

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Control de vibración en vigas mediante un absorbedor de vibración basado en inersor y rigidez negativa

Tesis

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico Automotriz

Presenta:

Alfredo Luis Tapia Castillo

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

H. Cd. de Huajuapán de León, Oaxaca, abril de 2025

Dedicatoria

- Dedicado a mis padres, por motivarme y mostrarme su apoyo incondicional a lo largo de mi trayectoria académica; este importante logro también es de ustedes.
- Dedicado a Ángel Gabriel Tapia Martínez y Jazmín Tapia Martínez, dos niños que, a pesar de la distancia, su amor me anima a crecer y mejorar día a día.
- A las personas que, debido a las circunstancias, no les es posible estudiar o culminar sus estudios, pero no se rinden fácilmente; sus historias nos inspiran a luchar.
- Para todos los amigos, familiares y personas importantes que perdimos a lo largo del camino, este trabajo es también suyo y en su memoria.

Agradecimientos

- Le agradezco a Dios por permitirme lograr esta meta tan importante en mi desarrollo personal y profesional.
- Gracias a mis padres, Zenaida Lilia Castillo Flores y Luis Alfredo Tapia Cruz, por ser dos grandes pilares en mi vida. Por brindarme su amor, cariño, conocimientos y virtudes. También por guiarme, motivarme, creer en mí y apoyarme siempre para crecer y superarme, tanto en mi vida personal como profesional. Este importante logro no es el premio, es el recuerdo de un día estar a la altura de un sueño.
- A mis hermanos Fernando Ivan Tapia Castillo e Itzel Sarahi Tapia Castillo, quienes siempre han estado conmigo brindándome su amor y apoyo. Por compartir nuestros éxitos, fracasos, problemas y la vida en general. Son mi motivación para superarme, crecer y así ser un ejemplo.
- Agradezco el tiempo, experiencia, paciencia, confianza y consejos brindados durante el desarrollo de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios. De igual forma, al tiempo brindado por mis sinodales, al Dr. Álvaro Jesús Mendoza Jasso, al Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría y al Dr. Luis Vázquez Sánchez.

Tapia Castillo Alfredo Luis

Abril 2025

Resumen

Las vibraciones se encuentran presentes en muchos de los escenarios cotidianos; estas son perjudiciales para estructuras o elementos que se encuentran sometidos a estas, puesto que ocasionan desgaste y fallas que comprometen su vida útil y seguridad. Para evitar esto, es de suma importancia implementar sistemas de amortiguamiento que permitan reducir las amplitudes de vibración y de esta manera proteger los elementos. Desde el nacimiento del control de vibraciones, se ha mantenido una investigación e implementación constante de estos dispositivos, donde el absorbedor dinámico de vibración (DVA's) es uno de los más utilizados por el rendimiento dinámico que ofrece.

La investigación del absorbedor dinámico de vibración ha permitido el descubrimiento del inersor, el cual es el análogo de un capacitor en los dispositivos eléctricos. La utilización del inersor tiene grandes ventajas, tales como: modificar su frecuencia natural y la disminución de las amplitudes de vibración del sistema al modificar la inercia (masa aparente) del dispositivo. Esta última es muy importante, puesto que genera esta propiedad sin la necesidad de incrementar la masa gravitacional. Con este efecto dinámico se incrementan las capacidades de amortiguamiento en este tipo de sistemas.

Otra propiedad importante es que el inersor es un elemento de dos terminales, razón por la cual se pueden lograr diferentes configuraciones de redes mecánicas basadas en él, donde a elección del diseño se trabaja con la ideal para el sistema. Pero no solo el inersor es un descubrimiento importante, pues la rigidez negativa es un elemento que, al trabajar en conjunto con el inersor logra incrementar el rendimiento dinámico del DVA.

La rigidez negativa consiste en un resorte que se encarga de ejercer la fuerza que soporta el movimiento de una estructura; es decir, debe de ayudar al movimiento en lugar de oponerse a este, contrario a la rigidez convencional. Para incrementar el rendimiento, es necesario optimizar los parámetros del modelo de acuerdo al diseño. Esto se logra mediante la utilización de la técnica de los puntos fijos extendida.

De esta manera, en este trabajo se presenta el diseño de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa. Para realizar la evaluación del rendimiento dinámico mediante los parámetros físicos del dispositivo, se emplea la técnica de los puntos fijos extendida. Finalmente, después de aplicar esta técnica, se busca demostrar el correcto funcionamiento en la supresión de vibración de la estructura armónicamente excitada del dispositivo propuesto.

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen.....	V
Nomenclatura	X
Alfabeto griego.....	XIV
Índice de figuras.....	XVI
Índice de tablas	XIX
I. Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema.....	3
1.2 Justificación	6
1.3 Hipótesis.....	7
1.4 Objetivos	7
1.4.1 Objetivo general.....	7
1.4.2 Objetivos particulares.....	7
1.5 Metas	8
1.6 Metodología	8
1.7 Estructura de la tesis	10
II. Estado del arte	13
2.1 Control de vibraciones	13
2.2 Absorbedor dinámico de vibración	14
2.3 El inersor	16
2.3.1 Implementaciones del inersor en la industria automotriz.....	18
2.4 Absorbedores de vibración dinámicos no tradicionales	20
2.5 Absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersor	21
2.6 Rigidez negativa	22
2.6.1 Implementación de la rigidez negativa en la industria automotriz.....	23
III. Marco teórico.....	26
3.1 Sistema con excitación armónica	26

3.2 Ecuaciones diferenciales parciales en deflexión de vigas	27
3.2.1 Condiciones de frontera en vigas	29
3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange	31
3.3.1 Función de disipación de Rayleigh.....	33
3.4 Análisis dimensional	34
3.5 Teorema de Π Buckingham	36
3.6 Análisis modal	36
3.7 Teorema de Vieta	38
3.8 Optimización	40
3.9 Técnica de los puntos fijos	41
3.10 Técnica de los puntos fijos extendida.....	43
IV. Modelo matemático	46
4.1 Respuesta en frecuencia.....	46
V. Resultados	52
5.1 Técnica de los puntos fijos extendida	52
VI. Conclusiones	64
6.1 Trabajos futuros	65
A. Apéndice A	68
B. Apéndice B	74
Bibliografía	78

Nomenclatura

J	Jacobiano
$y_1(t)$	Desplazamiento correspondiente a la masa m
$y_2(t)$	Desplazamiento correspondiente al inersor de la red mecánica
$\frac{\partial \omega}{\partial x}$	Variación en la pendiente entre las secciones transversales de una viga
\dot{v}	Aceleración
H_f	Hessiano
\mathcal{L}	Lagrangiano
\mathcal{D}	Denominador
\mathcal{N}	Numerador
A	Área de la sección transversal
b	Inertancia
c	Coefficiente de amortiguamiento
c_1	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente al DVA
c_2	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente a la red mecánica C3
\mathcal{F}	Función de las velocidades generalizadas o función de Disipación de Rayleigh
E	Módulo de elasticidad
$E_{inersor}$	Energía cinética del inersor
F	Magnitud escalar de la fuerza aplicada a las terminales del inersor
$f(x)$	Función espacial
$f(x)g(t)$	Carga distribuida
$f(x, t)$	Fuerza externa por unidad de longitud
F_o	Magnitud de excitación
F_k	Fuerzas no conservativas generalizadas
$g(t)$	Función temporal determinística
$H(s)$	Función de transferencia del sistema o respuesta del sistema

I	Momento de inercia centroidal
j	Parte imaginaria de un número complejo
k	Coeficiente de rigidez
k_1	Coeficiente de rigidez correspondiente al DVA
k_2	Coeficiente de rigidez correspondiente a la red mecánica C3
k_{NS}	Coeficiente de rigidez negativa correspondiente a la red mecánica C3
L	Longitud total de la viga
M	Momento flexionante
m_1	Masa del DVA
P	Presión
P_{opt}	Parámetros a optimizar del sistema
q	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA
$Q_i(\omega)$	Frecuencia de la viga
q_k	Coordenadas generalizadas
$R(s)$	Respuesta en frecuencia adimensional del sistema
T	Energía cinética
U	Energía potencial
V	Fuerza cortante
v	Velocidad
V_{adim}	VARIABLES ADIMENSIONALES
$Y(s)$	Impedancia mecánica
$y(x, t)$	Desplazamiento transversal de la viga
DVA	Absorbedor dinámico de vibración
FRF	Función de respuesta en frecuencia
IDVA	Absorbedor de vibración dinámica basado en inersor
ISDVA	Absorbedor de vibración dinámica en serie basados en inersor

NS-NIDVA	Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa
NS-NIDVA-C3	Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa implementando la configuración de la red mecánica C3
NDVA	Absorbedor de vibración dinámica no tradicional
LTI	Sistema lineal invariante en el tiempo
RIDTMD	Amortiguador de masas sintonizado de doble masa rotacional
RMS	Valor cuadrático medio
TID	Amortiguador de inercia sintonizado
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersor
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado

Alfabeto griego

Ω	Relación de frecuencia forzada
Π	Parámetros adimensionales en un sistema
β	Relación de masas entre el sistema principal y la masa del DVA
α	Relación de rigidez negativa
β_i	Valor característico
δ	Relación de masas entre la inercia rotacional y el DVA
$\delta(x - a)$	Función delta de Dirac
$\delta_{i,j}$	Delta de Kronecker
η	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre el DVA y la red mecánica C3
Υ_i	Relación de frecuencias naturales
μ	Relación de masas entre el DVA y la red mecánica C3
ω	Frecuencia de excitación externa
$\omega(x, t)$	Desplazamiento transversal o deflexión de la viga
ω_A^2	Frecuencia natural al cuadrado asociada al DVA
ω_B^2	Frecuencia natural al cuadrado asociada a la red mecánica C3
ω_i^2	Frecuencia natural al cuadrado asociada al i-ésimo modo de vibración
ω_n	Frecuencia natural
$\phi_n(x)$	Función n-ésima modal
ϕ_1	Valor que toma en las condiciones que se encuentre empotrada la viga
ρ	Densidad volumétrica
ζ	Factor de amortiguamiento
ζ_{2opt}	Factor de amortiguamiento óptimo asociado a la red mecánica C3
ζ_2	Factor de amortiguamiento asociado a la red mecánica C3

Índice de figuras

Figura 1.1. Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores.	2
Figura 1.2. Sistema utilizado en este trabajo de tesis.	5
Figura 1.3. Metodología de la investigación utilizada en esta tesis [12].....	8
Figura 2.1. Principio del control activo de vibraciones [13].	13
Figura 2.2. Absorbedor de vibración: (a) No amortiguado, (b) Amortiguado [10].	15
Figura 2.3. Representación del inersor [10].....	16
Figura 2.4. Elementos de la analogía fuerza-corriente [24].	18
Figura 2.5. Suspensión de un automóvil aplicando un inersor donde (a) Banco de pruebas y (b) Modelo de la suspensión con inersor [25].	19
Figura 2.6. Densidad espectral de potencia (PSD por sus siglas en inglés) de (a) Aceleración del cuerpo del vehículo y (b) Desplazamiento de la suspensión. 20	
Figura 2.7. Absorbedor de vibración dinámico (a) tradicional y (b) no tradicional [10].	21
Figura 2.8. Absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor [29]. ..	22
Figura 2.9. Asiento con suspensión utilizando el sistema de aislamiento propuesto (a) Modelo y (b) representación esquemática [37].	24
Figura 2.10. Banco de pruebas del sistema propuesto (a) Sistema experimental, (b) sistema de rigidez negativa y (c) fotografía del sistema [37].	24
Figura 2.11. Valor RMS del desplazamiento de la masa generada por una excitación aleatoria [37].	25
Figura 3.1. Ejemplos de excitaciones periódicas [40].	26
Figura 3.2. Esquema del modelo de la viga [40].	27
Figura 3.3. Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la viga [40]. ...	28
Figura 3.4. Condiciones de frontera más habituales para la vibración transversal de una viga [41].	31
Figura 3.5. Máximo y mínimo de una función arbitraria [61].	40

Figura 3.6. Gráfica de un DVA clásico donde aparecen los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de los estados del sistema para cuando el amortiguamiento es cero e infinito [10].	41
Figura 3.7. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Obsérvese que todas las líneas pasan a través de los puntos fijos P y Q.....	42
Figura 5.1 Respuesta en frecuencia de la viga acoplada al NS-NIDVA-C3 contra la relación de frecuencia Ω utilizando los parámetros óptimos y un factor de amortiguamiento arbitrario.	56
Figura 5.2. Gráfica de la función α contra β	57
Figura 5.3. Curvas de respuesta en frecuencia para estructura tipo viga sujeta al NS-NIDVA-C3 con los parámetros óptimos $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}$ incluyendo también la relación de amortiguamiento arbitrario y de amortiguamiento óptimo.	60
Figura 5.4. Comparación de las curvas de las FRF del DVA clásico por Gustavo [10] y NS-NIDVA-C3.	61

Índice de tablas

Tabla 2.1 Analogía fuerza-corriente entre redes mecánicas y eléctricas [1,8].	17
Tabla 3.1.- Análisis dimensional de parámetros empleados generalmente en física.....	35
Tabla 5.1.- Variables establecidas para las variables independientes.	54
Tabla 5.2.- Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos	54
Tabla 5.3. Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.....	59
Tabla 5.4. Valores óptimos para el NS-NIDVA-C3	60
Tabla 5.5. Valores numéricos del ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración.....	62
Tabla A.1. Cambio de variables para el análisis considerando excitación de tipo armónica.	68

Capítulo I

I. Introducción

De acuerdo a su aplicación, se tienen diferentes elementos estructurales. La viga es un elemento estructural que, de manera general, se dispone en forma horizontal; sin embargo, en función de su aplicación, es posible utilizarla en configuraciones inclinadas. La finalidad de una viga es tolerar cargas transversales. Sus aplicaciones son vastas; de manera general, se puede encontrar empleada en construcciones (estructuras), vehículos (chasis del vehículo) y maquinaria. Puesto que es uno de los elementos más simples de estructuras continuas, es un elemento típico en ingeniería mecánica y civil.

En la vida cotidiana, a menudo se ven implicadas las vibraciones de alguna u otra manera, desde hacer sonar un instrumento hasta las grandes aplicaciones en la ingeniería, como son estructuras, turbinas, motores, máquinas y sistemas de control. Como se sabe, la vibración ocasiona un desgaste mayor en los elementos de las máquinas, lo que puede ocasionar fallas en estas. De igual manera, es importante tener en cuenta el fenómeno de resonancia, el cual se presenta cuando la frecuencia natural de la máquina o estructura coincide con la frecuencia de excitación. Esto ocasiona que las amplitudes de las ondas de vibración se incrementen y sea mayor el esfuerzo producido. Es por estas razones que es de suma importancia mantener controladas las vibraciones para incrementar la seguridad y el tiempo de vida de los elementos sometidos a vibración.

A lo largo de la historia se han implementado diferentes sistemas de control para vibración, donde el absorbedor de vibración dinámico o DVA (por sus siglas en inglés) es el más utilizado, puesto que ofrece mejor rendimiento de acuerdo a diversas pruebas y estudios realizados [1]. Sin embargo, en diversas investigaciones recientes se ha observado la implementación de nuevas tecnologías que ofrecen un aumento en el rendimiento del DVA, tal como el inersor que, desde su descubrimiento por Smith en 2002 [2], su utilización se incrementó gradualmente, puesto que al implementarlo en conjunto con el DVA mejoró el control de la vibración en el modelo. La investigación en esta rama busca siempre reducir la amplitud de las vibraciones y mejorar de esta manera el rendimiento de la máquina, viga o estructura.

De esta manera, la investigación y los avances se mantienen en constante actualización, lo cual permitió el descubrimiento de la rigidez negativa, un nuevo concepto e idea revolucionaria que consiste en colocar un resorte en paralelo a la red mecánica, obteniendo así mejores propiedades de amortiguación [3-6].

Con la finalidad de mejorar el funcionamiento de las estructuras estacionarias, se pretende combinar el rendimiento de control del inersor con los del dispositivo de rigidez negativa. El absorbedor de vibración con rigidez negativa consta generalmente de un enfoque indirecto

para incrementar el efecto de inercia de la masa física del absorbedor; esto se logra gracias al valor negativo de la rigidez incorporada, lo que resulta en una fuerza de resorte en fase con la fuerza de inercia. Para lograr un funcionamiento idóneo, es de suma importancia la elección de la red mecánica con la cual se trabajará.

Dentro de la clasificación de las redes mecánicas, se encuentran diferentes tipos de arreglos o configuraciones de dos terminales a y b donde es posible implementar amortiguadores, resortes o inersores. En la Figura 1.1 se muestran los más representativos [7], [8].

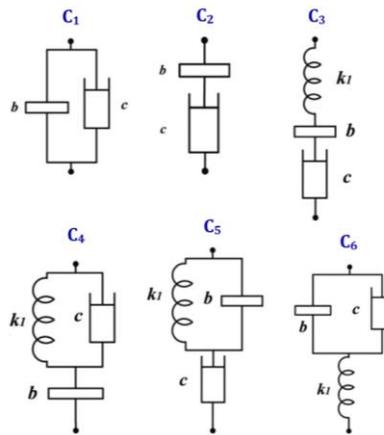


Figura 1.1. Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores.

Donde b es la inercia, c es el coeficiente de amortiguamiento y k_1 es la constante de rigidez [7], [9].

Donde cada configuración se detalla a continuación:

C_1 → arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador

C_2 → arreglo en serie de un inersor y un amortiguador

C_3 → arreglo en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador

C_4 → arreglo en serie de un inersor con un arreglo en paralelo de un resorte y un amortiguador

C_5 → arreglo en serie de un amortiguador con un arreglo en paralelo de un inersor y un resorte

C_6 → arreglo en serie de un resorte con un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador

El diseño no solo se refiere a la implementación de la rigidez negativa y el uso del inersor. Es de suma importancia elegir una red mecánica adecuada para el modelo; la implementación de esta radica en el rendimiento que esta ofrece al modelo, ya que los parámetros obtenidos nunca cambiarán y, a pesar de las diferentes disposiciones, estos parámetros serán agregados al modelo.

De este modo, es importante calcular los parámetros ideales con los cuales el modelo trabajará de la forma más adecuada. Además, de manera similar, es muy importante considerar los parámetros asociados a la rigidez negativa, ya que, si el DVA no trabaja dentro de los parámetros óptimos obtenidos mediante los cálculos realizados, se ocasiona un problema que es perjudicialmente mayor que cuando el modelo entra en resonancia. Puesto que la frecuencia a la que vibra el modelo se incrementa de manera exponencial, razón por la cual el modelo puede fallar de manera más fácil.

Dado que la rigidez negativa es un tema reciente en la investigación, su aplicación no se encuentra desarrollada ampliamente. Pero a medida que el conocimiento en esta área va creciendo, se ha buscado implementarlas en los diversos rubros que abarca el análisis de vibraciones mecánicas.

1.1 Planteamiento del problema

En el campo de las vibraciones mecánicas, el estudio de los sistemas de amortiguamiento es una de las principales ramas en las que se tiene desarrollo. El estudio ha ido creciendo conforme se aprenden nuevos conocimientos; sin embargo, el objetivo se ha mantenido. Como se sabe, este es reducir la vibración del sistema. Esta se puede hacer diseñando de manera adecuada el sistema o implementando los avances tecnológicos y dispositivos para obtener un mejor rendimiento del sistema con la implementación de estos.

Dentro de los sistemas de amortiguación se tienen: amortiguadores viscosos, topes de impacto, absorbedores dinámicos de vibración, amortiguadores de fluido inteligentes, inersores, etc. Uno de los utilizados ampliamente es el absorbedor dinámico de vibración; este, al ser sintonizado correctamente, produce un equilibrio dinámico en el sistema, minimizando de esta manera las amplitudes de vibración. Implementando además nuevas tecnologías, es posible incrementar la reducción de la vibración.

