UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos Bidimensionales

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Isahi García Ramos

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Alicia Santiago Santos

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA MARZO DE 2025

Dedicado a
mis padres y ...

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis profesores que a lo largo de la carrera, etc...

Índice general

Índice de figuras

Lista de tablas

Introducción

El tema de la tesis pertenece a las ramas de la Matemática conocidas como Topología y Sistemas Dinámicos. La Topología es una rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas [**?**]. Por otro lado, los Sistemas Dinámicos es un área de las matemáticas que estudia fenómenos que dependen del tiempo. Los sistemas dinámicos se describen mediante una serie de variables (cuyo valor en un instante determina el estado del sistema), y un conjunto determinista de reglas que establecen cómo será el siguiente estado futuro a partir del actual (por ejemplo, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de las variables que describen el sistema dinámico). Así, cualquier proceso en el que exista movimiento y variación a lo largo del tiempo puede ser considerado un sistema dinámico.

De manera formal, un sistema dinámico es una terna (X, T, ϕ) donde X es un espacio métrico compacto, T es un *conjunto de tiempos*, el cual generalmente es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, y ϕ es una función de $T \times X$ en X que satisface las siguientes propiedades:

(i) La función ϕ es continua.
(ii) $\phi(0, x) = x$, para todo $x \in X$.
(iii) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$, para todo $t, s \in T$ y para todo $x \in X$.

Dado un sistema dinámico (X, T, ϕ), el espacio X suele llamarse *espacio de fases o espacio de estados*, y a la función $\phi\colon T \times X \to X$ suele decirse que es un *operador de evolución o flujo del sistema*, entonces para todo $(t, x) \in T \times X$, $\phi(t, x)$ representa el estado del sistema en el instante t. El estado del sistema en el instante inicial $t = 0$ es x. El problema básico en sistemas dinámicos es determinar cuál será el estado final del sistema, es decir, qué valores tomará $\phi(t, x)$ cuando t es arbitrariamente grande, esto con el fin de que dicha información sirva para poder decir algo sobre el sistema dinámico. Dependiendo de cómo es el conjunto de tiempos T, los sistemas dinámicos se dividen en dos clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente (sistemas dinámicos continuos) y en los que el tiempo transcurre discretamente (sistemas dinámicos discretos). Los sistemas de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales. Por otro lado, si el tiempo es discreto los sistemas se escriben por medio de ecuaciones en diferencias. En este trabajo de tesis nos interesan los sistemas dinámicos discretos.

Los sistemas dinámicos discretos tienen diversas aplicaciones en muchas áreas: biología, economía, análisis numérico, etc. Se sabe que al discretizar una ecuación diferencial ordinaria para resolverla por métodos numéricos aparecen las ecuaciones en diferencias. Otro ejemplo donde aparecen las ecuaciones en diferencias es al modelar las poblaciones de animales que se producen en ciertas épocas del año, en algunas ocasiones es preferible usar ecuaciones en diferencias en vez de ecuaciones diferenciales porque el tamaño de la siguiente generación está determinada en gran parte por el tamaño de la actual. Muchos conceptos y tipos de soluciones para las ecuaciones diferenciales tienen su equivalente para las ecuaciones en diferencias [13].

Dentro de la clase de los sistemas dinámicos discretos, tenemos los sistemas dinámicos discretos de una dimensión y los sistemas dinámicos discretos de dos o más dimensiones. Los sistemas dinámicos discretos de una dimensión son en los que sólo aparece una variable dependiente en la ecuación en diferencias. Las ecuaciones en diferencias discretas de una dimensión pueden ser representadas de manera general como sigue.

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, ..., y_{t+1}, y_t, t) = 0. \quad \text{para cada } t \in \mathbb{Z}_+.$$

Cuando en los fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán sistemas de ecuaciones en diferencias. De entre este tipo de sistemas uno muy ocupado es el que consiste en dos ecuaciones y dos variables, conocidos como **bidimensionales** [21].

El objetivo general de este trabajo de tesis es presentar la teoría básica sobre modelos dinámicos discretos bidimensionales así como algunas de sus aplicaciones, incluyendo los aspectos cuantitativos y los cualitativos.

Para lograr dicho objetivo, el trabajo de tesis está organizada en cuatro capítulos. El Capítulo 1 tiene como objetivo establecer una base sólida de conceptos fundamentales que son necesarios para el desarrollo y comprensión de los temas que se discutirán en esta tesis. Por tal motivo, en el Capítulo 1, se presentan notaciones y definiciones de ciertos conjuntos y conceptos básicos relacionados con el concepto de función, espacios métricos y sucesiones. Además, se presentan algunos conceptos de álgebra lineal, necesarios para este trabajo. Cada concepto se acompaña de su respectivo ejemplo. También, se presenta el tema de inducción matemática, donde se incluye información relevante sobre el tema y algunos ejercicios resueltos para facilitar la comprensión.

En el Capítulo 2 se define el concepto de modelo matemático, se abordan los diferentes tipos de modelos matemáticos que existen, clasificándolos según sus características. Se explora, por ejemplo, los modelos deterministas, que proporcionan resultados predecibles a partir de condiciones iniciales específicas, y los modelos estocásticos, que incorporan elementos de aleatoriedad e incertidumbre. También, se discuten modelos matemáticos discretos y continuos. Para ilustrar estos conceptos, se presentan ejemplos concretos de cada uno de estos tipos de modelos matemáticos. En este capítulo también se incluye el tema de ecuaciones en diferencias unidimensional de orden n, con $n \in \mathbb{N}$ y se estudian algunos métodos de solución analítica de dichas ecuaciones.

Dado $m \in \mathbb{N}$, en el Capítulo 3 se presenta la definición de un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables. Se particulariza esta definición para el caso $m = 2$, y obtener un sistema de ecuaciones en diferencias bidimensional. Se muestran algunas aplicaciones en áreas como biología y ecología destacando cómo las ecuaciones en diferencias pueden modelar fenómenos como el crecimiento poblacional y las interacciones entre especies. Estas aplicaciones resaltan la relevancia de los sistemas en diferencias en contextos prácticos.

Finalmente, en el Capítulo 4 se analizan los sistemas bidimensionales de ecuaciones en diferencias lineales y no lineales desde el enfoque cualitativo. Se presentan algunos conceptos fundamentales como: el concepto de órbita de un punto, punto fijo, punto períodico, en el caso bidimensional. Además, se presentan ejemplos específicos que ilustran el comportamiento de estos sistemas bidimensionales, se analiza un ejemplo de un sistema lineal y se presentan unos ejemplos de sistemas no lineales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos notación relacionada con conjuntos. Además, exponemos algunos conceptos básicos sobre funciones, espacios métricos y de álgebra lineal, necesarios para este trabajo. Dicho apartado está compuesto por seis secciones. En la primera sección mencionamos propiedades de conjuntos y de funciones, así como el concepto de iteración de una función y propiedades que satisfacen las iteraciones. En la segunda sección, se presenta el concepto de espacio métrico.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

Como es usual denotamos por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ al conjunto de los números naturales, los números enteros no negativos, los números enteros, los números reales, los números reales positivos, los números racionales, y los números complejos, respectivamente.

Por otra parte, dado un conjunto X, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X, es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}$.

Definición 1.1. *Una* **función** f *es una regla que asigna a cada elemento* x *del conjunto* A *exactamente un elemento* y *del conjunto* B*. El elemento* y *se denota como imagen (o valor) de* x *mediante* f*, y se indica como* $f(x)$*. El conjunto* A *se denomina* **domino** *de* f*, denotado por* Dom_f*. El conjunto* B *se denomina* **codominio** *de* f *y el conjunto* $f(A)$ *se denomina* **recorrido** *de* f*.*

Notación 1.1. Para definir una función se emplea la notación

$$f \colon A \to B.$$

Es frecuente escribir simplemente $y = f(x)$ y denominar a x variable independiente y a y variable dependiente.

Algunos ejemplos de funciones son los siguientes.

Ejemplo 1.1. Sea X un conjunto. La correspondencia $id_X : X \to X$ dada por $id_X(x) = x$, para cada $x \in X$, es una función de X en X. Esta función es llamada la **función identidad** en X.

Ejemplo 1.2. Sean X y Y conjuntos, $f : X \to Y$ una función y $A \subseteq X$. Definimos la **restricción** de f a A, denotada por $f\,|_A\colon A \to Y$, como $f\,|_A\,(a) = f(a)$, para cada $a \in A$.

Otra de las definiciones que debemos recordar es la de composición de funciones. Dadas dos funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$, se define la **función composición** $g \circ f\colon X \to Z$, como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$. Utilizando la definición de función composición consideremos la siguiente.

Definición 1.2. *Sean A un conjunto y $f\colon A \to A$ una función. Las* **iteraciones de** *f se definen mediante la siguiente regla recursiva:*

$$f^{[0]} := id_X \quad y \quad f^{[n+1]} := f^{[n]} \circ f,$$

donde id_X es la función identidad en X y $f \circ f$ indica la composición de funciones.

Observación 1.1. Sean A un conjunto y $f\colon A \to A$ una función. Note que:

$$f^{[1]} = f^{[0]} \circ f = id_X \circ f = f. \tag{1.1}$$

$$f^{[2]} = f^{[1]} \circ f = f \circ f. \tag{1.2}$$

$$f^{[3]} = f^{[2]} \circ f = (f \circ f) \circ f = f \circ f \circ f. \tag{1.3}$$

En la última expresión omitimos los paréntesis porque la operación de composición es asociativa.

Ahora dado los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, se denota y define su **producto cartesiano** como:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \prod_{i=1}^{k} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i,\ \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}.$$

Una vez recordado el producto finito de conjuntos, recordemos el concepto de producto de funciones. Para los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, y las funciones $f_i\colon X_i \to Y_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, denotamos la **función producto** como

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k\colon \prod_{i=1}^{k} X_i \to \prod_{i=1}^{k} Y_i,$$

y se define por:

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\big),$$

para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i$.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto no vacío que representa el espacio de fases de un sistema dinámico. Un* **mapa** *f es una función continua $f : X \to X$ que describe la evolución temporal del sistema en intervalos de tiempo discretos. Formalmente, esta evolución se puede expresar mediante la siguiente ecuación recursiva:*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in X,$$

donde x_n es el estado del sistema en el tiempo t_n (generalmente, $t_n = n$ con $n \in \mathbb{N}$, donde n representa el número de iteraciones o pasos discretos), y x_{n+1} es el estado del sistema en el siguiente paso de tiempo $t_{n+1} = n + 1$.

1.2. Espacios métricos

En esta sección mostramos propiedades de espacios métricos, se presentan algunos ejemplos y conceptos importantes. Para mayor información sobre este tema puede consultar el libro [19].

Definición 1.4. *Un* **espacio métrico** *es un par (X, d) formado por un conjunto no vacío X y una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, llamada métrica o función distancia de X, tal que:*

1. *$d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para todo $x, y \in X$*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$*
3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$*

A continuación mostramos algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1.3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Definamos la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$. Se tiene que d es una métrica para $\mathbb{R}$ y se le conoce como **métrica usual** o **métrica euclidiana**.

De aquí en adelante cada vez que se hable de la recta real nos estaremos refiriendo al espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ del Ejemplo 1.3.

Ejemplo 1.4. Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Definamos la función $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por,

$$d_n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede verificar que d_n es una métrica para $\mathbb{R}^n$, a d se le conoce como **métrica euclidiana para** $\mathbb{R}^n$.

De igual manera, de aquí en adelante cada vez que consideremos $\mathbb{R}^n$, nos estaremos refiriendo al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_n)$ del Ejemplo 1.4.

Ejemplo 1.5. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Definimos la función $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $d(z, w) = |z - w|$, donde $|z - w|$ denota el módulo de la diferencia entre z y w. Se puede verificar que d es una métrica, conocida como la **métrica usual en** $\mathbb{C}$.

Por otro lado, sabemos que cada conjunto X tiene una colección de subconjuntos, su conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$. Así, cada métrica definida en X no solo convierte a X en un espacio métrico, sino que determina una métrica en cada miembro de $\mathcal{P}(X)$ y lo convierte en un subespacio métrico de X.

Definición 1.5. *Supongamos que (X, d) e (Y, e) son espacios métricos. Decimos que X es un* **subespacio métrico** *de Y y que Y es un superespacio métrico de X si, y sólo si, X es un subconjunto de Y y d es una restricción de e.*

A menudo, siempre que no genere confusión, utilizaremos la misma letra para designar la métrica de un subespacio y la métrica de su superespacio.

Ejemplo 1.6. Consideremos $\mathbb{R}$ con su métrica usual. Se tiene que $\mathbb{R}$ es un subespacio métrico de $\mathbb{C}$ ya que la función de valor absoluto en $\mathbb{R}$ es la restricción a $\mathbb{R}$ de la función de módulo en $\mathbb{C}$.

De manera similar, se pueden considerar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7. Consideremos $\mathbb{R}$ con su métrica usual, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se tiene que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ son subespacios métricos de $\mathbb{R}$. De hecho, cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ puede considerarse como un subespacio métrico de $\mathbb{R}$ simplemente utilizando en él la restricción apropiada de la función de distancia usual. El subconjunto $(0,1) \cup (4,6)$ de $\mathbb{R}$, por ejemplo, es un espacio métrico cuando se le dota de la función de distancia usual heredada de $\mathbb{R}$.

De aquí en adelante cada vez que consideremos un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$, nos estaremos refiriendo al subespacio métrico $(M, d_n|_M)$ de $(\mathbb{R}^n, d_n)$ (vea Definición 1.5).

Definición 1.6. *Sean (X,d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$.*
1. La bola abierta con centro en a y radio r, se denota y define como:

$$B_d(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r)\}.$$

2. La bola cerrada con centro en a y radio r, se denota y define como:

$$\bar{B}_d(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r)\}.$$

Definición 1.7. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un conjunto abierto en X si para cada $a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$.*

Ejemplo 1.8. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$, sean $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Se tiene que:

$$B(u,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < r\right\}$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.9. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^3, d_3)$, sean $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3yr > 0$. Se tiene que:

$$B(u,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} < r\right\}$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.8. *Sean (X,d) un espacio métrico. El espacio (X,d) es* **disconexo** *si existen subconjunto abiertos U y V en X tales que U y V no son vacíos, $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$. En tal caso se dice que los subconjuntos U y V forman una disconexión para X. El espacio (X,d) es* **conexo** *si no es disconexo.*

1.3. Funciones vectoriales

En general, al estudiar fenómenos del mundo real es usual que una cantidad dependa de más de una variable [16].

Definición 1.9. *Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ se llama* **función real de n variables** *si, a cada vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, le asigna un valor real $f(x)$.*

En el caso particular del conjunto $\mathbb{R}^2$, se dice que se tiene una función real de dos variables.

Definición 1.10. *Una* **función real de dos variables** *es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) perteneciente a un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un único valor real z, es decir, $z = f(x, y)$, donde f es una función que mapea los puntos de D a valores reales. En otras palabras, para cada punto $(x, y) \in D$, existe un único número real z tal que $z = f(x, y)$.*

A continuación mostramos algunos ejemplos de funciones reales de 2 y 3 variables, respectivamente.

Ejemplo 1.10. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que f es una función de 2 variables.

Ejemplo 1.11. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se tiene que f es una función de 3 variables.

Definición 1.11. *La* **longitud euclidiana** *de un vector $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_m)$ en $\mathbb{R}^m$ es $|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$. Sea $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m$, y sea ϵ un número positivo. La* **ϵ-vecindad** *$N_\epsilon(\mathbf{p})$ es el conjunto $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{v} - \mathbf{p}| < \epsilon\}$. A veces llamamos a $N_\epsilon(\mathbf{p})$ un ϵ-disco centrado en $\mathbf{p}$.*

Ejemplo 1.12. Consideremos $\mathbb{R}$ con su métrica usual. Sean $v, p \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N_\epsilon(p) &= \{v \in \mathbb{R} : |v - p| < \epsilon\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : -\varepsilon < p - v < \epsilon\}. \end{aligned}$$

El conjunto $N_\epsilon(p)$ es el intervalo abierto $(p-\epsilon, p+\epsilon)$. En la Figura 1.12 se muestra geométricamente dicha vecindad.

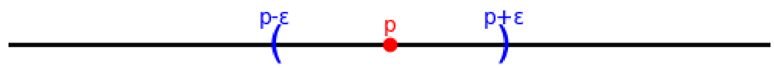

Figura 1.1: Vecindad de un punto $p \in \mathbb{R}$, $N_\epsilon(p)$.

Ejemplo 1.13. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual. Sean $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$, luego

$$N_\epsilon(p) = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : |v - p| < \epsilon\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} < \epsilon\right\}.$$

El conjunto $N_\epsilon(p)$ es el interior de un círculo con centro en (p_1, p_2) y de radio ϵ. En la Figura 1.13 se muestra geométricamente dicha vecindad.

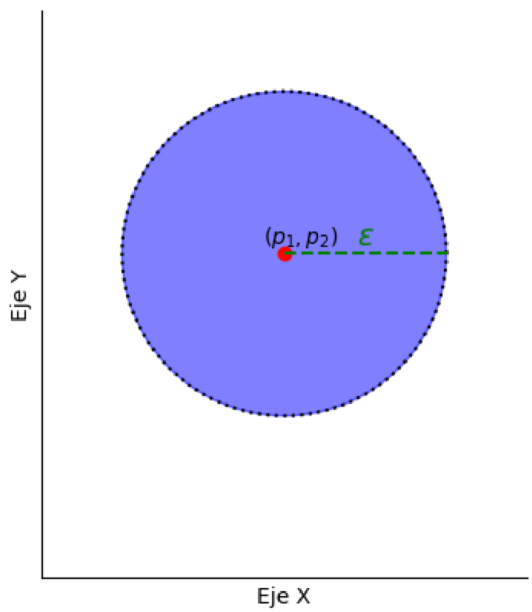

Figura 1.2: Vecindad de un punto $p \in \mathbb{R}^2$, $N_\epsilon(p)$.

Por otro lado, otro tipo importante de funciones son las funciones vectoriales, las cuales asignan un vector a un punto del plano. Estas funciones se llaman *campos vectoriales*.

Definición 1.12. *Dada la región (conjunto abierto conexo) $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una función del tipo $F\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ tal que para a cada punto $p \in \omega$ le asocia el punto $q = F(p)$ en $\mathbb{R}^n$ se le conoce como* **campo vectorial**.

Sean $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. En los correspondientes sistemas de coordenadas la función se escribiría

$$F(p) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = q. \tag{1.4}$$

Como las coordenadas $y_i's$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dependen del punto p cada una de ellas es una función real independiente de p se obtiene que:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(p) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(p) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(p) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

siendo cada una de las $f_i's$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funciones reales de variable vectorial definidas en ω, $f_i \colon \omega \to \mathbb{R}$, las cuales son llamadas las **funciones coordenadas de la función** F. Esto es, la función F se escribe en coordenadas como:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)). \tag{1.5}$$

En particular, en este trabajo estamos interesados en las funciones $F \colon \omega \to \omega$, donde $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

1.4. Sucesiones

En esta sección se expone el concepto de sucesión así como algunos ejemplos básicos.

Definición 1.13. *Una* **sucesión** *es una función $f \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Es decir, una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos*

$$f \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$$

definida por $f(n) = y_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Observación 1.2. Algunas observaciones importantes son las siguientes:

1. El valor que una sucesión f toma en cada $n \in \mathbb{N}$ se suele denotar y_n en lugar de $f(n)$ y recibe el nombre de término n-ésimo de la sucesión, es decir,

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & f(1) = y_1 \\ 2 & \to & f(2) = y_2 \\ 3 & \to & f(3) = y_3 \\ & \vdots & \\ n & \to & f(n) = y_n. \end{array}$$

   Los números y_1, $y_2, \ldots y_n \ldots$ son los términos de la sucesión. El número y_n es el término **n-ésimo (o término general)** de la sucesión y la sucesión completa se denota por $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, no debe perderse de vista que cada término y_n lleva doble información: su valor y el lugar n que ocupa.

3. Una sucesión tiene siempre infinitos términos.

Para definir una sucesión, es necesario conocer la ley o regla de formación. A veces la regla parece evidente desde los primeros términos.

Ejemplo 1.14. Consideremos las siguientes sucesiones:

1. $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$, es una sucesión conocida como **sucesión aritmética**.

2. $2, 4, 8, 16, \ldots$ es una sucesión conocida como **sucesión geométrica**.

Algunas veces lo que nos interesa es que la sucesión nos queda definida una vez que conocemos sus valores iniciales y la ley de sucesión. En el primer caso, la regla es que cada miembro de la sucesión es 2 más que el anterior y que el primer término es 1. Así, en este caso, la regla de la sucesión puede ser descrita por $y_{n+1} = 2 + y_n$, $y_1 = 1$. En el segundo caso, cada miembro de la sucesión es 2 veces el elemento anterior y el primer elemento es 2. Por lo tanto, el segundo ejemplo puede ser descrita por la regla general $y_{n+1} = 2y_n$, $y_1 = 2$.

Una de las sucesiones más conocidas es la sucesión de Fibonacci. A continuación damos su regla.

Ejemplo 1.15. La **sucesión de Fibonacci**, descrita por Leonardo de Pisa, matemático Italiano del siglo XIII, consiste en la sucesión infinita de números naturales 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... expresada por la siguiente función $F\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0; \\ 1, & \text{si } t = 1; \\ F(t-1) + F(t-2), & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

como solución a un problema de cría de conejos: "Cuántas parejas de conejos pueden ser producidas en un año partiendo de una sola pareja sí: cada pareja produce una nueva pareja cada mes, cada nueva pareja se reproduce desde la edad de un mes, y ningún conejo muere"[26].

Definición 1.14. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Se dice que x es punto límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X o que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en X, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant N_\epsilon, x_n \in B(\epsilon, x)$. En tal caso escribimos:*

$$x_n \to x \textit{ o bien que } \lim_{n\to\infty} = x.$$

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en X, se dice que diverge en X.

Ejemplo 1.16. En $(\mathbb{R}, d_u)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $x_n = n$. Así, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Ejemplo 1.17. En $(\mathbb{R}, d_u)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $x_n = \frac{1}{n}$. Luego, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Se puede abordar el estudio de las sucesiones de dos maneras [**?**]. Podemos suponer que la sucesión es un conjunto dado de números dispuestos en un orden y podemos examinar el conjunto para ver qué tipo de regularidades se muestran en estos números. El conjunto limitado de números son los datos, y éstos se examinan y analizan de manera muy similar a como un científico examina los datos para discernir tendencias y leyes de cambio. De esto surgen cuestiones de extrapolación, es decir, llevar la sucesión más allá del rango en el que está dada, y cuestiones de interpolación, es decir, insertar un valor en algún punto dentro de la sucesión en el que falta uno de los miembros, del mismo modo que se podría predecir el peso atómico de un elemento a partir de la tabla periódica cuando aún no se ha obtenido un conocimiento experimental preciso sobre el elemento. El segundo método, es recurrir al estudio de la función a partir de una relación general y estudiar sus propiedades.

Ahora, consideremos una función $y\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $y(n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. En este trabajo nos interesa estudiar este tipo de sucesiones y examinar la conexión entre miembros sucesivos de la sucesión con el propósito de exponer otros aspectos de la estructura de la sucesión que son de importancia. Denotemos por $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones de este tipo, es decir,

$$\mathcal{C} = \{y\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}\}\,.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, con las operaciones estándar de suma de funciones y multiplicación por escalares definidas de la siguiente manera:

- **Suma de funciones:** Para dos funciones $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$, la suma de estas funciones esta definida por

$$(y_1 + y_2)(n) = y_1(n) + y_2(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

- **Multiplicación por un escalar:** Para un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y una función $y \in \mathcal{C}$, la multiplicación de y por α esta definida por

$$(\alpha y)(n) = \alpha \cdot y(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

De esta manera, $(\mathcal{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial , lo que proporciona una estructura algebraica adecuada para estudiar las propiedades y las relaciones entre las sucesiones definidas de esta forma.

1.5. Inducción matemática

Otro tema necesario para el desarrollo de este trabajo, es el tema de inducción matemática, en este apartado colocamos información importante sobre el tema y algunos ejercicios resueltos. El método de inducción matemática, es un método útil para demostrar que algunas afirmaciones son ciertas para todos los números naturales [5].

Definición 1.15. *Cuando una propiedad requiere ser demostrada y es concerniente a los números naturales, hay un tipo de demostración, llamada* **inducción matemática** *que se lleva al cabo de la siguiente forma:*

Supongamos que se quiere demostrar la propiedad $P(n)$ donde $n \in \mathbb{N}$. Los dos pasos siguientes son necesarios y suficientes:

1. *Se demuestra la validez de $P(1)$; es decir, que la propiedad vale cuando $n = 1$.*

2. *Se supone que $P(n)$ es válida y a partir de esto se demuestra la validez de $P(n+1)$; es decir, se supone que la propiedad es válida para n y a partir de esto se demuestra que es válida para $n+1$.*

Una vez llevados al cabo estos pasos, la conclusión es que la propiedad es válida para todos los números naturales.

Ejemplo 1.18. Sean $y \in \mathcal{C}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n = a^n y_0$ es solución de la ecuación $y_{n+1} - ay_n = 0$ con condición inicial y_0.

