



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**Sobre Números de Markov y Álgebras de
Conglomerado**

TESIS

para obtener el Título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Christopher Salvador Martínez Martínez

Directora de tesis:

Dra. Alicia Santiago Santos

Co-director de tesis:

Dr. Alfredo Nájera Chávez

Huajuapán de León, Oaxaca.

Marzo de 2025

*Dedicado a mi madre
y a mis hermanos.*

Agradecimientos

A mi amada madre, Rosario Martínez, le debo más de lo que las palabras pueden expresar. Su amor incondicional ha sido un refugio, su paciencia, mi guía, y sus sacrificios, los cimientos sobre los que se han construido el hombre que ahora soy. Cada esfuerzo suyo, cada desvelo y cada palabra de aliento han sido una gran prueba de su cariño que me ha acompañado en este camino. Gracias madre por toda mi vida.

A mis queridos hermanos, Karen Martínez y Rubén Martínez, su apoyo constante y palabras de aliento me han impulsado a alcanzar mis metas. Gracias por estar siempre a mi lado y creer en mí incluso en los momentos más difíciles.

A mis directores de tesis, Dr. Alfredo Nájera Chávez y Dra. Alicia Santiago Santos, les agradezco profundamente por su orientación experta, su paciencia y su dedicación inquebrantable. Sus consejos sabios y su guía han sido fundamentales en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco también a la familia Estrada Escamilla por su apoyo. Pero, en especial, quiero dedicar unas palabras a una mujer que desde su inicio ha sido un faro en mi camino: Esmeralda. Tú has sido mi luz en los momentos más oscuros, la voz que me ha recordado quién soy cuando las dudas nublaban mi mente. Gracias por tu apoyo, por cada una de tus palabras de aliento y por creer en mí incluso cuando yo mismo dudaba. Tu presencia ha sido un refugio, un abrazo que me ha dado fuerzas para seguir adelante.

GRACIAS.

Prefacio

Esta tesis, titulada “Sobre los números de Markov y álgebras de conglomerado”, es el resultado de una investigación profunda de trabajos hechos en los campos de la teoría de números y el álgebra. En el desarrollo de esta tesis se explora la intersección entre los números de Markov y las álgebras de conglomerado, analizando sus relaciones y propiedades.

La motivación detrás de este trabajo es buscar una comprensión más profunda de los números de Markov y su conexión con la teoría de las álgebras de conglomerado, con el objetivo de promover los diferentes avances en estas áreas además demostrar que toda terna de Markov puede obtenerse a partir de un conglomerado por medio de un concepto llamado “mutación”. A lo largo de este proceso, se abordan desafíos teóricos y se aplican métodos matemáticos para estudiar las propiedades de los números de Markov y su relación con el álgebra de conglomerado.

Espero que este trabajo no sólo contribuya al avance del conocimiento en los campos de la teoría de números y el álgebra, sino que también sirva como punto de partida para futuras investigaciones en estas fascinantes áreas de las matemáticas.

Índice general

Tabla de símbolos	IX
Introducción	1
1. El teorema de Markov y la conjetura de unicidad	3
1.1. Una breve semblanza de Markov	3
1.2. Los números de Markov y la ecuación de Markov	4
1.3. El espectro de Lagrange	24
1.4. El teorema de Markov	30
1.5. Conjetura de unicidad	33
2. Árboles de Markov	35
2.1. Ternas de Markov	42
2.2. Números de Fibonacci y números de Pell	53
2.3. Árbol de Farey	57
3. Álgebras de conglomerado	69
3.1. Carcajes	70
3.2. El árbol n -regular	78
3.3. Semillas	82
3.4. Álgebras de conglomerado	92
4. El álgebra de conglomerado de Markov	97
Conclusiones	103
Bibliografía	105

Tabla de símbolos

Símbolo	Significado
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{Q}	Conjunto de los números racionales.
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{Z}^3	Conjunto todos los triples de números enteros.
$\mathbb{Z}_{>0}$	Conjunto de todos los números enteros positivos.
$\mathbb{Q}_{(0,1)}$	Conjunto de fracciones irreducibles en el intervalo abierto $(0, 1)$.
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto de los números reales mayores que cero.
$n \mid m$	n divide a m para $n, m \in \mathbb{Z}$.
<i>Ergo</i>	Por lo tanto, luego, pues.
\in	Pertenece a.
$[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$	Fracción continua finita.
$[a_1, a_2, \dots, a_n]$	Fracción continua simple.
$\lfloor \alpha_n \rfloor$	La función piso, para $\alpha_n \in \mathbb{R}$ asigna el mayor número entero igual o menor que α_n .
$a \approx b$	a y b son aproximadamente iguales.

Símbolo	Significado
$a \neq b$	a es diferente a b .
\mathcal{M}	La sucesión de números de Markov.
$a \equiv b \pmod{m}$	a es congruente con b módulo m .
\forall	Para todo.
$a \leq b$	a es menor o igual que b .
$a < b$	a es menor que b .
\emptyset	Conjunto vacío.
$C(x, y)$	Camino de una gráfica que parte del vértice x y llega al vértice y .
$\text{máx}(a, b, c)$	El número máximo entre los números a, b, c .
$\text{mcd}(a, b)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$	El máximo común divisor es el mayor número entero que puede dividir a a y b sin dejar residuo.
■	Queda demostrado.

Introducción

El tema principal de este trabajo es la relación entre las álgebras de conglomerado y la ecuación de Markov. Dicha relación ha sido objeto de estudio tanto en Álgebra como en Teoría de Números a lo largo de las últimas dos décadas [10]. A continuación describimos brevemente el contexto en el cuál se enmarca nuestra investigación.

La ecuación de Markov, es una ecuación diofántica que lleva el nombre del matemático ruso Andrey Markov, quien la estudió por primera vez a finales del siglo XIX. La ecuación de Markov tiene la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Esta ecuación es de particular interés debido a la relevancia que sus soluciones enteras positivas, conocidas como ternas de Markov, tiene en teoría de números y en particular en la aproximación de los números irracionales por medio de números racionales. Estas ternas tienen propiedades notables y han aparecido tanto en teoría de números como fuera de ésta [15].

Por otro lado, las álgebras de conglomerado son una clase particular de álgebras conmutativas introducidas por Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky a principios de la década de 2000. Originalmente fueron introducidas para estudiar bases canónicas de grupos cuánticos. Más aún, desde su introducción, se descubrió que estas álgebras están estrechamente relacionadas con la geometría algebraica y la combinatoria (vea [10] y [29]). Sin embargo, a lo largo de los últimos 20 años se ha descubierto que las álgebras de conglomerado juegan un papel distinguido en contextos tan diversos tales como la teoría de números, la teoría de representaciones de álgebras asociativas, la geometría (algebraica, hiperbólica, simpléctica y tropical), la teoría de nudos y la física teórica, solo por mencionar algunos.

La conexión entre las álgebras de conglomerado y la ecuación de Markov se estableció por primera vez en 2004, cuando Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky

descubrieron que las soluciones de la ecuación de Markov están relacionadas con ciertas estructuras combinatorias llamadas “conglomerados”. Estos conglomerados son los elementos fundamentales en la construcción de las álgebras de conglomerado y tienen propiedades notables [14].

A través de esta conexión, se descubrió que las ternas de Markov están estrechamente relacionadas con las configuraciones de conglomerados. En particular, se encontró una correspondencia entre las ternas de Markov y los conglomerados iniciales de un álgebra de conglomerado particular, que hoy en día se le conoce como el álgebra de conglomerado de Markov, ver [10].

Desde entonces se han investigado en profundidad las relaciones entre las álgebras de conglomerado y la ecuación de Markov. También se han estudiado las propiedades estructurales de las álgebras de conglomerado en relación con las soluciones de la ecuación de Markov, y se han utilizado técnicas combinatorias y algebraicas para explorar estas conexiones.

La estructura del presente trabajo de tesis es la siguiente.

En el Capítulo 1 se presenta un teorema de Markov que explica la importancia que tiene la ecuación de Markov con la teoría de aproximación de números irracionales por medio de números racionales con un denominador acotado. También se enuncian algunas propiedades importantes de los números de Markov, además se presenta y enuncia la famosa conjetura de unicidad que guardan las soluciones de la ecuación de Markov. Dicha conjetura fue enunciada por Frobenius hace más de 100 años y hoy en día sigue abierta.

En el Capítulo 2 se muestra el árbol de Markov, que sirve para modelar la estructura combinatoria que poseen las ternas solución de la ecuación de Markov, así como su relación con diferentes sucesiones de números muy conocidas, a saber, la sucesión de números de Fibonacci y de Pell.

En el Capítulo 3 se introducen los conceptos claves para lograr definir a las álgebras de conglomerado.

En el Capítulo 4 se expone la relación que existe entre las álgebras de conglomerado con la ecuación de Markov de manera ilustrativa con el carcaj de Markov asociado.

Por último, en la parte de Conclusiones explicamos los avances en el entendimiento de la conjetura de unicidad que se han logrado gracias a la conexión entre las álgebras de conglomerado y los números de Markov.

Capítulo 1

El teorema de Markov y la conjetura de unicidad

1.1. Una breve semblanza de Markov



A.A. Markov.

Imagen tomada de:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/AAMarkov.jpg>

Andrey Andreyevich Markov, nacido en 1856 en Rusia, fue un destacado matemático que pasó la mayor parte de su vida en San Petersburgo. Demostró un extraordinario talento matemático desde muy temprana edad, ganando premios cuando aún era estudiante [5]. Es reconocido por su trabajo pionero en probabilidad y procesos estocásticos. Así mismo, Markov realizó contribuciones significativas en el campo de la estadística y la teoría de números. Sin embargo, su mayor reconocimiento proviene de la creación de las cadenas de Markov, modelos matemáticos que describen una secuencia de eventos en la que la probabilidad de

que ocurra un evento futuro depende únicamente del evento actual [8].

Cabe mencionar que Markov también suele escribirse como “Markoff”. Puesto que Markov era un matemático ruso, ambas formas de escribir pueden considerarse correctas o, mejor dicho, incorrectas. En la literatura, parece que Markoff se usa más en trabajos relacionados con la teoría de números, y Markov se usa a menudo en otros campos, como la teoría de la probabilidad, donde da nombre a las ya mencionadas cadenas y procesos de Markov [15].

A lo largo de su carrera, Markov publicó numerosos artículos y libros que han dejado una huella duradera en la teoría de la probabilidad y la estadística. Alguno de estos son:

1. A. A. Markov. Extension of the Law of Large Numbers to Dependent Quantities (in Russian). *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, 2nd series, 1906 [27].
2. A. A. Markov. An Example of Statistical Investigation of the Text Eugene Onegin Concerning the Connection of Samples in Chains (in Russian). *Bulletin of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg*, 1912 [26].
3. A. A. Markov, Aleksandr Aleksandrovich Chuprov, and Kh. O. Ondar, The correspondence between A.A. Markov and A.A. Chuprov on the theory of probability and mathematical statistics. 1981 [25].

Su trabajo ha sido fundamental en el desarrollo de los procesos estocásticos y ha encontrado aplicaciones en campos tan diversos como la biología, la sociología y la lingüística [18].

Andrey Andreyevich Markov falleció en 1922, pero su legado de investigaciones importantes sigue influyendo en la teoría matemática moderna [8].

1.2. Los números de Markov y la ecuación de Markov

A lo largo de esta sección se van a introducir varios conceptos de teoría de fracciones continuas con la finalidad de trabajar rigurosamente con las aproximaciones de números irracionales por números racionales. La fuente principal es el libro [11], del cual se extraen los conceptos principales, así como algunas de sus

propiedades.

En el extenso ámbito de la teoría de números, las fracciones continuas y los números irracionales desempeñan un papel fundamental [13]. Las fracciones continuas, una representación alternativa de los números reales, se empezaron a estudiar en los siglos XVII y XVIII, y su comprensión ha llevado a importantes descubrimientos tanto en matemáticas como sus aplicaciones [11].

Las fracciones continuas son expresiones matemáticas que representan de manera única números reales tanto racionales como irracionales, esto con la finalidad de estudiar sus propiedades aritméticas más que la expresión en decimales puesto que la representación decimal presenta ciertas dificultades al tratar con números irracionales, los cuales requieren una secuencia infinita de dígitos. Estas representaciones continuas de los números han sido utilizadas en la resolución de ecuaciones, en la teoría de aproximaciones, en la teoría de números y en la criptografía, entre otros campos [34].

Definición 1.2.1. Las **fracciones continuas finitas** se denotan y se definen como expresiones de la forma:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n] := a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{\dots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}.$$

Con $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Además, si todos los a_i con $i \in \mathbb{N}$ son enteros y $b_i = 1$ con $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$[a_1, \dots, a_n] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

es una **fracción continua simple** [11].

Teorema 1.2.1. *Si x es un número racional, es posible expresarlo como una fracción continua simple.*

Demostración:

Sea $x = \frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$, con $u_0 \in \mathbb{Z}$ y $u_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Como $u_1 > 0$, por el algoritmo de la división existen $a_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $u_0 = u_1 a_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < u_1$. Por tanto

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{r_1}{u_1},$$

con $0 \leq r_1 < u_1$. Para $r_1 \neq 0$, se tiene que $\frac{r_1}{u_1} = \frac{1}{\frac{u_1}{r_1}}$, al realizar la sustitución correspondiente en la ecuación previamente escrita, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{r_1}{u_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{u_1}{r_1}}.$$

Como $0 < r_1$, nuevamente, por el algoritmo de la división existen $a_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{u_1}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

con $0 \leq r_2 < r_1$. Siguiendo este procedimiento, se obtiene una secuencia de residuos r_i tales que $r_{i+1} < r_i$, y dado que son números enteros positivos, forman un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , por el principio del buen orden, este subconjunto de \mathbb{N} tiene un mínimo, es decir, se concluye que este proceso es finito. De esta manera, se establece la fracción continua correspondiente

$$\frac{u_0}{u_1} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Ergo, todo número racional x puede expresarse como fracción continua simple. ■

Ejemplos 1.2.1.

1. La fracción $\frac{17}{10}$ se puede desarrollar como fracción continua simple como $\frac{17}{10} = [1, 1, 2, 3]$.

En efecto, se comienza dividiendo el numerador entre el denominador:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}.$$

Ahora, se considera la fracción $\frac{7}{10}$. Para obtener el siguiente coeficiente, al invertir la fracción y tomar su parte entera:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}.$$

Ahora, al considerar la fracción $\frac{3}{7}$. Para obtener el siguiente coeficiente, nuevamente se invierte la fracción y al tomar su parte entera:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Finalmente, se considera la fracción $\frac{1}{3}$. Para obtener el siguiente coeficiente, de igual manera se invierte la fracción y se toma su parte entera:

$$\frac{3}{1} = 3.$$

Por tanto, los coeficientes de la fracción continua son $[1, 1, 2, 3]$, así

$$\begin{aligned} [1, 1, 2, 3] &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} \\ &= 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}. \end{aligned}$$

2. La fracción $\frac{17}{10}$ se puede desarrollar como fracción continua simple como $\frac{17}{10} = [1, 1, 2, 2, 1]$.

En efecto, en primer lugar se divide el numerador entre el denominador:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}.$$

Ahora, se considera la fracción $\frac{7}{10}$. Para obtener el siguiente coeficiente, se

invierte la fracción y se toma su parte entera:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}.$$

Ahora, se toma en cuenta la fracción $\frac{3}{7}$. Para calcular el siguiente coeficiente, se ha de invertir nuevamente la fracción y considerar solo su parte entera:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Finalmente, se analiza la fracción $\frac{1}{3}$. Para obtener el siguiente coeficiente, se invierte la fracción y se toma su parte entera:

$$\frac{3}{1} = 3 = 2 + 1.$$

Por tanto, los coeficientes de la fracción continua son $[1, 1, 2, 2, 1]$, así

$$\begin{aligned} [1, 1, 2, 2, 1] &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}. \end{aligned}$$

Al examinar detenidamente los ejemplos presentes, se observa que la fracción $\frac{17}{10}$ puede expresarse de dos maneras distintas, esto nos lleva a la conclusión subsiguiente, la cual postula que existen al menos dos expansiones posibles de un número racional en su forma de fracción continua simple.

Teorema 1.2.2 (Representación Alternativa de Fracciones Continuas Simples). Sean $\frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$, con $u_0 \in \mathbb{Z}$, $u_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $[a_1, \dots, a_n]$ una representación en fracción continua simple. Entonces, existe al menos otra representación alternativa

de dicha fracción, es decir,

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{u_0}{u_1} = [a_1, \dots, a_n - 1, 1].$$

Demostración:

Sea $[a_1, \dots, a_n]$ la representación en fracción continua simple de $\frac{u_0}{u_1}$ con $\frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$.

Nótese que

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_n - 1, 1] &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}}}} \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n - 1 + 1}}}} \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \\ &= [a_1, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

Nótese que no importa si $a_n = 1$ pues al final de su expresión en fracción continua simple resulta:

$$a_n - 1 + \frac{1}{1} = 1 - 1 + \frac{1}{1} = 1,$$

por lo que la fracción no se indetermina.

Dado $[a_1, \dots, a_n]$ es una representación en fracción continua simple de

$$\frac{u_0}{u_1} \text{ y } [a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_n - 1, 1]$$

se tiene que $[a_1, \dots, a_n - 1, 1]$ también es representación en fracción continua simple de $\frac{u_0}{u_1}$. Ergo, todo número racional tiene al menos dos formas de representación en fracción continua simple. ■

Los números irracionales, han cautivado a matemáticos y entusiastas por igual debido a sus propiedades excepcionales. Desde la demostración de la existencia de números irracionales por los antiguos matemáticos griegos hasta el descubrimiento de números trascendentes, los números irracionales han desafiado y enriquecido nuestra comprensión de los números reales [11].

El estudio de las propiedades de los números irracionales ha llevado al desarrollo de conceptos fundamentales en matemáticas, como la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, la trascendencia de números como π y e , y la conexión entre números irracionales y fracciones continuas [12].

Definición 1.2.2. *Las fracciones continuas infinitas simples se denotan y se definen como:*

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observaciones 1.2.1.

1. Para obtener una representación adecuada para algún $x \in \mathbb{R}$, se establece una secuencia a_n por medio de un proceso recursivo. Inicialmente, se asigna $\alpha_1 = x$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$ se define

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

Utilizando la secuencia α_n así generada, se determinan los coeficientes correspondientes a la fracción continua de x como $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$.

2. A partir de la construcción recursiva de la sucesión a_n , es posible analizar el comportamiento de sus convergentes. En virtud del Teorema 9.13 el cual se encuentra en la página 222 del libro *Elementary Introduction to Number Theory* [24], se garantiza que toda sucesión generada por una fracción continua finita simple es convergente, lo que confirma la validez del método para representar cualquier número real mediante fracciones continuas.

Nota 1.2.1. Si en algún momento se cumple que $\alpha_n = a_n$, entonces la fracción continua será finita y representará un número racional, lo cual concuerda con las Definición 1.2.1. Es por eso, que las fracciones continuas infinitas simples son representaciones de números irracionales.

A continuación, se procederá a calcular una representación para el número π por medio de la aplicación de su correspondiente fracción continua. Esta metodología permite obtener estimaciones sucesivas que se acercan al valor real de π con un grado de precisión variable.

Ejemplo 1.2.1. Considerando la vasta cantidad de más de 22 billones de cifras conocidas de π , se considerarán únicamente las primeras nueve, es decir,

$$\pi \approx 3.141592654.$$

Sea $x = \pi \in \mathbb{R}$. Así, $\alpha_1 = \pi$ con lo cual, el primer número de la secuencia es:

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

Luego,

$$\alpha_{1+1} = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\pi - 3} \approx 7.062513285.$$

Por tanto, el segundo número de la secuencia es:

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 7.062513285 \rfloor = 7.$$

El cálculo del tercer término de la secuencia se efectúa de la siguiente manera

$$\alpha_{2+1} = \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} \approx \frac{1}{7.062513285 - 7} \approx 15.99659976,$$

$$a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 15.99659976 \rfloor = 15.$$

El cuarto término de la secuencia se determina mediante el siguiente cálculo

$$\alpha_{3+1} = \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} \approx \frac{1}{15.99659976 - 15} \approx 1.003411841,$$

$$a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 1.003411841 \rfloor = 1.$$

Prosiguiendo de esta manera, se obtiene una fracción continua infinita que representa el valor de π , es decir,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, \dots] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + 1}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{113}{16} = \frac{355}{113} \approx 3.14159292.$$

Por lo tanto,

$$\pi \approx 3.141592654 = [3, 7, 15, 1, \dots] \approx 3.14159292.$$

Como se ha mencionado previamente, el manejo de números decimales conlleva ciertas complicaciones, pues se puede solo aproximar la fracción continua con un margen de "error". Por ende, el objetivo es minimizar dicho margen de error.

Esta reconocida aproximación de π es altamente precisa, dado que el error asociado es significativamente bajo, de orden de 10^{-7} [11].

Ejemplo 1.2.2. Dado el gran número de dígitos conocidos para $\sqrt{2}$ en este análisis, solo se considerarán las primeras ocho cifras, es decir,

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356.$$

Sea $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Así, $\alpha_1 = \sqrt{2}$ con lo cual, el primer número de la secuencia es:

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1.$$

Para el segundo elemento de la secuencia:

$$\alpha_{1+1} = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} \approx \frac{1}{1.41421356 - 1} = 2.41422135,$$

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 2.41422135 \rfloor = 2.$$

Para el tercer elemento de la secuencia:

$$\alpha_{2+1} = \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} \approx \frac{1}{2.41422135 - 2} = 2.41416817,$$

$$a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 2.41416817 \rfloor = 2.$$

Para el cuarto elemento de la secuencia:

$$\alpha_{3+1} = \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} \approx \frac{1}{2.41416817 - 2} = 2.41447815,$$

$$a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = \lfloor 2.41447815 \rfloor = 2.$$

Continuando de esta manera, se obtiene que una fracción continua infinita periódica, es decir, después del 1 solo hay 2 en la sucesión:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}.$$

A continuación, se presentará un ejemplo que ilustra la manera en que una secuencia, establecida conforme a la Definición 1.2.2, produce un número irracional.

