



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ELEMENTO MAESTRO DE LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE

CALOR BIDIMENSIONAL EMPLEANDO CÁLCULO

FRACCIONARIO

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA:

DANIEL GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. HUGO DAVID SÁNCHEZ CHÁVEZ

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, FEBRERO 2025

Dedicatoria

Para Adela, mi abuela.

Para Alma y Baltazar, mis padres.

Para Bere, mi hermana.

Agradecimientos

Con este trabajo de tesis culmina mi educación en la Ingeniería en Física Aplicada. En primer lugar, agradezco a mis padres, Alma Delia Hernández y Baltazar González, por ayudarme a seguir mis sueños y darme la oportunidad de estudiar una carrera universitaria. Estoy agradecido con ustedes por todo el apoyo incondicional que han brindado y por el enorme sacrificio que han hecho por mí, haré que valga la pena. Estoy orgulloso de que ustedes sean mis padres, hoy y siempre.

En segundo lugar, agradezco profundamente a mi director de tesis, el Dr. Hugo David Sánchez Chávez, por guiarme y dirigir mi camino en la recta final de esta gran carrera. A su vez, agradezco a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindarme una educación de calidad.

Quiero hacer una mención especial para aquellos profesores que con su empeño y dedicación me instruyeron con las mejores clases: al Dr. Iván René Corrales Mendoza, al Dr. Maxwell Gustavo Jiménez Escamilla y al Dr. Raúl Juárez Amaro.

No podía terminar sin antes agradecer a todos mis amigos que me acompañaron en este increíble periodo de mi vida: David, Vidrio, Víctor, Arellano, Andrea, Cheli, Eunise y todos los demás, gracias a todos ustedes, la pasé increíble. Además, también agradezco a mis abuelitos, a mi hermana, mi tía Elisa y a toda mi familia, que de una u otra forma contribuyeron en mi formación, los quiero.

A todos ustedes y a los que me faltó mencionar...

;;;Gracias totales!!!

Resumen

La transferencia de calor desempeña un papel crítico en diversas áreas de la ingeniería, puesto que está presente en una gran variedad de sistemas, que abarcan desde refrigeradores domésticos, intercambiadores de calor y vehículos motorizados, hasta edificios, componentes electrónicos, sistemas biológicos y procesos industriales. La creciente necesidad de mejorar la eficiencia de estos sistemas ha impulsado la implementación de técnicas innovadoras, como es el caso de los intercambiadores de calor, que en años recientes han explorado diseños con geometrías complejas al implementar medios porosos, como lo son las espumas metálicas de alta conductividad. Gracias a su gran área superficial, los medios porosos pueden emplearse tanto como aislantes térmicos como promotores de la transferencia de calor. La gran diversidad de aplicaciones de estas estructuras ha convertido la transferencia de calor y masa a través de medios porosos en un tema de intensa investigación. Sin embargo, el análisis de estos sistemas presenta desafíos significativos debido a la complejidad de su geometría. En este contexto, el concepto de fractales y la geometría fractal ofrecen una herramienta valiosa para caracterizar y modelar estas estructuras.

En el presente trabajo de tesis, se desarrolla un modelo para la descripción de la transferencia de calor bidimensional y transitoria al sustituir los operadores diferenciales convencionales de la ecuación de conducción de calor por operadores fraccionarios del cálculo fraccionario del continuo fractal. Estos operadores vinculan el orden de derivación con la dimensión fractal del medio en donde ocurre la conducción de calor, de tal forma que la información geométrica del medio se incluye a través de parámetros fractales. Su posterior solución es realizada con la metodología del Elemento Finito, específicamente mediante la formulación débil de los residuos ponderados de Galerkin con funciones de forma triangulares particulares. Las integrales resultantes se resolvieron analíticamente mediante cambios de variable y el uso de las funciones especiales Gamma y Beta. Como resultado, se obtuvo una expresión general para un elemento arbitrario del elemento maestro de la ecuación de conducción de calor fraccionaria. Los resultados obtenidos son significativos por su utilidad en la descripción de la conducción de calor a través de medios no homogéneos, permitiendo incorporar información geométrica del medio para un análisis más acorde con la realidad.

Abstract

Heat transfer plays a critical role in various areas of engineering, as it occurs in a wide range of systems, including domestic refrigerators, heat exchangers, motor vehicles, buildings, electronic components, biological systems, and industrial processes. The growing need to improve the efficiency of these systems has driven the implementation of innovative techniques, such as heat exchangers that, in recent years, have explored designs with complex geometries by incorporating porous media, such as high-conductivity metallic foams. Due to their large surface area, porous media can be employed both as thermal insulators and as promoters of heat transfer. The extensive range of applications for these structures has made heat and mass transfer through porous media a subject of intense research. However, analyzing these systems presents significant challenges due to the complexity of their geometry. In this context, the concept of fractals and fractal geometry offers a valuable tool for characterizing and modeling these structures.

In this thesis, a model is developed to describe two-dimensional and transient heat transfer by replacing the conventional differential operators in the heat conduction equation with fractional operators from the Fractional Calculus in Fractal Continuum. These operators link the order of derivation to the fractal dimension of the medium where heat conduction occurs, thereby incorporating the medium's geometric information through fractal parameters. The solution is achieved using the Finite Element Method, specifically through the weak formulation of the Galerkin weighted residuals with specific triangular shape functions. The resulting integrals were solved analytically by applying variable transformations and using the special Gamma and Beta functions. As a result, a general expression was obtained for an arbitrary element of the master element in the fractional heat conduction equation. The results are significant for their utility in describing heat conduction in non-homogeneous media, allowing the geometric information of the medium to be incorporated for a more realistic analysis.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Aspectos preliminares	XIII
Introducción	1
1. Marco teórico	3
1.1. Transferencia de calor	3
1.1.1. Mecanismos de transferencia	3
1.2. Ecuación de conducción de calor	5
1.3. Condiciones iniciales y de frontera	7
1.3.1. Condición de frontera de temperatura específica	9
1.3.2. Condición de frontera de flujo específico de calor	9
1.4. Geometría fractal	10
1.5. Dimensión	10
1.5.1. Dimensión euclidiana	10
1.5.2. Dimensión topológica	11
1.5.3. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch	11
1.5.4. Dimensión de conteo de cajas	12
1.6. Auto-similitud	14
1.6.1. Auto-similitud exacta	14
1.6.2. Auto-similitud estadística	14
1.7. Tipos de fractales	15
1.7.1. Fractales matemáticos	15
1.7.2. Fractales naturales	19

2. CF y modelo del continuo fractal	21
2.1. Algunos operadores fraccionarios	21
2.1.1. Operadores de Riemann-Liouville	21
2.1.2. Derivada fraccionaria de Caputo	22
2.2. Propiedades fractales del medio permeable	23
2.2.1. Ley de potencia de masa	24
2.3. Homogeneización de medios fractales	24
2.4. El modelo del continuo fractal	26
2.4.1. Métrica fractal del continuo fractal	26
2.4.2. Calculo fraccionario en el continuo fractal	29
3. Método del elemento finito	33
3.1. Formulación débil	35
3.2. Funciones de forma para elementos triangulares	37
4. Desarrollo del problema	41
4.1. Ecuación diferencial de conducción de calor bidimensional transitoria sin generación de calor de orden fraccionario	41
4.2. Elemento maestro	42
5. Resultados y discusión	47
Conclusiones	51
A. Función Gamma y función Beta	53
A.1. Función Gamma	53
A.2. Función Beta	54
B. Resolución de integrales	55
B.1. Solución de M	55
B.2. Solución de L	59
B.3. Solución de K	63
B.4. Solución completa	69

Índice de figuras

1.1. Aplicación del método de conteo de cajas	13
1.2. Ejemplo de auto-similitud exacta	14
1.3. Ejemplo de auto-similitud estadística	15
1.4. Conjunto de Cantor.	16
1.5. Copo de Nieve de Koch	17
1.6. Triángulo de Sierpinski	18
1.7. Alfombra de Sierpinski	18
1.8. Esponja de Menger	18
1.9. Fractales naturales	19
2.1. Construcción de los coeficientes c_2 y c_3	27
3.1. Parámetros de un elemento triangular lineal	38
B.1. Traslado de coordenadas (x, y) a (u_x, u_y)	56
B.2. Elemento triangular considerado en la solución de \mathbf{K} con sus componentes.	64

Aspectos preliminares

Planteamiento del problema

El cálculo fraccionario (CF), introducido en el siglo XIX, ha experimentado un desarrollo significativo en el siglo XX. Vinculado a la física, la relación entre fractalidad y cálculo fraccionario se estableció en 2005 [1], destacando la conexión esencial entre la dimensión fractal y el orden de derivada. Por otro lado, en la aplicación de la ecuación de calor en medios porosos, enfrentamos un desafío. A diferencia de los medios homogéneos, esta ecuación no describe con precisión la propagación del calor en medios no homogéneos debido a la falta de consideración de la geometría del medio.

En el caso de la ecuación de difusión de presión, se ha encontrado que, es posible aplicar el cálculo fraccionario del continuo fractal para medios porosos [2]. Por lo que, en este trabajo se plantea adoptar una propuesta innovadora que implica reemplazar los operadores diferenciales enteros en la ecuación de calor con operadores fraccionarios. Este cambio se realizará como parte de la metodología del Método del Elemento Finito e incluirá los pasos de discretización del dominio, la derivación de ecuaciones para cada elemento de la malla y su resolución. Este abordaje busca superar las limitaciones de las formulaciones convencionales, avanzando hacia una modelación alternativa de la propagación del calor en medios porosos, aprovechando el potencial del cálculo fraccionario del continuo fractal.

Justificación

Los operadores diferenciales de orden entero se han aplicado bajo el supuesto de que el medio es continuo y homogéneo. Sin embargo, en este trabajo se aborda la realidad de que muchos sistemas son inherentemente discontinuos y no homogéneos, como ocurre en los medios porosos. En consecuencia, se propone el uso del cálculo fraccionario del continuo fractal como una herramienta valiosa para incorporar información sobre la naturaleza compleja del

medio. Este enfoque reconoce que las imperfecciones del medio pueden estar relacionadas con el orden de derivación a través de la dimensión fractal, ofreciendo así una perspectiva más adecuada y precisa para describir sistemas reales.

Además, es importante destacar que este trabajo de tesis representa una contribución importante, ya que la metodología de análisis planteada no ha sido abordada anteriormente. La aplicación novedosa del cálculo fraccionario del continuo fractal a un problema de relevancia teórica en la ingeniería física refleja el carácter innovador de este trabajo. Este tratamiento busca llenar un vacío en la literatura científica, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones y destacando la importancia de considerar la naturaleza fractal en el análisis de sistemas físicos complejos.

Hipótesis

Suponemos que al incorporar operadores fraccionarios en la modelación de la ecuación de calor transitoria bidimensional, lograremos una descripción más precisa y adecuada de la propagación del calor en medios porosos.

Esta hipótesis se fundamenta en el hecho de que los operadores fraccionarios fueron desarrollados teniendo en cuenta las características geométricas del medio, lo que permite capturar de manera más efectiva las complejidades asociadas con la geometría no homogénea de los medios porosos. Se espera que este enfoque innovador, combinado con la metodología de discretización del Método de Elemento Finito, mejore significativamente la capacidad predictiva del modelo, proporcionando una herramienta más robusta y precisa para simulaciones futuras en entornos no homogéneos.

Objetivos

Objetivo general

Obtener el elemento maestro de la ecuación de calor transitoria bidimensional mediante el uso del cálculo fraccionario del continuo fractal que emplea una métrica cuya función es convertir un medio discontinuo en un medio continuo.

Objetivos específicos

- Estudiar y entender los conceptos fundamentales de la geometría fractal.
- Adquirir habilidades en el cálculo fraccionario, centrándose en la aplicación de operadores diferenciales fraccionarios del medio continuo.
- Utilizar los conceptos adquiridos en el curso de Elemento Finito, en particular, aquellos relacionados con el método de residuos ponderados de Galerkin.

Metas

- Formular la ecuación de calor transitoria bidimensional en términos del método de Galerkin, identificando los términos clave para su discretización.
- Realizar la discretización de la ecuación de calor transitoria bidimensional en función de los términos obtenidos en el método de Galerkin.
- Obtener el elemento maestro de la ecuación de calor transitoria bidimensional.

Introducción

La transferencia de calor ha sido convencionalmente modelada mediante la Ley de Conducción de Fourier, propuesta por J. Fourier por primera vez en 1822, utilizando operadores diferenciales de orden entero. Este enfoque ha sido efectivo, ya que la mayoría de los materiales de ingeniería se suponen isotrópicos y en muchos casos homogéneos, por lo tanto, poseen propiedades uniformes en todas direcciones. No obstante, para materiales anisotrópicos y no homogéneos, como los compuestos o materiales porosos, las propiedades pueden variar [3].

Por otra parte, los operadores diferenciales de orden entero consideran el supuesto de que el medio al que son aplicados es continuo y homogéneo. Pero, ¿qué sucede cuando se quiere tomar en cuenta la naturaleza de un medio, por ejemplo, un medio poroso, que es discontinuo y no homogéneo? La ecuación convencional de conducción de calor no proporciona una descripción precisa de la propagación de calor en medios no homogéneos, debido a que los operadores diferenciales convencionales no toman en cuenta la geometría del medio poroso. Aquí es cuando se resalta la importancia de emplear nuevas herramientas matemáticas para realizar la modelación y explorar la solución de problemas físicos desde otro punto de vista.

Para abordar este problema podemos apoyarnos del Cálculo de Orden Fraccionario (CF) cuyos orígenes se encuentran a finales del siglo XVII en la famosa pregunta realizada por L'Hopital a Leibniz; “¿Qué pasaría si n fuera $\frac{1}{2}$?” (pregunta obviamente inspirada en la muy conocida notación inventada por Leibniz para las derivadas), cuya respuesta de Leibniz a L'Hopital fue “Eso conducirá a una paradoja, de esta aparente paradoja, algún día se extraerán consecuencias útiles” [4]. Desde entonces, esta nueva rama de las matemáticas ha evolucionado significativamente gracias al desarrollo de diversos operadores fraccionarios. Entre ellos destacan los operadores diferenciales e integrales de Riemann-Liouville publicados en el siglo XIX y posteriormente, en el siglo XX, surgieron nuevas definiciones de operadores fraccionarios, como los propuestos por Weyl, Riesz, Caputo, entre muchos otros [2]. Con el transcurso del tiempo, se han presentado varias propuestas tanto en términos de operadores fraccionarios y sus definiciones, como en cuanto a sus aplicaciones. Algunos ejemplos recientes de aplicaciones incluyen trabajos en áreas como la presión transitoria de flujos [5], la propagación de ondas sísmicas [6] y la dinámica poblacional [7].

El objetivo de este proyecto es incorporar características de los sistemas reales, como discontinuidades e inhomogeneidades, mediante la aplicación del cálculo fraccionario del medio continuo. Esta metodología busca integrar información geométrica del medio, permitiendo asociar las imperfecciones del sistema con el orden de derivación a través de su dimensión fractal.

Adicionalmente, se planea aplicar la teoría de los residuos ponderados de Galerkin, un método ampliamente utilizado en la discretización de ecuaciones diferenciales. La intención es emplear este enfoque en la ecuación de conducción de calor transitoria en dos dimensiones. Al adoptar esta perspectiva, se busca superar las limitaciones inherentes a las formulaciones que utilizan operadores diferenciales convencionales, avanzando así hacia una modelación más precisa de la transferencia de calor en medios no continuos.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Transferencia de calor

El calor se define como la forma en que la energía térmica es capaz de transferirse entre sistemas debido a las diferencias en sus temperaturas. El estudio de la transferencia de calor y masa constituye una disciplina fundamental que busca determinar la tasa o razón de transferencia de calor, es decir, la cantidad de calor transferido por unidad de tiempo durante un proceso. Este campo tiene una amplia gama de aplicaciones, desde sistemas biológicos hasta electrodomésticos, pasando por edificaciones residenciales y comerciales, procesos industriales, dispositivos electrónicos y procesamiento de alimentos [3].

Aunque el calor es una sensación intrínseca para los humanos al proporcionar una sensación de tibieza, no fue sino hasta mediados del siglo XIX que se alcanzó una comprensión física más profunda de su naturaleza, gracias al desarrollo de la teoría cinética.

Los análisis termodinámicos buscan determinar la cantidad de calor transferido mientras los sistemas experimentan procesos, transitando de un estado de equilibrio a otro. La transferencia de energía en forma de calor ocurre siempre desde un medio con una temperatura más elevada hacia otro con una temperatura más baja. Este intercambio cesa cuando ambos medios alcanzan la misma temperatura, es decir, alcanzan el equilibrio [3].

1.1.1. Mecanismos de transferencia

El calor se puede transferir mediante tres modos distintos: *conducción*, *convección* y *radiación*.

Conducción

La conducción se define como la transferencia de energía provocada por las interacciones entre partículas, moviéndose desde las partículas más energéticas de una sustancia hacia las adyacentes menos energéticas. En el caso de gases y líquidos, la conducción resulta de las colisiones y la difusión de moléculas en su movimiento aleatorio. En cambio, en sólidos, se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una retícula y al transporte de energía por parte de los electrones libres.

La velocidad o tasa de conducción de calor a través de un medio puede depender de la configuración geométrica, el espesor y el material del mismo, así como de la diferencia de temperatura a través de él [3]. La ecuación que describe la tasa de transferencia de calor por conducción se presenta en la sección 1.2

Convección

La transferencia de calor por convección ocurre entre una superficie sólida y un fluido (líquido o gas) adyacente en movimiento, combinando los efectos de la conducción y el flujo del fluido. Cuando no hay movimiento significativo en el fluido, la transferencia de calor se reduce a conducción pura. Sin embargo, la presencia de un movimiento masivo del fluido incrementa la transferencia de calor. Cuanto más rápido sea ese movimiento, mayor será la transferencia de calor, aunque también complicará la determinación de las razones detrás de esta transferencia [3].

Cuando el fluido involucrado se hace fluir sobre la superficie mediante medios externos como un ventilador, este proceso se conoce como convección forzada. Por otro lado, si el movimiento del fluido se debe a las fuerzas de empuje inducidas por las diferencias de densidad causadas por la variación de temperatura en ese fluido, la convección es llamada convección natural o libre [3].

A pesar de las complejidades asociadas con la convección, la velocidad de transferencia de calor por este medio es proporcional a la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido, y se expresa mediante la ley de enfriamiento de Newton como

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty), \quad (1.1)$$

en donde h es el *coeficiente de transferencia de calor por convección*, A_s es el área superficial a través de la cual se lleva a cabo la transferencia de calor, T_s es la temperatura de la superficie y T_∞ es la temperatura del fluido a una distancia suficientemente alejada de la superficie [3].

