6 y 4.7.

En esta aria, podemos encontrar la modulación de  $C$  a  $D$ , el cual fue calculado en el ejemplo 3.4. Recordemos que los acordes de  $D$  son:

$$\begin{aligned}
 I_D &= \{2, 6, 9\}, & D, \\
 II_D &= \{4, 7, 11\}, & e, \\
 III_D &= \{6, 9, 1\}, & f\sharp, \\
 IV_D &= \{7, 11, 2\}, & G, \\
 V_D &= \{9, 1, 4\}, & A, \\
 VI_D &= \{11, 2, 6\}, & b, \\
 VII_D &= \{1, 4, 7\}, & c\sharp^\circ.
 \end{aligned}$$

La cadencia  $k_4$  para  $C$  es  $\{F, G\}$ , y aparece en el compás 4 en la figura 4.6. En el compás 5 aparece el primer grado de  $D$ . Recordemos que la cadencia para  $D$  es  $k_4 = \{G, A\}$  y los pivotes son  $e, G, A$  y  $c\sharp^\circ$ . En este caso, notemos que la cadencia es subconjunto de los pivotes, y sus acordes aparecen en el compás 6.

Tema *In questo lieto e fortunato giorno*

PASTORE

1  
In questo lie-to e for-tu-na-to giorno ch'ha posto fi-ne a gl'amo-ro-si af-

2  
-fan-ni del no-stro se-mi de-o can-tiam Pa-sto-ri in

3  
si so-a-vi accen-ti che sian de-gni d'Or-feo no-stri con-cep-ti

4  
-ti

5  
Og-gi fat-ta è pie-to-sa l'al-ma già si slegna-sa de la bell'Ea-ri

6  
7  
8  
9

D D A A

D A G C F C

K<sub>4</sub>

C F D A G D A K<sub>4</sub>

D D D D D D D

Figura 4.6: *In questo lieto e fortunato giorno*, primera aria de *L'Orfeo*, compases del 1 al 9

Musical score for the first aria of *L'Orfeo*, measures 10 to 20. The score includes vocal lines and a bass line with handwritten annotations.

Measures 10-11: *di - ce. Og - gi fat - to è fe - li - ce Or - feo nel sen - ti*  
 Bass line: G G G G

Measures 12-13: *le - i, per cui già ton - to per queste sel - ve ha su - spi - ra - to e*  
 Bass line: c [A] [G# A] K\_5 F# E D C#

Measures 14-15: *più - to Dunque in si lie - te e for - tu - na - to gior - no c'ha po - sto*  
 Bass line: E A D D A

Measures 16-17: *fi - ne agl'amo - ro - si affan - ni del nostro se - mi de - o cantiam pa -*  
 Bass line: A [D] D C A [G] K\_1 F

Measures 18-20: *- sto - vi in si so - a - vi accenti che si ande - gni d'Orfeo no - sti con - cen - ti.*  
 Bass line: [C] F D A G A D

Figura 4.7: *In questo lieto e fortunato giorno*, primera aria de *L'Orfeo*, compases del 10 al 20

Ahora, Monteverdi modula de  $D$  a  $A$ , lo que ya calculamos en el ejemplo 3.5, aunque hay que trasladarlo un tono. Recordemos que los acordes de  $A$  son:

$$\begin{aligned} I_A &= \{9, 1, 4\}, & A, \\ II_A &= \{11, 2, 6\}, & b, \\ III_A &= \{1, 4, 8\}, & c\sharp, \\ IV_A &= \{2, 6, 9\}, & D, \\ V_A &= \{4, 8, 11\}, & E, \\ VI_A &= \{6, 9, 1\}, & f\sharp, \\ VII_A &= \{8, 11, 2\}, & g\sharp^\circ. \end{aligned}$$

Los pivotes son  $c\sharp$ ,  $E$  y  $g\sharp^\circ$ . La cadencia  $k_5$  para  $A$  es  $\{g\sharp^\circ\}$ , y el único acorde que la integra aparece en el compás 12 (véase la figura 4.7) aprovechando que también es pivote. El primer grado de  $A$  aparece en el mismo compás que la cadencia.

