



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**  
INSTITUTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y AUTOMOTRIZ

**CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS  
MECÁNICAS CON ABSORBEDORES DINÁMICOS DE  
VIBRACIÓN BASADOS EN INERSOR.**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

PRESENTA:

**OSWALDO JERÓNIMO GARCÍA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS**

HCA. CD. DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO. DICIEMBRE DE 2024.



# DEDICATORIA

## A MIS PADRES:

*Salomón Jerónimo García, cuyo ejemplo de fortaleza y perseverancia ha sido mi mayor inspiración. Su espíritu inquebrantable y su lucha constante, aun en los momentos más difíciles, me han enseñado que nunca hay que rendirse, incluso cuando las circunstancias parecen insuperables. Gracias padre por tus buenos consejos y los momentos maravillosos que he vivido a tu lado.*

*Teresa García Salmerón, cuyo apoyo incondicional ha sido siempre mi refugio. Aunque la vida le ha puesto pruebas dolorosas, su valentía y fortaleza siguen iluminando mi camino. Gracias madre, por ese amor firme y eterno que se mantiene constante, incluso en las situaciones más difíciles.*

*Esta obra es el fruto del amor, los sacrificios y los valores que me han inculcado. Cada página de este logro está impregnada de su presencia, su guía y su cariño. Les dedico este triunfo con la certeza de que todo lo que soy es gracias a ustedes.*



## AGRADECIMIENTOS

- *A Dios por permitirme el haber llegado hasta este momento de mi formación profesional.*
- *Agradezco la confianza y la experiencia brindada a quienes formaron parte de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios. De igual forma a mis sinodales, al Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría, al Dr. David Bedolla Martínez y al M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez.*
- *Agradezco el apoyo incondicional por parte de mis hermanas, especialmente a Beatriz Jerónimo García por ser mi fuente de ánimo y por creer en mí en todo momento.*
- *A mi querida amiga Milagros Rosalina Higuera Falfan, quien ha sido mi compañera durante todo este camino. Gracias por tu apoyo constante, por estar siempre en los momentos de incertidumbre y por brindarme tu aliento cuando más lo necesitaba. Tu amistad y confianza han sido esenciales para que pudiera superar los desafíos de esta carrera. Aprecio profundamente tus palabras de ánimo y el haber creído en mí, incluso cuando yo dudaba.*
- *Y a todas las personas que de una y otra forma me apoyaron para el logro de mis objetivos.*

*Oswaldo Jerónimo García*

*Diciembre 2024*



# Resumen

En el ámbito automotriz, el control de vibraciones es esencial para garantizar el confort y la estabilidad de los vehículos. Los sistemas de suspensión desempeñan un papel crucial al mitigar las vibraciones generadas por las irregularidades del terreno y las maniobras dinámicas, influyendo directamente en la adherencia de las llantas al suelo, el comportamiento cinemático del chasis y la experiencia del conductor. Tradicionalmente, los sistemas de control pasivo como los amortiguadores dinámicos de vibraciones (DVA) han sido ampliamente utilizadas debido a su diseño simple y alta confiabilidad, demostrando eficacia en la reducción de oscilaciones mediante masas secundarias acopladas a resortes y amortiguadores.

Recientemente, los avances en tecnología han llevado al desarrollo del inersor, un elemento mecánico innovador basado en la analogía fuerza-corriente. Este dispositivo permite modificar las frecuencias naturales del sistema y reducir las amplitudes de vibración con una masa física mínima, ofreciendo un rendimiento de control significativamente superior al de los sistemas convencionales. En esta investigación de tesis, se evaluó la implementación de absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor (IDVA's) acoplados a una estructura mediante impedancias mecánicas ( $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$ ).

Se emplearon métodos de optimización como los puntos fijos extendidos y el criterio de rendimiento  $H_\infty$  para calibrar los parámetros físicos de los dispositivos y comparar su eficacia en la supresión de vibraciones bajo una fuerza de excitación de tipo armónica aplicada en la base de la estructura. Los resultados destacan la capacidad de los IDVA's para mejorar la estabilidad y el aislamiento vibratorio en estructuras mecánicas.



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>X</b>
<b>Alfabeto griego</b>	<b>XII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XVI</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Justificación.....	4
1.3 Hipótesis.....	5
1.4 Objetivos.....	5
1.4.1 Objetivo general.....	5
1.4.2 Objetivos particulares.....	5
1.5 Metas.....	6
1.6 Alcances y limitantes.....	7
1.6.1 Alcances.....	7
1.6.2 Limitantes.....	7
1.7 Metodología.....	7
<b>2 Estado del arte</b>	<b>11</b>
2.1 Absorbedores dinámicos de vibración.....	11

2.2	Analogía-introducción .....	18
2.3	Analogía fuerza-corriente .....	18
2.4	Inersor .....	20
2.5	Dispositivos inersores clásicos.....	21
2.6	Redes mecánicas basadas en inersor.....	24
2.7	Aplicaciones del inersor en sistemas mecánicos.....	25
<b>3</b>	<b>Marco teórico</b> .....	<b>29</b>
3.1	Elementos de un sistema vibratorio.....	29
3.1.1	Elemento resorte.....	29
3.1.2	Elemento amortiguador.....	30
3.1.3	Elemento de masa o inercia .....	31
3.2	Sistema con excitación armónica.....	31
3.3	Ecuaciones de Euler-Lagrange .....	33
3.3.1	Función de disipación de Rayleigh.....	34
3.4	Transformada de Laplace .....	34
3.4.1	Transformada de derivadas.....	35
3.4.2	Función de transferencia.....	35
3.4.3	Función de respuesta en frecuencia (FRF).....	36
3.5	Análisis dimensional.....	37
3.5.1	Teorema II de Buckingham.....	39
3.6	Teorema de vieta.....	40
3.7	Matriz Jacobiana.....	42
3.8	Optimización .....	43
3.9	Técnica de los puntos fijos (TPF).....	44
3.10	Técnica de los puntos fijos extendida (TPFE).....	46
3.11	Optimización $H_{\infty}$ .....	51
3.11.1	Método de Nishihara.....	53
<b>4</b>	<b>Modelo matemático</b> .....	<b>57</b>
4.1	Función de respuesta en frecuencia .....	57
<b>5</b>	<b>Desarrollo de las técnicas de optimización</b> .....	<b>61</b>
5.1	Puntos fijos extendida.....	61

5.2	Criterio $H_0$ .....	70
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>75</b>
6.1	IDVA-C3 .....	75
6.2	IDVA-C4 .....	80
6.3	IDVA-C6 .....	83
6.4	Comparación de los IDVA's .....	86
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>91</b>
7.1	Trabajos futuros .....	93
<b>A.</b>	<b>Modelo matemático</b>	<b>95</b>
<b>B.</b>	<b>Respuesta en frecuencia</b>	<b>101</b>
<b>C.</b>	<b>Puntos fijos extendida</b>	<b>103</b>
<b>D.</b>	<b>Método de Nishihara</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>109</b>

# Nomenclatura

$J$	Jacobiano
$v$	Velocidad
$\mathcal{H}$	Hessiana
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
$\mathcal{D}$	Denominador
$\mathcal{N}$	Numerador
$b$	Inertancia
$c$	Coefficiente de amortiguamiento
$c_{eq}$	Coefficiente de amortiguamiento equivalente
$D$	Función de disipación de Rayleigh
$F_0$	Amplitud de la excitación
$F$	Magnitud escalar de la fuerza aplicada a las terminales del inersor
$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$	Ecuaciones a optimizar por el método de Nishihara
$G(s)$	Función de transferencia del sistema o respuesta del sistema
$h$	Aproximación a la norma $H_\infty$ propuesta por Nishihara
$j$	Parte imaginaria de un número complejo
$k$	Coefficiente de rigidez
$k_{eq}$	Coefficiente de rigidez equivalente
$L$	Lagrangeano
$m$	Masa
$m_{eq}$	Masa equivalente
$P_{opt}$	Parámetros a optimizar del sistema
$q_x$	Coordenadas generalizadas
$R(s)$	Respuesta en frecuencia adimensional del sistema
$T$	Energía cinética
$U$	Energía potencial

DVA	Absorbedor dinámico de vibración
ECD	Amortiguador de corrientes parásitas
$E_{\text{inersor}}$	Energía cinética del inersor
FPT	Técnica de los puntos fijos
FRF	Función de respuesta en frecuencia
GDL	Grado de libertad
IDVA	Absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor
MDOF	Múltiples grados de libertad
NDVA	Absorbedor de vibración dinámico no tradicional
RIDTMD	Amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional
TID	Amortiguador de inercia sintonizado
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersor
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado

# Alfabeto griego

$\omega_1^2$	Frecuencia natural al cuadrado asociado a la estructura
$\omega_2^2$	Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA
$\omega_3^2$	Frecuencia natural al cuadrado asociado al IDVA
$\zeta$	Relación de amortiguamiento
$\mu$	Relación inercia-masa
$\eta$	Relación de frecuencia inercia-masa
$\beta$	Relación de masas
$q$	Relación de frecuencia natural
$\Omega$	Relación de frecuencia forzada
$\Pi$	Parámetros adimensionales presentes en un sistema

# Índice de figuras

Figura 1.1: Esquema propuesto del Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor IDVA acoplado a una estructura mecánica, donde a, b y c representan las impedancias mecánicas $C_3$ , $C_4$ y $C_6$ respectivamente.....	4
Figura 1.2: Metodología de la investigación utilizada en este trabajo [3]. .....	7
Figura 2.1: Absorbedor de vibración dinámico: a) No amortiguado, b) Amortiguado [56]. .....	11
Figura 2.2: El siguiente diagrama muestra un método de aplicación a la presente invención de Hermann Frahm como un barco o similar [4] . .....	12
Figura 2.3: Amortiguador TMD conectado a un sistema primario forzado por un desequilibrio rotativo [16]. .....	13
Figura 2.4: Absorbedor de vibración dinámico: a) Tradicional, b) no tradicional [56]. .	14
Figura 2.5: Sistemas de control de vibraciones con un a) VD (amortiguador viscoso), b) VMD (amortiguador de masa viscosa), c) TVMD (amortiguador de masa viscosa sintonizado) [26]. .....	15
Figura 2.6: Amortiguador viscoso (VD) [26]. .....	15
Figura 2.7: Amortiguador de masa viscosa (VMD) [26]. .....	15
Figura 2.8: (a) Sistema estructural de 1-GDL; (b) Sistema tradicional amortiguador de masa sintonizado (TMD); (c) Sistema amortiguador de inercia sintonizado (TID) [27]. .....	16
Figura 2.9: Inersor incorporando un volante de inercia [28]. .....	16
Figura 2.10: Un sistema SDOF incorporando un RIDTMD [28]. .....	16
Figura 2.11: Estructura primaria de un solo grado de libertad (SDOF) que incorpora la configuración propuesta TMDI [29]. .....	17
Figura 2.12: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad ( $F, v$ ), donde $v = v_2 - v_1$ [1]. .....	18
Figura 2.13: Símbolo del inersor [68]. .....	20
Figura 2.14: Analogía entre resortes, inersores y amortiguadores para redes mecánicas, y los inductores, capacitores y resistores para redes eléctricas [36]. .....	21
Figura 2.15: Diseño de inersor husillo de bolas. ....	22
Figura 2.16: Diseño de inersor piñón-cremallera. ....	22
Figura 2.17: Diseño de inersor Hidráulico. ....	23
Figura 2.18: Diseño de inersor de fluido helicoidal. ....	23