Ejemplo 1.2.3. Se pretende encontrar el valor de $x \in \mathbb{R}$, el cual corresponde a la fracción continua definida como:

$$x = [b, b, b, b, \dots] = b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{\ddots}}}.$$

Primero, nótese que x puede ser reescrito como

$$x = b + \frac{1}{x}.$$

Al multiplicar por x en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$x^2 = xb + 1.$$

Finalmente, se obtiene una ecuación homogénea de segundo grado:

$$x^2 - xb - 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática con la fórmula general:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Sin embargo, dado que se está buscando una solución positiva que corresponda a la fracción continua, se elige la solución positiva:

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Observación 1.2.1. En el Ejemplo 1.2.3 si se toma a $b = 1$, entonces se obtiene

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

que es conocida como la razón áurea, por lo tanto, la fracción continua de la razón áurea es:

$$\varphi = [1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}.$$

Definición 1.2.3. Una **ecuación diofántica**, se refiere a una ecuación algebraica que tiene dos o más variables desconocidas y cuyos coeficientes son números enteros. El objetivo de estas ecuaciones es encontrar soluciones que sean enteras o naturales.

Una **ecuación diofántica lineal** se define como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

dónde $a_i, x_i, c \in \mathbb{Z}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 1.2.3.

1. La ecuación diofántica lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c, \quad (1.1)$$

tiene solución entera si y solo si

$$\text{mcd}(a_1, a_2) | c.$$

2. Si $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ y además (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1.1), entonces (x_0, x_1) es la solución de la ecuación (1.1) si y solo si existe $n \in \mathbb{Z}$ ta que

$$x_0 = x'_0 + a_2n,$$

$$x_1 = x'_1 - a_1n.$$

Demostración:

1. \Rightarrow] Se asume que la ecuación diofántica lineal (1.1) tiene solución entera y sea $d = \text{mcd}(a_1, a_2)$.

Como la ecuación (1.1) tiene solución entera, se tiene que existen $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1x_0 + a_2x_1 = c.$$

Por otra parte, como d es un divisor común de tanto a_1 como de a_2 , entonces existen $a'_1, a'_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1 = da'_1,$$

$$a_2 = da'_2.$$

En consecuencia, resulta

$$c = a_1x_0 + a_2x_1 = da'_1x_0 + da'_2x_1 = d(a'_1x_0 + a'_2x_1),$$

puesto que $a'_1, a'_2, x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ y que \mathbb{Z} es cerrado bajo la suma, se obtiene que $a'_1x_0 + a'_2x_1 = k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, queda una expresión del tipo $c = kd$, ergo $d|c$, es decir, $\text{mcd}(a_1, a_2) | c$.

\Leftarrow] Se asume que $d|c$, con $d = \text{mcd}(a_1, a_2)$.

Dada la hipótesis, se tiene que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = kd.$$

Por otro lado, según se establece el algoritmo de Euclides (véase la página web [22]), existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = sa_1 + ta_2,$$

multiplicando ambos lados de esta igualdad por k , se obtiene

$$kd = k(sa_1 + ta_2) = ksa_1 + kta_2 = (ks)a_1 + (kt)a_2,$$

puesto que $k, s, t \in \mathbb{Z}$ y que \mathbb{Z} es cerrado bajo multiplicación, se obtiene que $ks, kt \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, queda una expresión del tipo $c = (ks)a_1 + (kt)a_2$, ergo la ecuación (1.1) tiene solución entera.

2. Se asume que $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ y además que (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1.1).

\Rightarrow] Si se supone que (x_0, x_1) es la solución de la ecuación (1.1), entonces

$$a_1x_0 + a_2x_1 = c.$$

Además, como (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación (1.1), se tiene

$$a_1x'_0 + a_2x'_1 = c.$$

Restando estas igualdades,

$$a_1x_0 + a_2x_1 - (a_1x'_0 + a_2x'_1) = c - c,$$

$$a_1x_0 + a_2x_1 - a_1x'_0 - a_2x'_1 = 0,$$

$$a_1(x_0 - x'_0) - a_2(x'_1 - x_1) = 0.$$

Dado que $x_0, x'_0, x'_1, x_1 \in \mathbb{Z}$ y \mathbb{Z} es cerrado bajo la suma, se tiene que $x_0 - x'_0 = k_0$, $x'_1 - x_1 = k_1$ con $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo y despejando a k_0 , se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 k_0 - a_2 k_1 &= 0, \\ a_1 k_0 &= a_2 k_1, \end{aligned}$$

Por lo que

$$a_1 \mid a_2 k_1,$$

pero como $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$, por el lema de Euclides [1] se tiene que

$$a_1 \mid k_1,$$

así, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $k_1 = a_1 n$, es decir,

$$x'_1 - x_1 = a_1 n,$$

despejando a x_1 , se tiene

$$x'_1 - a_1 n = x_1.$$

Como $k_0 = \frac{a_2 k_1}{a_1}$, se tiene,

$$x_0 - x'_0 = \frac{a_2(x'_1 - x_1)}{a_1} = \frac{a_2(x'_1 - (x'_1 - a_1 n))}{a_1} = \frac{a_2(a_1 n)}{a_1} = a_2 n,$$

despejando a x_0 , se tiene

$$x_0 = x'_0 + a_2 n.$$

\Leftrightarrow] Si se supone que para $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 = x'_0 + a_2 n$ y $x_1 = x'_1 - a_1 n$.

Despejando a x'_0 y x'_1 , de sus respectivas ecuaciones, se tiene

$$x'_0 = x_0 - a_2 n \text{ y } x'_1 = x_1 + a_1 n.$$

Como (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1.1), se tiene $a_1 x'_0 + a_2 x'_1 = c$, sustituyendo se obtiene

$$c = a_1 x'_0 + a_2 x'_1 = a_1(x_0 - a_2 n) + a_2(x_1 + a_1 n) = a_1 x_0 - a_1 a_2 n + a_2 x_1 + a_2 a_1 n,$$

por tanto

$$c = a_1x_0 + a_2x_1.$$

Ergo, (x_0, x_1) es solución de la ecuación diofántica lineal (1.1). ■

Como se ilustra en el Ejemplo 1.2.3, las fracciones continuas pueden ser relevantes para la resolución de ecuaciones diofánticas lineales. Para ilustrar este hecho, se procede a examinar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. *Para encontrar la solución de la ecuación diofántica*

$$20x_1 + 17x_2 = 17,$$

se puede emplear el método de las fracciones continuas.

Primero, se observa que el $\text{mcd}(20, 17) = 1$, claramente $1|17$ por el primer inciso del Teorema 1.2.3, la ecuación tiene solución.

Ahora, se procede a determinar la fracción continua finita simple correspondiente al número $\frac{20}{17}$:

$$\frac{20}{17} = 1 + \frac{3}{17},$$

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Por tanto,

$$\frac{20}{17} = [1, 5, 1, 2].$$

En seguida, se procede a eliminar el último término de la sucesión, así se obtiene la siguiente fracción continua $[1, 5, 1]$ que representa el número:

$$[1, 5, 1] = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{5 + 1} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

De esta forma se obtiene

$$20(6) - 17(7) = 1.$$

Al multiplicar por 17 de ambos lados de la ecuación y agrupar, resulta:

$$20(102) + 17(-119) = 17.$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación es $(x'_0, x'_1) = (102, -119)$, así, por el segundo inciso del Teorema 1.2.3, la solución general es de la forma

$$x_0 = 102 + 17n \text{ y } x_1 = -119 - 20n \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Observación 1.2.2. En el Ejemplo 1.2.2 se analizó el caso de una fracción simple infinita periódica, sin embargo, cuando se trunca en ciertos términos de la secuencia ocurre algo interesante:

Si se trunca en el primer término:

$$\sqrt{2} \approx [1] = \frac{1}{1}.$$

Si se trunca en el segundo término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Si se trunca en el tercer término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}.$$

Si se trunca en el cuarto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}.$$

Si se trunca en el quinto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}.$$

Si se trunca en el sexto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70}.$$

Si se trunca en el séptimo término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{239}{169}.$$

Al continuar con el procedimiento de truncamientos de la fracción continua de la raíz cuadrada de 2, se observa que algunos de los denominadores de las fracciones presentan números peculiares.

Los números marcados en rojo son números de Markov, que se definirán en breve.

El matemático ruso Andrey Markov los investigó a finales del siglo XIX. En particular, demostró un teorema destacado sobre el valor mínimo de una forma cuadrática binaria real que ahora se conoce como el teorema de Markov [5].

En el ámbito de la investigación matemática que se aborda, es de sumo interés la siguiente ecuación diofántica:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3. \quad (1.2)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Markov y es de especial relevancia debido a sus soluciones enteras denominadas números de Markov.

Definición 1.2.4. Las **ternas de Markov** describen las ternas solución $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ de la ecuación (1.2) con $m_i > 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Los **números de Markov** son aquellos números que aparecen en alguna terna de Markov. La sucesión de números de Markov se denota por \mathcal{M} .

Los primeros números de Markov son,

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, \dots\},$$

los cuales figuran como entradas de las siguientes ternas de Markov

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 5), (1, 5, 13), (2, 5, 29), (1, 13, 34), (1, 34, 89), (2, 29, 169), \\ (5, 13, 194), (1, 89, 233), (5, 29, 433), (1, 233, 610), (2, 169, 985), (13, 34, 1325), \dots$$

Durante la sesión de problemas de la *19th International Fibonacci Conference*, se planteó la pregunta de si el coeficiente 3 en la ecuación de Markov podría ser reemplazado por cualquier otro número $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, y si este nuevo valor de k también generaría una terna de Markov como solución [32].

El siguiente resultado garantiza que los únicos casos interesantes son cuando $k = 1$ y $k = 3$, más aún, las soluciones para $k = 1$ están completamente determinadas por el caso $k = 3$ y viceversa.

Proposición 1.2.1. *La ecuación*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = kx_1x_2x_3, \tag{1.3}$$

tiene soluciones positivas solo para $k = 1$ y $k = 3$. Para $k = 1$, (b_1, b_2, b_3) es una solución si y solo si 3 divide a b_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\left(\frac{b_1}{3}, \frac{b_2}{3}, \frac{b_3}{3}\right)$ es una solución de la ecuación de Markov para $k = 3$.

Demostración:

Nótese que si se multiplica por una constante k a los elementos de una solución (a_1, a_2, a_3) de la ecuación (1.3). Al multiplicar cada componente por una constante

k , se obtiene que

$$\begin{aligned}
 (ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2 &= k^2a_1^2 + k^2a_2^2 + k^2a_3^2 \\
 &= k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
 &= k^2(ka_1a_2a_3) \\
 &= k^3a_1a_2a_3 \\
 &= (ka_1)(ka_2)(ka_3),
 \end{aligned}$$

dado que (a_1, a_2, a_3) es una solución de la ecuación (1.3), entonces, (ka_1, ka_2, ka_3) es una solución de la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2x_3$.

En contraste, suponga que (b_1, b_2, b_3) es una solución de la ecuación

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1b_2b_3.$$

Al considerar esta ecuación en el contexto de aritmética modular con módulo 3, se observa que b_i^2 para $i \in \{1, 2, 3\}$, es congruente con 0 módulo 3 si b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ es múltiplo de 3, y es congruente con 1 módulo 3 en caso contrario, es decir,

$$\begin{cases} b_i^2 \equiv 0(\text{mod } 3) & \text{si } 3|b_i \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}, \\ b_i^2 \equiv 1(\text{mod } 3) & \text{si } 3 \nmid b_i \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Si al menos un b_i^2 para $i \in \{1, 2, 3\}$ es congruente con 0 módulo 3 y otro b_j^2 para $j \in \{1, 2, 3\}$ es congruente con 1 módulo 3, entonces el lado derecho de la ecuación sería congruente con 0 módulo 3, mientras que el lado izquierdo no lo sería, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todos los b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ deben ser múltiplos de 3.

Dado que b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ es múltiplo de 3, se puede establecer que

$$a_i = \frac{b_i}{3}, \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Esto nos lleva a que

$$\begin{aligned}
 a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \left(\frac{b_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{b_1^2}{9} + \frac{b_2^2}{9} + \frac{b_3^2}{9} \\
 &= \frac{1}{9}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
 &= \frac{1}{9}(b_1 b_2 b_3) \\
 &= \frac{1}{9}(3a_1)(3a_2)(3a_3) \\
 &= \frac{1}{9}(27a_1 a_2 a_3) \\
 &= \frac{1}{9}(3(9)a_1 a_2 a_3) \\
 &= 3a_1 a_2 a_3,
 \end{aligned}$$

lo que demuestra la segunda parte del enunciado.

Además, como los números en una terna de Markov son coprimos (esto se demostrará más adelante, ver Nota 1.2.2), se deduce que el máximo común divisor de cualquier solución positiva (b_1, b_2, b_3) de la ecuación $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1 b_2 b_3$ debe ser 3, es decir,

$$\text{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 3.$$

Esto implica que (ka_1, ka_2, ka_3) no puede ser una solución de la ecuación

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1 b_2 b_3$$

a menos que k sea igual a 1 o 3. ■

Nota 1.2.2. Debido que aún se carece de los conocimientos necesarios para desarrollar la demostración de que cualquier par de números pertenecientes a una terna de Markov son coprimos, la misma se realizará en la sección 2. Árboles de

Markov.

Nota 1.2.3. *Los números que aparecen en la terna solución de la ecuación*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2x_3$$

son el conjunto $\{3m : m \in \mathcal{M}\}$. También podría considerarse como la definición de \mathcal{M} de la sucesión de Markov.

Nota 1.2.4. *La sucesión de números de Markov aparece en la OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences) como la sucesión A002559 [2].*

1.3. El espectro de Lagrange

Se sabe que todo número real α puede ser aproximado tan bien como uno lo desee utilizando números racionales. Por ejemplo, si α es un número irracional, se puede considerar su expansión decimal y aproximarlos por racionales considerando cada vez más decimales de esta expansión. Nótese que entre más decimales se tomen, la fracción (en general no reducida) que aproxima a α tiene un denominador mayor. Si se toma n decimales se puede encontrar un racional expresado como una fracción con denominador 10^n que da esta aproximación.

Por ello uno se puede preguntar si ¿se puede aproximar arbitrariamente bien a un número real α por medio de racionales $\{\frac{p_n}{q_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que el denominador q_n se mantiene acotado en algún sentido?

Una primera respuesta a esta pregunta la proporciona un teorema clásico de Dirichlet.

Teorema 1.3.1 (Dirichlet). *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $q < N$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Demostración:

Recordando que todo número real α puede escribirse como

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$$

dónde:

- $\lfloor \alpha \rfloor$ es la parte entera de α .
- $\{\alpha\}$ es la parte decimal de α , con $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Considérese la partición del intervalo $[0, 1)$ en N subintervalos de igual longitud

$$[0, 1) = \bigcup_{i=0}^{N-1} \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right).$$

También considérese los $N + 1$ números: $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \{4\alpha\}, \dots, \{(N + 1)\alpha\}$. Por el Principio de Dirichlet de las cajas, al distribuir $N + 1$ números en N subintervalos, al menos dos de estos números decimales, $\{k\alpha\}$ y $\{l\alpha\}$, caerán en el mismo subintervalo. Esto implica que:

$$|\{l\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{N}.$$

Si se define a $q = l - k$ y $p = \lfloor l\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor$, entonces

$$\begin{aligned} \{l\alpha\} - \{k\alpha\} &= l\alpha - \lfloor l\alpha \rfloor - (k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor) \\ &= l\alpha - \lfloor l\alpha \rfloor - k\alpha + \lfloor k\alpha \rfloor \\ &= (l - k)\alpha - (\lfloor l\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor) \\ &= q\alpha - p. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Dividiendo entre q , se obtiene:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

■

Corolario 1.3.1.

1. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ entonces hay infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1.4}$$

2. Si $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, entonces la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \quad (C > 0),$$

se cumple solo un número finito de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demostración:

1. Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Por el Teorema 1.3.1 existen $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ con

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se asume que no existen una infinidad de $\frac{p_n}{q_n}$, entonces, sea $\frac{p_k}{q_k} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dada la hipótesis de $\alpha \notin \mathbb{Q}$, resulta que $\alpha \neq \frac{p_k}{q_k}$, por tanto, para n suficientemente grande,

$$\frac{1}{n} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{n}.$$

Lo cual no puede ocurrir, ergo, hay infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que satisfacen (1.4).

2. Sea $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ y considérese la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \quad (C > 0).$$

Sustituyendo a α en la desigualdad por su equivalencia:

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &= \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \\ &= \left| \frac{rq - sp}{sq} \right|. \end{aligned}$$

Como $1 \leq |rq - sp|$, se tiene que

$$\frac{1}{sq} \leq \left| \frac{rq - sp}{sq} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

De la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{sq} < \frac{C}{q^2}.$$

Multiplicamos ambos lados por q^2 :

$$\frac{q}{s} < C$$

Esto implica que

$$q < sC.$$

Por lo tanto, q tiene un número finito de valores posibles, ya que q es un número entero positivo y está acotado por sC .

■

Ahora uno puede preguntarse qué tanto se puede mejorar a la cota dada en el punto 1 del Corolario 1.3.1.

Lagrange introdujo el siguiente concepto cuyo objetivo es precisamente entender qué tanto puede mejorarse dicha cota.

Definición 1.3.1 (Números de Lagrange). *El **número de Lagrange** $L(\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de todos los $L > 0$ para los cuales la desigualdad*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Lq^2}, \tag{1.5}$$

se cumple para una infinidad de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

En primera instancia no es claro cómo usar la Definición 1.3.1 para calcular $L(\alpha)$. Sin embargo, uno puede usar a las fracciones continuas para hacerlo.

En la página 23 del libro *Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture* se encuentra la **Proposition 1.22** con su respectiva demostración, la cual relaciona a los números de Lagrange con las fracciones continuas. Dicha proposición enuncia lo siguiente:

Proposición 1.3.1. Si $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \notin \mathbb{Q}$ y definimos a $\alpha' = a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ entonces $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \alpha']$, más aún, el número de Lagrange de α se obtiene de la siguiente manera:

$$L(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha).$$

Con $\lambda_n(\alpha) = [\alpha'] + \frac{1}{\beta_n} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, \dots, a_1]$ y $\beta_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.

Ejemplo 1.3.1. Considérese la fracción continua infinita simple de la razón áurea enunciada en la Observación 1.2.1

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots].$$

Como

- $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ es la cola de la fracción continua infinita simple.
- $\beta_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ es el número truncado a partir del n – término de la fracción continua inversa.

Y dado que la fracción continua es constante: $a_k = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\alpha_{n+1} = [1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y

$$\beta_n = [1, 1, \dots, 1].$$

Por lo que el valor de $\lambda_n(\varphi)$ es:

$$\lambda_n(\varphi) = \lambda_n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = [1, 1, 1, 1, \dots] + \frac{1}{[1, \dots, 1]} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{[1, \dots, 1]}.$$

Como la fracción continua es constante, el \limsup es simplemente \lim , por lo que

$$\begin{aligned}
 L\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{[1, \dots, 1]}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{[1, \dots, 1]}\right) \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} [1, \dots, 1]} \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},
 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \\
 &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 L\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{5}}{2} \\
 &= \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Definición 1.3.2 (El espectro de Lagrange). *Al conjunto $\mathcal{L} = \{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ se le denomina el **espectro de Lagrange**.*

Dada la complejidad en el uso de la Definición 1.3.2 para calcular \mathcal{L} , Markov

trabajó en un teorema que permite calcular de manera más sencilla al espectro de Lagrange, hoy en día se le conoce como el Teorema de Markov (ver Teorema 1.4.1).

1.4. El teorema de Markov

La relación entre el teorema de Markov y el espectro de Lagrange radica en el hecho de que los números que satisfacen el teorema de Markov también forman parte del espectro de Lagrange [5].

Definición 1.4.1. *Un número α es **irracional cuadrático** si α no es racional y α es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.*

Ejemplo 1.4.1.

- Como bien se sabe el número $\sqrt{2}$ es irracional porque no puede ser expresado como una fracción de dos enteros (ver la página web [35]). Además, es cuadrático porque es una solución de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Dado que 1 y -2 son números enteros y son coeficientes de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, se tiene que $\sqrt{2}$ es un número irracional cuadrático.

- Como ya es conocido el número π es irracional (ver la página web [37]), pero no es cuadrático, a diferencia de $\sqrt{2}$, π no es solución de ninguna ecuación cuadrática con coeficientes enteros. De hecho, π es un número **trascendente**, lo cual significa que no es solución de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros, sea cual sea el grado de la ecuación (ver la página web [36]).

Por lo tanto, π no es un número irracional cuadrático.

Teorema 1.4.1 (Markov). *Sea \mathcal{M} el conjunto de los números de Markov. Entonces el conjunto de números que pertenecen al espectro de Lagrange y que son menores que 3 puede describirse de la siguiente manera*

$$\mathcal{L}_{<3} = \left\{ \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} : m \in \mathcal{M} \right\}. \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.4.2. Se procede a hacer el cálculo con los 5 primeros números de Markov:

■ Para 1:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(1)^2 - 4}}{1} \\ &= \sqrt{9m(1) - 4} \\ &= \sqrt{9 - 4} \\ &= \sqrt{5} \\ &\approx 2.236 \end{aligned}$$

■ Para 2:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(2)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{9(4) - 4}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{36 - 4}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{32}}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ &\approx 2.828 \end{aligned}$$

■ Para 5:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(5)^2 - 4}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{9(25) - 4}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{225 - 4}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{221}}{5} \\ &\approx 2.973 \end{aligned}$$

■ Para 13:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(13)^2 - 4}}{13} \\
 &= \frac{\sqrt{9(169) - 4}}{13} \\
 &= \frac{\sqrt{1521 - 4}}{13} \\
 &= \frac{\sqrt{1517}}{13} \\
 &\approx 2.996
 \end{aligned}$$

■ Para 29:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(29)^2 - 4}}{29} \\
 &= \frac{\sqrt{9(841) - 4}}{29} \\
 &= \frac{\sqrt{7569 - 4}}{29} \\
 &= \frac{\sqrt{7565}}{29} \\
 &\approx 2.999
 \end{aligned}$$

Se observa que $\frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m}$ se aproxima a 3 por abajo. Para una mayor legibilidad, se organizan los números previamente calculados en la siguiente tabla:

\mathcal{M}	1	2	5	13	29	...
$\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$	$\sqrt{5} \approx 2.236$	$2\sqrt{2} \approx 2.828$	$\frac{\sqrt{221}}{5} \approx 2.973$	$\frac{\sqrt{1517}}{13} \approx 2.996$	$\frac{\sqrt{7565}}{29} \approx 2.999$...