Radiación

A diferencia de los mecanismos anteriores, en los cuales la transferencia de energía ocurre

a través de un medio material, el calor también puede transmitirse en regiones donde existe el vacío perfecto mediante el mecanismo de radiación electromagnética [8]. La radiación se manifiesta como energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas (o fotones), resultado de cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas. Este método de transferencia es el más rápido y no sufre atenuación en el vacío [3].

Cuando una superficie de emisividad ϵ , área superficial A_s y temperatura T_s está completamente rodeada por una superficie mucho más extensa con temperatura T_{alred} , y ambas están separadas por un gas que no interfiere con la radiación, la tasa neta de transferencia de calor por radiación entre ellas se describe mediante:

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon\sigma A_s(T_s^4 - T_{alred}^4), \quad (1.2)$$

donde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$ es la *constante de Stefan-Boltzmann* [3].

1.2. Ecuación de conducción de calor

La transferencia de calor presenta tanto dirección como magnitud. En términos generales, la conducción de calor en un medio es tridimensional y dependiente del tiempo, con la temperatura variando en función de la posición y el tiempo $T = T(x, y, z, t)$. La conducción es estacionaria cuando la temperatura no cambia con el tiempo, y no estacionaria o transitoria cuando sí lo hace. La conducción de calor es unidimensional cuando la transferencia de calor por conducción es significativa solo en una dimensión y despreciable en las otras dos direcciones primarias, bidimensional cuando la conducción en la tercera dimensión es despreciable, y tridimensional cuando la conducción es significativa en todas las dimensiones [3].

La tasa de conducción de calor a través de una capa plana es proporcional a la diferencia de temperatura a través de ella y al área de transferencia de calor, pero inversamente proporcional a su espesor; es decir,

$$\dot{Q}_{cond} = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (1.3)$$

En esta ecuación, la constante de proporcionalidad k representa la conductividad térmica del material, la cual mide la capacidad de un material para conducir calor. Esta fórmula sigue la Ley de Fourier de la conducción de calor, nombrada en honor a Joseph Fourier, quien la introdujo por primera vez en su obra sobre transferencia de calor en 1822. Aquí, dT/dx representa el gradiente de temperatura, es decir, la razón de cambio de temperatura con respecto a la posición x .

Es crucial destacar que el signo negativo en la ecuación asegura el cumplimiento del segun-

do principio de la termodinámica, indicando que el calor fluye de un medio con temperatura más alta hacia otro con temperatura más baja. De esta manera, la transferencia de calor en la dirección $+x$ se representa como una cantidad positiva [3] [8].

La ecuación (1.3) representa la relación matemática para la transferencia de calor unidimensional. Una expresión más detallada y completa es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.4)$$

donde ρ es la densidad del material, C el calor específico y \dot{e}_{gen} la velocidad constante de generación de calor por unidad de volumen. La ecuación 1.4 se aplica en casos donde la conductividad térmica k es variable, generalmente dependiendo de la temperatura T y, por ende, de la posición x , por lo que no se puede extraer de la derivada. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas se puede suponer que la conductividad térmica permanece constante en algún valor promedio. Para este caso, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.5)$$

donde $a = k/\rho C$ es la difusividad térmica del material y representa la velocidad con que se propaga el calor a través del mismo. Esta ecuación puede simplificarse a diversas formas bajo condiciones específicas, las cuales se detallan a continuación:

Régimen estacionario:
$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0 \quad (1.6)$$

Régimen transitorio, sin generación de calor:
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.7)$$

Régimen estacionario, sin generación de calor:
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (1.8)$$

La mayoría de los problemas relacionados con la transferencia de calor que se encuentran en la práctica se pueden aproximar como unidimensionales. No obstante, esta aproximación no siempre es válida y en algunas situaciones es necesario considerar la transferencia de calor en otras direcciones. En tres dimensiones, utilizando coordenadas rectangulares, la ecuación general de conducción de calor es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.9)$$

que para el caso de conductividad térmica constante se reduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) se conoce como ecuación de Fourier-Biot y, en condiciones específicas, se reduce a las siguientes formas:

- Régimen estacionario: (ecuación de Poisson)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0 \quad (1.11)$$

- Régimen transitorio, sin generación de calor: (ecuación de difusión)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.12)$$

- Régimen estacionario sin generación de calor: (ecuación de Laplace)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

Para el estudio planeado en este trabajo de tesis, se abordará el régimen transitorio sin generación de calor en dos dimensiones, lo que conduce a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Para concluir con esta sección, es relevante señalar que los operadores diferenciales empleados para modelar la ecuación de conducción de calor, que incluyen derivadas parciales en el tiempo y el espacio, son de orden entero.

1.3. Condiciones iniciales y de frontera

Las ecuaciones de conducción presentadas fueron obtenidas mediante la aplicación de un balance de energía en un elemento diferencial dentro del medio y permanecen inalteradas independientemente de las condiciones térmicas en las superficies del medio. Esto implica

que las ecuaciones diferenciales no incorporan información sobre las condiciones en las superficies. Sin embargo, el flujo de calor y la distribución de temperatura en el medio están intrínsecamente vinculados a las condiciones en las superficies.

Para describir completamente un problema de transferencia de calor en un medio, es fundamental establecer las condiciones térmicas en sus superficies. La formulación matemática de estas condiciones en los límites del dominio se conoce como **condiciones de frontera**. Por lo tanto, es necesario establecer condiciones específicas. Al imponer estas condiciones y forzar que la solución las satisfaga en puntos específicos, las constantes arbitrarias tomarán valores únicos, asegurando así una solución única. Para lograr esto, es crucial especificar *dos condiciones de frontera para cada dirección* del sistema de coordenadas en el cual la transferencia de calor es significativa [3].

La condición térmica que generalmente se establece en un instante $t = 0$ se conoce como **condición inicial**. Esta condición inicial es una expresión matemática que describe la distribución inicial de temperatura en el medio. A diferencia de las condiciones de frontera, solo se requiere una condición inicial para un problema de conducción de calor, independientemente de las dimensiones, ya que, la ecuación de conducción es de primer orden en el tiempo. Es importante destacar que en condiciones estacionarias, donde la ecuación de conducción no involucra derivadas temporales, no es necesario especificar una condición inicial [3].

Antes de analizar los tipos de condiciones de frontera en problemas de conducción dentro del contexto de la transferencia de calor, es importante analizar los tipos de condiciones de frontera generales que surgen cuando uno trata con ecuaciones diferenciales. Como ya se mencionó, cuando se trabaja con ecuaciones que modelan fenómenos de equilibrio, es importante complementar con condiciones de frontera que se imponen en los límites del dominio de interés, que en circunstancias favorables servirán para hallar una solución única. A esta combinación de una ecuación diferencial con sus condiciones de frontera adecuadas se le llama *problema de valor de frontera* y existen tres clases principales que surgen en la mayoría de aplicaciones de acuerdo con el tipo de condición de frontera que tenga [9]:

- La **condición de frontera de Dirichlet** (o de **primer tipo**), nombrada en honor al analista del siglo XIX Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, especifica el valor de la solución a lo largo de la frontera del dominio. El hallar soluciones a una ecuación diferencial con este tipo de condición de frontera se denomina *problema de valor de frontera de Dirichlet*.
- La **condición de frontera de Neumann** (o de **segundo tipo**), nombrada en honor a Carl Gottfried Neumann, especifica el valor de la derivada normal de la solución a lo largo de la frontera del dominio. Resolver ecuaciones diferenciales con este tipo de

condiciones se denomina *problema de valor de frontera de Neumann*.

- La **condición de frontera mixta** define el valor de la función a lo largo de una parte de la frontera, mientras que define el valor de la derivada normal a lo largo del resto de ella, lo que da como resultado a un *problema de valor de frontera mixto*.

Por otra parte, en el ámbito de la transferencia de calor, las condiciones de frontera encontradas con mayor frecuencia en casos de conducción son las de *temperatura específica* y *flujo de calor específico*.

1.3.1. Condición de frontera de temperatura específica

La temperatura de una superficie expuesta es comúnmente medible directa y fácilmente, razón por la cual una de las formas más sencillas de especificar las condiciones térmicas en una superficie es mediante la temperatura. En el contexto de la transferencia unidimensional de calor a través de una pared plana con espesor L , las condiciones de frontera de temperatura específica pueden expresarse como:

$$T(0, t) = T_1, \quad (1.15)$$

$$T(L, t) = T_2, \quad (1.16)$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas específicas en las superficies en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. Las temperaturas específicas pueden ser constantes, como en la conducción estable de calor, o pueden variar en el tiempo [3]. Esta es una condición de frontera de Dirichlet o de primer tipo.

1.3.2. Condición de frontera de flujo específico de calor

Cuando se dispone de suficiente información sobre las interacciones de energía en una superficie, puede ser posible determinar la velocidad de transferencia de calor y, por ende, el flujo de calor específico \dot{q} (velocidad de transferencia de calor por unidad de área superficial, en W/m^2) sobre dicha superficie. Esta información puede emplearse como una condición de frontera. Esto se expresa mediante la ley de Fourier de la conducción de calor como:

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (1.17)$$

Así, se obtiene la condición en una de las fronteras, al hacer el flujo específico igual a $-k(\partial T/\partial x)$ en esa frontera. Este es un caso de condición de frontera de Neumann o de segundo tipo.

1.4. Geometría fractal

La geometría fractal es una teoría matemática moderna dedicada al estudio de objetos geométricos complejos que son auto-similares, o dicho de otra forma, que son similares a distintas escalas. Este nuevo tipo de geometría tuvo sus orígenes a finales del siglo XIX cuando diversos matemáticos como Cantor, Peano, Koch, Hausdorff, Besicovitch, entre muchos otros, comenzaron a dudar de los principios de Euclides para obtener una comprensión correcta de lo *irregular y fragmentado* bajo la definición de la dimensión como número de coordenadas [10][11]. El matemático Georg Cantor fue el primero que realizó un análisis riguroso en una carta enviada a Dedekind en 1877, luego fue seguido por el matemático Peano hacia 1890, y los últimos pasos que dieron origen a la geometría fractal fueron realizados alrededor de la década de 1920 por los matemáticos Hausdorff y Besicovitch.

A los objetos estudiados por esta geometría se les denominaba “*monstruos matemáticos*”, pero todo cambiaría en 1975 cuando el matemático francés Benoit B. Mandelbrot asoció a estos objetos el nombre de **fractal** en su obra “*La geometría fractal de la naturaleza*” [10]. El término fractal proviene del adjetivo latino *fractus*, que además de fragmentado o roto, también significa irregular.

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica es irregular o fragmentada y se repite a diferentes escalas. Sus características fundamentales son la auto-similitud y, en la mayoría de los casos, poseen una dimensión no entera (fraccionaria). Además, estos objetos son demasiado irregulares para ser descritos con términos geométricos tradicionales, se definen por medio de algoritmos recursivos, es decir, procesos de repetición; tienen detalle a toda escala, no son diferenciables y poseen longitud infinita [5] [12].

1.5. Dimensión

Dentro de la geometría fractal es necesario emplear distintos conceptos de dimensión, como lo son: la dimensión euclidiana, dimensión topológica, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, también conocida como dimensión fractal y la dimensión de conteo de cajas. Estos conceptos son necesarios para brindar la definición matemática de lo que es un fractal y a su vez dan lugar a sus principales características.

1.5.1. Dimensión euclidiana

“*La dimensión euclidiana D_E es simplemente el número de coordenadas necesarias para especificar a un objeto*” [13]. Bajo esta visión, un punto no tiene tamaño, por lo que se le asigna dimensión nula o cero; una línea solo tiene longitud, teniendo así dimensión uno; un

plano tiene dimensión dos y la dimensión de un cuerpo sólido, como un cubo, es tres. Como se ve, los únicos valores en la dimensión euclidiana son los valores enteros 0, 1, 2 y 3; esto representa una considerable abstracción de la realidad, por lo que la geometría euclidiana no logra captar la esencia de las formas irregulares [14].

1.5.2. Dimensión topológica

La topología es una rama de las matemáticas desarrollada en el siglo XX que aborda la forma de los objetos desde un punto de vista cualitativo, ya que se encarga de estudiar las maneras en que estos se pueden distorsionar sin perder sus características esenciales. A las transformaciones que deforman a los objetos y que mantienen invariantes a sus características y rasgos esenciales se les llama homeomorfismos [13]. Una característica que se mantiene invariante ante deformaciones como dobleces, estiramientos y compresiones es la dimensión topológica del objeto.

“La dimensión topológica deriva de la capacidad de cubrir a un objeto con conjuntos de radio pequeño” [13]. Esta dimensión, denotada por D_T , se puede definir matemáticamente con la expresión:

$$D_T = D_c + 1$$

Donde D_c es la dimensión de corte, que es la dimensión de los subconjuntos necesarios para desconectar el espacio [15]. La dimensión topológica siempre toma valores enteros y usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea [16].

1.5.3. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Las dimensiones definidas anteriormente no son adecuadas para describir a los fractales y mucho menos compararlos y clasificarlos, ya que sus definiciones están planteadas para objetos regulares con estructura homogénea y no toman en cuenta la naturaleza no entera y altamente irregular de los fractales. No obstante, en la actualidad existen distintas definiciones de dimensión que nos pueden ayudar a definir dimensiones fractales D . Una de estas definiciones y también una de las más importantes para clasificar fractales es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, llamada así en honor al matemático alemán Félix Hausdorff que la introdujo en 1919 y al matemático ruso Abram Besicovitch que le dio su forma final. Su importancia recae en que Mandelbrot se apoyó en esta dimensión para definir un fractal.

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es una medida de la complejidad y rugosidad de un cuerpo, cuantifica hasta que punto un objeto ocupa el espacio en el que está inscrito, dándonos así una idea de su extensión real en espacio [12].

Un objeto auto-similar, como ocurre con un fractal, está compuesto por copias de sí mismo, lo que permite descomponerlo en N partes relacionadas con el todo mediante una transformación de semejanza con razón r , conocida como razón de homotecia o razón de similitud. A partir de esta propiedad, la expresión matemática de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, denotada como D_H , se expresa como [17]:

$$D_H = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} \quad (1.18)$$

Donde N es el número de copias de sí mismo.

Una vez definida la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, podemos presentar una definición más rigurosa que es brindada por el mismo Mandelbrot:

“Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Los conjuntos con D no entera son fractales”[10]

A la dimensión de Hausdorff-Besicovitch también se le llama dimensión fraccionaria y para Mandelbrot esta es la *dimensión fractal* D_f , cabe agregar también que algunos fractales sí pueden tomar valores de D enteros (menores que la dimensión euclidiana pero estrictamente mayores que D_T) [10].

En los casos prácticos de la vida real, así como en la naturaleza, es común encontrar estructuras u objetos que, a pesar de mostrar cierta irregularidad, no son autosimilares en todas las escalas. Esto implica que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, basada en la auto-similitud perfecta de los fractales, no sea del todo adecuada para describir dichos objetos. En consecuencia, esta dimensión no resulta del todo útil para los ingenieros o científicos cuando se busca cuantificar la complejidad de objetos fractales que no presentan una auto-similitud idealizada.

1.5.4. Dimensión de conteo de cajas

El cálculo de la dimensión fractal por medio del método de conteo de cajas es uno de los más empleados en las ciencias, ya que tiene un proceso sistemático que se puede aplicar básicamente a cualquier forma. El método consiste en cubrir al objeto de estudio con elementos o *cajas* con longitud de lado δ , la dimensión euclidiana de estos elementos puede ser mayor o igual a la dimensión del objeto que se desee examinar; por ejemplo, para recubrir un segmento de línea se pueden emplear pequeños segmentos de recta, cuadrados e incluso cubos. Existen 3 métodos populares para cubrir un objeto, para ilustrarlos emplearemos como ejemplo la

curva de la línea costera en alguna parte de México empleando cajas y círculos como se muestra en la Figura 1.1. Una forma es pegar las cajas una contra otra para obtener la cantidad mínima necesaria para cubrir la curva, otra forma es usar una malla de cajas regulares y contar el número de cajas N que contienen partes de la curva por cada lado de longitud δ y la última es colocar círculos de diámetro δ de tal forma que se tenga el cubrimiento mínimo de la curva.

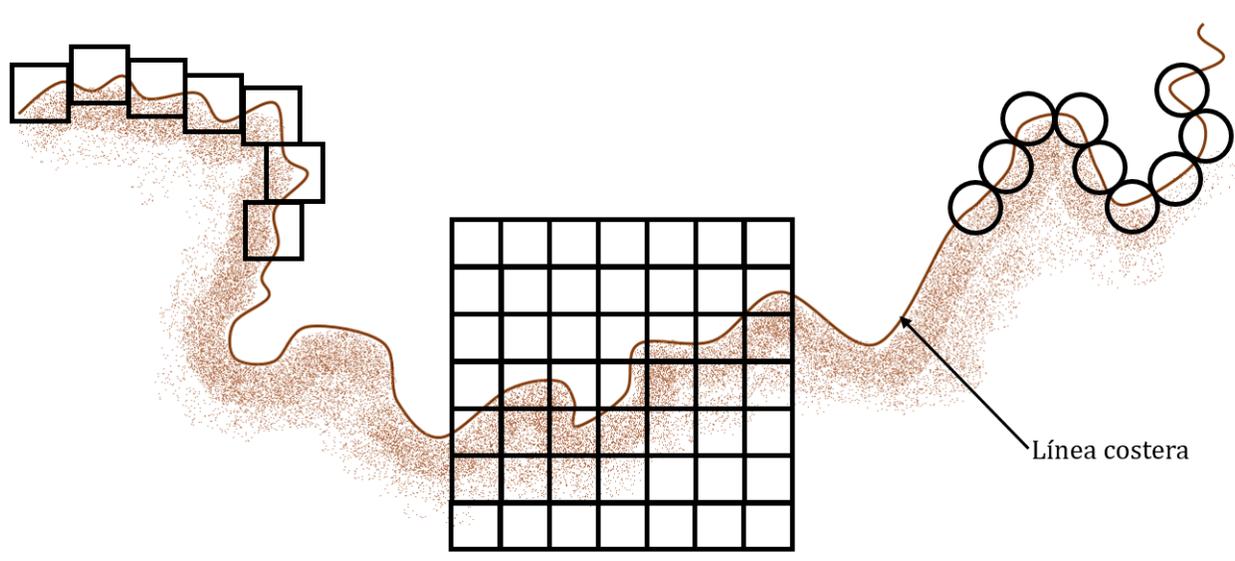


Figura 1.1: Ejemplos de la aplicación del método de conteo de cajas para calcular la dimensión fractal [13].