Figura 2.19: Diseño de inersor de bomba de engranajes [37].....	24
Figura 2.20: Modelo mecánico del inersor rotacional [37].....	24
Figura 2.21: Redes mecánicas basadas en inersor. Donde: $b$ es la inertancia, $c$ el coeficiente de amortiguamiento y $k_1$ la constante de resorte [35], [38]. .....	25
Figura 2.22: Kimi Raikkonen en el gran premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo llevó a la victoria con ayuda del inersor. Foto de LAT Photographic [23]. .....	26
Figura 2.23: Esquema a escala de la motocicleta y su piloto en vista lateral. El modelo de motocicleta-conductor muestra la disposición de la máquina con cada una de las masas representadas como un círculo sombreado a escala proporcional [39]. .....	27
Figura 2.24: Aplicación del inersor husillo de bolas en sistemas de suspensión de trenes. .....	27
Figura 2.25: Puente de cristal del gran cañón de Zhangjiajie y uno de los ECD giratorios a gran escala.....	28
Figura 3.1: Elementos de un sistema vibratorio [45]. .....	29
Figura 3.2: Excitación armónica en la base [44]. .....	32
Figura 3.3: Función de respuesta en frecuencia. a) Sistema físico de un sistema resorte-masa-amortiguador, b) Diagrama de bloques entrada-salida [44].....	37
Figura 3.4: Mínimo y máximo de una función [34]. .....	44
Figura 3.5: Puntos fijos P y Q cuando el amortiguamiento es cero e infinito de un DVA clásico [56]. .....	45
Figura 3.6: FRF de la estructura primaria para diferentes valores de amortiguamiento [71]. .....	46
Figura 3.7: Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor en arreglo tipo C3 (IDVA-C3) [32].....	47
Figura 3.8: Frecuencias invariantes $\Omega_0, \Omega_1$ y $\Omega_2$ [32].....	51
Figura 4.1: Esquema del modelo propuesto en este trabajo.....	57
Figura 6.1: Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al IDVA-C3 vs la relación de frecuencias $\Omega$ , siendo P, Q, R y S los puntos fijos. ....	76
Figura 6.2: Respuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el IDVA-C3 sujeta a una fuerza de excitación armónica en la base para diferentes valores de amortiguamiento. ....	78
Figura 6.3: Respuesta en frecuencia del IDVA-C3 utilizando la técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara. ....	79

Figura 6.4: Respuesta en frecuencia del IDVA-C4 para distintos valores de amortiguamiento. ....	81
Figura 6.5: Técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara para el IDVA-C4. ....	82
Figura 6.6: Respuesta en frecuencia del IDVA-C6 para distintos valores de amortiguamiento. ....	84
Figura 6.7: Técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara para el IDVA-C6. ....	85
Figura 6.8: FRF para el IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6 utilizando la técnica de los puntos fijos extendida. ....	86
Figura 6.9: FRF para el IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6 utilizando el método de optimización descrito por Nishihara. ....	87
Figura 6.10: Gráfica para los distintos valores de $\beta$ obtenidos utilizando la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio de $H_{\infty}$ . ....	88
Figura 6.11: Comparación de las curvas de las FRF y el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones %S <sub>Bi</sub> del IDVA-C3 y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el IDVA-C3 son: $\mu_{opt}= 0.22082$ , $\eta_{opt}=1.04808$ , $q_{opt}=0.90832$ y $\zeta_{opt} = 0.16568$ , mientras para el DVA clásico son: $q_{opt}=0.90905$ y $\zeta_{opt} = 0.18546$ . ....	89

# Índice de tablas

Tabla 2.1: Analogía fuerza-corriente entre un sistema mecánico y eléctrico [1].	19
Tabla 3.1: Magnitudes físicas derivadas del SI [53].	38
Tabla 6.1: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia en su forma adimensional.	75
Tabla 6.2: Valores numéricos para cada frecuencia resonante no amortiguada.	77
Tabla 6.3: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.	77
Tabla 6.4: Resultados numéricos de los parámetros óptimos mediante el método de Nishihara.	79
Tabla 6.5: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos del IDVA-C4.	80
Tabla 6.6: Valores numéricos para las frecuencias resonantes del IDVA-C4.	80
Tabla 6.7: Resultados numéricos de los parámetros óptimos para el IDVA-C4.	82
Tabla 6.8: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos del IDVA-C6.	83
Tabla 6.9: Valores numéricos para las frecuencias resonantes del IDVA-C6.	83
Tabla 6.10: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada del IDVA-C6.	83
Tabla 6.11: Resultados numéricos de los parámetros óptimos para el IDVA-C4.	85
Tabla 6.12: Valores numéricos para los parámetros óptimos del IDVA-C3 al modificar el valor de $\beta$ obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio $H^\infty$ .	87
Tabla 6.13 resultados para el agrandamiento del ancho de banda operativo (%SB) VS el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema (%SP). Así como también el valor de la amplitud máxima ( $H^\infty$ ).	90

# 1

## 1 Introducción

La vibración se define como el movimiento oscilante, alternativo u otro movimiento periódico de un cuerpo o medio rígido o elástico forzado desde una posición o estado de equilibrio. Para una estructura, las vibraciones excesivas o indeseables podrían causar cargas/deformaciones externas, fatiga, incomodidad humana o incluso el colapso de la estructura.

La reducción de vibraciones indeseadas en las estructuras es una parte importante del proceso de diseño, especialmente para aquellas estructuras que pueden estar expuestas a fuerzas de excitación externas. Cuando una fuerza de excitación externa coincide con la frecuencia natural de la estructura, se produce un fenómeno conocido como resonancia. Este fenómeno causa un aumento significativo en la amplitud de las vibraciones del sistema, lo que puede llevar a daños estructurales graves. Para prevenir estos daños, se implementan diversas técnicas y sistemas de control, conocidos como sistemas de amortiguamiento. Estos sistemas están diseñados para reducir las amplitudes de vibración y proteger la integridad de la estructura. Entre estos, se encuentran los topes de impacto, que limitan el movimiento excesivo; los amortiguadores viscosos, que disipan la energía a través de fluidos viscosos; los absorbedores dinámicos de vibración (DVA's), que añaden una masa adicional al sistema para generar un equilibrio dinámico de fuerzas; los inersores, que utilizan el principio de inercia para atenuar los movimientos; y los amortiguadores con fluidos inteligentes, que ajustan sus propiedades en respuesta a las condiciones de vibración.

Aunque se ha demostrado que los sistemas de control de vibraciones pasivos convencionales anteriores son eficaces y se aplican ampliamente en la práctica, todavía existen algunas limitaciones inherentes. Por ejemplo, la eficacia del control de DVA depende en gran medida de la relación de masas, es decir, la relación entre las masas físicas de las estructuras secundarias y primarias. En términos generales, se requiere una gran masa secundaria para lograr el rendimiento de control deseado. Por tal motivo, un elemento mecánico de dos terminales propuesto inicialmente por Smith [1] en 2002, denominado *inersor*, ha atraído mucho la atención en la ingeniería mecánica y civil recientemente. El inersor es definido como un dispositivo mecánico que absorbe la energía cinética por medio de volantes de inercia (discos inerciales) modificando las frecuencias naturales de los sistemas. Al ser un dispositivo de dos terminales, el inersor puede constituir redes mecánicas más efectivas al acoplarse con resortes y amortiguadores. Además, el inersor tiene un importante efecto de amplificación de masa, especialmente cuando una de sus terminales está conectada a tierra. Por lo tanto, el inersor se puede utilizar para reducir la masa auxiliar de los sistemas de control de vibraciones convencionales.

## 1.1 Planteamiento del problema.

Las vibraciones en estructuras son oscilaciones mecánicas que pueden ocurrir en edificios, puentes, maquinaria industrial y otros sistemas estructurales. Estas oscilaciones pueden ser inducidas por diversas fuentes, tanto internas como externas, y pueden tener efectos significativos en la integridad y funcionalidad de la estructura.

Las vibraciones no controladas en estructuras pueden conducir a diversos problemas, tales como: fatiga del material, resonancia, pérdida del confort, desajuste y desgaste en equipos industriales. Lo que puede ocasionar el colapso parcial o total de la estructura o generar daños como fisuras en las vigas, columnas o conexiones, que debilitan la estructura con el tiempo. Debido a estos problemas se han implementado sistemas de

amortiguamiento que generan fuerzas que actúan en contra de las fuerzas de excitación externa. Por ejemplo, el absorbedor dinámico de vibración (DVA) que es un dispositivo mecánico que consta de una masa secundaria que se conecta a una estructura (llamada estructura primaria) a través de resortes y amortiguadores, además, tiene la capacidad de generar un equilibrio dinámico de fuerzas cuando se acopla a una máquina o estructura mecánica lo que da como resultado una disminución en su amplitud de vibración.

Posteriormente, se comenzó a utilizar un dispositivo de control inercial en los sistemas estructurales, conocido como *inersor*. Los inersores son dispositivos mecánicos con dos nodos (dos terminales) en los que la fuerza que se les aplica es proporcional a la aceleración relativa entre estas terminales. Estos dispositivos han demostrado una excelente eficiencia en el control de movimientos indeseados en varias áreas de la ingeniería sin agregar una gran cantidad de masa. Una ventaja significativa del inersor es que puede mejorar la eficacia de los dispositivos de control, como el DVA, reduciendo sus dimensiones, lo cual es una de sus limitantes de uso.

Recientemente, se han propuesto configuraciones para los inersores que consiste en un arreglo entre resorte, amortiguador e inersor a lo que denominaron redes o impedancias mecánicas. Los resultados demuestran que su implementación en los DVA mejora el control de las amplitudes de vibración del sistema [2].

Este trabajo de investigación de tesis propone implementar estas impedancias a estructuras mecánicas no amortiguadas de un solo grado de libertad (SDOF) acopladas al absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA), bajo efectos de excitación armónica en la base. El amortiguador del DVA clásico será reemplazado por las redes mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$  como se ilustra en la Figura 1.1 con el propósito de obtener los parámetros óptimos de diseño. Con el objetivo de hallar primeramente fórmulas de diseño simples, se considera la función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema principal no amortiguada como la función objetivo a ser minimizada, para esto se aplicará la técnica de los puntos fijos extendida. Posteriormente, se implementará el criterio de rendimiento  $H_\infty$  para el desarrollo de ecuaciones no lineales que nos lleven a

las soluciones óptimas. Finalmente, con las soluciones encontradas se realizará una comparativa para determinar cuál de las tres redes mecánicas garantiza una mejor supresión de vibraciones.

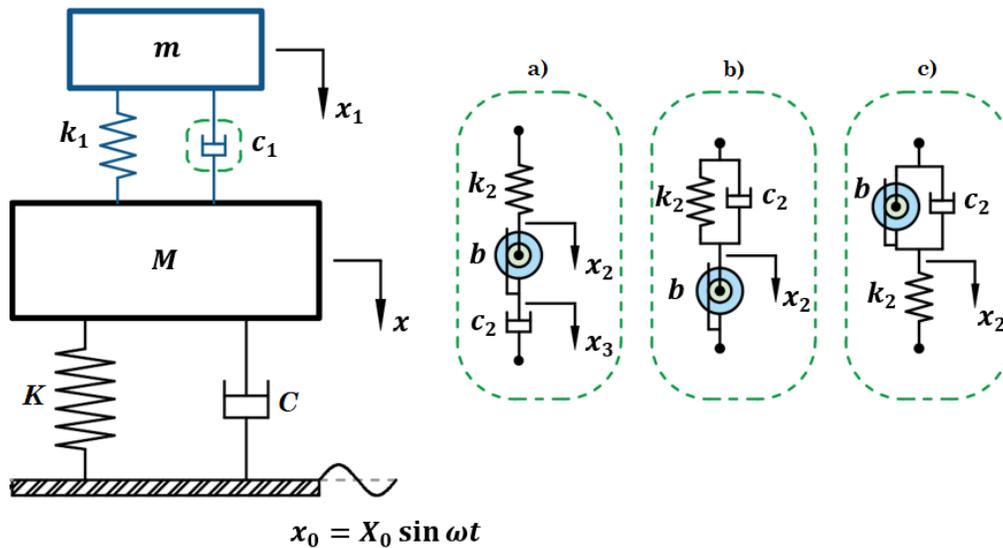


Figura 1.1: Esquema propuesto del Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor IDVA acoplado a una estructura mecánica, donde a, b y c representa las impedancias mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$  respectivamente.

## 1.2 Justificación.

La presencia de vibraciones en máquinas y estructuras es un fenómeno común debido a la acción de fuerzas externas, como el movimiento de piezas mecánicas, el tráfico vehicular, el viento y las actividades sísmicas. Estas vibraciones pueden tener efectos adversos significativos, especialmente cuando la frecuencia de las fuerzas de excitación coincide con las frecuencias naturales del sistema, causando un fenómeno conocido como resonancia. La resonancia amplifica las vibraciones a niveles descontrolados, lo que puede provocar daños severos en las máquinas y estructuras, comprometiendo su integridad y funcionamiento.

Los sistemas de amortiguación, como los amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración e inersores, desempeñan un papel vital en la reducción de las

amplitudes de vibración. Estos sistemas disipan la energía, protegiendo los componentes estructurales, mejorando la seguridad y el rendimiento de las máquinas.