Tabla 1.1: Valores aproximados de $\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$ para los primeros 5 números de Markov.

En la Tabla 1.1, se ilustra que

$$\frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} < 3,$$

para los primeros 5 números de Markov.

Una parte importante del teorema establece que, para cada $m \in \mathcal{M}$, existe un

número irracional γ_m tal que

$$L(\gamma_m) = \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m}.$$

Además, se cumple que $\sqrt{9m^2 - 4}$ es un irracional cuadrático.

De hecho, puede demostrarse que se puede tener

$$\gamma_m = \frac{-3m + \sqrt{9m^2 - 4}}{2}.$$

Para más detalles, consúltese el Teorema de Markov en la página 35 del libro *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture* [5].

1.5. Conjetura de unicidad

La conjetura de unicidad de los números de Markov es un problema matemático que ha intrigado a muchos investigadores en más de 100 años. Esta conjetura, fue formulada por el matemático ruso Andrey Markov, Sin embargo, Markov evitó la prueba del Teorema 1.4.1 pues la conjetura solo requería los números de Markov, independientemente de la conjetura. Debido a que Frobenius hizo la afirmación en 1913, a veces también se la conoce como la conjetura de Frobenius [5] desde entonces los matemáticos han intentado probar o refutar esta conjetura, pero hasta ahora no se han descubierto pruebas sólidas que respalden ninguna de las afirmaciones.

Conjetura 1. *Cada número de Markov aparece exactamente una vez como máximo en una terna de Markov.*

Para tener una visión más clara de esta conjetura, se procede a analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.1. *Considérese la terna de Markov, $(1, 5, 13)$, la conjetura dice que el $\max(1, 5, 13) = 13$ es único por lo que no existe otra terna de Markov cuyo máximo sea 13, en otras palabras, no existe la terna $(m_1, m_2, 13)$ con*

$$13 > m_1 > m_2, \quad m_1 \neq 1, \quad m_2 \neq 5.$$

El *Corolario 1.2.* del artículo [9] afirma que la conjetura es verdadera para dos casos particulares.

Proposición 1.5.1 (*Theorem 1.3 de Uniqueness Theorem of Generalized Markov Numbers that are Prime Powers [21]*). *La conjetura es verdadera cuando el número Markov es una potencia de un primo impar, $c = p^n$, o el doble de una potencia de un primo impar, $c = 2p^n$.*

Capítulo 2

Árboles de Markov

A lo largo de este capítulo se van a introducir varios conceptos de teoría de gráficas con la finalidad de trabajar rigurosamente con los árboles. La fuente principal es el libro [20], del cual se extraen los conceptos principales, así como algunas de sus propiedades.

Los árboles fueron utilizados por primera vez en 1847 por Gustav Kirchhof (1824-1887) en su trabajo de redes eléctricas, aunque posteriormente fueron desarrollados y definidos de nuevo por Arthur Cayley (1821-1895) [20].

Los árboles de Markov son una herramienta efectiva en el ámbito de la teoría de números, utilizados para explorar las soluciones enteras de la ecuación de Markov (1.2). Esta ecuación dio lugar a una fascinante estructura de soluciones que forman un árbol, donde cada nodo representa una solución de la ecuación de Markov (1.2) y cada nueva solución se deriva a partir de las transformaciones aplicadas a nodos anteriores [5].

Definición 2.0.1. *El par $G = (V, E)$ es una **gráfica dirigida** si $V \neq \emptyset$ es un conjunto finito de vértices (nodos), y E es un conjunto de aristas posiblemente vacío de parejas ordenadas de elementos de V (La **orientación** de una arista se señala mediante una flecha dirigida sobre ella).*

*Se dice que G es una **gráfica no dirigida** si E es un conjunto de pares no ordenados sobre V .*

Toda gráfica G admite una representación visual colocando un nodo por cada vértice de $v \in V$

v
•

y en el caso de que G sea una gráfica no dirigida, se coloca una arista entre los

vértices v y w



para cada par $(v, w) \in E$.

Si G es una gráfica dirigida, se coloca una flecha entre los vértices v y w



para cada par $(v, w) \in E$.

Para cual sea G se cumple lo siguiente

1. Se dice que una arista $e \in E$ es **incidente** a dos vértices $v_1, v_2 \in V$ si e une a v_1 con v_2 . Los vértices v_1, v_2 se denominan **adyacentes** entre sí. Más aún, si G es una gráfica dirigida y e' es una flecha que une a v_1 con v_2 , entonces a el vértice v_1 se le conoce como **vértice origen** de la arista e y el vértice v_2 se le conoce como **vértice terminal**.
2. Si $v \in V$ y v no tienen aristas incidentes, entonces, a v se le denomina vértice **aislado**.
3. Si $e \in E$ conecta a un vértice consigo mismo, entonces e es un **lazo**.

Ejemplo 2.0.1.

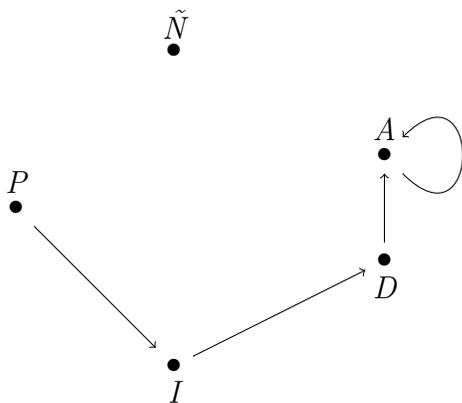


Figura 2.1: Gráfica dirigida con cinco nodos.

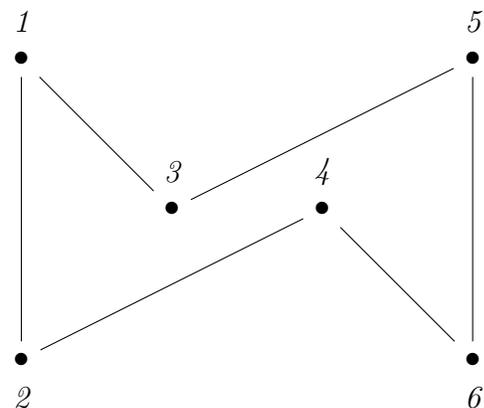


Figura 2.2: Gráfica no dirigida con seis nodos.

En la Figura 2.1 se proporciona un ejemplo de una gráfica dirigida $G = (V, E)$ con $V = \{P, I, D, A, \tilde{N}\}$ y $E = \{(P, I), (I, D), (D, A), (A, A)\}$.

En la misma Figura 2.1 las aristas $e \in E$, son:

1. La arista $e = (P, I)$ es incidente con los vértices P, I , por lo que los vértices P, I son adyacentes entre si. Además, el vértice P es el vértice origen de la arista e y el vértice terminal de e es I .
2. La arista $e = (I, D)$ es incidente con los vértices I, D , por lo que los vértices I, D son adyacentes entre si. Además, el vértice I es el vértice origen de la arista e y el vértice terminal de e es D .
3. La arista $e = (D, A)$ es incidente con los vértices D, A , por lo que los vértices D, A son adyacentes entre si. Además, el vértice D es el vértice origen de la arista e y el vértice terminal de e es A .
4. La arista $e = (A, A)$ es un ejemplo de un lazo.
5. El vértice \tilde{N} que no tiene aristas incidentes es un vértice aislado.

La Figura 2.2 muestra una gráfica no dirigida con aristas $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$. A pesar de ello, una arista como $\{1, 2\}$ representa $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

Definición 2.0.2. Sean x_0 y y vértices (no necesariamente distintos) de una gráfica no dirigida $G = (V, E)$.

1. Un **camino** de x_0 a y es una sucesión alterna finita de vértices y aristas de la forma

$$C(x_0, y) = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, y$$

con e_i una arista de x_i a x_{i+1} .

2. La **longitud** de un camino es el número total de aristas que hay entre el vértice de partida hasta el vértice final. En caso de que el número de aristas sea nulo, al camino se denominará **camino trivial**.
3. Si ningún vértice del camino $C_S(x_0, y)$ se repite, entonces a $C_S(x_0, y)$ se le conoce como **camino simple**. El término **ciclo** se utiliza para referirse a un camino simple que es cerrado, denotado como $C_C(x_0, x_0)$.

Ejemplo 2.0.2.

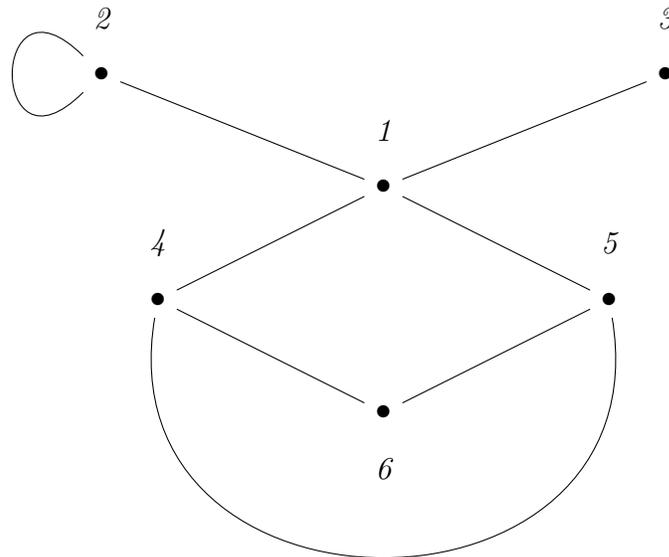


Figura 2.3: Gráfica no dirigida con seis nodos y un lazo.

Para la gráfica de la Figura 2.3 se tienen los siguientes caminos:

- 1) $\{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 5\}$: éste es un camino $C(1, 5)$ de longitud 5 en el que se repiten la arista $\{1, 2\}$ así como los vértices 1 y 2.
- 2) $\{3, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}$: aquí se tiene un camino $C(3, 2)$ de longitud 6, dónde solamente se repite el vértice 1.
- 3) $\{3, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 5\}$: claramente en este camino no se repite ningún vértice, por lo que es un camino simple $C_S(3, 5)$ de longitud 3.
- 4) Las aristas $\{1, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}$ conforman un ciclo $C_C(1, 1)$ de longitud 3.

Definición 2.0.3. Sea G una gráfica no dirigida. Se dice que G es **conexa** si para cualquier par de vértices diferentes en G hay un camino simple que los une. Se dice que una gráfica es **disconexa** si no es conexa.

Ejemplo 2.0.3.

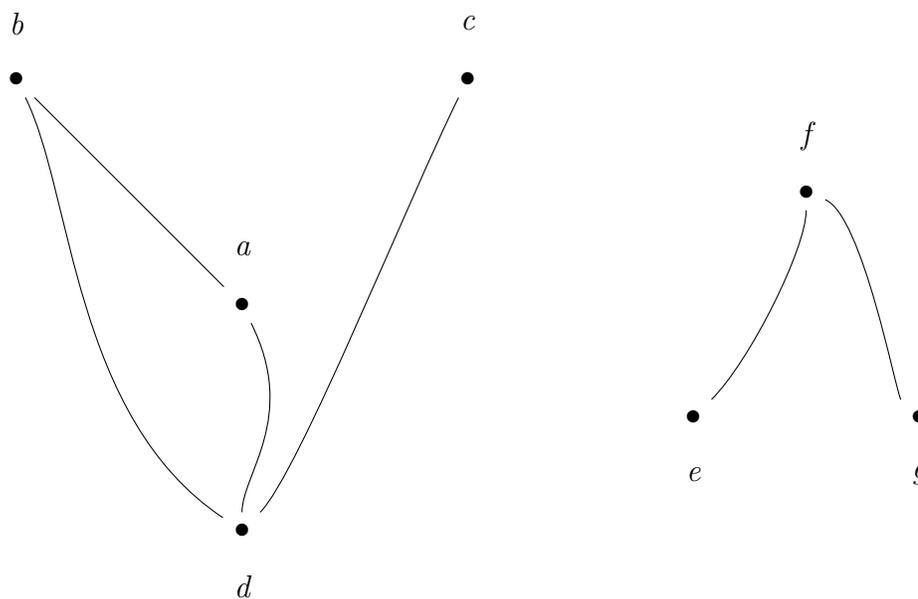


Figura 2.4: Gráfica no dirigida con siete nodos.

En la Figura 2.4 se presenta una gráfica no dirigida, $G = (V, E)$ con $V = V_1 \cup V_2$ y $E = E_1 \cup E_2$, dónde los conjuntos de vértices son $V_1 = \{a, b, c, d\}$, $V_2 = \{e, f, g\}$ y los conjuntos de aristas son $E_1 = \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}\}$, $E_2 = \{\{e, f\}, \{f, g\}\}$. Esta gráfica $G = (V, E)$ no es conexa, pues no existe un camino simple que una a los vértices c con g . Sin embargo, la gráfica G está compuesta por dos piezas $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ que por sí solas son gráficas conexas. Por lo tanto, se puede deducir que una gráfica no dirigida $G = (V, E)$ es desconexa si y sólo si V se puede separar en al menos dos subconjuntos V_1, V_2 tales que no exista una arista en $e \in E$ de tal forma que un vértice incidente de e esté en V_1 y el otro esté en V_2 .

Definición 2.0.4. Sea $G = (V, E)$ una gráfica no dirigida sin lazos. Se dice que G es un **árbol** si aparte de ser conexa, G no contiene ciclos.

Ejemplo 2.0.4.

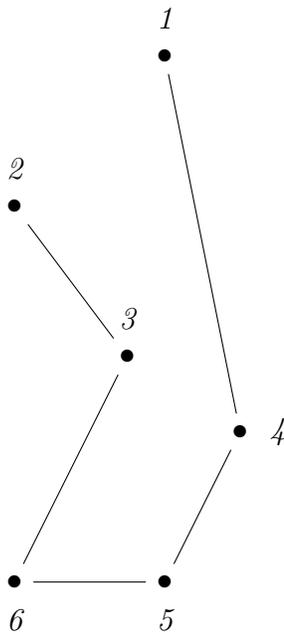


Figura 2.5: Árbol de 6 nodos.

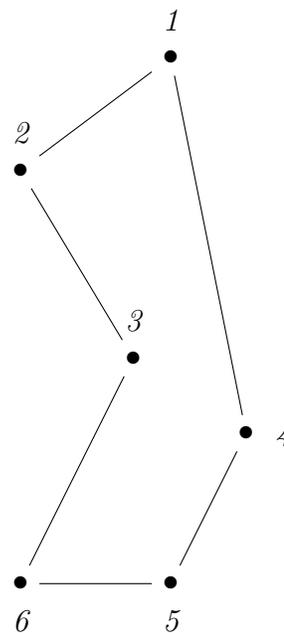


Figura 2.6: Gráfica no árbol.

En la Figura 2.5 la gráfica mostrada es un árbol con 6 nodos al ser conexa y no contener ciclos, pero la Figura 2.6 no lo es, porque contiene un ciclo $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 6\}, \{6, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 1\}$.

Definición 2.0.5. Sea $G = (V, E)$ un árbol. Se dice que G es un **árbol con raíz**, si se elige un vértice $r \in V$ de G que se considera distinguido.

Ejemplo 2.0.5. Considérese el árbol de la Figura 2.5. Si por ejemplo se elige a el vértice 2 como distinguido entonces dicho árbol se dice árbol con raíz.

Definición 2.0.6. Sea $G = (V, E)$ un árbol con raíz r . La **distancia** de $v \in V$ a r es la longitud del camino más corto que conecta a v con r . Para $n \in \mathbb{N}$ el nivel n de G es el conjunto de vértices a distancia n de r .

Si $n < n'$ se dice que el nivel n es más alto que el nivel n' .

Ejemplo 2.0.6. Considérese el árbol de la Figura 2.5 con raíz 2.

- El vértice 5 está a distancia $n = 3$ de la raíz del árbol.
- El vértice 1 está a distancia $n = 5$ de la raíz del árbol.

Como $3 < 5$ se dice que el nivel del vértice 3 es más alto que el nivel del vértice 5.

Definición 2.0.7. Sea $G = (V, E)$ un árbol. Si $v \in V$ está a nivel n y $v' \in V$ está a nivel $n + 1$ y v y v' están conectados por una arista, se dice que v' es **hijo** de v .

Ejemplo 2.0.7.

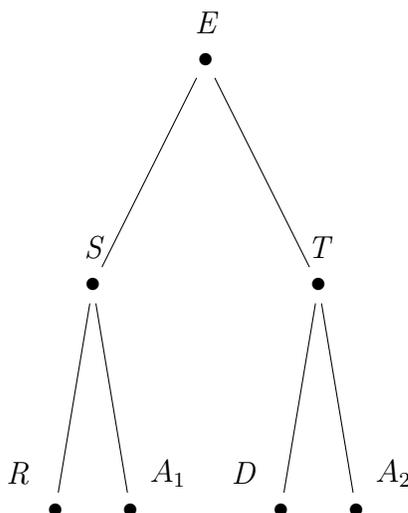


Figura 2.7: Árbol con raíz.

En la Figura 2.7 se muestra un árbol con raíz el cual posee la siguiente estructura:
E: Es el nodo raíz del árbol. Representa el nivel más alto y es el punto de partida para todos los demás nodos.

Primer Nivel de Hijos

S: Es un hijo directo de *E*.

T: Es otro hijo directo de *E*, paralelo a *S*.

Segundo Nivel de Hijos

Bajo el nodo S:

R: Este nodo es un hijo de *S*. *A₁*: Este es otro hijo de *S*.

Bajo el nodo T:

D: Este nodo es un hijo de *T*. *A₂*: Este es otro hijo de *T*.

Los árboles son herramientas útiles para examinar propiedades y para la organización de datos en diversos campos, tales como:

1. En informática, hacen más eficaz la recuperación de datos, mejorando significativamente el rendimiento de las operaciones de búsqueda.
2. En telecomunicaciones, los árboles ayudan a optimizar el encaminamiento de las redes, mejorando la eficacia y fiabilidad de las redes de comunicación.

3. En las ciencias medioambientales, los árboles se utilizan para modelizar y simular ecosistemas con el fin de estudiar el impacto de diversos factores en la biodiversidad.

Estos árboles también ofrecen una representación gráfica sencilla de entender, la cual facilita ver patrones y conexiones [33].

2.1. Ternas de Markov

Markov demostró que todos los números de Markov se pueden producir de una manera sencilla [5]. En esta sección se ilustrara cómo un árbol particular permite estudiar a las ternas de Markov.

Definición 2.1.1. *Se dice que una **terna de Markov** (m_1, m_2, m_3) es **singular** si al menos tiene dos números iguales. A las ternas que no cumplen esta definición se les denominan **no singulares**.*

Ejemplos 2.1.1.

1. La terna $(1, 1, 2)$ es una terna singular pues tiene dos números iguales.
2. La terna $(1, 2, 5)$ es una terna no singular pues todos los números de la terna son distintos entre sí.

Lema 2.1.1. *Las ternas de Markov $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$ son las únicas ternas singulares.*

Demostración:

Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov singular, sin pérdida de generalidad se asume que $m_2 = m_3$ y $m_1 = m$, entonces la ecuación (1.2) resulta

$$\begin{aligned} m^2 + m_2^2 + m_2^2 &= 3mm_2m_2, \\ m^2 + 2m_2^2 &= 3mm_2^2, \\ m^2 &= 3mm_2^2 - 2m_2^2, \\ m^2 &= m_2^2(3m - 2). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $m_2^2 \mid m^2$ que a su vez conlleva que $m_2 \mid m$, por lo que, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = m_2k$, en consecuencia se tiene que

$$(m_2k)^2 = m_2^2(3m_2k - 2),$$

$$\begin{aligned}
k^2 &= 3m_2k - 2, \\
2 &= 3m_2k - k^2, \\
2 &= k(3m_2 - k).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Por lo tanto, k divide a 2, lo que fuerza a que $k = 1$ o $k = 2$.

Ahora

- Si $k = 1$, entonces de (2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
2 &= (1)(3m_2 - 1), \\
3 &= 3m_2, \\
1 &= m_2.
\end{aligned}$$

Así, $m = m_2k = (1)(1) = 1$.

- Si $k = 2$, entonces de (2.1) se deduce

$$\begin{aligned}
2 &= (2)(3m_2 - 2), \\
1 &= 3m_2 - 2, \\
3 &= 3m_2, \\
1 &= m_2.
\end{aligned}$$

Así, $m = m_2k = (1)(2) = 2$.

Ergo, las ternas de Markov $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 1)$ son las únicas con números repetidos. ■

Una interrogante muy intuitiva es ¿Existe un método para generar todas las ternas de Markov a partir de una terna dada?. El siguiente resultado garantiza cómo generar nuevas ternas de Markov a partir de una terna dada.