El número de “cajas” N requeridas para cubrir al objeto se relaciona con δ a través de la dimensión de conteo de cajas, D_B . Volviendo al ejemplo de un segmento de línea de longitud unitaria, el número de elementos para cubrirla viene de $N\delta = 1$, entonces $N = 1/\delta^1$. Nótese que el exponente de δ es independiente de la dimensión de los elementos de cobertura, de hecho, esta es la dimensión de conteo de cajas D_B del objeto estudiado. Para generalizar, se renombran a todos los elementos de cobertura por hipercubos, de tal forma que el volumen de un hipercubo de 1D es una longitud, el volumen de un hipercubo de 2D es un área, el volumen de un hipercubo de 3D es un volumen, y el volumen de un hipercubo de 4D es un hipervolumen 4D, etc. Con esto, tenemos que la formulación de D_B para objetos de hipervolumen unitario es:

$$D_B = \frac{\log(N)}{\log(1/\delta)}.$$

La expresión general de la dimensión de conteo de cajas D_B de un objeto con hipervolumen

V^* distinto a la unidad es:

$$D_B = \frac{\log(N) - \log(V^*)}{\log(1/\delta)}. \quad (1.19)$$

1.6. Auto-similitud

Como ya se ha mencionado, una de las características más importantes en los fractales, además de generalmente tener dimensión fraccionaria, es la auto-similitud o auto-semejanza. De acuerdo con Mandelbrot *“Un fractal que sea invariante por la transformación geométrica de semejanza, en el sentido ordinario, se dice auto-semejante”*, o dicho en otras palabras, un objeto presenta auto-similitud cuando sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo al ser visto a diferentes escalas [10]. En los objetos fractales es posible distinguir dos clases de auto-similitud:

1.6.1. Auto-similitud exacta

La auto-similitud exacta se presenta cuando los objetos conservan la misma forma si se les observa en diferentes escalas, por lo cual, este tipo de auto-similitud es sumamente restrictiva. Un ejemplo de esto se ilustra en la Figura 1.2 donde se muestra el fractal conocido como curva de Koch, con los cuadrados azules es fácil apreciar que al cambiar la escala un número infinito de veces seguirá observándose una copia de sí mismo.

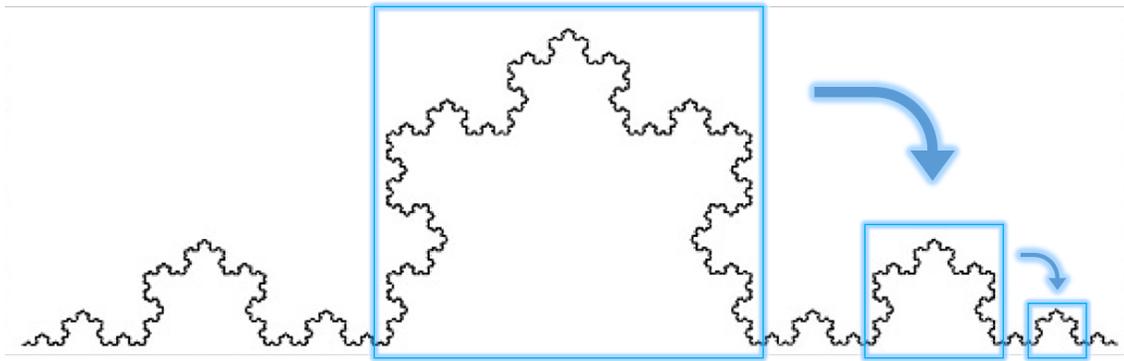


Figura 1.2: Curva de Koch, como ejemplo de auto-similitud exacta.

1.6.2. Auto-similitud estadística

Esta clase de auto-similitud es menos restrictiva, pues solo exige que las características o medidas, ya sean numéricas o estadísticas, se mantengan con los cambios de escala. Un ejemplo de esto es el grado de rugosidad en la silueta de montañas o en los límites de las nubes, como se ilustra en la Figura 1.3 [13]



Figura 1.3: Los límites de las nubes presentan solo auto-similitud estadística.

1.7. Tipos de fractales

La geometría fractal no es una idea abstracta, sino que también se asocia a objetos en la naturaleza que a menudo tienen propiedades fractales [10] [18]. Tales objetos pueden ser identificados en cualquier parte del mundo natural, como en árboles, rayos, nubes, montañas e incluso en nuestro cuerpo en la forma de nuestros alvéolos o en las redes neuronales. Debido a esto, es posible distinguir a los fractales en dos clases: los fractales matemáticos (o geométricos) y los fractales naturales (o aleatorios).

1.7.1. Fractales matemáticos

Los fractales matemáticos son construidos mediante procesos iterativos o recursivos, lo que provoca que su estructura se repita a cualquier escala de longitud, teniendo así auto-similitud exacta. Algunos ejemplos de estos fractales son el conjunto de Cantor, el copo de nieve de Koch, las figuras de Sierpinski y la esponja de Menger, entre muchos otros.

Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un fractal compuesto por un conjunto infinito de puntos dentro del intervalo $[0,1]$. Fue creado por el matemático alemán Georg Cantor, quien lo presentó por primera vez en 1883 sin siquiera imaginar que cien años después aparecería por todas partes, pues fue uno de los primeros fractales en mostrar su utilidad cuando sirvió como modelo en la aparición de *ruido* en determinadas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital [19].

La construcción del conjunto de Cantor se realiza de forma recursiva, de modo que se sigue el siguiente procedimiento:

1. Tome una recta de longitud unitaria.
2. Seccione la recta en tres partes idénticas y extraiga la sección central.
3. Seccione nuevamente los segmentos de recta generados en tres partes y retire la parte central.
4. Siga seccionando y retirando la parte central indefinidamente.



Figura 1.4: Conjunto de Cantor.

El resultado se muestra en la Figura 1.4, cabe recalcar que el conjunto de Cantor es difícil de ilustrar, ya que, de tan fino y disperso que se hace con cada iteración, se vuelve invisible, por esta razón también es conocido como Polvo de Cantor. Su dimensión fractal (de Hausdorff-Besicovitch) es $D = \log(2)/\log(3) \approx 0,6309$, “es más que una colección de puntos, pero menos que una línea” [12].

Copo de Nieve de Koch

El copo de nieve de Koch fue construido por el matemático sueco Helge von Koch en 1904. Su construcción parte de un triángulo equilátero, este objeto inicial es llamado *iniciador*;

luego al centro de cada arista se añade otro triángulo equilátero tres veces menor y sin la base, a esta parte se llama *generador*; el proceso se repite indefinidamente. La curva sería indibujable, a pesar de ello, en la Figura 1.5 (a) se muestran los primeros cuatro pasos de su construcción y en la Figura 1.5 (b) se muestra una concepción artística de este fractal.

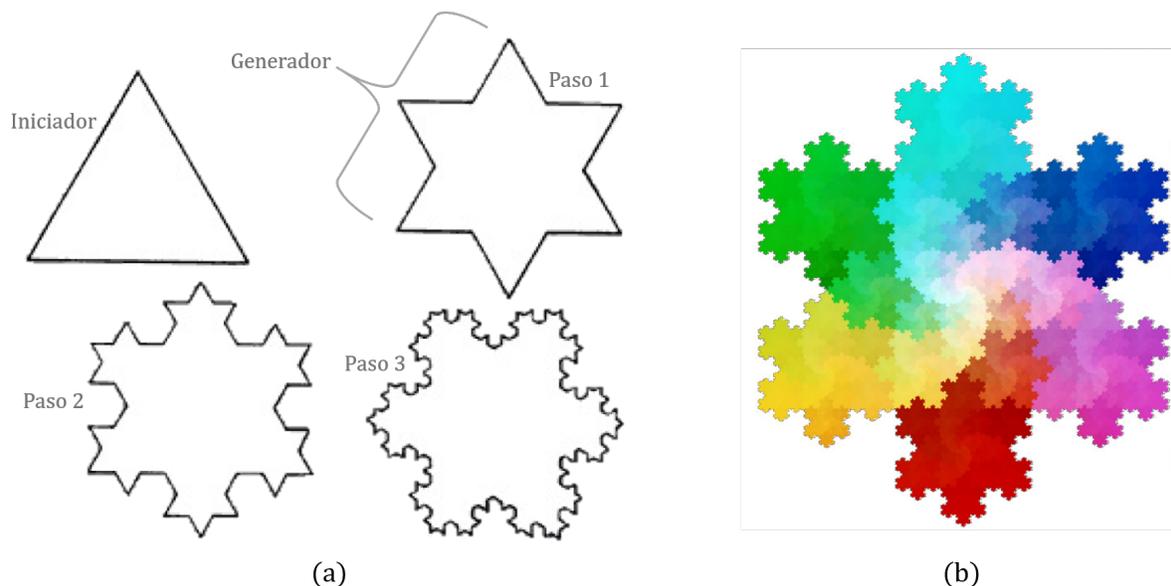


Figura 1.5: Copo de Nieve de Koch: (a) primeros 4 pasos de su proceso de construcción [12], (b) concepción artística [20].

Figuras de Sierpinski

Otros fractales clásicos son las figuras que introdujo el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1916. Una de ellas es el triángulo de Sierpinski y es el resultado de seccionar a todas las escalas un triángulo equilátero en 4 más pequeños cuyas aristas son de la mitad del tamaño que el original; posteriormente, se extrae la sección central. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch de este fractal es $D = \log(3)/\log(2) \approx 1,584$ [12]. En la Figura 1.6 se muestran los primeros 5 pasos de su construcción.

Así como se construye el triángulo de Sierpinski, es posible hacer lo análogo aplicado a un cuadrado para construir la alfombra de Sierpinski. Para ello se hace una iteración que consiste en seccionar un cuadrado en 9 partes iguales, de forma que cada arista sea de un tercio del lado original y que cada nuevo cuadrado tenga un noveno de su área; después se procede a eliminar el cuadrado central. En la Figura 1.7 se ilustran los primeros 3 pasos de la construcción de la alfombra de Sierpinski; al seguir con los pasos hasta el infinito, se obtiene un objeto fractal con dimensión $D = \log(8)/\log(3) \approx 1,893$.

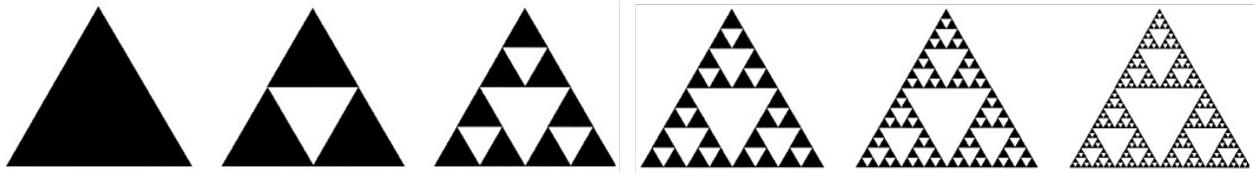


Figura 1.6: Construcción del triángulo de Sierpinski [21].

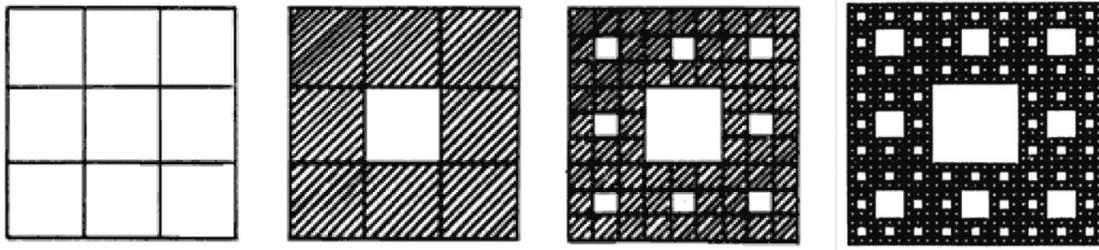


Figura 1.7: Construcción de la alfombra de Sierpinski [12].

Esponja de Menger

Como último ejemplo, tenemos al objeto fractal llamado esponja de Menger, construido por Karl Menger en 1926 y que está estrechamente relacionado con la alfombra de Sierpinski. Este objeto, a diferencia de los anteriores que son construcciones en línea como el caso del polvo de Cantor o en el plano como el caso del copo de nieve de Koch, está construido en el espacio tridimensional como se muestra en la Figura 1.8. El iniciador de la esponja de Menger es un cubo y el generador, es decir, la primera iteración que nos lleva al objeto fractal, consiste en perforar un segmento cuadrado al centro de las caras del cubo. Ahora se tienen 20 cubos de menor tamaño y el mismo proceso de perforado se repite sobre cada uno de ellos hasta el infinito. Su dimensión fractal es $D = \log(20)/\log(3) \approx 2,7268$ [13].

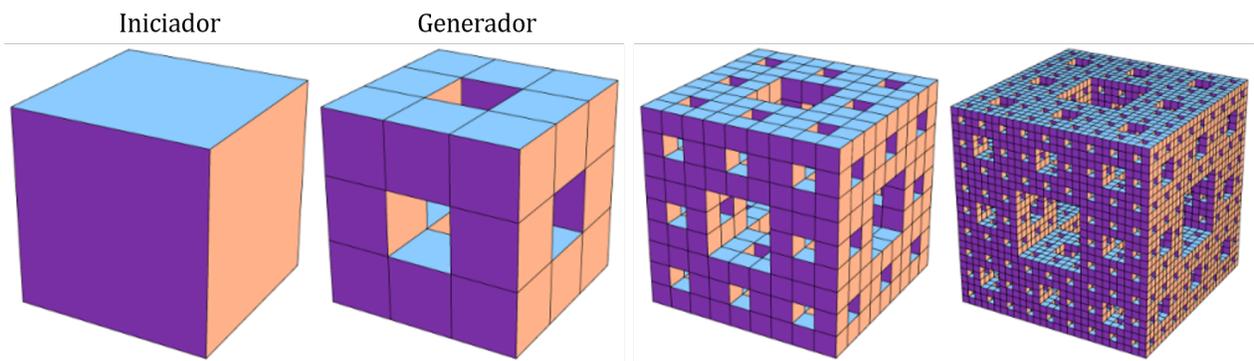


Figura 1.8: Construcción de la esponja de Menger [22].

1.7.2. Fractales naturales

Los fractales naturales, también llamados pre-fractales o fractales físicos, se diferencian de los matemáticos en que no son exactamente autosimilares, sino solo en forma estadística. En geometrías naturales, como por ejemplo caracoles, ramificaciones de árboles y plantas como helechos, se observa fractalidad dentro de un determinado rango de escala, definido por valores conocidos como límites de corte de auto-similitud superior e inferior. Fuera de estos límites, el objeto no exhibe comportamiento fractal [11]. La Figura 1.9 ilustra algunos ejemplos de fractales naturales donde es evidente la auto-similaridad estadística.

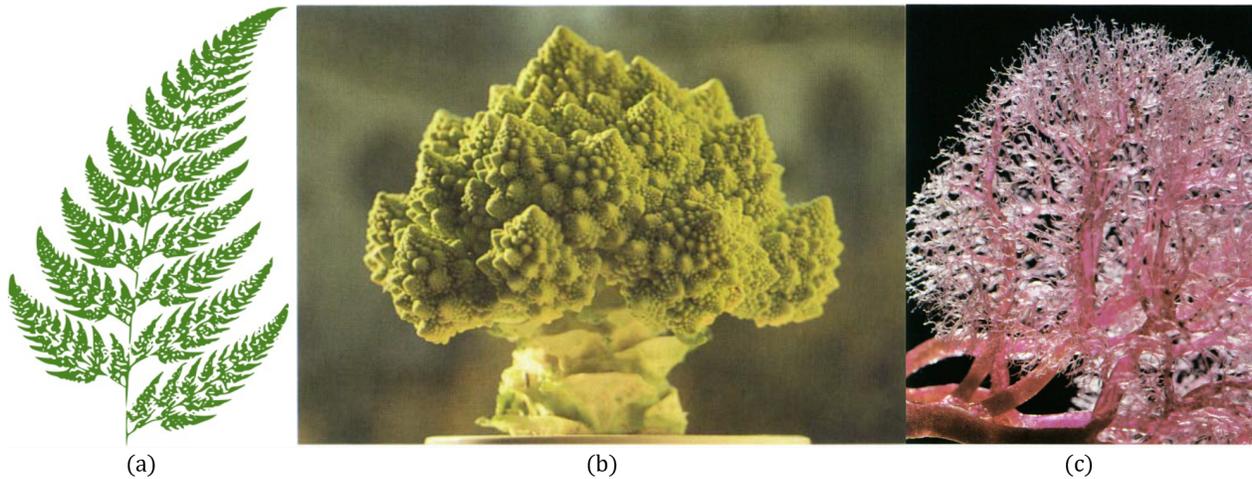


Figura 1.9: Fractales naturales: (a) un helecho cuyas hojas son auto-similares al todo [18], (b) brócoli romanesco, híbrido entre un brócoli y una coliflor y (c) sistema venoso y arterial del riñón de un niño[21].

Para finalizar, es importante mencionar que los medios que se plantean modelar en el trabajo de tesis son fractales naturales (por ejemplo, medios porosos).

Capítulo 2

Cálculo fraccionario y modelo del continuo fractal

El cálculo fraccionario es una rama del Análisis matemático que surge de una idea fundamental: al igual que una función puede derivarse o integrarse un número entero de veces, es posible hallar su derivada de orden $1/2$ o su integral π -ésima. De esta manera, surgen los operadores diferenciales e integrales de orden racional, real, complejo e incluso variable. Aunque el cálculo fraccionario dio sus primeros pasos de la mano de Leibniz a finales del siglo XVII, no fue hasta la década de los setenta del siglo pasado cuando se convirtió en objeto de conferencias especializadas, tratados y artículos académicos intensivos. Hasta tiempos recientes, la reputación del cálculo fraccionario era la de ser una teoría matemática sin aplicaciones prácticas; sin embargo, en las últimas décadas, ha experimentado una gran actividad de investigación y se ha encontrado aplicación en diversas áreas científicas [23].

De los trabajos de matemáticos como Liouville y otros, surgieron las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (1870-1884). Otras fórmulas integro-diferenciales notables incluyen la integral fraccionaria de Weyl (1917), la integral fraccionaria de Riesz (1936) y la derivada fraccionaria de Caputo (1967) [23]. Estas son solo algunas de las definiciones de operadores entre las numerosas que existen.

2.1. Algunos operadores fraccionarios

2.1.1. Operadores de Riemann-Liouville

Sea $\Omega = [a, b] (-\infty < a < b < \infty)$ un intervalo finito sobre el eje real \mathbb{R} . Las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha} f$ y $I_{b-}^{\alpha} f$ de orden $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) > 0)$ son definidas por

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0) \quad (2.1)$$

y

$$(I_{b-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b; \Re(\alpha) > 0). \quad (2.2)$$

$\Gamma(\alpha)$ representa la función Gamma (véase apéndice A). A estas integrales se les llama *integrales fraccionarias por el lado izquierdo y por el lado derecho* respectivamente. Algunas observaciones son que en la notación integral $I_a^{\alpha}f$, se especifica el límite inferior de integración a , afuera del intervalo $[a, b]$ se considera que la función se anula; es decir, que toma valor constante 0. La función Gamma Γ está definida en todo el plano complejo a excepción de los enteros negativos. De aquí, la exigencia $\Re(\alpha) > 0$.