Por tal motivo este trabajo de tesis se ocupa de implementar absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor (IDVA's) y obtener parámetros óptimos de diseño ideales. Esto con la finalidad de comparar el IDVA con la impedancia mecánica que presente un mayor rendimiento en la supresión de vibraciones. El diseño ideal no solo preserva la integridad estructural, sino que también aumentan la seguridad y el confort de los usuarios, y minimizan los costos de mantenimiento y reparación a largo plazo.

### **1.3 Hipótesis**

La integración de las redes mecánicas basadas en inersor en conjunto con el DVA clásico, producirá un sistema absorbedor de vibraciones de alto rendimiento dinámico para el control de vibraciones de estructuras mecánicas con excitación en la base.

### **1.4 Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo general**

Controlar de forma pasiva las vibraciones en estructuras mecánicas bajo excitación armónica en la base, utilizando absorbedores de vibración basados en inersor.

#### **1.4.2 Objetivos particulares**

- I. Obtener el modelo matemático de la estructura con absorbedores de vibración basados en inersor utilizando las redes mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$ .
- II. Aplicar la técnica de los puntos fijos extendida con la finalidad de obtener parámetros óptimos de forma cerrada para el diseño del absorbedor propuesto.

- III. Aplicar el índice de rendimiento  $H_\infty$  para obtener de manera numérica las soluciones óptimas, con el propósito de minimizar las amplitudes de vibración de la estructura mecánica sujeta a una excitación armónica en su base.
- IV. Realizar las simulaciones numéricas correspondientes utilizando los parámetros óptimos calculados a partir de cada criterio de optimización.
- V. Comparar los resultados obtenidos a partir de las técnicas de optimización empleadas y determinar cuál es el diseño con la red mecánica con mejores resultados.

## 1.5 Metas

- I. Adquirir conocimiento sobre vibraciones mecánicas y el contexto histórico de los absorbedores dinámicos de vibración, así como, también realizar una investigación de la implementación del inersor y sus aplicaciones reales.
- II. Obtención y desarrollo del modelado matemático del absorbedor dinámico de vibración basado en inersor propuesto mediante el formulismo Euler-Lagrange.
- III. A partir de la función de respuesta en frecuencia del sistema obtener los parámetros óptimos de diseño mediante la técnica de los puntos fijos extendida.
- IV. Obtener de forma numérica los parámetros óptimos del IDVA mediante el criterio de optimización  $H_\infty$ .
- V. Comparar los resultados mediante las técnicas de optimización empleadas.
- VI. Determinar cuál de las tres redes mecánicas en el absorbedor de vibración propuesto ofrece un mayor rendimiento.

## 1.6 Alcances y limitantes

### 1.6.1 Alcances

Se espera que el IDVA que presente mejores resultados junto con sus parámetros óptimos pueda ser utilizados en un futuro para la creación de un dispositivo absorbedor de manera real esperando obtener un comportamiento similar o igual a los presentados en esta investigación.

### 1.6.2 Limitantes

El absorbedor de vibración dinámico basado en inersor (IDVA) propuesto no tendrá una implementación física, únicamente tendrá un estudio teórico.

## 1.7 Metodología

Para este trabajo de tesis es necesario seguir una secuencia de pasos que ayuden a tener un orden en la investigación. La metodología a emplear se basa en la investigación presentada por Canales [3]. En la Figura 1.2 se muestra el esquema de esta metodología.

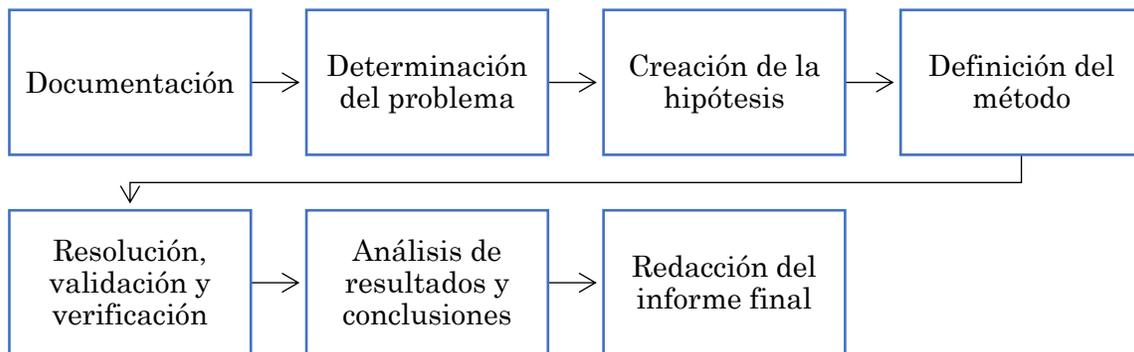


Figura 1.2: Metodología de la investigación utilizada en este trabajo [3].

A continuación, se da una descripción de cada uno de los pasos de la metodología:

1. **Documentación:** Esta es una etapa fundamental ya que se realiza el proceso de recopilación de toda la información relevante del tema a abordar. Esta documentación será la base para el desarrollo de un tema de investigación, de tal manera que debe contener información acerca de los contextos históricos relacionados, misma que, será utilizada para elaborar el estado del arte del tema de investigación, así como el marco teórico.

Para este trabajo de tesis se investigará sobre los absorbedores dinámicos de vibración, inersores y redes mecánicas, así como su implementación en el control pasivo de vibraciones. Además, se investiga las técnicas de optimización que serán utilizadas para el diseño del sistema propuesto.

2. **Determinación del problema:** Esta etapa es muy importante porque es aquí donde se define y se describe con precisión la cuestión o el desafío específico que la investigación pretende abordar. En este caso en lo particular, se plantea el problema de vibraciones no deseadas en estructuras por lo tanto se aborda la investigación sobre el control pasivo de vibraciones con absorbedores dinámicos de vibración que se basan en inersores al implementar tres redes mecánicas diferentes.

3. **Creación de la hipótesis:** Se define como una idea que puede no ser verdadera, basada en información previa. Son posibles soluciones que se expresan como generalizaciones o proposiciones. Generalmente, la hipótesis es una suposición específica que el investigador plantea para explicar o predecir como dos o más variables están relacionadas y debe ser probada mediante observación y análisis. En este trabajo de tesis la hipótesis se plantea de la siguiente manera:

La integración de las redes mecánicas basadas en inersor en conjunto con el DVA clásico, producirá un sistema absorbedor de vibraciones de alto rendimiento dinámico para el control de vibraciones de estructuras mecánicas con excitación en la base.

4. **Definición del método:** Se obtendrá el modelo matemático del IDVA propuesto utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange y la segunda ley de Newton, posteriormente, haciendo uso del análisis modal y después de un tratamiento matemático, se obtendrá la función de respuesta en frecuencia FRF de la estructura mecánica. Siendo el objetivo la FRF a minimizar, se plantean problemas de optimización que se pretenden resolver utilizando la técnica de los puntos fijos extendida y el índice de rendimiento  $H_{\infty}$ .
5. **Resolución, validación y verificación:** La resolución se refiere a la capacidad que tiene la técnica a emplear para ofrecer soluciones efectivas, mientras que la validación implica el proceso de asegurarse que los modelos o técnicas empleados sean adecuados y confiables, por último, la verificación se refiere a la confirmación y validación de los resultados obtenidos mediante estos métodos o técnicas.

Para este trabajo de tesis, se emplea la técnica de los puntos fijos extendida que por su origen descrito por Den Hartog, los resultados se obtienen mediante un procedimiento heurístico, sin embargo, al implementar la técnica de rendimiento  $H_{\infty}$  se demuestra por medio de métodos numéricos y tratamiento matemático que los resultados obtenidos son casi idénticos a los de la técnica de puntos fijos.

6. **Análisis de resultados y conclusiones:** Una vez que se obtienen los resultados analíticos o numéricos se realiza una comparación con los reportados en la literatura y se plantea si los resultados fueron los esperados según la hipótesis. En caso de que los resultados no cumplan en su totalidad con los objetivos o metas, se propone una posible solución y se argumenta los motivos del porque no fue posible su solución.
7. **Redacción del informe final:** Una vez concluido el proceso de análisis de investigación se procede a redactar el documento de tesis. Es de vital importancia poder comunicar de manera clara y efectiva los objetivos, métodos, resultados y conclusiones de estudio para una mejor comprensión.



# 2

## 2 Estado del arte

### 2.1 Absorbedores dinámicos de vibración

En las últimas décadas se han estudiado y mejorado varios mecanismos y técnicas para el control de vibraciones en varios campos de la ingeniería. Un método que ha resultado eficiente es la implementación de dispositivos mecánicos denominados absorbedores dinámicos de vibración (DVA's por sus siglas en inglés) o amortiguadores de masas sintonizadas (TMD's por sus siglas en inglés). Un sistema con DVA clásico se compone de dos componentes principales: el sistema primario o estructura principal y el sistema secundario o el absorbedor, como se observa en la Figura 2.1.

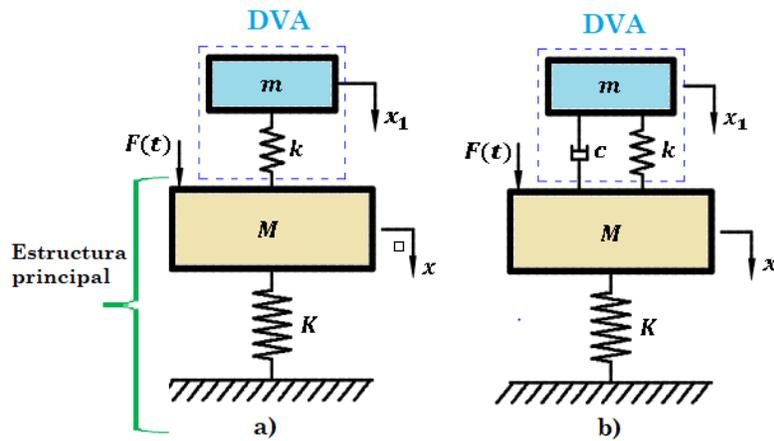


Figura 2.1: Absorbedor de vibración dinámico: a) No amortiguado, b) Amortiguado [56].

El objetivo principal del absorbedor es disminuir las amplitudes de vibración de la estructura principal mediante el equilibrio dinámico entre los desplazamientos de la estructura principal y del absorbedor. Este equilibrio se logra ajustando estratégicamente los parámetros de rigidez y amortiguamiento en el sistema.

El primer absorbedor dinámico de vibración sin amortiguamiento fue propuesto por Hermann Frahm [4], [5] quien patentó su invento en 1909 con el objetivo de reducir el movimiento de balanceo de los barcos y estaba constituido por una masa secundaria y un resorte conectado entre el sistema principal y la masa secundaria. Dicho invento dio origen a numerosos estudios en las vibraciones mecánicas. Véase Figura 2.2.

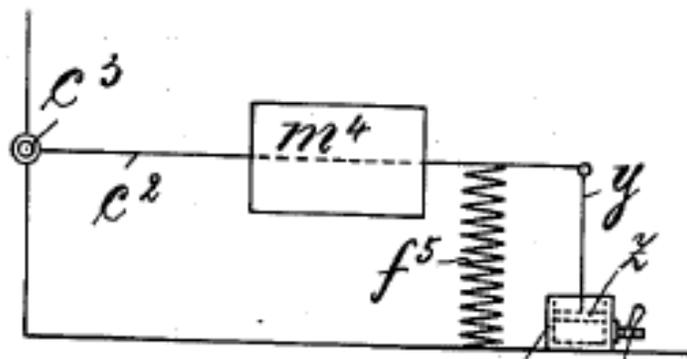


Figura 2.2: El siguiente diagrama muestra un método de aplicación a la presente invención de Hermann Frahm como un barco o similar [4] .

Posteriormente al DVA de H. Frahm se le añadió un amortiguador al sistema secundario para el cual, en 1928, Ormondroyd y Den Hartog [6] desarrollaron soluciones analíticas utilizando la técnica de los puntos fijos (FPT por sus siglas en inglés) para el diseño óptimo de este nuevo dispositivo. En 1932, Hahnkamm [7] obtuvo por primera vez el parámetro de sintonización óptima del DVA utilizando dicha técnica. Después de eso, Brock [8] en 1946 derivó la expresión de la amortiguación óptima del absorbedor utilizando esta teoría. Los parámetros óptimos obtenidos del DVA fueron introducidos por Den Hartog [9] a través de su libro de texto conocido como “*Mechanical Vibration*”.

Luego en 2005, Ozer y Royston [10] extendieron esta técnica de los puntos fijos a sistemas mecánicos de múltiples grados de libertad (MDOF por sus siglas en inglés)

utilizando el teorema de inversión matricial de Sherman-Morrison [11] para la determinación de puntos invariantes de sistemas MDOF de cualquier tamaño.