Proposición 2.1.1. *Las ternas de Markov son autoreplicas. Más precisamente, dada una terna de Markov (m_1, m_2, m_3) se puede construir una nueva terna de Markov de la forma (m_1, m_2, m'_3) , donde $m_3 \neq m'_3$ y necesariamente $m'_3 = 3m_1m_2 - m_3$.*

Demostración:

Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov, con m_1, m_2 fijos, en este momento, el

objetivo es localizar todas las ternas de Markov de la forma (m_1, m_2, m'_3) , para esto, se procede a resolver la siguiente ecuación

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3'^2 = 3m_1m_2m_3'.$$

Dado que (m_1, m_2, m_3) satisface la ecuación (1.2), se tiene

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3.$$

Así, todo se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3'^2 = 3m_1m_2m_3', \quad (2.2)$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3. \quad (2.3)$$

Multiplicando a (2.3) por -1 y sumándole la ecuación (2.2), se llega a

$$\begin{aligned} m_3'^2 - m_3^2 &= 3m_1m_2(m_3' - m_3), \\ (m_3' - m_3)(m_3' + m_3) &= 3m_1m_2(m_3' - m_3), \\ m_3' + m_3 &= 3m_1m_2, \\ m_3' &= 3m_1m_2 - m_3. \end{aligned}$$

Así, se genera una nueva terna de Markov $(m_1, m_2, m_3' = 3m_1m_2 - m_3)$. ■

Observación 2.1.1. *En virtud de la Proposición 2.1.1 si se fijan a m_1, m_3 y m_2, m_3 se generan las ternas*

$$(m_1, m_2' = 3m_1m_3 - m_2, m_3)$$

y

$$(m_1' = 3m_2m_3 - m_1, m_2, m_3),$$

respectivamente.

Por lo tanto, a partir de una terna de Markov se pueden construir otras ternas de

Markov bajo las siguientes reglas de recurrencia:

$$m'_3 = 3m_1m_2 - m_3, \quad (2.4)$$

$$m'_2 = 3m_1m_3 - m_2, \quad (2.5)$$

$$m'_1 = 3m_2m_3 - m_1. \quad (2.6)$$

Definición 2.1.2. Se dice que dos ternas de Markov son **adyacentes** si pueden obtenerse una de otra mediante alguna de las reglas de recurrencia establecidas en la Observación 2.1.1.

Ejemplo 2.1.1. Considérese la terna $(1, 1, 1)$. Si se aplica cualquiera de las reglas de recurrencia de la Observación 2.1.1 a esta terna se genera la terna $(1, 2, 1)$.

Pues

$$\begin{array}{lll} m'_1 = 3(1)(1) - 1 & m'_2 = 3(1)(1) - 1 & m'_3 = 3(1)(1) - 1 \\ = 3 - 1 & = 3 - 1 & = 3 - 1 \\ = 2 & = 2 & = 2 \end{array}$$

Por lo tanto, las ternas $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 1)$ son adyacentes.

En virtud de la Definición 2.1.2, se establece la siguiente propiedad de las ternas adyacentes.

Proposición 2.1.2. La relación de adyacencia entre dos ternas de Markov es simétrica, es decir, si (m_1, m_2, m_3) es adyacente a (n_1, n_2, n_3) , entonces (n_1, n_2, n_3) es adyacente a (m_1, m_2, m_3) .

Demostración:

Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov, sin pérdida de generalidad, se considera su terna adyacente (m_1, m_2, m'_3) . Resta demostrar que (m_1, m_2, m_3) puede obtenerse a partir de (m_1, m_2, m'_3) bajo alguna de las reglas de recurrencia de la Observación 2.1.1.

En efecto, al aplicar la regla de recurrencia (2.4) sobre la terna (m_1, m_2, m'_3) se obtiene:

$$\begin{aligned} m''_3 &= 3m_1m_2 - m'_3 \\ &= 3m_1m_2 - (3m_1m_2 - m_3) \\ &= 3m_1m_2 - 3m_1m_2 + m_3 \\ &= m_3. \end{aligned}$$

Por lo que la terna resultante es $(m_1, m_2, m_3'') = (m_1, m_2, m_3)$. Ergo la relación de adyacencia entre dos ternas de Markov es simétrica. ■

Se observa que las ternas singulares solo tienen dos vecinos. Toda terna no singular (m_1, m_2, m_3) tienen tres ternas adyacentes, las cuales son diferentes entre sí. Más aún, (m_1, m_2, m_3) tiene una única terna adyacente cuyo elemento máximo es menor al máximo de (m_1, m_2, m_3) . La terna $(1, 2, 5)$ es especial en el sentido del resultado siguiente.

Corolario 2.1.1. *La terna de Markov $(1, 5, 2)$ es la única terna no singular que es adyacente a una terna singular.*

Demostración:

Por el Lema 2.1.1 se sabe que las únicas ternas singulares son $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ y por el Ejemplo 2.1.1 se sabe que la terna $(1, 1, 1)$ solo tiene a la terna $(1, 1, 2)$ como terna adyacente. Por lo que todo se reduce a calcular las ternas adyacentes a $(1, 1, 2)$.

- Es fácil verificar que si se aplica la regla de recurrencia (2.4) se genera la siguiente terna

$$(1, 1, 1),$$

$$\text{pues } m_1 = 1 = m_2, m_3 = 2 \text{ así } m_3' = 3(1)(1) - 2 = 1.$$

- Claramente si se aplica la regla de recurrencia (2.5) se genera la siguiente terna

$$(1, 5, 2),$$

$$\text{pues } m_1 = 1 = m_2, m_3 = 2 \text{ así } m_3' = 3m_1m_3 - m_2 = 3(1)(2) - 1 = 5.$$

- Notoriamente si se aplica la regla de recurrencia (2.6) se genera la siguiente terna

$$(5, 1, 2),$$

$$\text{pues } m_1 = 1 = m_2, m_3 = 2 \text{ así } m_1' = 3(1)(2) - 1 = 5.$$

Por lo tanto, la terna $(1, 5, 2)$ es la única terna no singular con una terna singular adyacente. ■

Definición 2.1.3. Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov no singular. Si

$$m_1 > m_2 > m_3,$$

entonces a m_1 se le denomina como el **elemento máximo** de la terna y se denota por $\text{máx}(m_1, m_2, m_3) = m_1$.

Ejemplo 2.1.2.

- Para la terna $(1, 2, 5)$. Puesto que $5 > 2 > 1$ se tiene que

$$\text{máx}(1, 2, 5) = 5.$$

- Para la terna $(1, 13, 5)$. Dado que $13 > 5 > 1$ se intuye que

$$\text{máx}(1, 13, 5) = 13.$$

- Para la terna $(29, 5, 2)$. Debido a que $29 > 5 > 2$ se concluye que

$$\text{máx}(29, 5, 2) = 29.$$

Claramente se puede notar que el elemento máximo de la terna $(1, 13, 5)$ es mayor que el elemento máximo de la terna $(1, 2, 5)$ pero menor que el elemento máximo de la terna $(29, 5, 2)$.

Con base en lo observado en el Ejemplo 2.1.2, se puede notar que hay máximos más grandes que otros entre una terna y sus ternas adyacentes, lo cual lleva al siguiente lema.

Lema 2.1.2. Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov no singular, entonces sólo una de las tres ternas adyacentes tiene un elemento máximo menor que el elemento máximo de (m_1, m_2, m_3) .

Demostración:

En efecto, sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov no singular, por la Observación 2.1.1 se sabe que sus ternas vecinas son

$$(m_1, m_2, 3m_1m_2 - m_3),$$

$$(m_1, 3m_1m_3 - m_2, m_3),$$

$$(3m_2m_3 - m_1, m_2, m_3).$$

Sin pérdida de generalidad se asume que $m_1 > m_2 > m_3$.

Dado que $m_1 > m_3$, se sigue que $m_1(3m_3 - 1) > m_3$, por lo que

$$3m_1m_2 - m_3 > m_1.$$

Como $m_1 > m_2$, se tiene $m_1(3m_3 - 1) > m_2$, por tanto

$$3m_1m_3 - m_2 > m_1.$$

Finalmente, se fija a m_2 y m_3 .

Se considera la siguiente ecuación

$$f(x) = x^2 + m_2^2 + m_3^2 - 3xm_2m_3 = 0,$$

$f(x)$ es un polinomio de grado 2 y toda solución entera positiva da lugar a una terna de Markov. Por construcción, se sabe que m_1 es solución por lo que

$$f(x) = (x - m_1)(x - m'_1)$$

dónde m'_1 es la otra raíz del polinomio f .

En particular se tiene que

$$x^2 + m_2^2 + m_3^2 - 3xm_2m_3 = (x - m_1)(x - m'_1) = x^2 - (m_1 + m'_1)x + m_1m'_1$$

Así se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m_1 + m'_1 &= 3m_2m_3, \\ m_1m'_1 &= m_2^2 + m_3^2. \end{cases}$$

Despejando a m'_1 de ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{cases} m'_1 = 3m_2m_3 - m_1, \\ m'_1 = \frac{m_2^2 + m_3^2}{m_1}. \end{cases}$$

Como $m_i \in \mathbb{Z}$ para $i = \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \mathbb{Z}$, cualquier combinación lineal de estos números vuelve a ser un entero. Particularmente de la primera ecuación del sistema se obtiene que $m'_1 \in \mathbb{Z}$. Además, al ser $m_i > 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$ se tiene que

$$m'_1 = \frac{m_2^2 + m_3^2}{m_1} > 0.$$

Por lo que se deduce que $m'_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Se **afirma** que $m_2 > m'_1$.

En efecto, para demostrar este hecho se evalúa f en m_2 , por un lado, se obtiene:

$$f(m_2) = m_2^2 + m_2^2 + m_3^2 - 3m_2m_2m_3$$

y por otro:

$$f(m_2) = (m_2 - m_1)(m_2 - m'_1).$$

Por hipótesis $(m_2 - m_1) < 0$, pues $m_1 > m_2$.

Para deducir que $m_2 - m'_1 > 0$ es suficiente con demostrar que

$$f(m_2) < 0.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} f(m_2) &= 2m_2^2 + m_3^2 - 3m_2^2m_3 = 2m_2^2 + m_3^2 - 3m_2^2m_3 + m_2^2 - m_2^2 \\ &= 3m_2^2 + m_3^2 - 3m_2^2m_3 - m_2^2 = 3m_2^2(1 - m_3) + m_3^2 - m_2^2. \end{aligned}$$

Puesto que $m_i > 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $3m_2^2(1 - m_3) \leq 0$, pues $1 - m_3 \leq 0$ y $3m_2^2 > 0$.

Como $m_2 > m_3$, se tiene $m_2^2 > m_3^2$, así $0 > m_3^2 - m_2^2$.

Por lo tanto, $f(m_2) < 0$ pues $f(m_2)$ es la suma de dos números negativos. Ergo sólo uno de los tres vecinos tiene un elemento máximo menor que el elemento máximo de (m_1, m_2, m_3) . ■

Observación 2.1.2. *Con el fin de establecer un orden claro en adelante, el valor máximo de una terna de Markov se ubicará en el centro, mientras que los otros dos valores podrán disponerse en cualquier posición. Esta disposición facilitará la comprensión y el análisis de las relaciones entre los elementos máximos de cada terna.*

Como ya se ha hecho mención, los números de Markov se pueden organizar en los vértices de un árbol, llamado el árbol de Markov.

Para construir el árbol de Markov, cada nodo está etiquetado con una terna de Markov. Si dos ternas de Markov son adyacentes, hay una arista entre ellos. Dado que cada terna de Markov no singular tiene tres ternas adyacentes, tres aristas se ramifican desde cada vértice del árbol de Markov, a excepción de los vértices que corresponden a las ternas singulares. Por lo tanto, el árbol de Markov tiene la siguiente estructura:

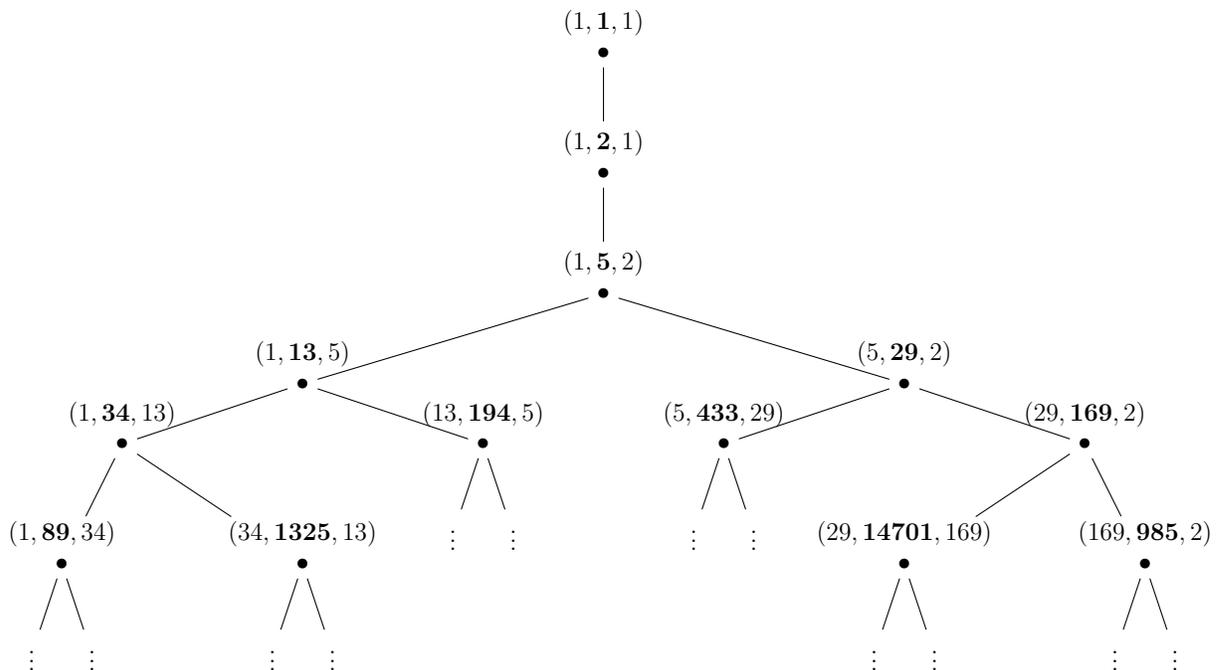


Figura 2.8: Árbol de Markov.

Definición 2.1.4. *Un árbol con raíz construido como se muestra en la Figura 2.8 es un **árbol \mathcal{T}_M de Markov**.*

Con base en los resultados del Lema 2.1.2 y la Observación 2.1.1, se obtienen las siguientes propiedades del árbol \mathcal{T}_M .

Teorema 2.1.1. *Si (m_1, m_2, m_3) es una terna de Markov no singular, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Toda terna de Markov aparece como etiqueta de un vértice de \mathcal{T}_M .*
2. *La terna (m_1, m_2, m_3) tiene una única aparición en el árbol \mathcal{T}_M .*

Observación 2.1.3. *Si (m_1, m_2, m_3) es un vértice de \mathcal{T}_M , entonces existe un camino simple en \mathcal{T}_M que une a (m_1, m_2, m_3) con el vértice etiquetado $(1, 5, 2)$.*

La estructura de árbol simplifica la demostración de muchas más propiedades interesantes de los números de Markov, alguna de las cuales ya se ha hecho mención en el Capítulo 1.

Teorema 2.1.2 (Propiedades de los números de Markov).

1. *Los tres números de Markov de cada terna son coprimos a pares.*
2. *Todo número de Markov aparece como máximo de alguna terna de Markov.*

Demostración:

1. Para las ternas $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ y $(1, 2, 5)$, la afirmación se cumple.

Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov no singular. Sea d un divisor tanto de m_1 como de m_2 . Se pretende ver que $d = \pm 1$. Se tiene que $d \mid m_1$ y $d \mid m_2$ lo cual implica que, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $m_1 = dk_1$ y $m_2 = dk_2$. Sustituyendo en la ecuación (1.2) resulta

$$\begin{aligned} (dk_1)^2 + (dk_2)^2 + m_3^2 &= 3(dk_1)(dk_2)m_3 \\ d^2k_1^2 + d^2k_2^2 + m_3^2 &= 3d^2k_1k_2m_3 \\ d^2(k_1^2 + k_2^2) + m_3^2 &= 3d^2k_1k_2m_3 \\ m_3^2 &= 3d^2k_1k_2m_3 - d^2(k_1^2 + k_2^2) \\ m_3^2 &= d^2(3k_1k_2m_3 - (k_1^2 + k_2^2)). \end{aligned}$$

Esto implica que $d^2 \mid m_3^2$, se deduce que $d \mid m_3$.

Sea (n_1, n_2, n_3) una terna adyacente a (m_1, m_2, m_3) . Se observa que d necesariamente divide a n_1 , n_2 y n_3 . En efecto, las reglas de recurrencia de la

Observación 2.1.1 nos dicen que todos los números de la terna (n_1, n_2, n_3) son combinaciones lineales de m_1, m_2 y m_3 ; como d es un divisor común de m_1, m_2 y m_3 se sigue que d divide a n_1, n_2 y n_3 .

Retrocediendo en el árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ es posible establecer una conexión con la terna (m_1, m_2, m_3) con la terna $(1, 2, 5)$. Se concluye finalmente que d divide a 1, 2 y 5, por lo que $d = \pm 1$, ergo cualesquiera dos números de Markov de una terna de Markov no singular son coprimos a pares.

2. Sea (m_1, m_2, m_3) una terna de Markov no singular ordenada, es decir, $m_1 > m_2 > m_3$ y sea $m \in \mathcal{M}$, tal que, m es alguno de los tres números de la terna (m_1, m_2, m_3) . Bajo esta suposición surgen los siguientes tres casos.

a) Se hace la suposición que $m = m_1$. Como $m_1 > m_2 > m_3$ se tiene $m > m_2 > m_3$ por lo que, se concluye la demostración.

b) Se asume que $m = m_2$. Por el Lema 2.1.2, se deduce que $m = m_2 > m'_1, m_3$ para la terna vecina (m, m'_1, m_3) , volviendo al *caso a*).

c) Se supone que $m = m_3$. Por el Lema 2.1.2, se sabe que al remplazar el elemento máximo de una terna se produce otra dónde el elemento máximo disminuye.

Así, $m_3 = m$ se convierte en el segundo más pequeño o bien continúan siendo el más pequeño.

Si ocurre lo primero recae en el *caso b*), pero si ocurre lo segundo entonces por el Teorema 2.1.1 eventualmente se llega a la terna $(1, 5, 2)$.

Por lo tanto, todo número de Markov aparece como máximo de alguna terna de Markov. ■

En virtud del Teorema 2.1.2, el conjunto de los números de Markov \mathcal{M} está cubierto por los números resaltados en el árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Es decir, resultan ser el número máximo de cada terna.

Con base en la información previamente establecida, la Conjetura 1 puede ser reescrita de la siguiente manera.

Conjetura 2. *Todos los componentes resaltados del árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ son diferentes entre sí.*

2.2. Números de Fibonacci y números de Pell

La secuencia matemática conocida como números de Fibonacci se define de forma recursiva. Esta secuencia numérica, comienza con 0 y 1, donde cada número siguiente es la suma de los dos anteriores [4].

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci presentó la secuencia como la solución a un problema sobre la reproducción de conejos, lo que llevó a la popularización de la secuencia en el mundo occidental [17]. Con el pasar del tiempo, la secuencia de Fibonacci ha encontrado aplicaciones en diversas áreas, desde la computación hasta la biología, a la par ha capturado la imaginación de muchos debido a su aparición en la naturaleza, como en la disposición de las hojas, la forma de las galaxias y la estructura de los caparazones de moluscos [4].

Las características intrigantes de la secuencia de Fibonacci incluyen la razón áurea (ver la Observación 1.2.1), que se crea dividiendo dos números consecutivos en la secuencia. Al igual que muchos tipos de arte y arquitectura a lo largo de la historia utilizan esta proporción [17].

Por otro lado, la secuencia de los números de Pell también se define de manera recursiva. Esta secuencia numérica comienza con 0 y 1, y cada número subsiguiente es la suma del doble del número anterior y del número anterior a este.

Los números de Pell llevan el nombre del matemático inglés John Pell, quien los investigó en el siglo XVII [16].

Estos números son los denominadores de la fracción continua de la raíz cuadrada de dos (ver la Observación 1.2.2) y se utilizan para aproximar este número irracional con gran precisión. Además, los números de Pell tienen aplicaciones en la búsqueda de números cuadrados triangulares, la construcción de aproximaciones de números enteros al triángulo rectángulo isósceles y la resolución de ciertos problemas de enumeración combinatoria [3].

Definición 2.2.1 (Números de Fibonacci). *La **sucesión de Fibonacci** es la sucesión $\{F_n\}_{n \geq 0}$ definida utilizando la regla de recursiva $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ con los valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. A los números que forman parte de esta sucesión se les denominan **números de Fibonacci**.*

Ejemplo 2.2.1. *Como se menciona en la Definición 2.2.1 los primeros dos números de Fibonacci son $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Por lo que se procede a calcular el tercer*

número de la sucesión usando la regla recursiva $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, con $n = 1$.

$$F_{1+1} = F_1 + F_{1-1}$$

$$F_2 = F_1 + F_0$$

$$F_2 = 1 + 0$$

$$F_2 = 1$$

Por lo tanto, los primeros tres números de Fibonacci son:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ y } F_2 = 1.$$

Definición 2.2.2 (Números de Pell). La **sucesión de Pell** es la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ definida utilizando la regla de recursiva $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ con los valores iniciales $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$. A los números que forman parte de esta sucesión se les denominan **números de Pell**.

Ejemplo 2.2.2. Según lo descrito en la Definición 2.2.2, los dos primeros números de la sucesión de Pell son $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$. A continuación, se calcula el tercer número de la sucesión aplicando la fórmula recursiva $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ con $n = 1$.

$$P_{1+1} = 2P_1 + P_{1-1}$$

$$P_2 = 2P_1 + P_0$$

$$P_2 = 2(1) + 0$$

$$P_2 = 2$$

Por lo tanto, los primeros tres números de Pell son:

$$P_0 = 0, P_1 = 1, \text{ y } P_2 = 2.$$

En el árbol 2.9 se aprecia que las dos ramas externas del árbol 2.8 toman valores de Fibonacci y de Pell con índices impares, siendo la rama izquierda la

que toma números de Fibonacci y la rama derecha la que toma números de Pell.