Demostración: Primero, comprobemos que se cumple para $n = 1$, es decir, probemos que $y_1 = ay_0$ satisface la ecuación $y_2 - ay_1 = 0$. En efecto:

$$y_2 - ay_1 = a^2 y_0 - a(ay_0) = a^2 y_0 - a^2 y_0 = 0.$$

Ahora, supongamos que la afirmación es cierta para un $n = k$, es decir, supongamos que $y_k = a^k y_0$ es solución de la ecuación $y_{k+1} - ay_k = 0$, o equivalentemente, $y_{k+1} = ay_k$. Verifiquemos que la afirmación también se cumple para $n = k+1$. En efecto:

$$y_{k+2} = ay_{k+1} = a(ay_k) = a^2 y_k = a^2 a^k y_0 = a^{k+2} y_0.$$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, concluimos que la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.19. Sean $y \in \mathcal{C}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, la ecuación $y_{n+1} - a(n)y_n = 0$, con condición inicial y_0, tiene como solución a

$$y_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] y_0.$$

Demostración: Veamos que se cumple para $n = 2$, esto es,

$$y_2 = \left[\prod_{i=0}^{1} a(i)\right] y_0$$

es solución de la ecuación $y_3 - a(2)y_2 = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} y_3 - a(2)y_2 &= \left[\prod_{i=0}^{2} a(i)\right] y_0 - a(2)\left[\prod_{i=0}^{1} a(i)\right] y_0 \\ &= a(0)a(1)a(2)y_0 - a(2)a(0)a(1)y_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la afirmación es cierta para un $n = k$, es decir, que

$$y_k = \left[\prod_{i=0}^{k-1} a(i)\right] y_0$$

es solución de la ecuación $y_{k+1} - a(k)y_k = 0$, o equivalentemente, que

$$y_{k+1} = a(k)y_k.$$

Probemos que la afirmación también se cumple para $n = k + 1$, es decir, que

$$y_{k+2} = \left[\prod_{i=0}^{k+1} a(i)\right] y_0$$

satisface la ecuación $y_{k+2} - a(k + 1)y_{k+1} = 0$. En efecto:

$$y_{k+2} = a(k+1)y_{k+1} = a(k+1)a(k)y_k = a(k+1)a(k)\left[\prod_{i=0}^{k-1} a(i)\right] y_0 = \left[\prod_{i=0}^{k+1} a(i)\right] y_0.$$

Por el principio de inducción matemática, concluimos que la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.20. Sean $y \in \mathcal{C}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, la ecuación $y_{n+1} - ay_n - b(n) = 0$, con condición inicial y_0 tiene como solución

$$y_n = a^n y_0 + \left[\sum_{r=0}^{n-1} a^{n-1-r} b(r)\right].$$

Demostración: Veamos que se cumple para $n = 2$, esto es, probemos que

$$y_2 = a^2 y_0 + \sum_{r=0}^{1} a^{1-r} b(r)$$

es solución de la ecuación $y_3 - ay_2 - b(2) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}
y_3 - ay_2 - b(2) &= a^3 y_0 + \sum_{r=0}^{2} a^{2-r} b(r) - a \left[a^2 y_0 + \sum_{r=0}^{1} a^{1-r} b(r) \right] - b(2) \\
&= a^3 y_0 + a^2 b(0) + ab(1) + b(2) - a \left[a^2 y_0 + ab(0) + b(1) \right] - b(2) \\
&= a^3 y_0 + a^2 b(0) + ab(1) + b(2) - a^3 y_0 - a^2 b(0) - ab(1) - b(2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$, es decir, que

$$y_k = a^k y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} a^{k-1-r} b(r)$$

es solución de la ecuación $y_{k+1} - ay_k - b(k) = 0$, o equivalentemente,

$$y_{k+1} = ay_k + b(k).$$

Probemos que la fórmula también se cumple para $n = k + 1$, es decir, que

$$y_{k+2} = a^{k+2} y_0 + \sum_{r=0}^{k+1} a^{k+1-r} b(r)$$

satisface la ecuación $y_{k+2} - ay_{k+1} - b(k + 1) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned}
y_{k+2} &= ay_{k+1} + b(k + 1) \\
&= a \left(ay_k + b(k) \right) + b(k + 1) \\
&= a^2 y_k + ab(k) + b(k + 1) \\
&= a^{k+2} y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} a^{k-r} b(r) + ab(k) + b(k + 1) \\
&= a^{k+2} y_0 + \sum_{r=0}^{k+1} a^{k+1-r} b(r).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, concluimos que la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.6. Transformaciones lineales

En esta sección, exploramos las propiedades fundamentales de las transformaciones lineales, así como la noción de valores y vectores propios. Presentamos ejemplos clave y conceptos esenciales que facilitan la comprensión de estas ideas. Para una información más detallada sobre este tema, se recomienda consultar el libro [11].

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, cuyas entradas a_{ij} son números reales para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$. . Utilizando la notación matricial para vectores en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, definimos una función $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por medio de $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ [11, pág. 501]. Observemos que si $\mathbf{v}$ es una matriz de $n \times 1$, se obtiene que el producto $A\mathbf{v}$ es una matriz de $m \times 1$. Así, T es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Además, T es lineal. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Se tiene que

$$T(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = A(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aA\mathbf{v} + bA\mathbf{w} = aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{v}).$$

A esta transformación lineal se le conoce como una **multiplicación por una matriz** $m \times n$. En particular, las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ son aquellas de la forma $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, para cada $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz 2×2. Es decir,

$$T(v) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

A continuación, recordemos la definición de valor propio y vector propio de una matriz.

Definición 1.16. *Si A es una matriz de $n \times n$, entonces se dice que un vector diferente de cero $x \in \mathbb{R}^n$ es un* **eigenvector de** *A (o vector propio) si Ax es un múltiplo escalar de x, es decir, $Ax = \lambda x$, para algún escalar λ. El escalar λ se* *denomina* **eigenvalor de** A *y se dice que* x *es un* **eigenvector correspondiente a** λ.

De igual forma, recordemos el concepto de valor propio asociado a una transformación lineal.

Definición 1.17. *Sea* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal y* $v \in \mathbb{R}^n$ *diferente de cero. Decimos que* v *es un* **eigenvector de** T *si* $T(v) = \lambda v$*, para algún escalar* λ *(posiblemente cero). Como antes,* λ *se llama* **eigenvalor de** T *y se dice que el eigenvector* v *pertenece a (o corresponde a, o está asociado con)* λ.

Observación 1.3. Algunos autores también le dan a los eigenvalores los nombres de valores propios o valores característicos. Los eigenvalores y los eigenvectores tienen una interpretación geométrica útil en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Si λ es un eigenvalor de A correspondiente a x, entonces $Ax = \lambda x$, de modo que la multiplicación por A, dilata a x, contrae a x, o invierte la dirección de x dependiendo del valor del λ.

A continuación recordemos dos conceptos más, el concepto de ecuación característica y el de polinomio característico.

Definición 1.18. *La ecuación* $p(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$ *se conoce como* **ecuación característica de** A*,* $p(\lambda)$ *se conoce como el* **polinomio característico de** A.

Teorema 1.1. *[11, pág. 547] Sea* A *una matriz de* $n \times n$*. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) λ *es un eigenvalor de* A*, donde* $\lambda \in \mathbb{C}$ *(números complejos).*

(b) El sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)x = 0$ *tiene soluciones no triviales.*

(c) Existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $Ax = \lambda x$.

(d) λ *es una solución (real o compleja) de la ecuación característica*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

El siguiente ejemplo tiene cómo finalidad recordar cómo se calculan los valores y vectores propios asociados a una matriz de 2×2.

Ejemplo 1.21. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los valores y vectores propios asociados a la matriz A.

Solución. El polinomio característico de A se determina como sigue:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación característica de A es:

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Según el Teorema 1.1, estos son los valores propios de A.

Sea $v \in \mathbb{R}^2$, usando la definición de vector propio, consideramos el caso para $\lambda_1 = 1$:

$$Av = \lambda_1 v.$$

Esto se traduce en el resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

De (1.6), obtenemos:

$$\begin{cases} 4x + 2y = x \\ 3x + 3y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}.$$

La solución de este sistema es $x = -\frac{2}{3}y$, donde $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los vectores que satisfacen el sistema tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Así, el vector $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 1$.

Ahora, consideremos el caso de $\lambda_2 = 6$:

$$Av = \lambda_2 v \quad \Rightarrow \quad Av = 6v.$$

Esto lleva a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El sistema se expresa como:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

La solución es $x = y$. Los vectores que satisfacen este sistema son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 6$.

Definición 1.19. *Sean A y B dos matrices de tamaño $m \times m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, decimos que A y B son matrices* **similares** *si existe una matriz invertible P de tamaño $m \times m$ tal que $A = P^{-1}BP$.*

Teorema 1.2. *Sean A y B dos matrices de tamaño $m \times m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si A y B son matrices semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto, los mismos valores propios.*

Demostración: Sean

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I). \end{aligned}$$

Dado que A y B son matrices similares, existe una matriz invertible P tal que: $A = P^{-1}BP$. Entonces, se cumple que:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left(P^{-1}BP - \lambda I\right) \\ &= \det\left(P^{-1}BP - P^{-1}\lambda IP\right) \\ &= \det\left(P^{-1} \cdot (B - \lambda I) \cdot P\right) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(P) \\ &= \det(B - \lambda I) \\ &= p_B(\lambda). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. *Si A y B son matrices similares, entonces:*

$$\det(A) = \det(B).$$

Demostración: Dado que A y B son matrices similares existe una matriz invertible P tal que $A = P^{-1}BP$. Luego

$$\det(A) = \det(P^{-1}BP).$$

Aplicando la propiedad multiplicativa del determinante tenemos:

$$\det(A) = \det(P^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(P).$$

Como $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$, obtenemos:

$$\det(A) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(B) \cdot \det(P).$$

por lo que:

$$\det(A) = \det(B).$$

Por lo tanto $\det(A) = \det(B)$. $\square$

Interpretación geométrica del determinante de una matriz de 2×2

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la cual está formada por los vectores columna $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. En la Figura 1.3 se muestran los puntos $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ en el plano xy, y se dibujan los segmentos de recta que van desde el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hacia cada uno de estos puntos. Suponemos que estos dos vectores no son colineales, es decir, que el vector $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ no es un múltiplo escalar del vector $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.

El **área generada por** A se define como el área del paralelogramo cuyos vértices son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

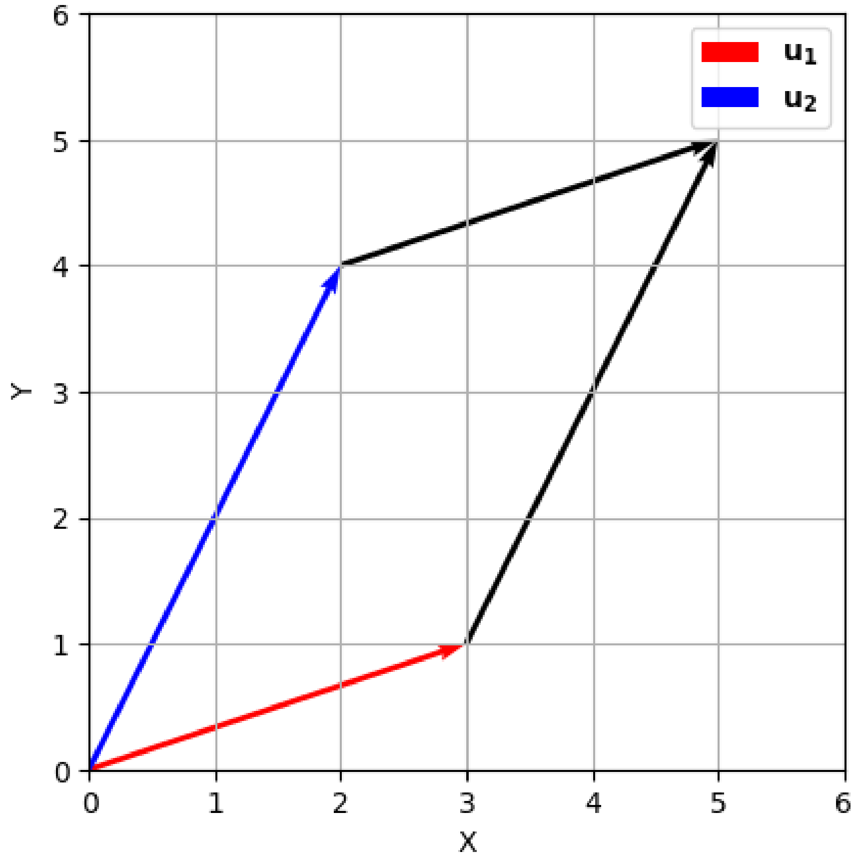

Figura 1.3: Paralelogramo formado por los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Teorema 1.4. *Si A es una matriz de 2×2 dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

formada por los vectores columna $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, entonces el área generada por la matriz A es igual al valor absoluto de su determinante, es decir, $|\det(A)|$ [11].

Ejemplo 1.22. Sean $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Definimos la matriz B como la matriz formada por u_1 y u_2 como columnas:

$$B = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

y sea $v_1 = Au_1$ y $v_2 = Au_2$, donde A es una matriz de 2×2 no singular (es decir, $\det(A) \neq 0$). Definimos la matriz C como la matriz formada por v_1 y v_2 como columnas:

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

donde $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$.

Entonces, el **área generada** por C, denotada $\mathcal{A}(C)$, es igual al valor absoluto del determinante de A multiplicado por el **área generada** por B, denotada $\mathcal{A}(B)$. Es decir:

$$\mathcal{A}(C) = |\det(A)|\mathcal{A}(B).$$

Solución. Según el Teorema 1.4, la **área generada** por la matriz B es:

$$\mathcal{A}(B) = |\det(B)|.$$

Ahora, definimos los vectores $v_1 = Au_1$ y $v_2 = Au_2$. Los vectores v_1 y v_2 son las imágenes de u_1 y u_2 bajo la transformación lineal representada por la matriz A. Supongamos que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces, los vectores v_1 y v_2 se calculan como:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_1 + b\alpha_2 \\ c\alpha_1 + d\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\beta_1 + b\beta_2 \\ c\beta_1 + d\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos reescribir la matriz C como el producto de las matrices A y B:

$$C = \begin{pmatrix} a\alpha_1 + b\alpha_2 & a\beta_1 + b\beta_2 \\ c\alpha_1 + d\alpha_2 & c\beta_1 + d\beta_2 \end{pmatrix} = AB.$$

Por el Teorema 1.4, el **área generada** por C es:

$$\mathcal{A}(C) = |\det(C)| = |\det(AB)| = |\det(A)||\det(B)| = |\det(A)|\mathcal{A}(B).$$

$\square$

Capítulo 2

Modelación matemática mediante sistemas dinámicos discretos

Un instrumento con el que actualmente contamos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema (económico, biológico, etc.), es la construcción de un modelo matemático. En este capítulo precisaremos lo que entendemos por un modelo matemático. Al mismo tiempo, mencionaremos algunos tipos de modelos que se conocen. Además, daremos algunos ejemplos de los tipos de modelos mencionados.

2.1. Modelación matemática

En esta sección discutimos la naturaleza y el objetivo de la modelación matemática. Para ello primero presentaremos el concepto de modelo, para posteriormente, definir lo que entenderemos por un modelo matemático. Además, en este apartado presentamos varios ejemplos elementales de modelos matemáticos. La siguiente definición fue tomada del libro [**?**, pág. 3, Definición 8].

Definición 2.1. *Un* **modelo** *es un conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple una porción de la realidad de algún fenómeno, ya sea biológico, físico, químico, económico, etc. Un modelo es, en definitiva, una herramienta de ayuda a la toma de decisiones.*

Definición 2.2. *Un* **modelo matemático** *es un tipo de modelo científico que emplea formalismo matemático, que para los casos que nos ocupan serán funciones.*

*Estas describen idealmente el comportamiento de un fenómeno el cual se construye a partir de datos obtenidos en un experimento o la observación del fenómeno [**?**].*

Definición 2.3. *Por* **modelación matemática** *nos referimos al proceso mediante el cual formulamos y analizamos el modelo matemático. Este proceso incluye la introducción de las magnitudes o variables importantes y relevantes involucradas en el modelo, tomar suposiciones específicas del modelo sobre esas cantidades, resolver las ecuaciones del modelo por algún método y luego comparar las soluciones con datos reales e interpretar los resultados [**?**].*

Algunos modelos matemáticos no necesitan involucrar matemáticas muy sofisticadas. El conteo, la aritmética y, de hecho, la noción misma de número, constituyen herramientas de modelado matemático que ciertamente han demostrado ser de importancia fundamental para todas las culturas. La geometría y el desarrollo posterior del álgebra y la graficación han proporcionado técnicas adicionales, no sólo para describir importantes propiedades espaciales del mundo tridimensional en el que vivimos, sino también para investigar más convenientemente fenómenos naturales y científicos, tanto cuantitativamente con el uso de ecuaciones, y visualmente con el uso de gráficos. Además, el cálculo nos ha proporcionado un lenguaje matemático para abordar procesos que cambian continuamente en el tiempo o el espacio, lo que ha contribuido enormemente a nuestra comprensión de las leyes del universo físico [**?**].

Así, modelar se puede entender simultáneamente como ciencia y como arte. Es una ciencia pues se basa en un conjunto de procesos estructurados: análisis y detección de las relaciones entre los datos, establecimiento de suposiciones y simplificaciones en la representación de los problemas, desarrollo o uso de algoritmos específicos de solución. Es un arte porque materializa una visión o interpretación de la realidad no siempre de manera unívoca. Cada persona imprime su estilo en el modelo mismo y en la especificación, en el desarrollo y en la documentación [24].

2.2. Tipos de modelos matemáticos

Una motivación frecuente para quienes construyen o usan modelos matemáticos es la de hacer predicciones: ¿A que hora lloverá mañana? ¿Cuánta gente tendrá gripe el próximo invierno? ¿Cuánto valdrá una determinada inversión dentro de 10 años? Para ayudar a responder estas preguntas se han desarrollado muchos modelos matemáticos a lo largo de los últimos siglos. Hoy en día esos modelos son referidos comúnmente como sistemas dinámicos [**?**].

Dentro del mundo de los modelos matemáticos hay un sinnúmero de clasificaciones, y cada uno refiere a un aspecto distinto de los mismos. En esta sección hablaremos de algunos tipos [31].

2.2.1. Modelos deterministas y modelos estocásticos

En esta subsección mencionaremos dos categorías generales de modelos, los modelos deterministas y los modelos estocásticos. Los **modelos deterministas**, intentan hacer predicciones con un 100 % de certeza, y **modelos estocásticos**, cuyo objetivo es presentar una gama de posibles resultados, cada uno con su propia probabilidad asociada de ocurrir [**?**].

Observación 2.1. Los modelos deterministas se emplean normalmente cuando el número de cantidades involucradas en el proceso que se modela es relativamente pequeño y todos los principios científicos subyacentes se comprenden bastante bien. En este caso normalmente sólo se necesitan unas pocas variables y las ecuaciones que expresan las relaciones entre ellas a menudo pueden expresarse de manera muy sucinta y con gran precisión.

A continuación veamos un ejemplo de un modelo determinista.

Ejemplo 2.1. Supongamos que deseamos predecir qué tan rápido caerá un objeto en t segundos después de dejarlo caer desde una determinada altura inicial. Por lo que se conoce de física cualquier objeto que cae libremente sufre la misma aceleración constante $-g$, la cual es aproximadamente $-9.8m/seg^2$, siempre que los efectos de la resistencia del aire sean insignificantes. Además, de cálculo diferencial se aprende que la aceleración es la primera derivada de la velocidad $v(t)$, lo que significa que esta función de velocidad debe satisfacer:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g. \tag{2.1}$$

Si el objeto en realidad simplemente se deja caer en lugar de arrojarse, entonces su velocidad inicial en el tiempo $t \geq 0$ debe ser $v(0) = 0$, lo cual constituye un modelo matemático simple para la cantidad variable única $v(t)$. Observemos que la ecuación diferencial (2.1) es ordinaria y de primer orden. Este modelo es determinista ya que, para cualquier $t \geq 0$, intentamos predecir el valor exacto de $v(t)$.

Utilizando cálculo integral se puede encontrar la solución de la ecuación diferencial (2.1) y obtener:

$$v(t) = -gt + C, \quad C = cte. \tag{2.2}$$

Así, con esta solución ahora es posible predecir con gran precisión (excepto la resistencia del aire) la velocidad del objeto que cae en cualquier momento hasta que golpea el suelo.

Comparemos el Ejemplo 2.1 con el Ejemplo 2.2, el cual intenta hacer predicciones cuando no se conocen por completo factores subyacentes importantes.

Ejemplo 2.2. Supongamos que lanzamos una moneda y tratamos de predecir si el resultado será Cara o Cruz. Aunque la moneda ciertamente debe estar sujeta a algunas leyes físicas bien conocidas, para que su trayectoria completa pueda calcularse en teoría, hay otros factores que podrían influir en esa trayectoria y, por lo tanto, en el resultado final. Por mencionar algunas habría que saber de antemano cantidades tales como:

(1) la dirección exacta en que se lanzó la moneda y su velocidad inicial;

(2) su altura cuando se suelta y cuando aterriza; etc.

Incluso si tales cantidades estuvieran disponibles, escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de la moneda no sería nada fácil, por no hablar de intentar resolverlas.

Por esta razón, en la práctica rara vez se intentaría calcular el resultado exacto de un lanzamiento de moneda. En lugar de ello, se utiliza un enfoque completamente diferente y se emplean medios diferentes para describir el resultado. En lugar de asumir la imposible tarea de tener en cuenta cada factor que podría influir en el resultado de un lanzamiento de moneda, todos estos factores se fusionan en un efecto promedio que tienen sobre el resultado. Este efecto promedio sólo puede conocerse observando muchos lanzamientos repetidos de la moneda. Con los resultados registrados de innumerables lanzamientos de monedas a lo largo de la historia de la humanidad, se ha llegado a la conclusión de que este efecto promedio hace que una moneda simétricamente equilibrada o justa arroje: H (Cara) la mitad de las veces y T (Cruz) la otra mitad del tiempo (generalmente no se considera la improbable posibilidad de que la moneda caiga en su borde). Otra forma de decir esto es

$$P(H) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(T) = 0.5, \tag{2.3}$$

donde $P(H)$ y $P(T)$ representan las probabilidades de que ocurra cara y cruz, respectivamente. La ecuación (2.3) se conoce como **distribución de probabilidad** para el conjunto de resultados del problema del lanzamiento de una moneda. Esto hace que el problema del lanzamiento de una moneda sea un modelo estocástico.

2.2.2. Modelos en tiempo continuo y tiempo discreto

Cuando se modela un proceso que evoluciona con el tiempo, el sistema dinámico utilizado debe ser uno que intente describir el estado de ese proceso durante todo el intervalo de tiempo de interés. Si consideramos el Ejemplo 2.1, al resolver la ecuación diferencial (vea la ecuación (2.1)) se obtiene una función de velocidad $v(t)$ (vea la ecuación (2.2)), la cual se define para todo el tiempo $t \in \mathbb{R}_{+}$, hasta que el objeto golpea el suelo. Observemos que la función de velocidad $v(t)$ puede evaluarse para cualquier elección de $t \in \mathbb{R}_{+}$, y puede usarse para calcular la velocidad exacta en ese momento. Este tipo de modelado, en el cual generalmente se implementa mediante el uso de una ecuación diferencial, se le conoce como **modelado en tiempo continuo**.

Sin embargo, este tipo de modelado en tiempo continuo, no siempre es el mejor enfoque. Existen numerosas situaciones en las que no es deseable intentar describir el estado de un proceso para todos los valores en tiempo real, debido a la complejidad que estaría asociada con el modelo resultante. En casos como estos, un modelo de tiempo discreto puede resultar una opción más inteligente. En este tipo de sistema dinámico, en lugar de tratar de describir un proceso para todos los valores reales de tiempo durante algún intervalo, el estado del proceso se determina sólo para una colección de valores de tiempo separados o discretos, que a menudo están igualmente espaciados en el eje del tiempo.

Los **modelos de tiempo discreto** o **sistemas dinámicos discretos** como se los conoce comúnmente hoy en día, a menudo se prestan a análisis y soluciones cuantitativas mucho más fácilmente que sus correspondientes versiones de tiempo continuo.

El siguiente problema trata de ilustrar lo anteriormente mencionado.

Problema 2.1. *[?] Supongamos que intentamos trazar la trayectoria de una pelota que rebota. Además, con cada rebote, una pelota generalmente pierde parte de la energía que tenía justo antes de ese rebote. Para simplificar, supongamos que la pelota pierde $\frac{1}{4}$ de su energía con cada rebote y nuevamente no hay resistencia del aire (Vea Apéndice A). Esto significa que la velocidad de la pelota cada vez que deja el suelo, la altura máxima a la que luego se eleva y el tiempo total de vuelo hasta que vuelve a tocar el suelo, todo disminuye con cada rebote.*

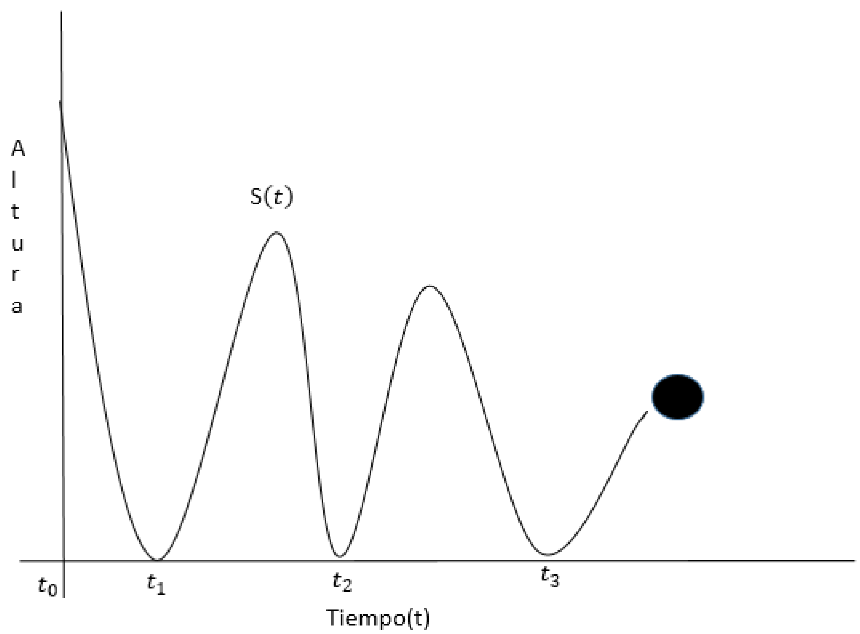

Figura 2.1: Recorrido de la pelota en tiempo continuo.