Seguimos con la modulación final de  $A$  hacia  $C$ , el cual fue calculado en el ejemplo 3.6, aunque hay que trasladarlo tres semitonos. Los acordes de  $C$  los vimos en la figura 3.2. La cadencia  $k_1$  para  $C$  es  $\{d, G\}$ , cuyos acordes se encuentran en los compases 16 y 17 y que también son pivotes. El primer grado de  $C$  aparece en el compás 18.

Para finalizar, analizaremos dos ariettas que se encuentran en el acto II de *L'Orfeo*, la primera titulada *Ecco pur*. Ciertos acordes importantes del aria se pueden representar con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E\flat & \xleftarrow{T_5} & B\flat & \xrightarrow{T_7} & F \\ R \downarrow & & \downarrow R & & \downarrow R \\ c & \xleftarrow{T_5} & g & \xrightarrow{T_7} & d \end{array}$$

Para el cuadrado derecho tenemos, de manera explícita,

$$T_7 \circ R(B\flat) = R \circ T_7(B\flat),$$

o sea

$$\begin{aligned} T_7 \circ R(Bb) &= T_7(R(Bb)) = T_7(R(\{10, 2, 5\})) = T_7(\{7, 10, 2\}) = \{2, 5, 9\}, \\ R \circ T_7(Bb) &= R(T_7(Bb)) = R(T_7(\{10, 2, 5\})) = R(\{7, 10, 2\}) = \{2, 5, 9\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el cuadrado izquierdo indica que  $T_5 \circ R(Bb) = R \circ T_5(Bb)$ . Haciendo los cálculos explícitos resulta

$$\begin{aligned} T_5 \circ R(Bb) &= T_5(R(Bb)) = T_7(R(\{10, 2, 5\})) = T_5(\{7, 10, 2\}) = \{0, 3, 7\}, \\ R \circ T_5(Bb) &= R(T_5(Bb)) = R(T_5(\{10, 2, 5\})) = R(\{3, 7, 10\}) = \{0, 3, 7\}. \end{aligned}$$

Para la tonalidad de  $Bb$ , su conjunto cadencial es  $k_4 = \{Eb, F\}$  y para la tonalidad de  $g$  su conjunto cadencial es  $k_2 = \{c, d\}$ . Por lo anterior, vemos que se conserva bajo  $R$ .

De la figura (4.8), los acordes encerrados en cuadrados son mayores y, los encerrados en círculos son acordes menores. Observemos que el fragmento de la aria empieza en  $Bb$ , donde aparecen también sus cadencias, luego finaliza en  $c$  junto a sus cadencias.

La segunda arietta, que vamos a analizar se encuentra en el acto II, cuyo título es *Mira, deh mira Orfeo*. Aquí tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xleftarrow{T_5} & C & \xrightarrow{T_7} & G \\ R \downarrow & & \downarrow R & & \downarrow R \\ d & \xleftarrow{T_5} & a & \xrightarrow{T_7} & e \end{array}$$

Una parte del diagrama tiene como representación  $T_7 \circ R(C) = R \circ T_7(C)$ , para ver la igualdad, haremos los cálculos correspondientes

$$\begin{aligned} T_7 \circ R(C) &= T_7(R(C)) = T_7(R(\{0, 4, 7\})) = T_7(\{9, 0, 4\}) = \{4, 7, 11\}, \\ R \circ T_7(C) &= R(T_7(C)) = R(T_7(\{0, 4, 7\})) = R(\{7, 11, 2\}) = \{4, 7, 11\}. \end{aligned}$$

Nótese que la cadencia  $k_4 = \{F, G\}$  se transforma en la cadencia  $k_2 = \{d, e\}$ . Además, la cadencia  $k_2$  de  $a$  menor y la cadencia  $k_4$  de  $C$  mayor aparecen en los compases 10 y 11, respectivamente, de la figura 4.9.

Tema L'Orfeo, Ecco pur

de quel sol fat-te be-a-te per cui sol mie-not-t'hangior-no

Ec-co pur ch'a voi ri-tor-no. Ec-co pur ch'a voi ri-tor-no.