Tabla 2.1: Los diez primeros números de las sucesiones

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	...

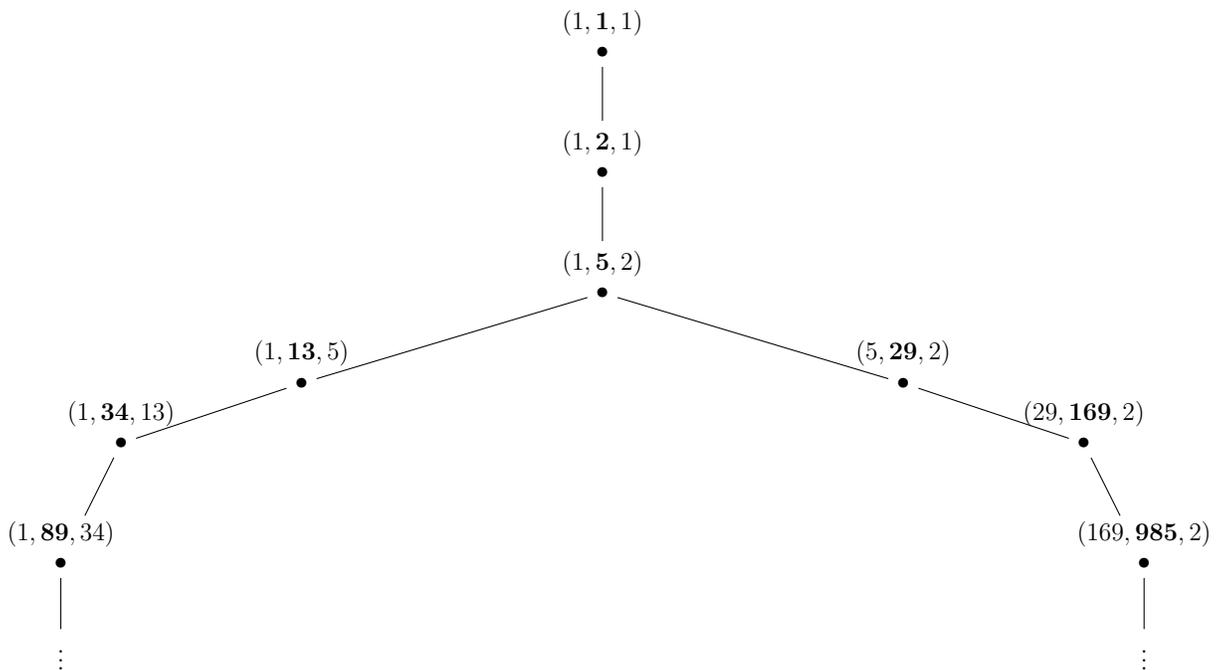


Figura 2.9: Árbol de Markov, Fibonacci y Pell

Teorema 2.2.1 (Números de Markov-Fibonacci y Markov-Pell).

1. Todo número de Fibonacci con índice impar es un número de Markov.
2. Todo número de Pell con índice impar es un número de Markov.

Demostración:

1. Los números de Fibonacci con índices pares satisfacen la Identidad de Cassini: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ [6]:

$$F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1.$$

Despejando a F_{2n}^2 se obtiene

$$F_{2n}^2 = F_{2n+1}F_{2n-1} - 1.$$

Respecto al marco de la Definición 2.2.1, se sabe que F_{2n} es

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned} (F_{2n+1} - F_{2n-1})^2 &= F_{2n+1}F_{2n-1} - 1, \\ F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n-1} + F_{2n-1}^2 &= F_{2n+1}F_{2n-1} - 1, \\ F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1^2 &= 3F_{2n+1}F_{2n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la terna $(F_{2n+1}, F_{2n-1}, 1)$ es una terna de Markov, ergo, los números de Fibonacci con índices impares son números de Markov.

2. Los números de Pell satisfacen la siguiente propiedad:

$$P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n \text{ como Cassini (ver la página 3 de [7]).}$$

De aquí se deduce que los números de Pell con índices pares satisfacen que

$$P_{2n-1}P_{2n+1} - P_{2n}^2 = 1.$$

Despejando a P_{2n}^2 se obtiene

$$P_{2n}^2 = P_{2n-1}P_{2n+1} - 1.$$

Respecto a la Definición 2.2.2, se sabe que P_{2n} es

$$P_{2n} = P_{2n+1} - P_{2n-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned} (P_{2n+1} - P_{2n-1})^2 &= P_{2n-1}P_{2n+1} - 1, \\ P_{2n+1}^2 - 2P_{2n+1}P_{2n-1} + P_{2n-1}^2 &= P_{2n-1}P_{2n+1} - 1, \\ P_{2n+1}^2 + P_{2n-1}^2 + 1^2 &= 3P_{2n+1}P_{2n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la terna $(P_{2n+1}, P_{2n-1}, 1)$ es una terna de Markov, ergo, los

números de Pell con índices impares son números de Markov. ■

2.3. Árbol de Farey

La sucesión ordenada de fracciones irreducibles con denominadores que no superan un determinado número, se le conoce como la *Sucesión de Farey*. John Farey fue un geólogo británico quien en 1816 publicó una carta sobre la conjetura de que cada nuevo término en una secuencia de Farey es el mediano de sus vecinos en la revista *Philosophical Magazine*. No obstante, fue el matemático Augustin Louis Cauchy quien en su libro *Exercices de mathématique* demostró la conjetura publicada de Farey [28].

Definición 2.3.1. Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Se dice que $\frac{a}{b}$ es **irreducible** si $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Ejemplos 2.3.1.

1. Considérese la fracción $\frac{8}{12} \in \mathbb{Q}$.

Se procede a hacer el cálculo de los divisores positivos de los números 8 y 12,

- Los divisores de 8 son: 1, 2, 4 y 8.
- Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Claramente, el mayor divisor común es 4, por lo tanto, $\text{mcd}(8, 12) = 4 \neq 1$.
Ergo, $\frac{8}{12}$ no es irreducible.

2. Ahora, considérese $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.

- Los divisores de 3 son: 1 y 3.
- Los divisores de 4 son: 1, 2 y 4.

El único divisor común es 1, por lo tanto, $\text{mcd}(3, 4) = 1$.
Ergo $\frac{3}{4}$ es irreducible.

Definición 2.3.2 (Sucesión de Farey). Sea $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{Fa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la secuencia de todas las fracciones irreducibles entre 0 y 1 que se pueden crear a partir de fracciones con un denominador menor o igual a n , escritas en orden creciente. A esta sucesión $\{Fa_n\}$ donde $Fa_n = \{\frac{a}{b} | \frac{a}{b} \in [0, 1] \text{ y } (a, b) = 1, b \leq n\}$ se le conoce como la **sucesión de Farey** y a los números que aparecen en esta sucesión se les denominan **fracciones de Farey**.

Ejemplo 2.3.1. La sucesión de Farey para un valor específico de n contiene todas las fracciones irreducibles entre 0 y 1 con denominadores de hasta n , ordenadas de menor a mayor.

- Sucesión de Farey de orden $n = 1$:

$$Fa_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

- Sucesión de Farey de orden $n = 2$:

$$Fa_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}.$$

- Sucesión de Farey de orden $n = 3$:

$$Fa_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}.$$

- Sucesión de Farey de orden $n = 4$:

$$Fa_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.$$

En cada caso, las fracciones están en su forma irreducible y en orden creciente, cumpliendo la condición de que el denominador de cada fracción es menor o igual a n .

Definición 2.3.3. Dados $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$ irreducibles, se define a el **mediante** de estos números como

$$\frac{c}{d} := \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

Se dice que $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} \right)$ es una **terna de Farey** si $\frac{c}{d}$ es el mediante de $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$.

Ejemplo 2.3.2. *Considérese la sucesión de Farey de orden $n = 2$ ilustrada en el Ejemplo 2.3.1,*

$$Fa_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Sean $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ y $\frac{a'}{b'} = \frac{1}{1}$.

El mediante de estas dos fracciones se calcula como:

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, la terna de Farey correspondiente es

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right).$$

Si se organizan las fracciones irreducibles en forma de árbol binario utilizando la fórmula recursiva de la Definición 2.3.3 y tomando como nodo raíz a la terna

$$\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right)$$

resulta la representación que se muestra a continuación.

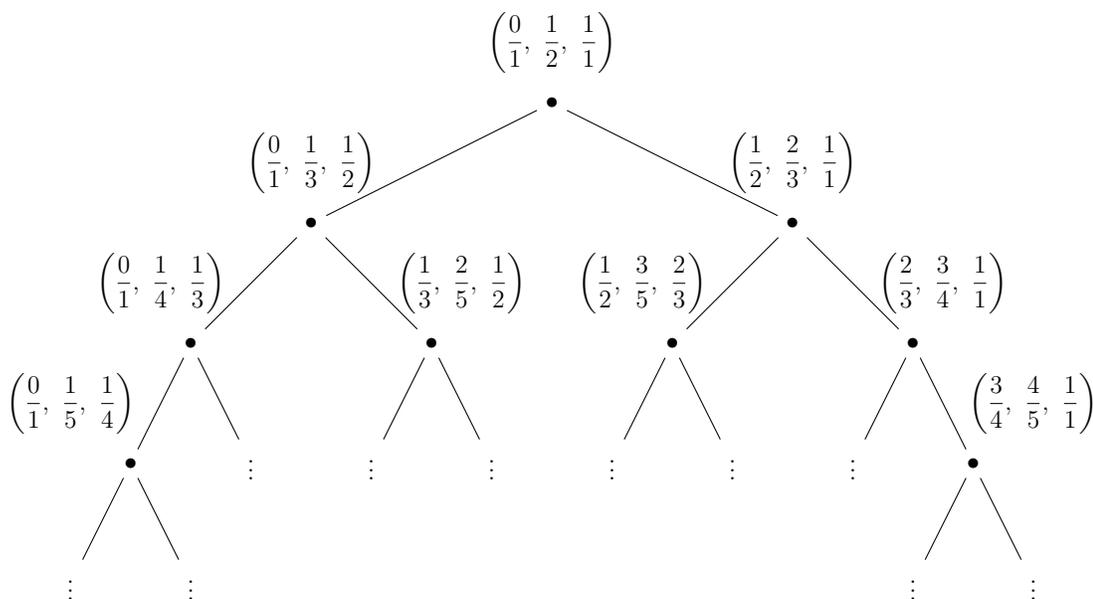


Figura 2.10: Árbol de Farey

Definición 2.3.4. *Un árbol con raíz similar al presentado en la Figura 2.10 es conocido como **árbol \mathcal{T}_F de Farey**.*

Ahora se procede a la construcción de una tabla que incorpora a la sucesión de Farey $\{Fa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En la primera fila, se escriben los números racionales

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}.$$

Para $n = 3, 4, \dots$, se escribe la fila n copiando la $(n-1)$ en orden pero insertando el mediente entre dos fracciones continuas

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

de la fila $(n-1)$.

$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{1}$			
$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Tabla 2.2: Fracciones de Farey

Siguiendo este procedimiento de forma iterativa para $n = 3, 4, \dots$, se obtiene un arreglo infinito de números racionales conocido como la **tabla de Farey**. Esta tabla no solo organiza las fracciones en orden creciente, sino que también exhibe propiedades notables.

Lema 2.3.1.

1. *Cada fila se compone de números racionales entre 0 y 1, que aumentan estrictamente de*

$$\frac{0}{1}, \quad a, \quad \frac{1}{1},$$

es decir,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}. \quad (2.7)$$

2. Sean

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

dos fracciones consecutivas de Farey en la misma fila, entonces

$$a'b - ab' = 1. \quad (2.8)$$

3. Toda fracción de la tabla 2.2 de Farey es irreducible.

Demostración:

1. En efecto, se asume que

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'},$$

entonces, por un lado, se tiene que

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'},$$

$$ab' < a'b,$$

$$ab + ab' < ab + a'b,$$

$$a(b+b') < b(a+a'),$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'},$$

y por otro,

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'},$$

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'},$$

$$b'a < a'b,$$

$$b'a + a'b' < a'b + a'b',$$

$$b'(a+a') < a'(b+b'),$$

$$\frac{a + a'}{b + b'} < \frac{a'}{b'}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a}{b} < \frac{a + a'}{b + b'} < \frac{a'}{b'}.$$

2. Se demostrará la validez a través de inducción matemática.

Bases de inducción: Claramente esto se cumple para la primera fila.

Hipótesis de inducción: Se asume que es cierto para la fila $n - 1$. Entonces para cualesquiera dos fracciones

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

consecutivas en la fila $n - 1$ fuerza a que en la siguiente fila dos fracciones consecutivas tienen que tener una de las siguientes formas:

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'},$$

o

$$\frac{a}{b}, \frac{a + a'}{b + b'},$$

o

$$\frac{a + a'}{b + b'}, \frac{a'}{b'}.$$

Si tienen la primera forma se cumple de inmediato por la hipótesis de inducción.

Si tienen la segunda forma, entonces

$$(a + a')b - a(b + b') = ab + a'b - ab - ab' = a'b - ab' = 1.$$

Si tiene la tercera forma, entonces

$$a'(b + b') - (a + a')b' = a'b + a'b' - ab' - a'b' = a'b - ab' = 1.$$

Con esto termina la prueba por inducción y se concluye que es válida para todo número natural n .

3. Sean

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

dos fracciones consecutivas en la tabla de Farey, entonces por el inciso 2 se tiene que

$$\begin{aligned}a'b - ab' &= 1, \\a'b + ab - ab - ab' &= 1, \\b(a' + a) - a(b' + b) &= 1.\end{aligned}$$

Por el algoritmo de la división se obtiene que

$$\text{mcd}(1, a' + a) = \text{mcd}(a' + a, b' + b),$$

pero $\text{mcd}(1, a' + a) = 1$, entonces

$$\text{mcd}(a' + a, b' + b) = 1,$$

así, por la Definición 2.3.1 se tiene que

$$\frac{a' + a}{b' + b}$$

es irreducible, ergo toda fracción en la tabla 2.2 de Farey es irreducible.

■

Definición 2.3.5. Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dos fracciones consecutivas en la tabla de Farey.

Si $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ y

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \right| = \frac{1}{bb'},$$

entonces se dice que $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ son **vecinos de Farey**.

Ejemplo 2.3.4. Considérese la sucesión de Farey de orden $n = 4$ enunciada en el Ejemplo 2.3.1:

$$Fa_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.$$

1. Las fracciones $\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \in Fa_4$ son vecinos de Farey, pues $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ y

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{1(3) - 1(4)}{4(3)} \right| \\ &= \left| \frac{3 - 4}{12} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{12} \right| \\ &= \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4(3)}. \end{aligned}$$

2. Las fracciones $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \in Fa_4$ no son vecinos de Farey, a pesar que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, no se cumple la igualdad requerida, pues

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{1(2) - 1(4)}{4(2)} \right| \\ &= \left| \frac{2 - 4}{8} \right| \\ &= \left| \frac{-2}{8} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{4} \right| \\ &= \frac{1}{4} \\ &\neq \frac{1}{4(2)}. \end{aligned}$$

Con base en el Lema 2.3.1 se deducen las siguientes propiedades de los números de Farey cuyas demostraciones se encuentran en las páginas 52 y 53 del libro *Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture* [5].

Teorema 2.3.1 (Propiedades de los números de Farey).

1. Sean

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$$

vecinos de Farey, entonces la mediante de los números

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

es la única fracción con el denominador más pequeño.

2. Sean

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

con

$$0 \leq \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \leq 1$$

tales que $a'b - ab' = 1$, entonces

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{a'}{b'}$$

son vecinos de Farey en alguna fila y estos están contenidos en una terna de Farey.

3. En la tabla de Farey, todo número racional entre 0 y 1 se puede generar como el mediante de dos números sólo una vez.

Según el Teorema 2.3.1, cada número racional $t \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ aparece exactamente una vez como elemento medio en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Como resultado, los números de Markov tienen una indexación.

Definición 2.3.6. Se define la **correspondencia** entre las ternas de Farey y las ternas de Markov de la siguiente manera:

$$\phi : \mathbb{Q}_{(0,1)} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$t \longmapsto m_t$$

dónde el número de Markov $m \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ recibe el índice $t \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$, que corresponde a su posición en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Cuando $m = m_t$, se dice que t es el índice de Farey de m_t .

Ejemplo 2.3.5.

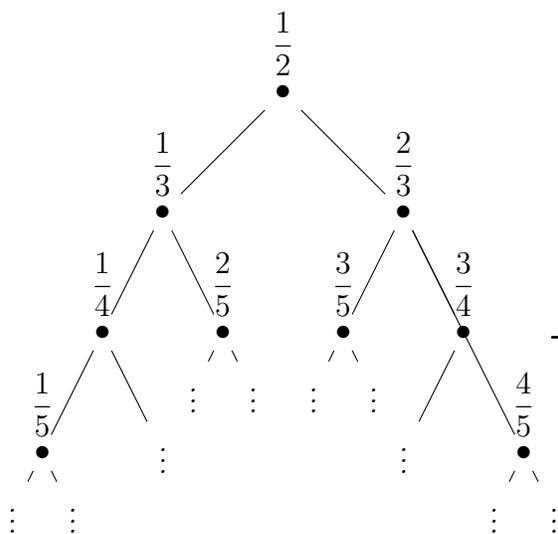


Figura 2.11: Árbol con median-
tes de Farey

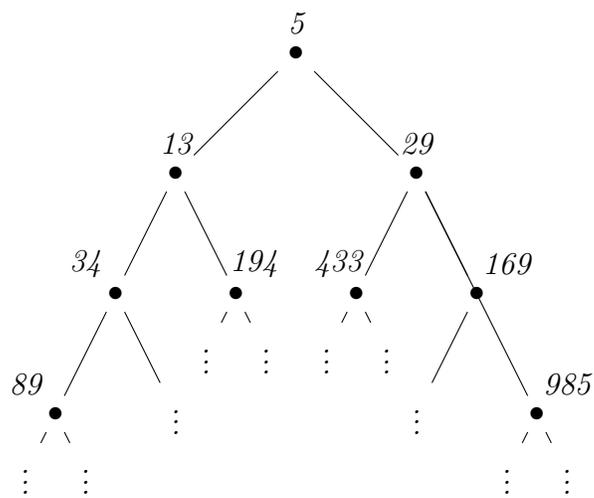
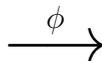


Figura 2.12: Árbol con números
de Markov

Al construir un árbol como en la Figura 2.11, con vértices etiquetados con los medianes de cada terna de Farey y otro árbol como en la Figura 2.12 con vértices etiquetados con los valores máximos de cada terna no singular de Markov, se puede ver con mayor claridad como consiste la indexación ϕ , siendo así que

- Si se considera a $t = \frac{1}{2}$, entonces

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 5,$$

por lo que

$$m_{\frac{1}{2}} = 5.$$

- Si se considera a $t = \frac{1}{3}$, entonces

$$\phi\left(\frac{1}{3}\right) = 13,$$

por lo que

$$m_{\frac{1}{3}} = 13.$$

- Si se considera a $t = \frac{2}{3}$, entonces

$$\phi\left(\frac{2}{3}\right) = 29,$$

por lo que

$$m_{\frac{2}{3}} = 29.$$

- Si se considera a $t = \frac{2}{5}$, entonces

$$\phi\left(\frac{2}{5}\right) = 194,$$

por lo que

$$m_{\frac{2}{5}} = 194.$$

- Si se considera a $t = \frac{3}{5}$, entonces

$$\phi\left(\frac{3}{5}\right) = 433,$$

por lo que

$$m_{\frac{3}{5}} = 433.$$

De manera general la indexación ϕ para los números de Fibonacci y de Pell que aparecen en el árbol de la Figura 2.12 está dada por las siguientes relaciones, respectivamente:

$$F_{2n+1} = m_{\frac{1}{n}} \quad (n \geq 2), \quad P_{2n-1} = m_{\frac{n-1}{n}} \quad (n \geq 2).$$

Por lo tanto, debido a esta relación que posee el árbol de Farey con el árbol de Markov, permite enunciar la siguiente variante de la Conjetura 1.

Conjetura 3. *La indexación ϕ es inyectiva.*

Ambas conjeturas expresan la unicidad de los números de Markov desde perspectivas diferentes. La Conjetura 1 establece que cada número de Markov aparece como máximo una vez en una terna, asegurando que no se repite en distintas

combinaciones. Por otro lado, la Conjetura 3, al afirmar que la indexación ϕ es inyectiva, formaliza esta unicidad al nivel de la correspondencia, garantizando que cada número de Markov tenga una posición única dentro de la estructura.

Al ser conjeturas equivalentes, si una de estas conjeturas es cierta, implica directamente la validez de la otra.

Capítulo 3

Álgebras de conglomerado

A lo largo de este capítulo se van a introducir varios conceptos así como algunas de las propiedades de las álgebras de conglomerado. La fuente principal son los apuntes del curso sobre álgebras de conglomerado del manuscrito de Lara Bossinger [10].

Las Álgebras de Conglomerado son una rama relativamente nueva de las matemáticas cuyos fundamentos combinan al álgebra, la geometría algebraica y la combinatoria. Estas álgebras se originaron en la teoría de la positividad total de grupos algebraicos y bases canónicas para grupos cuánticos [19].

La historia de las álgebras de conglomerado se remonta a inicios del siglo XXI, cuando Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky introdujeron por primera vez el concepto de “conglomerado”. Desde entonces, las álgebras de conglomerado han sido objeto de intensa investigación y han demostrado tener conexiones profundas con diversos temas matemáticos. Estas álgebras han encontrado aplicaciones en la teoría de representación, la teoría de singularidades, la física matemática y la física teórica.

El concepto central en las Álgebras de Conglomerado es el de “mutación de conglomerados”, que describe las relaciones entre los generadores en un álgebra. Estas relaciones están codificadas en matrices llamadas “matrices de intercambio”, que representan ciertas relaciones distinguidas entre los generadores. Estas álgebras tienen propiedades notables [10]. Las matrices de intercambio pueden describirse por medio de carcajes. Este es el enfoque que se tomará aquí.