En el Ejemplo 2.3 se plantea un modelo del Problema 2.1 en tiempo continuo.

Ejemplo 2.3. Supongamos que la altura de la pelota es denotada por $s(t)$ entre dos rebotes consecutivos. Recordemos que del cálculo, la aceleración de la pelota entre rebotes consecutivos es la segunda derivada de su altura $s(t)$. Dado que, como vimos antes, todos los objetos que caen libremente y sin resistencia del aire tienen una aceleración de $-g$. Se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = -g. \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es una ecuación diferencial de segundo orden para $s(t)$. Para determinar $s(t)$ para todo $t \geq 0$, primero se debemos resolver la ecuación diferencial que aparece en la ecuación (2.4), para $t_0 \leq t \leq t_1$, donde $t_0 = 0$ y t_1 representan el momento en que la pelota golpea el suelo por primera vez (vea Figura 2.1). Se puede verificar que la solución tiene la forma:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0,$$

para $t_0 \leq t \leq t_1$, donde v_0 y s_0 son constantes que pueden determinarse haciendo uso de la altura inicial y la velocidad de la pelota, que se supone son conocidas. Una vez hecho esto, también se puede calcular el valor de t_1, que depende de ellos.

A continuación, se encuentra $s(t)$ para $t_1 \leq t \leq t_2$, donde t_2, como se muestra en la Figura 2.1 representa la segunda vez que la pelota toca el suelo, la ecuación (2.4) debe resolverse nuevamente. La solución ahora es:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t + s_1,$$

para $t_1 \leq t \leq t_2$, donde v_1 y s_1 son constantes por determinar, que dependen no sólo de v_0, s_0 y t_1, sino también de que la pelota haya perdido $\frac{1}{4}$ de su energía durante el primer rebote. Una vez que se encuentran v_1 y s_1, se puede calcular t_2. De manera similar, la altura de la pelota desde t_2 hasta el momento t_3 cuando vuelve a tocar el suelo, nuevamente como se muestra en la Figura 2.1, debe ser

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t + s_2,$$

para $t_2 \leq t \leq t_3$, donde v_2 y v_0 son nuevamente constantes desconocidas. Estos, junto con t_3, tendrían que determinarse utilizando datos encontrados previamente y teniendo en cuenta la mayor pérdida de energía de la pelota después del segundo rebote. En general, vemos que la altura de la pelota para todo tiempo continuo $t \geq 0$ está dada por

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_n t + s_n,$$

$t_n \leq t \leq t_{n+1}$, donde t_n representa el instante en que la pelota toca el suelo por n-ésima vez. Los valores de t_n, v_n y s_n deben calcularse para cada $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ con el fin de obtener una descripción completa de $s(t)$ para todo $t \geq 0$.
Finalmente, para obtener $s(t)$ para todo tiempo real $t \in \mathbb{R}_+$ requeriría un conjunto bastante sustancial de cálculos.

A continuación mostraremos un sistema dinámico discreto que modela esencialmente el mismo Problema 2.1.

Ejemplo 2.4. Supongamos que la altura de la pelota es denotada por $s(t)$ entre dos rebotes consecutivos. Además, supongamos que dejamos que S_0 represente la altura inicial de la pelota cuando se deja caer (con una velocidad inicial de 0).

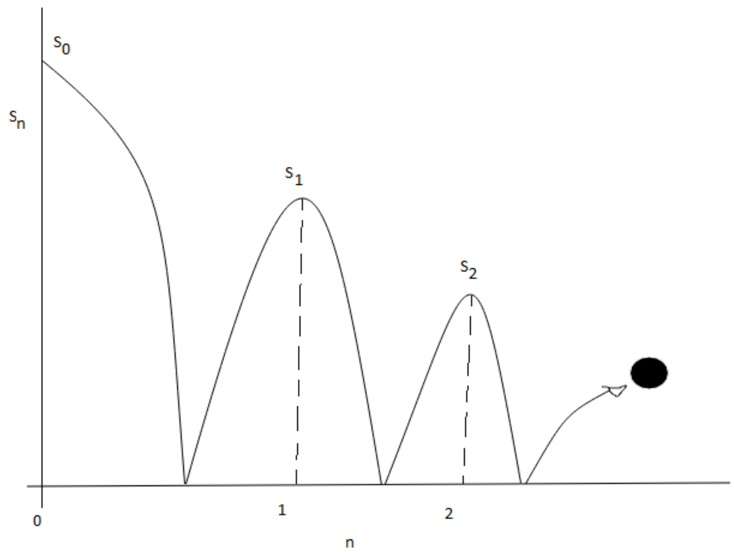

Figura 2.2: Recorrido de la pelota en tiempo discreto.

Dado que suponemos, como antes, que la pelota pierde $\frac{1}{4}$ de su energía con cada rebote y que no hay resistencia del aire, la pelota debe retener $\frac{3}{4}$ de su energía de una altura máxima a la siguiente. Desde el punto de vista físico, esto significa que debe volver a elevarse hasta una altura máxima de

$$S_1 = \frac{3}{4} S_0$$

después del primer rebote (vea Figura 2.3). Por la misma razón, la pelota debe elevarse hasta una altura máxima de

$$S_2 = \frac{3}{4} S_1,$$

después del segundo rebote, y una altura máxima de

$$S_3 = \frac{3}{4} S_3,$$

después del tercero, como se muestra en la Figura 2.3.

Es fácil ver que en general cada altura máxima S_n, está relacionada con la siguiente S_{n+1} por la ecuación

$$S_{n+1} = \frac{3}{4} S_n, \tag{2.5}$$

donde $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. La ecuación iterativa (2.5) representa un modelo de tiempo discreto para nuestra pelota que rebota. Con S_0 conocido, se puede iterar esta ecuación repetidamente para determinar una secuencia única de iteraciones S_1, S_2, $S_3, \ldots$

Por ejemplo, si $S_0 = 4$ unidades, entonces, sustituyendo en la ecuación (2.5) obtenemos que :

$$S_1 = \frac{3}{4} S_0 = \frac{3}{4}(4) = 3.$$

Para $n = 1$

$$S_2 = \frac{3}{4} S_1 = \frac{3}{4}(3) = 2.25.$$

Para $n = 2$

$$S_3 = \frac{3}{4} S_2 = \frac{3}{4}(2.25) = 1.6875.$$

etc.

Por otro lado, si $S_0 = 6$ unidades, entonces sustituyendo en la ecuación (2.5) se obtiene que:

$$S_1 = \frac{3}{4} S_0 = \frac{3}{4}(6) = 4.5.$$

Para $n = 1$

$$S_2 = \frac{3}{4} S_1 = \frac{3}{4}(4.5) = 3.375.$$

Para $n = 2$

$$S_3 = \frac{3}{4} S_2 = \frac{3}{4}(3.375) = 2.53125.$$

etc.

Cualquier sucesión completa de tales iteraciones S_n, para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ constituye una solución de (2.5). Notemos que la ecuación (2.5) tiene un número infinito de soluciones, dependiendo del valor elegido para S_0. Cabe señalar que es mucho más sencillo generar una solución en tiempo discreto S, del problema de la pelota que rebota que obtener una solución en tiempo continuo $s(t)$. A diferencia de los modelos de tiempo continuo, cuya frecuente dependencia de ecuaciones diferenciales significa que puede ser difícil encontrar soluciones precisas, soluciones muy precisas de sistemas dinámicos discretos como (2.5) siempre están disponibles, especialmente si se puede emplear algún tipo de dispositivo informático para realizar los cálculos.

Observación 2.2. La relativa facilidad de generar soluciones de esta manera, a través de iteración numérica directa, explica en cierta medida la reciente popularidad de los sistemas dinámicos discretos en nuestra era actual de hardware informático extremadamente rápido pero bastante económico [**?**].

Es importante señalar que (2.5) no es la única forma de expresar la relación entre iteraciones sucesivas $S_1, S_2, \ldots$, en el siguiente ejemplo colocamos otra forma.

Ejemplo 2.5. Consideremos el Ejemplo 2.4. Observemos que en lugar de considerar la ecuación (2.5) se puede escribir:

$$S_n = \frac{3}{4} S_{n-1}, \tag{2.6}$$

donde $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Suponiendo que S_0 representa la altura inicial dada de la pelota, si $n = 1$ en (2.6) se obtiene

$$S_1 = \frac{3}{4} S_0,$$

que es el mismo valor de S_1 que se obtuvo en (2.5). De manera similar, si $n = 2$ en la ecuación (2.6) se obtiene

$$S_2 = \frac{3}{4} S_1$$

como antes. Cada iteración posterior se puede calcular sucesivamente a partir de (2.6) dejando $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. Al final, esto genera exactamente la misma solución S_0, $S_1, S_2, \ldots$ que la que se obtiene con la ecuación (2.5).

Aunque la ecuación (2.6) proporciona un medio alternativo para representar un modelo del Problema 2.1 en tiempo discreto, se elegirá el estilo más común, el cual lo proporciona la ecuación (2.5). De ahora en adelante se adoptará este estilo al escribir una ecuación iterativa.

Ahora, para cualquier pelota que rebote que retiene la fracción r de su energía después de cada rebote, donde $0 \leq r \leq 1$ y la resistencia al aire nuevamente se supone que es insignificante, se puede obtener un modelo discreto el cual se coloca en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Supongamos que una pelota que rebota retiene la fracción r de su energía después de cada rebote, donde $0 \leq r \leq 1$ y la resistencia al aire nuevamente se supone que es insignificante. Denotemos por S_0 la altura inicial de la pelota cuando se deja caer, y para cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, S_n representemos la altura máxima después del n-ésimo rebote. La siguiente ecuación modela la altura de una pelota que rebota y que retiene la fracción de su energía después de cada rebote:

$$S_{n+1} = rS_n, \tag{2.7}$$

donde $0 \leq r \leq 1$.

A la ecuación (2.7) algunas veces se le conoce como **ecuación iterativa** o como **ecuación recursiva**, y al proceso de resolverlos algunas veces se le conoce como **recursividad**. En la Subsección 2.3 se ahondará en este tema.

Ejemplo 2.7. Sea $t \in \mathbb{N}$. Supongamos que $N(t)$ denota la cantidad de sustancia (o población) que está en crecimiento o bien en decaimiento en el tiempo t. La ecuación

$$N_{t+1} = 2N_t,$$

es otro ejemplo de ecuación recursiva.

2.2.3. Modelo lineal y no lineal

Existe una clasificación más de los modelos matemáticos, los modelos lineales o modelos no lineales. Los **modelos lineales** son representados mediante ecuaciones lineales y los **modelos no lineales**, se representan mediante ecuaciones no lineales.

Ejemplo 2.8. Consideremos el Ejemplo 2.6. El modelo de la pelota que rebota se denomina lineal ya que su ecuación que lo representa es lineal. Por ejemplo, si en el modelo $S_{n+1} = rS_n$ reemplazamos S_n por x y S_{n+1} por y, entonces $S_{n+1} = rS_n$ se convierte en $y = rx$, puesto que r es una constante o parámetro que no depende de $x = S_n$ o $y = S_{n+1}$. Esto significa que $y = rx$ es una ecuación lineal que involucra las dos variables x e y únicamente, o de manera equivalente, y es una función lineal de x. Por tanto, el modelo se clasifica como lineal.

En este trabajo estudiaremos algunos modelos matemáticos deterministas, discretos, lineales y no lineales.

2.3. Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias o también llamadas "ecuaciones de recurrencia", "ecuaciones recursivas" o "ecuaciones iterativas", surgen como modelo matemático de un cierto fenómeno que evoluciona en el tiempo cuando la medida y que describe el sistema se realiza en instantes t_n, donde $n \in \mathbb{N}$, separados por un intervalo o periodo de tiempo de amplitud constante (un año, un mes, etc.). Algunas veces escribimos y_0, o bien $y(0)$, para representar el estado inicial del sistema, y_1 mide el estado del sistema en el primer periodo t_1, y_2 mide el estado del sistema en el segundo periodo t_2, y así, sucesivamente. La evolución del sistema estará representada por la sucesión de números reales $y_0, y_1, y_2, \ldots$ [9, pág. 15]. A continuación escribimos el concepto abstracto de una ecuación en diferencias.

Definición 2.4. *[?] Una* **ecuación en diferencias** *es una expresión del tipo:*

$$y_{n+t} = F(n, y_{n+t-1}, y_{n+t-2}, \ldots, y_n), \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.8}$$

donde t es un número natural. Para permitir que la sucesión se pueda calcular y esté definida de manera única a través de esta relación, se requiere, información suficiente que permita calcular t valores sucesivos de y, digamos y_1, y_2, y_3,..., y_t. Éstas son las **condiciones de frontera** *que, cuando se utilizan junto con la ecuación en diferencias, hacen que todos los valores sucesivos de y sean calculables de forma única.*

Observación 2.3. [?] La ecuación (2.8) algunas veces se escribe también de la forma

$$F(n, y(n+t-1), y(n+t-2), \ldots, y(n)) = y(n+t) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.9}$$

Si colocamos $n = 1$ en la ecuación en diferencias (2.8) esto nos permite calcular y_{t+1} a partir de los valores de frontera dados. Luego, colocando $n = 2$ podemos calcular y_{t+2} a partir de la ecuación, los valores dados de y y el valor calculado de y_{t+1}. Mediante este proceso avanzamos paso a paso hasta cualquier valor posterior de y.

Definición 2.5. *El conjunto de todas las soluciones de la ecuación recibe el nombre de* **solución general** *de la ecuación. Si se cuentan con ciertas condiciones iniciales, se puede determinar* **soluciones particulares** *de la ecuación en diferencias.*

Definición 2.6. *Llamamos* **orden** *de la ecuación en diferencias, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y.*

Ejemplo 2.9. Sea $y \in \mathcal{C}$. Algunos ejemplos de una ecuación en diferencias son los siguientes.

- $y_{n+1} - y_n = 5, \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{Z}_+.$
- $y_{n+1} - y_n = 2n + 1, \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{Z}_+.$
- $y_{n+4} - y_n = n, \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{Z}_+.$

Ejemplo 2.10. Sea $y \in \mathcal{C}$. Considerando el Ejemplo 2.9 se tiene que:

- la ecuación en diferencias $y_{n+1} - y_n = 2n + 1$ es de orden $n + 1 - n = 1$,
- la ecuación en diferencias $y_{n+4} - y_n = n$, es de orden $n + 4 - n = 4$.

Una clase especial de ecuaciones en diferencias, son las llamadas ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales. Cabe mencionar que el uso de los términos lineal y no lineal es completamente análogo a su uso en el campo de las ecuaciones diferenciales. A continuación damos la definición formal.

Definición 2.7. *Una* **ecuación en diferencias será lineal con coeficientes constantes de orden** t *cuando su expresión sea*

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g(n), \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.10}$$

Se dirá que es una **ecuación en diferencias lineal homogénea de orden** t *cuando $g(n) = 0$. Es decir, cuando su expresión sea*

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.11}$$

Observación 2.4. La ecuación (2.10) algunas veces también se expresa de la siguiente manera:

$$y(n+t) + a_{t-1}y(n+t-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.12}$$

Como caso particular de la Definición 2.10 tenemos las ecuaciones en diferencias lineal de orden 1 y 2 que son las que escribiremos a continuación.

Definición 2.8. *Una* **ecuación en diferencias lineal de primer orden** *es de la forma:*

$$y_{n+1} + a_0 y_n = g(n), \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.13}$$

Definición 2.9. *Una* **ecuación en diferencias lineal de segundo orden** *es de la forma:*

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.14}$$

A continuación colocamos ejemplos de una ecuación en diferencias lineal de primer y segundo orden.

Ejemplo 2.11. Sea $y \in \mathcal{C}$. Ejemplos de ecuaciones en diferencias lineal de primer orden son los siguientes.

1. $y_{n+1} - y_n = 5, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.
2. $y_{n+1} + 5y_n = 2n, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.
3. $y_{n+1} - 4y_n = n, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 2.12. Sea $y \in \mathcal{C}$. Ejemplos de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

1. $y_{n+2} + 3y_{n+1} - 5y_n = n, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.
2. $y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Un ejemplo de una ecuación en diferencias no lineal es el siguiente.

Ejemplo 2.13. [20, pág. 6] La ecuación

$$y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.15}$$

es conocida como ecuación en diferencias logística.

Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La ecuación (2.15) responde al siguiente modelo general: analizar el proceso dinámico que se genera al aplicar la función f sucesivamente, de manera iterada, partiendo de un determinado valor inicial x_0.

$$\ldots \longleftarrow f(f(x_0)) \longleftarrow f(x_0) \longleftarrow x_0 \tag{2.16}$$

Se puede imaginar este proceso o sistema dinámico como el modelo de la evolución de un sistema real (ya sea físico, biológico, etc.) a lo largo de una sucesión de periodos cuando se supone que el estado del sistema en cada uno de esos periodos está reflejado por un número real x y que la "ley de cambio" que transforma un estado en el siguiente está determinado por la función f [9, pág. 18]. Colocando $f^n(y_0) = y_n$ o $f^n(y_0) = y(n)$ podemos representar el proceso (2.16) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_{n+1} = f(y_n), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

conocido en algunas ocasiones como *problema de valor inicial* relativo a la ecuación en diferencias $y_{n+1} = f(y_n)$. Observe que es la misma forma de nombrar un problema en el área de Ecuaciones diferenciales cuando se cuenta con una condición inicial (vea Apéndice B). Nos referimos a (2.17) como un **sistema dinámico unidimensional** [20]. La función f es llamada la función asociada a (2.17). Si la función f es lineal se obtendrá una ecuación en diferencias lineal.

En general, una ecuación en diferencias es una relación de recurrencia o proceso iterativo de la forma $f^n(y_0) = y_n$, que también llamaremos un **sistema dinámico discreto** [9, pág. 19]. Así, algunas veces se plantea la ecuación en diferencias para hablar del sistema dinámico y otras se plantea solo el espacio X con el que se trabajará y la regla de la función f y se dice: el sistema dinámico (X, f). Sabemos que el estudio del comportamiento del sistema dinámico (X, f) se representa mediante una ecuación:

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.18}$$

En la Sección 2.5 y en la 2.7 se discute la teoría general para resolver algunos tipos de ecuaciones en diferencias lineal.

Otro ejemplo de ecuación en diferencias es el siguiente.

Ejemplo 2.14. [20, pág. 7] Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos el intervalo cerrado $[0,1]$ con la métrica del subespacio de la recta real. La ecuación

$$y_{n+1} = T_2(y_n), \text{ donde} \tag{2.19}$$

$T_2 \colon [0,1] \to [0,1]$ es una función definida por:

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \\ 2-2x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$. La ecuación en diferencias es conocido como la ecuación tienda.

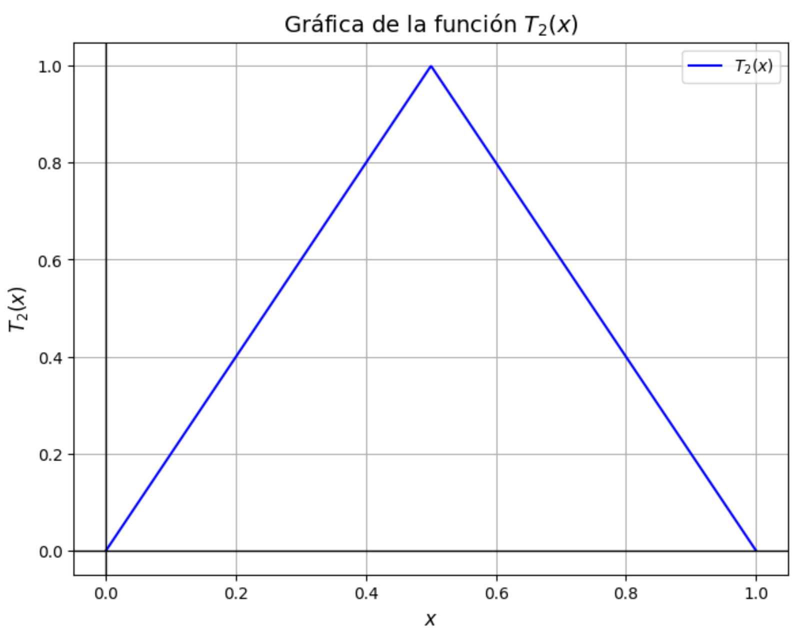

Figura 2.3: Gráfica de la función T_2.

Más generalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.10. *Sean X un espacio métrico y una función $g \colon \mathbb{Z}_+ \times X \to X$. Una ecuación en diferencias es una relación de la forma:*

$$y_{n+1} = g(n, y_n), \quad \textit{para cada } (n, y_n) \in \mathbb{Z}_+ \times X. \tag{2.20}$$

donde la función g depende del entero positivo n, el cual va indicando los sucesivos periodos. Cuando la "ley de cambio" dada por la función es autónoma respecto al tiempo se dice que se trata de una **ecuación autónoma** *(ecuación (2.17)) y en el caso en el que el valor de y depende no solo del valor de y en el periodo anterior sino también del periodo en el que esté, se le conoce como* **ecuación no autónoma** *(ecuación (2.20))[9, pág. 19].*

Observación 2.5. A continuación anotamos algunas observaciones importantes.

- Si la función (2.20) modela el funcionamiento de un fenómeno físico, sus soluciones describirán las evoluciones de dicho sistema. Al plantear una ecuación en diferencias como modelo de un determinado fenómeno real una de las cosas que interesa es el comportamiento del sistema a largo plazo.

- Una forma alternativa de escribir la ecuación (2.20) es:

$$y(n+1) = g(n, y(n)), \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

2.4. Operadores

En esta sección se expondrán dos operadores esenciales en el estudio de las ecuaciones en diferencias: el operador diferencia y el operador shift. Para ello, es necesario recordar que $\mathcal{C} = \{y \colon y \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (vea Sección 1.4).

Definición 2.11. *Definimos los siguientes operadores: Sea $y \in \mathcal{C}$.*

- *El* ***operador diferencia*** *de y se denota por $\Delta y \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y se define por:*

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t),$$

  para cada $t \in \mathbb{Z}_+$.

- *El* ***operador shift*** *de y se denota por $Ey \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y se define por:*

$$Ey(t) = y(t+1),$$

  para cada $t \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 2.1. *El* **operador diferencia** *es lineal.*

Demostración: Sean y, $x \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\alpha\Delta y(t) + \Delta x(t) &= \alpha[y(t+1) - y(t)] + x(t+1) - x(t)\\ &= \alpha y(t+1) - \alpha y(t) + x(t+1) - x(t)\\ &= \alpha y(t+1) + x(t+1) - [\alpha y(t) + x(t)]\\ &= \Delta(\alpha y(t) + x(t)).\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que Δ es lineal. $\square$

Lema 2.2. *El* **operador shift** *es lineal.*

Demostración: Sean y, $x \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que el operador shift es lineal. Para esto, calculemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}E(\alpha\, y(t) + x(t)) &= \alpha y(t+1) + x(t+1)\\ &= \alpha E y(t) + E x(t).\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que E es lineal. $\square$

Lema 2.3. *Sean $y \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{Z}_+$ y $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $E^k y(t) = y(t+k)$.*

Demostración: Haremos la demostración por inducción matemática. Veamos que se cumple para $k = 2$, esto es

$$E^2 y(t) = EEy(t) = Ey(t+1) = y(t+1+1) = y(t+2).$$

Ahora supongamos que se cumple para $k-1$, es decir

$$E^{k-1} y(t) = y(t+k-1).$$

Verifiquemos que se cumple para k.

$$E^k y(t) = EE^{k-1} y(t) = Ey(t+k-1) = y(t+k-1+1) = y(t+k).$$

$\square$

Ejemplo 2.15. Sea $y \in \mathcal{C}$, definido por $y(t) = t$, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que $(E-1)^2(t) = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}(E-1)^2y(t) &= (E^2-2E+1)y(t) = E^2y(t)-2Ey(t)+y(t)\\ &= y(t+2)-2y(t+1)+y(t) = (t+2)-2(t+1)+t\\ &= t+2-2t-2+t\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16. Sea $y \in \mathcal{C}$, definido por $y(t) = t+1$, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que $(E^2-1)y(t) = 2$.

En efecto,

$$(E^2-1)y(t) = E^2y(t) - y(t) = y(t+2) - y(t) = (t+2+1) - (t+1) = 2.$$

Ejemplo 2.17. Sea $y \in \mathcal{C}$, definido por $y(t) = t+1$, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que $(E-1)y(t) = 1$.

En efecto,

$$(E-1)y(t) = Ey(t) - y(t) = y(t+1) - y(t) = (t+1)+1-(t+1) = 1.$$

Ejemplo 2.18. Sea $y \in \mathcal{C}$, definido por $y(t) = 2^t$, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que $(E-2)y(t) = 0$.