Chords for Figure 4.8:  
 System 1: Bb, F, Bb, Bb, F, Bb, F, C, F  
 System 2: g, Bb, g, d, g, Eb, d, C, d, g

Figura 4.8: *Ecco pur*, segundo acto de *L'Orfeo*, compases del 4 al 9.

Tema Mira, deh mira Orfeo

plet-trau-ra - to d'ad-dol-cir l'a-via in si be-a - - - to gior-

Chords for Figure 4.9:  
 C, d, e, c, d, G, e, F, G, a, G, a, B, C, a, G

Figura 4.9: *Mira, deh mira Orfeo*, segundo acto de *L'Orfeo*, compases del 10 al 12.

## 4.3. Comparación de resultados

### 4.3.1. Acerca del contrapunto

Aquí, vamos a comparar primero los análisis realizados en el artículo de Kang [17] y, lo que hemos hecho en la sección 4.1 de las distintas obras de Monteverdi.

Traducido al español, lo que el artículo dice sobre *Confitebor primo (1640)* es:

Al comenzar el compás 64, la estructura a 3 partes presenta una armonización de esa línea de bajo con armonías  $\frac{5}{3}$  sucesivas implicadas. Monteverdi evita quintas consecutivas entre el alto y el bajo simplemente haciendo que el alto y el tenor salten entre los tonos del descenso, dándole al alto una sucesión de intervalos 5 – 3 por encima del bajo [17, p.195].

Después, sobre *Ma tu, più che mai dura* del libro V, el artículo dice:

Evita quintas consecutivas mediante un salto a la tercera para expresar el texto. La yuxtaposición de las armonías  $\frac{5}{3}$  en  $E\flat$  y  $D$  (con la disonancia melódica entre  $E\flat$  y  $F\sharp$ ) ayuda a llamar la atención a la palabra ‘pietà’ (compasión)[17, p.195].

Posteriormente, de *Io mi son giovinetta* del libro IV, el análisis dice:

Llama especialmente la atención por su rápida sucesión de numerosas armonías  $\frac{5}{3}$  que crean un efecto madrigalístico en la palabra ‘fuggi’ (huir). Por supuesto, este tipo de procedimiento contrapuntístico no se utiliza necesariamente para la expresión de texto; más bien, a veces sirve simplemente como un dispositivo compositivo independiente [17, p.195].

Además, al examinar el *Laudate Dominum* de 1640 nos dice:

Ilustra el uso de una estrategia contrapuntística similar en ‘Laudate Dominum’, de la colección de 1640, donde se evitan las octavas consecutivas descendiendo a la sexta, lo que da como resultado una sucesión de 8 – 6 entre el tenor y el bajo continuo [17, p.196].

Finalmente, acerca de *Gloria a 7* de 1640 el artículo explica:

Muestra como *Gloria* trata esta escala de cinco notas con el mismo procedimiento contrapuntístico utilizado en *Laudate Dominum*: abre una sucesión de intervalos 8 – 6 entre los *canti* y el bajo continuo descendente. El contrapunto contra esta quinta melódica se vuelve especialmente interesante en las secciones homofónicas en *tutti* [17, p.199].

Los tres primeros ejemplos, que corresponden a *Confitebor primo*, *Ma tu, più che mai dura* y *Io mi son giovinetta*, utilizan las “armonías” 5 – 3. Las sucesiones de quintas y terceras son válidas en el modelo de Mazzola, con todos los pasos mediados por una sola simetría de contrapunto. *Prima facie* también lo son con las reglas fuxianas (o la martiniana), porque utilizan la segunda y la tercera de ellas, aunque serían quintas u octavas paralelas “ocultas” en el contrapunto de segunda especie [13, p. 43]; sin embargo, Kang las examina como de la primera especie. Además, el hecho de que sólo poseen una simetría las hace más “parsimoniosas”, en el sentido de la navaja de Occam.

Empezando con *Confitebor primo*, la simetrías resaltan la palabra *mirabilium* (maravilla), mientras que en *Ma tu, più che mai dura*, destacan la palabra *pietà* (compasión) pues  $e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)$  es la única de ellas que deja invariante al discanto. En *Io mi son giovinetta*; la misma simetría delata al *Eb* que se “fuga” de la armadura de *D* menor.