Las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha}f$ y $D_{b-}^{\alpha}f$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ están definidas por

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \quad (2.3)$$

y

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x < b), \quad (2.4)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $\left(\frac{d}{dx} \right)^n$ es la n -ésima derivada usual. Nótese que cuando α es un número natural, se tiene $n = \alpha + 1$ y la derivada fraccionaria coincide con la derivada usual.

2.1.2. Derivada fraccionaria de Caputo

El operador diferencial de Caputo emplea condiciones iniciales de orden entero, que son físicamente interpretables, a diferencia de los operadores de Riemann-Liouville en las que surge el problema de trabajar con condiciones iniciales de orden fraccionario. Debido a esto, la definición del operador diferencial de Caputo brindó un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ y $f \in AC^n[a, b](-\infty < a < b < \infty)$ con $n = [\Re(\alpha)] + 1$ (se denota por AC^n al espacio de funciones de valor complejo $f(x)$ que tienen derivadas continuas hasta de orden $n - 1$ en $[a, b]$). La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f se define por

$$({}^C D_a^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (2.5)$$

donde $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada usual de f .

Al tratar con el cálculo de orden fraccionario surge naturalmente una pregunta: ¿cuál podría ser su significado físico? Un paso que arrojó luz sobre esta cuestión fue dado por Tarasov en el año 2005, al proponer que la integración fraccionaria podría ser considerada como una integración en algún espacio fractal [1]. Con este enfoque, resulta importante profundizar en las propiedades del espacio fractal, así como de los medios porosos fractales, con el fin de desarrollar un cálculo fraccionario aplicable a estos medios. Dichas acciones son realizadas en las siguientes secciones de este capítulo.

2.2. Propiedades fractales del medio permeable

Aquellos materiales que son porosos y/o fisurados usualmente poseen una estructura sumamente complicada que se caracteriza por tener una invarianza de escala del tipo estadística dentro de muchas escalas de longitud, que van desde la escala microscópica de poro hasta la escala de campo. Actualmente es ampliamente aceptado que estos materiales exhiben características fractales en dichas escalas. Además de la invarianza estadística, se incluye la geometría fractal del espacio de poros o redes de fracturas, la rugosidad fractal de la superficie y las distribuciones en mosaico de tamaños de poros y/o fracturas. Un medio que presente una o más de estas características se conoce como medio fractalmente permeable [24].

Desde una perspectiva matemática, un fractal puede ser caracterizado por la **dimensión métrica intrínseca** d_ℓ , conocida comúnmente como *dimensión química* o *de propagación* y lo que hace es cuantificar cómo las unidades estructurales “elementales” del fractal se “pegan” entre sí para formar al objeto fractal completo, así como determinar el número de direcciones independientes mutuamente ortogonales en él. En otras palabras d_ℓ es igual al número de coordenadas independientes que pueden ser introducidas en el espacio fractal, en este contexto la dimensión química puede considerarse como el análogo fraccionario a la dimensión topológica euclidiana. Por otra parte, las propiedades dinámicas del fractal están gobernadas por su **dimensión espectral** d_s , que ayuda a capturar cómo la estructura fractal influye en el comportamiento de los procesos de transporte. Consecuentemente, la **dimensión fractal de caminata aleatoria** describe cómo crece la trayectoria de una partícula o entidad que sigue un camino aleatorio en el espacio y es igual a $d_W = 2d_\ell/d_s$ [24].

Al introducir un fractal con dimensión química d_ℓ en el espacio euclidiano E^n de dimensión n ($d_\ell < n$), puede ser caracterizado por la **dimensión métrica** D , asociada a una medida euclidiana apropiada, y a la dimensión fractal de las líneas geodésicas d_{min} , conocida también como **dimensión de ruta mínima**. Dichas dimensiones están relacionadas con la dimensión química como $D = d_{min}d_\ell$, mientras que la dimensión de caminata aleatoria sobre el fractal

incrustado en E^n es $D_W = 2D/d_s = 2d_\ell d_{min}/d_s = 2 + \theta$, donde θ es el exponente de difusión anómala [24] [25].

Es importante mencionar que las definiciones matemáticas de D surgen del concepto de un fractal cubierto por esferas o cubos de tamaño ℓ , que en muchos casos, la cantidad de elementos de cobertura (cubos o esferas) escala con ℓ de la forma $N(\ell) \propto \ell^D$, tal y como sucede en el método de conteo de cajas (sección 1.5.4). Con estos conceptos se pueden modelar los fractales naturales, como los medios porosos, que muestran el comportamiento de escala solamente en el intervalo acotado de escala de longitud $\ell_0 < \ell < \xi$, donde ℓ_0 y ξ son los límites de corte inferior y superior del comportamiento fractal, respectivamente [24]. Consecuentemente, se dice que las definiciones de dimensiones fractales para sistemas reales se basan en algún tipo de cuasi-medida fractal y no en una medida métrica estricta.

2.2.1. Ley de potencia de masa

La dimensión fractal de un fractal físico se suele relacionar con cómo su masa depende del tamaño característico de cualquier parte de él. Esta relación sigue una ley de potencia, donde la masa de una fracción $m(L)$ varía en función de su tamaño $L \gg \ell_0$ y puede expresarse matemáticamente como:

$$m(L) = m_0(L/\ell_0 + 1)^D \quad (2.6)$$

donde m_0 es una constante de proporcionalidad, ℓ_0 es el límite de corte inferior y D es la dimensión fractal de masa. Sin embargo, fractales con una misma dimensión fractal de masa pueden tener distintas dimensiones químicas, espectrales y de ruta mínima, por lo que al especificar estas tres dimensiones fraccionarias independientes se tiene bien definido al medio por modelar [24].

2.3. Homogeneización de medios fractales por medio de regularización dimensional

La regularización dimensional es un método de homogeneización que facilita el desarrollo de leyes de balance para fractales al transformar integrales fraccionarias sobre conjuntos fractales en integrales continuas equivalentes sobre conjuntos euclidianos, simplificando así su análisis matemático y computacional. Dicha transformación se realiza al emplear un producto de medida [26]. Este enfoque, propuesto inicialmente por Tarasov, permite trasladar problemas de mecánica en medios fractales al espacio euclidiano en el que se encuentran contenidos, de tal forma que él desarrolló ecuaciones continuas para la conservación de masa,

momento lineal y energía en fractales, y estudió diversos problemas de mecánica de fluidos y ondas [1][27][28].

Tarasov empleó una integral fraccionaria (de tipo Riesz) para representar la masa en una región W incrustada en el espacio euclidiano tridimensional E^3

$$m(W) = \int_W \rho(R) dV_D = \int_W \rho(R) c_3(D, R) dV_3, \quad (2.7)$$

con

$$c_3(D, R) = R^{D-3} 2^{3-D} \Gamma(3/2) / \Gamma(D/2), \quad R = \sqrt{x_i x_i},$$

siendo R la longitud de escala de medición (o resolución), D la dimensión fractal de masa y Γ es la función Gamma. La primera y la segunda igualdad en la ecuación (2.7) involucran una integral fraccionaria y una integral convencional, respectivamente, y el coeficiente $c_3(D, R)$ da la transformación entre ambas. Por otro lado, dV_D es un elemento de volumen infinitesimal en el espacio fractal, mientras que dV_3 es un elemento de volumen infinitesimal en E^3 .

Además de c_3 , definió los coeficientes de transformación en su forma de Riesz:

$$c_2(d, R) = R^{d-2} \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)},$$

$$c(D, d, R) = c_3^{-1}(D, R) c_2(d, R),$$

con los cuales desarrolló los siguientes operadores o derivadas generalizadas:

$$\nabla_k^D f = c_3^{-1}(D, R) \frac{\partial}{\partial x_k} [c_2(d, R) f] \equiv c_3^{-1}(D, R) \nabla_k [c_2(d, R) f] \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D f = \frac{\partial f}{\partial t} + c(D, d, R) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (2.9)$$

Sin embargo, es importante señalar que este modelo de continuo fractal presenta ciertas contradicciones, especialmente en relación con la definición inconsistente de la derivada temporal material y el jacobiano para las transformaciones entre las configuraciones inicial y actual en el continuo fractal. Además, surgen otras inconsistencias debido a la ambigüedad en la definición de sus operadores diferenciales fraccionarios [29].

Apoyándose en los trabajos de Tarasov, los autores Li y Ostojica [30] [26] y, posteriormente, Balankin [24], desarrollaron operadores y ecuaciones específicas para medios fractales. Este trabajo en particular, se fundamenta en los operadores de un modelo autoconsistente del continuo fractal de Balankin, que son esencialmente equivalentes a los propuestos por Ostojica. La siguiente sección describe el modelo desarrollado por Balankin.

2.4. El modelo del continuo fractal

Un medio continuo es un conjunto infinito de partículas que se estudia macroscópicamente sin tener en cuenta posibles discontinuidades a nivel microscópico. Por lo tanto, se asume que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas [31]. En términos generales, los medios fractales no pueden considerarse como medios continuos debido a la presencia de puntos y dominios que están vacíos. En el caso de medios fractales reales, a estos dominios se les conoce como poros. No obstante, es posible considerar un medio fractal como un medio continuo a escalas mucho mayores que el valor medio del tamaño de poro R_p [1].

El enfoque del continuo fractal tiene como objetivo representar un medio fractal, intrínsecamente discontinuo, dentro del modelo de continuo fractal, permitiendo así que su comportamiento sea descrito en un marco continuo. En términos estrictos, un fractal Φ_D de dimensión D , donde $D < 3$, no puede llenar de manera continua el espacio euclidiano E^3 en el que está inmerso. A pesar de ello, es posible definir al continuo fractal tridimensional $\Phi_D^3 \subset E^3$ como una región del espacio euclidiano E^3 llena de materia continua (sin poros ni espacios vacíos) de tal forma que propiedades como la densidad $\rho(x_i)$, desplazamientos $v_j(x_i)$, entre otras, sean descritas por funciones continuas y diferenciables respecto a variables tanto espaciales como de tiempo [29]. Aun así, esta definición no aporta información de la topología y propiedades dinámicas del continuo fractal, ya que, en su formulación se asume que el continuo fractal Φ_D^3 está caracterizado por una dimensión química $d_\ell = 3$ y por dimensión espectral $d_s = D$, de tal forma que $\Phi_D^3 = \frac{D}{3}\Phi_D^3$. Para tomar en cuenta la métrica fractal, la topología y las propiedades dinámicas del medio fractal Φ_D modelado, uno puede definir al continuo fractal tridimensional generalizado $\frac{d_s}{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$ para cualquier valor de d_ℓ y d_s .

2.4.1. Métrica fractal del continuo fractal

La definición establecida del continuo fractal $\Phi_D^3 \subset E^3$ implica que la masa de una región tridimensional $W \subset \Phi_D^3$ que ocupa el volumen V_3 en E^3 se define como:

$$m = \int_W \rho(x_i) dV_D = \int_W \rho(x_i) c_3(x_i, D) dV_3 \propto L^D, \quad (2.10)$$

donde $\rho(x_i)$ es la *densidad de masa* dependiente de tres coordenadas espaciales, $dV_3(dx_i)$ es un elemento de volumen infinitesimal en E^3 , mientras que $dV_D = c_3(x_i, D)dV_3$ es un *elemento de volumen infinitesimal del continuo fractal* $\Phi_D^3 \subset E^3$, de tal forma que la función que proporciona la transformación entre el espacio euclidiano y el espacio fractal se define

como:

$$c_3(x_i, D) = \frac{dV_D}{dV_3}. \quad (2.11)$$

Físicamente, la función $c_3(x_i, D)$ actúa como una *densidad de estados en el continuo fractal*, es decir, describe cómo los estados permitidos de las partículas que forman el continuo fractal están densamente distribuidos en el espacio euclidiano [24].

En lo que respecta al elemento de volumen infinitesimal del continuo fractal dV_D , puede ser representado por:

$$dV_D = dl_{\alpha_1}(x_1)dl_{\alpha_2}(x_2)dl_{\alpha_3}(x_3) = c_1^{(1)}c_1^{(2)}c_1^{(3)}dx_1dx_2dx_3 = c_3dV_3, \quad (2.12)$$

donde $c_3 = c_1^{(1)}c_1^{(2)}c_1^{(3)}$. Cada $dl_{\alpha_k}(x_k)$ representa un elemento de longitud infinitesimal del continuo fractal, mientras que cada dx_k es un elemento de longitud infinitesimal del espacio euclidiano y la transformación entre ambos es realizada por los coeficientes de transformación de longitud $c_1^{(k)}$, de modo que

$$dl_{\alpha_k}(x_k) = c_1^{(k)}(\alpha_k, x_k)dx_k, \quad k = 1, 2, 3 \text{ (no sumatoria)}. \quad (2.13)$$

Cada α_k ($0 < \alpha_k \leq 1$) juega el papel de una dimensión fractal en la dirección x_k , lo cual implica que $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, a lo largo de las diagonales $|x_1| = |x_2| = |x_3|$ [26].

Para definir el coeficiente de transformación de superficie $c_2^{(k)}$, se considera un elemento de volumen cúbico $dV_3 = dx_1dx_2dx_3$, como se ilustra en la Figura 2.1, cuyos elementos de superficie son especificados por el vector normal a lo largo de los ejes i, j, k .

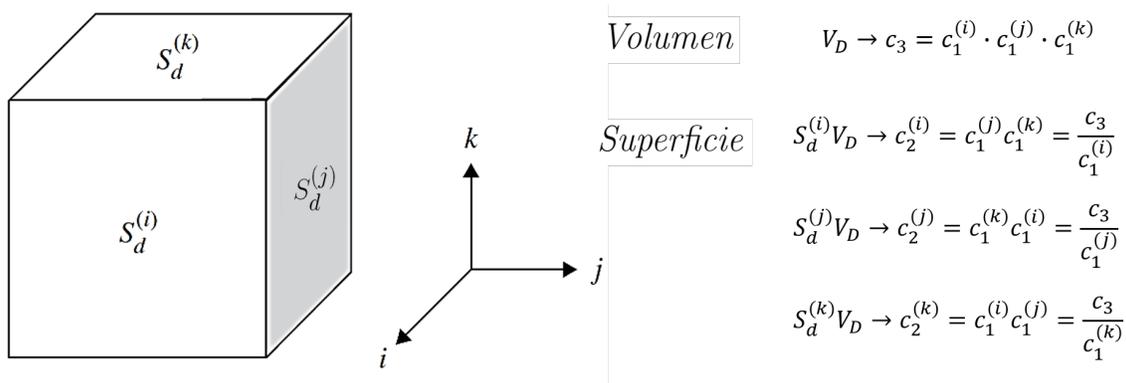


Figura 2.1: Funciones de los coeficientes de transformación $c_1^{(i)}$, $c_2^{(k)}$ y c_3 en la homogeneización de un objeto fractal con volumen dV_D , superficie dS_d y longitudes dl_{α} , al convertirlo en un paralelepípedo euclidiano con volumen dV_3 , superficie dS_2 y longitud dx [26][30].

Como resultado, el coeficiente $c_2^{(k)}$ asociado con la superficie $S_d^{(k)}$ es:

$$c_2^{(k)} = c_1^{(i)} c_1^{(j)} = c_3/c_1^{(k)}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq k. \quad (2.14)$$

Ahora bien, las dimensiones fractales de intersecciones con el plano cartesiano son definidas como $d_k = \sum_{i \neq k}^2 \alpha_i$. Para el caso de un fractal isotrópico ($\alpha_i = \alpha$ para toda i) se espera que $D = 3\alpha$ y $d_k = 2\alpha = (2/3)D$. En cambio, cuando se trata de fractales anisotrópicos, usualmente D y d_k son características independientes. Así pues, al elemento de volumen infinitesimal de Φ_D^3 se le puede presentar con mayor generalidad como:

$$dV_D = d^\zeta x_k dA_d^{(k)}(x_{i \neq k}), \quad (2.15)$$

donde $dA_d^{(k)} = c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, d_k) dA_2^{(k)}$ es el elemento de área infinitesimal sobre la intersección del continuo fractal con el plano cartesiano $(x_i, x_j) \in E^2$ normal al eje k en Φ_D^3 , en tanto que $dA_2^{(k)}$ es el área infinitesimal de este elemento en E^2 , y la función de transformación $c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k) = dA_d^{(k)}/dA_2^{(k)}$ representa la densidad de estados sobre la intersección; por otra parte $d^\zeta x_k = c_1^{(k)}(x_k, \zeta_k) dx_k$ es el elemento de longitud infinitesimal a lo largo de la normal a la intersección y $c_1^{(k)}(x_k, \zeta_k)$ es la densidad de estados a lo largo de esta normal [29].

En el caso del continuo fractal *homogéneo*

$$\rho(x_i) = \rho_c = \text{const}, \quad (2.16)$$

y tomando en cuenta a las ecuaciones (2.11) y (2.15) se tiene que la densidad de estados del continuo fractal homogéneo puede ser representada de la forma:

$$c_3(x_i, D) = \ell_k^{\zeta_k - 1} (x_k/\ell_k + 1)^{\zeta_k - 1} c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k), \quad (2.17)$$

donde ℓ_i es el *límite de corte inferior* a lo largo del eje cartesiano i y el *exponente de escala* ζ_k que caracteriza la densidad de estados a lo largo de la dirección de la normal a la intersección se define como:

$$\zeta_k = D - d_k, \quad (2.18)$$

tal que, generalmente,

$$\sum_i^3 = \zeta_i \neq D. \quad (2.19)$$

El conjunto de ecuaciones (2.10), (2.11), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18) definen la métrica

fractal del continuo fractal, que es independiente de las dimensiones fractales d_ℓ y d_s . En consecuencia, se asume que los continuos fractales ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$ con diferentes dl y ds se caracterizan por la misma métrica fractal definida por el conjunto de ecuaciones mencionado, mientras que la topología y la dinámica del continuo fractal están determinadas por dl y ds , respectivamente [29][24].

2.4.2. Cálculo fraccionario en el continuo fractal

Para describir la cinemática y dinámica de los continuos fractales ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$, es necesario definir un cálculo fraccionario adecuado, vinculado a la métrica fractal definida por las ecuaciones (2.10), (2.11), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18) y que tenga en cuenta la topología y las propiedades dinámicas en el continuo fractal. Aunque los operadores diferenciales fraccionarios no locales son comúnmente empleados en fractales debido a la no diferenciabilidad de sus funciones, en el continuo fractal ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$ esto no es necesario, ya que sus propiedades se describen mediante funciones diferenciables en el espacio euclidiano E^3 . Esto permite el uso de operadores diferenciales locales, inversos de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville utilizada en la definición del continuo fractal.