Después, Krenk [12] propuso una teoría de ajustes de frecuencias que consiste en determinar el factor de amortiguamiento óptimo del sistema con el objetivo de aplanar la función de respuesta en frecuencia (**FRF** por sus siglas en inglés) de la estructura principal. Por otro lado, Asami et al. [13] y Nishihara y Asami [14], [15] utilizaron los métodos de optimización de  $H_\infty$  y  $H_2$  así como el teorema de vieta para el desarrollo de soluciones analíticas de forma cerrada para el diseño óptimo del DVA. Adicionalmente en 2015, Argentini et al. [16] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del TMD tomando como fuente de excitación una masa desbalanceada como se observa en la Figura 2.3.

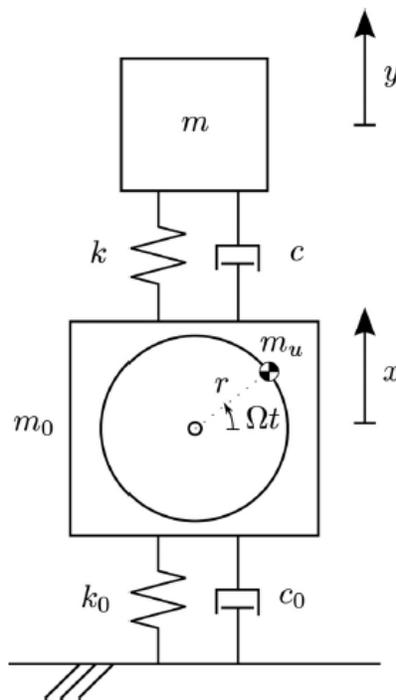


Figura 2.3: Amortiguador TMD conectado a un sistema primario forzado por un desequilibrio rotativo [16].

Por otra parte, Ren [17] propuso una modificación al DVA clásico obteniendo así un nuevo dispositivo absorbedor de vibración. A este dispositivo se le conoce como absorbedor de vibración dinámico no tradicional (**NDVA**, por sus siglas en inglés). En esta configuración una de las terminales del elemento amortiguador es conectado

directamente a tierra (estructura base) ver Figura 2.4. Ren [17] y Liu y Liu [18] propusieron el principio de optimización del NDVA con el objetivo de reducir la amplitud máxima de respuesta del sistema principal bajo excitación armónica. Los resultados obtenidos con estas investigaciones demostraron que el NDVA es más efectivo en el control de vibraciones de la estructura principal en comparación con el DVA clásico.

Así mismo, Wong y Cheung [19] calcularon los parámetros óptimos para el NDVA utilizando la técnica de los puntos fijos para reducir las amplitudes de vibración del sistema primario o estructura principal considerando un movimiento armónico como fuente de excitación. Cheung y Wong [20] utilizaron la técnica de los puntos fijos descrita por Den Hartog para desarrollar los parámetros óptimos de un NDVA con el propósito de minimizar la respuesta de velocidad de vibración máxima del sistema principal con excitación armónica en la base. También, Cheung y Wong [21], [22] desarrollaron soluciones analíticas para el NDVA utilizando las técnicas de optimización  $H_\infty$  y  $H_2$  con el objetivo de minimizar la amplitud máxima de respuesta del sistema primario y minimizar la energía de vibración total del sistema en todas las frecuencias, respectivamente.

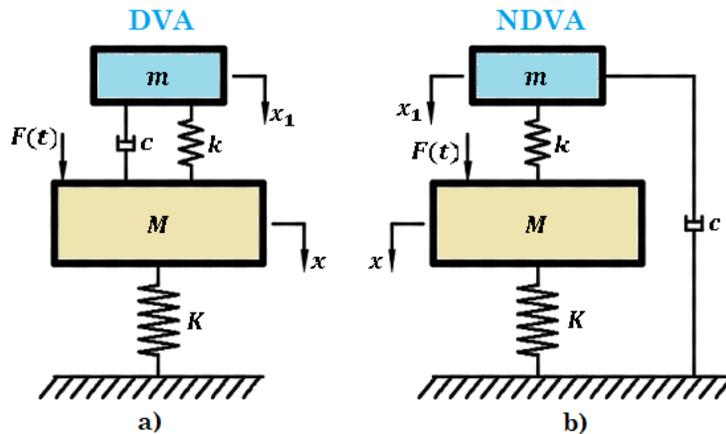


Figura 2.4: Absorbedor de vibración dinámico: a) Tradicional, b) no tradicional [56].

Recientemente, ha sido introducido un innovador dispositivo mecánico destinado a mitigar la vibración en los sistemas de suspensión de vehículos conocido como *inersor* [1], [23], [24]. Esta novedosa tecnología representa un avance significativo en el campo

de la ingeniería automotriz, ofreciendo una solución eficaz para mejorar la estabilidad y el confort durante la conducción.

Se ha comprobado que la incorporación del dispositivo inersor mejora tanto la capacidad de respuesta dinámica como el rango efectivo de frecuencias del DVA cuando se integra en conjunto con resortes y amortiguadores ya sea en una disposición en serie o en paralelo [25]. Es más, en 2012 Ikago et al. [26] propusieron un nuevo dispositivo para el control de vibraciones causado por sismos conocido como amortiguador de masas viscosas sintonizado (TVMD, por sus siglas en inglés). Este dispositivo demostró ser más eficiente en comparación con los DVA's convencionales, ver Figuras 2.5-2.7.

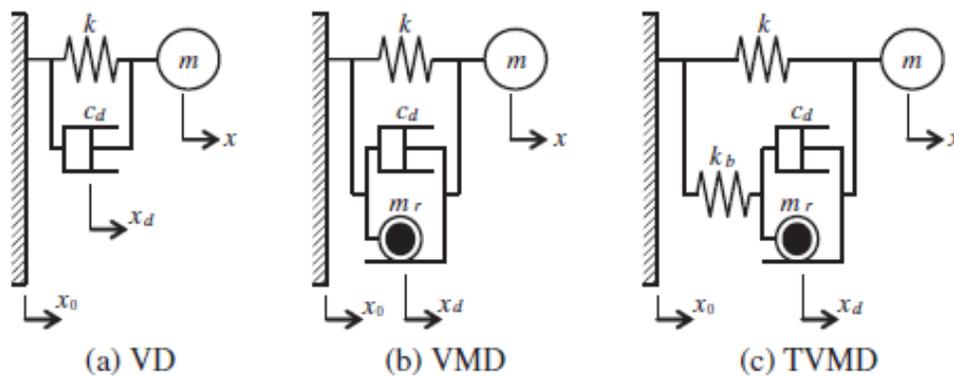


Figura 2.5: Sistemas de control de vibraciones con un a) VD (amortiguador viscoso), b) VMD (amortiguador de masa viscosa), c) TVMD (amortiguador de masa viscosa sintonizado) [26].



Figura 2.6: Amortiguador viscoso (VD) [26].

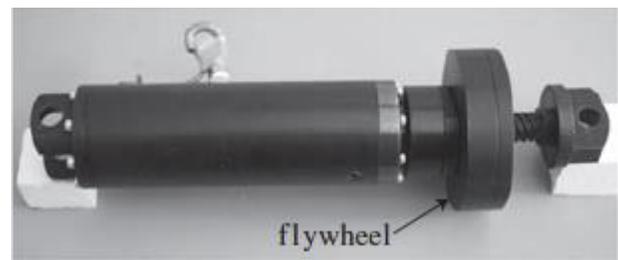


Figura 2.7: Amortiguador de masa viscosa (VMD) [26].

Posteriormente, Lazar et al. [27] presentaron una innovadora propuesta destinada a abordar el desafío del control de vibraciones en estructuras a lo que llamaron amortiguador de inercia sintonizado (TID, por sus siglas en inglés). En la Figura 2.8 se

muestra el modelo que utilizaron para un sistema de un solo grado de libertad (GDL) en donde comparan el sistema utilizando un TMD y un TID. Cabe mencionar que la propuesta también fue implementada para un sistema de tres-grados de libertad y n-grados de libertad.

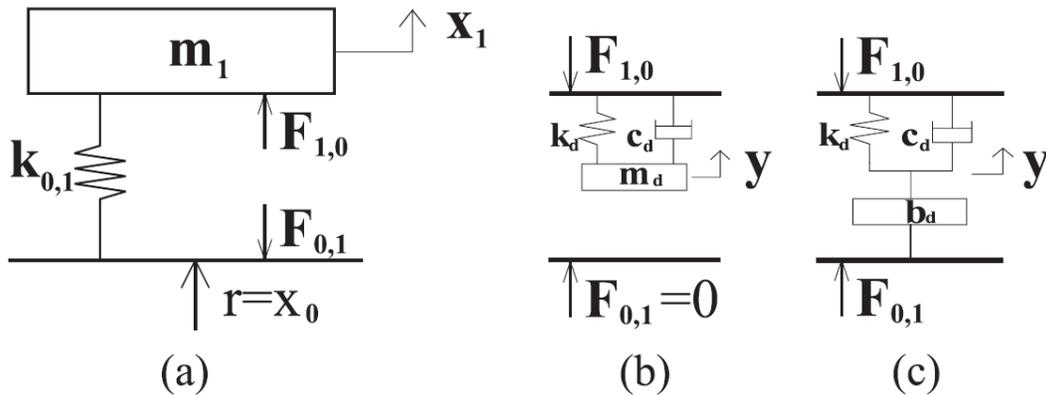


Figura 2.8: (a) Sistema estructural de 1-GDL; (b) Sistema tradicional amortiguador de masa sintonizado (TMD); (c) Sistema amortiguador de inercia sintonizado (TID) [27].

Mas tarde, Garrido et al. [28] propusieron un nuevo dispositivo para el control de vibraciones denominado amortiguador de masas sintonizadas de doble inercia rotacional (**RIDTMD**, por sus siglas en inglés). El dispositivo consta de un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de amortiguador-inersor, dicho sistema a su vez es acoplado a un sistema de un solo grado de libertad (SDOF) como se ilustra en las figuras 2.9 y 2.10. Los parámetros óptimos se obtuvieron utilizando un algoritmo de programación cuadrática secuencial.

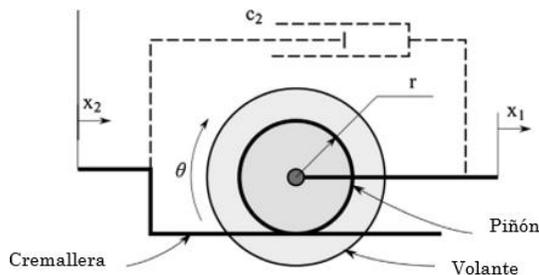


Figura 2.9: Inersor incorporando un volante de inercia [28].

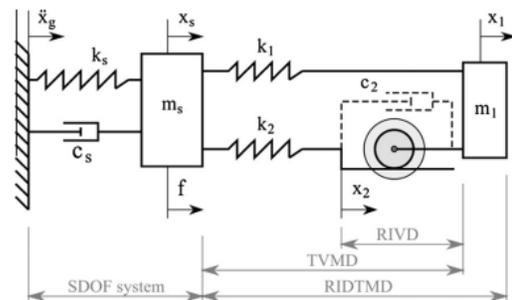


Figura 2.10: Un sistema SDOF incorporando un RIDTMD [28].

Después, Marian y Giaralis [29] aplicaron este método de programación cuadrática secuencial a una nueva configuración de control de vibración pasiva a la que llamaron amortiguador de masa sintonizado basado en inersores (TMDI, por sus siglas en inglés) para sistemas estructurales excitados por soporte estocástico. El método fue aplicado a sistemas de MDOF, pero una representación de un sistema SDOF es ilustrado en la figura 2.11. Luego en 2017, Javidialesaadi y Wierschem [30] extendieron la técnica de los puntos fijos con el objetivo de optimizar la respuesta de frecuencia del amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional (RIDTMD) pero solo calcularon soluciones numéricas. Así mismo, Pietrosanti et al. [31] propusieron tres metodologías de optimización numérica para el diseño óptimo del amortiguador de masa sintonizado basado en inersor TMDI las cuales se basan en: la minimización del desplazamiento relativo y la aceleración absoluta de la estructura principal del TMDI, así como también en la maximización de la relación entre la energía disipada con el sistema secundario y la energía total de entrada.