Los ejemplos *Laudate Dominum* y *Gloria a 7* muestran la “armonía” 8 – 6. Estas son las octavas y sextas que son una perfecta y una imperfecta respectivamente, y son válidas en el modelo de Mazzola lo mismo que con las mismas reglas fuxianas (o la martiniana) ya citadas; nuestro análisis nos indica que en cada paso, es habilitado por al menos dos simetrías. Por ejemplo, en *Laudate Dominum* al paso con tres simetrías le corresponde el conjunto  $\{e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), e^{\epsilon.11} \circ 11\}$  y ocurre cuando pasa de una consonancia perfecta a una imperfecta. En *Gloria a 7*, al movimiento con tres simetrías le corresponde el conjunto  $\{e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), e^{\epsilon.11} \circ 11\}$  y sucede de manera similar al *Laudate Dominum*.

Es relevante resaltar el ejemplo *Gloria a 7* porque, las “armonías” 10 – 8 concomitantes con las 8 – 6 son válidas en el modelo de Mazzola, lo mismo que con las reglas fuxiana (o la martiniana), y en realidad son armonías 8 – 3. Aparecen en el cuarto compás. Estas son las octavas y terceras, que son una perfecta y una imperfecta respectivamente. Nuestras observaciones muestran que en cada

paso es habilitado por al menos dos simetrías. Sin embargo, ocurre un paso con cinco simetrías representado por el conjunto  $\{e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6), e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), e^{11} \circ 11\}$  y, ocurre cuando pasa de una perfecta a una imperfecta. Estos saltos en la cardinalidad de los conjuntos de simetrías nos anuncian la entrada de más voces, lo que también explica por qué son transiciones menos parsimoniosas.

### 4.3.2. Sobre las modulaciones

Para los ejemplos de la modulación, traducido al español, el artículo nos dice lo siguiente acerca del aria *In questo lieto e fortunato giorno* de *L'Orfeo*:

Presentado en la primera escena del Acto I, la pieza titulada 'In questo lieto e fortunato giorno' produce sonidos que pueden confundir a los oyentes debido a la influencia simultánea de la modalidad y la tonalidad. Un concepto tonal encontrado en esta pieza es la prolongación de una nota para revelar una área tonal. El comienzo de esta pieza está estructurado en el modo dórico de *D*. Mantiene el sexto grado de la escala disminuido con el *Bb*, así como el séptimo grado disminuido con el *C* natural. Esto forma el modo dórico.

Sin embargo, aunque se presenta primero con el modo jónico en *C* mayor, la pieza pasa a *D* mayor mediante el uso de *F#*, *D#* y fuertes progresiones armónicas dentro de la tonalidad. La prolongación del acorde de *D* mayor así como *D* en el bajo ayudan a la estructura de la pieza a establecer ahora el sistema tonal. Esta breve pieza combina de manera interesante la teoría de los modos y tonalidad dentro de una sección corta [22].

Sobre la arietta *Ecco pur*, en el acto II de *L'Orfeo* dice:

Además, el Acto II contiene conceptos que apoyan la tonalidad. El primero se puede encontrar en el inicio del Acto II en una arietta titulada 'Ecco pur'. En esta pieza se evidencian fuertes cadencias a la tónica, incluso en medio de una modulación. Comenzando en *g* menor, Monteverdi crea una obra que sigue las reglas correctas para la modulación haciendo la transición a la relativa mayor de *Bb* a mitad de la canción y regresar a *g* menor en la cadencia final. El compás 4

comienza en  $B\flat$  mayor, y los acordes en los dos compases siguientes enfatizan el acorde tónico de  $B\flat$  mayor. La modulación ocurre en el compás 7 con una cadencia rota en la tonalidad de  $B$  bemol mayor al pasar del acorde de  $V$ ,  $F$  mayor, al final del compás 6 a un acorde de  $VI$ ,  $g$  menor, en el compás 7. Este acorde de  $g$  menor también es la tónica de la tonalidad de  $g$  menor presentada al inicio de la pieza. Monteverdi usa la modulación para demostrar la tonalidad en esta breve obra [22].