3.1. Carcajes

Coloquialmente hablando un carcaj es un recipiente para flechas que usan los arqueros en el hombro para transportarlas [31], sin embargo, en matemáticas este término se define rigurosamente como sigue:

Definición 3.1.1. Si Q es una cuarteta en la cuál los elementos son

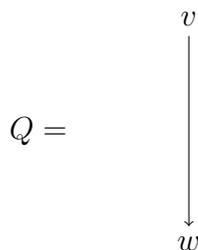
- $Q_0 :=$ un conjunto de vértices.
- $Q_1 :=$ un conjunto de flechas entre los vértices de Q_0 .
- $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ funciones que asignan a cada flecha su vértice inicial y final, respectivamente.

entonces a $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ se le denomina **Carcaj**.

Todo carcaj Q admite una representación visual colocando una etiqueta por cada vértice de $v \in Q_0$

v

y una flecha entre los vértices v, w ,

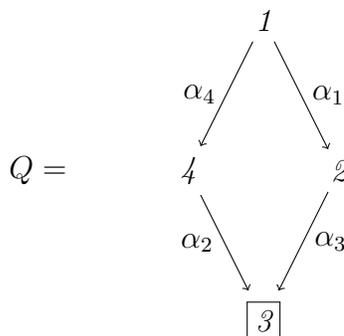


Definición 3.1.2 (Tipos de flechas y vértice). Dentro de los conjuntos Q_0 y Q_1 se define a

- Sean $k \in Q_0$ y $\alpha \in Q_1$, si $s(\alpha) = k$ ó $t(\alpha) = k$, entonces se dice que α es una **flecha incidente** al vértice k .
- $F \subseteq Q_0$ es un conjunto distinguido de vértices llamados **vértices congelados**, los cuales se dibujan dentro de una caja, es decir, si $i \in F$ entonces i será representado por \boxed{i} .
- A los vértices que no pertenecen al conjunto F se les denominan **vértices mutables** y se denotan como $M = Q_0 \setminus F$.

Nota 3.1.1. Teniendo en cuenta el conjunto $Q_0 = \{1, \dots, n + m\}$ de un carcaj finito, se dirá que los vértices mutables son $1, \dots, n$ y los vértices congelados son $n + 1, \dots, n + m$.

Ejemplo 3.1.2. En el siguiente ejemplo se puede observar claramente que $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y que $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ forman el siguiente carcaj



Para determinar a $s(\alpha_i)$, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, o sea, el origen de cada flecha α_i se identifica observando de dónde parte cada flecha.

- $s(\alpha_1) = 1$, es decir, la flecha α_1 parte del vértice 1.
- $s(\alpha_2) = 4$, es decir, la flecha α_2 parte del vértice 4.
- $s(\alpha_3) = 2$, es decir, la flecha α_3 parte del vértice 2.
- $s(\alpha_4) = 1$, es decir, la flecha α_4 parte del vértice 1.

Ahora, para determinar a $t(\alpha_i)$, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, es decir, el destino de cada flecha α_i se identifica observando hacia dónde apunta cada flecha.

- $t(\alpha_1) = 2$, o sea, la flecha que apunta a 2.
- $t(\alpha_2) = 3$, o sea, la flecha que apunta a 3.
- $t(\alpha_3) = 3$, o sea, la flecha que apunta a 3.
- $t(\alpha_4) = 4$, o sea, la flecha que apunta a 4.

Más aún, los vértices congelados son $F = \{3\}$ y los vértices mutables son $M = \{1, 2, 4\}$.

Se procederá a describir la clase de carcajes objeto de nuestro estudio.

Nota 3.1.2. Las siguientes hipótesis se imponen a cada carcaj Q que se tome en cuenta a partir de ahora.

Hipótesis 1. Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

Hipótesis 2. Los vértices congelados de Q carecen de flechas entre ellos.

Hipótesis 3. Q no tiene ni lazos ni 2-ciclos, es decir, las siguientes subgraficas no están permitidas



En virtud de lo anterior, se define una de las ideas cruciales para la definición de álgebras de conglomerados.

Definición 3.1.3. Sean Q un carcaj y $k \in M$. Se define a $\mu_k(Q)$ como la **mutación** de Q en **dirección** k modificando a Q conforme a los siguientes cuatro pasos:

1. Se agrega una flecha de $i \rightarrow j$ por cada camino orientado $i \rightarrow k \rightarrow j$.
2. La dirección de todas las flechas incidentes a k se invierten.
3. De haberse originado en pasos anteriores, se elimina una colección máxima de 2-ciclos.
4. De haberse originado en pasos anteriores se eliminan las flechas entre los vértices congelados.

Observación 3.1.1. En la Definición 3.1.3, se establece que los conjuntos de vértices de Q y $\mu_k(Q)$ son los mismos. Por lo tanto, ambos carcajes comparten el mismo conjunto de vértices mutables y, en consecuencia, el mismo conjunto de vértices congelados.

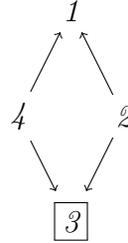
Ejemplos 3.1.1.

- Considerando el carcaj del Ejemplo 3.1.2. Se procede a realizar los cálculos necesarios para determinar a $\mu_1(Q)$ y $\mu_2(Q)$ siguiendo los pasos de la Definición 3.1.3.

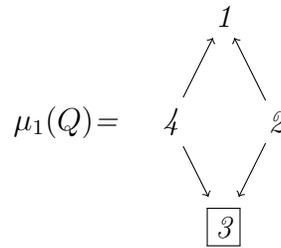
1. Para $\mu_1(Q)$:

En el primer paso, dado que no existen caminos $i \rightarrow 1 \rightarrow j$ entonces no se le agrega ninguna flecha.

En el segundo paso se invierten todas las flechas incidentes al vértice 1, resultando

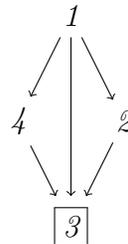


Finalmente, como no hay 2-ciclos ni tampoco hay flechas entre vértices congelados entonces la mutación de Q en dirección a 1 es



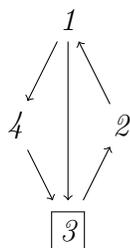
2. Para $\mu_2(Q)$:

En el primer paso se agrega una flecha de $1 \rightarrow 3$, pues en el carcaj existe el camino orientado $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

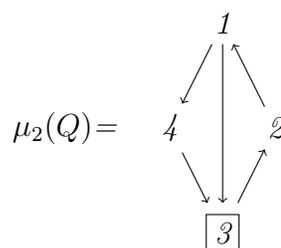


En la segunda etapa, se procede a invertir la dirección de todas las

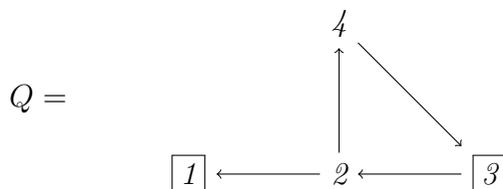
flechas incidentes al vértice 2



Finalmente, como no hay 2-ciclos ni tampoco hay flechas entre vértices congelados entonces la mutación de Q en dirección a 2 es

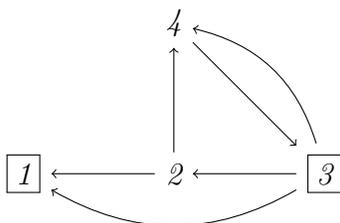


- Considérese el siguiente carcaj Q , con dos vértices congelados y dos vértices mutables:

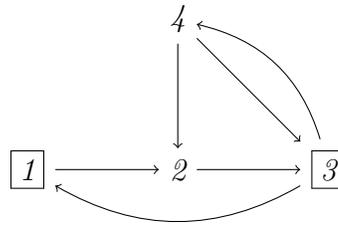


Se realiza el cálculo para determinar $\mu_2(Q)$, aplicando los pasos descritos en la Definición 3.1.3.

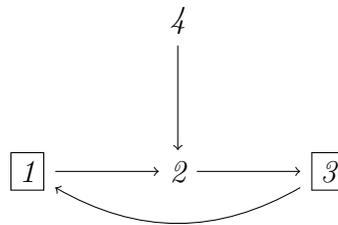
Como primer paso, se añaden las flechas $3 \rightarrow 1$ y $3 \rightarrow 4$, dado que en Q existen los caminos $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ y $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, respectivamente:



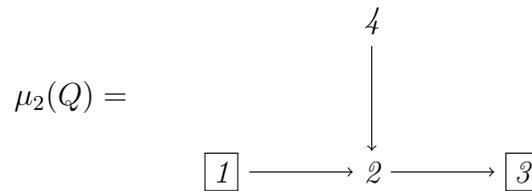
En seguida, se invierten todas las flechas incidentes al vértice 2:



Como tercer paso, se elimina la colección máxima de 2-ciclo presente entre los vértices 3 y 4.



Finalmente, se elimina la flecha que conecta el vértice 3 con el vértice 1, dado que ambos son vértices congelados. Resultando así la mutación de Q en dirección al vértice 2.

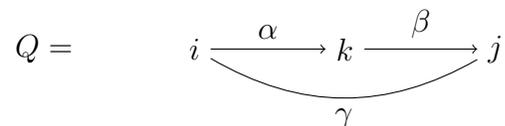


El teorema que sigue representa un hallazgo fundamental en lo que respecta a la mutación de los carcajes.

Teorema 3.1.1. *La mutación de un carcaj es una involución, es decir, para toda $k \in M$ se tiene que $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$.*

Demostración:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$ y Q un carcaj con un camino



con α, β, γ el número de flechas correspondientes y $k \in M$. Se impone las siguientes reglas sobre α, β, γ :

1. Si $\gamma > 0$, entonces la dirección de la flecha es la siguiente:

$$i \xrightarrow{\gamma} j$$

2. Si $\gamma < 0$, entonces la dirección de la flecha es la siguiente:

$$i \xleftarrow{-\gamma} j$$

3. Si las direcciones de las flechas son las siguientes:

$$i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$$

entonces $\alpha\beta > 0$.

4. Si las direcciones de las flechas son las siguientes:

$$i \xleftarrow{\alpha} k \xleftarrow{\beta} j$$

entonces $\alpha\beta < 0$.

Por demostrar que $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$. Para esto, se realizaran los cálculos de $\mu_k(Q)$ conforme a los procedimientos estipulados en la Definición 3.1.3.

En el primer paso se añaden las $\alpha\beta$ flechas $i \rightarrow j$, quedando de la siguiente manera:

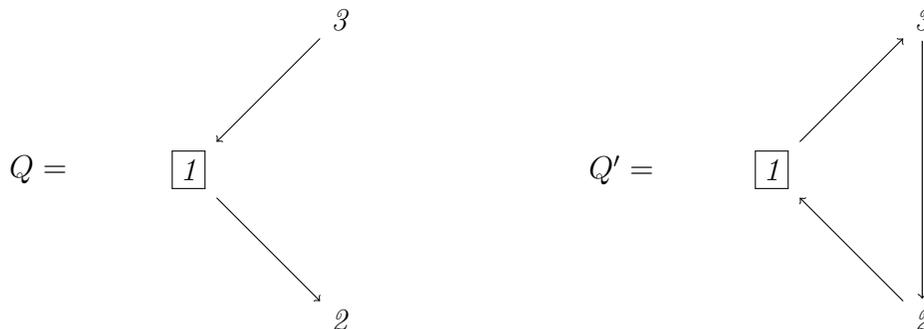
$$\begin{array}{c} i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j \\ \text{-----} \\ \gamma + \alpha\beta \end{array}$$

Finalmente, se invierten todas las flechas adyacentes al vértice k , obteniendo así:

$$\mu_k(Q) = \begin{array}{c} i \xleftarrow{\alpha} k \xleftarrow{\beta} j \\ \text{-----} \\ \gamma + \alpha\beta \end{array}$$



2. Si consideran el siguiente par de carcajes



entonces se tiene que $Q \not\sim Q'$, ya que no existe una secuencia de mutaciones en vértices mutables que, al aplicarse a Q , produzca Q' .

3.2. El árbol n -regular

Para una comprensión más profunda del proceso de mutación de carcajes, es útil considerar una gráfica en el cual los nodos representan los carcajes que inciden al aplicar sucesivamente el proceso de mutación.

Más precisamente, este gráfico se construye de tal manera que cada nodo corresponde a un carcaj y las aristas entre ellos representan las mutaciones individuales. Así, al transitar de un nodo a otro a través de una arista, se está efectuando una mutación iterada del carcaj asociado al nodo de origen, resultando en el carcaj correspondiente al nodo de destino.

Este enfoque permite visualizar el conjunto de todos los carcajes equivalentes bajo mutación, dónde cada nodo del espacio está asociado a un carcaj dado [10].

Definición 3.2.1. Un **árbol n -regular**, denotado como \mathcal{T}_n es un árbol en el que las aristas están etiquetadas de forma única con los elementos de un conjunto $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, el cual satisface las siguientes propiedades:

1. Cada vértice del árbol tiene exactamente n aristas incidentes, lo que lo convierte en una gráfica n -regular.

2. Las aristas incidentes a cada vértice tienen etiquetas distintas, es decir, cada arista se identifica de manera única mediante una etiqueta tomada del conjunto $[n]$.
3. Cualesquiera dos vértices de \mathcal{T}_n están conectados por un único camino.
4. El árbol \mathcal{T}_n tiene un vértice especial etiquetado con t_0 , el cual se le denomina **vértice de inicio**.

Ejemplo 3.2.1. Si $n = 1$, entonces el árbol \mathcal{T}_1 es trivial y consta de 2 vértices y una arista:

$$\mathcal{T}_1 = \begin{array}{c} t_0 \\ \bullet \text{---} 1 \text{---} \bullet \end{array}$$

Sin embargo, para $n > 1$ el árbol \mathcal{T}_n es una gráfica infinita. Seguidamente, se presenta una parte del árbol 2-regular.

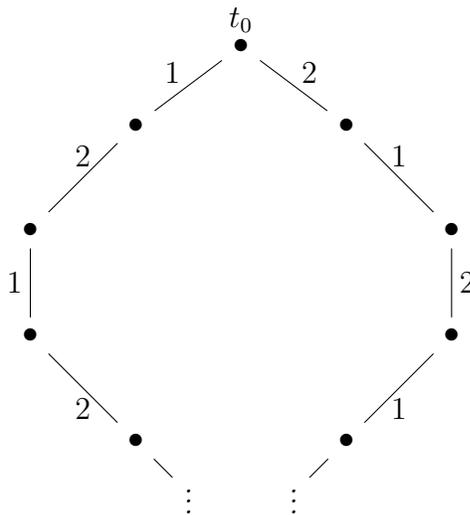


Figura 3.1: Una porción del árbol \mathcal{T}_2 . Se excluyen las etiquetas de las aristas más cortas.

A continuación se presenta una parte del árbol 3-regular

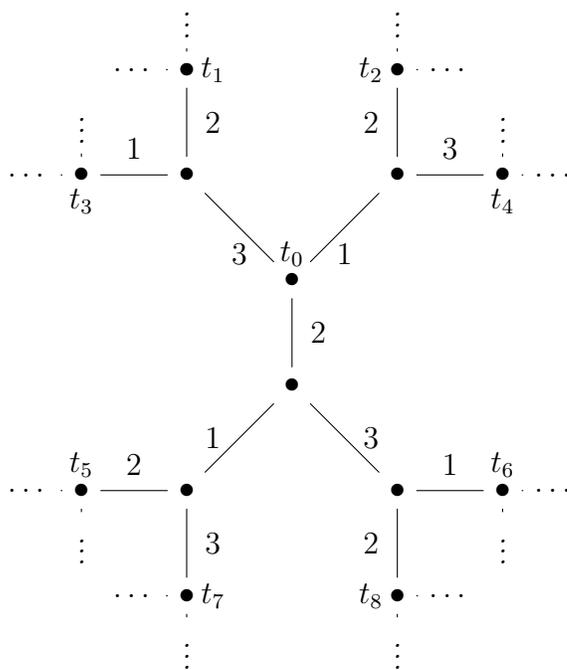


Figura 3.2: Una porción del árbol \mathcal{T}_3 . Se excluyen las etiquetas de las aristas más cortas.

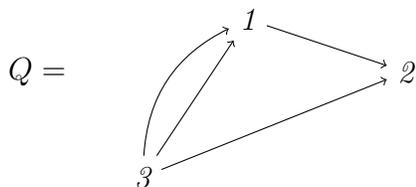
Definición 3.2.2. Dos vértices $t, t' \in \mathcal{T}_n$ están a **distancia** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si el camino más corto que conecta a t con t' en \mathcal{T}_n consta de k aristas.

Ejemplo 3.2.2. En la Figura 3.2 el vértice t_1 está a una distancia $k = 2$ del vértice t_0 y el vértice t_2 está a una distancia de $k = 5$ del vértice t_5 .

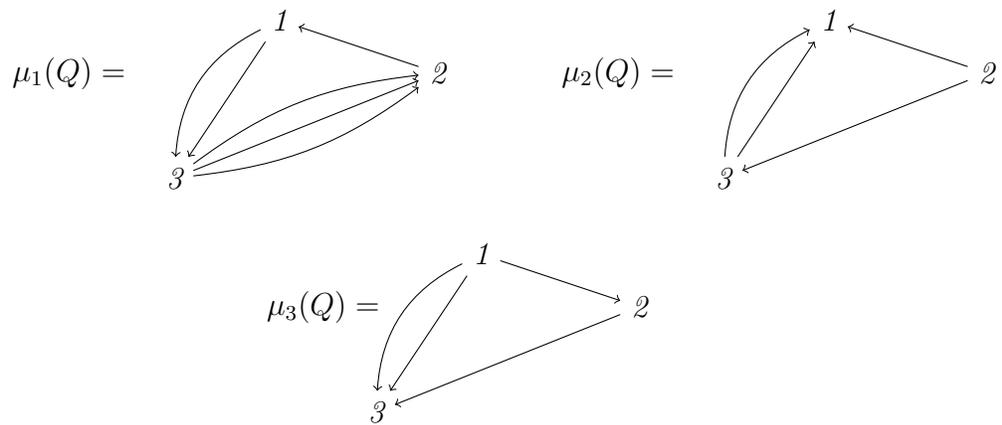
Nota 3.2.1. Dado que la mutación es una involución (ver Teorema 3.1.1), cada vértice del árbol n -regular está asociado a un único carcaj.

Para que quede más claro la Nota 3.2.1 y la relación que tienen los carcajes con el árbol n -regular, se procede a analizar el siguiente ejemplo:

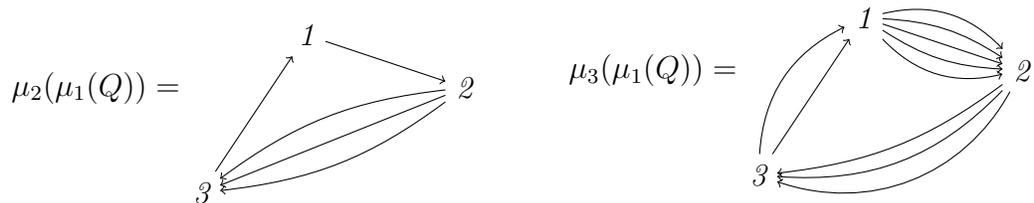
Ejemplo 3.2.3. Considérese el siguiente carcaj



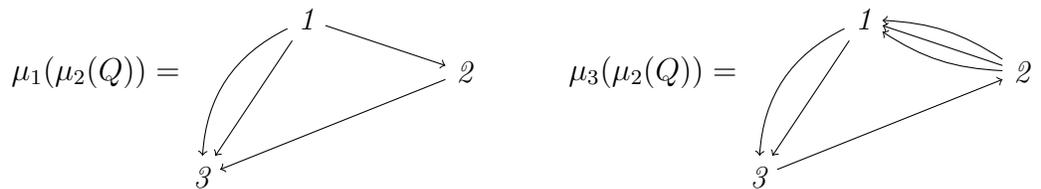
Aplicando los pasos establecidos en la Definición 3.1.3 al carcaj Q , se obtienen las siguientes mutaciones de Q :



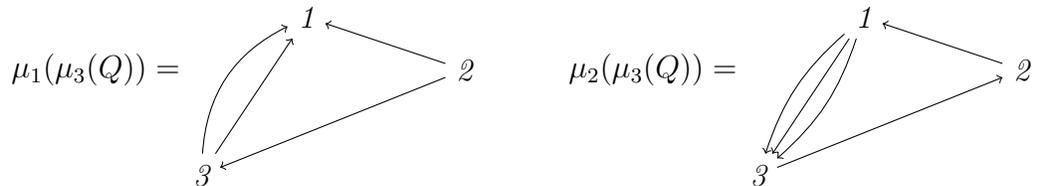
Siguiendo los pasos enunciados en la Definición 3.1.3 al carcaj $\mu_1(Q)$, se obtienen las siguientes mutaciones:



Siguiendo el procedimiento establecido en la Definición 3.1.3 al carcaj $\mu_2(Q)$, se obtienen las siguientes mutaciones:



De acuerdo con el procedimiento definido en la Definición 3.1.3, al aplicar este al carcaj $\mu_3(Q)$, se obtienen las mutaciones que se presentan a continuación.



De acuerdo con la definición de mutación, es posible calcular una variedad de carcajes. Para organizar estos resultados de manera más clara, se utiliza un árbol n -regular, en el cual las mutaciones del carcaj Q se estructuran de forma sistemática. El vértice inicial se etiqueta como Q , mientras que las flechas se identifican con el índice correspondiente a la mutación realizada. Los nodos resultantes se etiquetan como $\mu_i(Q)$, donde $i \in \{1, 2, 3\}$, representando la mutación aplicada.