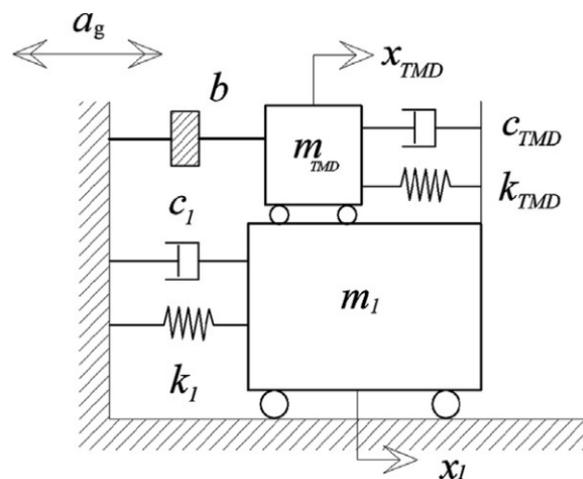


Figura 2.11: Estructura primaria de un solo grado de libertad (SDOF) que incorpora la configuración propuesta TMDI [29].

Por otro lado, Hu y Chen [2] propusieron reemplazar el amortiguador del DVA tradicional por algunas redes mecánicas basadas en inersor y demostraron que tres de éstas mejoran el desempeño dinámico de los absorbedores dinámicos de vibración amortiguados basados en inersor (IDVAs). Estas configuraciones de redes son: la configuración C3 (la conexión en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador), la

configuración C4 (la conexión de un inersor conectado en serie a un arreglo en paralelo de resorte-amortiguador), la configuración C6 (la conexión de un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de inersor-amortiguador). Para poder obtener las soluciones numéricas para el diseño óptimo de los IDVAs ellos utilizaron el sistema de cómputo numérico de Matlab. Mas tarde, Barredo et al. [32] propusieron la técnica de puntos fijos extendida. Utilizando esta técnica desarrollaron soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo de las impedancias mecánicas C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> y C<sub>6</sub> y los resultados fueron comparados con los que obtuvieron Hu y Chen [2].

## 2.2 Analogía-introducción

Liu et al. [33] mencionan que existen dos métodos de analogía eléctrica-mecánica: la analogía completa (analogía de admitancia o movilidad) y la analogía incompleta (analogía de impedancia o directa). La analogía completa es más ampliamente utilizada porque puede mantener la correspondencia entre los componentes en serie y en paralelo. La analogía completa se basa en la analogía fuerza-corriente. El concepto de inersor en [1] fue inspirado por la analogía completa.

## 2.3 Analogía fuerza-corriente

Una red mecánica (idealizada) de tipo traslacional consta de elementos mecánicos (como resortes, masas, amortiguadores y palancas) que están interconectados de manera rígida. Es habitual restringir el movimiento para que sea paralelo a un eje fijo y relativo a un punto de referencia fijo en un marco inercial, llamado suelo. El par de puntos finales del resorte y el amortiguador se denominan nodos (o terminales). Para la masa, una terminal es la posición de su centro de gravedad, mientras que la otra terminal es el suelo.

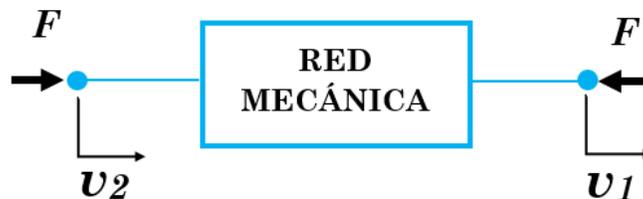


Figura 2.12: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad ( $F, v$ ), donde  $v = v_2 - v_1$  [1].

Un puerto es un par de nodos (o terminales) en un sistema mecánico al que se aplica una fuerza  $F$  igual y opuesta y que experimenta una velocidad relativa  $v$ . Alternativamente, se puede aplicar una velocidad que resulta en una fuerza.

En la Figura 2.12 se muestra un diagrama de cuerpo libre de una red mecánica de un puerto (dos terminales) que muestra la convención de signos por la cual una  $F$  positiva da una fuerza de compresión y una  $v = v_2 - v_1$  positiva ( $v_2 > v_1$ ), corresponde a los nodos que se mueven juntos. El producto de  $F$  y  $v$  tiene unidades de potencia [W] y se denomina par fuerza-velocidad ( $F, v$ ). En general, no es necesario que ninguno de los nodos en un puerto esté conectado a tierra.

La analogía fuerza-corriente (a veces denominada *movilidad*) entre redes eléctricas y mecánicas se puede observar en la Tabla 2.1 mediante las siguientes correspondencias:

Tabla 2.1: Analogía fuerza-corriente entre un sistema mecánico y eléctrico [1].

Sistema mecánico	Equivalencia	Sistema eléctrico
Fuerza	↔	Corriente
Velocidad	↔	Voltaje
Tierra mecánica	↔	Tierra eléctrica
Resorte	↔	Inductor
Amortiguador	↔	Resistencia
Energía cinética	↔	Energía eléctrica
Energía potencial	↔	Energía magnética
Palanca	↔	Transformador
Velocidad en el punto cero	↔	Potencia en el punto cero

La correspondencia entre la masa-capacitor se omite de la lista anterior porque una terminal del elemento de masa es una tierra mecánica, lo que significa que la ecuación es análoga a la del capacitor, pero no es tan general. A esta correspondencia se le llama inersor.

## 2.4 Inersor

El inersor es un dispositivo mecánico análogo a un condensador (capacitor). Su principal característica es que puede modificar la frecuencia natural y disminuir la amplitud de vibración del sistema al agregar masa aparente al sistema, sin aumentar considerablemente el peso de las estructuras. Por esta razón, su implementación en sistemas de amortiguamiento ha sido investigada en los últimos años [34].

El inersor fue propuesto por el profesor Malcolm C. Smith [1] de la Universidad de Cambridge y lo define como un dispositivo mecánico de dos terminales y un solo puerto que tiene la propiedad de que la fuerza aplicada en sus terminales es proporcional a la aceleración relativa entre ellas.

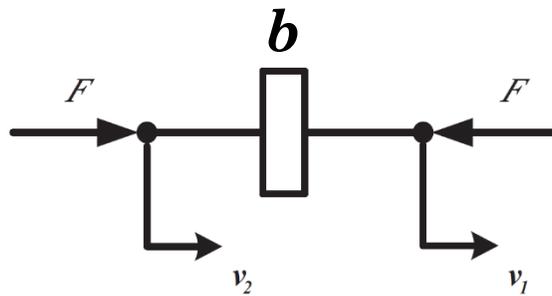


Figura 2.13: Símbolo del inersor [68].

La fuerza que se desarrolla en el inersor es definida como [35].

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad ; \quad v_2 > v_1 \quad (2.1)$$

Donde la constante de proporcionalidad  $b$  es la inertancia y está dada en unidades de masa (kg).

La energía cinética en un inersor se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$E_{inersor} = \frac{b}{2} (v_2 - v_1)^2 \quad (2.2)$$

Durante un largo periodo de tiempo, las personas utilizaron una masa para hacer una analogía parcial con un condensador, que en realidad es análogo a un condensador conectado a tierra. Sin embargo, recordando que la fuerza aplicada a sus terminales del inersor es proporcional a la aceleración relativa entre ellas, el inersor es el elemento mecánico “faltante” en la analogía de sistemas mecánicos y eléctricos, siendo análogo a un capacitor [36], [37]. En la Figura 2.14 se muestra la analogía fuerza-corriente donde se incluye el elemento inersor con el capacitor.

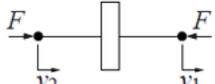
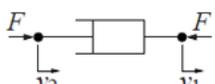
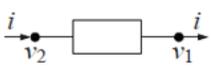
MECÁNICO	ELÉCTRICO
 $Y(s) = \frac{k}{s}$ <p>Resorte</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	 $Y(s) = \frac{1}{Ls}$ <p>Inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$
 $Y(s) = bs$ <p>Inersor</p> $F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$	 $Y(s) = Cs$ <p>Capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$
 $Y(s) = c$ <p>Amortiguador</p> $F = c(v_2 - v_1)$	 $Y(s) = \frac{1}{R}$ <p>Resistor</p> $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$

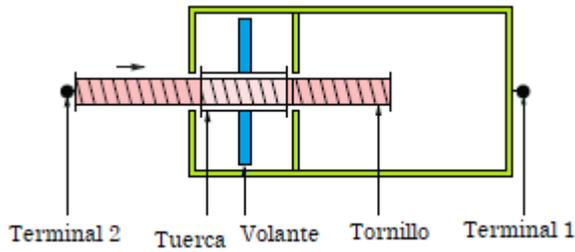
Figura 2.14: Analogía entre resortes, inersores y amortiguadores para redes mecánicas, y los inductores, capacitores y resistores para redes eléctricas [36].

## 2.5 Dispositivos inersores clásicos

De acuerdo a la característica esencial del inersor, los investigadores diseñaron y analizaron diferentes tipos de dispositivos inersores. A continuación, se muestran algunos diseños clásicos de los inersores.

1.- Diseño de inersor husillo de bolas.

Mediante un diseño de este tipo, se puede amplificar la masa física del volante y se puede obtener una masa aparente significativa (es decir, inercancia) [38].



a) Esquema mecánico del inersor husillo de bolas de bolas [23].

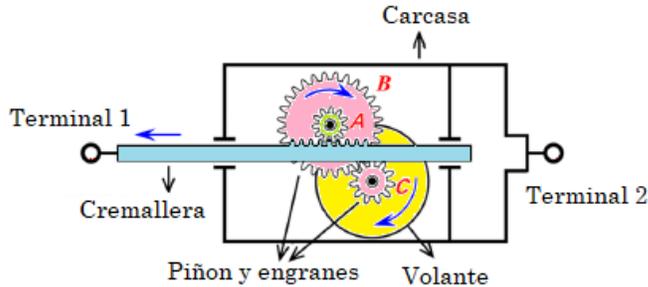


b) Implementación física elaborada en el Departamento de ingeniería de la universidad de Cambridge [23].

Figura 2.15: Diseño de inersor husillo de bolas.

## 2.- Diseño de inersor piñón-cremallera.

En este diseño la cremallera puede deslizarse dentro de la carcasa e impulsar la rotación del volante a través de los piñones y engranes [38].



a) Esquema mecánico de inersor piñón-cremallera [38].



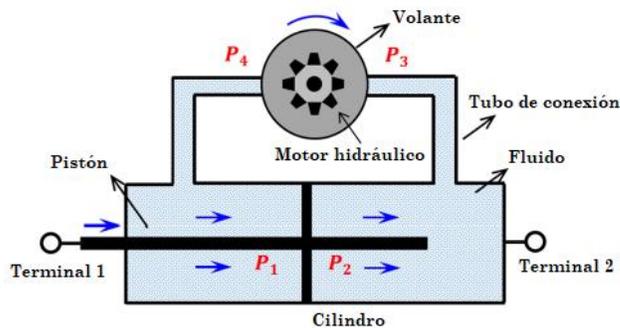
b) Implementación física elaborada en el Departamento de ingeniería de la universidad de Cambridge [35].

Figura 2.16: Diseño de inersor piñón-cremallera.

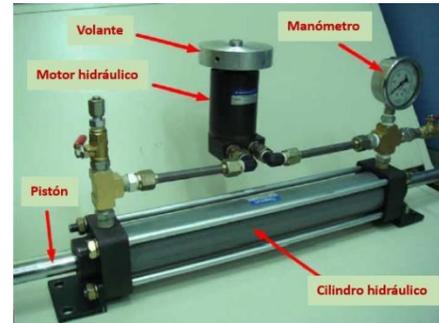
## 3.- Diseño de inersor hidráulico.

En este diseño el pistón en movimiento puede causar una diferencia de presión en dos lados del motor hidráulico (es decir,  $P_3$  y  $P_4$ ) y el fluido pasará a través de las tuberías.

El fluido podría impulsar la rotación del motor hidráulico y, por lo tanto, la rotación del volante.



a) Dibujo esquemático del inersor hidráulico [38].

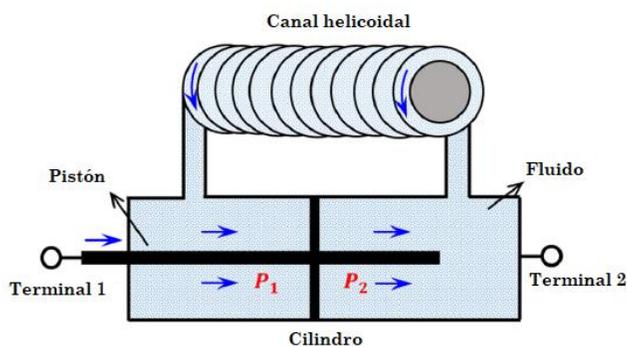


b) Inersor hidráulico desarrollado por Wang et al [69].