Existen diversas definiciones de derivadas fraccionarias locales $d^\alpha f/dx^\alpha$, muchas de ellas son introducidas como un caso especial de derivadas fraccionarias no locales. A pesar de que la derivada fraccionaria local se define de tal forma que es automáticamente inversa a su correspondiente integral fraccionaria, la expresión de los operadores fraccionarios locales asociados en términos de derivadas ordinarias suele ser complicada y no siempre existe [24].

A modo de ejemplo, en las referencias [32][33] se presenta al operador Laplaciano local en E^n generalizado para el espacio euclidiano E^α con dimensión topológica fraccionaria α . En [32] se define al operador Laplaciano fraccionario local en E^α como:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{D-2}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right], \quad (2.20)$$

donde el ángulo ϑ es una medida relativa a cualquier eje que pase a través del origen en el espacio fraccionario. La generalización de esta definición a tres coordenadas ortogonales es

$$\nabla_D^2 = \sum_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i - 1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (2.21)$$

siendo $\alpha_i \leq 1$ los exponentes topológicos a lo largo de los ejes $i = 1, 2, 3$ en E^3 , de tal forma que $\sum_i^3 \alpha_i = \alpha \leq 3$. La importancia de este Laplaciano generalizado reside en que puede ser vinculado a la topología del continuo fractal ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$ caracterizado por la dimensión

química d_ℓ , así como por la métrica fractal definida en la sección 2.4.1.

No obstante, el cálculo fraccionario que se empleará en este trabajo de tesis parte del concepto de la derivada de Hausdorff, introducido en [34], donde se le define como:

$$\frac{d^H}{dx^\zeta} f = \lim_{x \rightarrow x'} \frac{f(x') - f(x)}{x'^\zeta - x^\zeta}. \quad (2.22)$$

A la ecuación (2.22) se le puede representar en la forma de una derivada ordinaria multiplicada por una función de la ley de potencia de x , de modo que sea reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^H}{dx^\zeta} f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\zeta \Delta f(x)}{\ell_0 \Delta (x/\ell_0 + 1)^\zeta} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \frac{\zeta}{\ell_0 \Delta (x/\ell_0 + 1)^\zeta / \Delta x} \\ &= \zeta \ell_0^{-1} \left[\frac{d(x/\ell_0 + 1)^\zeta}{dx} \right]^{-1} \frac{d}{dx} f \\ &= \left(\frac{x}{\ell_0} + 1 \right)^{1-\zeta} \frac{d}{dx} f = \frac{\ell_0^{\zeta-1}}{c_1} \frac{d}{dx} f = \frac{d}{d^\zeta x} f. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Esta derivada de Hausdorff (2.23) es inversa a la integral fraccionaria $\int f d^\zeta x = \int f c_1 dx$, donde c_1 es la densidad de estados a lo largo del eje x definida como en la ecuación (2.17). Esto deriva en que la derivada parcial fraccionaria (de Hausdorff) sea definida de la forma

$$\nabla_k^H = \left(\frac{x_k}{\ell_k} + 1 \right)^{1-\zeta_k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (2.24)$$

donde los exponentes ζ_k están definidos por la ecuación (2.18). Entonces, el Laplaciano fraccionario para el continuo fractal $\Phi_D^3 \subset E^3$ puede definirse como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta_H \psi &= \nabla_i^H \nabla_i^H \psi \\ &= \sum_i^3 (\chi^{(i)})^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde

$$\chi^{(i)} = \ell_i^{\zeta_i-1} / c_1^{(i)}(x_i) = (x_i/\ell_i + 1)^{1-\zeta_i}, \quad (2.26)$$

con los exponentes de escala ζ_i definidos también por la ecuación (2.18).

A pesar de que, tanto el Laplaciano fraccionario como el Laplaciano de Hausdorff se convierten en el Laplaciano convencional en el límite euclidiano $\zeta_i = \alpha_i = 1$, la diferencia entre ambos operadores surge de los distintos orígenes de estos, asociados con la métrica

fractal y la topología fraccionaria. Tomando en cuenta lo anterior, se introduce el Laplaciano fraccionario generalizado para el continuo fractal generalizado ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$ con dimensión química

$$d_\ell = \sum_i^3 \alpha_i = \alpha \leq 3 \quad (2.27)$$

de la siguiente manera:

$$\Delta_D^H \psi = \sum_i^3 (\chi^{(i)})^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\alpha - D + d_i}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.28)$$

la cual toma en cuenta la topología fractal, así como la métrica fractal del continuo fractal ${}_{d_\ell}^{d_s}\Phi_D^3 \subset E^3$. Es importante notar que, cuando $d_\ell = 3$, el Laplaciano generalizado (2.28) se convierte en el Laplaciano de Hausdorff (2.25), mientras que, si $D - d_i = 1$ para todo i y $d_\ell < 3$, el Laplaciano fraccionario (2.28) se convierte en el Laplaciano fraccionario generalizado a tres coordenadas ortogonales (2.21). Lamentablemente, definir una derivada fraccionaria local asociada al Laplaciano generalizado (2.28) no es posible. Por el contrario, en el caso del flujo en un continuo fractal generalizado ${}_{d_\ell}^{d_s}D \subset E^3$, es factible emplear operadores diferenciales fraccionarios locales vinculados a la métrica fractal definida en la sección 2.4.1 [29].

Es fácilmente verificable que las derivadas parciales de Hausdorff (2.24) cumplen con la regla $\nabla_i^H(\psi\varphi) = \psi\nabla_i^H\varphi + \varphi\nabla_i^H\psi$, y también $\nabla_i^H const = 0$. Más aún, es posible desarrollar los operadores fraccionarios locales (de Hausdorff) para el cálculo vectorial en el continuo fractal. El *operador nabla fraccionario* (de Hausdorff) está definido de la forma

$$\vec{\nabla}^H = \vec{e}_1 \chi^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \chi^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \chi^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2.29)$$

donde \vec{e}_i son los vectores base. Por lo tanto, aplicando el operador nabla sobre una función escalar, se define al gradiente de Hausdorff como:

$$\text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \psi = (\nabla_1^H \psi) \vec{e}_1 + (\nabla_2^H \psi) \vec{e}_2 + (\nabla_3^H \psi) \vec{e}_3. \quad (2.30)$$

La *divergencia de Hausdorff* de un campo vectorial $\vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ se puede definir como el producto escalar

$$\text{div}_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\Psi} = \sum_i^3 \nabla_i^H \Psi_i, \quad (2.31)$$

en donde el símbolo “.” denota al producto escalar. Esta divergencia de Hausdorff repre-

senta la razón del flujo total a través de una superficie cerrada del continuo fractal contenido dentro de dicha superficie cuando el volumen tiende a ℓ_0^3 , lo cual conduce a la definición del *operador rotacional de Hausdorff* para un campo vectorial en la siguiente forma:

$$\text{rot}_H = \vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi}, \quad \text{ó} \quad \nabla_i^H = \varepsilon_{kij} \nabla_i^H \Psi_j, \quad (2.32)$$

con el símbolo “ \times ” denotando el producto vectorial y ε_{kij} siendo el símbolo de Levi-Civita.

Los operadores de Hausdorff también cumplen con las identidades del cálculo vectorial convencional

$$\text{div}_H \text{rot}_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \cdot (\vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi}) = 0, \quad (2.33)$$

$$\text{rot}_H \text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \times (\vec{\nabla}^H \psi) = 0, \quad (2.34)$$

$$\text{div}_H \text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\nabla}^H \psi = \Delta_H \psi, \quad (2.35)$$

donde el operador Laplaciano de Hausdorff Δ_H está definido por la ecuación 2.25. El Laplaciano de Hausdorff de un campo vectorial se define como:

$$\begin{aligned} \Delta_H \vec{\Psi} &= (\Delta_H \psi_i) \vec{e}_1 + (\Delta_H \psi_j) \vec{e}_2 + (\Delta_H \psi_k) \vec{e}_3 \\ &= \text{grad}_H \text{div}_H \vec{\Psi} - \text{rot}_H \text{rot}_H \vec{\Psi}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por otro lado, el teorema de la divergencia de Gauss también se cumple:

$$\int_A \vec{\Psi} \cdot \hat{n} dA_d = \int_W \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\Psi} dV_d, \quad (2.37)$$

en donde $\vec{\Psi} = \Psi_k \vec{e}_k$ representa un vector de campo cualquiera y $\hat{n} = n_k \vec{e}_k$ es un vector normal. A su vez, también el teorema de Stokes se conserva

$$\oint_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{x}^{(c)} = \int_A \hat{n} \cdot \vec{\nabla}^H \times \vec{f} dA_d. \quad (2.38)$$

Capítulo 3

Método del elemento finito

Existe una amplia variedad de métodos desarrollados para obtener soluciones exactas para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, no siempre es posible aplicar estos métodos en problemas prácticos debido a que las ecuaciones no pertenecen a cierta clase o involucran geometrías complejas. Por lo tanto, encontrar soluciones analíticas que cumplan con las condiciones de frontera en regiones arbitrarias, ya sea en 2 o 3 dimensiones, se convierte en una tarea realmente difícil. Por estas razones y otras, los métodos numéricos son ampliamente utilizados para resolver problemas prácticos en todas las ramas de la ingeniería. De esta manera, el Método del Elemento Finito (MEF) se ha convertido en uno de los métodos numéricos más destacados para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales, tanto parciales como ordinarias. El MEF es de gran utilidad cuando se tienen condiciones de frontera definidas en geometrías complejas [5].

Es evidente que también existen otros métodos numéricos, como el de diferencias finitas o el método de elementos de contorno, que pueden competir e incluso superar al método del elemento finito en ciertos tipos de problemas. No obstante, el elemento finito tiene una gran versatilidad en el manejo de dominios arbitrarios, respaldado por una amplia gama de software comercial sofisticado basado en él, razón por la cual el MEF es uno de los métodos predilectos para abordar muchos problemas prácticos [5].

Los pasos involucrados en la aplicación del método del elemento finito son:

1. Discretización de un dominio de solución en un conjunto de elementos finitos: Identificación y definición del dominio del problema, estableciendo las condiciones de contorno y los parámetros relevantes. Construcción del mallado de elementos finitos preseleccionados. Numerar nodos y elementos. Generar las propiedades geométricas necesarias para el problema. Este paso puede ser pospuesto hasta haber completado la formulación de elemento finito de la ecuación.

2. Derivación de las ecuaciones para cada elemento de la malla: Construcción de la formulación variacional de la ecuación diferencial sobre cada elemento típico.
3. Ensamble de las ecuaciones de elementos para obtener las ecuaciones del problema entero: Identificar las condiciones de continuidad entre variables primarias para relacionar nodos de elementos a nodos globales. Identificar condiciones de equilibrio entre variables secundarias. Ensamblar.
4. Introducción de las condiciones de frontera del problema: Identificar los grados de libertad globales primarios y secundarios especificados.
5. Solución de las ecuaciones ensambladas.
6. Procesamiento de los resultados y relación de cantidades sobre cada elemento.

La idea central del MEF es discretizar el dominio de solución en partes más simples llamadas elementos. Las soluciones aproximadas se obtienen sobre puntos seleccionados llamados nodos, que son los vértices de los elementos. El resultado de este proceso es un extenso sistema de ecuaciones que debe resolverse para determinar las variables nodales específicas.

Desde una perspectiva matemática, el Método del Elemento Finito (MEF) constituye una variante especial de los métodos de Galerkin y el método de Rayleigh-Ritz. En ambos métodos, la ecuación diferencial a resolver se convierte a su forma integral equivalente, pero el tratamiento difiere en cada enfoque:

- En el Método de Rayleigh-Ritz, se recurre al cálculo variacional para definir un funcional variacional o de energía equivalente. La solución de la ecuación diferencial será una función que minimice dicho funcional.
- El Método de Galerkin propone una solución aproximada con uno o más parámetros desconocidos, que no satisfacen la ecuación diferencial. La forma integral representa el residuo obtenido al integrar el error sobre el dominio de la solución. Al utilizar un criterio adoptado para minimizar el residuo, se obtienen ecuaciones para encontrar los parámetros desconocidos.

Ambos métodos tienen dos categorías de condiciones de frontera: las *Condiciones de Frontera Esenciales*, que deben cumplirse explícitamente, y las *Condiciones de Frontera Naturales*, que se incorporan en la formulación integral. En términos generales, las soluciones aproximadas no cumplirán exactamente con las Condiciones de Frontera Naturales [35].

3.1. Formulación débil

En dos dimensiones, para el desarrollo de la formulación débil solamente es necesario considerar un elemento típico arbitrario. Asumiendo que Ω^e es dicho elemento (que en el caso más sencillo se toma un elemento triangular) de la malla de elementos finitos, el desarrollo de la formulación débil sobre Ω^e se trata de multiplicar la ecuación diferencial a discretizar por una función de peso w , la cual es diferenciable respecto a x y y , después de esto se procede a integrar la ecuación resultante sobre todo el dominio del elemento Ω^e . De esta manera, se tiene la siguiente expresión para una ecuación diferencial de segundo orden dependiente del tiempo:

$$\int_{\Omega^e} w \left[A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y, t) \right] dS = 0. \quad (3.1)$$

Al distribuir las integrales, se tiene:

$$\int_{\Omega^e} w A \frac{\partial u}{\partial t} dS + \int_{\Omega^e} w B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dS + \int_{\Omega^e} w C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dS - \int_{\Omega^e} w f(x, y, t) dS = 0. \quad (3.2)$$

La segunda y tercer integral se pueden resolver por partes aplicando la identidad:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.3)$$

De esta manera y agrupando ambas integrales, la ecuación (3.2) resulta en:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} w A \frac{\partial u}{\partial t} dS + \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dS \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} w f(x, y, t) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por otra parte, del teorema de la divergencia se tienen las identidades

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) dS = \oint_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial x} n_x dl \quad (3.5)$$

y

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) dS = \oint_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial y} n_y dl, \quad (3.6)$$

donde n_x y n_y son las componentes del vector $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} = \text{Cos}(\alpha) \hat{i} + \text{Sen}(\alpha) \hat{j}$ normal a la frontera de Γ^e .

Empleando las identidades (3.5) y (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} w A \frac{\partial u}{\partial t} dS + \oint_{\Gamma^e} \left[B w \frac{\partial u}{\partial x} n_x + C w \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} w f(x, y, t) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al emplear el método de residuos ponderados de Galerkin se requiere que las funciones de peso w sean las funciones de forma o de interpolación, es decir $w = N_i$, con esto la ecuación (3.7) resulta en

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} N_i A \frac{\partial u}{\partial t} dS + \oint_{\Gamma^e} \left[B N_i \frac{\partial u}{\partial x} n_x + C N_i \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} N_i f(x, y, t) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La propuesta de solución se puede expresar de la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) N_j^e(x, y) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & \cdots & N_n(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}, \quad (3.9)$$

donde \mathbf{N}^T es el vector transpuesto que contiene las funciones de forma y \mathbf{u} el vector de las soluciones nodales en un tiempo t . Posteriormente se obtienen las derivadas parciales de la propuesta de solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} N_1(x, t) & N_2(x, t) & \cdots & N_n(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (3.12)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12) en (3.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} AN_i \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}} dS + \oint_{\Gamma^e} [BN_i \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} n_x + CN_i \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} n_y] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial N_i}{\partial x} \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} + C \frac{\partial N_i}{\partial y} \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} \right] dS - \int_{\Omega^e} N_i f(x, y, t) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) se emplea para cada N_i , de tal forma que se tendrán n ecuaciones. Así es como se obtiene la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{u}} \int_{\Omega^e} ANN^T dS + \mathbf{u} \oint_{\Gamma^e} [BN\mathbf{B}_x^T n_x + CN\mathbf{B}_y^T n_y] dl - \\ & \mathbf{u} \int_{\Omega^e} [B\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + C\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T] dS - \int_{\Omega^e} \mathbf{N} f(x, y, t) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Al escribir las integrales de la forma

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega^e} ANN^T dS, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{L} = \oint_{\Gamma^e} [BN\mathbf{B}_x^T n_x + CN\mathbf{B}_y^T n_y] dl - \int_{\Omega^e} [B\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + C\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T] dS, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N} f(x, y, t) dS. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.14) queda de la siguiente forma:

$$[\mathbf{M}] \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{L}] \mathbf{u} = \mathbf{K}. \quad (3.18)$$

A la ecuación (3.18) se le conoce como la ecuación del elemento maestro, que es empleada para ensamblar cada uno de los elementos del sistema que fue discretizado.

3.2. Funciones de forma para elementos triangulares

Un elemento triangular lineal tiene un nodo en cada vértice, siendo así tres nodos por elemento, como se muestra en la Figura 3.1. Cada nodo debe ser etiquetado, para este caso

se hará en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Los valores nodales en los vértices del triángulo son u_1 , u_2 y u_3 . Las coordenadas de dichos nodos son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , respectivamente.