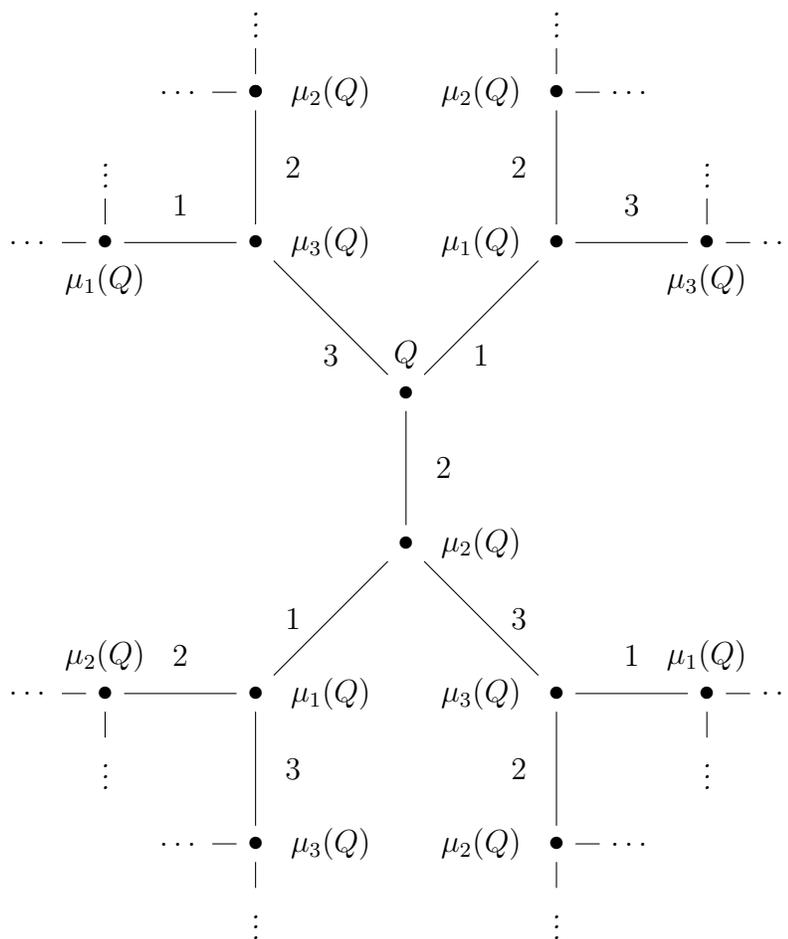


Figura 3.3: Organización del carcaj Q en el árbol \mathcal{T}_3 . Se excluyen las etiquetas de las aristas más cortas.

3.3. Semillas

Las semillas y las mutaciones son nociones necesarias para definir a las álgebras de conglomerado. Uno podría imaginar que las semillas de dicho álgebra se plantan en la raíz de un árbol regular. A medida que el árbol crece, se producen mutaciones que modifican a las semillas. Estas mutaciones determinan las relaciones entre los elementos del álgebra [10].

Definición 3.3.1. *Se define y denota a $\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, \dots, u_{n+m})$ como el **campo de funciones racionales** en $n + m$ variables sobre \mathbb{C} .*

Ejemplos 3.3.1.

1. Considérese a $n = 2$ y $m = 1$, por lo que se tienen 3 variables: u_1, u_2, u_3 .

Una función racional es:

$$f(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1^2 + u_2^3}{u_3^2 + u_1 u_2}, \text{ para } u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}.$$

En este caso, f es una función racional de tres variables. El numerador y el denominador son ambos polinomios en las tres variables, y esta es un elemento del campo de funciones racionales $\mathbb{C}(u_1, u_2, u_3)$.

2. Ahora, tómesese en cuenta a $n = 1$ y $m = 2$, , es decir, tenemos 3 variables: u_1, u_2, u_3 .

Una posible función racional es:

$$g(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1^3 + u_2}{u_1^2 + u_3^2}, \text{ para } u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}.$$

En este caso, la función g es también una función racional en las tres variables, con el numerador y denominador siendo polinomios en esas tres variables.

Nótese que ambas funciones están definidas en \mathbb{C} y las funciones solo pueden indeterminarse cuando el denominador es igual a cero.

Estas son dos funciones que pertenecen al campo de funciones racionales $\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, u_2, u_3)$, ya que son cocientes de polinomios en las variables u_1, u_2, u_3 .

Definición 3.3.2. Sean \mathcal{F} el campo de funciones racionales y K un subcampo de \mathcal{F} . Se dice una secuencia finita de elementos $u_1, \dots, u_{n+m} \in \mathcal{F}$ es **algebraicamente dependientes** sobre K si existe un polinomio f no nulo con coeficientes en K tal que

$$f(u_1, \dots, u_{n+m}) = 0.$$

En caso de que no exista tal polinomio f , se dice que los elementos son **algebraicamente independientes** sobre K .

Ejemplos 3.3.2.

1. Si $K = \mathbb{Q}$, entonces, este subcampo K es algebraicamente dependiente sobre el campo de los números racionales, dado que el polinomio no nulo

$$f(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2$$

resulta cero cuando $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = -2$.

2. Sea $K = \mathbb{Q}(u_1, u_2)$, el campo de funciones racionales en dos variables u_1, u_2 con coeficientes en \mathbb{Q} .

Ahora, considérese los elementos $u_1 = \sqrt{2}$ y $u_2 = \sqrt{3}$ en \mathcal{F} . Se procede a demostrar que u_1 e u_2 son algebraicamente independientes sobre \mathbb{Q} .

supóngase, por contradicción, que u_1 e u_2 son algebraicamente dependientes sobre \mathbb{Q} .

Entonces, existe un polinomio no nulo $f(U_1, U_2) \in \mathbb{Q}[U_1, U_2]$ tal que $f(u_1, u_2) = 0$.

considérese $f(U_1, U_2)$ como:

$$f(U_1, U_2) = \sum_{i,j} a_{i,j} U_1^i U_2^j$$

con coeficientes $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$.

Se observa que los términos en la suma son combinaciones lineales de potencias de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Como $f(u_1, u_2) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{i,j} u_1^i u_2^j &= \sum_{i,j} a_{i,j} (\sqrt{2})^i (\sqrt{3})^j \\ &= \sum_{i,j} a_{i,j} 2^{\frac{i}{2}} 3^{\frac{j}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que u_1 y u_2 son variables independientes en el campo de funciones racionales $\mathbb{Q}(u_1, u_2)$, la única forma en que esta suma puede ser cero es si todos los coeficientes $a_{i,j}$ son cero. Pero esto contradice la suposición de que $f(U_1, U_2)$ es un polinomio no nulo.

Por lo tanto, $u_1 = \sqrt{2}$ y $u_2 = \sqrt{3}$ deben ser algebraicamente independientes sobre \mathbb{Q} .

Definición 3.3.3. Un **conjunto libre generador** de \mathcal{F} sobre \mathbb{C} es un subconjunto $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ de \mathcal{F} que es algebraicamente independiente sobre \mathbb{C} y tal que $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+m})$.

Ejemplo 3.3.1. Considérese el campo de funciones racionales $\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, u_2, u_3)$, que tiene $n + m = 3$ variables.

Un posible conjunto libre generador de \mathcal{F} sobre \mathbb{C} es $\{u_1, u_2, u_3\}$. Este conjunto es

algebraicamente independiente sobre \mathbb{C} , ya que no existe una relación polinómica no trivial entre u_1, u_2, u_3 con coeficientes en \mathbb{C} .

Además, todo elemento de \mathcal{F} puede escribirse como una función racional de u_1, u_2, u_3 , por lo que se cumple que:

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, u_2, u_3).$$

Definición 3.3.4. Un par $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$ es **una semilla etiquetada** en \mathcal{F} de rango n que está dada por:

1. $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathcal{F}^n$ es una $(n + m)$ – tupla conformado por la n – tupla, $x = (x_1, \dots, x_n)$ y por la m – tupla, $x' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ tal que el conjunto $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$ es libre generador de \mathcal{F} sobre \mathbb{C} .
2. Q es un carcaj con n vértices mutables y m vértices congelados.

Toda semilla $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$ admite una representación visual colocando una etiqueta por cada variable de conglomerado $x_i \in \tilde{\mathbf{x}}$ con $i \in \{1, \dots, n + m\}$.

$$x_1$$

y una flecha entre los vértices $x_1, x_2 \in \tilde{\mathbf{x}}$

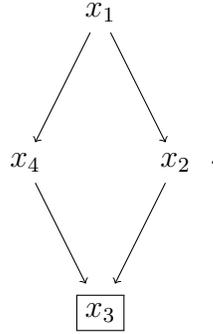
$$x_1 \longrightarrow x_2$$

Considérese una semilla denotada por el par $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$, se usará la siguiente nomenclatura:

1. $\tilde{\mathbf{x}}$ es el conglomerado extendido.
2. x es el conglomerado.
3. x_1, \dots, x_n son las variables de conglomerado.
4. x_{n+1}, \dots, x_{n+m} son las variables congeladas.

Más aún el término “etiquetado” en la Definición 3.3.4 indica que $\tilde{\mathbf{x}}$ es una $n + m$ -tupla ordenada.

Ejemplo 3.3.2. La semilla asociada al carcaj Q del Ejemplo 3.1.2 es



Definición 3.3.5. Sea k un vértice mutable de Q . Se define y denota a la **mutación en dirección k de la semilla** $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$ como

$$\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = (\tilde{\mathbf{x}}', \mu_k(Q)),$$

dónde

1. $\mu_k(Q)$ es la mutación del carcaj en dirección a k dada en la Definición 3.1.3.
2. $\tilde{\mathbf{x}}' = (x'_1, \dots, x'_{n+m})$ dónde $x'_i = x_i$ si $i \neq k$ y x'_k se determina a partir de la siguiente relación de intercambio

$$x'_k = \frac{\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j}{x_k}, \quad (3.1)$$

dónde el primer (resp. segundo) producto corre sobre todas las flechas de Q que terminan (resp. empiezan) en k .

Nota 3.3.1.

1. El producto vacío es 1. En particular, si no hay ninguna flecha que entre (resp. sale) de k , entonces el sumando en (3.1) que corresponde a las flechas que entren (resp. salen) de k es igual a 1.
2. La mutación $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}', Q)$ admite otra notación, conocida como notación simplificada. En esta notación, cada etiqueta del nodo del carcaj le corresponde un elemento de $\tilde{\mathbf{x}}'$.

Ejemplos 3.3.3.

1. Considérese el carcaj Q del Ejemplo 3.1.2 y sea $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_4, x_3)$. La tupla $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$ es una semilla etiquetada que tienen $n = 3$ variables de conglomerado y $m = 1$ variables congeladas.

Se procede a efectuar los cálculos pertinentes para determinar

$$\mu_1(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = (\tilde{\mathbf{x}}', \mu_1(Q)).$$

Se usará la ecuación (3.1) de la Definición 3.3.5 para llevar a cabo el cálculo de $\tilde{\mathbf{x}}'$.

Para el primer término de la suma, se toman en cuenta todas las flechas que terminan en el vértice 1, puesto que no hay ninguna flecha, por el primer apartado de la Nota 3.3.1, el primer sumando es 1.

Para el segundo sumando, se toma en consideración a las dos flechas que salen del vértice 1: una termina en el vértices 2 y la otra en el vértice 4, por ello este sumando es x_2x_4 . por lo cual

$$x'_1 = \frac{1 + x_2x_4}{x_1},$$

así

$$\tilde{\mathbf{x}}' = (x'_1, x_2, x_3, x_4).$$

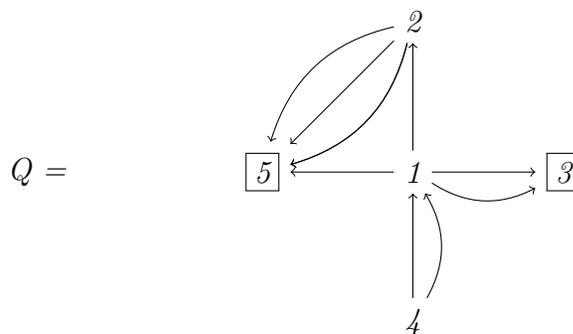
El carcaj $\mu_2(Q)$ se calculó en los Ejemplos 3.1.1. Por lo tanto,

$$\mu_1(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = (\tilde{\mathbf{x}}', \mu_1(Q)) = \left((x'_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad \begin{array}{c} x_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_4 \quad x_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{x_3} \end{array} \right).$$

En notación simplificada, la mutación de la semilla en dirección 1 resulta:

$$\mu_1(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = \begin{array}{c} \frac{1 + x_2x_4}{x_1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_4 \quad x_2 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \boxed{x_3} \end{array}$$

2. Sean $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_5)$ y



tal que $(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$ es una semilla etiquetada, se procede a calcular a $\mu_1(\tilde{\mathbf{x}}, Q)$.

Usando la ecuación (3.1) de la Definición 3.3.5 para llevar a cabo el cálculo de $\tilde{\mathbf{x}}'$.

Para el primer sumando se consideran las dos flechas que terminan en el vértice 1: ambas salen del vértice 4, por ello este sumando es x_4^2 .

Para el segundo sumando, se consideran las cuatro flechas emergentes del vértice 1: una termina en el vértice 5, dos terminan en el vértice 3 y una termina en el vértice 2, por ello este sumando es $x_2x_3^2x_5$, por lo cual

$$x'_1 = \frac{x_4^2 + x_2x_3^2x_5}{x_1},$$

así

$$\tilde{\mathbf{x}}' = (x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

nición 3.3.5. Se tiene que $\widetilde{\mathbf{x}}'' = (x_1, \dots, x_k'', \dots, x_{n+m})$ dónde

$$x_k'' = \frac{\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j}{x_k'}.$$

Es importante ver que los productos están indexados por flechas en $\mu_k(Q)$. Sustituyendo a x_k' por su igualdad

$$x_k'' = \frac{\prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j}{\prod_{i \rightarrow k \in \mu_k(Q)} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in \mu_k(Q)} x_j} = \frac{\left(\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j \right) x_k}{\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j} = x_k.$$

La última igualdad se cumple pues

$$\begin{aligned} \{i \rightarrow k \in Q\} &= \{k \rightarrow j \in \mu_k(Q)\}, \\ \{k \rightarrow j \in Q\} &= \{i \rightarrow k \in \mu_k(Q)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la mutación de semillas es una involución. ■

Considerando que la mutación de semillas constituye una involución, se deduce que los vértices del árbol \mathcal{T}_n no solamente parametrizan los carcajes equivalentes por mutación a Q , sino que también parametrizan a las semillas equivalentes por mutación a una semilla inicial dada (x_{t_0}, Q_{t_0}) .

Definición 3.3.6. *Un patrón de semillas de rango n es una asignación que asocia a cada vértice del árbol \mathcal{T}_n con una semilla $(\widetilde{\mathbf{x}}_t, Q_t)_{t \in \mathcal{T}_n}$, de tal manera que:*

- *Al vértice inicial del árbol se le asocia la semilla inicial (x_{t_0}, Q_{t_0}) .*
- *Para cualquier par de vértices $t, t' \in \mathcal{T}_n$ conectados por una arista etiquetada con k , se cumple que:*

$$\mu_k(\widetilde{\mathbf{x}}(t), Q) = (\widetilde{\mathbf{x}}(t'), Q),$$

dónde $\widetilde{\mathbf{x}}(t') = (x_{1;t'}, \dots, x_{(n+m);t'})$.

Este patrón se denota por \mathcal{P}_n .

Ejemplo 3.3.3. *Sea*

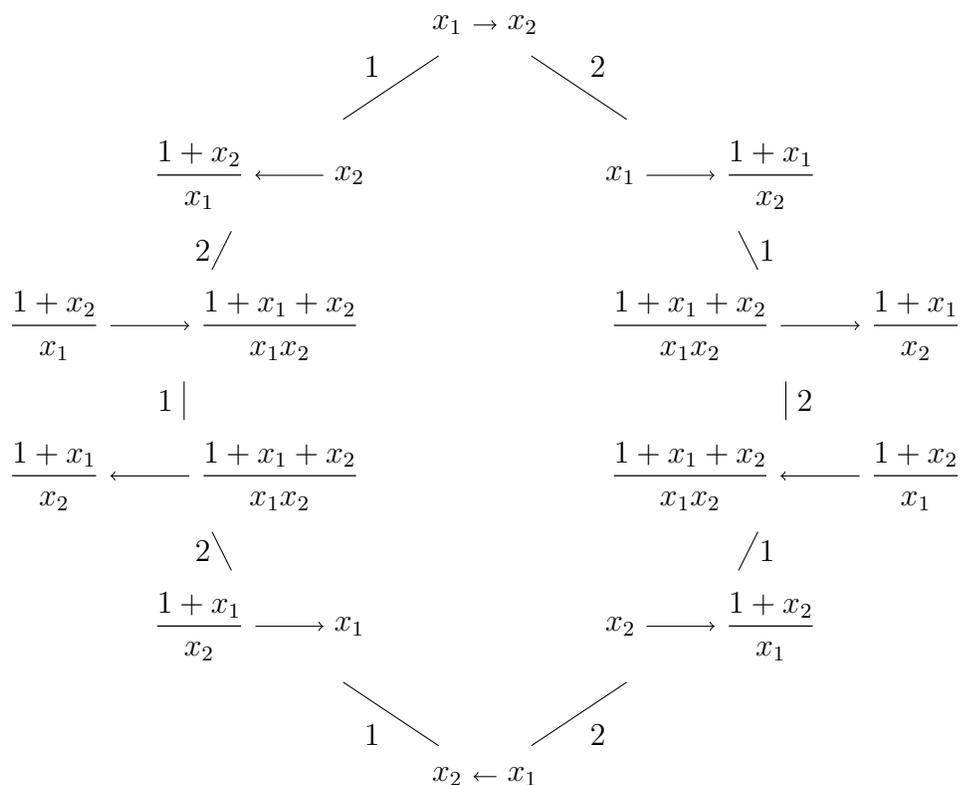
$$((x_1, x_2), 1 \longrightarrow 2)$$

la semilla inicial.

Considérese la otra notación de la semilla:

$$x_1 \rightarrow x_2$$

Por lo tanto, el patrón de semillas de rango 2 es:



Nota 3.3.2. *Nótese que los patrones de semillas están bien definidos ya que la mutación de semillas es una involución.*

Definición 3.3.7. *Sean $t \in \mathcal{T}_n$ y (x_t, Q_t) una semilla asociada a \mathcal{P}_n . Se dice que (x_t, Q_t) está a **distancia** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de la semilla inicial (x_{t_0}, Q_{t_0}) si la distancia de t_0 a t es k .*

Ejemplo 3.3.4. *En el Ejemplo 3.3.3 la semilla $x_2 \leftarrow x_1$ está a una distancia $k = 5$ de la semilla inicial $x_2 \rightarrow x_1$.*

3.4. Álgebras de conglomerado

En el contexto de las álgebras de conglomerado, la semilla desempeña un papel fundamental en su construcción. A partir de la semilla, junto con su mutación, se establece y desarrolla la estructura algebraica que caracteriza a estas álgebras.

Definición 3.4.1. *Sea K un campo. Una K -álgebra es una tupla*

$$\mathcal{A} = (A, +, \cdot, 0, 1),$$

dónde

1. $(A, +, \cdot)$ es un K -espacio vectorial.
2. $\cdot : A \times A \rightarrow A$ es una operación asociativa y 1 es el neutro de esa operación.
3. La suma distribuye al producto, es decir, $\forall a, b, c \in A$ se cumplen

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

4. La multiplicación escalar conmuta con la multiplicación de A , es decir, $\forall a, b \in A$ y $\alpha \in K$ se cumple

$$\alpha \cdot (a \cdot b) = (\alpha \cdot a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot b).$$

Ejemplo 3.4.1. *Sea $K = \mathbb{R}$ (el campo de los números reales). Considérese el conjunto $A = \mathbb{R}[x]$, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales. Se definen las siguientes operaciones:*

- La suma de dos polinomios se realiza de manera usual.
- La multiplicación de dos polinomios también se realiza de manera usual.

Entonces:

- El elemento neutro para la suma es el polinomio cero: 0.
- El elemento neutro para la multiplicación es el polinomio constante 1.

Además, se cumplen las propiedades:

1. $(A, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
2. La multiplicación es asociativa: para todos $p(x), q(x), r(x) \in A$, se cumple $p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)) = (p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x)$.
3. La suma distribuye sobre el producto: para todos $p(x), q(x), r(x) \in A$, se cumple $p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$.
4. La multiplicación escalar conmuta con la multiplicación en A : para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p(x), q(x) \in A$, se cumple $\alpha \cdot (p(x) \cdot q(x)) = (\alpha \cdot p(x)) \cdot q(x) = p(x) \cdot (\alpha \cdot q(x))$.

Por lo tanto, $(A, +, \cdot, 0, 1)$ es una \mathbb{R} -álgebra.

Definición 3.4.2. Sea X un subconjunto de una K -álgebra A . El conjunto

$$\langle X \rangle = \{f(x_1, \dots, x_r) \in A \mid f \in K[y_1, \dots, y_r] \text{ para algún } r \geq 1 \text{ y } x_1, \dots, x_r \in X\}$$

es la **sub-álgebra de A generada por X** .

Si $X \neq \emptyset$, por construcción tenemos que $0, 1 \in \langle X \rangle$ y además, $\langle X \rangle$ es cerrado en A bajo suma y multiplicación. Por lo tanto $\langle X \rangle$ es una K -álgebra.

Ejemplo 3.4.2. Considérese la \mathbb{R} -álgebra establecida en el Ejemplo 3.4.1, $\mathcal{A} = (\mathbb{R}[x], +, \cdot, 0, 1)$ y el subconjunto $X = \{x^2\}$.

La sub-álgebra generada por $X = \{x^2\}$ es:

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{2i} \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_i = 0 \text{ para casi toda } i \right\}.$$

Definición 3.4.3. Sean \mathcal{P}_n un patrón de semillas y

$$\mathbf{X} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_n} x(t),$$

la unión de todos los conglomerados de \mathcal{P}_n . El **álgebra de conglomerado** $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ asociada a \mathcal{P}_n es la sub-álgebra de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+m})$ generado por \mathbf{x} sobre $\mathbb{C}[x_n, \dots, x_{n+m}]$.