Por último, sobre la arietta *Mira, deh mira Orfeo* que la podemos encontrar en el acto II de *L'Orfeo* expone:

De igual manera, una arietta corta presentada más adelante en el Acto II titulada 'Mira, deh mira Orfeo' cantada por los pastores sigue el mismo enfoque. Sin embargo, a medida que cambia el estado de ánimo de la pieza, también cambia el estado de ánimo de la música y, por lo tanto, la tonalidad. En las secciones alegres, esta pieza está en una tonalidad estrechamente relacionada con  $C$  mayor. Por otro lado, en las secciones más solemnes, la pieza se encuentra en  $a$  menor, la relativa menor de  $C$  mayor. En el análisis de acordes, el sistema tonal se mantiene fuerte a través de la resolución de progresiones armónicas. Los acordes que están etiquetados como  $V/V$  resuelven a  $V$ , y  $V$  finalmente resuelve a  $I$ . El uso interesante de la tonalidad por parte de Monteverdi en esta canción permite ver la transición entre la modalidad y la tonalidad [22].

En *In questo lieto e fortunato giorno*, el artículo solamente discute la modulación de  $C$  a  $D$ , pero el modelo cuántico explica esa modulación y otras dos de manera más detallada. Las tonalidades en esta aria nos describen tres momentos emocionales bien diferenciados, que son:

- La llamada a los pastores, en  $C$ .
- La hermosa Eurídice cede a los avances de Orfeo, en  $D$ .
- El sufrimiento de Orfeo en los bosques por el amor de Eurídice, en  $A$ .

La letra se puede consultar en la tabla A.1, donde está dividida por tonalidades. Es decir, las modulaciones nos cuentan el drama que atraviesa Orfeo en cada

situación, de modo que la sucesión de los acontecimientos es  $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C$ . Al final, Orfeo es correspondido por Eurídice y él siente la dicha representada por  $C$ .

Luego en *Ecco pur*, las modulaciones entre mayor y menor tienen su explicación en la transformación bajo  $R$  de la cadencia  $\{IV, V\}$  a  $\{ii, iii\}$ . Esta arietta es interesante pues, la parte del regreso es una mezcla de mayor, luego menor, y la parte en que habla del sol es toda en mayor. Es hermoso porque su *ritorno*, representado por un acorde menor, es agrí dulce: regresa al lugar que lo hace feliz pero, ahí mismo se esconde la tristeza de la muerte de Eurídice.

La modulación en *Mira, deh mira Orfeo* es similar a la de *Ecco pur*. La modulación en esta arietta juega con la tonalidad mayor y menor, y es entonada por un pastor. Anuncia lo que ocurrirá después, pues apenas termina su felicidad en tonalidad mayor cuando llega una mensajera con malas noticias: la muerte de Eurídice.

Como podemos notar, las modulaciones en estos fragmentos de la ópera nos van contando el drama que sufre Orfeo por Eurídice, poniendo en práctica el argumento, el cual Monteverdi responde a las críticas de Artusi.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo de este trabajo, se destaca que numerosos aspectos de las técnicas empleadas por Monteverdi resultaron innovadores para su época. En el caso del contrapunto, es importante resaltar el alto nivel en su habilidad de composición para el contrapunto, pues se conecta con estructuras matemáticas desarrollados posteriormente. En nuestro análisis del madrigal *Io mi son giovinetta* y el motete *Laudate Dominum* (por citar dos ejemplos sobresalientes), observamos el uso de quintas y octavas paralelas, en otros contextos hubieran sido considerados errores, pero en este caso se integran de forma orgánica y natural. Monteverdi logra una espontaneidad que le añade un aire casi improvisado y de *meraviglia* (maravilla), según la opinión del musicólogo alemán Carl Dalhaus [8]. Resulta notable observar cómo esa libertad compositiva de Monteverdi fue calculada meticulosamente en el ligue de palabras con la composición ejecutando en la práctica lo defendido ante Artusi. Esto dará pie a trabajos futuros sobre la aplicación de patrones combinatorios en el resto de su repertorio.