Uno de los más importantes descubrimientos es el inersor, el cual, después de su aparición, se implementó en los sistemas de control, adquiriendo de esta forma un mejor rendimiento del sistema. En últimas publicaciones [10], se han estudiado distintos tipos de sistemas, para los cuales la utilización del inersor es indispensable. Como muestra, se ha planteado la amortiguación de una estructura tipo viga con un absorbedor dinámico de vibración conectado en serie basado en inersor. Mediante esta configuración, se logró aumentar en un 17% la disminución de vibración en la estructura tipo viga, en comparación a la implementación solo del DVA clásico, para el caso de vibración armónica. De forma similar, en la literatura, se ha demostrado que la configuración de este tipo de absorbedores con arreglo en serie es más eficiente en comparación con los absorbedores en paralelo.

También, se observó que la rigidez negativa implementada en conjunto con el inersor ofrece un rendimiento aún mayor que el obtenido solo con el inersor. Pero la implementación del

Capítulo I

sistema implica varios retos, puesto que, si el diseño del sistema se hace de manera errónea, esto puede ocasionar una falla de forma más precipitada.

Por lo anterior, en este trabajo se propone el diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa conectado a una estructura tipo viga. Implementando de esta manera la rigidez negativa en un DVA, el cual estará formado por la conexión del absorbedor de vibración dinámico con un inersor y la rigidez negativa que se puede ejemplificar como un resorte conectado en paralelo al absorbedor y tierra.

En la Figura 1.2 se muestra el sistema propuesto en este trabajo de tesis, el cual consta de una viga, la cual se encuentra sometida a una fuente de excitación armónica; a su vez, esta se encuentra conectada a un arreglo en paralelo de un amortiguador y un resorte. A continuación, se incluye al absorbedor de vibración dinámica (DVA) conectado en serie; finalmente, se conecta en paralelo el arreglo de la rigidez negativa con la red mecánica C3 [7],[8].

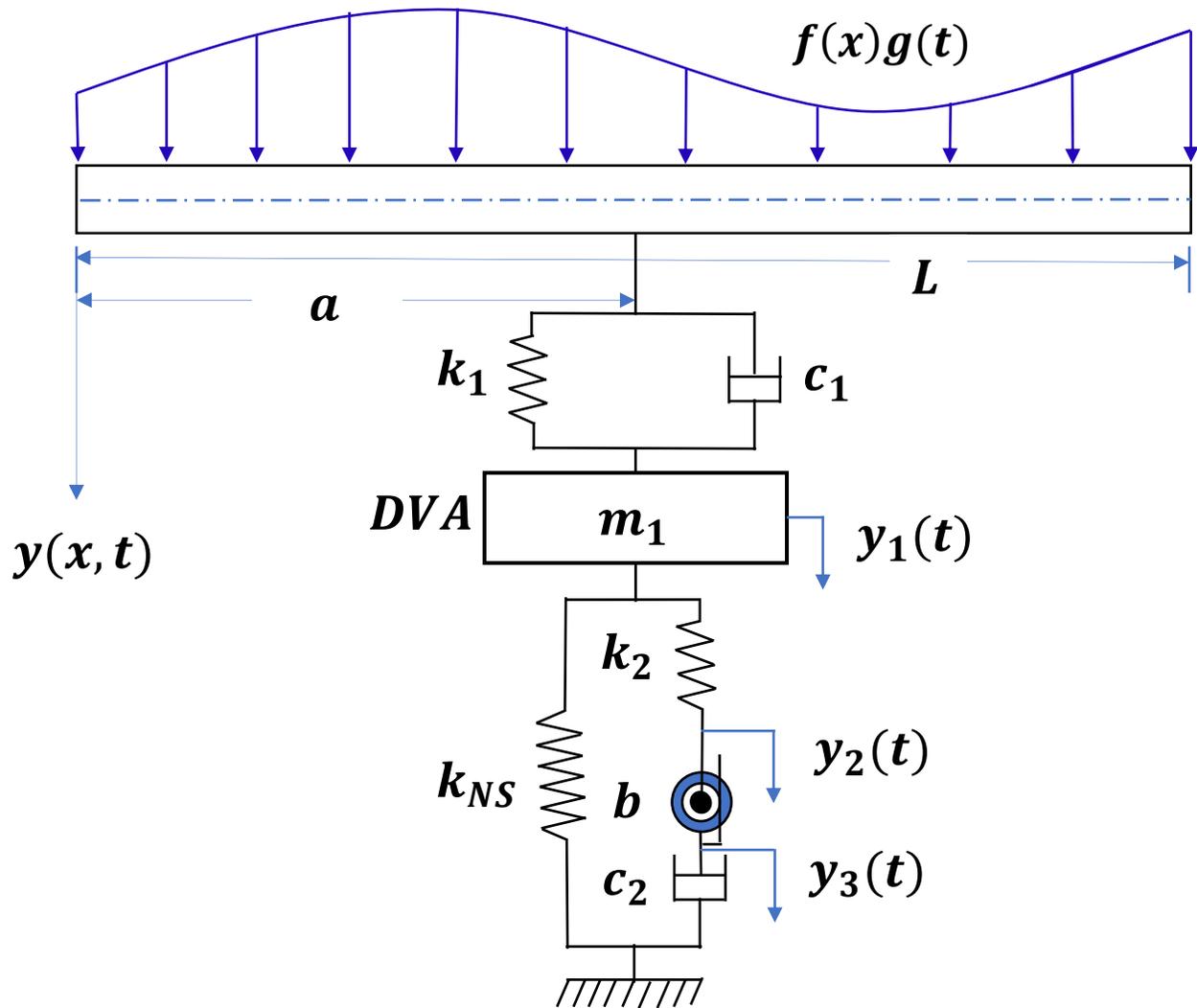


Figura 1.2. Sistema utilizado en este trabajo de tesis.

Donde

$f(x)g(t)$ Carga distribuida.

$y(x, t)$ Desplazamiento transversal de la viga.

L Longitud de la viga.

m Masa asociada al DVA.

k_1 Rigidez correspondiente al DVA.

c_1 Amortiguamiento correspondiente al DVA.

$y_1(t)$ Desplazamiento correspondiente a la masa m .

k_{NS} Rigidez correspondiente al resorte de rigidez de la red mecánica C3.

k_2 Rigidez correspondiente al resorte de la red mecánica C3.

$y_2(t)$ Desplazamiento correspondiente al inersor.

b Inertancia.

$y_3(t)$ Desplazamiento correspondiente al inersor.

c_2 Amortiguamiento correspondiente al amortiguador de la red mecánica C3.

1. 2 Justificación

Como se sabe, todo sistema vibratorio está constituido según Rao [11]: por un resorte, el cual se encarga de almacenar la energía potencial, un medio para conservar la energía cinética (inercia o masa) y un medio por el cual la energía se disipa gradualmente (amortiguador). Donde la vibración se refiere a cómo el sistema convierte la energía potencial en cinética. Pero cuando el sistema amortigua, como es el caso del absorbedor de vibración dinámica, este disipa esta energía.

En el control de vibraciones, la disipación de las ondas de vibración es su objetivo, puesto que cuanto mejor sea esta, el rendimiento del absorbedor es mayor. Los dos factores más importantes en el aislamiento de vibración son el amortiguamiento y la rigidez, donde la forma es la responsable de determinar la resonancia de estos sistemas y la rigidez influye en la disipación de energía. Pero el absorbedor de vibración dinámica se enfrenta a un problema que es la resonancia y que no se encarga de cubrir frecuencias más altas. Es aquí donde la rigidez negativa nos ofrece una solución, puesto que puede soportar vibración aun cuando esta entre en resonancia.

Mediante la implementación del inersor se mejora la amortiguación y se obtienen parámetros de funcionamiento óptimo. En diferentes artículos se menciona que la implementación de ambas tecnologías puede incrementar de manera significativa la vibración a la que sea sometido el sistema. Sin embargo, el incremento de la rigidez negativa se encuentra limitado por el límite de estabilidad elástica del absorbedor, que es el principal problema de esta.

Con base en lo anterior, se propone en este trabajo de tesis la implementación de un DVA basado en inersor y rigidez negativa, donde esta configuración constituye el dispositivo denominado como NIDVA. De acuerdo a la investigación recopilada, se espera que con la implementación del NIDVA se obtenga un mejor rendimiento dinámico del dispositivo y además se obtendrá una alta reducción de la vibración. De esta manera se busca comprender la utilización de este tipo de nuevas tecnologías no solo en el campo de estudio del control de vibraciones, puesto que esta tecnología tiene diferentes campos de aplicación, como en el sector automotriz o industrial.

La funcionalidad de este trabajo es que los parámetros óptimos de funcionamiento obtenidos se pueden agregar a diferentes modelos sin necesidad de cambiar demasiado la configuración o adecuándose al espacio necesario, otorgando una amplia gama de aplicaciones, tales como proporcionar a las estructuras una mayor robustez, incrementando de esta manera la seguridad de edificios o construcciones propensas a colapsar por fenómenos naturales como los sismos, incrementar el funcionamiento y vida óptima de elementos de suspensión automotriz, chasis y partes móviles, etc.

Finalmente, con este trabajo de tesis se busca comprobar mediante simulación si las investigaciones sobre estas nuevas tecnologías son correctas y la viabilidad que estas tendrán en un futuro conforme las investigaciones y aplicaciones sigan creciendo. Es importante aclarar que para comprobar físicamente los resultados de la investigación se encontró una limitante de suma importancia, la cual es: alto costo económico para el desarrollo del sistema a utilizar en este trabajo (la construcción del inersor y fuente de excitación).

1.3 Hipótesis

Con la integración de la rigidez negativa, a la red mecánica no tradicional basada en inersor NIDVA-C3, se logrará incrementar tanto el ancho de banda como el rendimiento de la supresión de vibración en comparación al DVA clásico. Esto mediante la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar teóricamente un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa conectado a una estructura tipo viga para incrementar el rendimiento del sistema.

1.4.2 Objetivos particulares

Desarrollar el modelo matemático del sistema propuesto implementando el formulismo Euler-Lagrange.

Aplicar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto.

Comparar el resultado de la implementación de la técnica de optimización para verificar que los resultados obtenidos sean correctos, mediante gráficas de la función de respuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor de vibración no tradicional.

1.5 Metas

Obtener el modelo dinámico y frecuencial de la estructura tipo viga conectada al absorbedor de vibración de alto rendimiento.

Implementar el criterio de optimización para el diseño óptimo del sistema absorbedor de vibraciones propuesto.

Realizar simulaciones numéricas considerando los parámetros óptimos obtenidos a partir de los criterios de optimización.

1.6 Metodología

En este trabajo de tesis, la metodología utilizada se basa en el método de la investigación tecnológica, el cual fue presentado por Canales et al. [12]. Las fases que comprenden esta metodología se muestran en el esquema de la Figura 1.3.

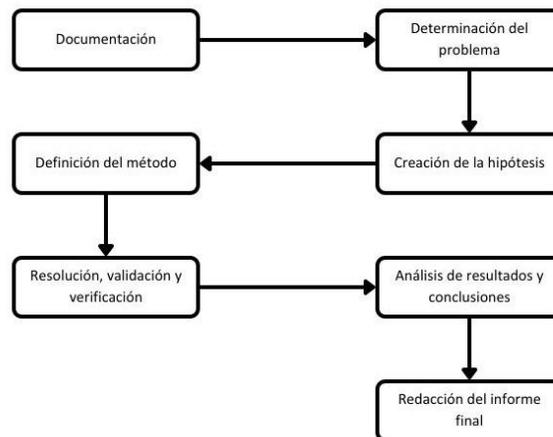


Figura 1.3. Metodología de la investigación utilizada en esta tesis [12].

Donde cada fase consiste en lo siguiente:

Documentación: esta etapa consiste en la investigación, recopilación y clasificación acerca de un tema en específico; esta servirá para el desarrollo de un producto, servicio o tema de

investigación. En cuanto a la documentación, esta servirá para desarrollar el estado del arte del tema de investigación, así como también para el desarrollo del marco teórico, el cual consiste en modelos, metodologías y técnicas sobre las cuales se basará este trabajo de tesis.

En lo que comprende a este trabajo de investigación, esta etapa consistirá en investigar sobre el control de vibraciones, los absorbedores de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa; esto se debe de hacer para tener un panorama general acerca del fenómeno, los dispositivos utilizados y la implementación de estos en el control de las vibraciones mecánicas. Adicionalmente, es necesario conocer sobre las técnicas de optimización documentadas en la literatura para el diseño óptimo de los absorbedores de vibración, que es la finalidad de este trabajo de tesis.

Determinación del problema: este es el procedimiento mediante el cual se especifica de manera clara y concisa en qué consistirá la investigación; esta parte de igual manera es importante, ya que, de no delimitar correctamente el problema, este trabajo sería muy extenso y no se podría realizar.

En el caso de este trabajo, el problema es el control de la vibración de una estructura tipo viga; esto se consigue con la implementación de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa (NIDVA). De manera similar, para el diseño óptimo del absorbedor de vibración, se necesita de la aplicación de técnicas de optimización para, mediante estas, obtener los parámetros óptimos con los cuales se minimicen las máximas amplitudes de vibración del sistema.

Creación de la hipótesis: esta etapa consiste en considerar los posibles resultados y posibles explicaciones tentativas del fenómeno a investigar. Estas respuestas son solo provisionales a las preguntas de investigación, esto quiere decir que son solo una presunción de acuerdo a los hechos e información recopilada. Esta hipótesis puede ser verdadera o falsa; sin embargo, es de suma importancia la comprobación de esta mediante el desarrollo del trabajo de investigación para, al final de este, afirmarla o, en caso contrario, refutarla. Así, la hipótesis se encarga de poner a prueba técnicas físicas y matemáticas, permitiendo de esta manera el nacimiento de nuevas teorías, las cuales se encontrarán basadas en el marco teórico. Cabe recalcar que la hipótesis indica que, tomando en cuenta lo existente, se debe llegar a nuevo conocimiento.

De esta manera, para este trabajo de tesis, la hipótesis planteada es la siguiente:

- Con la integración de la rigidez negativa, a la red mecánica no tradicional basada en inersor NIDVA-C3, se logrará incrementar tanto el ancho de banda como el rendimiento de la supresión de vibración en comparación al DVA clásico. Esto mediante la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida.

Capítulo I

Definición del método: para este trabajo, se utilizará el método de la mecánica lagrangiana para desarrollar el modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de la estructura tipo viga con el NIDVA. Subsiguientemente, realizando el análisis modal y después de aplicar diferentes teoremas matemáticos, se obtendrá la función de respuesta en frecuencia de la estructura tipo viga. Finalmente, con esta función, se formulará un problema de optimización; este se abordará a partir de la técnica de optimización de los puntos fijos extendida.

Resolución, validación y verificación: mediante la utilización de herramientas matemáticas, el modelo matemático se somete a diferentes consideraciones tanto físicas como matemáticamente lógicas y que sean posibles, para que de esta manera se demuestre la efectividad de los métodos empleados. En el caso de ser una teoría general, esta debe aterrizarse a casos particulares que sean simples y sencillos, conocidos reportados previamente en la literatura.

Análisis de resultados y conclusiones: después de realizar los cálculos y obtener los resultados numéricos, estos se comparan con los obtenidos en la investigación y reportados en la literatura, para de esta manera corroborar si estos afirman o refutan la hipótesis. De manera similar se evalúa si se cumplieron los objetivos y metas propuestas en la tesis. Cuando estos no se cumplen en su totalidad, se plantean soluciones al problema y se debe responder a la pregunta del porqué no se resolvió de manera total el problema. De forma breve, se formulan ideas que nutren al tema de investigación para trabajos a futuro y cómo se puede continuar con la investigación.

Redacción del informe final: al concluir el proceso de análisis de investigación, se realizará la redacción del documento de tesis. Este deberá comunicar de manera detallada y con la mayor claridad posible los resultados, comprobaciones, descubrimientos, impedimentos o análisis logrados durante el proceso de investigación.

1.7 Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está organizado por 6 capítulos, los cuales se especifican a continuación:

- En el Capítulo I se presenta el tema de investigación, cuyo eje central es el control de las vibraciones mecánicas. Al mismo tiempo, se incluye el planteamiento del problema, la justificación, hipótesis, objetivos (general y particulares), metas y metodología a seguir en este trabajo de tesis.
- En el Capítulo II se presenta la investigación documentada en la literatura y se señalan los sucesos relacionados que dieron inicio a las investigaciones acerca de los

Capítulo I

absorbedores dinámicos de vibración. En segundo término, se proporciona información relevante acerca de los elementos importantes de esta investigación (inertor y rigidez negativa).

- En el Capítulo III se expone el marco teórico, en el que se muestra toda la teoría sobre la cual se basa el desarrollo de esta tesis (leyes, teoremas, definiciones y conceptos). Se realiza un repaso de los temas más relevantes e importantes, que incluyen los temas de análisis dimensional (teorema de Π Buckingham), ecuaciones diferenciales parciales en vibración lateral de vigas, ecuaciones de Euler-Lagrange, el análisis modal y teorema de Vieta. De igual manera, se ejemplifica la optimización de parámetros mediante la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida.
- En el Capítulo IV se presenta el desarrollo matemático del modelo de la estructura tipo viga propuesto en este trabajo de tesis.
- En el Capítulo V se presentan los resultados analíticos y numéricos obtenidos mediante el método de optimización.
- Finalmente, en el Capítulo VI se exponen las conclusiones basándose en los resultados obtenidos durante la realización de la tesis. Además, se plantean propuestas para trabajos futuros que puedan desarrollarse.

Capítulo II

II. Estado del arte

2.1 Control de vibraciones

Las vibraciones se encuentran presentes en nuestra vida cotidiana, desde hablar hasta las grandes edificaciones y maquinaria. Es por esta razón que es de suma importancia mantener la amplitud de esta dentro de rangos adecuados, puesto que esto mejora el rendimiento dinámico. De manera similar, es necesario que las estructuras y máquinas funcionen a bajos niveles de vibración, gracias a que cuando trabajan en este rango se reduce la fatiga, tensión y ruido provocado por las vibraciones. Es en esta necesidad donde surgen los dos métodos de control de vibraciones, los cuales son el control activo y pasivo.

Por su rango de funcionamiento óptimo es que nace el control activo de vibraciones, puesto que en la mayoría de aplicaciones prácticas, las vibraciones se encuentran en el rango de baja frecuencia.

El control activo de vibraciones (ACV), por sus siglas en inglés, hace referencia a la utilización de potencia externa para de esta forma realizar su función. El control se basa en los principios de superposición e interferencia destructiva [13-14]; esto se logra mediante la utilización de una fuerza de igual magnitud, pero en fase inversa, a la vibración producida por la estructura o máquina, con esto se obtiene como resultado que las vibraciones se anulen entre sí. En la Figura 2.1 se muestra el funcionamiento de este tipo de control

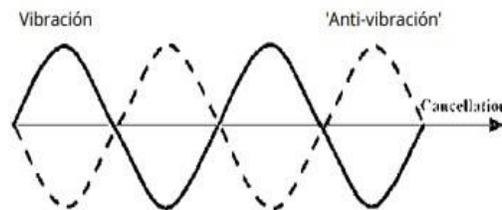


Figura 2.1. Principio del control activo de vibraciones [13].

El control pasivo de vibraciones basa su funcionamiento solo en la implementación de un sistema de resorte-amortiguador; este dependerá solo de la masa y el resorte, de la capacidad dinámica que estos puedan ofrecer. Es por esta razón que el control de pasivo no es efectivo por debajo de 1,4 veces la frecuencia de resonancia [15]; su principal área de funcionamiento es dentro del rango de frecuencias altas.

El control de vibraciones tiene amplias aplicaciones, tanto para sistemas de ingeniería como el aislamiento de vibraciones de estructuras, control de mecanismos de máquinas, control

de ruido, para obtener el comportamiento dinámico deseado, mayor confiabilidad en el proceso y una precisión mejorada. Mientras que, para las aplicaciones prácticas, se emplean en el aislamiento de vibraciones tanto activo como pasivo, control acústico estructural activo y amortiguamiento de vibraciones.

El control de vibraciones pasivo se divide principalmente en tres categorías: disipador de energía, absorbedor dinámico de vibraciones (DVA) y aislador de vibraciones.

Los disipadores de energía (ED) son dispositivos cuyo principio básico es convertir la energía cinética en calor y de esta manera reducir las vibraciones estructurales. Estos a su vez se pueden subdividir en amortiguadores de rendimiento metálico, amortiguadores de fricción, amortiguadores viscoelásticos y amortiguadores de fluido viscoso.