Nota 3.4.1. Usualmente se denota al álgebra de conglomerado asociado a \mathcal{P}_n como:

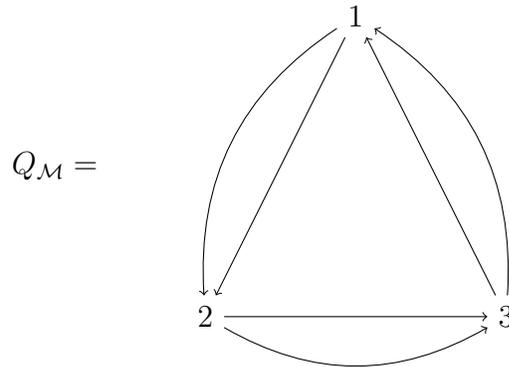
$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}][\mathbf{X}] \subset \mathcal{F}$$

Ejemplo 3.4.5. *El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_2}$ enunciado en el Ejemplo 3.4.3 es un ejemplo claro de un álgebra de tipo finito pues este álgebra consta de un total de 6 variables de conglomerado.*

Capítulo 4

El álgebra de conglomerado de Markov

Definición 4.0.1. Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ un conglomerado y considérese el carcaj



Sean $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ el patrón de semillas asociado a la semilla inicial $(x, Q_{\mathcal{M}})$ y $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ el álgebra de conglomerado correspondiente. Se denomina a $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ como el **álgebra de conglomerado de Markov** y el carcaj $Q_{\mathcal{M}}$ como el **carcaj de Markov**.

Por construcción

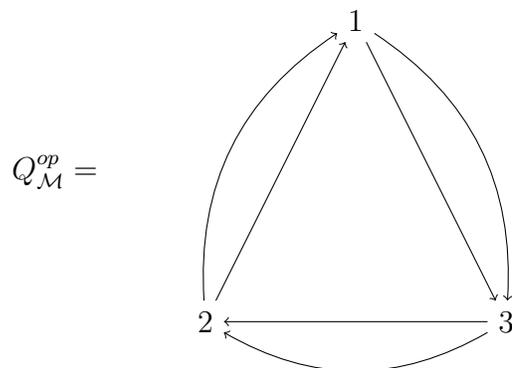
$$\mathcal{A}_{\mathcal{M}} \subset \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3).$$

Nota 4.0.1. La notación $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ nos permite referirnos específicamente a esta estructura algebraica en el contexto de los números de Markov y su relación con las álgebras de conglomerado.

A continuación, se presenta la conexión precisa entre $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ y los números de Markov. Se procede a examinar las consecuencias de implementar las mutaciones

de la semilla $(x, Q_{\mathcal{M}})$ con el objetivo de aclarar el comportamiento del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$. Este análisis se realizará en conformidad con la Definición 3.3.5.

Primero, nótese que si se invierten todas las flechas del carcaj de Markov se obtiene el **carcaj opuesto**,



- Para $\mu_{x_1}(x, Q_{\mathcal{M}})$ se obtiene:

$$\mu_1(x) = \left(\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1}, x_2, x_3 \right),$$

y

$$\mu_{x_1}(Q_{\mathcal{M}}) = Q_{\mathcal{M}}^{op}.$$

- Para $\mu_{x_2}(x, Q_{\mathcal{M}})$ se tiene:

$$\mu_2(x) = \left(x_1, \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2}, x_3 \right),$$

y

$$\mu_{x_2}(Q_{\mathcal{M}}) = Q_{\mathcal{M}}^{op}.$$

- Para $\mu_{x_3}(x, Q_{\mathcal{M}})$ resulta:

$$\mu_3(x) = \left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} \right).$$

y

$$\mu_{x_3}(Q_{\mathcal{M}}) = Q_{\mathcal{M}}^{op},$$

Del análisis previo se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.0.1. *El carcaj de Markov $Q_{\mathcal{M}}$ es estable bajo mutación, más precisamente, para $i \in \{1, 2, 3\}$ se tienen*

$$\mu_i(Q)_{\mathcal{M}} = Q_{\mathcal{M}}^{op},$$

$$\mu_i(Q_{\mathcal{M}}^{op}) = Q_{\mathcal{M}}.$$

Corolario 4.0.1. *Se cumple la siguiente $Q_{\mathcal{M}} = \mu_j \mu_i(Q_{\mathcal{M}})$, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ para $i \neq j$.*

Demostración:

En efecto, sean $i, j \in \{1, 2, 3\}$, luego $\mu_i(Q_{\mathcal{M}})$ por el Lema 4.0.1 es $Q_{\mathcal{M}}^{op}$, así $\mu_j(Q_{\mathcal{M}}^{op})$ por el Lema 4.0.1 es $Q_{\mathcal{M}}$. Por lo tanto $\mu_j \mu_i(Q_{\mathcal{M}}) = Q_{\mathcal{M}}$. ■

Teniendo en cuenta las reglas de recurrencia establecidas en la Observación 2.1.1 y la ecuación de Markov expresada en la ecuación (1.2), se deduce que

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3,$$

$$m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3 - m_1^2 = 3m_1(3m_2m_3 - m_1),$$

$$\frac{m_2^2 + m_3^2}{m_1} = 3m_2m_3 - m_1,$$

lo cual permite enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4.0.1. *Sea $x_t = (u_1, u_2, u_3)$ un conglomerado de $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$. Si $u_k \Big|_{x_i = 1}^{x_i = 1}$ con $k, i \in \{1, 2, 3\}$, denota la evaluación de u_k en $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, entonces*

$$x_t \Big|_1 = \left(u_1 \Big|_{x_i = 1}, u_2 \Big|_{x_i = 1}, u_3 \Big|_{x_i = 1} \right)$$

es una terna de Markov. Más aún, todas las ternas de Markov aparecen de esta manera.

Demostración:

Se demostrará la primera afirmación por inducción sobre la distancia de (u_1, u_2, u_3) al conglomerado inicial (x_1, x_2, x_3) .

Si la distancia es $k = 0$, entonces

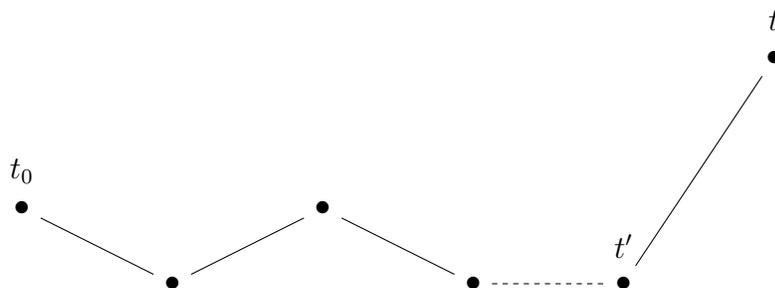
$$(u_1, u_2, u_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

y

$$(u_1, u_2, u_3) \Big|_1 = (1, 1, 1).$$

Hipótesis de inducción: Se asume que el enunciado es verdadero para los conglomerados a distancia k .

Por demostrar que el enunciado es cierto para los conglomerados a distancia $k + 1$.
Sea $t \in \mathcal{T}_n$ a distancia $k + 1$ de t_0 . Por definición existe t' a distancia k de t_0 tal que t' está conectado a t por una arista.



Por la hipótesis de inducción el conglomerado $x_{t'}$ satisface el enunciado.
Supóngase que

$$\begin{array}{ccc} t' & & t \\ \bullet & \text{-----} & \bullet \\ & i & \end{array}$$

Sin pérdida de generalidad, se asume que $i = 1$.

Si se escribe $x_{t'} = (u_1, u_2, u_3)$ entonces $x_t = (u'_1, u_2, u_3)$ dónde

$$u'_1 = \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1}.$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que

$$x_{t'} \Big|_1$$

es una terna de Markov.

Sean

$$\begin{array}{l} a = u_1 \\ b = u_2 \\ c = u_3 \end{array} \Bigg|_{x_i=1}$$

así se tiene que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc.$$

Considérese la ecuación

$$x^2 + b^2 + c^2 = 3xbc$$

esta tiene dos soluciones, una de ellas es a y sea a' la otra solución. Así se tiene que

$$x^2 - 3xbc + b^2 + c^2 = (x - a)(x - a')$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} aa' &= b^2 + c^2 \\ a' &= \frac{b^2 + c^2}{a} \end{aligned}$$

pero

$$\frac{b^2 + c^2}{a} = u'_1 \Bigg|_{x_i=1}.$$

Ergo el enunciado se cumple para x_t .

Por construcción se ve que la mutación de conglomerados da lugar a ternas adyacentes en el árbol de Markov.

Como $(1, 1, 1)$ se obtiene evaluando conglomerados en $x_i = 1$, todas las ternas de Markov se obtienen de manera similar. ■

Nota 4.0.2. *De acuerdo a la Definición 3.4.5 se concluye que el álgebra de conglomerado asociada al carcaj de Markov es de tipo mutación finito, pero no es de tipo finito.*

En el árbol (4) se aprecian las mutaciones que se requieren para llegar a la construcción del árbol de Markov (2.8).

Tabla 4.1: Las primeras cuatro mutaciones del carcaj de Markov

Ternas	μ_{x_2}	$\mu_{x_2}\mu_{x_3}$	$\mu_{x_2}\mu_{x_3}\mu_{x_1}$	$\mu_{x_2}\mu_{x_3}\mu_{x_2}$
(x_1, x_2, x_3)	x'_2	$x'_2x'_3$	$x'_2x'_3x'_1$	$x'_2x'_3x'_2$
$(1, 1, 1)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 5, 2)$	$(1, 29, 2)$	$(1, 13, 5)$

Con

$$x'_2 = \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2} \quad x'_2x'_3 = \frac{x_1^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + x_3^4}{x_2^2x_3}$$

$$x'_2x'_3x'_1 = \frac{x_1^8 + 2x_1^6x_2^2 + x_1^4x_2^4 + x_3^2(4x_1^6 + 5x_1^4x_2^2) + x_3^4(6x_1^4 + 4x_1^2x_2^2) + x_3^6(4x_1^2 + x_2^2) + x_3^8}{x_1x_2^4x_3^2}$$

$$x'_2x'_3x'_2 = \frac{x_1^6 + 2x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_3^2(3x_1^4 + 2x_1^2x_2^2) + 3x_1^2x_3^4 + x_3^6}{x_2^3x_3^2}$$

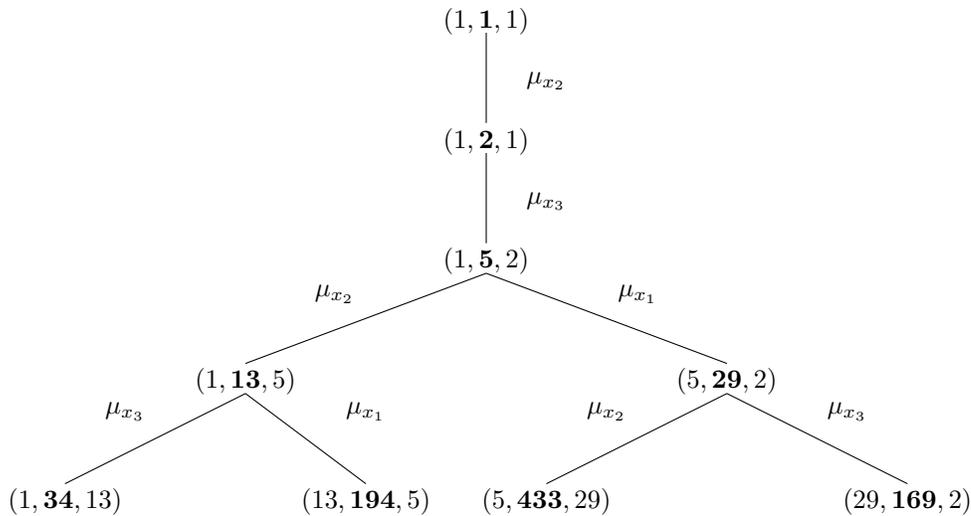


Figura 4.1: Árbol de Markov con mutaciones.

Conclusiones

Los números de Markov es un tema que ha generado mucho interés desde que Markov los introdujo a finales del siglo XIX [15]. Las inesperadas conexiones de los números de Markov con otras ramas de las matemáticas, como la geometría hiperbólica, la geometría algebraica y las álgebras de conglomerado contribuyen a que los números de Markov sigan generando interés hoy en día.

Por otro lado, ha habido varios enfoques para abordar la conjetura de Markov, que tiene más de 100 años abierta. Las álgebras de conglomerado representan una herramienta novedosa que ha permitido avanzar en el entendimiento de esta conjetura.

En esta tesis presentamos algunas de las herramientas que han sido de mayor utilidad en el estudio de los números de Markov, en particular, la indexación de los números de Markov con los racionales positivos usando los árboles de Markov y Farey. Además, en este trabajo, se plantea una conjetura sobre los números de Markov presentada por Anier en *Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture* [5] que se logró demostrar usando a las álgebras de conglomerado. Esto muestra que la combinatoria subyacente las álgebras de conglomerado, así como el control que se tiene sobre la misma, tiene el potencial para mejorar nuestro entendimiento sobre los números de Markov y eventualmente lograr demostrar o refutar la conjetura de unicidad.

La conjetura de Anier a la que se hace referencia es el siguiente teorema demostrado en *M. Rabideau and R. Schiffler, Continued fractions and orderings on the Markov numbers, Adv. Math. 370, 26 (2020), Article 107231* [30].

Teorema 4.0.2. Sean $p, q, i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

- $p < q$;
- p y q son primos relativos;
- $q + i$ y p son primos relativos.

Entonces los números de Markov asociados a $\frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q+i}$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p}{q+i}}.$$

Aunque en este trabajo no se da una demostración del Teorema 4.0.2, ya que no es el objetivo de esta tesis, nos gustaría recalcar que la demostración de dicho teorema utiliza fuertemente la relación entre los números de Markov, las fracciones continuas y las álgebras de conglomerado[23], temas revisados a detalle en este trabajo de tesis, por lo cual consideramos que es un trabajo accesible e introductorio para estudiantes de matemáticas que deseen adentrarse en estos temas.

Cabe mencionar que el Teorema 4.0.2 es solo un ejemplo de la aplicación efectiva de las álgebras de conglomerado al estudio de los número de Markov. Otro ejemplo similar puede encontrarse en *Kyungyong Lee, Li Li, Michelle Rabideau, and Ralf Schiffler. On the ordering of the markov numbers. Advances in Applied Mathematics, 143:102453, 2023* [23].

Bibliografía

- [1] 6.1: El teorema fundamental de la aritmética — [espanol.libretexts.org. \[https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Logica_Matematica_y_Pruebas/Una_introducci%C3%B3n_a_la_prueba_a_trav%C3%A9s_del_aprendizaje_basado_en_la_investigaci%C3%B3n_\\(Ernst\\)/06%3A_Tres_Teoremas_Famosos/6.01%3A_El_teorema_fundamental_de_la_aritm%C3%A9tica\]\(https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Logica_Matematica_y_Pruebas/Una_introducci%C3%B3n_a_la_prueba_a_trav%C3%A9s_del_aprendizaje_basado_en_la_investigaci%C3%B3n_\(Ernst\)/06%3A_Tres_Teoremas_Famosos/6.01%3A_El_teorema_fundamental_de_la_aritm%C3%A9tica\). \[Accedido 21-05-2024\].](https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Logica_Matematica_y_Pruebas/Una_introducci%C3%B3n_a_la_prueba_a_trav%C3%A9s_del_aprendizaje_basado_en_la_investigaci%C3%B3n_(Ernst)/06%3A_Tres_Teoremas_Famosos/6.01%3A_El_teorema_fundamental_de_la_aritm%C3%A9tica)
- [2] A002559 - OEIS — [oeis.org. <https://oeis.org/A002559>](https://oeis.org/A002559). [Accedido 20-05-2024].
- [3] Número de Pell - Wikipedia, la enciclopedia libre — [es.wikipedia.org. \[https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Pell\]\(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Pell\)](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Pell). [Accedido 27-05-2024].
- [4] Sucesión de Fibonacci - Wikipedia, la enciclopedia libre — [es.wikipedia.org. \[https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci\]\(https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci). [Accedido 27-05-2024].
- [5] Martin Aigner. *Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture*. Springer, 2015.
- [6] Jesús Antonio Ávila. Nuevas identidades elementales con los números de Fibonacci. *Boletín de Matemáticas*, 14(1):30–37, 2007.
- [7] Fügen Torunbalci Aydin. On bicomplex Pell and Pell-Lucas numbers. *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, 1(2):142–155, 2018.
- [8] Enrique R. Aznar. Andrei Andreyevich Markov — [ugr.es. <https://www.ugr.es/~eaznar/markov.htm>](https://www.ugr.es/~eaznar/markov.htm), 2007. [Accedido 17-04-2024].
- [9] Arthur Baragar. On the unicity conjecture for Markoff numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 39(1):3–9, 1996.

- [10] Lara Bossinger. Álgebras de conglomerado. Este manuscrito se basa en los apuntes del curso sobre álgebras de conglomerado impartido en el semestre 2022-1 de la maestría en matemáticas de la UNAM. Disponible en: <https://www.matem.unam.mx/~lara/teaching/notas.pdf>, 2021.
- [11] Miguel Cabezón Manchado and Mario Pérez Riera. Aproximación de un número por racionales. fracciones continuas, 2017. Trabajo de fin de grado en Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Asesor: Mario Pérez Riera.
- [12] Fernando José Mazariegos Camas. Fracciones continuas, 2018. Trabajo de graduación para obtener el título de Licenciado en Matemática Aplicada, Universidad de San Carlos de Guatemala.
- [13] İlke Çanakçı and Ralf Schiffler. Cluster algebras and continued fractions. *Compositio Mathematica*, 154(3):565–593, 2018.
- [14] Yeniffer Tatiana Chacón Pardo et al. Introducción al álgebra de conglomerado y números de Markov. 2021.
- [15] Javier Cilleruelo. El diablo de los números. *La Gaceta de la RSME*, 16(2):313–330, 2013.
- [16] DiAmOnD. La ecuación de Pell - Gaussianos — gaussianos.com. <https://www.gaussianos.com/la-ecuacion-de-pell/>, 2009. [Accedido 27-05-2024].
- [17] Miguel Jiménez Falce. La maravillosa sucesión de Fibonacci. <https://significativa.org/sucesion-de-fibonacci/>. [Accedido 27-05-2024].
- [18] Elena Fernández, Tomás y Tamaro. Biografía de Andrey Markov. <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/markov.htm>, 2004. [Accedido 17-04-2024].
- [19] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I: foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, 2002.
- [20] Ralph P Grimaldi. *Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Pearson Educación, 1998.

- [21] Yasuaki Gyoda and Shuhei Maruyama. Uniqueness theorem of generalized Markov numbers that are prime powers. *arXiv preprint arXiv:2312.07329*, 2023.
- [22] Khan Academy. El algoritmo de Euclides. <https://es.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modarithmetic/a/the-euclidean-algorithm>. [Accedido el 14-12-2024].
- [23] Kyungyong Lee, Li Li, Michelle Rabideau, and Ralf Schiffler. On the ordering of the markov numbers. *Advances in Applied Mathematics*, 143:102453, 2023.
- [24] Calvin T. Long. *Elementary Introduction to Number Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [25] Alexander A Markov, Aleksandr Aleksandrovich Chuprov, and Kh. O. Ondar. The correspondence between A.A. Markov and A.A. Chuprov on the theory of Probability and Mathematical Statistics. 1981.
- [26] Andreï Andreevich Markov. An example of statistical investigation of the text eugene onegin concerning the connection of samples in chains. *Science in Context*, 19(4):591–600, 2006.
- [27] Andrey Andreyevich Markov. Extension of the law of large numbers to quantities, depending on each other (1906). reprint. *Journal Électronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]*, 2(1b):Article 10, 12 p., electronic only–Article 10, 12 p., electronic only, 2006.
- [28] María Martín Vega et al. Geometría hiperbólica, teselaciones de Farey y fracciones continuas. 2019.
- [29] Xueyuan Peng and Jie Zhang. Cluster algebras and Markoff numbers. *CaMUS*, 3:19–26, 2012.
- [30] Michelle Rabideau and Ralf Schiffler. Continued fractions and orderings on the Markov numbers. *Advances in Mathematics*, 370:107231, 2020.
- [31] RAE. Carcaj — Diccionario panhispánico de dudas — rae.es. <https://www.rae.es/dpd/carcaj>.
- [32] Anitha Srinivasan. The Markoff-Fibonacci numbers. 2022.

- [33] StudySmarter. Árboles en Matemáticas Discretas — StudySmarter — studysmarter.es. <https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/matematicas-discretas/arboles-en-matematicas-discretas/>. [Accedido 07-10-2024].
- [34] Eugenio Hernández Vargas and María Jezabel Pérez Quiles. El método de las fracciones continuas y su significación didáctica en el proceso de formación del ingeniero en telecomunicaciones y electrónica. *Mendive. Revista de Educación*, 12(3):330–335, 2014.
- [35] Miguel Ángel Morales Medina. Dos demostraciones de la irracionalidad de raíz de 2 - Gaussianos — gaussianos.com. <https://www.gaussianos.com/dos-demostraciones-de-la-irracionalidad-de-raiz-de-2/>, 2 noviembre, 2006. [Accedido 13-11-2024].
- [36] Miguel Ángel Morales Medina. Cómo demostrar que (pi) es trascendente - Gaussianos — gaussianos.com. <https://www.gaussianos.com/como-demostrar-que-%CF%80-pi-es-trascendente/>, 26 noviembre, 2009. [Accedido 13-11-2024].
- [37] Miguel Ángel Morales Medina. Cómo demostrar que (pi) es irracional - Gaussianos — gaussianos.com. <https://www.gaussianos.com/como-demostrar-que-%CF%80-pi-es-irracional/>, 5 febrero, 2008. [Accedido 13-11-2024].