Por otra parte, la armonía es otro punto notable de esta investigación. Expusimos las modulaciones que acompañan el viaje físico y emocional de Orfeo, relacionadas con la vida, la muerte y lo divino. Esto se observa en las tonalidades como *D* mayor (asociada a Eurídice) y *A* mayor (asociada al inframundo), como ha sido propuesto en la musicología tradicional [26]. Los cambios en las tonalidades parecen representar una especie de recorrido cíclico; en otras palabras, anticipan y refuerzan los temas centrales del libro. En mi opinión, este paralelismo entre armonía y narrativa es una prueba más de la genialidad de Monteverdi. Lo realizado hasta ahora, servirá como punto de salida en este largo recorrido de escudriñar su música desde una perspectiva algebraica.

En futuras investigaciones, me interesa seguir profundizando en las otras obras de Monteverdi, y quizás de sus contemporáneos, estas podrían analizarse con herramientas más avanzadas de álgebra y teoría de grupos. Estoy seguro que hay muchas sorpresas escondidas, tanto en el plano musical, como el matemático. Creo que con el enfoque adecuado podremos revelar más conexiones ocultas entre estos dos mundos.

# Bibliografía

- [1] *Claudio Monteverdi* - Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Claudio\\_Monteverdi](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Claudio_Monteverdi). [Accedido 23-11-2023].
- [2] Agustín Aquino, Octavio Alberto: *El teorema de contrapunto*. <https://hdl.handle.net/20.500.14330/TES01000640488>, 2009. [Accedido 26-10-2023].
- [3] Agustín Aquino, Octavio Alberto: *La vuelta al contrapunto en seis (¡o más!) mundos*. [https://www.utm.mx/~octavioalberto/pdf/La\\_vuelta\\_al\\_contrapunto.pdf](https://www.utm.mx/~octavioalberto/pdf/La_vuelta_al_contrapunto.pdf), Manuscrito no publicado. Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2019.
- [4] Agustín Aquino, Octavio Alberto y Emilio Lluís Puebla: *Una invitación a la teoría matemática de la música. II. Armonía y contrapunto*. Ciencias, 102(102), feb. 2011. <https://www.revistas.unam.mx/index.php/cns/article/view/30135>.
- [5] Agustín Aquino, Octavio Alberto, Janine du Plessis, Emilio Lluís Puebla y Mariana Montiel: *Una introducción a la teoría de grupos con aplicaciones en la teoría matemática de la música*. Sociedad Matemática Mexicana, 2009.
- [6] Aquino, Octavio Alberto Agustín, Julien Junod y Guerino Mazzola: *Computational Counterpoint Worlds*. Springer, 2015.
- [7] Benson, David J.: *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Chew, Geoffrey: *‘Ecco mormorar l’onde’ (1590)*, páginas 45–52. Cambridge Companions to Music. Cambridge University Press, 2007.
- [9] Danhauser, Adolphe Leopold: *Teoría de la música*. Ricordi Americana, 1897.

- [10] Dufourcq, Norbert: *Breve historia de la música*. Colección Música. Fondo de Cultura Económica, 1963.
- [11] Encyclopaedia Britannica, The Editors of: *Frottola*. Encyclopedia Britannica, 13 Aug. 2019. <https://www.britannica.com/art/frottola>, [Accedido 14-02-2023].
- [12] Encyclopaedia Britannica, The Editors of: *Madrigal*. Encyclopedia Britannica, 28 Jan. 2019. <https://www.britannica.com/art/madrigal-vocal-music>, [Accedido 14-02-2023].
- [13] Fux, Johann, Alfred Mann y John Edmunds: *Study of Counterpoint: From Johann Joseph Fux's Gradus Ad Parnassum*. W.W. Norton and Company, 1965.
- [14] Giménez, Francisco Callejo: *Historia de la música 5.º*. <https://www.franciscocallejo.es/hm5/index.php?page=13-xvii.html>. [Accedido: 09-02-2024].
- [15] Haar, James: *European Music, 1520-1640*. Studies in Medieval and Renaissance music. Boydell Press, 2006.
- [16] Judson, Tom: *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Orthogonal Publishing, Ann Arbor, 2022. <https://judsonbooks.org/aata/>.
- [17] Kang, Youyoung: *Monteverdi's Early Seventeenth-Century 'Harmonic Progressions'*. Music Analysis, 30(2-3):186–217, 2011.
- [18] Mazzola, Guerino: *The Topos of Music*. Birkhäuser, 2002.
- [19] Monteverdi, Claudio: *L'Orfeo, favola in musica*. Ricciardo Amandino, Venecia, 1609.
- [20] Monteverdi, Giulio Cesare: *Scherzi musicali a tre voci*. Ricciardo Amadino, Venetia, 1607.
- [21] Ozmo, Žak: *Should (early) Baroque music be equally tempered? Vincenzo Galilei's 1584 Libro d'intavolatura di liuto and its wider implications for historical performance practice*. Early Music, 44(1):119–124, Febrero 2016.