2.2 Absorbedor dinámico de vibración

Los absorbedores dinámicos de vibraciones (DVA) basan su funcionamiento en el principio de transferir la energía originada por las vibraciones a un sistema auxiliar; estos constan principalmente de dos formas comunes: amortiguador de masa sintonizado (TMD) y amortiguador de líquido sintonizado (TLD).

El TMD nació en 1909, cuando Hermann Frahm presentó una patente de un nuevo dispositivo para “amortiguar las vibraciones de los cuerpos”. Su funcionamiento se basó en conectar de forma deliberada un oscilador más pequeño al sistema; de esta forma se reduciría la resonancia en un sistema oscilante. La idea principal consistió en diseñar la frecuencia de resonancia del dispositivo pequeño de manera particular, para que los dos sistemas influyeran entre sí; entonces las mayores amplitudes de vibración se reducían. Estos dispositivos se componen a partir de un sistema que puede tener hasta tres componentes, es decir, una masa, un amortiguador de fluido viscoso y un resorte, donde de esta manera se logra un equilibrio dinámico entre los desplazamientos de la estructura principal y la estructura secundaria. En la Figura 2.2 se muestra la configuración de un absorbedor de vibración.

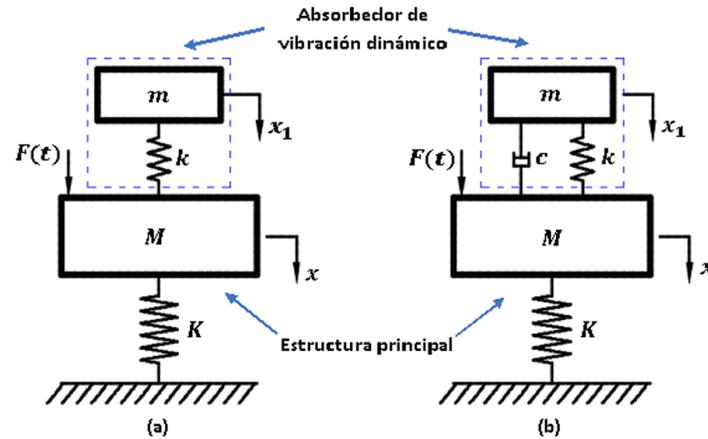


Figura 2.2. Absorbedor de vibración: (a) No amortiguado, (b) Amortiguado [10].

El absorbedor de vibraciones es una estrategia de control, el cual se implementa con la premisa de que el sistema al cual es acoplado se puede aislar o desacoplar de fuertes perturbaciones, protegiendo de esta manera a las estructuras de peligro [16]. Al implementar el absorbedor, se puede cambiar la frecuencia natural de la estructura a la de la perturbación externa y de esta manera las vibraciones se pueden atenuar.

Con el paso del tiempo se ha demostrado la importancia de la implementación de los sistemas de control de vibraciones pasivos en la práctica, aunque existen algunas complicaciones que limitan su implementación. Algunas de estas limitaciones son las siguientes: los aisladores convencionales son efectivos solo cuando la frecuencia de entrada es 2 veces mayor que la frecuencia natural de la estructura aislada, mientras que para el caso en el que es menor, la respuesta, en lugar de disminuir, se agravaría, afectando así a la estructura en lugar de ayudarla. Para los DVA, la eficiencia del control depende en gran importancia de la relación de masa; esto hace referencia a la relación que tienen las masas físicas de las estructuras primaria y secundaria. Después de diferentes análisis e implementaciones, se ha observado que se necesita de una gran masa secundaria para que el DVA trabaje en condiciones óptimas.

Con los avances en las investigaciones, han surgido diferentes metodologías para el diseño óptimo de los DVA's. En 1928, Ormondroyd y Den Hartog [17] consiguieron soluciones analíticas para la elaboración del diseño óptimo del DVA, utilizando la técnica de los puntos fijos extendida, después de identificar la presencia de frecuencias invariantes. Luego, en 2005, Ozer y Royston [18] ampliaron esta metodología a sistemas mecánicos con diversos grados de libertad. Mediante la implementación de un método distinto, Asami et al. [19] y Nishihara y Asami [20, 21] emplearon la optimización H_∞ y H_2 basados en la técnica de perturbación y el teorema de Vieta para desarrollar soluciones analíticas que desarrollaran soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. Y recientemente, en el año 2015,

Argentini et al.[22] consiguieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA sujeto a fuerzas de excitación de desbalance rotatorio.

2.3 El inersor

El inersor es un nuevo elemento mecánico propuesto por el profesor Malcom C. Smith; él lo define como “un dispositivo mecánico de dos terminales mecánicas, una herramienta con la propiedad de que a sus terminales se les pueden aplicar fuerzas iguales y opuestas, lo cual será proporcional a la aceleración relativa de sus terminales” [2]. En la Figura 2.3 se muestra la representación del inersor.

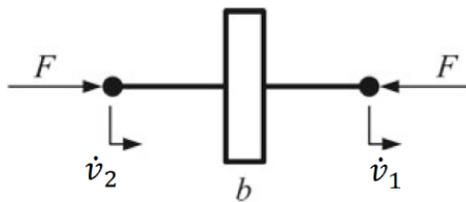


Figura 2.3. Representación del inersor [10].

En términos matemáticos, la fuerza que se genera en el inersor se representa como [10]:

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (2.1)$$

En la ecuación 2.1, la constante b se llama inercia con unidades en kilogramos. Cabe señalar que la energía almacenada por el inersor se puede cuantificar como $\frac{1}{2}b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1)^2$.

La motivación principal de proponer el inersor fue completar la analogía fuerza-corriente entre los sistemas mecánicos y eléctricos. Es conocido que el funcionamiento de los sistemas mecánicos y eléctricos tiene dinámicas similares. Entonces, la fuerza y la velocidad en los sistemas mecánicos pueden relacionarse con una analogía a la corriente y el voltaje en los sistemas eléctricos. Asimismo, en los sistemas mecánicos, el resorte y el amortiguador pueden representar a la resistencia y al inductor en el sistema eléctrico. En la Tabla 2.1 se presenta una analogía detallada de fuerza corriente .

<i>Sistema mecánico</i>	<i>Equivalencia</i>	<i>Sistema eléctrico</i>
<i>Fuerza</i>	\leftrightarrow	<i>Corriente</i>
<i>Velocidad</i>	\leftrightarrow	<i>Voltaje</i>
<i>Tierra mecánica</i>	\leftrightarrow	<i>Tierra eléctrica</i>
<i>Energía cinética</i>	\leftrightarrow	<i>Energía eléctrica</i>
<i>Energía potencial</i>	\leftrightarrow	<i>Energía magnética</i>
<i>Resorte</i>	\leftrightarrow	<i>Inductor</i>
<i>Amortiguador</i>	\leftrightarrow	<i>Resistencia</i>
<i>Masa</i>	\leftrightarrow	<i>Condensador a tierra</i>

Tabla 2.1 Analogía fuerza-corriente entre redes mecánicas y eléctricas [1,8].

La analogía fuerza-corriente y las correspondencias mostradas en la tabla 2.1 son más detalladas; esto se debe al concepto de variables transversales. En términos generales, una variable pasante (como la fuerza o la corriente) implica un solo punto de medición y es necesario que el sistema se corte en ese punto para llevar a cabo la medición. En cambio, una variable transversal (como la velocidad o el voltaje), puede ser medida sin necesidad de intervenir en el sistema, y la cantidad significativa para el estudio de la red es la diferencia entre dos puntos de la variable, incluso si un punto es el suelo. En [23] se ofrece una perspectiva general para el estudio de redes fundamentada en dicho formalismo. Como resultado, los métodos de análisis de mallas y nodos se pueden aplicar a redes mecánicas.

No obstante, no hay un mecanismo para anotar el condensador en los sistemas eléctricos. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración de la masa inercial es relativa a un punto fijo en el marco de inercia, lo que significa que la masa no es un dispositivo auténtico de dos terminales. Sin embargo, la masa es vista como el elemento mecánico correspondiente al capacitor en los sistemas eléctricos. Lo que significa que una de las terminales de la masa es el suelo y la otra terminal es el centro de la masa [8]. De esta manera, el inersor es el dispositivo faltante en la analogía de los sistemas mecánicos y eléctricos, donde su semejante es el capacitor, como se muestra en la Figura 2.4.

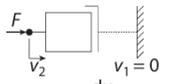
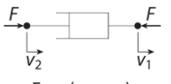
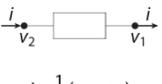
Mechanical	Electrical
 <p>Spring</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	 <p>Inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$
 <p>Mass</p> $F = m \frac{dv_2}{dt}$	 <p>Capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$
 <p>Damper</p> $F = c(v_2 - v_1)$	 <p>Resistor</p> $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$

Figura 2.4. Elementos de la analogía fuerza-corriente [24].

Gracias a esta propiedad fundamental, el inersor tiene tres beneficios potenciales:

- 1.- Elemento de dos terminales: los tres elementos fundamentales de una red mecánica ordinaria son el resorte, amortiguador y masa. Donde el resorte y amortiguador son elementos de dos terminales, mientras que la masa es un elemento de solo una terminal; de esta manera las conexiones entre los elementos están restringidas. El inersor, al ser un elemento de masa de dos terminales, logra diferentes configuraciones de conexión y con esto permite generar redes mecánicas más efectivas.
- 2.- Efecto de amplificación de masa: la implementación del inersor logra un efecto de amplificación de masa considerable, especialmente cuando el inersor está conectado a tierra. Físicamente no se observa incremento del peso de la red mecánica. Este efecto hace que el inersor sea una solución para reducir la masa auxiliar o secundaria de los sistemas de control de vibraciones convencionales.
- 3.- Efecto de rigidez negativa: el inersor puede generar una fuerza para, en lugar de oponerse al movimiento, ayudar a este; es el caso contrario a la rigidez positiva. Gracias a esto se puede utilizar al inersor para reducir la frecuencia natural de un sistema de vibración. Además, el inersor no responde a cargas estáticas, por lo que se pueden evitar los problemas de inestabilidad estructural en el sistema con dispositivos convencionales de rigidez negativa; también se evitan las respuestas estáticas agravadas.

2.3.1 Implementaciones del inersor en la industria automotriz

En la literatura [25], se ha realizado algunas implementaciones del inersor en el sector de la industria automotriz. En la Figura 2.5, se presenta la suspensión de un vehículo a la cual se le aplicó el inersor, esto con la finalidad de reducir las vibraciones en la cabina de pasajeros.

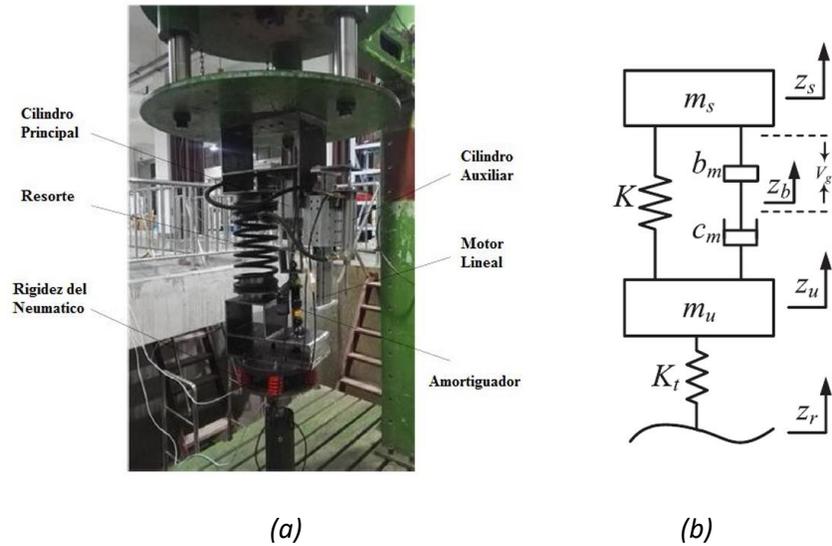


Figura 2.5. Suspensión de un automóvil aplicando un inersor donde (a) Banco de pruebas y (b) Modelo de la suspensión con inersor [25].

Donde la eficiencia del inersor se comprobó mediante la medición de forma experimental de la aceleración y desplazamiento. Para la aceleración se consiguió una reducción del 0.29%, 0.64% y 0.55% en velocidades de 10 m/s, 20 m/s y 30 m/s respectivamente, que, aunque parece que la disminución fue mínima, se consiguió un porcentaje superior al de la suspensión tradicional. Mientras que para el desplazamiento la reducción fue más significativa, puesto que se obtuvo una disminución del 18.02%, 19.97% y 19.95% respecto a la suspensión tradicional. En la Figura 2.6, se muestran las gráficas de las mediciones realizadas de forma experimental a estos parámetros.

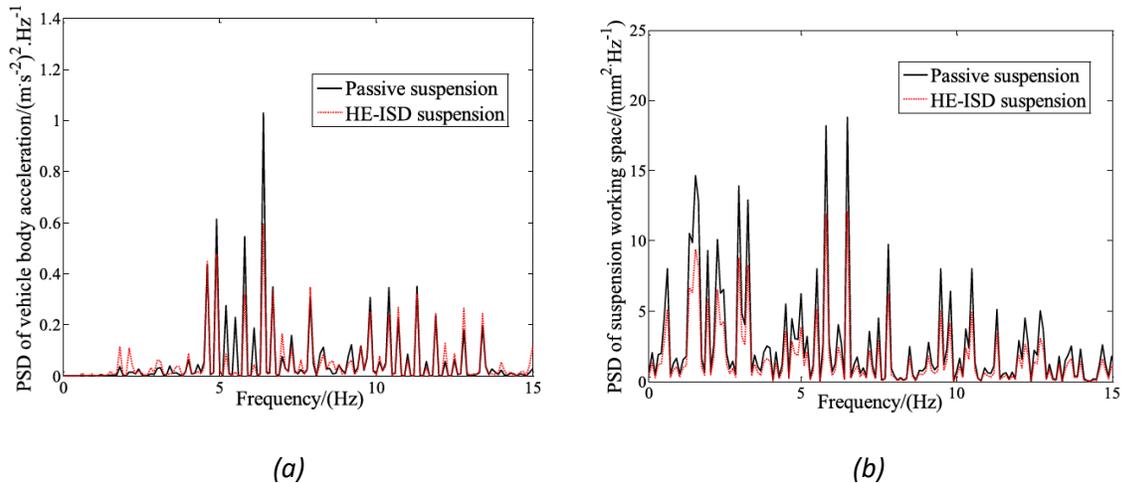


Figura 2.6. Densidad espectral de potencia (PSD por sus siglas en inglés) de (a) Aceleración del cuerpo del vehículo y (b) Desplazamiento de la suspensión.

Estos resultados experimentales confirmaron de manera clara los beneficios de la utilización del inersor en las suspensiones activas y pasivas. Los resultados que muestra este artículo son favorables. De forma similar, la teoría valida el uso de los inersores tanto en la industria automotriz como fuera de esta.

2.4 Absorbedores de vibración dinámicos no tradicionales

Como su nombre lo indica los absorbentes dinámicos de vibración no tradicionales (NSDVA's por sus siglas en inglés), son absorbentes no clásicos. Esto significa, que, en esta configuración, un amortiguador viscoso lineal se conecta directamente a tierra en lugar de al sistema principal, esto se ejemplifica en la Figura 2.7.

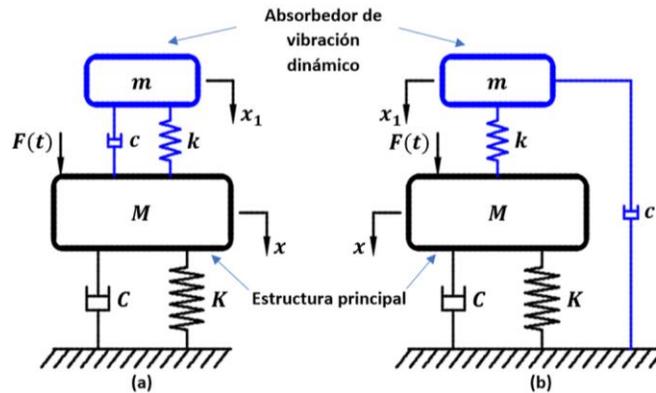


Figura 2.7. Absorbedor de vibración dinámico (a) tradicional y (b) no tradicional [10].

En la literatura se ha demostrado que este sistema no tradicional de NDVA's otorga una mejor respuesta en la minimización de la amplitud máxima del sistema principal sujeto a excitación armónica, esto frente a un sistema tradicional de DVA's. Wong y Cheung [26], mediante la utilización de la técnica de los puntos fijos, obtuvieron parámetros ideales que reducen la vibración del sistema principal en respuesta a una excitación armónica en la base. Igualmente, Wong y Cheung [27, 28] emplearon los criterios de rendimiento de H_{∞} y H_2 para la optimización de los parámetros óptimos para un NDVA.

2.5 Absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersor

Son configuraciones de DVA's que tienen un arreglo no tradicional, puesto que presentan una red mecánica que contiene inersores, resortes de rigidez positiva y amortiguadores de fluido viscoso, donde todos estos elementos están contenidos en un único sistema denominado como absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor (NIDVA's por sus siglas en inglés). Esta configuración se muestra en la Figura 2.8 [29].

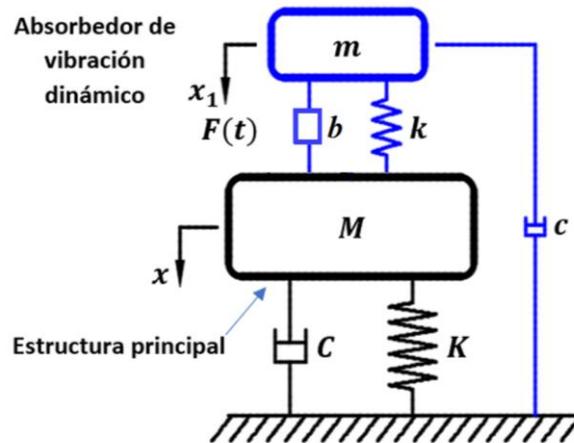


Figura 2.8. Absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor [29].

Con la aplicación conjunta del dispositivo inersor y el concepto del absorbedor dinámico no tradicional, el rendimiento del DVA puede optimizarse en cierta medida. No obstante, con la creciente demanda de disminuir las vibraciones, el rendimiento de los DVA's se vuelve cada vez más difícil para satisfacer de manera adecuada las necesidades crecientes de la práctica en la ingeniería. Con la finalidad de incrementar el rendimiento del DVA, resulta interesante la implementación conjunta de la rigidez negativa e inercia.

2.6 Rigidez negativa

El concepto de rigidez hace referencia a la relación entre la fuerza generada y el desplazamiento generado [30]. Mientras que la rigidez positiva se presenta cuando la deformación se produce en la misma dirección que la fuerza aplicada, la rigidez negativa conlleva una inversión de la relación de la fuerza y deformación.

Wang y Lakes [31] en el año de 2004 realizaron investigaciones acerca de las propiedades y condición de estabilidad del sistema de rigidez negativa, demostrando que el sistema de vibración al cual se le implementó el efecto de rigidez negativa otorga diferentes ventajas, como: funcionamiento a bajas frecuencias, gran capacidad de carga y, a favor, un efecto de aislamiento de vibración. Como resultado, en años recientes, la implementación de elementos de rigidez negativa para la reducción de vibraciones ha ido creciendo. Asimismo, el desarrollo de sistemas de aislamiento de vibraciones altamente efectivos lo efectuó Platus en el año de 2004 [32]. Con la evolución de esta tecnología, los investigadores han realizado considerables investigaciones sobre la factibilidad de la rigidez negativa; el excelente rendimiento de esta también se verifica mediante la implementación de experimentos. Existen diferentes maneras de implementar un dispositivo de rigidez

negativa, pero una de sus características principales consiste en combinar elementos de rigidez negativa con rigidez positiva [33].