En efecto,

$$(E-2)y(t) = Ey(t) - 2y(t) = y(t+1) - 2\cdot 2^t = 2^{t+1} - 2^{t+1} = 0.$$

2.4.1. Acción de un polinomio

Sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos un polinomio de grado k en E:

$$p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI. \tag{2.21}$$

La acción de un polinomio de grado k en el operador de desplazamiento E en el término b^t, para cualquier constante b consiste en [8, pág. 59]:

$$\begin{aligned} p(E)b^t &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)b^t && (2.22)\\ &= a_0E^kb^t + a_1E^{k-1}b^t + \cdots + a_kIb^t && (2.23)\\ &= a_0b^{t+k} + a_1b^{t+k-1} + \cdots + a_kb^t && (2.24)\\ &= (a_0b^k + a_1b^{k-1} + \cdots + a_k)b^t && (2.25)\\ &= p(b)b^t. && (2.26) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la ecuación en diferencias lineal de orden n

$$y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)y_{t+1} + a_n(t)y_t = g(t), \qquad (2.27)$$

usando el operador shift E, la ecuación 2.27 se reescribe como:

$$p(E)y(t) = g(t), \qquad (2.28)$$

donde $p(E) = E^n + a_1E^{n-1} + \cdots + a_nI$, ya que

$$\begin{aligned} p(E)y(t) &= (E^n + a_1E^{n-1} + \cdots + a_nI)y(t)\\ &= E^ny(t) + a_1E^{n-1}y(t) + \cdots + a_nI)y(t)\\ &= y(t+n) + a_1y(t+n-1) + \cdots + a_ny(t). \end{aligned}$$

Lema 2.4. *[8, pág. 60] Sean $p(E)$ el polinomio dado en (2.21) y $g(t)$ cualquier función discreta. Entonces*

$$p(E)(b^tg(t)) = b^tp(bE)g(t). \qquad (2.29)$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
b^t p(bE)g(t) &= b^t\left[a_0(bE)^k + a_1(bE)^{k-1} + \cdots + a_n I\right] g(t) \\
&= b^t\left[a_0 b^k E^k g(t) + a_1 b^{k-1} E^{k-1} g(t) + \cdots + a_n I g(t)\right] \\
&= b^t\left[a_0 b^k g(t+k) + a_1 b^{k-1} g(t+k-1) + \cdots + a_n I g(t)\right] \\
&= a_0 b^{t+k} g(t+k) + a_1 b^{t+k-1} g(t+k-1) + \cdots + a_k b^t g(t) \\
&= a_0 E^k b^t g(t) + a_1 E^{k-1} b^t g(t) + \cdots + a_k I b^t g(t) \\
&= \left[a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_n I\right](b^t g(t)) \\
&= p(E)(b^t g(t)).
\end{aligned}
$$

□

Definición 2.12. *Un operador polinomio $N(E)$, donde E es el operador desplazamiento, se dice que anula a g si*

$$N(E)g(t) = 0, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.30}$$

En otras palabras, $N(E)$ es un anulador de g si $g(t)$ es una solución de (2.30).

Ejemplo 2.19. Sea $g \in \mathcal{C}$ dada por $g(t) = 2^t$, para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. Un anulador de $g(t)$ es $N(E) = E - 2$. En efecto, $y_t = y(t) = 2^t$ es solución de la ecuación $N(E)y(t) = 0$ ya que:

$$
\begin{aligned}
N(E)y(t) &= (E-2)y(t) = Ey(t) - 2y(t) = y(t+1) - 2y(t) &\quad (2.31)\\
&= 2^{t+1} - 2y(t) = 2^{t+1} - 2\cdot 2^t = 2^{t+1} - 2^{t+1} = 0. &\quad (2.32)
\end{aligned}
$$

2.5. Teoría general de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden n

En esta sección examinamos una clase especial de ecuaciones en diferencias, las llamadas ecuaciones lineales. Las ecuaciones no lineales las abordaremos posteriormente.

Consideremos una ecuación en diferencias lineal de orden n con coeficientes constantes.

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_1 y_{t+1} + a_n y_t = g(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.33}$$

Resolver una ecuación en diferencias implica encontrar una función que da, para cada valor de t un valor para y.

Teorema 2.1. *Cualquier solución $y(n)$ de 2.33 puede escribirse como*

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)$$

donde $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación 2.33.

A partir de este teorema, se puede ver que cualquier solución $y(t)$ de la ecuación (2.33) tiene la forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{2.34}$$

donde $y_h(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)$ y $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación en diferencias [8]. En algunas ocasiones es posible determinar la función $y(t)$.

A continuación, desarrollaremos la teoría básica para determinar la forma de la solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea. Consideremos una ecuación en diferencias lineal homogénea:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + a_2 y_{t+n-2} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0 \tag{2.35}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $a_n \neq 0$. Sea $t \in \mathbb{N}$. Consideremos una solución de la forma $y_t = r^t$ con $r \neq 0$ como la solución de la ecuación (2.35). Luego $y_t = r^t$ debe de satisfacer la ecuación (2.35). Esto es

$$\begin{aligned} r^{t+n} + a_1 r^{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} r^{t+1} + a_n r^t &= 0 \\ r^t \left(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n \right) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $r^t \neq 0$ se obtiene que:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \tag{2.36}$$

En consecuencia, $y_t = r^t$ es una solución de (2.35) si y sólo si r satisface la ecuación (2.36).

Definición 2.13. *A la ecuación*

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{2.37}$$

le llamamos **ecuación auxiliar** *(o* **ecuación característica***) asociada a la ecuación en diferencias (2.35).*

Teorema 2.2. *r_0 es una raíz de la ecuación característica (2.37), si y sólo si $y_t = r_0^t$ es solución de la ecuación (2.35).*

2.5.1. Solución general de una ecuación en diferencias lineal homogénea de primer y segundo orden con coeficientes constantes.

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes, $y_{t+1} - ay_t = 0$, donde $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es una función definida para $t \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in \mathbb{R}$. Dicha ecuación en diferencias tiene como ecuación característica:

$$P(r) = r - a = 0,$$

la cual tiene como raíz a $r = a$. Así, por el Teorema 2.2 se tiene que una solución de la ecuación (2.42) es:

$$y_t = a^t.$$

Ahora, consideremos una ecuación en diferencias lineal de segundo orden:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0. \tag{2.38}$$

Por (2.37) la ecuación en diferencias tiene como ecuación característica:

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{2.39}$$

La ecuación auxiliar es cuadrática y sus raíces son:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2}$$

Cuando el discriminante $(a_1)^2 - 4a_2$ es positivo, las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. Si $(a_1)^2 - 4a_2 = 0$ las raíces son reales e iguales. Cuando $(a_1)^2 - 4a_2 < 0$

las raíces son complejas. Por tal motivo, los casos a considerar son los siguientes:

Caso 1. La ecuación característica tiene dos raíces reales diferentes r_1 y r_2. En este caso,

$$y_t^1 = r_1^t \quad \text{y} \quad y_t^2 = r_2^t$$

son soluciones de la ecuación en diferencias. Además, la combinación lineal de estas soluciones forman la solución general para la ecuación (2.38).

Caso 2. La ecuación característica tiene una raíz real r de multiplicidad dos. En este caso,

$$y_t^1 = r^t \quad \text{y} \quad y_t^2 = tr^t$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias. La combinación lineal de estas soluciones forman la solución general para la ecuación (2.38).

Caso 3. La ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas

$$r_1 = a + ib \quad \text{y} \quad r_2 = a - ib.$$

Luego,

$$y_t^1 = r_1^t \quad \text{y} \quad y_t^2 = r_2^t$$

son soluciones de la ecuación (2.38). La combinación lineal de estas forman la solución general de la ecuación (2.38):

$$y_t = k_1 r_1^t + k_2 r_2^t, \quad \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son constantes reales.} \tag{2.40}$$

Expresando los números complejos r_1, r_2 en su forma trigonométrica y teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos se obtiene que:

$$r_1 = a + ib = \rho(cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \qquad r_2 = a - ib = \rho(cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)).$$

Luego,

$$r_1^t = \rho^t(cos(t\theta) + i\text{sen}(t\theta)) \qquad\qquad r_2^t = \rho^t(cos(t\theta) - i\text{sen}(t\theta).)$$

Así, la ecuación (2.40) se puede reescribir de la siguiente manera

$$y_t = k_1\rho^t(cos(t\theta) + i\text{sen}(t\theta)) + k_2\rho^t(cos(t\theta) - i\text{sen}(t\theta)).$$

Dado que $r_1^t = \rho^t(cos(t\theta) + i\text{sen}(t\theta))$ y $r_2^t = \rho^t(cos(t\theta) - isen(t\theta))$ son soluciones, entonces cualquier combinación lineal de estas también lo serán, en particular

$$\frac{1}{2}r_1^t + \frac{1}{2}r_2^t = \rho^t cos(t\theta)$$

y

$$\frac{1}{2i}r_1^t - \frac{1}{2i}r_2^t = \rho^t\text{sen}(t\theta)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.38) es:

$$y_t = k_1\rho^t cos(t\theta) + k_2\rho^t\text{sen}(t\theta). \tag{2.41}$$

2.6. Algunos tipos de ecuaciones en diferencias de primer orden y sus soluciones

En esta sección planteamos la solución de algunos tipos de ecuaciones en diferencias de primer orden útiles para este trabajo. Para mayores detalles puede consultar [**?**].

2.6.1. Ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea con coeficiente constante

La solución de la ecuación en **diferencias lineal de primer orden homogénea con coeficiente constante**

$$y_{t+1} = ay_t, \text{ para cada } t \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

con la condición inicial y_0, se puede obtener mediante iteraciones de y, esto es:

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 \\ y_2 &= ay_1 = aay_0 = a^2y_0 \\ y_3 &= ay_{+2} = aa^2y_0 = a^3y_0. \end{aligned}$$

y así, sucesivamente. Se puede probar utilizando inducción matemática que la solución para la ecuación (2.42) es

$$y_t = a^t y_0. \tag{2.43}$$

Ejemplo 2.20. Consideremos la ecuación $y_{t+1} = 3y_t$, con $t \in \mathbb{Z}_+$ y la condición inicial $y_0 = 1$, donde $y \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Por (2.43) se sabe que su solución de la ecuación en diferencias lineal es $y_t = 3^t y_0$.
Sustituyendo la condición inicial se obtiene que $y_t = 3^t$ es la solución del problema. En efecto, $y_{t+1} = 3y_t$ es equivalente a $y_{t+1} - 3y_t = 0$. Ahora, sustituyendo la solución obtenemos que:

$$y_{t+1} - 3y_t = 3^{t+1} - 3(3^t) = 3^{t+1} - 3^{t+1} = 0.$$

2.6.2. Ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea con coeficiente no constante

En el caso en que el coeficiente a de la ecuación (2.42) no sea constante, la solución de la ecuación en **diferencias lineal de primer orden homogénea**

$$y_{t+1} = a(t)y_t, \text{ para cada } t \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.44}$$

con la condición inicial y_0, nuevamente se puede obtener mediante iteraciones de y, esto es:

$$\begin{aligned} y_1 &= a(0)y_0 \\ y_2 &= a(1)y_1 = a(1)a(0)y_0 \\ y_3 &= a(2)y_2 = a(2)a(1)a(0)y_0. \end{aligned}$$

Nuevamente, utilizando inducción matemática se puede probar que la solución para la ecuación (2.44) es

$$y_t = \left[\prod_{i=0}^{t-1} a(i)\right] y_0. \tag{2.45}$$

Ejemplo 2.21. Consideremos la ecuación $y_{t+1} = (t+1)y_t$ con la condición inicial y_0. Por (2.45) se sabe que su solución de la ecuación en diferencias lineal es

$$y_t \equiv \left[\prod_{i=0}^{t-1}(i+1)\right] y_0.$$

En efecto, $y_{t+1} = (t+1)y_t$ es equivalente a $y_{t+1} - (t+1)y_t = 0$. Ahora, sustituyendo la solución obtenemos que

$$y_{t+1} - (t+1)y_t = \left[\prod_{i=0}^{t}(i+1)\right] y_0 - (t+1)\left[\prod_{i=0}^{t-1}(i+1)\right] y_0 = 0.$$

2.6.3. Ecuación en diferencia de primer orden no homogénea. Tipo 1

La solución de una ecuación en diferencia de primer orden no homogénea de la forma

$$y_{t+1} = ay_t + b, \text{ para cada } t \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \tag{2.46}$$

con $b \in \mathbb{R}$ y la condición inicial y_0 se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 + b \\ y_2 &= ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2y_0 + ab + b \\ y_3 &= ay_2 + b = a(a^2y_0 + ab + b) + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b \end{aligned}$$

Utilizando inducción matemática se puede probar que

$$y_t = ay_{t-1} + b = a^t y_0 + a^{t-1}b + a^{t-2}b + a^{t-3}b + \cdots + a^2b + ab + b \quad (2.47)$$

Para determinar la solución de (2.46) procedemos de la siguiente manera. Definimos

$$Sa = a^{t-1}b + a^{t-2}b + a^{t-3}b + \cdots + a^2b + ab + b. \quad (2.48)$$

Esto implica que

$$aSa = a^t b + a^{t-1}b + a^{t-2}b + \cdots + a^3b + a^2b + ab. \quad (2.49)$$

Así, restando las dos ecuaciones anteriores, (2.48) y (2.49), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} Sa - aSa &= (a^{t-1}b + a^{t-2}b + a^{t-3}b + \cdots + a^2b + ab + b) \\ &- a^t b - a^{t-1}b - a^{t-2}b - \cdots - a^2b - ab \\ Sa - aSa &= b - a^t b \\ Sa(1-a) &= b(1-a^t) \end{aligned}$$

Despejando Sa obtenemos:

$$Sa = \frac{b(1-a^t)}{(1-a)}. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.50) en (2.47) obtenemos que la solución para la ecuación (2.46) es:

$$y_t = a^t y_0 + \frac{b(1-a^t)}{(1-a)}. \quad (2.51)$$

Ejemplo 2.22. Consideremos la ecuación $y_{t+1} = -3y_t + 10$, donde $t \in \mathbb{Z}_+$ y $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Por la ecuación (2.51) se sabe que su solución de la ecuación en diferencias es

$$\begin{aligned} y_t &= (-3)^t y_0 + \frac{10\left[1-(-3)^t\right]}{(1+3)} \\ &= (-3)^t y_0 + \frac{5}{2}\left[1-(-3)^t\right] \\ &= (-3)^t y_0 - \frac{5}{2}(-3)^t + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

En efecto, dado que $y_{t+1} = -3y_t + 10$ es equivalente a $y_{t+1} + 3y_t - 10 = 0$.

Ahora sustituyendo la solución obtenemos

$$
\begin{aligned}
&y_{t+1} + 3y_t - 10 = (-3)^{t+1}y_0 - \frac{5}{2}(-3)^{t+1} + \frac{5}{2} + 3\left[(-3)^t y_0 - \frac{5}{2}(-3)^t + \frac{5}{2}\right] - 10 \\
&= -3(-3)^t y_0 - \frac{5}{2}(-3)^{t+1} + \frac{5}{2} + 3(-3)^t y_0 - \frac{15}{2}(-3)^t + \frac{15}{2} - 10 \\
&= \frac{5}{2}(-3)(-3)^t + \frac{5}{2}(3)(-3)^t + 10 - 10 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.23. Consideremos la ecuación

$$y_{t+1} = 2y_t + 5$$

con la condición inicial y_0, donde $t \in \mathbb{Z}_+$ y $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Por (2.51) se sabe que su solución de la ecuación en diferencias es

$$y_t = 2^t y_0 + \frac{5\left(1 - 2^t\right)}{(1-2)} = 2^t y_0 + 5\left(2^t - 1\right).$$

En efecto, $y_{t+1} = 2y_t + 5$ es equivalente a $y_{t+1} - 2y_t - 5 = 0$. Ahora sustituyendo la solución obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
y_{t+1} - 2y_t - 5 &= 2^{t+1}y_0 + 5\left(2^{t+1} - 1\right) - 2\left[2^t y_0 + 5\left(2^t - 1\right)\right] - 5 \\
&= 2^{t+1}y_0 + 5\left(2^{t+1}\right) - 5 - 2^{t+1}y_0 - 5\left(2^{t+1} - 2\right) - 5 \\
&= 5\left(2^{t+1}\right) - 5 - 5\left(2^{t+1}\right) + 10 - 5 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2.6.4. Ecuación en diferencia de primer orden no homogénea. Tipo 2

Consideremos una ecuación en diferencias lineal de primer orden de la forma

$$y_{t+1} = ay_t + b(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a \in \mathbb{R} \tag{2.52}$$

con la condición inicial $y_0 \in \mathbb{R}$.

Nuevamente, la solución se obtiene aplicando iteraciones a y, esto es

$$\begin{aligned}
y_1 &= ay_0 + b(0) \\
y_2 &= ay_1 + b(1) = a^2 y_0 + ab(0) + b(1) \\
y_3 &= ay_2 + b(2) = a^3 y_0 + a^2 b(0) + ab(1) + b(2).
\end{aligned}$$

Así,

$$y_t = ay_{t-1} + b(t-1).$$

Utilizando inducción matemática se puede probar que:

$$y_t = a^t y_0 + a^{t-1} b(0) + a^{t-2} b(1) + \cdots + a^2 b(t-3) + ab(t-2) + b(t-1).$$

Así, se obtiene que la solución para la ecuación (2.52)es:

$$y_t = a^t y_0 + \left[\sum_{r=0}^{t-1} a^{t-1-r} b(r) \right]. \tag{2.53}$$

Ejemplo 2.24. Consideremos la ecuación $y_{t+1} = 5y_t + 2t$ con la condición inicial y_0, donde $t \in \mathbb{Z}_+$ y $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Por (2.53) se sabe que su solución de la ecuación en diferencias lineal es

$$y_t = 5^t y_0 + \left[\sum_{r=0}^{t-1} 5^{t-1-r} b(r) \right].$$

En efecto, $y_{t+1} = 5y_t + 2t$ es equivalente a $y_{t+1} - 5y_t - 2t = 0$. Ahora, sustituyendo la solución obtenemos que:

$$\begin{aligned}
y_{t+1} - 5y_t - 2t &= 5^{t+1} y_0 + \left[\sum_{r=0}^{t} 5^{t-r} b(r) \right] - 5 \left[5^t y_0 - \sum_{r=0}^{t-1} 5^{t-1-r} b(r) \right] - 2t \\
&= \sum_{r=0}^{t} 5^{t-r} b(r) - \sum_{r=0}^{t-1} 5^{t-r} b(r) - 2t \\
&= 2t + \sum_{r=0}^{t-1} 5^{t-r} b(r) - \sum_{r=0}^{t-1} 5^{t-r} b(r) - 2t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.7. Teoría general de una ecuación en diferencias lineal no homogénea

En esta sección se expondrá el método de coeficientes indeterminados para calcular la solución particular de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. Básicamente, el método consiste en hacer una suposición inteligente sobre la forma de la solución particular y luego se sustituye esta función en la ecuación en diferencias [8, pág. 85].

Para esto empecemos esta sección considerando una ecuación en diferencias lineal de orden n:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = g(t). \tag{2.54}$$

Donde $y : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ son funciones definidas para $t \in \mathbb{Z}_+$. Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales. Para un término no homogéneo completamente arbitrario $g(t)$, este método no es efectivo. Sin embargo, se pueden establecer reglas definidas para la determinación de una solución particular por este método si $g(t)$ es una combinación de términos, cada uno de los cuales tiene una de las formas

$$a^t, \quad \text{sen}(bt), \quad \cos(bt) \quad \text{o} \quad t^k \tag{2.55}$$

o productos de estas formas

$$a^t \text{sen}(bt), \quad a^t t^k, \quad a^t t^k \cos(bt). \tag{2.56}$$

Escribiendo la ecuación (2.54) en términos del operador shift E se obtiene:

$$p(E)y(t) = g(t), \tag{2.57}$$

donde $p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I$. Supongamos que $N(E)$ es un anulador de $g(t)$ en (2.57). Aplicando $N(E)$ en ambos lados de (2.57), obtenemos:

$$N(E)p(E)y(t) = 0. \tag{2.58}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ las raíces características de la ecuación homogénea:

$$p(E)y(t) = 0. \tag{2.59}$$

Sean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ las raíces características de la ecuación homogénea:

$$N(E)y(t) = 0. \tag{2.60}$$

Debemos considerar dos casos.

Caso 1. Ninguno de los λ_i es igual a ninguno de los μ_i. En este caso, se sugiere escribir $y_p(t)$ como la solución general de (2.60) con constantes indeterminadas. Posteriormente, se sustituye esta solución particular "estimada" en (2.54), después, encontramos los valores de las constantes.

Caso 2. $\lambda_i = \mu_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$. En este caso, el conjunto de raíces características de (2.58) es igual a la unión de los conjuntos $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ y, en consecuencia, contiene raíces de mayor multiplicidad que los dos conjuntos individuales de raíces características. Para determinar una solución particular $y_p(t)$, primero encontramos la solución general de (2.58) y luego se elimina todos los términos que aparecen en $y_c(t)$. Posteriormente, se procede como en el Caso 1 para calcular los valores de las constantes.

En [**?**, pág. 270] aparece una forma alternativa de expresar lo mencionado anteriormente, lo escribimos porque puede ser útil para el lector. Nuevamente, para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden consideramos en el término independiente $g(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra según los siguiente casos:

Caso 1. Si $g(t) = a^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $C_1 a^t$ (excepto si a es raíz de la ecuación característica).

Caso 2. Si $g(t)$ es un polinomio de grado n, entonces se propone con un polinomio del mismo grado. Si uno es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene multiplicidad γ, probaremos con un polinomio de grado $n+\gamma$.

Caso 3. Si $g(t)$ es la función $\operatorname{sen}(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$, entonces tomaremos $\beta \operatorname{sen}(\alpha t) + \gamma \cos(\alpha t)$. Objetivo determinar los valores de las constantes β y γ.

La siguiente tabla contiene varios tipos de funciones $g(t)$ y sus soluciones particulares correspondientes [8, pág. 86].

$g(t)$	$y_p(t)$
a^t	$c_1 a^t$
t^k	$c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k$
$t^k a^t$	$c_0 a^t + c_1 t a^t + \cdots + c_k t^k a^t$
$\operatorname{sen}(bt)$	$c_1 \operatorname{sen}(bt) + c_2 \cos(bt)$
$\cos(bt)$	$c_1 \operatorname{sen}(bt) + c_2 \cos(bt)$
$a^t \operatorname{sen}(bt)$	$(c_1 \operatorname{sen}(bt) + c_2 \cos(bt)) a^t$
$a^t \cos(bt)$	$(c_1 \operatorname{sen}(bt) + c_2 \cos(bt)) a^t$
$a^t t^k \operatorname{sen}(bt)$	$(c_0 + c_1 t + \cdots + c^k t^k) a^t \operatorname{sen}(bt) + (d_0 + d_1 t + \cdots d^k t^k) a^t \cos(bt)$
$a^t t^k \cos(bt)$	$(c_0 + c_1 t + \cdots + c^k t^k) a^t \operatorname{sen}(bt) + (d_0 + d_1 t + \cdots d^k t^k) a^t \cos(bt)$

Tabla 2.1: Soluciones particulares de $y_p(t)$.

Con los ejemplos 2.25 y 2.26 explicaremos el método de coeficientes indeterminados.

Ejemplo 2.25. Resolvamos la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 6(3^t). \tag{2.61}$$

Donde $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es una función definida para $t \in \mathbb{Z}_+$. Para resolver la ecuación en diferencias primero determinemos una solución de la ecuación homogénea

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 0. \tag{2.62}$$

La ecuación característica asociada a (2.62) es:

$$r^2 - r - 6 = 0. \tag{2.63}$$

La ecuación (2.63) tiene por soluciones $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. Así, $x_1^t = (3)^t$ y $x_2^t = (-2)^t$ son soluciones de la ecuación en diferencias. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h^t = k_1(3)^t + k_2(-2)^t, \quad \text{donde } k_1 = \text{cte y } k_2 = \text{cte}. \tag{2.64}$$

En lo que resta determinemos una solución particular de la ecuación en diferencias (2.61). Se tiene que un anulador de $6(3^t)$ es $N(E) = E - 3$. Ahora

$N(E)x(t) = 0$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} N(E)x(t) &= (E-3)x(t) = Ex(t) - 3x(t) && (2.65)\\ &= x(t+1) - 3x(t) = 6(3^{t+1}) - 3(6(3^t)) && (2.66)\\ &= 2\cdot 3^{t+2} - 2\cdot 3^{t+2} = 0. && (2.67) \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica asociada de (2.65) es:

$$\mu - 3 = 0. \qquad (2.68)$$

Esto implica que $\mu = 3$. Por otro lado, observemos que:

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = (E^2 - E - 6)x(t) = (E-3)(E+2)x(t) = p(E)x(t). \qquad (2.69)$$

Así, la ecuación $x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 6(3^t)$ se puede reescribir en términos del operador shift E como $(E-3)(E+2)x(n) = 6(3^t)$. Luego,

$$N(E)p(E)x(t) = (E-3)(E-3)(E-2)x(t) = (E-3)^2(E-2)x(t) = 0. \qquad (2.70)$$

Por lo tanto, el conjunto de las raíces de la ecuación (2.70) es igual a $\{3, 3, -2\}$.

Así, una solución general de (2.70) es:

$$x(t) = a_1 3^t + a_2 t 3^t + a_3(-2)^t. \qquad (2.71)$$

Omitiendo de $x(t)$, los términos 3^t y $(-2)^t$ que aparecen en (2.64) se obtiene que

$$x_p^t = x_p(t) = a_2 t 3^t. \qquad (2.72)$$

Sustituyendo el valor de x_p^t (vea (2.72)) en (2.61) obtenemos:

$$\begin{aligned} a_2(t+2)3^{t+2} - a_2(t+1)3^{t+1} - 6a_2 t 3^t &= 6(3^t)\\ a_2(t+2)3^t\cdot 3^2 - a_2(t+1)3^t\cdot 3 - 6a_2 t 3^t &= 6(3^t)\\ \left[a_2(t+2)3^2 - a_2(t+1)\cdot 3 - 6a_2 t\right]3^t &= 6(3^t). \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned} a_2\left[(t+2)3^2-(t+1)3-6t\right] &= 6 \\ a_2\left[(t+2)9-(t+1)3-6t\right] &= 6. \end{aligned}$$

Desarrollando obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_2\left[9t+18-3t-3-6t\right] &= 6 \\ a_2\left[15\right] &= 6 \\ a_2 &= \frac{6}{15}=\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x_p^t = x_p(t) = \frac{2}{5}t3^t. \tag{2.73}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación en diferencias es

$$x_t = k_1(3^t)+k_2(-2^t)+\frac{2}{5}t3^t, \quad k_1,k_2\in\mathbb{N}.$$

Ejemplo 2.26. Resolvamos la ecuación en diferencias

$$x_{t+2}-6x_{t+1}+5x_t = -10t-1. \tag{2.74}$$

Donde $x:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ es una función definida para $t\in\mathbb{Z}_+$.