- [22] Perritt, Haley J.: *From Modal to Tonal: The Influence of Monteverdi on Musical Development*. En *Research and Scholarship Symposium*. Cedarville University, 2017. [https://digitalcommons.cedarville.edu/research\\_scholarship\\_symposium/2017/podium\\_presentations/23/](https://digitalcommons.cedarville.edu/research_scholarship_symposium/2017/podium_presentations/23/).
- [23] Prasolov, V.V.: *Elements of Combinatorial and Differential Topology*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2006.
- [24] Ronald Lewis Graham, Donald Ervin Knuth y Oren Patashnik: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1994.
- [25] Schönberg, Arnold: *Harmonielehre*. Viena: Universal-Edition, 3a. edición, 1922.
- [26] Steinheuer, Joachim: *Orfeo (1607)*, páginas 119–140. Cambridge Companions to Music. Cambridge University Press, 2007.
- [27] Sturman, Janet: *The Course of Mexican Music*. Taylor and Francis, 2015.
- [28] Willard, S.: *General Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.
- [29] Wolf, Johannes y Higinio Anglès: *Historia de la música: con un estudio crítico de historia de la música española*. Editorial Labor, 1949.



# Apéndice A

## Letras de *L'Orfeo*

Las letras en italiano siguientes han sido tomadas como aparecen en [19], y todas las traducciones son propias.

Italiano (Original)	Español (Traducción)
In questo lieto e fortunato giorno ch'hà posto fine à gl'amorosi affanni del nostro Semideo, cantiam, pastori, in sì soavi accenti che sian degni d'Orfeo nostri concerti.	En este día feliz y afortunado que ha puesto fin a los tormentos amorosos de nuestro semidiós, cantemos, pastores, con acentos tan suaves que sean dignos de Orfeo nuestros conciertos.
Oggi fatta è pietosa l'alma già si sdegnosa de la bell'Euridice. Oggi fatto è felice Orfeo	Hoy ha compartido el alma que antes le era tan altiva de la bella Eurídice. Hoy Orfeo ha conocido la felicidad
nel sen di lei, per cui già tanto per queste selve hà sospirato, e pianto.	sobre el pecho de aquella por la que él tanto ha suspirado y gemido en estos bosques.
Dunque, in si lieto e fortunato giorno ...	Por consiguiente, en este día feliz y afortunado...

Tabla A.1: Letra del aria *In questo lieto e fortunato giorno* de “L'Orfeo”, con traducción al español

Italiano (Original)	Español (Traducción)
Ecco pur ch'a voi ritorno care selve e piaggie amate, da quel sol fatte beate per cui sol mie nott'hà giorno	Vuelvo a ustedes, queridos bosques y riberas amadas hechos por aquel sol dichosos, por el cual mis noches tienen día.

Tabla A.2: Letra de la *arietta Ecco pur* de “L'Orfeo”, con traducción al español

Italiano (Original)	Español (Traducción)
Mira, deh mira, Orfeo, che d'ogni intorno ride il bosco e ride il prato. Segui pur co'l plettro aurato d'addolcir l'aria in si beato giorno.	Mira, oh mira, Orfeo, que a tu alrededor ríe el bosque y ríe el prado. Sigue, pues, con el plectro dorado endulzando el aire en este día tan dichoso.

Tabla A.3: Letra de la *arietta Mira, deh mira, Orfeo* de “L'Orfeo”, con traducción al español