A pesar de ser un dispositivo prometedor en el aislamiento de vibraciones, las investigaciones realizadas se limitan a estructuras o sistemas a escala, donde se incluyen vehículos, suspensiones de trenes, puentes y edificios. En el sector automotriz se encuentran diversas publicaciones, como es el caso de Thanh et. al [34], donde propusieron un modelo experimental de un asiento, donde la rigidez negativa busca suprimir las vibraciones de baja frecuencia.

Por lo general, la implementación de la rigidez negativa es sencilla y es posible lograrla de diferentes maneras, como un elemento con pre-carga o péndulo invertido [35]. Sarlis et al. [36] detallan el dispositivo de rigidez negativa y sus elementos, presentan modelos analíticos y computacionales, así como también resultados experimentales de componentes de bancos de pruebas que validan los modelos analíticos y computacionales que fueron aplicados a estructuras masivas como puentes y edificios.

2.6.1 Implementación de la rigidez negativa en la industria automotriz

Es posible encontrar diferentes artículos científicos donde se incluyan implementaciones sobre la rigidez negativa en el sector automotriz. Como es el caso de Thanh et al. [37], quienes implementaron la rigidez negativa a un modelo experimental de un asiento de automóvil para suprimir las vibraciones a baja frecuencia.

En la Figura 2.9 se muestran ejemplos de modelos (un asiento), al cual se le aplicó la rigidez negativa como sistema de aislamiento. En la Figura 2.9(a), se observa el modelado en 3D del sistema implementado, mientras que en la Figura 2.9(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema a utilizar, donde los resortes ubicados de forma horizontal son los resortes de rigidez negativa.

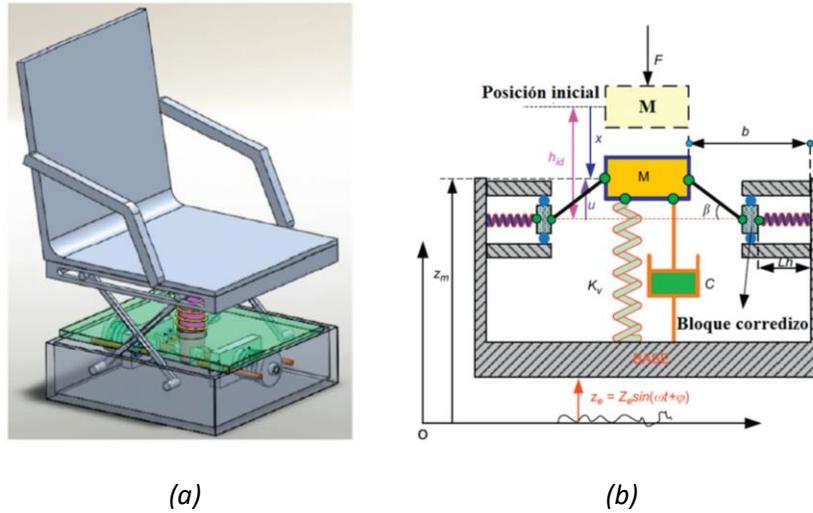


Figura 2.9. Asiento con suspensión utilizando el sistema de aislamiento propuesto (a) Modelo y (b) representación esquemática [37].

En la Figura 2.10, se muestra el banco de pruebas experimentales de forma física; en este se encuentra el sistema a implementar, se observa a detalle la estructura a la cual se le implementó rigidez negativa y el conjunto del aparato experimental.

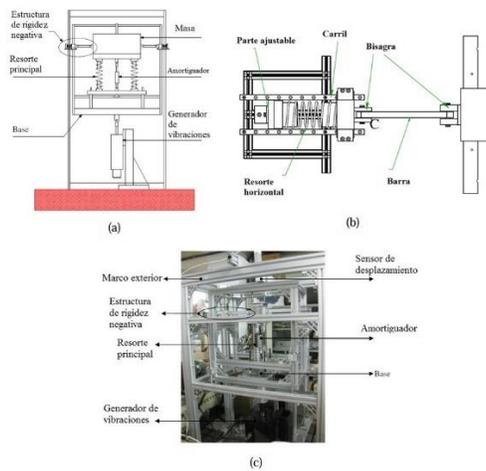


Figura 2.10. Banco de pruebas del sistema propuesto (a) Sistema experimental, (b) sistema de rigidez negativa y (c) fotografía del sistema [37].

Capítulo II

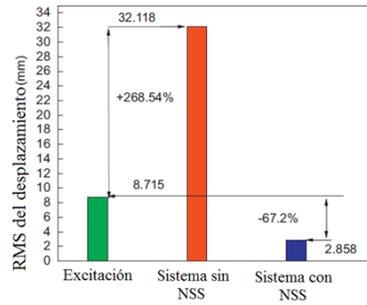


Figura 2.11. Valor RMS del desplazamiento de la masa generada por una excitación aleatoria [37].

Según lo reportado en el artículo, con el sistema implementado se logró una reducción del 67.2% de la excitación sufrida originalmente por el asiento; estos resultados se muestran en la Figura 2.11, logrando así minimizar las vibraciones con este tipo de sistema.

Capítulo III

III. Marco teórico

3.1 Sistema con excitación armónica

De acuerdo a la teoría, el modelo matemático que gobierna un sistema dinámico lineal es:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F_{eq}(t) \quad (3.1)$$

Donde: $F_{eq}(t)$ es la entrada (función de entrada o forzada) del sistema. La respuesta o salida del sistema en cuestión es una solución de la ecuación diferencial que se encuentra sujeta a las condiciones iniciales del problema. m_{eq} es la masa equivalente, c_{eq} el coeficiente de amortiguamiento y k_{eq} la rigidez equivalente del sistema [38].

En el movimiento oscilatorio existe la posibilidad de que este se repita con regularidad, es decir, en intervalos de tiempo iguales; a este se le conoce como movimiento periódico. Donde la forma más simple de un movimiento periódico es el movimiento armónico. De forma general, en sus representaciones matemáticas son empleadas funciones de seno y coseno. La fuerza externa más común que actúa en un sistema es la fuerza de excitación armónica simple (F_{eq}) [39]. No obstante, encontramos diversos tipos de excitaciones periódicas, las cuales producen vibración forzada de la estructura y esta vibra a la frecuencia de excitación periódica, los cuales se representan en la Figura 3.1 [40].

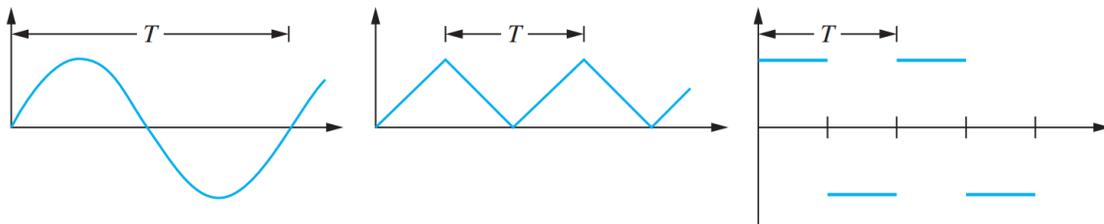


Figura 3.1. Ejemplos de excitaciones periódicas [40].

Considerando una fuerza de excitación armónica compleja, la vibración forzada se describe matemáticamente como:

$$F_{eq} = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Donde: F_0 es la amplitud de excitación y ω es la frecuencia de excitación externa. Es importante señalar la diferencia entre ω y la frecuencia natural ω_n , la cual se encuentra definida en función de las propiedades de masa y rigidez del sistema en cuestión.

3.2 Ecuaciones diferenciales parciales en deflexión de vigas

A menudo encontramos numerosas estructuras; estas se encuentran constituidas a base de vigas, placas o columnas; estas pueden sufrir distorsiones o desviaciones, generadas ya sea por algún agente o fuerza externa o debido a su propio peso. En comparación con las funciones de Green, una de las formas menos complejas es el método de separación de variables, donde este sirve para modelar matemáticamente sistemas físicos vibratorios como placas, cuerdas y vigas.

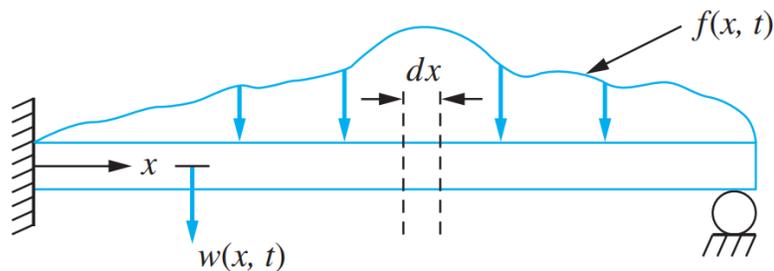


Figura 3.2. Esquema del modelo de la viga [40].

Al considerar como ejemplo la vibración lateral de una viga [40]. Para esto, es necesario considerar el esquema de un elemento de la viga uniforme, como el de la Figura 3.2, donde su longitud total es L , área transversal A , momento de inercia centroidal I y que se encuentra constituido por un material con propiedades físicas de módulo de elasticidad E y densidad de masa ρ , la cual se encuentra sujeta a una fuerza externa por unidad de longitud $f(x, t)$. El desplazamiento transversal de la viga se encuentra dado por $w(x, t)$.

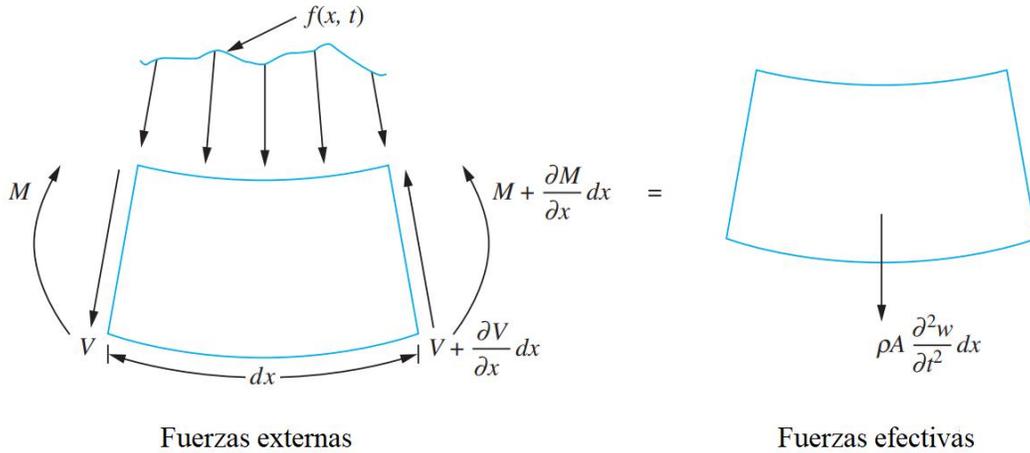


Figura 3.3. Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la viga [40].

Analizando el DCL de la Figura 3.3, se tiene que la ecuación de movimiento producido por la fuerza es:

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + \int_x^{x+dx} f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} dx \quad (3.3)$$

Se obtiene al aplicar el teorema del valor medio a la ecuación (3.3):

$$f(x, t) - \frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

Analizando el DCL de la Figura 3.3, se tiene que la ecuación de movimiento producido por el momento es:

$$\begin{aligned} M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + \int_x^{x+dx} (\xi - x) f(\xi, t) d\xi \\ = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} dx \left(\frac{dx}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Puesto que dx es infinitesimal, los términos de orden dx^2 son despreciables contra los de dx . Aplicando el teorema del valor medio y puesto que $\xi - x$ es menor que dx en todo el intervalo de integración, la ecuación (3.5) se simplifica a:

$$V = - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.6)$$

De acuerdo con la teoría elemental de flexión de vigas y considerando la convención de signos de acuerdo al DCL:

$$M = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

Considerando las propiedades de una viga uniforme ($I = cte$), se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.8)$$

Donde la ecuación (3.8) representa la dinámica vibratoria de una viga sujeta a una fuerza externa [41].

3.2.1 Condiciones de frontera en vigas

Las condiciones de frontera para vibraciones transversales de vigas más frecuentemente utilizadas son [41, 42]:

1. Extremo libre

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.9)$$

- Fuerza cortante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.10)$$

2. Extremo simplemente apoyado (de pasador)

- Deflexión

$$\omega = 0 \quad (3.11)$$

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12)$$

Capítulo III

3. Extremo fijo (empotrado)

- Deflexión

$$\omega = 0 \quad (3.13)$$

- Pendiente

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

4. Corredizo (deslizándose)

- Pendiente

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

- Fuerza cortante

$$EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.16)$$

En la Figura 3.4 se presenta con detalle las condiciones de frontera utilizadas con mayor frecuencia; asimismo, se muestran sus ecuaciones de frecuencia, modos normales y frecuencias naturales.

Condiciones en los extremos de la viga	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Valor de $\beta_n l$
Ambos extremos articulados 	$\text{sen } \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Ambos extremos libres 	$\text{cos } \beta_n l \cdot \text{cosh } \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\text{cos } \beta_n x + \text{cosh } \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\text{cosh } \beta_n l - \text{cos } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)
Ambos extremos empotrados 	$\text{cos } \beta_n l \cdot \text{cosh } \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{senh } \beta_n x - \text{sen } \beta_n x + \alpha_n (\text{cosh } \beta_n x - \text{cos } \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{senh } \beta_n l - \text{sen } \beta_n l}{\text{cos } \beta_n l - \text{cosh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Un extremo empotrado y el otro libre 	$\text{cos } \beta_n l \cdot \text{cosh } \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x - \alpha_n (\text{cos } \beta_n x - \text{cosh } \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l + \text{senh } \beta_n l}{\text{cos } \beta_n l + \text{cosh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Un extremo empotrado y el otro articulado 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\text{cosh } \beta_n x - \text{cos } \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\text{cos } \beta_n l - \text{cosh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Un extremo articulado y el otro libre 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \alpha_n \text{senh } \beta_n x]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l}{\text{senh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)

Figura 3.4. Condiciones de frontera más habituales para la vibración transversal de una viga [41].

3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Dentro de la historia del estudio de la física encontramos los principios de mínimo, dentro de los cuales se basan y desarrollan distintas investigaciones aplicadas al campo de la física, como son óptica y cálculo. La primera aplicación referida a la mecánica aparece en el año de 1747, cuando Maupertuis afirmó que el movimiento dinámico tiene lugar siempre bajo la mínima acción.

Cuando Lagrange tomó este principio, fue quien le otorgó una base matemática sólida en el año de 1760. Finalmente, en sus publicaciones Hamilton expuso el principio dinámico sobre el cual se puede fundamentar toda la mecánica, el cual se puede formular de la siguiente manera:

“De todas las trayectorias posibles (compatibles con ligaduras) que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un sistema determinado, la trayectoria

verdaderamente seguida es aquella que hace la mínima integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial” [43].

De lo anterior se deduce que los principios de Lagrange y Hamilton se toman como los pilares fundamentales donde se sustenta la mecánica clásica. Estos son de gran utilidad, puesto que se obtienen las ecuaciones de movimiento utilizando solamente la energía cinética, energía potencial y fuerzas no conservativas (trabajo virtual), haciendo más fácil el análisis en el caso de no conocer las fuerzas asociadas al sistema. Lo cual es necesario si se hiciera con las ecuaciones de Newton. Aunque no en todos los casos se facilitará más utilizar el principio de Hamilton y Lagrange.

En forma general, el principio de Hamilton constituye que la forma en que evoluciona un sistema físico se define mediante un principio variacional, el cual se basa en la lagrangiana, la cual estará asociada siempre al sistema aplicado. Este a su vez contiene toda la información referente a las variables y fuerzas que actúan sobre el sistema; esto quiere decir que se utilizan de forma general o implícita las ecuaciones de restricción propuestas en la teoría, las cuales a su vez reducen de forma simultánea el número de ecuaciones necesarias para detallar la mecánica del sistema [44].

La expresión matemática de las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

Donde: T es la energía cinética, U la energía potencial y q_k las coordenadas generalizadas. La lagrangiana se define como:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U \quad (3.18)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico son:

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}_k} - \frac{d\mathcal{L}}{dq_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas conservativos [45].

Es importante mencionar que la función lagrangiana no es única; esto significa que para un sistema físico pueden existir diferentes funciones lagrangianas, donde finalmente se obtiene el mismo conjunto de ecuaciones de movimiento para el sistema dinámico. Exactamente, las ecuaciones de movimiento son únicas mientras que la lagrangiana no [46].

3.3.1 Función de disipación de Rayleigh

Considerando el caso cuando existen fuerzas *no conservativas* que, si generan trabajo, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden tomarse como se sigue:

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}_k} - \frac{d\mathcal{L}}{dq_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

Donde \mathcal{L} es el lagrangiano contenido en el potencial debido a fuerzas conservativas, y Q_k representa a las fuerzas que no provienen de un potencial. Un caso de ejemplo es el de la fuerza de fricción viscosa, que es proporcional a la velocidad:

$$F = -\mu v \quad (3.21)$$

En las cuales, estas fuerzas pueden derivar de una función de disipación de Rayleigh (función de las velocidades generalizadas) de la forma [47]:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mu |v|^2 \quad (3.22)$$

De esta manera, las fuerzas de amortiguamiento viscoso pueden escribirse de forma explícita en el contexto de las ecuaciones de Lagrange expresándolas de la forma:

$$Q_{kvisc} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

Debido a que, suponiendo que las fuerzas generalizadas Q_k incluyen todas las fuerzas conservativas, sin considerar a las fuerzas viscosas, las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma generalizada, se pueden reescribir como [48]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

La cual aplicada a sistemas con amortiguamiento viscoso, en términos del lagrangiano es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para sistemas no conservativos y es necesario que cumpla con la condición que las fuerzas no conservativas sean proporcionales a la velocidad de las partículas y opuestas al movimiento. Es decir, que estas son fuerzas disipativas, puesto que el sistema pierde energía por su acción [45].

3.4 Análisis dimensional

Desde el principio de la historia, el hombre ha observado los diferentes fenómenos naturales. El conocimiento de estos llega por abstracción; de esta manera, observar la altura o diferentes líneas en diversos objetos genera en el ser humano el concepto de longitud. Esta idea se puede aplicar también al color, peso o demás magnitudes físicas.

A lo largo de la historia, el análisis dimensional se utiliza como un primer paso para la resolución de problemas o fenómenos físicos. Esto se logra mediante las consideraciones de las *dimensiones* de una magnitud física involucradas en un sistema físico (mecánico). Estas provienen de tres dimensiones elementales, las cuales son: longitud L, masa M y tiempo T, las cuales en el Sistema Internacional de Unidades tienen unidades de metro, kilogramo y segundo respectivamente.

El fundamento del análisis dimensional se encuentra con base en que, en la ecuación con la cual se trabaja, las dimensiones de ambos lados deben de corresponder, es decir, deben de ser iguales. Es de suma importancia mencionar que no es posible incluir información con respecto a constantes adimensionales que intervengan en el sistema en cuestión. Es por esta razón que resulta adecuado considerar su presencia en las ecuaciones obtenidas en el proceso del análisis dimensional [49].

En la Tabla 3.1 se presentan diferentes variables físicas con sus respectivas dimensiones y abreviaturas; estas son las que se utilizan principalmente en diferentes áreas de la física. Estas se muestran expresadas en términos de las tres dimensiones mencionadas anteriormente: L, M y T.

Es importante tomar en cuenta de la tabla mostrada a continuación que la fuerza (es igual a masa * aceleración), por su parte, el trabajo (es igual a fuerza * distancia), la rigidez a su vez (es igual a fuerza / distancia) y, finalmente, el amortiguamiento (igual a fuerza / velocidad).

<i>Variable física</i>	<i>Dimensión</i>	<i>Abreviatura</i>
velocidad	$\frac{\textit{longitud}}{\textit{tiempo}}$	LT^{-1}
aceleración	$\frac{\textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	LT^{-2}
volumen	$(\textit{longitud})^3$	L^3
densidad	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{longitud})^3}$	ML^{-3}
fuerza	$\frac{\textit{masa} * \textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	MLT^{-2}
trabajo	$\frac{\textit{masa} * (\textit{longitud})^2}{(\textit{tiempo})^2}$	ML^2T^{-2}
amortiguamiento	$\frac{\textit{masa}}{\textit{tiempo}}$	MT^{-1}
rigidez	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{tiempo})^2}$	MT^{-2}

Tabla 3.1.- Análisis dimensional de parámetros empleados generalmente en física.