Primero resolvemos la ecuación en diferencias homogénea de segundo orden asociada

$$x_{t+2}-6x_{t+1}+5x_t = 0. \tag{2.75}$$

La ecuación (2.75) tiene por ecuación característica:

$$r^2-6r+5=0. \tag{2.76}$$

La ecuación (2.76) tiene como soluciones $r_1=5$ y $r_2=1$. Así, $y_1^t=(5)^t$ y $y_2^t=(1)^t$ son soluciones de la ecuación en diferencias. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_t^h = k_1 5^t + k_2, \quad \text{donde } k_1=\text{cte y } k_2=\text{cte}. \tag{2.77}$$

Ahora, determinemos una solución particular a la ecuación no homogénea. Por la forma de la función independiente y como 1 raíz del polinomio característico, proponemos una solución particular de la forma $x_t^p = at^2+bt+c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sustituyendo la solución particular en la ecuación (2.74) obtenemos:

$$[a(t+2)^2 + b(t+2) + c] - 6[a(t+1)^2 + b(t+1) + c] + 5(at^2 + bt + c) = -10t - 1.$$

Desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned}&[a(t^2+4t+4) + bt + 2b + c] - 6[a(t^2+2t+1) + bt + b + c] + 5at^2 + 5bt + 5c)\\ &= -10t - 1.\end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned}&\cancel{at^2} + 4at + 4a + bt + 2b + c \cancel{-6at^2} - 12at - 6a - 6bt - 6b - 6c \cancel{+5at^2} + 5bt + 5c\\ &= -10t - 1.\end{aligned}$$

Agrupando términos nos queda:

$$\begin{aligned}&at^2 - 6at^2 + 5at^2 + 4at + bt - 12at - 6bt + 5bt + 4a + 2b + c - 6a - 6b - 6c + 5c\\ &= -10t - 1.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}&-8at - 2a - 4b = -10t - 1\\ &-8at - (2a + 4b) = -10t - 1.\end{aligned}$$

De esto obtenemos las siguientes igualdades $-8a = -10$ y $-(2a+4b) = -1$, despejando a a se tiene

$$a = \frac{-10}{-8} \Rightarrow a = \frac{5}{4}.$$

Despejando a b y sustituyendo el valor de a se obtiene que

$$-(2a+4b) = -1 \Rightarrow b = \frac{1-2a}{4} \Rightarrow b = \frac{1-2(\frac{5}{4})}{4} \Rightarrow b = \frac{-3}{8}.$$

Haciendo $c = 0$, una solución particular es

$$x_t^p = \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$x_t = k_1 5^t + k_2 + \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t.$$

Capítulo 3

Análisis cuantitativo de algunos modelos matemáticos bidimensionales

En este capítulo planteamos la solución de algunos tipos de sistemas de ecuaciones en diferencias de segundo orden.

3.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones en diferencias

En esta sección colocamos el concepto de un sistema en diferencias lineal. Posteriormente, planteamos el tipo de sistema en diferencias que nos interesará en este trabajo.

Definición 3.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$. Un* **sistema en diferencias lineal** *con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^{1} \\ y_{t+1}^{2} \\ \vdots \\ y_{t+1}^{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t}^{1} \\ y_{t}^{2} \\ \vdots \\ y_{t}^{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Uno de los casos que nos interesará para este trabajo de tesis consiste en dos ecuaciones y dos variables, es decir, uno de la forma:

$$\begin{aligned} y_{t+1}^1 &= a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) && (3.1) \\ y_{t+1}^2 &= a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) && (3.2) \end{aligned}$$

donde $y_t^1, y_t^2, f_1(t), f_2(t) \in \mathcal{C}$ y para cada $i, j \in \mathbb{N}$, los coeficientes a_{ij} son constantes reales. En este proyecto estamos interesados, entre otras cosas, en estudiar los métodos para hallar soluciones numéricas y el análisis cualitativo de dichos sistemas.

Un procedimiento para resolver este tipo de sistemas, es expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Considerando la ecuación (3.1) en el tiempo $t+1$ obtenemos:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1). \tag{3.3}$$

Sustituyendo el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (3.3) se tiene:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1),$$

En consecuencia,

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{12}a_{22}y_t^2 + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1), \tag{3.4}$$

Por otro lado, despejando $a_{12}y_t^2$ de (3.1) en el sistema se obtiene:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4) se tiene:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}(y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

Nuevamente, distribuyendo obtenemos:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}y_{t+1}^1 - a_{22}a_{11}y_t^1 - a_{22}f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1).$$

Sacando como factor común y_{t+1}^1 y y_t^1, se tiene:

$$y_{t+2}^1 = (a_{11} + a_{22})y_{t+1}^1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_t^1 + a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1). \tag{3.6}$$

Notemos que (3.6) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden no homogénea.

3.2. Aplicación de sistemas bidimensionales en ecología

En esta sección analizaremos algunos sistemas particulares bidimensionales. Empezaremos con el siguiente sistema, el cual surgió a partir del ejercicio 7, no resuelto, de la Sección 9 de [**?**].

Ejemplo 3.1. La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t. \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t, con $t \in \mathbb{Z}_+$. Supongamos que inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 150$ y $y_0 = 70$. Analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

Solución. Evaluando la primera ecuación del sistema de ecuaciones en el momento $t + 2$ se obtiene que:

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} - 3y_{t+1}. \tag{3.7}$$

Sustituyendo la segunda ecuación del sistema de ecuaciones en diferencias en la ecuación (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= 2x_{t+1} - 3\left(x_t - 2y_t\right) & (3.8) \\ &= 2x_{t+1} - 3x_t + 6y_t. & (3.9) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la primera ecuación del sistema se tiene que:

$$y_t = \frac{2x_t - x_{t+1}}{3}. \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= 2x_{t+1} - 3x_t + 6\left(\frac{2x_t - x_{t+1}}{3}\right) && (3.11) \\ &= 2x_{t+1} - 3x_t + 4x_t - 2x_{t+1}. && (3.12) \end{aligned}$$

Así, obtenemos la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$x_{t+2} - x_t = 0. \tag{3.13}$$

Esto implica que la ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias (3.13) es:

$$r^2 - 1 = 0. \tag{3.14}$$

Observemos que la ecuación (3.14) tiene como raíces a $r = 1$ y $r = -1$. Así, $y_1^t = (1)^t$ y $y_2^t = (-1)^t$ son soluciones de la ecuación en diferencias. Por lo tanto, la solución general a la ecuación homogénea (3.13) es:

$$x_{t_h} = k_1 \cdot (1)^t + k_2 \cdot (-1)^t = k_1 + k_2 \cdot (-1)^t, \quad \text{donde } k_1 = \text{cte y } k_2 = \text{cte}. \tag{3.15}$$

Para determinar y_t, consideremos (3.10) y sustituimos el valor encontrado de x_{t_h} obteniendo:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{2\left[k_1 + k_2(-1)^t\right] - \left[k_1 + k_2(-1)^{t+1}\right]}{3} \\ &= \frac{2k_1 + 2k_2(-1)^t - k_1 - k_2(-1)^{t+1}}{3} \\ &= \frac{2k_1 + 2k_2(-1)^t - k_1 + k_2(-1)^t}{3} \\ &= \frac{k_1 + 3k_2(-1)^t}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, encontremos la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales, $x_0 = 150$ y $y_0 = 70$. Sustituyendo en las expresiones de x_t e y_t obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 150 &= k_1 + k_2(-1)^0 = k_1 + k_2 && (3.16) \\ 70 &= \frac{k_1 + 3k_2(-1)^0}{3} = \frac{k_1 + 3k_2}{3}. && (3.17) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema determinamos que $k_1 = 120$ y $k_2 = 30$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x_t &= 120 + 30(-1)^t && (3.18) \\ y_t &= \frac{120 + 3(30)(-1)^t}{3} = 40 + 30(-1)^t. && (3.19) \end{aligned}$$

Dado que $120 > 30(-1)^t$ y $40 > 30(-1)^t$ para todo $t \in \mathbb{Z}_+$, se concluye que las poblaciones de las especies x_t y y_t no pueden desaparecer.

Ejemplo 3.2. Dos especies conviven de acuerdo con el siguiente modelo discreto:

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 3^t \\ y_{t+1} = 4x_t + 2y_t + 3^t. \end{cases}$$

donde el tiempo $t \in \mathbb{Z}_+$ se encuentra expresado en años. Supongamos que inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 200$ y $y_0 = 300$. Analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

Solución. Sabemos que un procedimiento para resolver este tipo de sistemas, es expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Así, considerando $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$, $f_1(t) = 3^t$ y $f_2(t) = 3^t$ de la ecuación (3.6) el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= x_{t+1} + 6x_t + 2\left(3^t\right) + 3^t + 3^{t+1} \\ &= x_{t+1} + 6x_t + 3^{t+1} + 3^{t+1} \\ &= x_{t+1} + 6x_t + 2\left(3^{t+1}\right). \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 2\left(3^{t+1}\right) = 6\left(3^t\right). \tag{3.20}$$

Observemos que se trata de una ecuación en diferencias de segundo orden no homogénea. En el Ejemplo 2.25 se resolvió dicha ecuación. Se determinó que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_t^h = k_1(3^t) + k_2(-2)^t, \quad \text{donde } k_1 = \text{cte y } k_2 = \text{cte}. \tag{3.21}$$

Además, la solución particular es $x_t^p = \frac{2}{5}t3^t$. Por lo tanto la solución general es

$$x_t = k_1(3)^t + k_2(-2)^t + \frac{2}{5}t3^t. \tag{3.22}$$

Por otra parte, de la ecuación (3.5) se sabe que:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.23}$$

Dado que $a_{11} = -1$ y $a_{12} = 1$, se obtiene que:

$$y_t = \left[k_1\,(3)^{t+1} + k_2(-2)^{t+1} + \frac{2}{5}(t+1)3^{t+1}\right] + \left[k_1(3^t) + k_2(-2)^t + \frac{2}{3}t(3^t)\right] - 3^t.$$

Para encontrar las constantes k_1 y k_2 usamos las condiciones iniciales $x_0 = 200, y_0 = 300$ y las sustituimos en las soluciones x_t y y_t teniendo:

$$\begin{aligned}
x_0 &= k_1 3^0 + k_2(-2)^0 + \frac{2}{5}(0)3^0 = k_1 + k_2.\\
y_0 &= \left[k_1 3^{0+1} + k_2(-2)^{0+1} + \frac{2}{5}(0+1)3^{0+1}\right] + \left[k_1 3^0 + k_2(-2)^0 + \frac{2}{3}(0)3^0\right] - 3^0\\
&= \left[3k_1 - 2k_2 + \frac{6}{5}\right] + [k_1 + k_2] - 1\\
&= 4k_1 - k_2 + \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 200 \\ 20k_1 - 5k_2 = 1499. \end{cases}$$

El cual tiene como solución $k_1 = \frac{2499}{25}, k_2 = \frac{2501}{25}$. Por lo tanto, la solución particular del sistema con sus respectivas condiciones iniciales es

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{2}{5}t3^t\\
y_t &= \left[\frac{2499}{25}\left(3^{t+1}\right) + \frac{2501}{25}(-2)^{t+1} + \frac{2}{5}(t+1)3^{t+1}\right] + \left[\frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t\right.\\
&\quad \left. + \frac{2}{5}t\left(3^t\right)\right] - 3^t.
\end{aligned}$$

Simplificando las soluciones tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
x_t =& \frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{2}{5}t3^t \\
=& \left(\frac{2499}{25} + \frac{2}{5}t\right)3^t + \frac{2501}{25}(-2)^t \\
=& \left(\frac{2499+10t}{25}\right)3^t + \frac{2501}{25}(-2)^t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_t =& \frac{2499}{25}\left(3^{t+1}\right) + \frac{2501}{25}(-2)^{t+1} + \frac{2}{5}(t+1)3^{t+1} + \frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{2}{5}t\left(3^t\right) \\
& - 3^t \\
=& \frac{3(2499)}{25}\left(3^t\right) + \frac{2499}{25}\left(3^t\right) - \frac{2(2501)}{25}(-2)^t + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{6}{5}t(3^t) + \frac{6}{5}(3^t) - 3^t \\
& + \frac{2}{5}t(3^t) \\
=& \frac{4(2499)}{25}\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{8}{5}t3^t + \frac{1}{5}3^t \\
=& \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t.
\end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento en el tiempo de la especie x_t consideremos que para todo $t \geq 1$ se cumple:

$$\left(\frac{2499+10t}{25}\right)3^t \geq \frac{2501}{25}(-2)^t.$$

Así, para valores grandes de t, x_t tiende a infinito.

Ahora para analizar al comportamiento en el tiempo de la especie y_t notemos que para todo $t \geq 1$ se cumple que

$$y_t = \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t \geq \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t(3^t) - \frac{2501}{25}2^t,$$

y dado que para valores de t grandes se tiene que la expresión $\frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t3^t - \frac{2501}{25}2^t$ tiende a infinito, se puede concluir que y_t tiende a infinito.

Ejemplo 3.3. Dos especies que conviven en un mismo territorio, evolucionan del modo descrito por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 7x_t - 2y_t - t + 2 \\ y_{t+1} = 6x_t - y_t + 5t, \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Si, inicialmente, el número de individuos de cada especie es $x_0 = 70$ y $y_0 = 251$, resolver el sistema para obtener la población de cada especie en función de t y analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies. Analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies. Comprobar que al cabo de un año se ha extinguido la primera especie.

Solución. Sabemos que un procedimiento para resolver este tipo de sistemas, es expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Así, considerando $a_{11} = 7$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = -1$, $f_1(t) = -t+2$ y $f_2(t) = 5t$ de la ecuación (3.6) el sistema lineal se transforma en:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= 6x_{t+1} - 5x_t - (-t+2) - 2(5t) + (-(t+1)+2) && (3.24)\\ &= 6x_{t+1} - 5x_t + t - 2 - 10t - t + 1 && (3.25)\\ &= 6x_{t+1} - 5x_t - 10t - 1. && (3.26) \end{aligned}$$

O bien,

$$x_{t+2} - 6x_{t+1} + 5x_t = -10t - 1. \tag{3.27}$$

La cual es una ecuación en diferencias de segundo orden no homogénea. La ecuación en diferencias homogénea de segundo orden asociada es:

$$x_{t+2} - 6x_{t+1} + 5x_t = 0. \tag{3.28}$$

Por el Ejemplo 2.26 sabemos que la ecuación (3.28) tiene por solución general:

$$x_t^h = k_1 5^t + k_2, \quad \text{donde } k_1 = \text{constante y } k_2 = \text{constante}. \tag{3.29}$$

Además, una solución particular a la ecuación no homogénea es:

$$x_t^p = \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias (3.27) es:

$$x_t = k_1 5^t + k_2 + \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t.$$

De la ecuación (3.5) sabemos que:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.30}$$

En este caso $a_{12} = -2$, y $a_{11} = 7$ en consecuencia:

$$
\begin{aligned}
-2y_t &= \left[k_1 5^{t+1} + k_2 + \frac{5}{4}(t+1)^2 - \frac{3}{8}(t+1)\right] - 7\left[k_1 5^t + k_2 + \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t\right] \\
&\quad + t - 2 \\
-2y_t &= k_1 5^{t+1} + k_2 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} - \frac{3}{8}t - \frac{3}{8} - 7k_1 5^t - 7k_2 - \frac{35}{4}t^2 + \frac{21}{8}t \\
&\quad + t - 2 \\
-2y_t &= k_1\left(5^{t+1} - 7(5^t)\right) - 6k_2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{35}{4}\right)t^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{8} + \frac{21}{8} + 1\right)t \\
&\quad + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8} - 2\right) \\
-2y_t &= -2k_1(5^t) - 6k_2 - \frac{15}{2}t^2 + \frac{23}{4}t - \frac{9}{8}, \\
y_t &= k_1(5^t) + 3k_2 + \frac{15}{4}t^2 - \frac{23}{8}t + \frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, encontremos la solución particular utilizando las condiciones iniciales $x_0 = 70$ y $y_0 = 251$.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 70 = k_1 5^0 + k_2 + \frac{5}{4}(0)^2 + \frac{3}{8}(0) = k_1 + k_2 \\
y_0 &= 251 = k_1 5^0 + 3k_2 + \frac{15}{4}(0)^2 - \frac{23}{8}(0) + \frac{9}{16} = k_1 + 3k_2 + \frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Así obtenemos el siguiente sistema de 2×2

$$
\begin{cases}
k_1 + k_2 = 70 \\
k_1 + 3k_2 = \frac{4007}{16}.
\end{cases}
$$

Resolviendo el sistema anterior se tiene que:

$$
k_1 = \frac{-647}{32} \quad y \quad k_2 = \frac{2887}{32}.
$$

En consecuencia, la solución particular es:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{-647}{32}5^t + \frac{2887}{32} + \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t \\
y_t &= \frac{-647}{32}(5^t) + 3\frac{2887}{32} + \frac{15}{4}t^2 - \frac{23}{8}t + \frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Analicemos el comportamiento a largo plazo de las especies. Para la especie x_t

notemos que la función exponencial $\frac{647}{32}5^t$ crece a un ritmo más rápido que la función cuadrática $\frac{5}{4}t^2$. Dado que la función exponencial es negativa, se tiene que, para valores de t grandes x_t tiende a menos infinito. Es decir, la población x_t tiende a desaparecer.

Otra forma de analizar el comportamiento de x_t es calculando su límite de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{4}t^2 + \frac{2887}{32}}{\frac{647}{32}5^t + \frac{3}{8}t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{2}t}{\frac{647}{32}5^t \ln(5) + \frac{3}{8}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{2}}{\frac{647}{32}\ln(5)5^t\ln(5)} \\
&= \frac{160}{2(647)\ln(5)^2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{5^t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dado que el límite es cero podemos concluir que la función en el denominador crece mas rápido que la función del numerador. Por lo tanto, para valores grandes de t, x_t tiende a desaparecer. Siguiendo esta misma idea se puede concluir que para valores de t grandes y_t tiende a $-\infty$. Es decir, la población y_t tiende a desaparecer. Más aún, se puede ver que al cabo de un año la especie x_t se extingue, dado que

$$x_1 = -\frac{647}{32}(5) + \frac{2887}{32} + \frac{5}{4} - \frac{3}{8} = -10.$$

3.3. Aplicación de sistemas bidimensionales en biología

Ejemplo 3.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. El crecimiento de dos especies que coexisten viene descrito por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (9-a)x_t + (4-b)y_t + 5^t, & x_0 = 10; \\ y_{t+1} = (b-2)x_t + 5y_t + 5^t, & y_0 = 45. \end{cases}$$

Solución. Tomando $a_{11} = 9-a, a_{12} = 4-b, a_{21} = b-2, a_{22} = 5$. Por la ecuación (3.6) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= [(9-a)+5]x_{t+1} + [(4-b)(b-2) - 5(9-a)]x_t + 5\left(5^t\right) + (4-b)5^t + 5^{t+1} \\ &= (14-a)x_{t+1} + \left(-b^2 + 6b + 5a - 53\right)x_t + (14-b)5^t. \end{aligned} \tag{3.31}$$

La ecuación homogénea es

$$x_{t+2} - (14-a)x_{t+1} - \left(-b^2 + 6b + 5a - 53\right)x_t = 0. \tag{3.32}$$

Su ecuación característica es

$$r^2 - (14-a)r + b^2 - 6b - 5a + 53 = 0. \tag{3.33}$$

La solución de la ecuación característica es:

$$r = \frac{1}{2}\left[14 - a \pm \sqrt{a^2 - 8a + 24b - 4b^2 - 16}\right].$$

Definamos a $l = \sqrt{a^2 - 8a + 24b - 4b^2 - 16}$. Analizando el discriminante de la ecuación se obtienen los siguiente.

Caso 1. Si el discriminante es cero, $r = \frac{14-a}{2}$ y la solución de la ecuación es

$$x_t = k_1\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + k_2 t\left(\frac{14-a}{2}\right)^t$$

Ahora proponemos la solución particular como $x_t = c_1 5^t$. Sustituyendo en (3.31) se tiene:

$$\begin{aligned} &c_1 5^{t+2} - (14-a)c_1 5^{t+1} - \left(-b^2 + 6b + 5a - 53\right)c_1 5^t = (14-6)5^t \\ &c_1\left[25 - 5(14-a) + b^2 - 6b - 5a + 53\right] = 14 - b \\ &c_1\left[25 - 70 + 5a + b^2 - 6b - 5a + 53\right] = 14 - b \\ &c_1\left[b^2 - 6b + 8\right] = 14 - b \\ &c_1 = \frac{14-b}{b^2 - 6b + 8} \end{aligned}$$

con $b \neq 4$ y $b \neq 2$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias de segundo orden es:

$$x_t = k_1\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + k_2 t\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^t$$

De la ecuación (3.5) sabemos que:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.34}$$

En este caso $a_{12} = 4-b$, y $a_{11} = 9-a$ en consecuencia:

$$\begin{aligned}
(4-b)y_t &= k_1\left(\frac{14-a}{2}\right)^{t+1} + k_2(t+1)\left(\frac{14-a}{2}\right)^{t+1} + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^{t+1}\\
&\quad -(9-a)\left[k_1\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + k_2 t\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^t\right] - 5^t\\
&= k_1\left(\frac{14-a}{2}\right)\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + k_2\left(\frac{14-a}{2}\right)t\left(\frac{14-a}{2}\right)^t\\
&\quad + k_2\left(\frac{14-a}{2}\right)\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + \frac{5(14-b)}{b^2-6b+8}5^t - (9-a)k_1\\
&\quad \left(\frac{14-a}{2}\right)^t - (9-a)k_2 t\left(\frac{14-a}{2}\right)^t - \frac{(9-a)(14-b)}{b^2-6b+8}5^t - 5^t\\
&= \left[k_1\left(\frac{14-a}{2}\right) + k_2\left(\frac{14-a}{2}\right)t + k_2\left(\frac{14-a}{2}\right) - (9-a)k_1\right.\\
&\quad \left. -(9-a)k_2 t\right]\left(\frac{14-a}{2}\right)^t + \left[\frac{5(14-b)}{b^2-6b+8} - \frac{(9-a)(14-b)}{b^2-6b+8} - 1\right]5^t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4-b)y_t &= \left[\left(\frac{14-a}{2} - 9 + a\right)k_1 + \left(\frac{14-a}{2} - 9 + a\right)k_2 t + \left(\frac{14-a}{2}\right)k_2\right]\\
&\quad \left(\frac{14-a}{2}\right)^t + \left[\frac{70-5b-(126-9b-14a+ab)+b^2-6b+8}{b^2-6b+8}\right]5^t\\
&= \left[\frac{a-4}{2}k_1 + \frac{a-4}{2}k_2 t + \frac{14-a}{2}k_2\right]\left(\frac{14-a}{2}\right)^t\\
&+ \left[\frac{14a+b^2-(a+2)b-48}{b^2-6b+8}\right]5^t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_t = & \left[\frac{a-4}{2(4-b)}\left(k_1+k_2 t\right)+\frac{14-a}{2(4-b)} k_2\right]\left(\frac{14-a}{2}\right)^t \\
& +\left[\frac{14 a+b^2-(a+2) b-48}{(4-b)\left(b^2+6 b+8\right)}\right] 5^t .
\end{aligned}
$$

Ahora encontremos la solución particular usando las condiciones iniciales $x_0=10$ y $y_0=45$:

$$
\begin{aligned}
& x_0=k_1+\frac{14-b}{b^2-6 b+8}=10 \\
& y_0=\frac{a-4}{2(4-b)} k_1+\frac{14-a}{2(4-b)} k_2+\frac{14 a+b^2-(a+2) b-48}{(4-b)\left(b^2-6 b+8\right)}=45 .
\end{aligned}
$$

De la primera igualdad tenemos que

$$
k_1=10-\frac{14-b}{b^2-6 b+8} .
$$

Sustituyendo k_1 en la segunda igualdad se obtiene que

$$
\begin{aligned}
k_2= & \frac{2(4-b)}{14-a}(45)-\frac{2(4-b)}{14-a}\left(\frac{a-4}{2(4-b)}\right)\left(10-\frac{14-b}{b^2-6 b+8}\right) \\
& -\frac{2(4-b)}{14-a}\left(\frac{14 a+b^2-(a+2) b-48}{(4-b)\left(b^2-6 b+8\right)}\right) \\
= & \frac{90(4-b)}{14-a}-\frac{(a-4)}{14-a}\left(\frac{10 b^2+59 b+66}{b^2-6 b+8}\right)-\frac{2\left(14 a+b^2-(a+2) b-48\right)}{(14-a)\left(b^2-6 b+8\right)} \\
= & \frac{90(4-b)}{14-a}+\frac{(38-10 a) b^2+61 a b-94 a-232 b+360}{(14-a)\left(b^2-6 b+8\right)} .
\end{aligned}
$$

Caso 2. Si el discriminante es positivo, la solución es

$$
x_t=\frac{k_1}{2}[14-a+l]^t+\frac{k_2}{2}[14-a-l]^t .
$$

Y usando la solución particular obtenida en el Caso 1 se tiene que la solución general de la ecuación en diferencias de segundo orden es:

$$
x_t=\frac{k_1}{2}[14-a+l]^t+\frac{k_2}{2}[14-a-l]^t+\frac{14-b}{b^2-6 b+8} 5^t . \tag{3.35}
$$

De la ecuación (3.5) sabemos que:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.36}$$