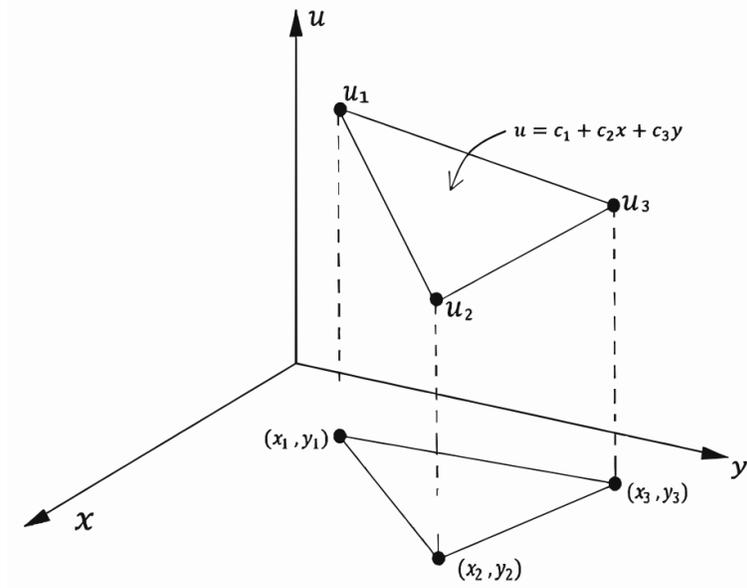


Figura 3.1: Parámetros de un elemento triangular lineal [36]

La función de interpolación de un elemento triangular es:

$$u = c_1 + c_2x + c_3y. \quad (3.19)$$

Para los tres nodos se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Resolviendo para las constantes c_1 , c_2 y c_3 se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De esta manera el valor de las constantes c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) u_1 + (x_3y_1 - x_1y_3) u_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) u_3], \quad (3.22)$$

$$c_2 = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3) u_1 + (y_3 - y_1) u_2 + (y_1 - y_2) u_3], \quad (3.23)$$

$$c_3 = \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2) u_1 + (x_1 - x_3) u_2 + (x_2 - x_1) u_3]. \quad (3.24)$$

Donde $2A = (x_2y_3 - x_3y_2) + x_1(y_3 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) \neq 0$. Esto implica que la transformación (3.20) es invertible. Sustituyendo el valor de las constantes c_1 , c_2 y c_3 en la función de interpolación (3.19) se obtiene:

$$u = \frac{1}{2A} [[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] u_1 \\ + [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] u_2 \\ + [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] u_3]. \quad (3.25)$$

Igualando la solución propuesta (3.9) con (3.25) tenemos

$$N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 = \frac{1}{2A} [[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] u_1 \\ + [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] u_2 \\ + [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] u_3]. \quad (3.26)$$

De esta manera, se tiene que las funciones de forma para un elemento triangular son:

$$N_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (3.27)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \quad (3.28)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]. \quad (3.29)$$

Al hacer los cambios de variable siguientes:

$$\begin{aligned} A_{10} &= x_2y_3 - x_3y_2, & A_{11} &= y_2 - y_3, & A_{12} &= x_3 - x_2 \\ A_{20} &= x_3y_1 - x_1y_3, & A_{21} &= y_3 - y_1, & A_{22} &= x_1 - x_3 \\ A_{30} &= x_1y_2 - x_2y_1, & A_{31} &= y_1 - y_2, & A_{32} &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Las funciones de forma o funciones de interpolación en una forma matricial para el caso

particular de un elemento triangular bidimensional quedan como:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Capítulo 4

Desarrollo del problema

4.1. Ecuación diferencial de conducción de calor bidimensional transitoria sin generación de calor de orden fraccionario

Para comenzar con el tratamiento matemático lo primero es cambiar los operadores diferenciales cotidianos de la ecuación (1.14), que es la ecuación de conducción de Fourier bidimensional sin generación de calor en estado transitorio. Empleando el cálculo de orden fraccionario, a continuación se plantea la ecuación de conducción de calor fraccionaria en contraste con la ecuación de conducción convencional:

Orden entero		Orden fraccionario
$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}$	\longrightarrow	$\frac{\partial^\alpha T(x, y, t)}{\partial x_i^\alpha} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}$

El valor de $a = k/\rho c$ es la *difusividad térmica del material*, T es la temperatura en determinado punto del espacio bidimensional y de tiempo, mientras que α es el orden fraccionario de derivada con respecto a la posición. Esta ecuación de conducción de calor de orden fraccionario requeriría de un tratamiento matemático complicado para hallar su solución analítica, si es que existe. Por lo tanto, para resolver esta ecuación se ha elegido encontrar su solución numérica con ayuda del método del elemento finito, el cual permite discretizar al medio en pequeños elementos. Esta discretización se realiza mediante elementos triangulares lineales en dos dimensiones, empleando el método de residuos ponderados de Galerkin.

4.2. Elemento maestro

Para obtener el elemento maestro de la ecuación de conducción de calor fraccionaria mostrada en la ecuación (1.14) comenzamos reescribiéndola de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla}^2 T(x, y, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Lo siguiente es reemplazar el Laplaciano ordinario por el Laplaciano fraccionario del continuo fractal definido en la ecuación (2.25), obteniendo $\vec{\Delta}_H T = \sum_{i=1}^2 (\chi^{(i)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{1-\zeta_i}{x_i+\ell_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right]$ donde $\chi^{(i)} = \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{1-\zeta_i}$. Con esto, la ecuación de conducción de calor fraccionaria para el caso bidimensional y sin generación de calor queda como:

$$\sum_{i=1}^2 (\chi^{(i)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{1-\zeta_i}{x_i+\ell_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$(\chi^{(x)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + (\chi^{(y)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Lo que es igual a

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a (\chi^{(x)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} \right] - a (\chi^{(y)})^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0. \quad (4.4)$$

Distribuyendo y volviendo a agrupar términos de la ecuación (4.4) obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\chi^{(y)})^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] - a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} - a \chi^{(x)} \chi^{(y)} \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] \\ & - a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Procedemos a aplicar el método de residuos ponderados de Galerkin.

$$\begin{aligned} & \int_S w \frac{\partial T}{\partial t} dS_D - \int_S w a \chi^{(x)} \chi^{(y)} \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] dS_D \\ & - \int_S w a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dS_D = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es necesario que las funciones de peso w sean las funciones de interpolación de forma que

$w = N_i$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_S N_i \frac{\partial T}{\partial t} dS_D - \int_S N_i a (\chi^{(x)} \chi^{(y)}) \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] dS_D \\ - \int_S N_i a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1 - \zeta_x}{x + \ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1 - \zeta_y}{y + \ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dS_D = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ahora, con ayuda del coeficiente de transformación de superficie c_2 se realiza el cambio del diferencial fraccionario de superficie dS_D por el diferencial convencional de superficie dS_2 , tal que $dS_D = c_2 dS_2$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \int_S N_i \frac{\partial T}{\partial t} c_2 dS_2 - \int_S N_i a (\chi^{(x)} \chi^{(y)}) \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] c_2 dS_2 \\ - \int_S N_i a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1 - \zeta_x}{x + \ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1 - \zeta_y}{y + \ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] c_2 dS_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Lo siguiente es obtener la solución de la segunda integral que compone la ecuación (4.9), para ello, esta segunda integral será reescrita como

$$\int_S N_i a \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] (\chi^{(x)} \chi^{(y)} c_2) dS_2, \quad (4.10)$$

De las ecuaciones (2.14) y (2.26) se tiene que $c_2^{(k)} = c_1^{(i)} c_1^{(j)}$ y que $\chi^{(i)} = (x_i/\ell_i + 1)^{1-\zeta_i} = \ell_i^{\zeta_i-1}/c_1^{(i)}(x_i)$, por lo tanto:

$$\chi^{(x)} \chi^{(y)} c_2 = \ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{\zeta_y-1} \equiv \beta,$$

Al aplicar el cambio en la ecuación (4.10) se obtiene

$$\int_S N_i a \beta \left[\frac{\chi^{(x)} \partial^2 T}{\chi^{(y)} \partial x^2} + \frac{\chi^{(y)} \partial^2 T}{\chi^{(x)} \partial y^2} \right] dS_2. \quad (4.11)$$

Para resolver esta integral, se aplicará el método de integración por partes como se ilustra en la sección 3.1, con los cambios de variable:

$$u_j = N_i a \beta \frac{\chi^{(j)}}{\chi^{(k)}} \text{ y } dv_j = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}.$$

De esta manera:

$$du_j = \frac{a\beta}{\chi^{(k)}} \left[\chi^{(j)} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} + N_i \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial x_j} \right] = \frac{a\beta}{\chi^{(k)}} \left[\chi^{(j)} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} + N_i \frac{(1 - \zeta_j)}{\ell_j} \left(\frac{x_j}{\ell_j} + 1 \right)^{-\zeta_j} \right]$$

$$\text{y } v_j = \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Al realizar la integración, se llega a

$$\begin{aligned}
\int_S N_i a \beta \left[\frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] dS_2 &= \oint N_i a \beta \frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} \frac{\partial T}{\partial x} n_x dl \\
&\quad - \int \frac{a \beta}{\chi^{(y)}} \left[\chi^{(x)} \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_i \frac{(1 - \zeta_x)}{\ell_x} \left(\frac{x}{\ell_x} + 1 \right)^{-\zeta_x} \right] \frac{\partial T}{\partial x} dS_2 \\
&\quad + \oint N_i a \beta \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} \frac{\partial T}{\partial y} n_y dl \\
&\quad - \int \frac{a \beta}{\chi^{(x)}} \left[\chi^{(y)} \frac{\partial N_i}{\partial y} + N_i \frac{(1 - \zeta_y)}{\ell_y} \left(\frac{y}{\ell_y} + 1 \right)^{-\zeta_y} \right] \frac{\partial T}{\partial y} dS_2
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Después de reagrupar términos en la ecuación (4.12), se obtiene la expresión completa de la solución a la segunda integral de la ecuación (4.9). Por lo tanto, la ecuación (4.9) se convierte en:

$$\begin{aligned}
&\int_S N_i \frac{\partial T}{\partial t} c_2 dS_2 - \oint_{\Gamma} N_i a \beta \left[\frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right] dl \\
&\quad + \int_S a \beta \left[\frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dS_2 \\
&\quad + \int_S a \beta N_i \left[\frac{1}{\chi^{(y)}} \frac{(1 - \zeta_x)}{\ell_x} \left(\frac{x}{\ell_x} + 1 \right)^{-\zeta_x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\chi^{(x)}} \frac{(1 - \zeta_y)}{\ell_y} \left(\frac{y}{\ell_y} + 1 \right)^{-\zeta_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dS_2 \\
&\quad - \int_S N_i a \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1 - \zeta_x}{x + \ell_x} \frac{\partial T}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1 - \zeta_y}{y + \ell_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] c_2 dS_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

La ecuación (4.13) se puede escribir de manera más compacta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\int_S N_i \frac{\partial T}{\partial t} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^2 \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \gamma_{1jk} dS_2 + \sum_{j=1}^2 \int_S N_i \frac{\partial T}{\partial x_j} \gamma_{2jk} dS_2 \\
- \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} N_i \frac{\partial T}{\partial x_j} \gamma_{1jk} n_j dl = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

En donde $\gamma_{1jk} = a \beta \frac{\chi^{(j)}}{\chi^{(k)}}$ y $\gamma_{2jk} = a \left[\frac{\beta}{\chi^{(k)}} \frac{(1 - \zeta_j)}{\ell_j} \left(\frac{x_j}{\ell_j} + 1 \right)^{-\zeta_j} - (\chi^{(j)})^2 \frac{1 - \zeta_j}{x_j + \ell_j} c_2 \right]$, con $j \neq k$.

Ahora, retomando la solución propuesta en la ecuación (3.9), la solución a la ecuación

(4.14) es:

$$T(x, y, t) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{T}. \quad (4.15)$$

Y sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_j} & \frac{\partial N_2}{\partial x_j} & \frac{\partial N_3}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{x_j}^T \mathbf{T}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \\ \dot{T}_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{T}}. \quad (4.17)$$

Al reemplazar las derivadas parciales (4.16) y (4.17) en la ecuación (4.14) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} \int_S N_i \mathbf{N}^T c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^2 \mathbf{T} \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} dS_2 + \sum_{j=1}^2 \mathbf{T} \int_S N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2jk} dS_2 \\ - \sum_{j=1}^2 \mathbf{T} \oint_{\Gamma} N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} n_j dl = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dado que esta ecuación es empleada para cada N_i es posible generalizar la expresión escribiéndola en forma matricial como:

$$[\mathbf{M}] \dot{\mathbf{T}} + [\mathbf{L} - \mathbf{K}] \mathbf{T} = 0. \quad (4.19)$$

Donde:

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{N} \mathbf{N}^T c_2 dS_2, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} dS_2 + \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2jk} dS_2, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} n_j dl_1. \quad (4.22)$$

Capítulo 5

Resultados y discusión

La ecuación de conducción de calor se discretizó utilizando el método de elementos finitos, específicamente, el enfoque de residuos ponderados de Galerkin. Como parte de la formulación débil se realizó la integración por partes para llevar a cabo el proceso de discretización. La solución de las integrales contenidas en las matrices \mathbf{M} , \mathbf{L} y \mathbf{K} se presenta en los apéndices B.1, B.2 y B.3, respectivamente. Entre las dificultades encontradas, destaca la complejidad de las integrales debido a que las variables involucradas provienen de funciones de forma asociadas a elementos triangulares en el espacio euclidiano. Por lo tanto, para resolverlas de manera analítica, fue necesario realizar cambios de variable que transformaran las integrales a una región específica donde las soluciones fueran analíticas, además de emplear las funciones Gamma y Beta.

A partir de 4.18, se puede escribir la expresión correspondiente al elemento (ij) como:

$$M_{ij}\dot{T}_j(t) + [L - K]_{ij}T_j(t).$$

Este es un elemento que forma parte de la ecuación de conducción de calor con la forma matricial descrita en la ecuación 4.19. Una vez desarrollado, el elemento (ij) se puede expresar mediante la siguiente expresión general.

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi}{4A^2} \dot{T}_j(t) \left\{ (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\zeta_x \ell_y - \zeta_y \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \ell_y \right] \right. \\
& + A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \\
& + A_{i1}A_{j1} \left[\frac{\zeta_x (\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_x \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \\
& \left. + A_{i2}A_{j2} \left[\frac{\zeta_y (\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_y \ell_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \right\} \\
& \frac{a}{4A^2} T_j(t) \left\{ A_{i1}A_{j1} \beta \frac{\ell_x^{\zeta_x - 1} \Gamma(2 - \zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 3)} + A_{i2}A_{j2} \frac{\beta}{2 - \zeta_y} \frac{\ell_y^{\zeta_y - 1} \Gamma(\zeta_x) \Gamma(3 - \zeta_y)}{\ell_x^{\zeta_x - 1} \Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \right. \\
& + \zeta_x (1 - \zeta_x) \left[\frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1 - \zeta_x}} - \frac{1}{\ell_x^{2 - 2\zeta_x}} \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \left[A_{i1}A_{j1} \left(\frac{\zeta_x - 1}{\zeta_y - \zeta_x + 2} + \ell_x \right) \right. \\
& \left. + A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{\zeta_y - \zeta_x + 2} \right) - A_{i0}A_{j1} \right] \\
& + \frac{1}{\ell_y^{1 - \zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} - \frac{1}{\ell_y^{1 - \zeta_y}} \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \left[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_x \right) \right. \\
& \left. + A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1 - \zeta_y}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_y \right) \right] \left. \right\} \\
& \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} T_j(t) \left\{ -\ell_x^{\zeta_x - 1} \ell_y^{1 - \zeta_y} \frac{\Gamma(2 - \zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \left[[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1} \ell_x + A_{i2}A_{j1} (1 - \ell_y)] \right. \right. \\
& \left. \left. - (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) \frac{2 - \zeta_x}{\zeta_y - \zeta_x + 2} \right] \right. \\
& + \ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1 - \zeta_x} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \left[[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} (1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2} \ell_y] \right. \\
& \left. \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) \frac{2 - \zeta_y}{\zeta_x - \zeta_y + 2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde a representa la difusividad térmica del medio, y se introducen los cambios de variable $\beta = \ell_x^{\zeta_x - 1} \ell_y^{\zeta_y - 1}$ y $\Phi = \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$, donde Γ es la función Gamma. Esta expresión incluye las características fractales asociadas al medio en el que ocurre la conducción de calor. Concretamente, incorpora información crucial sobre las propiedades geométricas del medio, determinadas por los exponentes de escala ζ_i y los límites de corte inferior ℓ_i obtenidos a partir del Laplaciano fraccionario del continuo fractal, y los coeficientes de transformación c_1 y c_2 .

De esta manera, esta expresión propone un modelo matemático alternativo para la con-

ducción de calor bidimensional en estado transitorio, que toma en cuenta las características geométricas del medio. Este modelo puede resolverse de forma numérica mediante su implementación en un código desarrollado en algún lenguaje de programación, lo que permite además, visualizar los resultados de manera gráfica.

Conclusiones

En el desarrollo de esta tesis fueron de suma importancia los conocimientos pero también las aptitudes adquiridas y desarrolladas a lo largo de mi formación académica en la Ingeniería en Física Aplicada de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. Fueron esenciales para esta tesis las materias de: Elemento Finito, pues con su método se desarrolló la discretización de la ecuación de conducción de calor; en segundo plano pero no menos importante, la materia de Transferencia de Calor brindó herramientas y conocimientos cruciales para comprender los mecanismos de transferencia de calor y así profundizar en la transferencia por conducción, cuya ecuación fue tema central en este trabajo de tesis. Cursos como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial y Métodos Matemáticos de la Física proporcionaron los fundamentos necesarios para el uso de otra herramienta poderosa en el desarrollo de este trabajo: el cálculo de orden fraccionario, en particular, el cálculo fraccionario del continuo fractal, cuya importancia radica en incorporar las características geométricas del medio al vincular el orden de derivación con su dimensión fractal (mediante exponentes de escala ζ_i y límites de corte inferior ℓ_i).

En la aplicación de la formulación débil de los residuos ponderados de Galerkin con funciones de forma triangulares, como parte de la metodología del elemento finito, a la ecuación de conducción de calor bidimensional dependiente del tiempo se llegó a la ecuación 4.18, que presentó un nivel elevado de dificultad a la hora de resolver sus integrales, sin embargo, por medio de cambios de variable y empleando las funciones Gamma y Beta se logró con éxito la obtención de sus soluciones de forma analítica. Finalmente, se obtuvo una expresión general para la conducción de calor que puede ser aplicada a fractales naturales, por ejemplo, a los medios porosos.

Es importante señalar que dentro del cálculo fraccionario existen numerosas definiciones de operadores, muchas de las cuales continúan en desarrollo y evolución constante. Este trabajo se fundamenta en los operadores fraccionarios del cálculo fraccionario del continuo fractal presentados en la sección 2.4.2, desarrollados por Balankin, que son esencialmente equivalentes a los propuestos por Ostojica y Li. Cabe destacar que el empleo de diferentes definiciones de operadores puede conducir a resultados distintos, lo que resalta la importancia

de elegir un enfoque adecuado para el problema en cuestión.

Como comentarios finales, se destaca que aún queda trabajo por realizar, el cual podría incluso servir como base para futuros proyectos de tesis. Una línea de investigación a futuro sería implementar el elemento maestro en un código para su programación y visualización de resultados, así como validar el modelo comparando sus predicciones con datos experimentales. Este análisis permitiría determinar la validez del enfoque y, en caso afirmativo, definir el rango en el que las soluciones son aplicables. Además, sería interesante explorar el uso de funciones de forma triangulares generales, dado que este trabajo se limitó a una geometría triangular específica.

Apéndice A

Función Gamma y función Beta

A.1. Función Gamma

La función Gamma aparece en múltiples áreas de la ingeniería, matemáticas y física. Dentro del campo de la física suele surgir en diversos problemas, tales como la normalización de funciones de onda y también en la rama de la mecánica estadística durante el cálculo de probabilidades; no obstante, sus aplicaciones e interpretaciones son menos directas que otras funciones. Sin embargo, su importancia se debe a su gran utilidad para desarrollar otras funciones con aplicación física directa [37].