Como ejemplo, se toma como referencia la siguiente ecuación:

$$T = F * d \tag{3.26}$$

Donde: T es el torque o momento, F es la fuerza y d la longitud de la palanca [50].

De manera general, se sabe que el torque o momento es fuerza por distancia. Al aplicar a la ecuación el análisis dimensional, se observará si la ecuación es congruente en cuanto a sus unidades.

$$F = [M][L][T^{-2}] \quad d = [L] \tag{3.27}$$

Por lo tanto:

$$F * d = [M][L][T^{-2}] [L] = [M][L^2][T^{-2}] = T \tag{3.28}$$

De esta manera se corrobora la congruencia de las unidades correspondientes al torque o momento.

3.5 Teorema de Π Buckingham

Para utilizar el método del análisis dimensional, el teorema de π (pi) Buckingham es esencial para llevarlo a cabo. La primera persona en anunciarlo fue el científico Aimé Vaschy en el año de 1892 y publicado por primera vez en el año de 1911 por Dimitri Riabouchinski, pero en el año de 1914 el físico Edgar Buckingham incorporó trabajos con suma relevancia y fue donde ganó popularidad, además de que fue él quien dio la primera demostración de este para casos especiales. Es por estas razones que el teorema lleva su nombre [51]. *El método de repetición de variables*, cuyo proceso consiste en hallar, de un sistema físico en concreto, sus valores adimensionales π 's y de esta manera simplificar el proceso de solución del problema a resolver [52].

Este teorema es de suma importancia para el análisis dimensional. Además, formaliza el método de análisis dimensional de Rayleigh [53], mencionado con anterioridad. El cual afirma que es posible describir un fenómeno físico con una cantidad de parámetros adimensionales $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$, que es menor o igual que la cantidad de parámetros adimensionales involucrados (q_1, q_2, \dots, q_n) .

Es importante mencionar que el Teorema de π Buckingham, puede utilizarse para corroborar que las variables adimensionales utilizadas en el desarrollo de este trabajo son congruentes.

3.6 Análisis modal

Para poder solucionar una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, habitualmente es necesario utilizar métodos numéricos o métodos de series infinitas. La serie de potencias es el método más general y efectivo de resolver estas ecuaciones. Cuando se trabaja con una ecuación diferencial parcial y homogénea en una función incógnita de dos variables independientes y sus derivadas, también serán solución las sumas de estas soluciones. Asimismo, suponiendo condiciones de divergencia “fuertes”, esta se puede expresar de la siguiente manera:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.29)$$

Definición Un conjunto de funciones, como $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$ se dice, que es ortogonal con respecto a la función de peso $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, sí [54]:

$$\int_a^b \omega(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \neq 0, & \text{si } n = m \end{cases} \quad (3.30)$$

Para la ecuación (3.30), su representación en series es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (3.31)$$

En la ecuación (3.31): c_n son coeficientes numéricos y $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal.

Teorema: Dado un conjunto de funciones:

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots\}, \quad (3.32)$$

Linealmente independientes y continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, y dada una función de peso $\omega(x)$ positiva y continua en el mismo intervalo, tendremos un conjunto de funciones:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\} \quad (3.33)$$

Con las próximas propiedades [54] :

- 1.- Cada $f_n(x)$ es una combinación lineal de las ϕ .
- 2.- Las $f_n(x)$ son linealmente independientes del intervalo $a \leq x \leq b$.
- 3.- $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal con respecto a la función de peso $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Para los sistemas continuos, se conocen diferentes métodos para hallar la respuesta forzada del sistema, tales como el método de coeficientes indeterminados, la transformada de Laplace y el análisis modal. Donde este último es el más efectivo y mayormente utilizado [40].

Considerando una fuerza externa $y(x, t)$ como el término no homogéneo adimensional en una ecuación diferencial parcial. Cabe recalcar que estos términos no homogéneos también pueden generarse en la superficie del contorno. Mediante el método del análisis modal, es posible calcular el desplazamiento transversal de la viga, para lo cual es factible expandir en forma de serie de potencias como [55]:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \phi_n(x) \quad (3.34)$$

Donde:

$$f_n(t) = (y(x, t), \phi_n(x)) \quad (3.35)$$

$\phi_n(x)$ es la i -ésima función modal y es factible determinarla mediante el problema de valores particulares con cierta condición de frontera.

Para el caso de una viga empotrada, las ecuaciones que satisfacen dichas condiciones son las siguientes [55]:

$$\int_0^L f_i(x)f_j(x) dx = L\delta_{ij} \quad y \quad \frac{d^4 f_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 f_i(x) \quad (3.36)$$

Donde: β_i es el eigenvalor de la ecuación característica de la viga, L es la longitud y δ_{ij} es la delta de Kronecker, que se encuentra definida por [45]:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

El método de análisis modal permite determinar la respuesta de vibración forzada; de la misma forma, es posible también obtener las características dinámicas estas, a su vez incluyen las frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y formas modales. Este método está basado en utilizar las coordenadas principales para desacoplar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento, tanto para sistemas amortiguados como proporcionalmente amortiguados. Con base en lo anterior, este método es el más útil para solucionar un sistema de múltiples grados de libertad lineal.

3.7 Teorema de Vieta

El álgebra es una rama esencial de las matemáticas. Desde su concepción, esta se utilizó para resolver ecuaciones lineales o cuadráticas; con su evolución, estas fueron incrementando su orden y, de la misma manera, nuevos métodos para poder solucionarlas. La resolución de estas implica obtener todas las raíces (reales o complejas), de forma precisa o mediante aproximaciones [56].

Cuando se trabaja con un polinomio, se conocen diferentes métodos para darles solución, desde utilizar aproximaciones, realizar factorizaciones para de esta manera obtener las raíces del polinomio; sin embargo, no siempre es posible obtener de forma simple mediante estos métodos, las raíces del polinomio. Es entonces cuando se buscan métodos que permitan la obtención de información acerca de las raíces del polinomio mediante la observación de los coeficientes del polinomio, como es el caso de las ecuaciones de Vieta [57].

Para aplicar las ecuaciones de Vieta, se considera un polinomio mónico ($a_n = 1$) de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0 \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) contiene n raíces x_1, x_2, \dots, x_n . Estas raíces pueden hallarse con base en los términos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ independientes del polinomio.

Generalizando las soluciones de la ecuación (3.38) y vinculándolas con los términos independientes, se tiene [57, 58]:

$$a_{n-1} = -(x_1 + \dots + x_n) \quad (3.39)$$

$$a_{n-2} = (x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ a_{n-j} &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j} \quad (3.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ a_0 &= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \quad (3.42) \end{aligned}$$

Para el caso de una ecuación cuártica, es decir $n = 4$.

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.43)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.43) se pueden expresar en términos de las sumas y productos de sus raíces x_1, x_2, x_3, x_4 las cuales se expresan como sigue:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.44)$$

$$a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \quad (3.45)$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \quad (3.46)$$

$$a_0 = x_1x_2x_3x_4 \quad (3.47)$$

En el caso específico de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor (IDVA's), Barredo et al. [59] propusieron una metodología nueva basándose en las fórmulas de Vieta para la obtención de los parámetros óptimos de los absorbedores de vibración basados en inersor.

3.8 Optimización

Las técnicas de optimización están orientadas a resolver un problema y a su vez que estas soluciones sean óptimas; esto lo desarrolla determinando un conjunto de valores que, además de satisfacer todas sus restricciones, maximizan o minimizan, según sea el caso a resolver, el valor de la función objetivo [60]. Estas se clasifican en: lineales y no lineales.

De manera general, un problema de optimización se compone generalmente de los siguientes elementos:

- Un conjunto de restricciones
- Un conjunto de soluciones factibles, donde este incluye todas las combinaciones posibles de variables independientes que satisfacen al conjunto de restricciones.
- Una función objetivo, la cual asocia las soluciones factibles con el desempeño- rendimiento del sistema.

Teorema A: Teorema de existencia de máximos y mínimos

Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo [61].

En la Figura 3.5 se muestra el concepto de máximos y mínimos de una función. Por medio de derivadas se conseguirá información sobre los máximos y mínimos globales y locales.

Es necesario conocer las primeras y segundas derivadas de la función objetivo para solucionar problemas de optimización, puesto que de estas se obtendrá información sumamente importante.

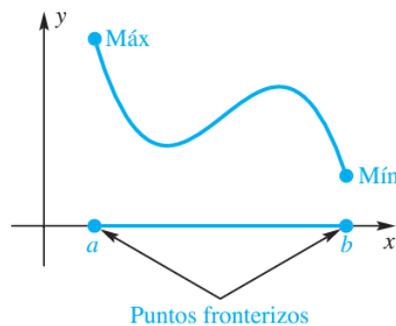


Figura 3.5. Máximo y mínimo de una función arbitraria [61].

La primera derivada de la función $f'(x)$ indica si esta ha alcanzado la trayectoria óptima, además, otorga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x . De esta manera, si $f'(x) > 0$ la recta tangente asciende hacia la derecha, lo que sugiere que f es

creciente. De forma recíproca, si $f'(x) < 0$, la recta tangente desciende hacia la izquierda, sugiere que f es decreciente [62].

La segunda derivada permite determinar los intervalos de concavidad y los valores máximos y mínimos. Suponga que f'' es continua cerca de c . Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c . Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c [62].

3.9 Técnica de los puntos fijos

Uno de los métodos de optimización para los DVA's, usualmente descritos en la literatura, es el propuesto por Den Hartog [63] y está basado en la disminución de la respuesta de la amplitud máxima de un sistema primario.

Esta se encuentra fundamentada en dos condiciones de operaciones de los absorbedores dinámicos de vibración, cuando el:

- I. Amortiguamiento es cero ($\zeta \rightarrow 0$)
- II. Amortiguamiento tiende a infinito ($\zeta \rightarrow \infty$)

Como se ilustra en la Figura 3.6, estas dos condiciones dirigen a los *puntos fijos* o *puntos invariantes* relacionados con el factor de amortiguamiento del sistema, los cuales se determinan mediante la respuesta en estado estable.

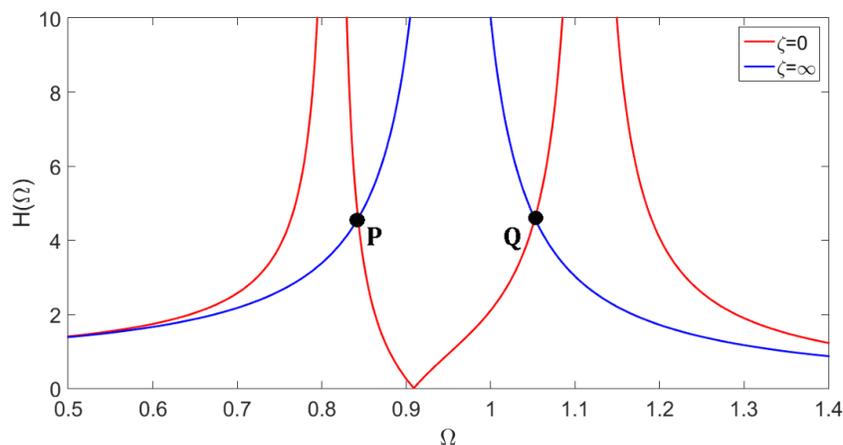


Figura 3.6. Gráfica de un DVA clásico donde aparecen los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de los estados del sistema para cuando el amortiguamiento es cero e infinito [10].

Dentro del intervalo formado por estos puntos, obligatoriamente existirá un valor de amortiguamiento, en el cual la cresta producida sea mínima. En el caso de hallar esta

posición, el problema estaría resuelto prácticamente, puesto que la curva más favorable es la que pasa con su tangente horizontal a través de los puntos fijos P y Q [64].

A este amortiguamiento tal que el producto de la fuerza de amortiguamiento por el desplazamiento resulta máximo, entonces su amplitud de resonancia será pequeña; a esto se le conoce como amortiguamiento óptimo.

Nota: *Todas las curvas pasan a través de los puntos fijos P y Q independientemente del amortiguamiento del sistema [63].*

En la Figura 3.7, se ejemplifica el comportamiento del DVA cuando la relación de amortiguamiento toma valores arbitrarios, incluyendo ambas consideraciones fundamentales de operación del DVA.

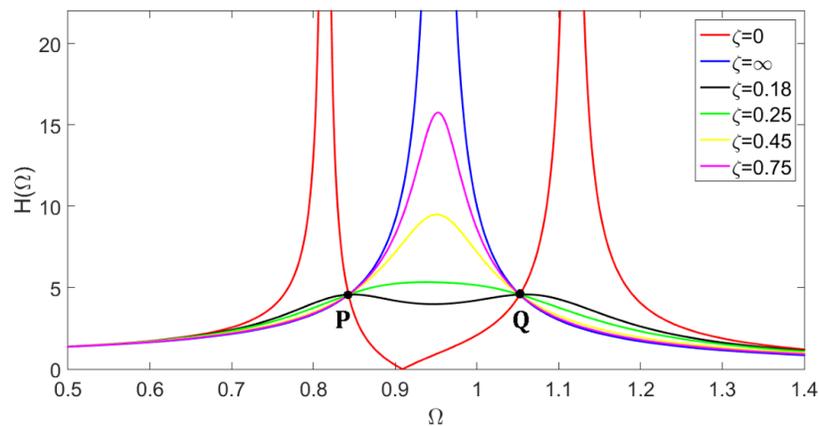


Figura 3.7. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Obsérvese que todas las líneas pasan a través de los puntos fijos P y Q .

De otro modo, la técnica de los puntos fijos está basada en considerar dos estados de operación del sistema (amortiguamiento cero e infinito), donde las amplitudes (FRF de la estructura principal) son iguales. Considerando estas restricciones y haciendo uso de procedimientos matemáticos, se consiguen los parámetros óptimos del sistema.

Puesto que todas las líneas se localizan entre los puntos P y Q de la Figura 3.7, poseen diferentes amplitudes que implican cambios bruscos cuando el sistema entra en resonancia. El objetivo del criterio de H_{∞} y la técnica calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida es encontrar la respuesta óptima entre estos puntos para aumentar el rango de operación del DVA.

Nota: *El mejor balance dinámico del sistema primario se obtendrá cuando su curva FRF óptima sea más plana en todo el rango de frecuencias de excitación [10].*

3.10 Técnica de los puntos fijos extendida

Barredo et al. [59] formulan una generalización de la teoría de Den Hartog; esta se puede utilizar en el desarrollo de expresiones algebraicas cerradas, para el diseño óptimo de absorbedores dinámicos basados en inersor (IDVA).

La técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida está fundamentada en cambiar los puntos invariantes del sistema, consiguiendo variables óptimas que se encuentran vinculadas con la respuesta del sistema $R(s)$ y su norma euclídeana $\| H \|$. Representada matemáticamente como:

$$R(s) = \| H \| \quad (3.48)$$

Por medio de los siguientes pasos se explica la técnica de los puntos fijos extendida:

- I. Obtener el modelo matemático del sistema; en este trabajo, la ecuación de movimiento resultante se encontrará en el dominio de s Laplace.
- II. Obtener la función de transferencia $H(s)$ del sistema, conocida generalmente como la respuesta $R(s)$ del sistema.
- III. Reemplazar la expresión $s = j\omega$
En la cual j es la unidad imaginaria. La expresión es válida debido a que el sistema dinámico es causal y oscilante establemente si y solo si, todos los polos de función de transferencia $H(s)$ están en el semiplano izquierdo. De esta manera, la región de convergencia para $H(s)$ incluye el eje $j\omega$ [65].
- IV. Reescribir la función de transferencia $H(s)$ de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (3.49)$$

- V. Sustituir los parámetros adimensionales asociados al teorema de Pi Buckingham.
- VI. Obtener el módulo de $H(s)$ mediante la multiplicación del conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.50)$$

- VII. Utilizar las dos condiciones esenciales de la técnica de los puntos fijos.

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.51)$$

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.52)$$

- VIII. Igualar las ecuaciones (3.51) y (3.52).

Capítulo III

- IX. Efectuar un cambio de variable $\lambda = \Omega^2$ para reducir de grado la ecuación obtenida.
- X. Convertir la ecuación del paso IX a un polinomio mónico.
- XI. Encontrar soluciones óptimas por medio del teorema de Vieta. Mediante este teorema, se igualan las sumas y productos de las raíces entre las dos ecuaciones obtenidas al utilizar las dos condiciones esenciales de la técnica de los puntos fijos.
- XII. Obtener los parámetros óptimos [10].
- XIII. Reemplazar los parámetros óptimos. Al realizarlo, se obtiene una aproximación de la norma H_∞ [66] y es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes, lo cual a su vez es $\|H\|$.
- XIV. Obtener la solución óptima para el factor de amortiguamiento ζ_{opt} mediante la teoría de Krenk [66].

Esta última teoría es utilizada para aplanar la curva de respuesta de frecuencia de la estructura primaria y definir el coeficiente de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} . Emplear la técnica propone que se originan tres frecuencias resonantes no amortiguadas, conocidas también como frecuencias invariantes Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 , para obtener el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} del sistema.

De esta manera, para calcular Ω_1 y Ω_2 se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.52), cuando el amortiguamiento tiende a infinito. Entonces, se sustituyen los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y se resuelve la ecuación resultante en términos de Ω . Las raíces obtenidas serán las frecuencias resonantes no amortiguadas Ω_1 y Ω_2 .

Para calcular la frecuencia resonante no amortiguada faltante Ω_0 , es necesario igualar a cero el denominador de la ecuación (3.51), cuando el amortiguamiento tiende a cero. Sucesivamente, se sustituyen los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y se resuelve la ecuación en términos de Ω .

Capítulo IV

IV. Modelo matemático

En este apartado se describe el comportamiento dinámico del sistema, implementando los aspectos teóricos descritos en el capítulo III, como lo son las ecuaciones de Euler-Lagrange y la teoría de la vibración lateral de vigas, para que de esta manera se obtengan las ecuaciones necesarias para aplicar la técnica de los puntos fijos extendida. Mientras que para obtener la solución de la vibración forzada de la viga se empleará el análisis modal. De esta manera se encuentran las respuestas en función de la frecuencia de la viga y las amplitudes en frecuencia asociadas al desplazamiento del DVA.

4.1 Respuesta en frecuencia

Para el desarrollo del modelo matemático, se consideró el sistema de la Figura 1.2; esta es una configuración de una viga doblemente empotrada (viga Euler-Bernoulli) de longitud L sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$, donde $f(x)$ es una función espacial y $g(t)$ una función temporal determinística. Para determinar el comportamiento dinámico del inersor y el resorte de rigidez negativa, se plantea una fuerza de excitación externa tipo armónica. La viga se encuentra conectada en serie a un arreglo en paralelo con un resorte de magnitud k_1 y un amortiguador de magnitud c_1 . De forma similar, se propone la configuración de un sistema de control pasivo de vibraciones basado en inersor y rigidez negativa (NS-NIDVA-C3), localizado en el punto $x = a$ que se encuentra conectado en serie al arreglo del amortiguador y resorte por una terminal, mientras que por la otra se encuentra conectado al suelo (tierra mecánica). El DVA está compuesto por una configuración de red mecánica C3; esa, a su vez, contiene una masa de valor m , un resorte de rigidez negativa k_{NS} , un amortiguador de fluido viscoso c_2 , un resorte de rigidez positiva k_2 y, por último, un inersor con inercia b .

En el apéndice A, se muestra el análisis y proceso matemático de la estructura.

Para describir el comportamiento dinámico del sistema, se requiere utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma generalizada y la teoría de vibración lateral de vigas; por lo tanto, esta se puede describir como:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \dots \quad (4.1)$$

$$\dots f(x, t) + \{c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)]\}\delta(x - a)$$

Donde:

A área de la sección transversal

Capítulo IV

I es el momento de inercia

ρ es la densidad de masa

E es el módulo de elasticidad

$\delta(x - a)$ es la función Delta de Dirac

Para obtener la solución de la vibración forzada de la viga, se aplica el principio de superposición de modos, conocido también como análisis modal. Para esto, la deflexión de la viga y sus condiciones de frontera se expresan como se sigue:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad y \quad \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (4.2)$$

Donde: β_i es el valor característico (eigenvalor) de la ecuación característica de la viga y ϕ_i es el i -ésimo modo de vibración de la viga.