En este caso $a_{12} = 4 - b$, y $a_{11} = 9 - a$ en consecuencia:

$$\begin{aligned}
(4-6)y_t = &\frac{k_1}{2}\left[14-a+l\right]^{t+1} + \frac{k_2}{2}\left[14-a-l\right]^{t+1} \\
&+ \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^{t+1} - (9-a)\left[\frac{k_1}{2}\left(14-a+l\right)\right]^t \\
&- (9-a)\left[\frac{k_2}{2}\left(14-a-l\right]^t - \frac{(9-a)(14-b)}{b^2-6b+8}5^t - 5^t \\
= &\left(5+l\right)\frac{k_1}{2}\left(14-a+l\right)^t + \left(5-l\right)\frac{k_2}{2}\left(14-a-l\right)^t \\
&+ \left[\frac{(14-b)(a-4)}{b^2-6b+8} - 1\right]5^t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_t = &\frac{k_1\left(5+l\right)\left(14-a+l\right)^t}{2(4-b)} + \frac{k_2\left(5-l\right)}{2(4-b)}\left(14-a-l\right)^t \\
&+ \left[\frac{(14-b)(a-4)}{\left(4-b\right)\left(b^2-6b+8\right)} - \frac{1}{4-b}\right]5^t.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Ahora encontremos las constantes k_1 y k_2 usando las condiciones iniciales $x_0 = 10$ y $y_0 = 45$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{14-b}{b^2-66+8} = 10 \\
y_0 &= \frac{k_1\left(5+l\right)}{2(4-b)} + \frac{k_2\left(5-l\right)}{2(4-b)} + \frac{(14-b)(a-4)}{\left(4-b\right)\left(b^2-6b+8\right)} - \frac{1}{4-b} = 45,
\end{aligned}$$

de la primera igualdad tenemos que

$$k_1 = 20 - k_2 - \frac{2(14-b)}{b^2-6b+8}. \tag{3.38}$$

Sustituyendo k_1 en la segunda igualdad y despejando k_2

$$
\begin{aligned}
k_2 =& \frac{1}{2l}\left[\frac{(14-b)(a-4)}{2(4-b)^2\,(b^2-6b+8)} + 20(5+l) - \frac{2(4-b)}{b^2-6b+8}(5+l)\right.\\
&\left. - \frac{45}{2(4-b)} - \frac{1}{2(4-b)^2}\right].
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

En consecuencia.

$$
\begin{aligned}
&k_1 = 20 - \frac{1}{2l}\left[\frac{(14-b)(a-4)}{2(4-b)^2\,(b^2-6b+8)} - \frac{45}{2(4-b)} - \frac{1}{2(4-b)^2} + 20\,(5+l)\right.\\
&\left. - \frac{2(4-b)\,(5+l}{b^2-6b+8}\right] - \frac{2(14-b)}{b^2-6b+8}.
\end{aligned}
$$

Caso 3. Si el discriminante es negativo, pasamos las raíces a su forma polar, esto es

$$
\begin{aligned}
r_1 &= x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))\\
r_2 &= x - iy = \rho(\cos(\theta) - i\mathrm{sen}(\theta))
\end{aligned}
$$

donde

$$
x = \frac{14-a}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{-a^2+8a-246+4b^2+16}.
$$

$$
\begin{aligned}
\rho = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{\left(\frac{14-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(-a^2+8a-24b+4b^2+16\right)}\\
&= \sqrt{-5a+b^2-6b+53}.
\end{aligned}
$$

$$
\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-a^2+8a-24b+4b^2+10}}{14-a}\right).
$$

Así la solución es

$$
x_t = k_1\rho^t\cos(t\theta) + k_2\rho^t\mathrm{sen}(t\theta).
$$

Usando la solución particular obtenida en el Caso 1 se tiene que la solución general de la ecuación en diferencias de segundo orden es:

$$
x_t = k_1\rho^t\cos(t\theta) + k_2\rho^t\mathrm{sen}(t\theta) + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^t.
$$

De la ecuación (3.5) sabemos que:

$$
a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{3.40}
$$

En este caso $a_{12} = 4 - b$, y $a_{11} = 9 - a$ en consecuencia:

$$\begin{aligned}
(4-b)y_t &= k_1\rho^{t+1}\cos(t\theta+\theta) + k_2\rho^{t+1}\text{sen}(t\theta+\theta) + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^{t+1} \\
&\quad - (9-a)\left[k_1\rho^t\cos(t\theta) + k_2\rho^t\text{sen}(t\theta) + \frac{14-b}{b^2-6b+8}5^t\right] - 5^t \\
&= k_1\rho^{t+1}\cos(t\theta+\theta) + k_2\rho^{t+1}\text{sen}(t\theta+\theta) + \frac{(4-b)5^{t+1}}{b^2-6b+8} \\
&\quad - (9-a)k_1\rho^t\cos(t\theta) - (9-a)k_2\rho^t\text{sen}(t\theta) - \frac{(9-a)(4-b)}{b^2-6b+8}5^t \\
&\quad - 5^t \\
&= [\rho\cos(t\theta+\theta) - (9-a)\cos(t\theta)]k_1\rho^t + [\rho\text{sen}(t\theta+\theta) \\
&\quad - (9-a)\text{sen}(t\theta)]k_2\rho^t + \left[\frac{5(4-b)}{b^2-6b+8} - \frac{(9-a)(4-b)}{b^2-6b+8} - 1\right]5^t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_t = \frac{1}{4-b}\Bigg\{ & [\rho\cos(t\theta+\theta) - (9-a)\cos(t\theta)]\,k_1\rho^t \\
& + [\rho\text{sen}(t\theta+\theta) - (9-a)\text{sen}(t\theta)]\,k_2\rho^t \\
& + \left[\frac{5(4-b)}{b^2-6b+8} - \frac{(9-a)(4-6)}{b^2-6b+8} - 1\right]5^t\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Ahora encontremos las constantes k_1 y k_2 usando las condiciones iniciales $x_0 = 10, y_0 = 45$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= k_1 + \frac{14-6}{b^2-6b+8} = 10 \\
y_0 &= \frac{1}{4-b}\left\{[\rho\cos(\theta) + a - 9]k_1 + [\rho\text{sen}(\theta)]k_2 + \left[\frac{5(4-b)}{b^2-6b+8}\right.\right. \\
&\left.\left. -\frac{(9-a)(4-b)}{b^2-6b+8} - 1\right]\right\} = 45.
\end{aligned}$$

Despejando k_1 de la primera igualdad y sustituyendo este valor en la segunda igualdad se tiene lo siguiente

$$k_1 = 10 - \frac{14-b}{b^2-6b+8}.$$

$$
\begin{aligned}
k_2 =& \frac{45}{(4-b)(\rho \operatorname{sen}(\theta))} - \left[\frac{\rho\cos(\theta)+a-9}{\rho \operatorname{sen}(\theta)}\right]\left(10 - \frac{14-b}{b^2-6b+8}\right) \\
&+ \frac{1}{\rho \operatorname{sen}(\theta)}\left[\frac{(9-a)(4-b)}{b^2-6b+8} - \frac{5(4-b)}{b^2-6b+8} + 1\right].
\end{aligned}
$$

Caso particular del Ejemplo 3.4

Tomando $a = 10$ y $b = 1$ en el Ejemplo 3.4, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$
\begin{cases}
x_{t+1} = -x_t + 3y_t + 5^t, & x_0 = 10, \\
y_{t+1} = -x_t + 5y_t + 5^t, & y_0 = 45.
\end{cases}
$$

De la ecuación (3.32) se deduce que la ecuación en diferencias de segundo orden es

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} - 2x_t = 0.$$

Por la ecuación (3.33), la ecuación característica asociada es

$$r^2 - 4r - 2 = 0.$$

Dado que el discriminante de la ecuación es positivo, estamos en el caso 2 marcado en el Ejemplo (3.4), sustituyendo los valores de a y b para hallar el valor de l, obtenemos

$$l = \sqrt{a^2 - 8a + 24b - 4b^2 - 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Evaluando $a = 10$, $b = 1$ y $l = 2\sqrt{6}$ en la ecuación (3.39), obtenemos que

$$k_2 = 17.578.$$

A continuación, evaluando $a = 10$, $b = 1$, $l = 2\sqrt{6}$ y $k_2 = 17.578$ en la ecuación (3.38), obtenemos que

$$k_1 = -6.245.$$

Luego, de la ecuación (3.35), obtenemos la siguiente expresión para x_t:

$$
\begin{aligned}
x_t =& \frac{-6.245}{2}\left[14-10+2\sqrt{6}\right]^t + \frac{17.578}{2}\left[14-10-2\sqrt{6}\right]^t \\
&+ \frac{14-1}{1^2-6(1)+8}5^t \\
=& -3.1225\,(8.9)^t + 8.789\,(-0.9)^t + \frac{13}{3}5^t.
\end{aligned}
$$

Finalmente, de la ecuación (3.37), obtenemos

$$
\begin{aligned}
y_t =& \frac{-6.245(5+2\sqrt{6})(14-10+2\sqrt{6})^t}{2(3)} + \frac{17.578(5-2\sqrt{6})}{2(3)}(14-10-2\sqrt{6})^t \\
&+ \left[\frac{(13)(6)}{3(1-6+8)} - \frac{1}{3}\right]5^t \\
=& -10.3(8.9)^t + 0.3(-0.9)^t + 8.33(5^t).
\end{aligned}
$$

En lo que resta, analicemos el comportamiento a largo plazo para las especies x_t y y_t. Para x_t, observamos lo siguiente:

- El término $-3.1225\,(8.9)^t$ tiende a menos infinito cuando $t \to \infty$.
- El término $8.789\,(-0.9)^t$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, ya que el valor absoluto de -0.9 es menor que 1.
- El término $\frac{13}{3}5^t$ tiende a infinito porque 5^t crece exponencialmente.

Sin embargo, debemos notar que la suma de los dos primeros términos dominantes, $-3.1225\,(8.9)^t + \frac{13}{3}5^t$, siempre es negativa para cualquier $t \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, x_t tiende a menos infinito cuando $t \to \infty$, lo que implica que, a largo plazo, la especie x_t tiende a desaparecer.

Por otro lado, para y_t, tenemos:

- El término $-10.3\,(8.9)^t$ tiende a menos infinito cuando $t \to \infty$.
- El término $0.3\,(-0.9)^t$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$.
- El término $8.33\,(5^t)$ tiende a infinito cuando $t \to \infty$.

Al igual que en el caso de x_t, la suma de los dos términos dominantes, $-10.3\,(8.9)^t + 8.33\,(5^t) < 0$, para cualquier $t \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, y_t tiende a menos infinito cuando $t \to \infty$, lo que indica que la especie y_t también tiende a desaparecer a largo plazo.

Capítulo 4

Análisis cualitativo de algunos modelos matemáticos bidimensionales

Las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias son herramientas matemáticas para el estudio de los **modelos de tiempo discreto** o **sistemas dinámicos discretos** [?]. En el Capítulo 2 analizamos algunos tipos de ecuaciones en diferencias lineales para determinar la solución de la ecuación en diferencia lineal. En el Capítulo 3 analizamos un tipo especial de sistema de ecuaciones en diferencias lineal y revisamos un método analítico para la obtención de su solución de un sistema de dos por dos. Sin embargo, en algunas ocasiones no es posible plantear un esquema análogo para las ecuaciones o sistemas no lineales [9]. En este capítulo, estamos interesados en analizar algunos modelos matemáticos bidimensionales, ahora de manera cualitativa. Finalmente, es importante mencionar que en este capítulo por una función nos referimos a una función continua cuyo dominio será un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, generalmente un subespacio abierto, del plano $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, D podría ser un rectángulo abierto (es decir, que no contiene su borde) o todo el plano $\mathbb{R}^2$.

Empezaremos este capítulo, recordando el concepto de sistema dinámico discreto.

Definición 4.1. *Sea X un espacio métrico. Un* **sistema dinámico discreto** *es una ecuación en diferencias de la forma*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde f es una función continua y suprayectiva $f\colon X \to X$. Usualmente, al espacio métrico X se le llama espacio fase, espacio de configuraciones o espacio de estados. En el caso en que $X = \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se le conoce como sistema discreto unidimensional.

Uno de los conceptos importantes en el estudio de los sistemas dinámicos es el de órbita de un punto, el cual definimos a continuación.

Definición 4.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.*

1. *Se define la **órbita** de x bajo f, denotada por $Orb_f(x)$, como el conjunto:*

$$Orb_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}.$$

2. *Se dice que x es **un punto fijo** de X si $f(x) = x$.*

Observación 4.1. Cuando se quiere traducir un problema como el presentado en el Ejemplo 3.1 al lenguaje presentado en la Definición 4.1, lo primero que se determina es el "espacio"del problema. En el caso del Ejemplo 3.1, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado x_t e y_t por lo que el espacio de los estados es un conjunto $X = \{(n, m)\colon n, m \in \mathbb{Z}_+\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Sean $E, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ y $g\colon D \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Sean $F = (f, g)\colon E \cap D \to \mathbb{R}^2$ y $p = (x, y) \in E \cap D$. En este apartado nos centraremos en analizar sistemas dinámicos discretos de ecuaciones en diferencias de la forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde f y g son funciones dadas, $n \in \mathbb{Z}_+$ y $(x_n, y_n) \in E \cap D$. Analizaremos los sistemas dinámicos discretos, desde su punto de vista cualitativo, para esto, se introducirán algunos conceptos básicos de los sistemas dinámicos discretos [20, pág. 75]. Los conceptos básicos descritos en un contexto unidimensional (1D), se aplica con pocas modificaciones en el contexto bidimensional (2D), que es nuestra principal preocupación en este capítulo. En el contexto bidimensional (2D) ya no tenemos la comodidad de un gráfico visible de la función, como en el caso ID, ya que ahora es la gráfica de una función 2D [1].

4.1. Sumideros y soluciones de equilibrio

En este apartado se exponen los preliminares necesarios para abordar el estudio de los sistemas dinámicos discretos bidimensional con los cuales trabajamos.

Empezaremos esta sección adaptando la Definición 4.2 de órbita de un punto en un sistema dinámico, para el caso de un sistema dinámico bidimensional. Además, presentaremos otras definiciones y resultados que nos ayudan a analizar algunas propiedades de dichas órbitas.

Definición 4.3. *[20, pág. 85] Sean $E, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon E \to E$ y $g\colon D \to D$ funciones continuas. Sean $F = (f, g)\colon E \cap D \to E \cap D$ y $x = (x_0, y_0) \in Dom_F$. La* **órbita de** *x bajo F, denotada por $\mathcal{O}(x, F)$, es el conjunto:*

$$\mathcal{O}(x, F) = \{F^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x, F(x), F^2(x), F^3(x), \ldots\}. \tag{4.2}$$

Los pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ definidos inductivamente por (4.2) se denominan iteraciones de (x_0, y_0), y la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_0^\infty$ se denomina órbita positiva de (x_0, y_0).

Ejemplo 4.1. Consideremos a $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = x + y + 1$ y $g(x, y) = x - y + 1$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Definimos $F(p) = (f, g)(p)$ y $p = (0, 0)$. La órbita de p bajo F es:

$$\mathcal{O}(p, F) = \{(0,0), (1,1), (3,1), (5,3), (9,3), (13,7), \ldots\},$$

dado que

$$\begin{aligned}
F(p) &= (f, g)(p) = (f(p), g(p)) = (1, 1) \\
F^2(p) &= F(F(p)) = F(1, 1) = (f(1, 1), g(1, 1)) = (3, 1) \\
F^3(p) &= F\left(F^2(p)\right) = F(3, 1) = (f(3, 1), g(3, 1)) = (5, 3) \\
F^4(p) &= F\left(F^3(p)\right) = F(5, 3) = (f(5, 3), g(5, 3)) = (9, 3) \\
F^5(p) &= F\left(F^4(p)\right) = F(9, 3) = (f(9, 3), g(9, 3)) = (13, 7).
\end{aligned}$$

A continuación presentamos otros conceptos importantes en sistemas dinámicos bidimensionales. Dichos conceptos nos ayudarán a determinar cuándo la órbita de un punto es finita o no.

Definición 4.4. *[20, pág. 84] Sean $E, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ y $g\colon D \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Sean $F = (f, g)$ y $p = (x, y) \in Dom_F$. Decimos que p es:*

- *una* **solución de equilibrio** *de (4.1) o* **punto fijo** *de la función F si $F(p) = p$. Es decir, si se satisface*

$$(f, g)(p) = p \Longleftrightarrow (f(p), g(p)) = p \Longleftrightarrow (f(p), g(p)) = (x, y).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) \\ y &= g(x, y). \end{aligned}$$

- *un* **punto periódico** *de período m si p es un punto fijo de la m-ésima iteración F^m de la función F.*

- *un* **punto periódico de período mínimo** *m o período primo m si $F^m(p) = p$ y m es el menor número para el que pasa esto.*

Ejemplo 4.2. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = xy + x$ y $g(x, y) = 2x + y$. Denotemos $F = (f, g)$. Sea $p = (x, y)$. Para encontrar un punto fijo de F, necesitamos que se cumpla $F(p) = p$, lo cual es equivalente a resolver el sistema:

$$(f(x, y), g(x, y)) = (x, y).$$

Esto se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= f(x, y), \\ y &= g(x, y). \end{aligned} \tag{4.3}$$

De aquí, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} xy + x = x, \\ 2x + y = y. \end{cases}$$

Simplificando, tenemos:

$$\begin{cases} xy = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$$

Esto implica que $x = 0$ y y puede ser cualquier número real. Por lo tanto, los puntos de equilibrio son de la forma $(0, y)$ para $y \in \mathbb{R}$. Notemos que, en particular, si $p = (0, 1)$, se obtiene que:

$$F(p) = (f(0,1), g(0,1)) = (0,1) = p.$$

Lo anterior confirma que p es un punto fijo.

El término **sumidero** en la discusión de funciones o mapas unidimensionales se ocupa para referirnos a un punto fijo u órbita periódica. Una fuente es un punto fijo que repele una vecindad. Estas definiciones tienen sentido en espacios de estados de dimensiones superiores sin alteración. En el plano, por ejemplo, las vecindades en cuestión son discos (interiores de círculos).

Definición 4.5. *[3, pág. 58] Sean* $\mathbf{F}$ *un mapa de* $\mathbb{R}^m$ *en* $\mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ *un punto fijo.*

- *Si existe un* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{v}$ *en la* ϵ*-vecindad* $N_\epsilon(\mathbf{p}), \lim_{k\to\infty} \mathbf{F}^k(\mathbf{v}) = \mathbf{p}$*, entonces* $\mathbf{p}$ *es un* **sumidero o punto fijo atractor***.*

- *Si existe una vecindad* $N_\epsilon(\mathbf{p})$ *tal que para cada* $\mathbf{v} \in N_\epsilon(\mathbf{p})$ *, tal que* $\mathbf{v} \neq \mathbf{p}$*, existe* $k \in \mathbb{Z}_+$ *tal que* $F^k(\mathbf{v}) \notin N_\epsilon(\mathbf{p})$*, entonces* $\mathbf{p}$ *es una* **fuente** *o* **repulsor***.*

Observación 4.2. De manera similar que como en el caso unidimensional, si todos los puntos en una vecindad del punto fijo se acercan al punto fijo cuando se iteran por la función, consideramos que el **punto fijo es un atractor**.

La Figura 4.1 muestra vistas esquemáticas de un sumidero y una fuente para un mapa bidimensional (Figura 4.1 (a) y Figura 4.1 (b), respectivamente), junto con una vecindad, un disco típico y su imagen bajo el mapa. Junto con el sumidero y la fuente, se muestra un nuevo tipo de punto fijo en la Figura 4.1 (c), que no puede ocurrir en un espacio de estado unidimensional. Este tipo de punto fijo, al que llamaremos **silla**, tiene al menos una dirección atractiva y al menos una dirección repulsiva. [3].

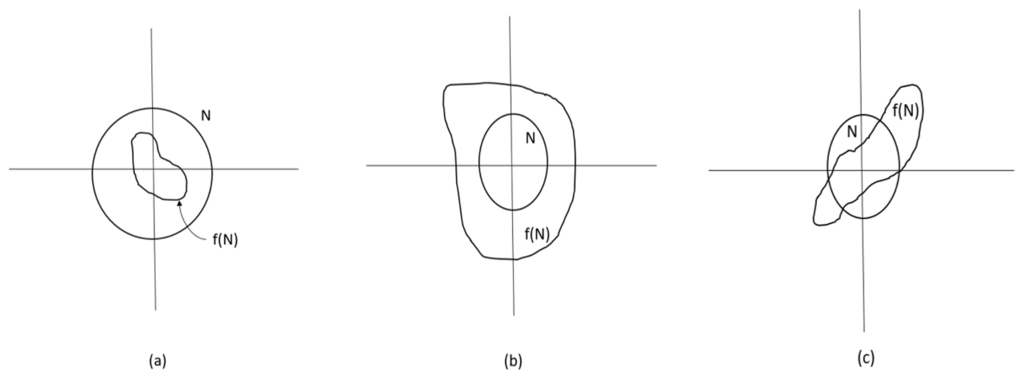

Figura 4.1: Dinámica local cerca de un punto fijo.

Definición 4.6. *Sea $\mathcal{O}(x, F)$ la órbita de un punto $x = (x_0, y_0)$ bajo F. El punto $p \in Dom_F$ es un* ***punto ω-límite*** *de la órbita $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ si existe una sucesión de enteros positivos $\{n_i\}$ tal que $n_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$ y $F^{n_i}(x_0, y_0) \to p$ cuando $i \to \infty$.*

Ejemplo 4.3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) = (2, 4)$. La órbita de (x_0, y_0) bajo F es:

$$\mathcal{O}\left((x_0, y_0), F\right) = \left\{(2, 4), (1, 2), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \ldots\right\}.$$

Veamos que $(0, 0)$ es un **punto ω-límite** de la órbita $\mathcal{O}((x_0, y_0), F)$. Para ello definamos $n_i = i$. Notemos que la sucesión n_i tiende a infinito. Por otra parte $F^{ni}(x_0, y_0)$ tiende a $(0, 0)$ cuando $i \to \infty$. Por lo tanto $(0, 0)$ es un **punto ω-límite** de la órbita $\mathcal{O}((x_0, y_0), F)$.

4.2. Mapas Lineales

En esta sección se presentan nociones y resultados de la teoría de sistemas y ecuaciones lineales. Sea $a \in \mathbb{R}$. Consideremos la función lineal unidimensional $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Se sabe que dicho sistema dinámico tiene como único punto fijo el punto 0 (vea por ejemplo [33]). En el caso de un sistema dinámico de dos dimensiones, la estabilidad del punto fijo se investiga de la misma manera que en el caso unidimensional. En algunos casos, la dinámica para un mapa bidimensional se asemeja a la dinámica unidimensional.

Comenzaremos examinando algunos ejemplos importantes de mapas lineales en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.4. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $f(x_n, y_n) = ax_n + by_n$, $g(x_n, y_n) = cx_n + dy_n$ y $n \in \mathbb{Z}_+$.

El sistema (4.4) se puede reescribir como el sistema:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + by_n \\ y_{n+1} &= cx_n + dy_n \end{aligned} \tag{4.5}$$

El sistema (4.5) se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Sea $Z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Así, (4.6) se puede expresar como:

$$Z_{n+1} = AZ_n. \tag{4.7}$$

Observación 4.3. Se puede probar que la solución de (4.5) tiene la forma

$$Z_n = A^n Z_0. \tag{4.8}$$

Definición 4.7. *Consideremos el Ejemplo 4.4. Una* **solución del sistema** *(4.5) es una expresión que satisface este sistema para todos los valores de $n \in \{0, 1, \ldots\}$. La* **solución general** *es una expresión que contiene todas las posibles soluciones del sistema. Esta solución general incluye una familia de soluciones, es decir, cualquier solución particular del sistema se puede obtener a partir de la solución general al fijar los valores de las constantes arbitrarias que aparecen en ella. Una* **solución particular** *de (4.5) es una solución que satisface una condición inicial* *de la forma*

$$x_0 = c, y_0 = d, \tag{4.9}$$

donde c y d son números reales dados. El problema de encontrar una solución particular para el sistema (4.5) con condiciones iniciales especificadas (4.9) se denomina **problema de valor inicial**, *que se abrevia como PVI.*

Ejemplo 4.5. Consideremos el sistema dinámico $(\mathbb{R}^2, F)$ definido por el sistema (4.4). Sean $F = (f, g)$ y $x = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Por (4.7) el sistema dinámico se puede ver de la forma:

$$Z_{n+1} = AZ_n. \tag{4.10}$$

En consecuencia, la órbita de $x = (x_0, y_0)$ es:

$$\mathcal{O}(x, F) = \{x, F(x), F^2(x), F^3(x), \ldots\}. \tag{4.11}$$

Considerando (4.10): y (4.11) la órbita de $x = (x_0, y_0)$ puede escribirse como:

$$\mathcal{O}(x, F) = \{x, Ax, A^2x, \ldots\}. \tag{4.12}$$

Ejemplo 4.6. Sean $a, d \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n \\ y_{n+1} &= dy_n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

El sistema dinámico (4.13) se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Sea $x = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Por el Ejemplo 4.5 la órbita de $x = (x_0, y_0)$ es:

$$\mathcal{O}(x, F) = \{x, Ax, A^2x, \ldots\}. \tag{4.15}$$

En este caso particular, el resultado de iterar la matriz A, n veces, se representa mediante la matriz

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para determinar los puntos del sistema (4.14), entonces tenemos que resolver la ecuación

$$Z = AZ. \tag{4.16}$$

De (4.16) se desprende que el origen, es el único punto de equilibrio.

Ejemplo 4.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos el sistema dinámico definido por las ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - by_n, \\ y_{n+1} &= bx_n + ay_n. \end{aligned} \tag{4.17}$$

El sistema (4.17) se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Para obtener los valores propios de la matriz A, resolvemos el determinante de $A - \lambda I$, donde I es la matriz identidad de 2×2:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0.$$

Expandiendo:

$$(a - \lambda)^2 + b^2 = 0 \implies a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + b^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene soluciones complejas:

$$\lambda_1 = a + bi, \quad \lambda_2 = a - bi,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Los vectores propios correspondientes a estos valores propios son $v_1 = (1, -i)$ y $v_2 = (1, i)$, respectivamente. Sin embargo, estos vectores son complejos. Para interpretarlos en términos de vectores reales, realizamos el siguiente paso.