Figura 2.17: Diseño de inersor Hidráulico.

#### 4.- Diseño de inersor de fluido helicoidal.

El inersor de fluido helicoidal utiliza el fluido que fluye a través de un canal externo para generar inercia. Cuando el pistón se mueve con respecto al cilindro, el fluido pasará a través de un canal helicoidal externo debido a la diferencia de presión entre las cámaras izquierda y derecha. La velocidad del fluido en el canal helicoidal se puede aumentar mediante la relación entre el área del cilindro y el área del canal helicoidal [38].



a) Dibujo esquemático del inersor de fluido helicoidal [38].



b) Inersor de fluido helicoidal desarrollado por Domenico et al. [70].

Figura 2.18: Diseño de inersor de fluido helicoidal.

## 5.- Diseño de inersor de bomba de engranajes.

Su funcionamiento se basa mediante el pistón que desplaza el fluido hidráulico del cilindro principal a lo largo de los tubos de conexión para provocar la rotación de la bomba de engranajes y viceversa.

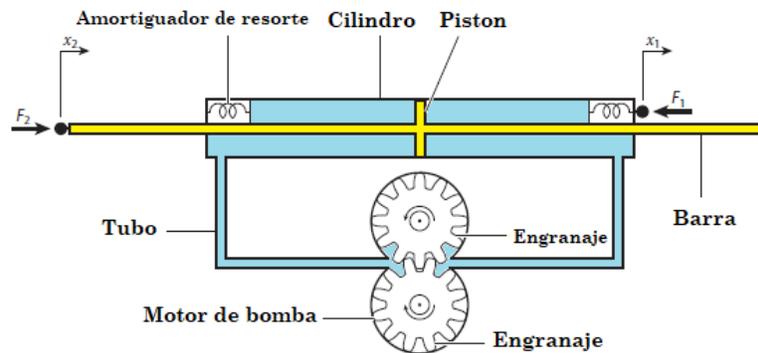


Figura 2.19: Diseño de inersor de bomba de engranajes [37].

## 6.- Diseño de inersor Rotacional.

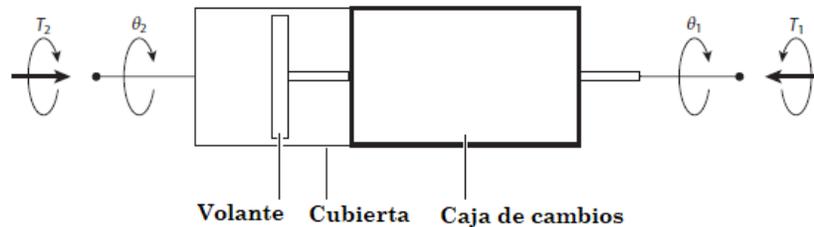


Figura 2.20: Modelo mecánico del inersor rotacional [37].

## 2.6 Redes mecánicas basadas en inersor.

En la actualidad se han estudiado distintos modelos basados en inersores para el control de vibraciones mecánicas, sin embargo, Hu y Chen [2] propusieron seis configuraciones para amortiguadores de vibración dinámicos basados en inersor (IDVA) que consisten en diferentes disposiciones entre resortes, amortiguador e inersor. A continuación, se presentan estas configuraciones:

## Impedancia

## Disposición

- $C_1$  → Inersor-amortiguador conectados en paralelo.  
 $C_2$  → Inersor-amortiguador conectados en serie.  
 $C_3$  → Resorte-inersor-amortiguador conectados en serie.  
 $C_4$  → Inersor conectado en serie a un arreglo en paralelo de resorte-amortiguador.  
 $C_5$  → Amortiguador conectado en serie a un arreglo en paralelo de resorte-inersor.  
 $C_6$  → Resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de amortiguador- inersor.

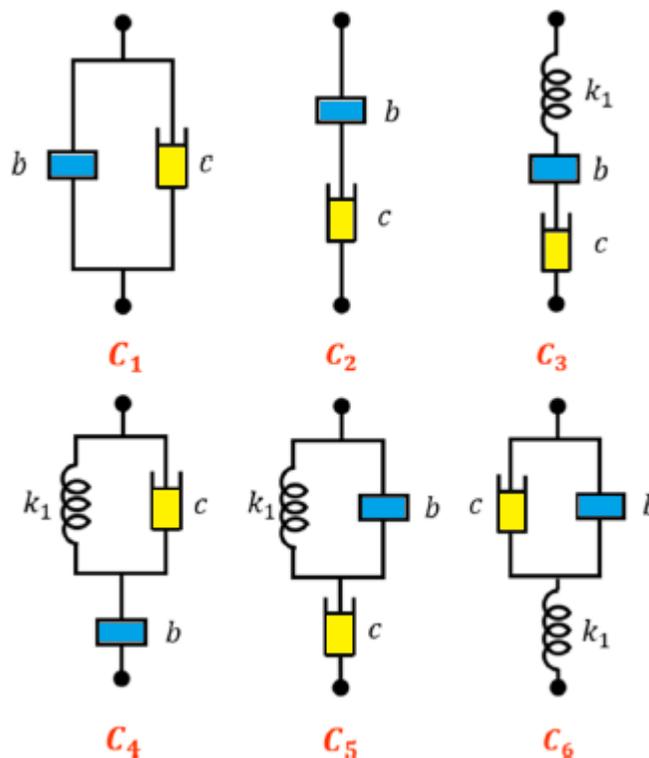


Figura 2.21: Redes mecánicas basadas en inersor. Donde:  $b$  es la inercia,  $c$  el coeficiente de amortiguamiento y  $k_1$  la constante de resorte [35], [38].

## 2.7 Aplicaciones del inersor en sistemas mecánicos.

Los estudios sobre la aplicación de dispositivos inersores se han llevado a cabo ampliamente en varias áreas de la ingeniería, sin embargo, a continuación, se presentan las más significativas.

1. La primera aplicación real se realizó en un sistema de suspensión en autos de carreras de fórmula 1. La universidad de Cambridge presentó la patente con la empresa McLaren y después de un rápido proceso de desarrollo, el piloto Kimi Raikkonen condujo el McLaren MP4-20 utilizando en la suspensión el inersor por primera vez, llevándolo así a la victoria. Para mantener la tecnología en secreto ante sus competidores se inventó un señuelo llamado “J-damper” [23].



Figura 2.22: Kimi Raikkonen en el gran premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo llevó a la victoria con ayuda del inersor. Foto de LAT Photographic [23].

2. Evangelou et al. [39], [40] estudiaron, computacionalmente, un dispositivo inersor en amortiguadores de dirección en motocicletas de alto rendimiento. El estudio se basa en simulaciones por ordenador, en donde utilizan un modelo de motocicleta de última generación cuyo conjunto de parámetros se basa en una deportiva Suzuki GSX-R1000.

La investigación ha demostrado que los amortiguadores con elemento inersor, a diferencia de los comunes, son eficaces para combatir fenómenos de inestabilidad.

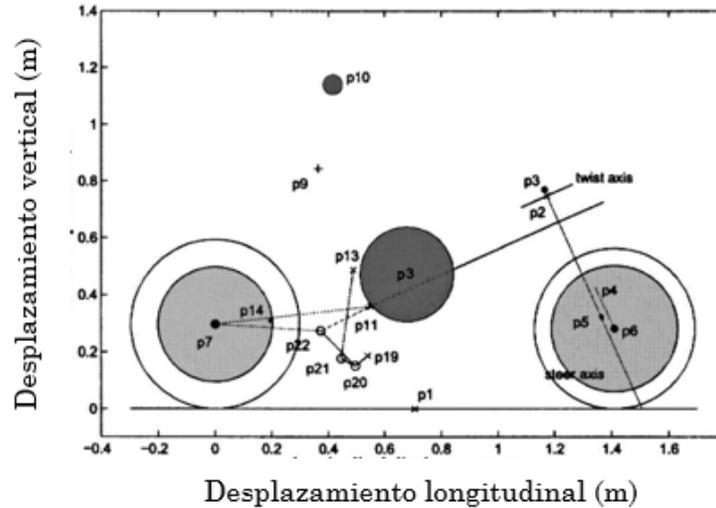


Figura 2.23: Esquema a escala de la motocicleta y su piloto en vista lateral. El modelo de motocicleta-conductor muestra la disposición de la máquina con cada una de las masas representadas como un círculo sombreado a escala proporcional [39].

3. Wang et al. [41] y Wang et al. [42] utilizaron un elemento inersor para mejorar el rendimiento de los sistemas de suspensión de los trenes. Los resultados indican mejoras de hasta un 12% con el uso del inersor en comparación con suspensiones únicamente con resortes y amortiguadores. El inersor que se utilizó fue un inersor de husillo de bolas y se construyó una plataforma de prueba impulsada por un motor para verificar las propiedades de este modelo.

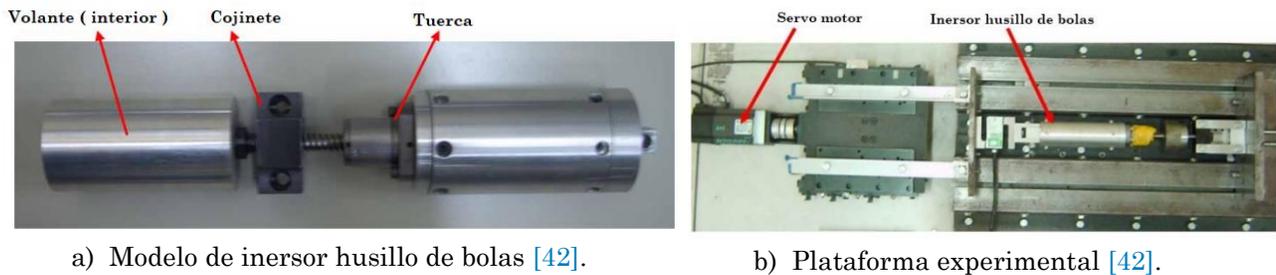


Figura 2.24: Aplicación del inersor husillo de bolas en sistemas de suspensión de trenes.

4. Zhang et al. [43] desarrollaron un amortiguador de corrientes parasitas (ECD, por sus siglas en inglés) a gran escala con un rendimiento mejorado para aplicaciones

estructurales. El ECD consta de un rotor conductor, un estator con imanes permanentes y un conjunto de husillos de bolas que convierte los movimientos lineales a través del amortiguador en rotaciones del rotor. Se han implementado cuatro ECD giratorios con fuerzas de amortiguación máximas de hasta 500 kN cada uno en el puente de vidrio del gran cañón de Zhangjiajie en china, como se muestra en la Figura 2.25 a) los amortiguadores fueron fijados entre la viga y el estribo para controlar la vibración longitudinal del puente debido a cargas sísmicas y cargas peatonales, como se ilustra en la Figura 2.25 b).



a) Vista panorámica del puente [43].



b) ECD giratorio fijado entre la viga y el pilar [43].

Figura 2.25: Puente de cristal del gran cañón de Zhangjiajie y uno de los ECD giratorios a gran escala.

# 3

## 3 Marco teórico

### 3.1 Elementos de un sistema vibratorio

Los elementos que constituyen un sistema vibratorio se ilustran en la Figura 3.1. Se puede decir que un sistema determinado consta de una masa, un resorte y un amortiguador. La energía puede almacenarse en la masa y el resorte y disiparse en el amortiguador en forma de calor.

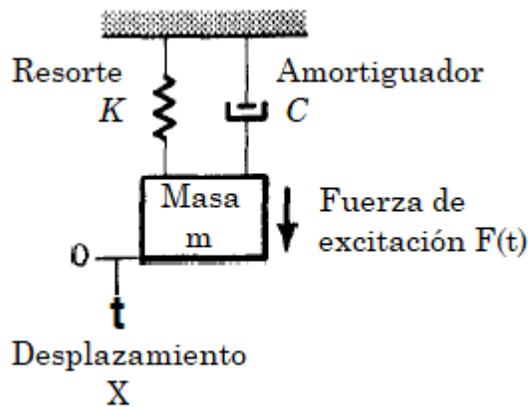


Figura 3.1: Elementos de un sistema vibratorio [45].