Al sustituir la ecuación (4.2) en (4.1) y multiplicando posteriormente por la función modal $\phi_i(x)$ y aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, se consigue:

$$\sum_{i=1}^{\infty} EI q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho A \phi_i(x) = \dots \quad (4.3)$$
$$\dots f(x)g(t) + \{c_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)) + k_1(y_1(t) - y(a, t))\} \delta(x - a)$$

Para determinar la respuesta en frecuencia del sistema, se consideró el caso donde el sistema se encuentra sujeto a una excitación armónica. Así, con lo anterior, se supone que $g(t) = e^{i\omega t}$, por lo tanto, como el sistema es lineal, entonces, $y(t) = Y(\omega)e^{i\omega t}$ es la respuesta en función de la frecuencia de la viga, de manera similar, $y_1(t) = Y_1(\omega)e^{i\omega t}$ y $y_2(t) = Y_2(\omega)e^{i\omega t}$ son las amplitudes en frecuencia asociadas a los desplazamientos de la masa y el inersor del DVA respectivamente, mientras que j se denota como número imaginario. Con lo anterior, la respuesta en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga se puede expresar como:

$$y(x, \omega) = G_1(x, \omega) - \frac{G_2(a, \omega) \cdot G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H} + G_1(x, \omega)} \quad (4.4)$$

Donde:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x) \phi_i(x) dx \quad (4.5)$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_1^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.6)$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_1^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.7)$$

$$H = \frac{k_1(Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - I((b + m_1)k_2 + bk_{NS})c_2\omega^2 \dots}{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2((b + m_1)k_2 + b(k_1 + k_{NS}))\omega^2 \dots} \frac{\dots - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS} k_1 Y(a, \omega)}{\dots - k_2 b(k_1 + k_{NS})\omega + Ik_2 c_2 (k_1 + k_{NS})} \quad (4.8)$$

Al evaluar la posición del NS-NIDVA-C3 en el punto $x = a$, se obtiene la expresión en términos de $Y(a, \omega)$. Por lo que $H(\omega)$ se puede escribir como:

$$H(\omega) = m\omega^2 J \quad (4.9)$$

Donde J esta dada por:

$$J = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2} \frac{k_1(Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - I((b + m_1)k_2 \dots}{Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2((b + m_1)k_2 \dots} \frac{\dots + bk_{NS})c_2\omega^2 - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS}}{\dots + b(k_1 + k_{NS}))\omega^2 - k_2 b(k_1 + k_{NS})\omega + Ik_2 c_2 (k_1 + k_{NS})} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es la función dimensional de respuesta en frecuencia del DVA. Para encontrar esta ecuación, pero en forma adimensional, es necesario introducir variables adimensionales que se encuentran relacionadas con las propiedades físicas de la estructura tipo viga con el sistema absorbedor de vibraciones; estas son las siguientes:

$$k_1 = m\omega_A^2 \quad k_2 = b\omega_C^2 \quad c_2 = 2\zeta_2 m\omega_A \quad (4.11)$$

$$\alpha = \frac{k_{NS}}{k_1} \quad \mu = \frac{b}{m} \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_A} \quad \eta = \frac{\omega_A}{\omega_C} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad \gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \quad (4.12)$$

Donde:

ω_1 Frecuencia natural asociada a la viga.

ω_A Frecuencia natural asociada a la masa.

ω_C Frecuencia natural asociada al inersor.

ω_i Frecuencia natural asociada del i-ésimo modo de vibración.

γ_i Relación de frecuencias naturales.

ζ_2 Factor de amortiguamiento asociado al DVA.

μ Relación de masas entre la masa y el inersor.

q Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA.

η Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre la inercia y el DVA.

Ω Relación de frecuencias forzadas.

α Relación de rigidez entre el resorte asociado a la viga y el resorte de rigidez negativa.

De lo anterior, la respuesta dinámica de la ecuación (4.10) en el dominio de la frecuencia de forma adimensional es:

$$J = \frac{k_1(Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - I((b + m_1)k_2 \dots \dots + bk_{NS})c_2 \omega^2 - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS})}{m_1 \omega^2 (Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2((b + m_1)k_2 \dots \dots + bk_{NS})c_2 \omega^2 - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS})} \quad (4.13)$$

De modo que al sustituir la frecuencia de excitación del sistema $H(\omega)$ se reescribe como:

$$H(\omega) = m\omega_1^2 J_1 \quad (4.14)$$

Donde J_1 se define como $J\Omega^2$.

Considerando así lo anterior y sus correspondientes sustituciones, la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando es sometida a una fuerza armónica es:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL\omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dots \left\{ \frac{a_i}{\gamma_1^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right] \right\} \quad (4.15)$$

Mientras que la función de respuesta en frecuencia de la aceleración transversal de la viga cuando se tiene excitación de tipo armónica se puede expresar como:

$$S_a(x, \Omega) = -\omega_1^2 \Omega S(x, \Omega) \quad (4.16)$$

Capítulo IV

La ecuación (4.16), a su vez, representa también la respuesta en frecuencia del desplazamiento de la viga cuando se considera una excitación de tipo inercial. Considerando el primer modo de vibración, la ecuación (4.15) puede expresarse como:

$$S(a, \Omega) = \frac{\phi_1 a_1}{(\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + \gamma_1^2) \rho A L \omega_1^2} \quad (4.17)$$

Capítulo V

V. Resultados

En esta sección se detalla el proceso mediante el cual se obtuvieron las expresiones óptimas para cada variable adimensional del NS-NIDVA-C3, así como también los resultados numéricos de la optimización realizada al sistema con excitación armónica.

5.1 Técnica de los puntos fijos extendida

Teniendo como base la metodología de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo et al. [40], se llevó a cabo la optimización del NS-NIDVA-C3 propuesto que se encuentra sometido a una fuerza armónica como fuente de excitación, considerando la respuesta de estado estable del sistema.

Para llevar a cabo la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida, se da comienzo con la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la estructura tipo viga con el NS-NIDVA-C3. Como resultado de considerar el modo fundamental de vibración ($\gamma_1 = 1$) y al evaluar en el punto $x = a$, se consigue:

$$S(a, \omega) = \frac{1}{\beta J_1 \phi_1^2(a) - \Omega^2 + 1} \quad (5.1)$$

Con la finalidad de obtener la magnitud de la ecuación (5.1), se reescribe como el cociente entre dos números complejos, es decir,

$$H(s) = \frac{A + B_i}{C + D_i} \quad (5.2)$$

Los coeficientes A, B, C y D se describen en el apéndice B.

Para obtener la norma de $H(s)$ en el espacio euclidiano, se multiplica la ecuación (5.2) por el conjugado del complejo del numerador y denominador correspondiente. Obteniendo:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (5.3)$$

Como se mencionó, la técnica se basa en dos principales condiciones de operación. Al aplicar la primera condición de la técnica de los puntos fijos (sección 3.11) a la ecuación (5.3), se obtiene:

$$|H|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{((\alpha + 1)q^2 - \Omega^2)^2}{(\alpha\beta q^4 \phi_1^2 + ((-\beta\phi_1^2 - \alpha - 1)\Omega^2 + \alpha + 1)q^2 + \Omega^4 - \Omega^2)^2} \quad (5.4)$$

De manera similar, aplicando la segunda condición de la técnica de los puntos fijos (sección 3.11) a la ecuación (5.3), se obtiene:

$$|H|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{(\eta^2(\alpha + 1)q^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha \dots}{(\alpha\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 + \left(\left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta\phi_1^2)\eta^2 - \alpha\beta\phi_1^2 \right) \Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 \dots}{\dots + 1) \Omega^2 q^2 + \Omega^4)^2} \quad (5.5)$$

$$\dots \left(\left((\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + \alpha + 1 \right) \Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \right) \Omega^2 q^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.11, se obtiene el polinomio mónico de cuarto grado independiente del factor de amortiguamiento. Se prosigue con la metodología de los puntos fijos extendida hasta obtener los parámetros óptimos, los cuales se muestran a continuación:

$$\mu_{opt} = \frac{2\beta\phi_1^2}{-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1} \quad (5.6)$$

$$\eta_{opt} = \sqrt{\frac{-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 1}{\alpha + 1}} \quad (5.7)$$

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{\alpha + 1}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}} \quad (5.8)$$

$$R(s) = \frac{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)\phi_1\sqrt{\beta}} \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) representa la amplitud de vibración del sistema en los puntos invariantes, que también es la amplitud mínima de vibración de la estructura tipo viga con el dispositivo NIDVA-C3.

El conjunto de soluciones óptimas μ_{opt} , η_{opt} y q_{opt} generan los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes de la viga. Estas soluciones óptimas se encuentran en términos de β , ϕ_1 y α . En el caso de la relación de

masas β , es necesario utilizar un valor adecuado, puesto que si este es demasiado pequeño no soportara demasiados cambios en la frecuencia de excitación antes de que falle, mientras que valores mayores tienden indicar un diseño deficiente. De forma general, el valor óptimo de β se encuentra en el intervalo $1\% \leq \mu \leq 25\%$ [67]. Para el caso de ϕ_1 se consideran condiciones para una viga empotrada. Finalmente, para α , se toma un valor adecuado para la Figura 5.2.

Esto se realiza con la finalidad de obtener soluciones numéricas para los parámetros óptimos del sistema y de esta manera visualizar los resultados obtenidos. Los valores numéricos propuestos se muestran en la Tabla 5.1.

Variable	Valor
β	0.1
ϕ_1	$\sqrt{2}$
α	-0.5

Tabla 5.1.- Variables establecidas para las variables independientes.

Por medio de una herramienta computacional se sustituye el conjunto de valores de la tabla 5.1 en las ecuaciones de los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , y q_{opt} (ecuaciones (5.6)-(5.9)). Los resultados se muestran en la Tabla 5.2, considerando seis cifras significativas.

Parámetro	Valor
μ_{opt}	= 8.00000
η_{opt}	= 0.31622
q_{opt}	= 1.19522

Tabla 5.2.- Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos .

Posteriormente, para obtener la FRF del sistema, se sustituyen los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.4), considerando un amortiguamiento igual a cero, es decir $\zeta_2 \rightarrow 0$, entonces:

$$H_{\zeta_2 \rightarrow 0}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(0.7142857150 - \Omega^2)^2}{(0.5102040819 - 2.000000001 \Omega^2 + \Omega^4)^2}} \quad (5.10)$$

Capítulo V

De manera similar, al sustituir los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.5), entonces, se obtiene la FRF del sistema considerando un amortiguamiento infinito, es decir $\zeta_2 \rightarrow \infty$.

$$H_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(0.1020408166 - 2.000000002 \Omega^2 \dots}{(0.07288629755 - 0.2653061230 \Omega^2 \dots + \Omega^4)^2}}{\sqrt{\dots + 1.428571430(1.6 \Omega^2 - 1.4)\Omega^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2}} \quad (5.11)$$

Asimismo, se propone un amortiguamiento $\zeta_2 = 0.2$ para observar el comportamiento de la relación de amortiguamiento cuando se considera un valor arbitrario. Al sustituir los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.3), se obtiene:

$$H_{\zeta_2=0.2}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(0.9142857151(0.7142857150 \dots}{(0.9142857151 \Omega^2(0.5102040819 \dots - \Omega^2)^2 + 0.16(0.1020408166 \dots}{\sqrt{\dots - 2.000000001 \Omega^2 + \Omega^4)^2 + 0.16(0.07288629755 - 0.2653061230 \Omega^2 \dots + \Omega^4)^2}}{\sqrt{\dots - 2.000000002 \Omega^2 + \Omega^4)^2}}{\sqrt{\dots + 1.428571430(1.6 \Omega^2 - 1.4) \Omega^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2}} \quad (5.12)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.10)-(5.12) se muestra en la Figura 5.1, donde la línea de color rojo representa la condición $\zeta_2 \rightarrow \infty$, la línea de color amarillo representa la condición $\zeta_2 = 0$ y la línea azul representa un amortiguamiento arbitrario de $\zeta_2 = 0.2$. Para determinar las coordenadas rectangulares de los puntos fijos P_1, P_2, P_3 y P_4 , se sabe que $h \approx \|H\|^2$. Por lo tanto, al igualar las ecuaciones (5.10) y (5.11) se resuelve para Ω , obteniendo:

$$P_1 = (0.2, 1.566), P_2 = (0.663, 1.566), P_3 = (1.149, 1.566) \text{ y } P_4 = (1.483, 1.566)$$

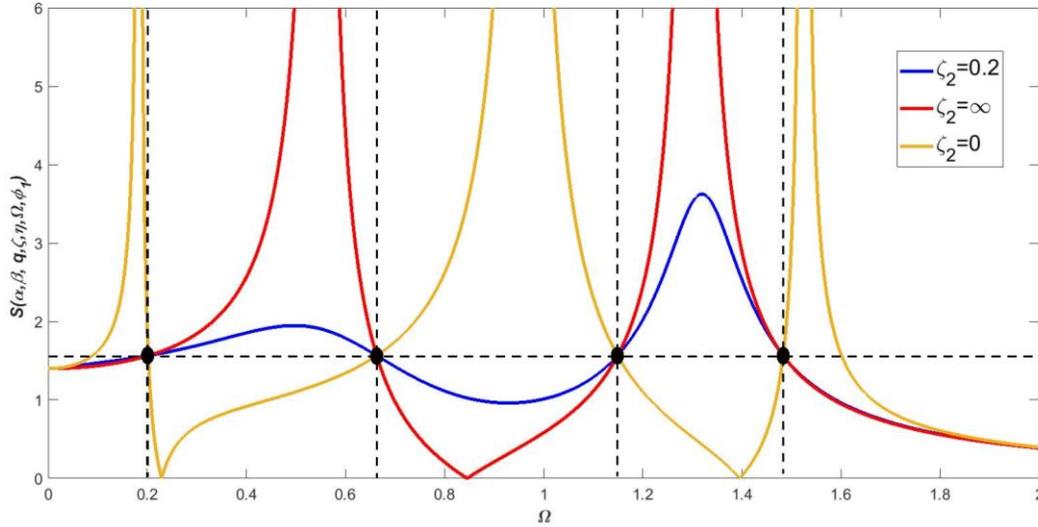


Figura 5.1 Respuesta en frecuencia de la viga acoplada al NS-NIDVA-C3 contra la relación de frecuencia Ω utilizando los parámetros óptimos y un factor de amortiguamiento arbitrario.

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de soluciones óptimas μ_{opt} , η_{opt} , y q_{opt} genera todas las curvas que pasan por los puntos fijos o invariantes que son independientes de la relación de amortiguamiento, tal y como se observa en la Figura 5.1.

Sin embargo, estos parámetros no son suficientes para aplanar la curva de respuesta en frecuencia del NS-NIDVA-C3 en todas las frecuencias de excitación; por esta razón es necesario encontrar la relación de amortiguamiento óptimo, es decir ζ_{2opt} .

Para esto, se determina primero el valor óptimo para α_{opt} , se resuelve entonces la ecuación de restricción (ecuación (5) del conjunto de ecuaciones del teorema de Vieta). Se evalúa entonces $H(\Omega = 0)$ en la ecuación (5.2), se tiene:

$$H(\Omega = 0)^2 = \frac{\eta^4(\alpha + 1)^2 q^8}{(\alpha\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 + \eta^2(\alpha + 1)q^4)^2} \quad (5.13)$$

La ecuación (5.9) muestra la amplitud máxima de la respuesta en frecuencia de la viga, es decir $R(s)_{opt}$, por lo tanto, la ecuación de restricción se expresa como:

$$\frac{\eta^4(\alpha + 1)^2 q^8}{(\alpha\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 + \eta^2(\alpha + 1)q^4)^2} - \frac{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)\phi_1\sqrt{\beta}} = 0 \quad (5.14)$$

A continuación, se sustituyen los parámetros óptimos de las variables η y q ; después, se resuelve para α consiguiendo las siguientes soluciones:

$$\dots \frac{1}{2}\beta\phi_1^2 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2\phi_1^4 - 4\beta\phi_1^2}, -1 + \phi_1\sqrt{\beta}, -1 - \phi_1\sqrt{\beta}, \dots \quad (5.15)$$

Por lo tanto, el valor óptimo para α_{opt} es el que proporciona solamente valores positivos de los demás parámetros óptimos, entonces:

$$\alpha > -1 + \phi_1\sqrt{\beta} \quad (5.16)$$

La ecuación (5.16) implica que el valor de α_{opt} es proporcional al valor de $\sqrt{\beta}$, de esta manera se puede graficar para observar los puntos en los que se puede utilizar (Figura 5.2). En la Figura 5.2 se muestra que los valores óptimos para α_{opt} son las que se encuentran en el área encerrada por la curva.

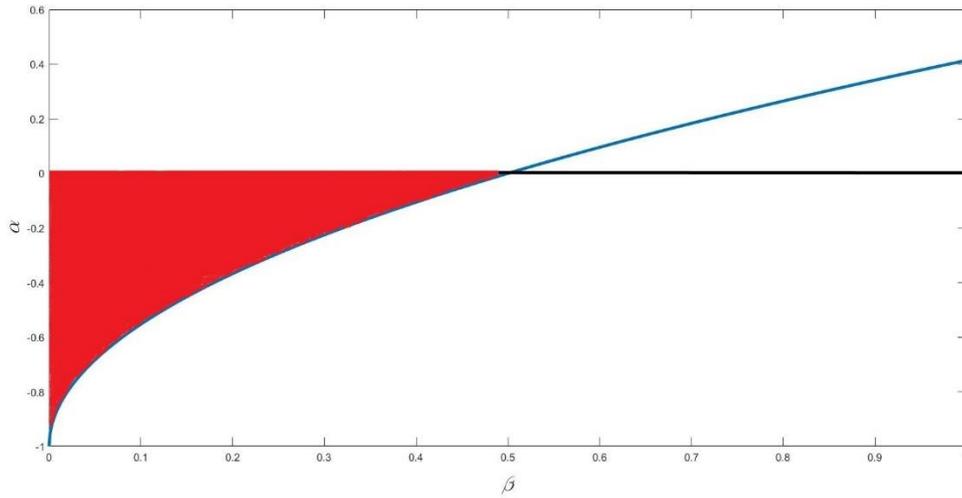


Figura 5.2. Gráfica de la función α contra β .

Al aplicar la teoría de Krenk para obtener el amortiguamiento óptimo de la viga doblemente empotrada sujeta al NS-NIDVA-C3, se producen tres frecuencias invariantes con las siguientes condiciones: Ω_1, Ω_2 cuando $\zeta \rightarrow \infty$ y Ω_0 cuando $\zeta \rightarrow 0$.

Para Ω_1 y Ω_2 cuando $\zeta \rightarrow \infty$, es necesario resolver la ecuación resultante de igualar el denominador a cero de la ecuación (5.4).

$$(\alpha\beta q^4 \phi_1^2 + ((-\beta\phi_1^2 - \alpha - 1)\Omega^2 + \alpha + 1)q^2 + \Omega^4 - \Omega^2)^2 = 0 \quad (5.17)$$

Se sustituyen los parámetros óptimos $\mu_{opt}, \eta_{opt},$ y q_{opt} en la ecuación (5.17) y se resuelve para Ω , se obtienen cuatro soluciones para las frecuencias invariantes para esta condición, $\zeta \rightarrow \infty$, las cuales se encuentran en la ecuación (5.18).

$$\Omega_{1,2} \quad (5.18)$$

Donde $\Omega_{1,2}$ se describe en el Apéndice B.