Multiplicamos y dividimos por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, de manera que obtenemos una forma más interpretable en términos de rotación y escala:

$$A = r \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que cualquier par de números c y s tales que $c^2 + s^2 = 1$ puede escribirse como $c = \cos(\theta)$ y $s = \operatorname{sen}(\theta)$, para algún ángulo θ. El ángulo θ puede identificarse como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{s}{c}\right).$$

Tomando $c = \frac{a}{r}$ y $s = \frac{b}{r}$, tenemos que $c^2 + s^2 = 1$, ya que

$$c^2 + s^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = \frac{a^2 + b^2}{r^2}.$$

Pero como $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, tenemos:

$$c^2 + s^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Lo que implica que $c = \cos(\theta)$ y $s = \operatorname{sen}(\theta)$ para algún ángulo θ. Dado que $c = \cos(\theta)$ y $s = \operatorname{sen}(\theta)$, podemos identificar el ángulo θ mediante:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

El ángulo θ en la matriz A es el ángulo de *rotación* que describe cómo se transforman los vectores bajo la acción de esta matriz. La parte de la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

es responsable de *rotar* los puntos del plano alrededor del origen $(0, 0)$ por un ángulo θ. Si tomamos cualquier vector en el plano, al multiplicarlo por esta matriz, el vector rotará en sentido antihorario por el ángulo θ.

Por ejemplo, si tenemos un vector $\mathbf{v} = (x, y)$, al aplicar la matriz, el vector resultante tendrá la misma longitud, pero su dirección será modificada por el ángulo θ. Es decir, la rotación cambia la orientación del vector en el plano, pero

no su magnitud.
Por otra parte, el término $\sqrt{a^2+b^2}$ es un *factor de escala*. Multiplicar por este factor tiene como efecto *estirar o contraer* el vector, dependiendo del valor de $\sqrt{a^2+b^2}$.

- Si $\sqrt{a^2+b^2} > 1$, entonces el vector se *expande* (su longitud aumenta).
- Si $\sqrt{a^2+b^2} < 1$, entonces el vector se *contrae* (su longitud disminuye).
- Si $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, entonces la longitud del vector no cambia, solo su dirección.

Por lo tanto, esta transformación no solo rota los vectores, sino que también cambia su longitud. En otras palabras, la multiplicación por la matriz A combina una *rotación* del plano con una *dilatación* (expansión o contracción) del vector.

- Si la magnitud de los valores propios es *menor que 1*, los puntos se acercan al origen. En este caso, el origen actúa como un *sumidero*: todos los puntos del sistema tienden a moverse hacia el origen.
- Si la magnitud de los valores propios es *mayor que 1*, los puntos se alejan del origen a medida que pasa el tiempo. En este caso, el origen actúa como una *fuente*: todos los puntos del sistema tienden a alejarse del origen.

4.3. Cambios de Coordenadas

En el caso de las transformaciones lineales o (mapas) lineales, podemos observar que una matriz representa un mapa lineal. Es decir, la matriz asociada a una transformación lineal describe cómo se transforma un vector de entrada bajo la acción de dicha transformación. Si $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces existe una matriz A tal que:

$$F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector en el espacio $\mathbb{R}^m$, y A es la matriz que representa la transformación lineal F. Así, los cambios de coordenadas pueden simplificar los cálculos de estabilidad para mapas de dimensiones superiores [3, pág. 67].

Un vector en $\mathbb{R}^m$ puede ser representado de muchas maneras diferentes, dependiendo del sistema de coordenadas elegido. Elegir un sistema de coordenadas es equivalente a elegir una base de $\mathbb{R}^m$; las coordenadas de un vector son simplemente los coeficientes que expresan el vector en esa base. Cambiar la base de $\mathbb{R}^m$ requiere cambiar la matriz que representa el mapa lineal F. En particular, sea S una matriz cuadrada cuyas columnas son los nuevos vectores de base. Entonces la matriz $S^{-1}AS$ representa el mapa lineal F en la nueva base. Por la Definición 1.19, la matriz $C = S^{-1}\mathrm{AS}$, donde S es una matriz invertible, es similar a la matriz A.

Por los Teoremas 1.2 y 1.3 las matrices A y C tienen el mismo conjunto de valores propios y el mismo determinante. Por el Teorema 1.4 y el Ejemplo 1.22, sabemos que si A es la matriz que representa a la transformación lineal F y tomamos $R \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces el área generada por la imagen de R bajo la transformación F, es decir, el área de $F(R)$, es igual al valor absoluto del determinante de A multiplicado por el área de R. El determinante de A mide cómo la matriz cambia el área de la región R al aplicar la transformación lineal. La transformación de área es independiente de la elección de coordenadas.

Las matrices que son similares tienen las mismas propiedades dinámicas cuando se ven como mapas, ya que solo difieren por el sistema de coordenadas utilizado para verlas. Por ejemplo, si $(0,0)$ es un sumidero bajo A, lo sigue siendo bajo C. Esto nos coloca en posición de analizar la dinámica de todos los mapas lineales en $\mathbb{R}^2$.

Dado que las matrices similares tienen los mismos valores propios, decidir la estabilidad del origen para un mapa lineal F es tan simple como calcular los valores propios de una representación matricial A. Por ejemplo, si los valores propios a y b de A son reales y distintos, entonces A es similar a la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el mapa tiene esta representación matricial en algún sistema de coordenadas. El mismo análisis funciona para matrices con valores propios repetidos o un par de valores propios complejos. El siguiente teorema puede consultarlo en [3, pág. 68].

Teorema 4.1. *Sea F un mapa lineal en $\mathbb{R}^m$, que está representado por la matriz* A *(en algún sistema de coordenadas). Entonces:*

1. *El origen es un sumidero si todos los valores propios de* A *tienen módulo menor que uno.*

2. El origen es una fuente si todos los valores propios de A *tienen módulo mayor que uno.*

En dos dimensiones también debemos considerar mapas lineales de estabilidad mixta, es decir, aquellos para los cuales el origen es un punto silla.

Definición 4.8. *Sea A una matriz que representa un mapa lineal en $\mathbb{R}^m$. Decimos que A es* **hiperbólico** *si A no tiene valores propios con módulo igual a uno. Si un mapa hiperbólico A tiene al menos un valor propio con módulo mayor que uno y al menos uno con módulo menor que uno, entonces al origen se le llama* **punto silla***.*

Por lo tanto, hay tres tipos de mapas hiperbólicos: aquellos para los cuales el origen es un sumidero, aquellos para los cuales el origen es una fuente y aquellos para los cuales el origen es un punto silla.

4.4. Mapas no lineales y la matriz Jacobiana

En la Sección 4.2 se estudiaron funciones lineales (o mapas lineales), los cuales siempre tienen un punto fijo en el origen. En esta sección se discutirán mapas no lineales, y en particular cómo determinar la estabilidad de los puntos fijos.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un mapa no lineal. En el caso unidimensional, la linearización está dada por la derivada en el punto fijo. Si p es un punto fijo y h es un número pequeño, entonces el cambio en la salida del mapa en $p + h$, comparado con la salida en p, está bien aproximado por el mapa lineal $L(h) = Kh$, donde K es el número constante $f'(p)$. En otras palabras,

$$f(p + h) \approx f(p) + hf'(p),$$

donde $\approx$ indica que $f(p + h)$ es aproximado a $f(p) + hf'(p)$. Si $|f'(p)| < 1$, el punto fijo p es un sumidero, y si $|f'(p)| > 1$, es una fuente. La situación es muy similar para mapas no lineales en dimensiones superiores. El lugar de la derivada en la discusión anterior es ocupado por una matriz.

Definición 4.9. *Sean $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ un mapa en $\mathbb{R}^m$, y $p \in \mathbb{R}^m$. La* **matriz**

Jacobiana *de* $\mathbf{F}$ *en* p*, denotada* $\mathrm{D}\,\mathbf{F}(p)$*, es la matriz*

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\mathrm{m}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_\mathrm{m}}{\partial x_m}(\mathrm{p}) \end{pmatrix}$$

de derivadas parciales evaluadas en p*.*

Dado un vector $p \in \mathbb{R}^m$ y un vector pequeño h, es decir, que su módulo $|h|$ es cercano a cero, el incremento en $\mathbf{F}$ debido a h se aproxima mediante la matriz Jacobiana multiplicada por el vector h:

$$\mathbf{F}(p+h) - \mathbf{F}(p) \approx \mathrm{D}\,\mathbf{F}(p) \cdot h,$$

Este vector h representa un cambio pequeño en la entrada del mapa $\mathbf{F}$.

La expresión de la aproximación lineal es válida cuando h es pequeño, y el error en esta aproximación es proporcional a $|h|^2$. Es decir, el error en la aproximación disminuye cuadráticamente con el tamaño de h. Esto significa que, cuando h es pequeño, el error es pequeño de manera proporcional al cuadrado de la norma de h. Si duplicamos el tamaño de h, el error en la aproximación aumentará por un factor de cuatro, ya que el error depende de $|h|^2$. Por ejemplo, si $|h| = 0.1$, el error será proporcional a $0.1^2 = 0.01$; y si $|h| = 0.01$, el error será proporcional a $0.01^2 = 0.0001$. Este comportamiento refleja que la aproximación se vuelve más precisa a medida que h se hace más pequeño. Si asumimos que $\mathbf{F}(p) = p$, entonces, para un cambio pequeño h, el mapa $\mathbf{F}$ mueve el punto $p+h$ aproximadamente a la posición $p + \mathrm{D}\,\mathbf{F}(p) \cdot h$, es decir, $\mathbf{F}$ magnifica un pequeño cambio h en la entrada a un cambio $\mathrm{D}\,\mathbf{F}(p) \cdot h$ en la salida. Cuando el cambio es pequeño, la acción del mapa $\mathbf{F}$ cerca de p se aproxima a la de un mapa lineal. Es decir, si consideramos un cambio pequeño h, la transformación que realiza $\mathbf{F}$ sobre p se comporta de manera similar a la transformación lineal definida por $h \mapsto A \cdot h$, donde $A = \mathrm{D}\,\mathbf{F}(p)$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$ en p. Esto significa que, cerca de p, el mapa $\mathbf{F}$ no es muy diferente de una transformación lineal.
Geométricamente, esto implica que las vecindades de p se mapean de forma aproximada por el mapa $\mathbf{F}$ a regiones que tienen una forma similar a la que tendrían si la transformación fuera lineal, definida por la matriz A.
El siguiente teorema determina la estabilidad de un mapa en un punto fijo basado

en la matriz Jacobiana en ese punto.

Teorema 4.2. *[3, pág. 70]. Sean* $\mathbf{F}$ *un mapa en* $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$*,* $p \in \mathbb{R}^m$ *y supongamos que* p *es un punto fijo de* F*.*

1. *Si el módulo de cada valor propio de* $\mathrm{D}\mathbf{F}(p)$ *es menor que 1, entonces* p *es un sumidero.*

2. *Si el módulo de cada valor propio de* $\mathrm{D}\mathbf{F}(p)$ *es mayor que 1, entonces* p *es una fuente.*

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1$. Los mapas lineales de $\mathbb{R}^m$ en algunos casos, las órbitas (las trayectorias de los puntos bajo F) divergen de 0 en ciertas direcciones, lo que significa que los puntos se alejan de 0. Por ejemplo, si la matriz tiene valores propios mayores que 1, las trayectorias se expanden en esas direcciones. Por otro lado, las órbitas pueden converger a 0 en otras direcciones, lo que significa que los puntos tienden a acercarse al origen si los valores propios son menores que 1. Los puntos fijos de los mapas no lineales pueden atraer puntos en algunas direcciones y repeler puntos en otras.

Definición 4.10. *[3, pág. 70] Sean* $\mathbf{F}$ *un mapa en* $\mathbb{R}^m, m \geq 1$ *y* $p \in \mathbb{R}^m$*. Supongamos que* $\mathbf{F}(p) = p$*. Entonces el punto fijo* p *se llama* **hiperbólico** *si ninguno de los valores propios de* $\mathrm{D}\,\mathbf{F}(p)$ *tiene magnitud 1. Si* p *es hiperbólico y si al menos un valor propio de* $\mathrm{D}\,\mathbf{F}(p)$ *tiene magnitud mayor que 1 y al menos un valor propio tiene magnitud menor que 1, entonces* p *se llama* **punto silla***.*

Nota 4.1. En el caso de un punto periódico de período k, se debe analizar el mapa iterado $\mathbf{F}^k$ en lugar de $\mathbf{F}$, es decir, debemos estudiar los valores propios de $\mathrm{D}\,\mathbf{F}^k(p)$.

Finalicemos esta sección con algunos ejemplos de sistemas dinámicos lineales.

Ejemplo 4.8. Consideremos el Ejemplo 4.6. Analicemos la estabilidad del sistema dado en (4.13). Como se analizó previamente, el único punto fijo del sistema es $p = (0, 0)$, para cualquier valor de a y d (vea Ejemplo 4.6).

Para encontrar la matriz Jacobiana, consideramos la función $\mathbf{F} = (f, g)$, donde $f(x, y) = ax$ y $g(x, y) = dy$. Derivamos parcialmente las funciones f y g respecto a x e y. La matriz Jacobiana $D\mathbf{F}(x, y)$ del sistema es:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue evaluemos la matriz Jacobiana en el punto fijo $p = (0,0)$:

$$D\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz $D\mathbf{F}(p)$ son simplemente los elementos diagonales, es decir, a y d.

Para determinar la estabilidad del sistema, consideramos los siguientes casos:

- **Caso 1:** Si $a, d \in (0,1)$, entonces se cumple que:

  $$|a| < 1 \quad \text{y} \quad |d| < 1.$$

  Luego, según el Teorema 4.2, el punto fijo $(0,0)$ es un *sumidero*.

- **Caso 2:** Si $a, d > 1$, entonces:

  $$|a| > 1 \quad \text{y} \quad |d| > 1.$$

  En este caso, según el Teorema 4.2, el punto fijo $(0,0)$ es una *fuente*.

Ejemplo 4.9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a x_n + y_n \\ y_{n+1} &= a y_n. \end{aligned} \tag{4.19}$$

El sistema (4.19) se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Sea $x = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Por el Ejemplo 4.5 la órbita de $x = (x_0, y_0)$ es:

$$\mathcal{O}(x, F) = \{x, Ax, A^2x, \ldots\}. \tag{4.21}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

En este caso particular, el resultado de iterar la matriz A, n veces, es la matriz

$$A^n = a^{n-1} \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para determinar los puntos fijos del sistema 4.19, tenemos que resolver la ecuación.

$$Z = AZ. \tag{4.22}$$

De (4.22) se desprende que el origen $p = (0, 0)$, es el único punto de equilibrio. Para encontrar analizar la estabilidad de este punto fijo consideremos la función $\mathbf{F} = (f, g)$ con $f(x, y) = ax - y$, $g(x, y) = ay$. Luego la matriz Jacobiana $D\mathbf{F}(x, y)$ del sistema es

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Evaluamos la matriz Jacobiana en el punto fijo $p = (0, 0)$. Como la matriz Jacobiana es independiente de x y y, obtenemos:

$$D\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ahora, para encontrar los valores propios de la matriz $D\mathbf{F}(p)$, necesitamos resolver la ecuación característica. Esto se obtiene al calcular el determinante de $D\mathbf{F}(p) - \lambda I$, donde I es la matriz identidad y λ representa los valores propios. Es decir:

$$\det(D\mathbf{F}(p) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & -1 \\ 0 & a - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así, el determinante de esta matriz es:

$$\det(D\mathbf{F}(p) - \lambda I) = (a - \lambda)(a - \lambda) = (a - \lambda)^2.$$

Para encontrar los valores propios, igualamos el determinante a cero:

$$(a-\lambda)^2 = 0.$$

De esta ecuación obtenemos un único valor propio es $\lambda = a$, con multiplicidad 2. Para determinar la estabilidad del punto fijo $p = (0,0)$, analizamos el valor propio $\lambda = a$. Consideremos los siguientes casos:

- Si $|a| < 1$, entonces el valor propio tiene módulo menor que 1, lo que, según el Teorema 4.2, implica que el punto fijo p es un *sumidero*.
- Si $|a| > 1$, entonces el valor propio tiene módulo mayor que 1, lo que, según el Teorema 4.2, implica que el punto fijo p es una *fuente*.

4.5. Mapa de Hénon

Michel Hénon es un matemático belga nacido en 1937, conocido principalmente por su trabajo en el campo de la dinámica no lineal y el caos. A lo largo de su carrera, M. Hénon ha realizado contribuciones a la teoría de sistemas dinámicos, la geometría y la astronomía.

En la década de 1970, M. Hénon se convirtió en un pionero en el estudio de sistemas dinámicos discretos. Su trabajo más famoso es el mapa de Hénon, introducido en 1976, el cual es un modelo matemático simple pero poderoso para ilustrar el caos en sistemas no lineales. Este mapa se deriva de la exploración de sistemas que muestran sensibilidad a las condiciones iniciales, un rasgo distintivo del comportamiento caótico [**?**].

La formulación del mapa de Hénon se basa en dos ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Hénon demostró que, para ciertos valores de estos parámetros, el mapa (4.23) puede presentar un comportamiento caótico, convergiendo a un atractor extraño que exhibe una estructura fractal [**?**].

El impacto del trabajo de Hénon se extendió más allá de la matemática pura. Sus hallazgos en dinámica no lineal han influido en diversas áreas, como la física, la biología y la economía, donde se observan fenómenos caóticos en sistemas complejos.

Hoy en día, el mapa de Hénon se utiliza ampliamente en la enseñanza y la investigación, sirviendo como un ejemplo clásico de cómo la matemática puede modelar comportamientos complejos en sistemas reales. La obra de M. Hénon continúa siendo relevante en el estudio contemporáneo del caos y la dinámica no lineal.

4.5.1. Dinámica del mapa de Hénon

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. En este apartado hablaremos un poco sobre este sistema dinámico $F_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbf{F}_{a,b}(x, y) = \big(a - x^2 + by, x\big)\,, \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.24}$$

Sabemos que dicho sistema dinámico discreto no es lineal y es conocido como el mapa de Hénon [3, pág. 70]. Determinemos los puntos fijos de $\mathbf{F}_{a,b}$ y los puntos de período dos de $\mathbf{F}_{a,b}$. Para esto, sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por definición para determinar los puntos fijos de $\mathbf{F}_{a,b}$ se tiene que determinar cuando $\mathbf{F}_{a,b}(x, y) = (x, y)$. Lo cual implica el sistema:

$$\begin{aligned} x &= a - x^2 + by \\ y &= x. \end{aligned} \tag{4.25}$$

El sistema (4.25) es equivalente a la ecuación $x = a - x^2 + bx$, o bien

$$x^2 - (b - 1)x - a = 0. \tag{4.26}$$

Usando la fórmula cuadrática, obtenemos las raíces de la ecuación (4.26), los cuales son:

$$x = \frac{(b - 1) \pm \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2}. \tag{4.27}$$

La ecuación (4.27) implica que los puntos fijos existen siempre y cuando

$$4a \geq -(b - 1)^2. \tag{4.28}$$

Así, para determinar los puntos fijos del mapa de Hénon consideremos la relación que aparece en la ecuación (4.28), intersección con la recta $y = x$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $4a = -(b - 1)^2$.

En este caso, de (4.27) se obtiene que $x = \frac{(b-1)}{2}$. En consecuencia, el único punto fijo es $\left(\frac{(b-1)}{2}, \frac{(b-1)}{2}\right)$.

Caso II. $4a > -(b-1)^2$.

De (4.27) se obtiene que los dos puntos fijos son:

$$\left(\frac{(b-1)+\sqrt{(b-1)^2+4a}}{2}, \frac{(b-1)+\sqrt{(b-1)^2+4a}}{2}\right) \text{ y} \tag{4.29}$$

$$\left(\frac{(b-1)-\sqrt{(b-1)^2+4a}}{2}, \frac{(b-1)-\sqrt{(b-1)^2+4a}}{2}\right). \tag{4.30}$$

De Caso I y Caso II obtenemos que el mapa tiene a lo sumo dos puntos fijos.

Para buscar puntos de período dos, establecemos $\mathbf{F}^2_{a,b}(x,y) = (x,y)$. Lo anterior es equivalente a:

$$\mathbf{F}_{a,b}(a - x^2 + by, x) = (x, y). \tag{4.31}$$

Así, por (4.24) obtenemos:

$$x = a - \left(a - x^2 + by\right)^2 + bx \tag{4.32}$$

$$y = a - x^2 + by. \tag{4.33}$$

Resolviendo (4.33) para y obtenemos:

$$(1-b)y = a - x^2 \tag{4.34}$$

$$y = \frac{a - x^2}{1-b}. \tag{4.35}$$

Sustituyendo (4.35) en (4.32, obtenemos:

$$x = a - \left(a - x^2 + b\left(\frac{a-x^2}{1-b}\right)\right)^2 + bx$$

$$x = a - \left(a - x^2\left(\frac{1-b}{1-b}\right) + b\left(\frac{a-x^2}{1-b}\right)\right)^2 + bx$$

$$x = a - \left(\frac{(a-x^2)(1-b) + b(a-x^2)}{1-b}\right)^2 + bx.$$

Lo anterior implica

$$x = a - \left(\frac{a - x^2}{1 - b}\right)^2 + bx. \tag{4.36}$$

Así, de (4.36) obtenemos

$$0 = a - \left(\frac{a - x^2}{1 - b}\right)^2 - (1 - b)x. \tag{4.37}$$

En consecuencia de (4.37) tenemos

$$0 = a(1 - b)^2 - (a - x^2)^2 - (1 - b)^3 x. \tag{4.38}$$

De (4.38) obtenemos

$$0 = \left(x^2 - a\right)^2 + (1 - b)^3 x - (1 - b)^2 a. \tag{4.39}$$

Finalmente, por (4.39)se obtiene:

$$0 = \left(x^2 - (1 - b)x - a + (1 - b)^2\right)\left(x^2 + (1 - b)x - a\right). \tag{4.40}$$

Observe que el factor de la derecha de la ecuación (4.39) corresponde al lado izquierdo de la ecuación (4.26), así los ceros de este corresponden a puntos fijos de $\mathbf{F}_{a,b}$, que también son puntos fijos de $\mathbf{F}^2_{a,b}$. Los puntos de periodo 2 están dados por la raíz de la ecuación $x^2 - (1 - b)x - a + (1 - b)^2$. Las raíces son:

$$x = \frac{1 - b \pm \sqrt{(1 - b)^2 - 4(-a + (1 - b)^2)}}{2}. \tag{4.41}$$

Finalmente, (4.41) implica que

$$x = \frac{1 - b \pm \sqrt{4a - 3(1 - b)^2}}{2}. \tag{4.42}$$

Así, el mapa de Hénon tiene puntos de periodo 2 si $4a > 3(1 - b)^2$.

4.5.2. Casos particulares

En lo que sigue consideremos algunos casos particulares. Empezaremos tomando el caso en que $a = 0$ y $b = 0.4$. Sustituyendo en (4.26) el sistema dinámico $\mathbf{F}_{a,b}$

tiene como puntos fijos $(0,0)$ y $(-0.6,-0.6)$. La matriz Jacobiana $\mathrm{D}\mathbf{F}_{a,b}$ es

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluada en el punto $(0,0)$, la matriz Jacobiana es

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0,0.4}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el Teorema 1.1 podemos determinar que $\mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0,0.4}(0,0)$ tiene valores propios $\pm\sqrt{0.4}$, aproximadamente iguales a 0.632 y -0.632. Por lo tanto, por el Teorema 4.2 el punto $(0,0)$ es un sumidero.

Ahora, evaluemos la matriz Jacobiana en el punto $(-0.6,-0.6)$:

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0,0.4}(-0.6,-0.6) = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, utilizando el Teorema 1.1 podemos determinar que sus valores propios son aproximadamente iguales a 1.472 y -0.272. Así, por la Definición 4.10 el punto $(-0.6,-0.6)$ es un punto silla.

En los que sigue consideraremos los parámetros $a = 0.43$ y $b = 0.4$. Sustituyendo estos valores en (4.42) se sabe que el mapa de Hénon tienen puntos de periodo dos. Así por (4.41) esos puntos son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-0.4) \pm \sqrt{(1-0.4)^2 - 4(-0.43 + (1-0.4)^2}}{2} && (4.43) \\ &= \frac{0.6 \pm \sqrt{(0.36) - 4(-0.43 + 0.36)}}{2} && (4.44) \\ &= \frac{0.6 \pm \sqrt{(0.36) - 4(-0.07)}}{2} && (4.45) \\ &= \frac{0.6 \pm \sqrt{(0.36) + 0.28}}{2} && (4.46) \\ &= \frac{0.6 \pm \sqrt{0.64}}{2} = \frac{0.6 \pm 0.8}{2}. && (4.47) \\ & && (4.48) \end{aligned}$$

Lo anterior implica que las dos raíces son $x_1 = 0.7$ y $x_2 = -0.1$. Sustituyendo

$x_1 = 0.7$ en (4.35), obtenemos

$$y_1 \;=\; \frac{0.43-(0.7)^2}{1-0.4} = \frac{0.43-0.49}{0.6} = \frac{-0.06}{0.6} = -0.1. \tag{4.49}$$

De manera similar se sustituye $x_2 = -0.1$ en la ecuación (4.35). Con lo cual vemos que la órbita de periodo dos es $\{(0.7,-0.1),(-0.1,0.7)\}$, donde las trayectorias del sistema alternan entre estos dos puntos bajo iteraciones sucesivas del mapa $\mathbf{F}$.