Existen distintas definiciones de la función Gamma, la que enunciaremos a continuación se llama integral definida, también conocida como integral de Euler. La función Gamma denotada por $\Gamma(z)$ está definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\Re(z) > 0) \quad (\text{A.1})$$

La restricción sobre z se requiere para evitar la divergencia de la integral. Algunas relaciones de recurrencia útiles de la función Gamma son:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) = (n - 1)! \quad \text{ó} \quad \Gamma(n + 1) = n! \quad (\text{A.3})$$

Además, para valores negativos no enteros de n se tiene que:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n + 1)}{n} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Función Beta

La función Beta denotada por $B(m + 1, n + 1)$ está definida por [37]:

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad (\text{A.5})$$

Para cuestiones de convergencia $m > 0, n > 0$. La función Beta puede ser escrita en términos de la función Gamma como:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (\text{A.6})$$

y puede incluir valores de $m < 0, n < 0$ no enteros.

Apéndice B

Resolución de integrales

B.1. Solución de M

La matriz \mathbf{M} está dada por:

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T c_2 dS_2$$

Desarrollando el producto $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ obtenemos:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 & N_1N_3 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_3 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_3 \end{pmatrix}$$

Puesto que las funciones de forma N_i están dadas de la forma:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces el producto N_iN_j está dado por:

$$N_iN_j = \frac{1}{4A^2} \{A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0})x + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0})y \\ + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1})xy + A_{i1}A_{j1}x^2 + A_{i2}A_{j2}y^2\}$$

Por lo tanto, cada elemento M_{ij} de la matriz \mathbf{M} se expresa como:

$$M_{ij} = \frac{1}{4A^2} \int_S \{A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0})x + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0})y \\ + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1})xy + A_{i1}A_{j1}x^2 + A_{i2}A_{j2}y^2\} c_2 dS_2$$

En el proceso de homogeneización que implica ir de un medio poroso a uno homogéneo, se hace un traslado del espacio (x, y) hacia el espacio $(x + \ell_x, y + \ell_y)$ por medio de los cambios de variable $u_x = x + \ell_x$ y $u_y = y + \ell_y$. Este traslado de coordenadas se muestra en la Figura B.1.

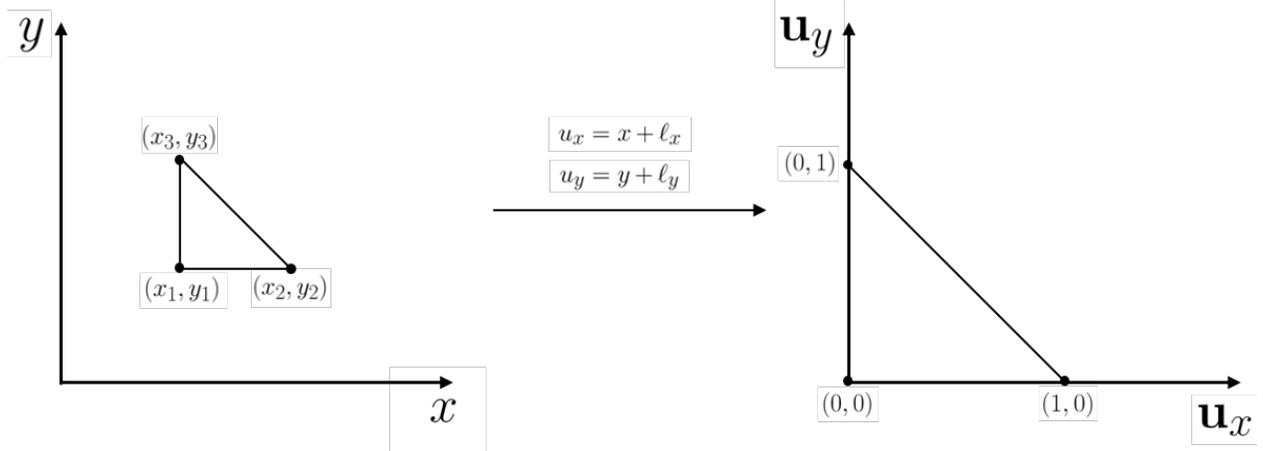


Figura B.1: Traslado de coordenadas (x, y) a (u_x, u_y) , realizado durante el proceso de homogeneización.

Por lo tanto, la función de transformación $c_2 dS_2$ pasa a ser $u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$. Al aplicar estos cambios de variable a la integral anterior se tendrán que resolver cada uno de sus términos, es decir, se deben resolver las seis integrales siguientes:

1. $\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$
2. $\frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$
3. $\frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j2} + A_{i2} A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$
4. $\frac{1}{4A^2} (A_{i1} A_{j2} + A_{i2} A_{j1}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$
5. $\frac{1}{4A^2} A_{i1} A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)^2 u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$
6. $\frac{1}{4A^2} A_{i2} A_{j2} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y)^2 u_x^{\zeta_x - 1} u_y^{\zeta_y - 1} du_y du_x$

Para dar solución a cada una de las integrales se realiza el cambio de variable $u_y = (1 - u_x)t$, teniendo así $du_y = (1 - u_x)dt$ y los límites de integración cambiarán a $t(u_y = 0) = 0$ y

$t(u_y = 1 - u_x) = 1$. Aplicando lo anterior a la primera integral se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x &= \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} [(1-u_x)t]^{\zeta_y-1} (1-u_x) dt du_x \\ &= \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} (1-u_x)^{\zeta_y} t^{\zeta_y-1} dt du_x \\ &= \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} \int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} (1-u_x)^{\zeta_y} du_x \end{aligned}$$

Aplicando la función Beta (véase apéndice A), $B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$, en la ecuación anterior nos conduce a:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} B(\zeta_x, \zeta_y + 1)$$

Al usar la propiedad de la función Beta que se muestra en la ecuación (A.6) tendremos:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(\zeta_y + 1)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$$

Si aplicamos otra propiedad de la función Gamma mostrada en la ecuación (A.2) nos lleva a:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$$

Para obtener una ecuación más compacta aplicaremos el cambio de variable $\Phi = \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$. Así es como finalmente obtenemos la solución a la integral 1:

$$1. \quad \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \Phi \quad (\text{B.1})$$

Empleando los mismos cambios de variable y propiedades de la función Gamma y función Beta al resto de integrales tendremos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\ = \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] \Phi \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{3.} \quad & \frac{1}{4A^2}(A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
& = \frac{1}{4A^2}(A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \Phi
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{4.} \quad & \frac{1}{4A^2}(A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
= & \frac{1}{4A^2}(A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\zeta_x \ell_y - \zeta_y \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \ell_y \right] \Phi
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.} \quad & \frac{1}{4A^2} A_{i1} A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
= & \frac{1}{4A^2} A_{i1} A_{j1} \left[\frac{\zeta_x (\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_x \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \Phi
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{6.} \quad & \frac{1}{4A^2} A_{i2} A_{j2} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
= & \frac{1}{4A^2} A_{i2} A_{j2} \left[\frac{\zeta_y (\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_y \ell_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \Phi
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Agrupando las seis integrales en una sola expresión para el elemento M_{ij} que corresponde a la matriz \mathbf{M} tenemos:

$$\begin{aligned}
M_{ij} = & \frac{\Phi}{4A^2} \left\{ A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] \right. \\
& + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \\
& + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\zeta_x \ell_y - \zeta_y \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \ell_y \right] \\
& + A_{i1}A_{j1} \left[\frac{\zeta_x (\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_x \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \\
& \left. + A_{i2}A_{j2} \left[\frac{\zeta_y (\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_y \ell_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

B.2. Solución de L

La matriz \mathbf{L} está dada por:

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} dS_2 + \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2jk} dS_2$$

Desarrollando la primera sumatoria:

$$\sum_{j=1}^2 \int_s \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1jk} dS_2 = \int_s \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T \gamma_{1xy} dS_2 + \int_s \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T \gamma_{1yx} dS_2$$

Lo primero es desarrollar los productos de $\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T$ como se muestra a continuación:

$$\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{11}A_{21} & A_{11}A_{31} \\ A_{11}A_{21} & A_{21}^2 & A_{21}A_{31} \\ A_{11}A_{31} & A_{21}A_{31} & A_{31}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{12}^2 & A_{12}A_{22} & A_{12}A_{32} \\ A_{12}A_{22} & A_{22}^2 & A_{22}A_{32} \\ A_{12}A_{32} & A_{22}A_{32} & A_{32}^2 \end{pmatrix}$$

De estos productos desarrollados es posible ver que se puede obtener una expresión general para cada elemento de estas matrices, estas expresiones se muestran a continuación:

$$(\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T)_{ij} = \frac{1}{4A^2} A_{i1} A_{j1} \quad (\text{B.8})$$

$$(\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T)_{ij} = \frac{1}{4A^2} A_{i2} A_{j2} \quad (\text{B.9})$$

Por otra parte, desarrollando la segunda sumatoria tenemos:

$$\sum_{j=1}^2 \int_s \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2j} dS_2 = \int_s \mathbf{N} \mathbf{B}_x^T \gamma_{2xy} dS_2 + \int_s \mathbf{N} \mathbf{B}_y^T \gamma_{2yx} dS_2$$

Y desarrollando los productos $\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{N} \mathbf{B}_y^T$ tenemos:

$$(\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T)_{ij} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 A_{11} & N_1 A_{21} & N_1 A_{31} \\ N_2 A_{11} & N_2 A_{21} & N_2 A_{31} \\ N_3 A_{11} & N_3 A_{21} & N_3 A_{31} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{NB}_y^T)_{ij} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 A_{12} & N_1 A_{22} & N_1 A_{32} \\ N_2 A_{12} & N_2 A_{22} & N_2 A_{32} \\ N_3 A_{12} & N_3 A_{22} & N_3 A_{32} \end{pmatrix}$$

Al igual que para $\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T$, para las matrices \mathbf{NB}_x^T y \mathbf{NB}_y^T se pueden tener expresiones para un elemento general que formen parte de ellas, estas expresiones son:

$$(\mathbf{NB}_x^T)_{ij} = \frac{1}{2A} N_i A_{j1} = \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j1} x + A_{i2} A_{j1} y) \quad (\text{B.10})$$

$$(\mathbf{NB}_y^T)_{ij} = \frac{1}{2A} N_i A_{j2} = \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j2} + A_{i1} A_{j2} x + A_{i2} A_{j2} y) \quad (\text{B.11})$$

Una vez que hemos obtenido las ecuaciones (B.8), (B.9), (B.10) y (B.11) es posible obtener una expresión general para un elemento L_{ij} que forma parte de la matriz \mathbf{L} como se muestra a continuación:

$$L_{ij} = \frac{1}{4A^2} \left\{ A_{i1} A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 + A_{i2} A_{j2} \int_s \gamma_{1yx} dS_2 \right. \\ \left. + (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j1} x + A_{i2} A_{j1} y) \int_s \gamma_{2xy} dS_2 \right. \\ \left. + (A_{i0} A_{j2} + A_{i1} A_{j2} x + A_{i2} A_{j2} y) \int_s \gamma_{2yx} dS_2 \right\} \quad (\text{B.12})$$

Como resultado de la ecuación (B.12) es que se tendrán que resolver las siguientes ocho integrales:

1. $A_{i1} A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2$
2. $A_{i2} A_{j2} \int_s \gamma_{1yx} dS_2$
3. $A_{i0} A_{j1} \int_s \gamma_{2xy} dS_2$
4. $A_{i1} A_{j1} \int_s x \gamma_{2xy} dS_2$
5. $A_{i2} A_{j1} \int_s y \gamma_{2xy} dS_2$
6. $A_{i0} A_{j2} \int_s \gamma_{2yx} dS_2$
7. $A_{i1} A_{j2} \int_s x \gamma_{2yx} dS_2$

$$8. A_{i2}A_{j2} \int_s y \gamma_{2yx} dS_2$$

Para hallar las soluciones de estas ocho integrales, se emplean los mismos métodos y cambios de variable aplicados en el proceso de solución de las integrales de la matriz \mathbf{M} . Para la primera integral, recordando que $\gamma_{1xy} = a\beta\chi^{(x)}/\chi^{(y)}$ y que $\chi^{(i)} = (u_i/\ell_i)^{1-\zeta_i}$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 &= A_{i1}A_{j1} \int_s a\beta \frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} dS_2 \\ &= A_{i1}A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} a\beta \frac{(u_x/\ell_x)^{1-\zeta_x}}{(u_y/\ell_y)^{1-\zeta_y}} dS_2 \\ &= A_{i1}A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} a\beta \frac{\ell_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1}}{\ell_y^{\zeta_y-1} u_x^{\zeta_x-1}} du_y du_x \end{aligned}$$

Aplicando el mismo cambio de variable sobre u_y empleado en la solución de \mathbf{M} se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 &= A_{i1}A_{j1} \int_0^1 \int_0^1 a\beta \frac{\ell_x^{\zeta_x-1}}{\ell_y^{\zeta_y-1}} \frac{(1-u_x)^{\zeta_y-1} t^{\zeta_y-1}}{u_x^{\zeta_x-1}} (1-u_x) dt du_x \\ &= A_{i1}A_{j1} a\beta \frac{\ell_x^{\zeta_x-1}}{\ell_y^{\zeta_y-1}} \int_0^1 \int_0^1 u_x^{1-\zeta_x} (1-u_x)^{\zeta_y} t^{\zeta_y-1} dt du_x \end{aligned}$$

Al integrar respecto a t y evaluando, se obtiene:

$$A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 = A_{i1}A_{j1} \frac{a\beta \ell_x^{\zeta_x-1}}{\zeta_y \ell_y^{\zeta_y-1}} \int_0^1 u_x^{1-\zeta_x} (1-u_x)^{\zeta_y} du_x$$

Para dar solución a esta integral, se emplea la función especial Beta, de forma que:

$$A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 = A_{i1}A_{j1} \frac{a\beta \ell_x^{\zeta_x-1}}{\zeta_y \ell_y^{\zeta_y-1}} B(2-\zeta_x, \zeta_y+1)$$

Usando la propiedad de la función Beta mostrada en la ecuación (A.6) obtenemos la solución a la primera integral:

$$A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 = A_{i1}A_{j1} \frac{a\beta \ell_x^{\zeta_x-1} \Gamma(2-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y+1)}{\zeta_y \ell_y^{\zeta_y-1} \Gamma(\zeta_y-\zeta_x+3)}$$

Más aún, aplicando la propiedad de la función Gamma mostrada en la ecuación (A.2) se obtiene la forma final de la solución a la primera integral:

$$1. \quad A_{i1}A_{j1} \int_s \gamma_{1xy} dS_2 = a\beta A_{i1}A_{j1} \frac{\ell_x^{\zeta_x-1} \Gamma(2-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\ell_y^{\zeta_y-1} \Gamma(\zeta_y-\zeta_x+3)} \quad (\text{B.13})$$

Para resolver las siete integrales restantes se emplea el método análogo con el que se resolvió a la primera, de modo que, las soluciones restantes se muestran a continuación:

$$2. \quad A_{i2}A_{j2} \int_s \gamma_{1yx} dS_2 = A_{i2}A_{j2} \frac{a\beta}{2 - \zeta_y} \frac{\ell_y^{\zeta_y - 1}}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(3 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \quad (\text{B.14})$$

$$3. \quad A_{i0}A_{j1} \int_s \gamma_{2xy} dS_2 = A_{i0}A_{j1} a \zeta_x (1 - \zeta_x) \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \left[\frac{1}{\ell_x^{2-2\zeta_x}} - \frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1-\zeta_x}} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$4. \quad A_{i1}A_{j1} \int_s x \gamma_{2xy} dS_2 = A_{i1}A_{j1} a (1 - \zeta_x) \zeta_x \left[\frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1-\zeta_x}} - \frac{1}{\ell_x^{2-2\zeta_x}} \right] \left[\frac{(\zeta_x - 1)}{\zeta_y - \zeta_x + 2} + \ell_x \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \quad (\text{B.16})$$

$$5. \quad A_{i2}A_{j1} \int_s y \gamma_{2xy} dS_2 = A_{i2}A_{j1} a (1 - \zeta_x) \zeta_x \left[\frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1-\zeta_x}} - \frac{1}{\ell_x^{2-2\zeta_x}} \right] \left[\ell_y - \frac{\zeta_y}{\zeta_y - \zeta_x + 2} \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \quad (\text{B.17})$$

$$6. \quad A_{i0}A_{j2} \int_s \gamma_{2yx} dS_2 = A_{i0}A_{j2} \frac{a}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} - \frac{1}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{B.18})$$

$$7. \quad A_{i1}A_{j2} \int_s x \gamma_{2yx} dS_2 = A_{i1}A_{j2} \frac{a}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} - \frac{1}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \right] \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_x \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{B.19})$$

$$8. \quad A_{i2}A_{j2} \int_s y \gamma_{2yx} dS_2 = A_{i2}A_{j2} \frac{a}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} - \frac{1}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \right] \left[\frac{1 - \zeta_y}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_y \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{B.20})$$

Una vez determinadas las soluciones (B.13-B.20) y sustituyendo en (B.12) se tiene la siguiente

expresión general para cualquier elemento L_{ij} de la matriz \mathbf{L} :

$$\begin{aligned}
L_{ij} = \frac{a}{4A^2} & \left\{ A_{i1}A_{j1}\beta \frac{\ell_x^{\zeta_x-1} \Gamma(2-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\ell_y^{\zeta_y-1} \Gamma(\zeta_y-\zeta_x+3)} + A_{i2}A_{j2} \frac{\beta}{2-\zeta_y} \frac{\ell_y^{\zeta_y-1} \Gamma(\zeta_x) \Gamma(3-\zeta_y)}{\ell_x^{\zeta_x-1} \Gamma(\zeta_x-\zeta_y+3)} \right. \\
& + \zeta_x(1-\zeta_x) \left[\frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x}} - \frac{1}{\ell_x^{2-2\zeta_x}} \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y-\zeta_x+2)} \left[A_{i1}A_{j1} \left(\frac{\zeta_x-1}{\zeta_y-\zeta_x+2} + \ell_x \right) \right. \\
& + A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{\zeta_y-\zeta_x+2} \right) - A_{i0}A_{j1} \left. \right] \\
& + \frac{1}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x-1}} - \frac{1}{\ell_y^{1-\zeta_y}} \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x-\zeta_y+2)} \left[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x-\zeta_y+2} - \ell_x \right) \right. \\
& \left. \left. + A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1-\zeta_y}{\zeta_x-\zeta_y+2} - \ell_y \right) \right] \right\} \tag{B.21}
\end{aligned}$$

B.3. Solución de K

La matriz \mathbf{K} está dada por:

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_{x_j}^T \gamma_{1jk} n_j dl_1$$

Al desarrollar la sumatoria se tiene:

$$\mathbf{K} = \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_x^T \gamma_{1xy} n_x dl_1 + \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_y^T \gamma_{1yx} n_y dl_1$$

Los productos de matrices \mathbf{NB}_x^T y \mathbf{NB}_y^T ya han sido calculados en las expresiones (B.10) y (B.11). Entonces, cada elemento K_{ij} de la matriz \mathbf{K} está dado por:

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \oint_{\Gamma} \frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{1xy} n_x dl_1 \\
&+ \oint_{\Gamma} \frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{1yx} n_y dl_1 \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Dado que trabajaremos con integrales de línea a lo largo de una trayectoria cerrada, la Figura B.2 presenta un elemento triangular con sus componentes que será considerado para este trabajo.