Así, Ω_1 es igual a la primera raíz positiva:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\beta\phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 + \sqrt{\phi_1^2\beta(\beta\phi_1^2 + 4(\alpha + 1)^2)}}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}} \quad (5.19)$$

Por lo tanto, Ω_2 es igual a la segunda raíz positiva:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2\beta\phi_1^2 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 2 + \sqrt{\phi_1^2\beta(\beta\phi_1^2 + 4(\alpha + 1)^2)} - 4}{\alpha\beta\phi_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1}} \quad (5.20)$$

Mientras, la frecuencia invariante Ω_0 cuando $\zeta \rightarrow \infty$, se puede obtener igualando a cero el denominador de la ecuación (5.5) y sustituyendo los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , y q_{opt} . Esto deriva en:

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 + \left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta\phi_1^2)\eta^2 - \alpha\beta\phi_1^2 \right) \Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1)) q^4 \dots \\ & \dots + \left((\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + \alpha + 1 \right) \Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \Omega^2 q^2 - \Omega^6 + \Omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

En consecuencia, Ω_0 es el valor que se encuentra entre las frecuencias Ω_1 y Ω_2 , por lo tanto, se toma como:

$$\Omega_0 = 1 \quad (5.22)$$

Se asigna este valor a Ω_0 puesto que se nota al realizar los cálculos de Ω_1 y Ω_2 , que las ecuaciones resultantes son extensas y complejas de manipular. Además, al sustituir los valores frontera, se aproxima a la unidad, por lo tanto, se le asigna el valor de 1.

Para obtener de forma numérica la relación de amortiguamiento óptimo, que esta a su vez aplanan la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, deben de sustituirse las soluciones de μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} , $R(s)$ (ecuaciones 5.6-5.9), también Ω_1 , Ω_2 y Ω_0 (ecuaciones 5.19, 5.20 y 5.22), en la ecuación (5.3). Esto generará tres valores de amortiguamiento en cada frecuencia resonante no amortiguada, los cuales se muestran en la Tabla 5.3 a seis cifras significativas.

Amortiguamiento	Valor
ζ_{2A}	= 0.515668
ζ_{2B}	= 0.322088
ζ_{2C}	= 0.383885

Tabla 5.3. Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.

Los coeficientes de ζ_{2A} , ζ_{2B} y ζ_{2C} se describen en el Apéndice B.

La relación de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor medio cuadrático (RMS) de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia invariante. Sustituyendo los valores de la tabla 5.3, se tiene:

$$\zeta_{2opt} = \frac{1}{3} \sqrt{3\zeta_{2A}^2 + 3\zeta_{2B}^2 + 3\zeta_{2C}^2} = 0.415139 \quad (5.23)$$

De manera que al sustituir los valores de las tablas 5.1-5.2 y el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} (ecuación 5.23) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$H_{\zeta_{2opt}}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{0.9142857151(0.7142857150 \dots}{0.9142857151 \Omega^2(0.5102040819 \dots} \sqrt{\frac{\dots - \Omega^2)^2 + 0.6893647912(0.1020408166 \dots}{\dots - 2.000000001 \Omega^2 + \Omega^4)^2 + 0.6893647912(0.07288629755 \dots} \sqrt{\frac{\dots - 2.000000002 \Omega^2 + \Omega^4)^2}{\dots - 0.2653061230 \Omega^2 + 1.428571430(1.6 \Omega^2 - 1.4)\Omega^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2} \quad (5.24)$$

Las gráficas de las ecuaciones (5.10), (5.11), (5.12) y (5.24) se muestran en la Figura (5.3). En la figura 5.3 se observa la respuesta en frecuencia de la estructura tipo viga sujeta en los extremos con un absorbedor de vibración NS-NIDVA-C3 con los valores óptimos de los parámetros adimensionales (Tabla 5.4), sujeta a una fuerza de excitación armónica. En la gráfica se muestran 4 curvas: la azul, denotada con la relación de amortiguamiento $\zeta_2 = 0.2$. La curva púrpura corresponde a la relación de amortiguamiento óptimo. Es importante mencionar que con la implementación del amortiguamiento óptimo se observa una disminución de la amplitud de vibración.

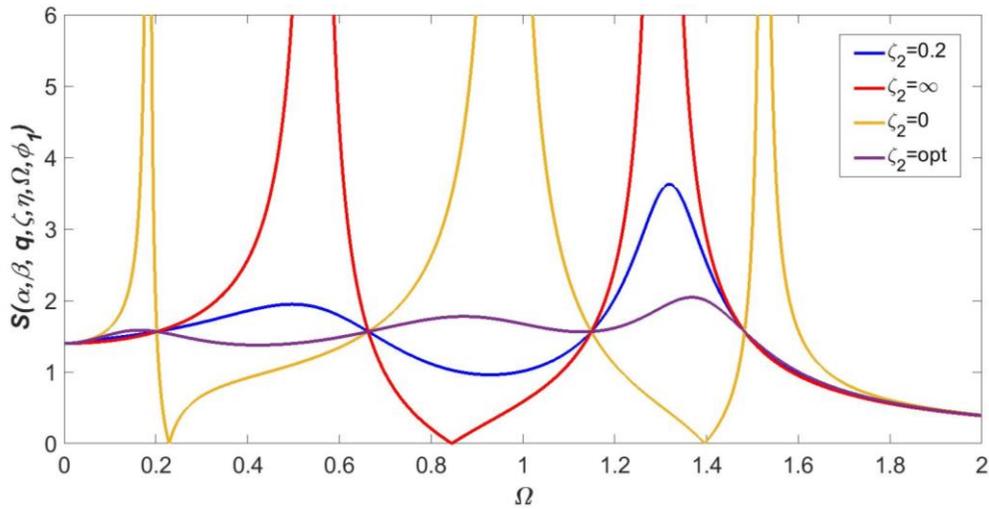


Figura 5.3. Curvas de respuesta en frecuencia para estructura tipo viga sujeta al NS-NIDVA-C3 con los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} incluyendo también la relación de amortiguamiento arbitrario y de amortiguamiento óptimo.

Parámetros óptimos para el NS-NIDVA-C3				
μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	α_{opt}	ζ_{opt}
8.0	0.31622	1.19522	-0.5	0.415139

Tabla 5.4. Valores óptimos para el NS-NIDVA-C3

Para calcular el porcentaje de la supresión de vibraciones, se calcula el índice de ancho de banda de supresión de vibraciones %SA. De este modo, se debe tener en cuenta la función de respuesta en frecuencia del sistema tipo viga con absorbedor basado en inersor y rigidez negativa (NS-NIDVA-C3) y la FRF del sistema tipo viga con absorbedor dinámico de vibración clásico (DVA) reportado por López-García [10]. Para comparar ambos sistemas, se toma como referencia la FRF cuando no existe absorbedor dinámico de vibración en la estructura tipo viga (estructura sin control). En la Figura 5.4 se muestran las curvas del análisis mencionado anteriormente, donde en la línea punteada de color negro se muestra la FRF de la estructura sin control, en la línea de color azul se muestra la FRF del DVA clásico y en la línea de color rojo se muestra la FRF del sistema NS-NIDVA-C3 .

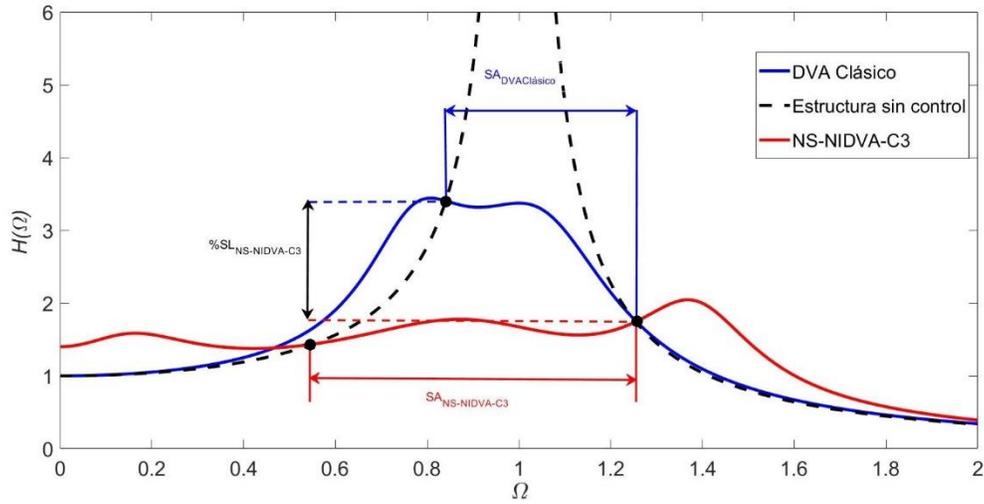


Figura 5.4. Comparación de las curvas de las FRF del DVA clásico por Gustavo [10] y NS-NIDVA-C3.

En consecuencia, la ecuación para calcular el alargamiento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SA_{NS-NIDVA-C3} = \frac{SA_{NS-NIDVA-C3} - SA_{DVA Clásico}}{SA_{DVA Clásico}} \times 100 \quad (5.25)$$

De forma similar, para calcular el índice de reducción de la amplitud del sistema ($\%SL$) del NS-NIDVA-C3 con respecto al DVA clásico, se localizan los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por consiguiente, la ecuación para el índice de reducción de la vibración del sistema es:

$$\%SL_{NS-NIDVA-C3} = \frac{SL_{DVA Clásico} - SL_{NS-NIDVA-C3}}{SL_{DVA Clásico}} \times 100 \quad (5.26)$$

Al llevar a cabo los respectivos cálculos, se obtiene que el $\%SA_{NS-NIDVA-C3}$ para el NS-NIDVA-C3 es del 69.23 % y el $\%SL_{NS-NIDVA-C3}$ es del 48.57 % en comparación con el DVA clásico. Por consiguiente, el NS-NIDVA-C3 genera un desempeño adecuado en la mitigación de vibraciones cuando está sometido a una fuerza de excitación armónica. En la tabla 5.5, se muestran las comparaciones de los valores numéricos del índice de ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración de las curvas de la figura 5.4.

<i>Tipo de control</i>	<i>%SA</i>	<i>%SL</i>
DVA	17.21 %	27.45 %
NS-NIDVA-C3	69.23 %	48.57 %

Tabla 5.5. Valores numéricos del ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración.

El análisis del índice de rendimiento señala que el rango de frecuencias de excitación donde la viga (estructura primaria) sujeta al NS-NIDVA-C3 o DVA clásico supera a una viga sin absorbedor (estructura sin control). También se observa que la implementación del sistema NS-NIDVA-C3 incrementa el índice de ancho de banda y el reduce la amplitud del sistema tanto para el caso de la estructura sin control como para el caso en el que se implementa el DVA como sistema de control. Es importante considerar que la implementación de este sistema consta solo de la implementación de elementos pasivos, lo que quiere decir que no es necesario la utilización de fuerzas o elementos activos, siendo sobresaliente el desempeño que otorgan estos elementos implementados en este tipo de sistemas de control. Finalmente, con los resultados del índice de rendimiento y el índice de ancho de banda se demuestra que la hipótesis inicial de proponer el sistema NS-NIDVA-C3 y con su implementación se incrementa tanto el ancho de banda como el rendimiento de la supresión de vibración.

Capítulo VI

VI. Conclusiones

En este trabajo de investigación se empleó el desarrollo matemático, a partir del cual fue posible determinar el diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa conectado a una estructura tipo viga doblemente empotrada. De esta manera, se cumplió el objetivo general de este trabajo de investigación, el cual fue: ***Diseñar teóricamente un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor y rigidez negativa conectado a una estructura tipo viga para incrementar el rendimiento del sistema.***

La estructura tipo viga se analizó considerando la condición de que a esta se le ejerce una fuerza de excitación armónica. El NS-NIDVA-C3 propuesto se encuentra configurado con la estructura tipo viga de longitud L conectada al sistema de absorción de vibración. A su vez, el sistema de absorción de vibración se encuentra constituido por un absorbedor de vibración dinámico conectado a la configuración en paralelo con conexión a tierra de una red mecánica basada en inersor y un resorte de rigidez negativa. De igual forma, la red mecánica basada en inersor se encuentra compuesta por un resorte, un inersor y un amortiguador; estos tres elementos están conectados en serie.

Para utilizar el análisis cinemático, es necesario comenzar con la obtención de las ecuaciones de movimiento del sistema; en este caso en específico se realizó mediante la teoría de Euler-Lagrange, con la consideración de fuerzas conservativas no generalizadas. Enseguida, se continuó con la transformación a parámetros adimensionales, de acuerdo al teorema de π Buckingham para así trabajar en el dominio de la frecuencia, esto con la finalidad de que el cálculo de los valores numéricos se realizara de forma sencilla, esto se desarrolló en el capítulo IV, cumpliendo así el primer objetivo específico: ***Desarrollar el modelo matemático del sistema propuesto implementando el formulismo Euler-Lagrange***, igualmente cabe señalar que se cumplió la primer meta: ***Obtener el modelo dinámico y frecuencial de la estructura tipo viga conectada al absorbedor de vibración de alto rendimiento***, puesto que con este desarrollo es necesario para describir de forma adecuada el comportamiento del sistema.

La validación del modelo matemático de forma numérica del sistema se realizó con resultados reportados en la literatura. El problema de optimización que reduce el valor máximo de las funciones fue analizado y estudiado.

La optimización se llevó a cabo mediante la técnica de los puntos fijos extendida, que a su vez considera los teoremas de Vieta y Steen Krenk, los cuales son métodos continuamente utilizados para la resolución del problema planteado en este trabajo. La técnica de los puntos fijos extendida facilita de gran manera los cálculos, puesto que no es necesario

resolver un conjunto de ecuaciones no lineales, donde la solución de estas depende de forma directa de la capacidad de procesamiento de cómputo; en cambio, requiere solo del conocimiento de la suma y producto de sus raíces reales de las ecuaciones cuárticas, esta se desarrolló en el capítulo V, donde se aplicó la técnica y se obtuvieron soluciones cerradas para los valores óptimos del absorbedor propuesto, cumpliendo tanto el objetivo específico **aplicar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto**, como la meta de **implementar el criterio de optimización para el diseño óptimo del sistema absorbedor de vibraciones propuesto**.

En el capítulo V se obtuvieron las gráficas de respuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor de vibración no tradicional, con la finalidad de corroborar que los valores óptimos obtenidos sean correctos, cumpliendo de esta manera el objetivo específico **comparar el resultado de la implementación de la técnica de optimización para verificar que los resultados obtenidos sean correctos, mediante gráficas de la función de respuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor de vibración no tradicional**, así como también la meta de **realizar simulaciones numéricas considerando los parámetros óptimos obtenidos a partir del criterio de optimización**.

La hipótesis planteada fue **con la integración de la rigidez negativa, a la red mecánica no tradicional basada en inersor NIDVA-C3, se logrará incrementar tanto el ancho de banda como el rendimiento de la supresión de vibración en comparación al DVA clásico. Esto mediante la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida**. La cual fue demostrada en el capítulo VI con la obtención de los resultados que proponer el sistema NS-NIDVA-C3 y con su implementación se incrementa tanto el ancho de banda como el rendimiento de la supresión de vibración.

6.1 Trabajos futuros

Para complementar el trabajo desarrollado en este trabajo de tesis, se sugieren los siguientes estudios posteriores para mejorar determinados aspectos del sistema implementado y así incrementar los resultados obtenidos:

- Obtener el modelo matemático de la estructura tipo viga doblemente empotrada considerando diversos tipos de fuerzas de excitación, tales como fuerzas inerciales o aleatorias.
- Desarrollar la implementación física del modelo matemático de la estructura tipo viga con el NS-NIDVA-C3.
- Verificar los resultados obtenidos de forma teórica comparándolos contra los resultados experimentales, comprobando de esta manera la efectividad del sistema

propuesto en este trabajo. Es importante recalcar que este punto recomendable realizarlo en las instalaciones adecuadas, puesto que su implementación física es costosa y esto sería adecuado realizarlo por instituciones que se dediquen a esta rama de investigación, pues cuentan con la infraestructura necesaria.

- Implementar este sistema en el amortiguamiento automotriz y examinar la viabilidad de su uso en la industria automotriz.

A. Apéndice A

Modelo matemático

Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las energías asociadas al sistema de la figura 1.2.

- Para la viga:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \dots \quad (\text{A.1})$$

$$\dots f(x, t) + \{c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)]\} \delta(x - a)$$

- Para el DVA:

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)] \dots \quad (\text{A.2})$$

$$\dots + k_2[y_1(t) - y_2(a, t)] + k_{NS} y_1(t) = 0$$

- Para el inersor:

$$b[\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_3(t)] + k_2[y_2(t) - y_1(t)] = 0 \quad (\text{A.3})$$

- Para el amortiguador:

$$b[\ddot{y}_3(t) - \ddot{y}_2(t)] + c_2 \dot{y}_3(t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Donde b es la inercia, m_1 la masa del absorbedor y k_{NS} el resorte de rigidez negativa.

Se realiza el análisis para el amortiguador, considerando excitación de tipo armónica; entonces obtenemos los valores de la Tabla A.1.

$y_2(t) = Y_2 e^{i\omega t}$	$y_3(t) = Y_3 e^{i\omega t}$
$\dot{y}_2(t) = i\omega Y_2 e^{i\omega t}$	$\dot{y}_3(t) = i\omega Y_3 e^{i\omega t}$
$\ddot{y}_2(t) = -\omega^2 Y_2 e^{i\omega t}$	$\ddot{y}_3(t) = -\omega^2 Y_3 e^{i\omega t}$

Tabla A.1. Cambio de variables para el análisis considerando excitación de tipo armónica.

Sustituyendo los valores de la tabla en la ecuación (A.4), tenemos:

$$b(\omega^2 Y_2 - \omega^2 Y_3) e^{i\omega t} + i c_2 \omega Y_3 e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, Y_3 es igual a:

$$Y_3 = -\frac{b\omega Y_2}{i c_2 - b\omega} \quad (\text{A.6})$$

Apéndice A

Se realiza el procedimiento de forma similar al del amortiguador, ahora para el inersor, así el análisis para el inersor considerando excitación armónica es:

$$b - (\omega^2 Y_2 + \omega^2 Y_3) e^{i\omega t} + k_2 (Y_2 - Y_1) e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Se sustituye Y_3 ecuación (A.6) en la ecuación (A.7) y se resuelve para Y_2 , entonces:

$$Y_2 = -\frac{Y_1 k_2 (Ic_2 - b\omega)}{(I\omega c_2 + k_2)\omega b - Ic_2 k_2} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, de manera análoga se realiza el análisis del DVA considerando excitación armónica; así se tiene:

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 Y_1 e^{i\omega t} + c_1 (I\omega Y_1 - I\omega Y(a, \omega)) e^{i\omega t} + k_1 (Y_1 - Y(a, \omega)) e^{i\omega t} \\ + k_2 (Y_1 - Y_2) e^{i\omega t} + k_{NS} Y_1 e^{i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Se sustituye Y_2 ecuación (A.8) en la ecuación (A.9), considerando que $c_1 = 0$ y se resuelve para Y_1 , entonces:

$$Y_1 = -\frac{O}{L} \quad (\text{A.10})$$

Donde:

$$O = k_1 (Ib\omega^2 c_2 - Ic_2 k_2 + b\omega k_2) Y(a, \omega) \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} L = Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - Ic_2 ((b + m_1)k_2 + b(k_1 + k_{NS}))\omega^2 \\ - k_2 b(k_1 + k_{NS})\omega + Ik_2 c_2 (k_1 + k_{NS}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Considerando:

$$P = m_1 \omega^2 Y_1 - Ic_2 \omega Y_3 - k_{NS} Y_1 \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo Y_1, Y_2 y Y_3 , ecuaciones (A.6, A.8 y A.10), tomando además en cuenta que se puede expresar de forma simplificada a $P = -H(\omega)Y(a, \omega)$, se puede definir $H(\omega)$ como:

$$H = \frac{H_{num}}{T} \quad (\text{A.14})$$

Donde:

$$\begin{aligned} H_{num} = k_1 (Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1) - I((b + m_1)k_2 + bk_{NS})c_2 \omega^2 \\ - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

De esta manera, la ecuación (A.14) puede expresarse de forma simplificada como:

$$H = m_1 \omega^2 J \quad (\text{A.16})$$

Apéndice A

Donde J está dado por:

$$J = \frac{1}{m_1} \frac{1}{\omega^2} \frac{k_1(Ib\omega^4 c_2 m_1 + b\omega^3 k_2 m_1 - I((b + m_1)k_2 \dots \dots + bk_{NS})c_2 \omega^2 - b\omega k_2 k_{NS} + Ic_2 k_2 k_{NS})}{\dots + b(k_1 + k_{NS})\omega^2 - k_2 b(k_1 + k_{NS})\omega + Ik_2 c_2 (k_1 + k_{NS})} \quad (\text{A.17})$$