#### 3.1.1 Elemento resorte

Un resorte es un componente mecánico, el cual en la mayoría de las aplicaciones se supone que tiene masa y amortiguamiento insignificantes. El tipo de resorte más común es el resorte helicoidal. La fuerza de resorte existe solo si hay un desplazamiento relativo entre los dos extremos del resorte [44], [45]. Un resorte lineal es aquel que obedece la

ley de Hooke, es decir, la fuerza del resorte es proporcional a la deformación del resorte y se escribe como:

$$F = kx \quad (3.1)$$

Donde  $k$  es una constante, conocida como constante de resorte y  $x$  el desplazamiento. La constante de resorte  $k$  siempre es positiva e indica la fuerza (positiva o negativa) requerida para producir una deflexión unitaria (alargamiento o reducción de longitud) en el resorte.

El trabajo realizado al deformar un resorte se transforma en energía potencial, es decir, la energía de deformación almacenada en el resorte y está dado por:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3.2)$$

Donde  $U$  es el trabajo realizado.

### 3.1.2 Elemento amortiguador

El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte gradualmente en calor o sonido se conoce como *amortiguamiento*. Se supone que un amortiguador no tiene masa ni elasticidad y que la fuerza del amortiguador existe solo si hay una velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador. El amortiguamiento viscoso es el mecanismo más utilizado en análisis de vibración. Cuando un sistema mecánico vibra en un medio fluido como aire, gas, agua o aceite, la resistencia ofrecida por el fluido en el cuerpo en movimiento hace que se disipe la energía [44]. Se toma como ejemplo un amortiguador lineal en donde un fluido viscoso fluye a través de una ranura o alrededor de un pistón en un cilindro, se dice que, la fuerza de amortiguación generada es proporcional a la velocidad relativa entre las terminales del amortiguador [46] y se puede expresar como:

$$F = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3.3)$$

Donde la constante de proporcionalidad denotada por  $c$  se llama coeficiente de amortiguamiento y tiene unidades de N\*s/m y  $\dot{x}$  representa la velocidad relativa de las terminales del amortiguador.

### 3.1.3 Elemento de masa o inercia

El elemento masa es el componente del sistema que representa la cantidad de materia y su resistencia a la aceleración cuando se aplican fuerzas. Además, es un cuerpo rígido que puede ganar o perder energía cinética siempre que cambia su velocidad. De acuerdo con la segunda ley de movimiento de Newton, el producto de la masa y su aceleración son iguales a la fuerza aplicada a la masa y se describe como:

$$F = m\ddot{x} \quad (3.4)$$

Donde  $m$  representa la masa y  $\ddot{x}$  la aceleración [44], [46].

El trabajo realizado sobre una masa se almacena como energía cinética por lo tanto la energía cinética de la masa  $m$  está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad (3.5)$$

## 3.2 Sistema con excitación armónica

Las vibraciones forzadas de un sistema se presentan cuando se realizan trabajos en el sistema mientras ocurren vibraciones. Algunos ejemplos de vibración forzada incluyen el movimiento del suelo durante un terremoto, el movimiento causado por maquinaria alternativa desequilibrada o el movimiento del suelo impartido a un vehículo cuando sus ruedas atraviesan el contorno de la carretera [47].

La forma estándar de la ecuación diferencial que gobierna cualquier sistema lineal para vibraciones forzadas se conoce como:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F_{eq}(t) \quad (3.6)$$

La función  $F_{eq}(t)$  es la entrada, función de conducción o función forzada del sistema. La salida o respuesta del sistema será la solución a la ecuación diferencial bajo condiciones iniciales. Donde  $m_{eq}$  es la masa equivalente,  $c_{eq}$  es el coeficiente de amortiguamiento equivalente y  $k_{eq}$  es la rigidez equivalente del sistema [48].

Cuando el movimiento se repite después de intervalos de tiempo iguales, se llama movimiento periódico. El tipo más común de movimiento periódico es el movimiento armónico. Cuando la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento se dice que es un movimiento armónico simple y la fuerza de excitación armónica simple  $F_{eq}$  es la fuerza externa más común que actúa en el sistema [44].

Si se considera una fuerza de excitación armónica compleja, la vibración forzada se escribe como:

$$F_{eq} = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

Donde  $F_0$  representa la amplitud de excitación y  $\omega$  la frecuencia de excitación externa.

Para este trabajo de investigación de tesis se estudia la respuesta de un sistema sometido al movimiento de excitación armónica en la base. En ocasiones la base o soporte de un sistema de resorte-masa-amortiguador experimenta movimiento armónico, como se muestra en la Figura 3.2. Donde  $y(t)$  es el desplazamiento de la base y  $x(t)$  el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de equilibrio estático en el tiempo  $t$ .

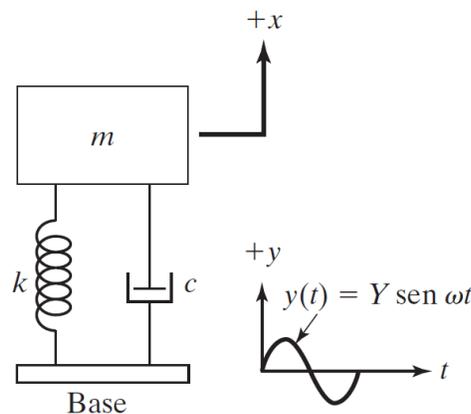


Figura 3.2: Excitación armónica en la base [44].

### 3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, utilizando un análisis de energías. Para esto se considera principalmente las coordenadas generalizadas del sistema a analizar ya que estas definen la cantidad de ecuaciones resultantes que es igual a los grados de libertad del sistema.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se definen mediante el principio extendido de Hamilton en donde se obtienen las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico a partir de su energía cinética, energía potencial y el trabajo virtual debido a fuerzas no conservativas. De manera general, el principio de Hamilton establece que la evolución de un sistema físico se determina por medio de un principio variacional el cual se basa en una función llamada lagrangeano ( $L$ ), dicha función contine información sobre las variables del sistema y las fuerzas que actúan sobre él [49].

El lagrangiano  $L$  de un sistema se define por:

$$L = T - U \quad (3.8)$$

Donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial del sistema. El lagrangiano  $L$  en forma general es una función de  $q_x, \dot{q}_x$  ( $x = 1, 2, \dots, n$ ) y del tiempo  $t$  o bien

$$L = L(q_x, \dot{q}_x, t) \quad (3.9)$$

donde  $q_x$  son las coordenadas generalizadas.

Para un sistema conservativo en donde no se disipa energía, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} = 0 \quad \text{donde } x = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

Sin embargo, para sistemas no conservativos en donde la energía total del sistema disminuye con el tiempo debido a la presencia de fuerzas disipativas como fricción o amortiguamiento, se utiliza el principio de disipación de Rayleigh.

### 3.3.1 Función de disipación de Rayleigh

En los sistemas no conservativos como los sistemas amortiguados la energía tiende a disiparse comúnmente en forma de calor. Rayleigh desarrollo una función de disipación  $D$  de la que puede derivarse la fuerza del amortiguamiento. Suponiendo que el sistema involucra  $r$  amortiguadores viscosos, la función de disipación de Rayleigh se define mediante:

$$D = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\delta}_1^2 + b_2 \dot{\delta}_2^2 + \dots + b_r \dot{\delta}_r^2) \quad (3.11)$$

Donde  $b_i$  es el coeficiente del  $i$ -ésimo amortiguador viscoso y  $\delta_i$  es la diferencia de velocidad a través del  $i$ -ésimo amortiguador viscoso [50]. Así pues,  $\delta_i$  se puede expresar como función de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_x$ .

Mediante el uso de la función de disipación de Rayleigh, las ecuaciones de Lagrange para los sistemas no conservativos se convierten en:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} = 0 \quad \text{donde } x = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

### 3.4 Transformada de Laplace

El método de la transformada de Laplace es una técnica útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales que no cambian con el tiempo. Su principal ventaja es que la diferenciación de la función del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada por una variable compleja  $s$ . Esto transforma las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en  $s$ , lo cual es más fácil de manejar. Además, al usar la transformada de Laplace, se incluyen automáticamente las condiciones iniciales y se pueden obtener al mismo tiempo tanto la solución particular como la solución homogénea de la ecuación [50].

La transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.13)$$

Donde:

$f(t)$  = una función del tiempo tal que  $f(t) = 0$  para todo  $t < 0$ .

$s$  = una variable compleja.

$\mathcal{L}$  = un símbolo operacional que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar por la integral de Laplace.

$F(s)$  = transformada de Laplace de  $f(t)$ .

### 3.4.1 Transformada de derivadas

Mientras se aplican las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, tenemos que utilizar transformadas de Laplace de derivadas de varios órdenes de una función. Para este trabajo de investigación de tesis la aplicación de la transformada de Laplace de derivadas es indispensable para obtener la solución de las ecuaciones de movimiento que se analizarán en este trabajo.

La transformada de Laplace de la primera derivada se define como:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (3.14)$$

Donde  $f(0)$  es el valor inicial de  $f(t)$  evaluada en  $t = 0$ .

La transformada de Laplace de la derivada enésima de  $f(t)$  se puede hallar como:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] \equiv \mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-1)}(0) \quad (3.15)$$

Donde  $f^{(n)}$  se utiliza para denotar la derivada enésima de  $f$ ,  $\frac{d^n f}{dt^n}$  [44].

### 3.4.2 Función de transferencia

El método de la función de transferencia, que se basa en las transformadas de Laplace, es ampliamente utilizado en el campo del control para formular y resolver problemas dinámicos. También se aplica en la solución de problemas de vibración forzada. La función de transferencia permite relacionar la entrada de un sistema con su salida,

facilitando la separación del sistema en tres componentes distintos: entrada, sistema y salida. Esto es una ventaja significativa frente a las ecuaciones diferenciales, donde separar estos tres aspectos resulta más complicado [51].

Por definición, la función de transferencia  $G(s)$  de un sistema de ecuaciones lineales, invariantes en el tiempo, se define como la relación de la transformada de Laplace de **salida** (función de respuesta) y la transformada de Laplace de **entrada** (función de excitación) bajo la suposición que todas las condiciones iniciales sean cero [50].

Considere a manera de ejemplo el siguiente sistema lineal definido por la ecuación diferencial:

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx = b_0p^{(m)} + b_1p^{(m-1)} + \dots + b_{m-1}\dot{p} + b_m p \quad (3.16)$$

Donde  $x$  es la salida del sistema y  $p$  la entrada con  $(n > m)$ .

La función de transferencia de este sistema se obtiene aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación 3.16, bajo la suposición de condiciones iniciales cero. Por lo tanto, se obtiene:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{Salida}]}{\mathcal{L}[\text{Entrada}]} = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (3.17)$$

El objetivo de obtener la función de transferencia es analizar si el sistema es estable o no lo es.

### 3.4.3 Función de respuesta en frecuencia (FRF)

En un sistema lineal en estado estable, cuando se aplica una entrada sinusoidal o armónica, la respuesta del sistema será también sinusoidal y armónica con la misma frecuencia. Sin embargo, la respuesta diferirá en amplitud y en ángulo de fase en comparación con la entrada, y estas diferencias dependen de la frecuencia. Cualquier onda sinusoidal puede ser representada por un número complejo llamado fasor. La magnitud del número complejo representa la amplitud de la onda sinusoidal, y el ángulo del número complejo representa el ángulo de fase de la onda sinusoidal [51].

Por ejemplo, el fasor de una entrada  $M_i \text{sen}(\omega t + \phi_1)$  puede ser escrito en su forma polar como  $M_i e^{i\phi_i}$ , donde la frecuencia  $\omega$  se considera implícita. Dado que un sistema puede

causar cambios en la amplitud y el ángulo de fase, se puede representar el sistema como un número complejo o una función. De esta manera, el fasor de salida se obtiene multiplicando el fasor de entrada por la función que representa el sistema.

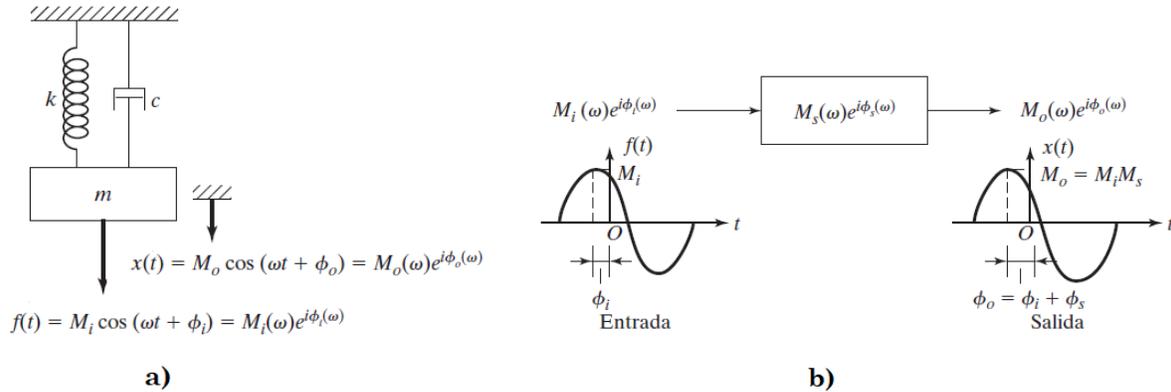


Figura 3.3: Función de respuesta en frecuencia. a) Sistema físico de un sistema resorte-masa-amortiguador, b) Diagrama de bloques entrada-salida [44].