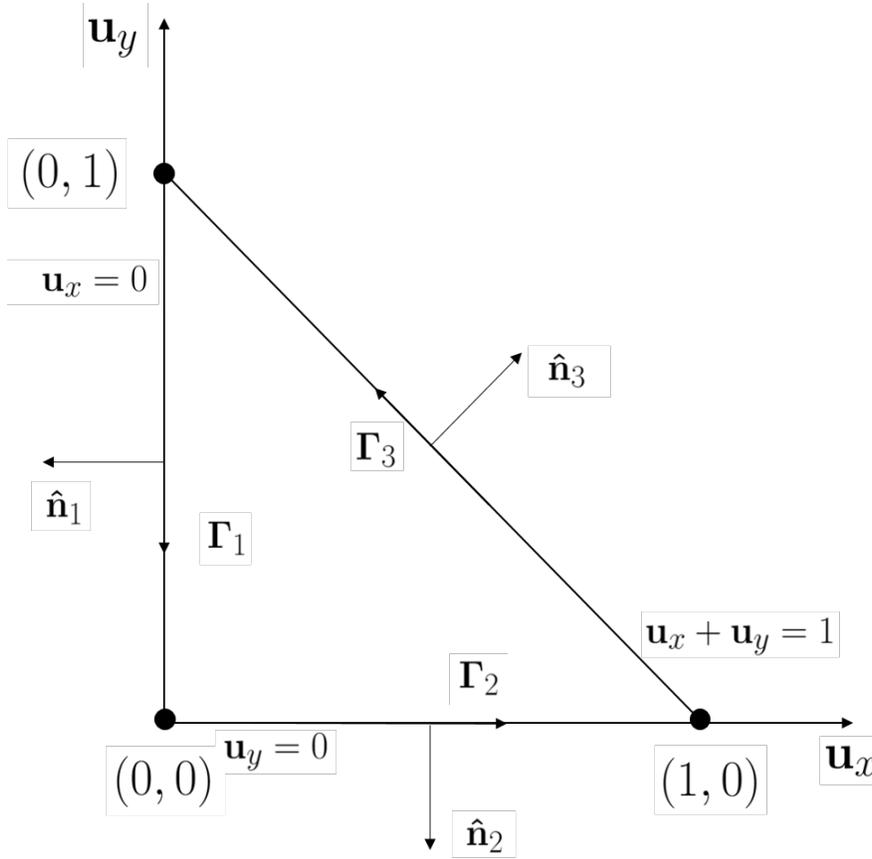


Figura B.2: Elemento triangular considerado en la solución de \mathbf{K} con sus componentes.

En base a la Figura B.2 podemos desarrollar a la ecuación (B.22), de forma que por cada integral de línea cerrada obtenemos 3 integrales, una para cada trayectoria del elemento triangular.

$$\begin{aligned}
 K_{ij} = \frac{1}{4A^2} & \left\{ \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{1xy} n_{1x} dl_1 \right. \\
 & + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{1xy} n_{2x} dl_1 \\
 & + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{1xy} n_{3x} dl_1 \\
 & + \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{1yx} n_{1y} dl_1 \\
 & + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{1yx} n_{2y} dl_1 \\
 & \left. + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{1yx} n_{3y} dl_1 \right\}
 \end{aligned}$$

Lo siguiente es aplicar los cambios de variable $x = u_x - \ell_x$ y $y = u_y - \ell_y$ que se manejaron en las matrices \mathbf{M} y \mathbf{L} .

$$K_{ij} = \frac{1}{4A^2} \left\{ \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1xy} n_{1x} dl_1 \right. \\ + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1xy} n_{2x} dl_1 \\ + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1xy} n_{3x} dl_1 \\ + \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1yx} n_{1y} dl_1 \\ + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1yx} n_{2y} dl_1 \\ \left. + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1yx} n_{3y} dl_1 \right\}$$

Ahora, para cada trayectoria se deben sustituir los valores de las componentes de los vectores unitarios así como las ecuaciones de la recta correspondiente. Estas componentes y ecuaciones se muestran en la Tabla B.1.

Tabla B.1: Parametrizaciones

Trayectoria	Vector unitario $\hat{\mathbf{n}}_i$	Ecuación de la recta
Γ_1	$\hat{\mathbf{n}}_1 = -\mathbf{i}$	$u_x = 0$
Γ_2	$\hat{\mathbf{n}}_2 = -\mathbf{j}$	$u_y = 0$
Γ_3	$\hat{\mathbf{n}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$	$u_x + u_y = 1$

Al reemplazar estas componentes de los vectores unitarios y las ecuaciones de las rectas tendremos una expresión más reducida como se muestra a continuación:

$$K_{ij} = \frac{1}{4A^2} \left\{ \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(-\ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1xy}(-1) dl_1 \right. \\ + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}((1 - u_x) - \ell_y)) \gamma_{1xy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) dl_1 \\ + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(-\ell_y)) \gamma_{1yx}(-1) dl_1 \\ \left. + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}((1 - u_y) - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \gamma_{1yx} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) dl_1 \right\}$$

Tomando en cuenta que $\gamma_{1jk} = a\beta \frac{\chi^{(j)}}{\chi^{(k)}}$, entonces tenemos:

$$K_{ij} = \frac{1}{4A^2} \left\{ -a\beta \oint_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} dl_1 \right. \\ + \frac{a\beta}{\sqrt{2}} \oint_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(1 - u_x - \ell_y)) \frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}} dl_1 \\ - a\beta \oint_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y) \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} dl_1 \\ \left. + \frac{a\beta}{\sqrt{2}} \oint_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - u_y - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}} dl_1 \right\}$$

Ahora, reemplazando los valores

$$\frac{\chi^{(j)}}{\chi^{(k)}} = \left(\frac{x_j}{\ell_{x_j}} + 1 \right)^{(1-\zeta_{x_j})} \left(\frac{x_k}{\ell_{x_k}} + 1 \right)^{(\zeta_{x_k}-1)} = \left(\frac{u_{x_j}}{\ell_{x_j}} \right)^{1-\zeta_{x_j}} \left(\frac{u_{x_k}}{\ell_{x_k}} \right)^{\zeta_{x_k}-1}$$

tenemos:

$$K_{ij} = \frac{1}{4A^2} \left\{ -a \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \left(\frac{u_x}{\ell_x} \right)^{1-\zeta_x} \left(\frac{u_y}{\ell_y} \right)^{\zeta_y-1} du_x \right. \\ + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(1 - u_x - \ell_y)) \left(\frac{u_x}{\ell_x} \right)^{1-\zeta_x} \left(\frac{u_y}{\ell_y} \right)^{\zeta_y-1} du_x \\ - a \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y) \left(\frac{u_y}{\ell_y} \right)^{1-\zeta_y} \left(\frac{u_x}{\ell_x} \right)^{\zeta_x-1} du_y \\ \left. + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - u_y - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \left(\frac{u_y}{\ell_y} \right)^{1-\zeta_y} \left(\frac{u_x}{\ell_x} \right)^{\zeta_x-1} du_y \right\}$$

Recordemos que se deben sustituir las ecuaciones de la recta para cada u_{x_k} . Analizando la Figura B.2 notamos que a lo largo de la trayectoria Γ_1 se tiene que $u_x = 0$, mientras que para la trayectoria Γ_2 se tiene que $u_y = 0$, en consecuencia, las integrales sobre dichas trayectorias son nulas, de tal forma que la ecuación a integrar se reduce a:

$$K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} \left\{ - \int_0^1 \ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} [A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(1 - \ell_y) \right. \\ \left. + (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) u_x] u_x^{1-\zeta_x} (1 - u_x)^{\zeta_y-1} du_x \right. \\ \left. + \int_0^1 \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} [A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y \right. \\ \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) u_y] u_y^{1-\zeta_y} (1 - u_y)^{\zeta_x-1} du_y \right\}$$

Cada integral se puede descomponer en otras dos tal que

$$K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} \left\{ - \int_0^1 \ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} [A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1j1} (1 - \ell_y)] u_x^{1-\zeta_x} (1 - u_x)^{\zeta_y-1} du_x \right. \\ - \int_0^1 \ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) u_x^{2-\zeta_x} (1 - u_x)^{\zeta_y-1} du_x \\ + \int_0^1 \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} [A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} (1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y] u_y^{1-\zeta_y} (1 - u_y)^{\zeta_x-1} du_y \\ \left. + \int_0^1 \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) u_y^{2-\zeta_y} (1 - u_y)^{\zeta_x-1} du_y \right\}$$

Para el siguiente paso resulta conveniente reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} \left\{ -\ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} [A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1j1} (1 - \ell_y)] \int_0^1 u_x^{1-\zeta_x} (1 - u_x)^{\zeta_y-1} du_x \right. \\ - \ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) \int_0^1 u_x^{2-\zeta_x} (1 - u_x)^{\zeta_y-1} du_x \\ + \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} [A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} (1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y] \int_0^1 u_y^{1-\zeta_y} (1 - u_y)^{\zeta_x-1} du_y \\ \left. + \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) \int_0^1 u_y^{2-\zeta_y} (1 - u_y)^{\zeta_x-1} du_y \right\}$$

Ahora resulta evidente que para resolver cada una de las integrales se puede aplicar la función Beta, con lo cual se llega a

$$K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} \left\{ -\ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} [[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1j1} (1 - \ell_y)] B(2 - \zeta_x, \zeta_y) \right. \\ - (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) B(3 - \zeta_x, \zeta_y)] \\ + \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} [[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} (1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y] B(\zeta_x, 2 - \zeta_y) \\ \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) B(\zeta_x, 3 - \zeta_y)] \right\}$$

Empleando la propiedad de la función Beta que se muestra en la ecuación (A.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} & \left\{ -\ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} \left[[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1j1}(1-\ell_y)] \frac{\Gamma(2-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y-\zeta_x+2)} \right. \right. \\
& - (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) \frac{\Gamma(3-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y-\zeta_x+3)} \left. \right] \\
& + \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} \left[[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1-\ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y] \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x-\zeta_y+2)} \right. \\
& \left. \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(3-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x-\zeta_y+3)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Y aplicando la propiedad $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ se obtiene la expresión general para cada elemento K_{ij} de la matriz \mathbf{K}

$$\begin{aligned}
K_{ij} = \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} & \left\{ -\ell_x^{\zeta_x-1} \ell_y^{1-\zeta_y} \frac{\Gamma(2-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y-\zeta_x+2)} \left[[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1j1}(1-\ell_y)] \right. \right. \\
& - (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) \frac{2-\zeta_x}{\zeta_y-\zeta_x+2} \left. \right] \\
& + \ell_y^{\zeta_y-1} \ell_x^{1-\zeta_x} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x-\zeta_y+2)} \left[[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1-\ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y] \right. \\
& \left. \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) \frac{2-\zeta_y}{\zeta_x-\zeta_y+2} \right] \right\} \tag{B.23}
\end{aligned}$$

B.4. Solución completa

Una vez que hemos calculado las expresiones (B.7), (B.21) y (B.23) para cualquier elemento de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{L} y \mathbf{K} , podemos escribir la expresión general de las matrices que componen el elemento maestro de la ecuación de conducción de calor fraccionaria:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi}{4A^2} \dot{T}_j(t) \left\{ (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\zeta_x \ell_y - \zeta_y \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \ell_y \right] \right. \\
& + A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \\
& + A_{i1}A_{j1} \left[\frac{\zeta_x (\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_x \ell_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \\
& \left. + A_{i2}A_{j2} \left[\frac{\zeta_y (\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\zeta_y \ell_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \right\} \\
& \frac{a}{4A^2} T_j(t) \left\{ A_{i1}A_{j1} \beta \frac{\ell_x^{\zeta_x - 1} \Gamma(2 - \zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 3)} + A_{i2}A_{j2} \frac{\beta}{2 - \zeta_y} \frac{\ell_y^{\zeta_y - 1} \Gamma(\zeta_x) \Gamma(3 - \zeta_y)}{\ell_x^{\zeta_x - 1} \Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \right. \\
& + \zeta_x (1 - \zeta_x) \left[\frac{\beta}{\ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1 - \zeta_x}} - \frac{1}{\ell_x^{2 - 2\zeta_x}} \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \left[A_{i1}A_{j1} \left(\frac{\zeta_x - 1}{\zeta_y - \zeta_x + 2} + \ell_x \right) \right. \\
& \left. + A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{\zeta_y - \zeta_x + 2} \right) - A_{i0}A_{j1} \right] \\
& + \frac{1}{\ell_y^{1 - \zeta_y}} \left[\frac{\beta}{\ell_x^{\zeta_x - 1}} - \frac{1}{\ell_y^{1 - \zeta_y}} \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \left[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_x \right) \right. \\
& \left. + A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1 - \zeta_y}{\zeta_x - \zeta_y + 2} - \ell_y \right) \right] \left. \right\} \\
& \frac{a}{4\sqrt{2}A^2} T_j(t) \left\{ -\ell_x^{\zeta_x - 1} \ell_y^{1 - \zeta_y} \frac{\Gamma(2 - \zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \left[[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1} \ell_x + A_{i2}A_{j1} (1 - \ell_y)] \right. \right. \\
& \left. - (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) \frac{2 - \zeta_x}{\zeta_y - \zeta_x + 2} \right] \\
& + \ell_y^{\zeta_y - 1} \ell_x^{1 - \zeta_x} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \left[[A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2} (1 - \ell_x) - A_{i2}A_{j2} \ell_y] \right. \\
& \left. + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) \frac{2 - \zeta_y}{\zeta_x - \zeta_y + 2} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] V. E. Tarasov, «Continuous medium model for fractal media», *Physics Letters A*, vol. 336, n.º 2-3, págs. 167-174, 2005.
- [2] H. Sánchez-Chávez, C. López-Ortiz y L. Flores-Cano, «Generalities on finite element discretization for fractional pressure diffusion equation in the fractal continuum», *Revista mexicana de física*, vol. 65, n.º 3, págs. 251-260, 2019.
- [3] Y. A. Cengel y A. J. Ghajar, *Transferencia de calor y masa*. McGraw-Hill Interamericana, 2007, vol. 53.
- [4] B. Ross, «The development of fractional calculus 1695–1900», *Historia mathematica*, vol. 4, n.º 1, págs. 75-89, 1977.
- [5] C. A. López Ortiz, *Discretización por elemento finito de la ecuación de presión transitoria de un flujo fractal continuo tridimensional*, Tesis para obtener el grado de Ingeniero en Física Aplicada, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, 2017.
- [6] A. G. Carreño López, *Discretización por un elemento finito de las ecuaciones de onda P y S para un medio poroso continuo fractal*, Tesis para obtener el grado de Ingeniero en Física Aplicada, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, 2022.
- [7] M. A. Matías Astorga, *Dinámica poblacional en el espacio continuo fractal*, Tesis para obtener el grado de Ingeniero en Física Aplicada, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, 2019.
- [8] J. P. Holman y R. Valenzuela, *Transferencia de calor*. McGraw-Hill Madrid, España, 1998, vol. 8.
- [9] P. J. Olver et al., *Introduction to partial differential equations*. Springer, 2014, vol. 1.
- [10] B. B. Mandelbrot et al., «La geometría fractal de la naturaleza», 1997.
- [11] V. W. de Spinadel, «Geometría fractal y geometría euclidiana», *Revista Educación y Pedagogía*, n.º 35, págs. 83-91, 2003.

- [12] V. Talanquer, *Fractus, fracta, fractal*. FCE-Fondo de Cultura Económica, 1996.
- [13] P. S. Addison, *Fractals and chaos: an illustrated course*. CRC Press, 1997.
- [14] E. Braun, *Caos, fractales y cosas raras*. FCE, 2003.
- [15] J. D. Godino y F. Ruiz, *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.
- [16] G. Williams, *Chaos theory tamed*. CRC Press, 1997.
- [17] E. R. Henao y R. L. Varona, «Geometría fractal y transformada de Fourier», *Scientia et technica*, vol. 2, n.º 48, págs. 269-274, 2011.
- [18] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [19] I. Peterson, *The Mathematical Tourist: New and Updated Snapshots of Modern Mathematics*. Macmillan, 1998, vol. 1.
- [20] Solkol. “Copo de nieve de Koch - Wikipedia, la enciclopedia libre.” Fecha de consulta 02-10-2024. (), dirección: [https://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch#/media/Archivo:Koch_snowflake_\(RGB-CMY\).jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch#/media/Archivo:Koch_snowflake_(RGB-CMY).jpg).
- [21] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe y M. J. Feigenbaum, *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer, 2004, vol. 106.
- [22] M. Sobre todo. “La esponja de Menger.” Fecha de consulta 30-01-2024. (), dirección: <https://matemelga.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/11/menger-stages-big.png>.
- [23] A. L. Ozores, «Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana», *Pensamiento Matemático*, vol. 4, n.º 1, págs. 77-105, 2014.
- [24] A. S. Balankin y B. E. Elizarraraz, «Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow», *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 85, n.º 5, pág. 056314, 2012.
- [25] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 2013.
- [26] M. Ostoja-Starzewski, J. Li, H. Joumaa y P. N. Demmie, *From fractal media to continuum mechanics*, 2014.
- [27] V. E. Tarasov, «Fractional hydrodynamic equations for fractal media», *Annals of Physics*, vol. 318, n.º 2, págs. 286-307, 2005.
- [28] V. E. Tarasov, «Wave equation for fractal solid string», *Modern Physics Letters B*, vol. 19, n.º 15, págs. 721-728, 2005.

- [29] A. S. Balankin y B. E. Elizarraraz, «Hydrodynamics of fractal continuum flow», *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 85, n.º 2, pág. 025 302, 2012.
- [30] J. Li y M. Ostoja-Starzewski, «Fractal solids, product measures and fractional wave equations», *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 465, n.º 2108, págs. 2521-2536, 2009.
- [31] X. O. Olivella y C. A. de Saracíbar Bosch, *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Univ. Politèc. de Catalunya, 2002, vol. 92.
- [32] F. H. Stillinger, «Axiomatic basis for spaces with noninteger dimension», *Journal of Mathematical Physics*, vol. 18, n.º 6, págs. 1224-1234, 1977.
- [33] C. Palmer y P. N. Stavrinou, «Equations of motion in a non-integer-dimensional space», *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, n.º 27, pág. 6987, 2004.
- [34] W. Chen, «Time–space fabric underlying anomalous diffusion», *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 28, n.º 4, págs. 923-929, 2006.
- [35] M. A. Bhatti, *Fundamental finite element analysis and applications*. WILEY, 2005.
- [36] L. J. Segerlind, *Applied finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- [37] G. B. Arfken y H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 6ta ed. Elsevier, 2005.