Se definen las siguientes variables adimensionales:

$$k_1 = m\omega_A^2 \quad k_2 = b\omega_c^2 \quad c_2 = 2\zeta_2 m\omega_A \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha = \frac{k_{NS}}{k_1} \quad \mu = \frac{b}{m} \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_A} \quad \eta = \frac{\omega_A}{\omega_c} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \quad \omega_i^2 = \frac{EI\beta_i^4}{\rho A} \quad (\text{A.20})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.18-A.20), la ecuación (A.17) queda expresada en su forma adimensional como:

$$J = \frac{(I\zeta_2 q^4 \eta^2 \alpha - \frac{1}{2} \mu q^3 \eta^2 \alpha \Omega - I\zeta_2 \Omega^2 ((\mu + 1)\eta^2 \dots \dots \Omega^2 (I\zeta_2 \eta^2 (\alpha + 1)q^4 - \frac{1}{2} \mu q^3 \eta^2 (\alpha + 1)\Omega \dots \dots + \alpha)q^2 + \frac{1}{2} \mu q \eta^2 \Omega^3 + I\zeta_2 \Omega^4)q^2}{\dots - I\zeta_2 ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha + 1)\Omega^2 q^2 + \frac{1}{2} \mu q \eta^2 \Omega^3 + I\zeta_2 \Omega^4)} \quad (\text{A.21})$$

A continuación, se sustituye la frecuencia de excitación del sistema $\omega = \Omega\omega_1$ en la ecuación (A.16), por lo tanto:

$$H = m_1 \omega_1^2 \Omega^2 J \quad (\text{A.22})$$

Donde:

$$J_1 = \Omega^2 J \quad (\text{A.23})$$

Sustituyendo la ecuación (A.23), se tiene entonces:

$$J = \frac{q^2(I\zeta_2 q^4 \eta^2 \alpha - \frac{1}{2} \mu q^3 \eta^2 \alpha \Omega - I\zeta_2 \Omega^2 ((\mu + 1) \eta^2 \dots}{I\zeta_2 \eta^2 (\alpha + 1) q^4 - \frac{1}{2} \mu q^3 \eta^2 (\alpha + 1) \Omega - I\zeta_2 \dots}{\dots + \alpha) q^2 + \frac{1}{2} \mu q \eta^2 \Omega^3 + I\zeta_2 \Omega^4)}{\dots ((\mu + 1) \eta^2 + \alpha + 1) \Omega^2 q^2 + \frac{1}{2} \mu q \eta^2 \Omega^3 + I\zeta_2 \Omega^4} \quad (\text{A.24})$$

La ecuación que rige el comportamiento dinámico del sistema es:

$$y(x, \omega) = G_1(x, \omega) - \frac{G_2(\alpha, \omega) G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H(\omega)} + G_1(\alpha, \omega)} \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo las ecuaciones correspondientes en la ecuación (A.25), se tiene:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL \omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dots \left\{ \frac{a_i}{\gamma_1^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right] \right\} \quad (\text{A.26})$$

Donde:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x) \phi_i(x) dx \quad (\text{A.27})$$

La ecuación (A.26) representa la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se tiene una excitación armónica. Considerando el primer modo de vibración, la ecuación (A.26) se reescribe como:

$$S(a, \Omega) = \frac{\phi_1 a_1}{(\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + \gamma_1^2) \rho AL \omega_1^2} \quad (\text{A.28})$$

Además, para el primer modo de vibración γ_1 ($\gamma_1 = 1$) es igual a la unidad, por tanto:

$$\frac{S(a, \Omega) \rho AL \omega_1^2}{\phi_1 a_1} = \frac{\phi_1 a_1}{\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1} \quad (\text{A.29})$$

Como se mencionó anteriormente, en la ecuación (A.29) la fuerza de excitación es armónica. De forma similar, la respuesta del sistema en estado estable con excitación armónica puede expresarse como:

Apéndice A

$$S = \frac{1}{\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1} \quad (\text{A.30})$$

Sustituyendo (A.24) en la ecuación (A.29), se obtiene una ecuación de la forma:

$$S = \frac{A + IB}{C + ID} \quad (\text{A.31})$$

Donde:

$$A = \eta^2((\alpha + 1)q^2 - \Omega^2)\Omega\mu q \quad (\text{A.32})$$

$$B = -2\zeta_2(\eta^2(\alpha + 1)q^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha + 1)\Omega^2 q^2 + \Omega^4) \quad (\text{A.33})$$

$$C = \eta^4 \mu \Omega (\alpha \beta q^4 \phi_1^2 + ((-\beta \phi_1^2 - \alpha - 1)\Omega^2 + \alpha + 1)q^2 + \Omega^4 - \Omega^2)q \quad (\text{A.34})$$

$$D = -2\zeta_2 \left(\alpha \beta \eta^2 q^4 \phi_1^2 + \left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta \phi_1^2)\eta^2 - \alpha \beta \phi_1^2 \right) \Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 + \left(((\mu + 1)\eta^2 + \beta \phi_1^2 + \alpha + 1)\Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \right) \Omega^2 q^2 - \Omega^6 + \Omega^4 \quad (\text{A.35})$$

B. Apéndice B

Puntos fijos extendida

Coefficientes necesarios para utilizar la técnica de los puntos fijos:

$$A = \eta^2((\alpha + 1)q^2 - \Omega^2)\Omega\mu q \quad (\text{B.1})$$

$$B = -2\zeta_2(\eta^2(\alpha + 1)q^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha + 1)\Omega^2q^2 + \Omega^4) \quad (\text{B.2})$$

$$C = \eta^4\mu\Omega(\alpha\beta q^4\phi_1^2 + ((-\beta\phi_1^2 - \alpha - 1)\Omega^2 + \alpha + 1)q^2 + \Omega^4 - \Omega^2)q \quad (\text{B.3})$$

$$D = -2\zeta_2 \left(\alpha\beta\eta^2q^4\phi_1^2 \right. \\ \left. + \left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta\phi_1^2)\eta^2 - \alpha\beta\phi_1^2 \right)\Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 \\ \left. + \left((\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + \alpha + 1 \right)\Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \right) \Omega^2 q^2 \\ - \Omega^6 + \Omega^4) \quad (\text{B.4})$$

Apéndice B

Frecuencias invariantes para el caso $\zeta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{1,2} = & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)(\beta\phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha \dots}}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 \dots} \\
 & \frac{\sqrt{\dots + 2 + \sqrt{\beta^2\phi_1^4 + 4\alpha^2\beta\phi_1^2 + 8\alpha\beta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2}}}{\dots + 2\alpha + 1}, \\
 & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{(-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)(\beta\phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha \dots}}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 \dots} \\
 & \frac{\sqrt{\dots + 2 + \sqrt{\beta^2\phi_1^4 + 4\alpha^2\beta\phi_1^2 + 8\alpha\beta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2}}}{\dots + 2\alpha + 1} \\
 & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-(-2\alpha\beta\phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2)(-\beta\phi_1^2 - 2\alpha^2 \dots}}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 \dots} \\
 & \frac{\sqrt{\dots + \sqrt{\beta^2\phi_1^4 + 4\alpha^2\beta\phi_1^2 + 8\alpha\beta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2} - 4\alpha - 2}}{\dots + 2\alpha + 1} \\
 & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-(-2\alpha\beta\phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2)(-\beta\phi_1^2 - 2\alpha^2 \dots}}{-\alpha\beta\phi_1^2 + \alpha^2 \dots} \\
 & \frac{\sqrt{\dots + \sqrt{\beta^2\phi_1^4 + 4\alpha^2\beta\phi_1^2 + 8\alpha\beta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2} - 4\alpha - 2}}{\dots + 2\alpha + 1}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Coefficientes de amortiguamiento óptimo:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{2A} = & \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\alpha + 1)\phi_1^2\beta((\beta\phi_1^2 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 2)\sqrt{\phi_1^2\beta(\beta\phi_1^2 + 4(\alpha + 1)^2)} + \beta^2\phi_1^4 \dots}}{\sqrt{(\alpha + 1)^4(4\beta\phi_1^2 \dots}} \\
 & \frac{\sqrt{\dots - 6\alpha^2 - 24\alpha^3 - 36\alpha^2 - 24\alpha - 6)(\beta\phi_1^2 - \frac{9}{4}\alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha - \frac{9}{4})}}{\sqrt{\dots - 9\alpha^2 - 18\alpha - 9)^2}}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Apéndice B

$$\zeta_{2B} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\alpha + 1)((\beta \phi_1^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2)\sqrt{\phi_1^2 \beta (\beta \phi_1^2 + 4(\alpha + 1)^2)} + \beta^2 \phi_1^4 \dots}}{\sqrt{(\alpha + 1)^4 (4\beta \phi_1^2 \dots}} \quad (B.7)$$

$$\frac{\sqrt{\dots - 6\alpha^2 - 24\alpha^3 - 36\alpha^2 - 24\alpha - 6)\beta \phi_1^2 (\beta \phi_1^2 - \frac{9}{4}\alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha - \frac{9}{4})}}{\sqrt{\dots - 9\alpha^2 - 18\alpha - 9)^2}}$$

$$\zeta_{2c} = \frac{\sqrt{\phi_1^2 (\alpha + 1) (\alpha \beta \phi_1^2 - (\alpha + 1)^2) (\beta \phi_1^2 - 4) \beta}}{\sqrt{(\beta \phi_1^2 - 4)^2 (\alpha + 1)^4}} \quad (B.8)$$

Bibliografía

- [1] Jorge Arturo Hernández Zárate, Alberto Servín Martínez, Adolfo M. Morales Tassinari, Genoveva Domínguez Sánchez, Héctor M. Gómez Acevedo. “Modelado y simulación de un absorbedor de vibraciones usando técnicas de control para un sistema mecánico”. En: Revista Electrónica en Ingeniería Mecánica 29,1-16 (2016).
- [2] Smith, M. “Synthesis of mechanical networks: the inerter”. En: IEEE Transactions on Automatic Control 47.10 (2002), págs. 1648–1662. DOI: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [3] I.A. Antoniadis, S.A. Kanarachos, K. Gryllias, I.E. Sapountzakis, KDamping: A stiffness-based vibration absorption concept. Journal of Vibration and Control, 24 (3) (2018) 588-606.
- [4] I.E. Sapountzakis, P.G. Tranakidis, I.A. Antoniadis, Implementation of the KDamper concept using disc springs. eprint arXiv preprint arXiv:1705.05622, (2017).
- [5] D. Chronopoulos, I. Antoniadis, T. Ampatzidis, Enhanced acoustic insulation properties of composite metamaterials having embedded negative stiffness inclusions. Extreme Mechanics Letters, 12 (2017) 48-54.
- [6] D. Chronopoulos, I. Antoniadis, M. Collet, M. Ichchou, Enhancement of wave damping within metamaterials having embedded negative stiffness inclusions. Wave Motion, 58 (2015) 165-179.
- [7] Yinlong Hu y Michael Z.Q. Chen. “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”. En: International Journal of Mechanical Sciences 99 (2015), págs. 297-307. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>.
- [8] Michael ZQ Chen y Yinlong Hu. Inerter and Its Application in Vibration Control Systems. Springer, 2019.
- [9] Kesavan Ramakrishnan y col. En: Multi-Objective Optimization of Road Vehicle Passive Suspensions with Inerter. Ago. de 2016, V003T01A007. DOI: 10.1115/DETC2016-59864.
- [10] G. L. García. “Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga”. Tesis de licenciatura. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, 2021.
- [11] Singeresu S. Rao. “Vibraciones mecánicas”. Pearson. 2012, pág. 13.
- [12] Marco Canales, William Paucar y Noel Juipa. “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica”. En: RevIA 7.4 (2020), págs. 5-9.

Bibliografía

- [13] Sen M. Kuo and Dennis R. Morgan, "Active Noise Control: A Tutorial Review", Proceedings of the IEEE, Vol. 87, No. 6, June 1999
- [14] C.R.Fuller and A.H.von Flotow, "Active Control of Sound and Vibration", IEEE Control Systems, December 1995.
- [15] Foster, JE, Vibraciones de Ingeniería, Stipes Publishing, Champaign, IL, 2004.
- [16] Ibrahim RA. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. J Sound Vib. 2008; 314:371–452.
- [17] J. Ormondroyd, Den Hartog J. P, "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber", Trans., ASME, Applied Mechanics 50 (1928), pp. 9-22.
- [18] M. B. Ozer, T. J. Royston, "Extending Den Hartog's Vibration Absorber Technique to Multi Degree-of-Freedom Systems", Journal of Vibration and Acoustics 127.4 (oct. de 2004), pp. 341 350. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1924642.
- [19] O. Nishihara, T. Asami, "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)", Journal of Vibration and Acoustics 124.4 (2002), pp. 576-582. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1500335.
- [20] T. Asami, O. Nishihara, "Closed-Form Exact Solution to H1 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems)", Journal of Vibration and Acoustics 125.3 (2003), pp. 398-405. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1569514.
- [21] T. Asami, O. Nishihara, A. M. Baz, "Analytical Solutions to H1 and H2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems", Journal of Vibration and Acoustics 124.2 (2002), pp. 284-295. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1456458.
- [22] T. Argentini, M. Belloli, P. Borghesani, "A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing", Journal of Vibration and Acoustics 137.3 (2015), pp. 034501. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.4029576.
- [23] H. M. Trent, "Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical systems," J. Acoust. Soc. Amer., vol. 27, pp. 500–527, 1955.
- [24] Malcolm C. Smith. "The Inerter: A Retrospective". En: Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems 3.1 (2020), págs. 361-391. doi: 10. 1146 / annurev - control - 053018-023917.
- [25] Y. Shen, Y. Liu, L. Chen, X. Yang, "Optimal design and experimental research of vehicle suspension based on a hydraulic electric inerter", Mechatronics 61 (2019), pp. 12-19, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.05.002>.
- [26] W.O. Wong, Y.L. Cheung. "Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion", Engineering Structures 30.1 (2008), pp. 282-286. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.007>.

Bibliografía

- [27] Y.L. Cheung, W.O. Wong. "H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber—Revisited and new results", *Journal of Sound and Vibration* 330.16 (2011). Computational Aero-Acoustics (CAA) for aircraft noise prediction - Part A, pp. 3901-3912. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.027>.
- [28] Y.L. Cheung, W.O. Wong. "H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation", *Journal of Sound and Vibration* 330.6 (2011), pp. 1039-1044. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.031>.
- [29] E. B. Hernández, J. G. M. Larios, J. Colín, J. Mayén, A.A. Flores-Hernández, M. A. Montiel, "A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber", *Journal of Sound and Vibration* <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115583>
- [30] I. Antoniadis, D. Chronopoulos, V. Spitas, and D. Koulocheris, "Hyper-damping properties of a stiff and stable linear oscillator with a negative stiffness element," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 346, pp. 37–52, 2015.
- [31] Wang, Y. C., & Lakes, R. S. (2004). Extreme stiffness systems due to negative stiffness elements. *American Journal of Physics*, 72(1), 40–50. DOI:10.1119/1.1619140
- [32] D.L. Platus, *Vibration Isolation System*, US Patent No. 6676101B2, 2004.
- [33] Li, H., Li, Y., & Li, J. (2020). Negative stiffness devices for vibration isolation applications: A review. *Advances in Structural Engineering*, 23(8), 1739–1755. DOI:10.1177/1369433219900311
- [34] T. D. Le, K. K. Ahn, "A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat", *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), pp. 6311-6335. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.039>.
- [35] B. Alsbushov, "Vibration protecting and measuring systems with quasi-zero stiffness". Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [36] A.A. Sarlis, D.T.R. Pasala, M.C. Constantinou, et al, "Negative stiffness device for seismic protection of structures", *En: Journal of Structural Engineering* 139.7 (2012), pp. 1124-1133.
- [37] T. D. Le, K. K. Ahn, "A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat", *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), pp. 6311-6335. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.039>.
- [38] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. International Thomson, 1997. ISBN: 9687529210,9789687529219.
- [39] Singiresu S. Rao. *Vibration of Continuous Systems*. English (US). John Wiley y Sons, mar. de 2007. ISBN: 0471771716. DOI: 10.1002/9780470117866.

Bibliografía

- [40] S Graham Kelly. Mechanical vibrations: theory and applications. Cengage learning Stamford, CT, 2012.
- [41] Singiresu S. Rao. Vibraciones mecánicas. spa. 5a . México: Pearson Educación, 2012. ISBN: 978-607-32-0952-6.
- [42] Clarence W. de Silva, ed. Vibration and Shock Handbook. CRC Press, jun. de 2005. DOI: 10.1201/9781420039894.
- [43] Goldstein, H. Mecánica clásica. 1a. España: Reverté, 1987. ISBN: 9788429143065.
- [44] K. Vogtmann V. I. Arnold A. Weinstein. Mathematical Methods Of Classical Mechanics. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989. ISBN: 9780387968902,0-387-96890-3,3-540- 96890-3.
- [45] E. Butkov. Mathematical Physics. A-W series in advanced physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1968. ISBN: 9780201007275.
- [46] Miztli Y Yépez Martínez. Mecánica analítica. UNAM, 2007.
- [47] Guillermo Abramson. Mecánica Clásica. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO – CNEA, 2018.
- [48] Leonard Meirovitch. Fundamentals of vibrations. Waveland Press, 2010.
- [49] David Carr Baird. Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Prentice-Hall Hispanoamericana México. DF, 1991.
- [50] Hibbeler, R. C. Ingeniería mecánica – estática. Decimosegunda edición. Pearson Educación, México, 2010. ISBN: 978-607-442-561-1.
- [51] W. D. Curtis, J. D. Logan, and W. A. Parker, “Dimensional Analysis and the Pi Theorem,” Linear Algebra Appl. 47, 117–126 (1982).
- [52] Miguel Ángel Bernal Yermanos. “Teorema Π -construyendo ciencia en el aula”. En: Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (2015).
- [53] Bahman Zohuri. Dimensional Analysis Beyond the Pi Theorem. Oct. de 2016. ISBN: 978 3319457253. DOI: 10.1007/978-3-319-45726-0.
- [54] Earl D. Rainville V; Víctor Hugo Ibarra Mercado; Richard E. Bedient; Oscar Alfredo Palmas Velasco; Phillip E. Bedient. Ecuaciones diferenciales. 8.a ed. Pearson Educación, 1998. ISBN: 9789701700693,9701700694.
- [55] Xiaoling Jin, Michael ZQ Chen y Zhilong Huang. “Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations”. En: International Journal of Mechanical Sciences 119 (2016), págs. 80-87.
- [56] James Victor Uspensky, JC Maquieira y JP Varela. Teoría de ecuaciones. Limusa, 1987.
- [57] Fórmulas de Vieta. (2015). http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A5_Vieta.pdf, págs. 1-3.
- [58] Israel Gelfand y Vladimir Retakh. “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”. En: The Gelfand Mathematical Seminars, 1993-1995. Springer. 1996, págs. 93-100.

Bibliografía

- [59] Eduardo Barredo y col. "Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers". En: International Journal of Mechanical Sciences 144 (2018), págs. 41-53. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>
- [60] Enrique Baquela y Andrés Redchuk. Optimización Matemática con R. Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de problemas. 2013.
- [61] James Stewart. Cálculo trascendentes tempranas. 8.a ed. CENGAGE Learning, 2017. ISBN: 9786075265490,607526549X
- [62] Edwin Joseph Purcell, Steven E Rigdon y Dale E Varberg. Cálculo. Pearson Educación, 2007.
- [63] Jacob Pieter Den Hartog. Mechanical vibrations. Courier Corporation, 1976.
- [64] Monserrat Pérez Martínez. (2024). Diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional de alto rendimiento dinámico basado en una red mecánica con inersor conectado a una estructura tipo viga. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.
- [65] B. P. Lathi. Signal Processing and Linear Systems. First Edition. Oxford University Press, USA, 2000. ISBN: 9780941413350,0941413357.
- [66] Steen Krenk. "Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper". En: Journal of Applied Mechanics 72.6 (mayo de 2005), págs. 936-942. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2062867.
- [67] D. J. Inman, Engineering Vibration, 5.a ed. EUA: Pearson, 2022.