En lo que resta, determinemos la estabilidad de esta órbita. Para esto, calculemos la matriz Jacobiana de $\mathbf{F}^2_{0.43,0.4}$ evaluada en el punto $(0.7,-0.1)$. Por la regla de la cadena, sabemos que:

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}^2_{0.43,0.4}(x) = \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}(\mathbf{F}_{0.43,0.4}(x))\cdot \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}(x). \tag{4.50}$$

En consecuencia, de (4.50) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\mathbf{F}^2_{0.43,0.4}((0.7,-0.1)) &= \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}((-0.1,0.7))\cdot \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}((0.7,-0.1))\\
&= \begin{pmatrix} -2(-0.1) & 0.4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2(0.7) & 0.4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0.12 & 0.08 \\ -1.4 & 0.4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Los valores propios de la matriz jacobiana son aproximadamente $0.26 \pm 0.30i$, que son números complejos de magnitud apróximadamente 0.4. Por el Teorema 4.2 la órbita de período dos es un sumidero. Observemos que los mismos valores propios se obtienen al evaluar

$$\mathrm{D}\,\mathbf{F}^2_{0.43,0.4}((-0.1,0.7)) = \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}((0.7,-0.1))\cdot \mathrm{D}\,\mathbf{F}_{0.43,0.4}((-0.1,0.7)).$$

En este apartado se han considerado dos casos particulares del mapa de Henon, con diferentes valores para los parámetros a y b, con el fin de explorar cómo estos afectan la dinámica del sistema, especialmente en relación con los puntos fijos y las órbitas periódicas.

En el primer caso ($a = 0$, $b = 0.4$), el análisis de los puntos fijos $(0,0)$ y $(-0.6,-0.6)$ ha mostrado que el punto $(0,0)$ es un sumidero, mientras que el punto $(-0.6, -0.6)$ es un punto silla.

Dado que el punto $(0, 0)$ es sumidero, implica que existe una vecindad de punto $(0, 0)$ tal que cualquier trayectoria iniciada dentro de esta vecindad del punto fijo tenderá a acercarse a él conforme pasa el tiempo. En el caso del mapa de Henon, un sumidero sugiere que, para ciertos valores de a y b, el sistema tiene una zona de atracción en la que las trayectorias convergen, lo que genera un comportamiento de estabilidad local en torno a este punto.

Ahora el hecho de que el punto $(-0.6, -0.6)$ sea un punto silla, significa que tiene un comportamiento más complejo. Las trayectorias cercanas a este punto fijo se alejan en una dirección (asociada con el valor propio positivo) y se acercan en la otra (asociada con el valor propio negativo). Este tipo de punto fijo es típicamente inestable y sugiere que el sistema es sensible a las condiciones iniciales en torno a este punto.

En el segundo caso ($a = 0.43$, $b = 0.4$), la presencia de una órbita periódica de período dos que actúa como un sumidero indica que el sistema muestra un comportamiento cíclico estable. Este comportamiento cíclico es una característica de los sistemas no lineales, donde el comportamiento global puede ser muy diferente al comportamiento local de los puntos fijos individuales.

La estabilidad de la órbita de período dos es una propiedad global de la órbita completa, no de los puntos individuales. Esto significa que, a pesar de que las trayectorias individuales en la órbita no son atractivas por sí solas, la órbita como un todo atrae las trayectorias cercanas, creando un comportamiento cíclico estable.

4.6. Modelo presa-depredador

Durante la Primera Guerra Mundial, la población de seláceos (un grupo de peces cartilaginosos como tiburones y rayas) en el lado norte del mar Adriático aumentó drásticamente, lo que presentó al biólogo Umberto D'Ancona un aparentemente enigma irresoluble de encontrar la razón del incremento. Presentó el problema a un experto en matemáticas, su suegro, Vito Volterra, quien proporcionó una brillante solución al enigma construyendo un modelo simple, pero objetivo y útil [18].

Volterra dividió la población de peces en dos categorías: depredadores (los seláceos) y presas. Suponiendo que el número de encuentros por unidad de tiempo entre pares de los dos grupos es proporcional al producto de sus tamaños y favorece el aumento de los depredadores mientras disminuye el otro grupo, Volterra propuso el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para estudiar la dinámica de las dos poblaciones. Supongamos que las variables $x(t)$ y $y(t)$ representan la población de presas y depredadores, respectivamente, en el tiempo t; y a, b, c, d y ε son parámetros no negativos:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) - \varepsilon x(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) - \varepsilon y(t). \end{cases}$$

Este sistema es no lineal debido a los términos $x(t)y(t)$ y $x(t)y(t)$ en las ecuaciones diferenciales, los cuales involucran el producto de las dos variables. Esta no linealidad dificulta la obtención de soluciones exactas en términos simples. En su lugar, se buscan soluciones aproximadas o se realiza un análisis cualitativo del sistema. Una forma de obtener soluciones aproximadas es mediante el uso de métodos numéricos, como el método de Euler, el método de Runge-Kutta, los cuales se pueden consultar en los libros [**?**] y [**?**]. Estos métodos permiten aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de manera eficiente, incluso cuando no es posible obtener soluciones exactas.
Los últimos términos de las dos ecuaciones, $-\varepsilon x(t)$ y $-\varepsilon y(t)$, representan la actividad pesquera. Debido a las hostilidades de la guerra, esta actividad se redujo significativamente de 1915 a 1919, período caracterizado por el gran aumento en la proporción de seláceos capturados por los pocos barcos pesqueros que operaban en la zona.

El modelo fue clave para entender la dinámica de las poblaciones de peces desde un enfoque matemático y teórico, lo que permitió a los científicos y gestores pesqueros tomar decisiones más informadas sobre la conservación y manejo de los recursos marinos [35, 4]. El modelo ayudó a:

- **Formular políticas de pesca sostenible:** Gracias al modelo, las autoridades pudieron crear estrategias que evitaran fluctuaciones drásticas en las poblaciones de peces y promovieran su sostenibilidad.

- **Predecir impactos ambientales:** También fue útil para prever cómo cambios en la cantidad de pesca y las condiciones ambientales podrían afectar a largo plazo las poblaciones de peces.

Una investigación numérica de la ecuación diferencial se puede realizar utilizando el método de Euler de un solo paso. Se selecciona un paso de tiempo $\Delta t = h$

y las dos derivadas se reemplazan por

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{y(t+h)-y(t)}{h},$$

respectivamente. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x(t+h) = (1+ah)x(t) - bhx(t)y(t) - \varepsilon hx(t) \\ y(t+h) = (1-ch)y(t) + dhx(t)y(t) - \varepsilon hy(t) \end{cases} \tag{4.51}$$

Tomando $t = 0$ y las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. La sustitución da

$$\begin{cases} x_1 = x(h) = (1+ah-\varepsilon h)x_0 - bhx_0y_0, \\ y_1 = y(h) = (1-ch-\varepsilon h)y_0 + dhx_0y_0. \end{cases} \tag{4.52}$$

Ahora tomando $t = h$. A partir de las ecuaciones (4.51) y (4.52) obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = x(2h) = (1+ah-\varepsilon h)x_1 - bhx_1y_1, \\ y_2 = y(2h) = (1-ch-\varepsilon h)y_1 + dhx_1y_1. \end{cases}$$

En general, después de $n+1$ pasos llegamos a

$$\begin{cases} x_{n+1} = x((n+1)h) = (1+ah-\varepsilon h)x_n - bhx_ny_n, \\ y_{n+1} = y((n+1)h) = (1-ch-\varepsilon h)y_n + dhx_ny_n. \end{cases} \tag{4.53}$$

Si consideramos el efecto de la pesca como nula, tenemos que el valor de los parámetros $\phi hx(t)$ y $\phi hy(t)$ son cero y obtenemos el siguiente sistema dinámico

$$x_{n+1} = (1+ah)x_n - bhx_ny_n,$$
$$y_{n+1} = (1-ch)y_n + dhx_ny_n.$$

Consideramos la función $\mathbf{F} = (f, g)$ con:

$$f(x, y) = (1+ah)x - bhxy,$$

$$g(x, y) = (1-ch)y + dhxy.$$

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si (x, y) es un punto fijo de $\mathbf{F}$, se debe cumplir que $\mathbf{F}(x, y) =$

(x, y), es decir

$$f(x, y) = x,$$

$$g(x, y) = y.$$

Lo anterior implica,

$$(1 + ah)x - bhxy = x;$$

$$(1 - ch)y + dhxy = y.$$

Reorganizando términos obtenemos:

$$(1 + ah)x - x - bhxy = 0;$$

$$(1 - ch)y - y + dhxy = 0.$$

De lo anterior tenemos que:

$$ahx - bhxy = 0;$$

$$-chy + dhxy = 0.$$

Factorizando x e y:

$$x(ah - bhy) = 0;$$

$$y(-ch + dhx) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos dos casos:

Caso I $x = 0$ y $y = 0$.

Caso II $ah - bhy = 0$ y $-ch + dhx = 0$.

Del segundo caso tenemos que $x = \frac{c}{d}$ e $y = \frac{a}{b}$. Por lo tanto los puntos fijos de la función $\mathbf{F} = (f, g)$ son: $(0, 0)$ y $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Analicemos el tipo de estabilidad de estos puntos fijos. Como

$$\mathbf{F}(x, y) = ((1 + ah)x - bkxy, (1 - ch)y + dhxy),$$

la matriz Jacobiana es

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + ah - bhy & -bhx \\ dhy & 1 - ch + dhx \end{pmatrix}.$$

Así que,

$$D\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1+ah & 0 \\ 0 & 1-ch \end{pmatrix}.$$

Encontremos los valores propios de la matriz $D\mathbf{F}(0,0)$. Para esto hacemos

$$D\mathbf{F}(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} 1+ah & 0 \\ 0 & 1-ch \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ah-\lambda & 0 \\ 0 & 1-ch-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ahora encontramos el determinante de $D\mathbf{F}(0,0) - \lambda I$. Dado que el determinante de una matriz diagonal es el producto de sus componentes en su diagonal principal:

$$\det(D\mathbf{F}(0,0) - \lambda I) = (1+ah-\lambda)(1-ch-\lambda).$$

Para encontrar los valores propios, igualamos el determinante a cero:

$$\det(D\mathbf{F}(0,0) - \lambda I) = 0;$$

$$(1+ah-\lambda)(1-ch-\lambda) = 0.$$

De aquí obtenemos que

$$\lambda_1 = 1 + ah \quad y \quad \lambda_2 = 1 - ch.$$

Por lo tanto, los valores propios de $D\mathbf{F}(0,0)$ son $1+ah$ y $1-ch$. Dado que a y h son parámetros positivos, el módulo del primer valor propio es mayor que 1, mientras que el módulo del segundo es menor que 1. Por la Definición 4.10 el origen es un punto hiperbólico, más aún, es un punto silla. En consecuencia el origen es inestable.

Ahora evaluemos la matriz Jacobiana en el otro punto.

$$D\mathbf{F}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-bch}{d} \\ \frac{adh}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, encontremos los valores propios de la matriz $D\mathbf{F}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Para esto hagamos

$$D\mathbf{F}\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & \frac{-bch}{d}\\ \frac{adh}{b} & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda & \frac{-bch}{d}\\ \frac{adh}{b} & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos el siguiente determinante

$$\det(D\mathbf{F}\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & \frac{-bch}{d}\\ \frac{adh}{b} & 1-\lambda\end{vmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\det(D\mathbf{F}\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)-\lambda I)&=(1-\lambda)^2-\left(\frac{-bch}{d}\cdot\frac{adh}{b}\right)\\ &=(1-\lambda)^2-\left(-cah^2\right)\\ &=(1-\lambda)^2+ach^2.\end{aligned}$$

Igualando el determinante a cero:

$$(1-\lambda)^2+ach^2=0,$$

$$(1-\lambda)^2=-ach^2,$$

$$1-\lambda=\pm i\sqrt{ach^2},$$

$$\lambda=1\pm i\sqrt{ach^2}.$$

Por lo tanto obtenemos que los valores propios son:

$$\lambda_1=1+ih\sqrt{ac}\quad y\quad \lambda_2=1-ih\sqrt{ac}.$$

Dado que a, c y h son parámetros positivos los módulos de λ_1 y de λ_2 son mayores que uno. Por el Teorema 4.2 el punto $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ es una fuente. Para visualizar este comportamiento, elijamos los valores numéricos $1+ah=1.2, bh=0.2, 1-ch=0.8, dh=0.2$. El punto de equilibrio es $(1,1)$. Comenzando en $(x_0,y_0)=(1.3,1)$ las dos poblaciones (ver Figura 4.2).

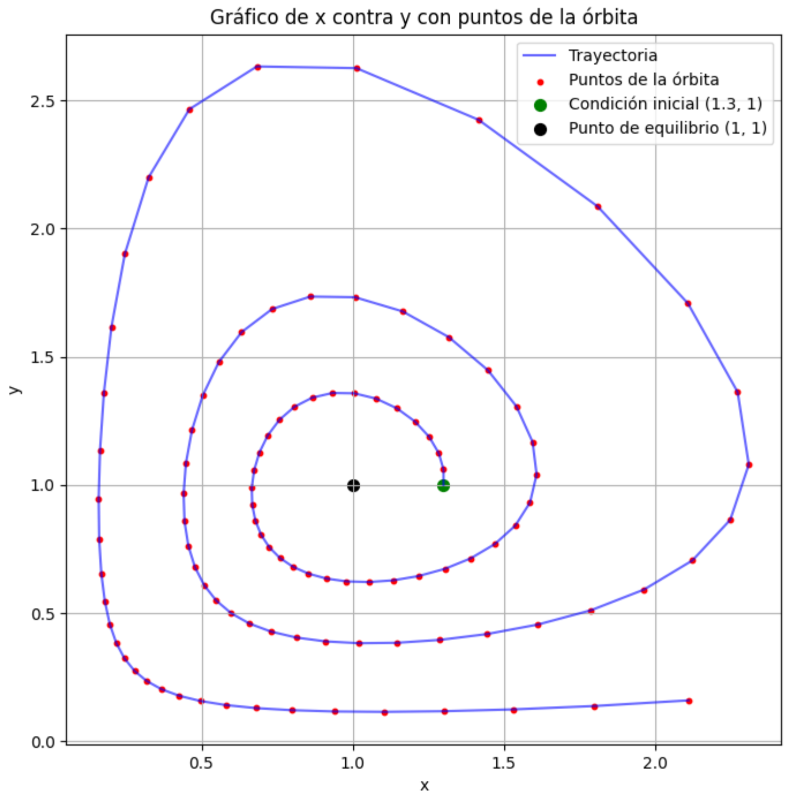

Figura 4.2: Punto de equilibrio en $\mathbb{R}^2$

El punto de equilibrio $(1, 1)$ está marcado en negro. Observamos que las trayectorias tienden a alejarse de este punto si la condición inicial está lejos de él, lo cual es consistente con la inestabilidad observada en el análisis de la matriz Jacobiana. La gráfica ilustra las oscilaciones de poblaciones de presas y depredadores en el tiempo. A través de estos ciclos, podemos observar cómo las interacciones entre las presas y los depredadores llevan a un equilibrio dinámico donde ambas poblaciones oscilan de manera periódica.

Conclusiones

Este trabajo proporciona una introducción a los sistemas dinámicos discretos bidimensionales. A lo largo de esta tesis se presenta la teoría básica sobre modelos dinámicos discretos bidimensionales así como algunas de sus aplicaciones, incluyendo los aspectos cuantitativos y los cualitativos. Se planteó una metodología para solucionar de forma analítica los sistemas dinámicos bidimensionales lineales, así como la solución y análisis de algunos problemas de áreas como biología y ecología. Esta parte estuvo basada en [**?**] y [29].

Para el caso de los sistemas no lineales se revisaron conceptos fundamentales que permiten un estudio cualitativo de dicho sistemas, como la estabilidad de puntos fijos, así como su clasificación en sumideros, fuentes y puntos silla, que permite analizar el comportamiento a largo plazo del sistema. Estos conceptos son importantes para entender la dinámica de sistemas específicos. Dos de los sistemas dinámicos bidimensionales revisados fueron el Mapa de Hénon y el modelo presa-depredador consultados en [3] y [18], respectivamente.

Finalmente reservamos como trabajo a futuro un estudio más riguroso del análisis cualitativo de los sistemas bidimensionales discretos, ya que analizamos unicamente una pequeña parte de los numerosos conceptos que se pueden ocupar para realizar un análisis mejor.

Bibliografía

[1] Abraham, R., Gardini, L., & Mira, C. (2013). *Chaos in Discrete Dynamical Systems: A Visual Introduction in 2 Dimensions*. Springer.

[2] López Revilla, A. (2018). *Nociones relacionadas con la transitividad topológica*. Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

[3] Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos an introduction to dynamical system* (2nd ed.). Springer-Verlag New York, Inc.

[4] Academia Lab. (2023). *Ecuaciones de Lotka-Volterra*. Recuperado el 13 de enero de 2025, de `https://academia-lab.com/enciclopedia/ecuaciones-de-lotka-volterra/`

[5] Cardenas, H., Lluis, E., Raggi, F., & Tómas, F. (1990). *Álgebra superior*. Trillas.

[6] De Torres Curth, M. (2015). *Modelos matemáticos en las ciencias*. Recuperado el 3 de febrero de 2024, de `https://www.fundacionazara.org.ar/img/libros/modelos-matematicos.pdf`

[7] Autor Anónimo. (2024). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Recuperado el 14 de marzo de 2024, de `https://personal.us.es/pnadal/Informacion/leccion5ecdiferencias.pdf`

[8] Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*. Springer.

[9] Fernández Pérez, C., Vazquez Hernández, F., & Vega Montaner, J. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Thomson-Paraninfo.

[10] Giancoli, D. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. Pearson.

[11] Grossman, S., Stanley, I., & otros. (2019). *Álgebra lineal*. Biblioteca Hernán Malo González.

[12] King Davalos, J. E., & Mendez Lango, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*. Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

[13] Lacomba, E. A. (2000). Los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven? *Miscelánea matemática*, 39-50.

[14] Levy, H., & Lessman, F. (2011). *Finite difference equations*. Dover Publications.

[15] Macho, M. S. (2002). ¿Qué es la topología? *SIGMAN 20*, 63-77.

[16] Portesi, M. A., Schuverdt, M. L., & Baragatti, E. E. (2019). *Cálculo en 2 y 3 variables*. Universidad Nacional de La Plata (EDULP).

[17] Marotto, F. R. (2006). *Introduction to Mathematical Modeling Using Discrete Dynamical Systems*. Thomson Brooks/Cole.

[18] Martelli, M. (1999). *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*. Wiley-Interscience.

[19] Ó Searcóid, M. (2007). *Metric spaces*. Springer.

[20] Kulenovic, M. R. S., & Merino, O. (2002). *Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica*. Taylor & Francis.

[21] Nykamp, D. Q. (s.f.). Discrete dynamical systems as function iteration. *From Math Insight*. Consultado el 4 de diciembre de 2024.

[22] Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.

[23] Observatoire de la Côte d'Azur. (2015). *Un objeto mystère en nuestro sistema solar*. Recuperado el 30 de septiembre de 2023, de `https://web.archive.org/web/20150406013306/https://www.oca.eu/spip.php?article788`

[24] Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., & Linares, P. (2010). Modelos matemáticos de optimización. *Publicación Técnica*, 1.

[25] Escuela Superior Politécnica del Litoral. (2023). *Rebote de pelota: colisiones, conservación de la cantidad de movimiento.* Recuperado de https://www.studocu.com/ec/document/escuela-superior-politecnica-del-litoral/fisica-1/rebote-pelota-colisiones-conservacion-de-la-cantidad-de-movimiento/23269389

[26] Riveros Varela, C. A. (s.f.). *Generador eléctrico en tiempo continuo de la sucesión de Fibonacci.* Recuperado de https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/7950647/p56-libre.pdf?1390853616=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DGenerador_Electrico_en_Tiempo_Continuo_d.pdf&Expires=1741197869&Signature=W8HqEG9Vtv~s0uqReS6jsUXLbXzya5LXpN2cbFER9YoulVzTkrExG8GX3fxqiEgkXbc2hvJyOKqDV9
_&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

[27] Riveros, C. A. (n.d.). Generador eléctrico en tiempo continuo de la sucesión de Fibonacci.

[28] Rios, S. (s.f.). Modelos matemáticos en biología. *Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas. Jaén, 8.*

[29] Rios, S. (s.f.). Modelos matemáticos en biología. *Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas. Jaén, 8.*

[30] Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* Perseus Books.

[31] De Torres Curth, M. (2015). *Modelos matemáticos en las ciencias.* Recuperado el 3 de febrero de 2024, de https://www.fundacionazara.org.ar/img/libros/modelos-matematicos.pdf

[32] León-Torres, I. (2018). *Compacidad dinámica y sensibilidad.* Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

[33] Muñoz López, V. M. (2018). *Funciones del tipo mezclantes en hiperespacios.* Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

[34] Wen, H. (2014). A review of the Hénon map and its physical interpretations. *School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA*, 30332-0430.

[35] Autor desconocido. (2023). *Modelo depredador-presa de Volterra-Lotka*. Recuperado el 13 de enero de 2025, de https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/6217/Modelo%20depredador-presa%20de%20Volterra-Lotka.pdf?sequence=1

Apéndice A

Coeficiente de Restitución

Una medida de la inelasticidad en una colisión frontal de dos cuerpos es el coeficiente de restitución e, definido como

$$e = \frac{v'_A - v'_B}{v'_B - v'_A}, \tag{A.1}$$

donde $v'_A - v'_B$ es la velocidad relativa de los dos objetos después de la colisión, y $v'_B - v'_A$ es su velocidad relativa antes del choque. La interpretación del coeficiente de restitución e es para una colisión perfectamente elástica, $e = 1$; en tanto que para una colisión completamente inelástica, $e = 0$ [10, p. 243].

Supongamos que intentamos trazar la trayectoria de una pelota que rebota. Además, con cada rebote, una pelota generalmente pierde parte de la energía que tenía justo antes de ese rebote. Supongamos que la altura de la pelota es denotada por $s(t)$ entre dos rebotes consecutivos. Además, supongamos que dejamos que S_0 represente la altura inicial de la pelota cuando se deja caer (con una velocidad inicial de 0). Como la pelota se deja caer verticalmente la única fuerza que actúa sobre esta es al peso, y dado que el peso es una fuerza conservativa la energía mecánica es constante, esto es

$$E = E_m = E_p + E_c = mgS_0 + \frac{1}{2}mv^2,$$

donde E es una constante, E_m, E_p y E_c denotan la energía mecánica, la energía potencial y la energía conservativa, respectivamente. Por el principio de conservación de la energía se tiene que la energía mecánica de la pelota antes caer, y al tocar al suelo es la misma, es decir

$$mgS_0 + \frac{1}{2}m0 = mg0 + \frac{1}{2}mu_1^2$$
$$mgS_0 = \frac{1}{2}mu_1^2$$
$$u_1 = \sqrt{2gS_0}.$$

Durante el impacto y el rebote, parte de la energía cinética se pierde debido a diferentes procesos como deformaciones elásticas e analísticas, fricción, calor y sonido. Estas pérdidas pueden modelarse con un coeficiente de restitución e, que determina la fracción de velocidad conservada después del impacto. Por lo tanto la velocidad de la pelota después del choque es $v_1 = eu_1$ [25].
La pelota asciende con una velocidad inicial v_1, y alcanza una altura máxima S_1 que se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgS_1$$
$$S_1 = \frac{mv_1^2}{2mg} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{e^2u_1^2}{2g} = \frac{e^2\left(2gS_0\right)}{2g} = e^2S_0.$$

Para el segundo rebote la velocidad de la pelota antes del choque con el suelo se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mu_2^2 = mgS_1 \quad u_2 = \sqrt{2gS_1}.$$

La velocidad de la pelota después del choque es $v_2 = eu_2$.
La pelota asciende con una velocidad inicial v_2, y alcanza una altura máxima S_2 que se calcula aplicando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgS_2 \quad S_2 = e^2S_1 = e^4S_0.$$

Siguiendo la misma idea después del choque n, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$S_n = e^{2n}S_0.$$

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales

Este apendice contiene información sobre conceptos básicos en el área de ecuaciones diferenciales.

Definición B.1. *Una* **ecuación diferencial** *es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables.*

Ejemplos B.1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 0$
2. $y' = xy$
3. $y'' + y' + x = 10$

Definición B.2. *Si una ecuación contiene la derivada de una variable con respecto a otra, entonces la primera se llama variable dependiente y la segunda es una variable independiente.*

$$a\frac{dy}{dx} + ky = 0,$$

x es la variable independiente, y es la variable dependiente y las constantes a y k presentes en la ecuación se denominan parámetros o coeficientes.

Definición B.3. *Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama una* **ecuación diferencial ordinaria**. *Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una* **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos B.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales son los siguientes:

1. $\dfrac{dy}{dx}+3xy=0$, es una ecuación ordinaria donde x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

2. $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=x-2y$, es una ecuación parcial donde x,y son las variables independientes y v es la variable dependiente.

Definición B.4. *Una* **ecuación diferencial lineal de orden** n *en la variable dependiente* y *y la variable independiente* x *es una ecuación que puede expresarse de la forma*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)$$

donde, para cada $i\in\{0,\ldots,n\}$, $a_i(x)$ *y* $b(x)$ *son funciones continuas de* x *en un intervalo* I*. Si para cada* $i\in\{0,\ldots,n\}$, a_i *es constante, decimos que la ecuación tiene coeficientes constantes, de lo contrario, tiene coeficientes variables.*

Como caso particular, tenemos las ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden.

Definición B.5. *Una ecuación diferencial será lineal de primer orden cuando su expresión sea*

$$a_1(x)\frac{dy}{x}+a_0y=b(x).$$

Definición B.6. *Una ecuación diferencial será lineal de segundo orden cuando su expresión sea*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0y=b(x).$$

Las ecuaciones lineales admiten un tratamiento sistemático muy completo, y para ellas es posible, encontrar fórmulas que dan explícitamente todas las soluciones [9]. Para un estudio detallado de la metodología que se sigue para resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y orden superior, vea [22].