La Figura 3.3 representa un ejemplo de la respuesta en frecuencia del sistema clásico. En donde  $M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}$  representa la función de respuesta en frecuencia en el diagrama de bloques. Por conveniencia de notación, en ocasiones la función de respuesta en frecuencia se llama función de transferencia de frecuencia, indicado como  $T(i\omega)$  de modo que:

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} \quad (3.18)$$

La función de transferencia de frecuencia  $T(i\omega)$ , se puede obtener sustituyendo  $s = i\omega$  en la función de transferencia general  $T(s)$ .

### 3.5 Análisis dimensional

El análisis dimensional indica que toda ecuación debe ser dimensionalmente igual en ambos lados de la igualdad, es decir; las unidades deben ser las mismas. Su importancia se basa en dos razones principales. Primero, ayuda a identificar el número mínimo de variables que gobiernan un problema específico, reduciendo las variables físicas originales a un conjunto menor de parámetros adimensionales. Esto racionaliza la

experimentación al determinar cuáles parámetros son realmente relevantes en un proceso dado. Segundo, permite saber con precisión cuándo una variable es significativa o no en un problema. Como las nuevas variables son números adimensionales, es suficiente determinar si alguno de esos números es siempre muy pequeño, muy grande o aproximadamente constante para concluir que dicha variable no tiene una influencia significativa en el proceso [52].

Las dimensiones de las cantidades físicas involucradas en un sistema físico (mecánico) se dan en términos de tres dimensiones elementales como son: longitud L, masa M y tiempo T, que tienen unidades de metro, kilogramo y segundos respectivamente. La dimensión física de magnitudes físicas como la velocidad, fuerza, la aceleración, entre muchas otras, quedan en términos de las fundamentales. En la Tabla 3.1, se enlistan algunas de las magnitudes físicas derivadas más usuales.

Tabla 3.1: Magnitudes físicas derivadas del SI [53].

Magnitud física	Símbolo	Dimensión física	Abreviatura
Velocidad	$[v]$	$\frac{\textit{longitud}}{\textit{tiempo}}$	$LT^{-1}$
Aceleración	$[a]$	$\frac{\textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	$LT^{-2}$
Densidad	$[\rho]$	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{longitud})^3}$	$ML^{-3}$
Fuerza	$[v]$	$\frac{\textit{masa} * \textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	$MLT^{-2}$
Trabajo	$[W]$	$\frac{\textit{masas} * \textit{longitud}^2}{(\textit{tiempo})^2}$	$ML^2T^{-2}$
Amortiguamiento	$[c]$	$\frac{\textit{masa}}{\textit{tiempo}}$	$MT^{-1}$
Rigidez	$[k]$	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{tiempo})^2}$	$MT^{-2}$

### 3.5.1 Teorema II de Buckingham

El teorema II de Buckingham es un teorema clave en el análisis dimensional y es una formalización del método de análisis dimensional de Rayleigh. Buckingham formuló un teorema, que establece que el número de cantidades  $\Pi$  que quedan después de realizar un análisis dimensional es igual a la diferencia entre el número de cantidades que entran en el problema y el número máximo de estas que son dimensionalmente independientes. El número máximo de cantidades dimensionalmente independientes siempre será igual o menor que el número de dimensiones fundamentales necesarias para escribir todas las ecuaciones dimensionales [54].

**Teorema 1** si  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  son  $n$  variables físicas involucradas en un problema particular y si existen entre éstas una relación funcional de la forma:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (3.19)$$

Entonces, las  $n$  variables siempre se pueden combinar para formar exactamente  $(n - j)$  variables adimensionales independientes, donde  $j$  es el rango de la matriz adimensional [53].

Cada variable adimensional es llamada un número  $\Pi$  o *factor adimensional*. El símbolo  $\Pi$  es usado porque las variables adimensionales se pueden escribir como un *producto* de las variables  $q_1, q_2, \dots, q_n$  elevadas a alguna potencia. Así, la ecuación (3.19) se puede escribir como la relación funcional:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (3.20)$$

La ecuación que permite calcular estos  $\Pi_i$  es:

$$\Pi_i = V_{Di} \prod_{k=1}^j V_{Fk}^{a_k}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n - j. \quad (3.21)$$

Donde  $V_D$  son las variables físicas relevantes en el problema y  $V_F$  son las variables dinámicas que hacen que las veces de variables fundamentales (variables repetidas) y los  $a_k$  se escogen de manera tal que  $\Pi_i$  sea adimensional. Finalmente se puede establecer una relación entre los  $\Pi_i$  de la forma:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-j}) \quad (3.22)$$

La forma arbitraria de escoger las variables repetidas lleva a diferentes conjuntos de factores adimensionales; sin embargo, en cada caso  $(n - j)$  son independientes y en palabras del algebra lineal, forman un conjunto completo.

La ecuación (3.21) provee un procedimiento formal de calcular los factores adimensionales (generar los  $\Pi$ 's) de cualquier problema. Este procedimiento es conocido como el *método de repetición de variables* y fue publicado inicialmente por el científico ruso Dimitri Riabouchinski en 1911 y un año después lo hizo popular Edgar Buckingham [53]. Básicamente el método consiste en seis pasos para obtener los parámetros adimensionales y son los siguientes:

- I. Elaborar un listado con las variables significativas implicadas en el problema.
- II. Calcular la expresión dimensional equivalente de cada una de las variables obtenidas en el punto I.
- III. Determinar las dimensiones fundamentales usadas en las variables del problema.
- IV. Determinar el número de parámetros adimensionales independientes en los que se pueden agrupar las variables del problema mediante el teorema de  $\Pi$ .
- V. Generar los parámetros adimensionales.
- VI. Comprobar que cada parámetro adimensional obtenido no tenga dimensiones.

### 3.6 Teorema de vieta

Las *fórmulas de vieta* relacionan las raíces de un polinomio mónico con los coeficientes de este. Específicamente, si el polinomio es de grado  $n$  sus coeficientes son los polinomios simétricos elementales de sus raíces.

Cuando se trata de situaciones relacionadas a las raíces de un polinomio es común tratar de pensar en factorizaciones que permitan obtener cada una de las raíces del polinomio en cuestión, sin embargo, no siempre se tiene una factorización que haga que este

trabajo sea sencillo. Las *fórmulas de vieta* permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar sus coeficientes [55].

Para emplear las fórmulas de vieta se considera una ecuación mónica ( $a_n = 1$ ) de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (3.23)$$

La ecuación contine  $n$  raíces  $x_1, x_2, \dots, x_n$  [56], [57]. Estas raíces pueden encontrarse en base a los términos  $a_0, a_1, a_2 \dots, a_{n-1}$  independientes del polinomio.

Generalizando las soluciones de la ecuación (3.23) y relacionándolas con los términos independientes se tiene:

$$a_{n-1} = -(x_1 + \dots + x_n) \quad (3.24)$$

$$a_{n-2} = (x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \quad (3.25)$$

⋮

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j} \quad (3.26)$$

⋮

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \quad (3.27)$$

Para el caso de una ecuación cuártica, es decir, con  $n = 4$ .

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.28)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.28) se pueden expresar en términos de las sumas y productos de sus raíces  $x_1, x_2, x_3, x_4$  las cuales se determinan como:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.29)$$

$$a_2 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \quad (3.30)$$

$$a_1 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) \quad (3.31)$$

$$a_0 = x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (3.32)$$

Para los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor (IDVA's), Barredo et al. [32] propusieron una nueva metodología basándose en las fórmulas de vieta para la obtención de los parámetros óptimos de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor.

### 3.7 Matriz Jacobiana

El jacobiano debe su nombre al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero en emplear estos determinantes especiales que implican derivadas parciales, Jacobi los convirtió en un método para evaluar integrales múltiples [58].

**Definición 1** El jacobiano de la transformación T en  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$x = f(u, v, w) \quad y = g(u, v, w) \quad y \quad z = h(u, v, w) \quad \text{es [58]:}$$

$$J(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana está formada por las derivadas parciales de primer orden de una función y puede emplearse para aproximar linealmente a dicha función en un punto.

Entendido el concepto del determinante jacobiano para una función vectorial. Supóngase que:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

La cual es una función cuyas derivadas parciales de primer orden existen en todo  $\mathbb{R}^n$  y denotando  $f_1, f_2, \dots, f_m$  a sus componentes escalares. Se define la matriz jacobiana de  $f$  en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  como:

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Donde  $\nabla f_i$  es el gradiente de la  $i$ -ésima componente escalar [59].

Las matrices jacobianas generalmente ayudan a determinar un punto específico en un plano para encontrar la posición y tendrán tantas filas como funciones escales ( $f_1, f_2, \dots, f_m$ ) tenga la función, además, el número de columnas coincidirá con el número de variables ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

### 3.8 Optimización

La optimización se define como el proceso para encontrar las condiciones que dan la respuesta máxima o mínima de una función y se clasifican en lineales y no lineales.

Un problema de optimización está compuesto de los siguientes elementos [60]:

- Un conjunto de restricciones.
- Un conjunto de soluciones factibles, el cual contiene todas las posibles combinaciones de valores de variables independientes que satisfacen las restricciones anteriores.
- Una función objetivo, que vincula las soluciones factibles con el performance del sistema.

**Teorema 2** Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo [61].

A manera de ejemplo, considérese una función  $f(x)$  tal y como se muestra en la Figura 3.4, aquí el punto  $p$  corresponde al valor mínimo de  $f(x)$ , para la misma función, pero negativa, el punto  $p$  corresponde al valor máximo. Por lo tanto, la optimización puede

ser interpretada como una metodología de minimización dado que se puede determinar el punto máximo de una función, buscando el punto mínimo de la misma expresión negativa.

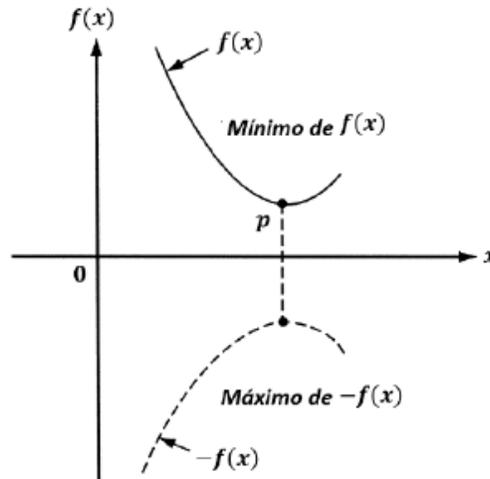


Figura 3.4: Mínimo y máximo de una función [34].

En problemas de optimización, es importante conocer las primeras y segundas derivadas de la función objetivo [56], [61].

### Primera derivada

- Proporciona una trayectoria de máxima inclinación de la función objetivo.
- Indica si se ha alcanzado la trayectoria óptima.

### Segunda derivada

- Indicará si es un máximo cuando  $f''(x)$  es negativa o un mínimo cuando  $f''(x)$  es positiva.

## 3.9 Técnica de los puntos fijos (TPF)

Esta metodología fue descrita por Den Hartog [9] y consiste principalmente en minimizar la amplitud máxima de la respuesta adimensional de un sistema mecánico.

La técnica de los puntos fijos se basa en un método de calibración de frecuencias que analiza dos estados de operación límite del absorbedor. Estos estados de operación límite se presentan cuando el amortiguamiento del sistema es cero ( $\zeta = 0$ ) y cuando el amortiguamiento tiende a infinito ( $\zeta \rightarrow \infty$ ). En estas condiciones específicas, se generan los denominados **puntos fijos** o **puntos invariantes** como se ilustra en la Figura 3.5. Estos puntos tienen la particularidad de ser independientes del factor de amortiguamiento, lo que significa que su posición no varía, sin importar el nivel de amortiguamiento presente en el sistema.

Este enfoque es esencial para entender y predecir el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones operativas.

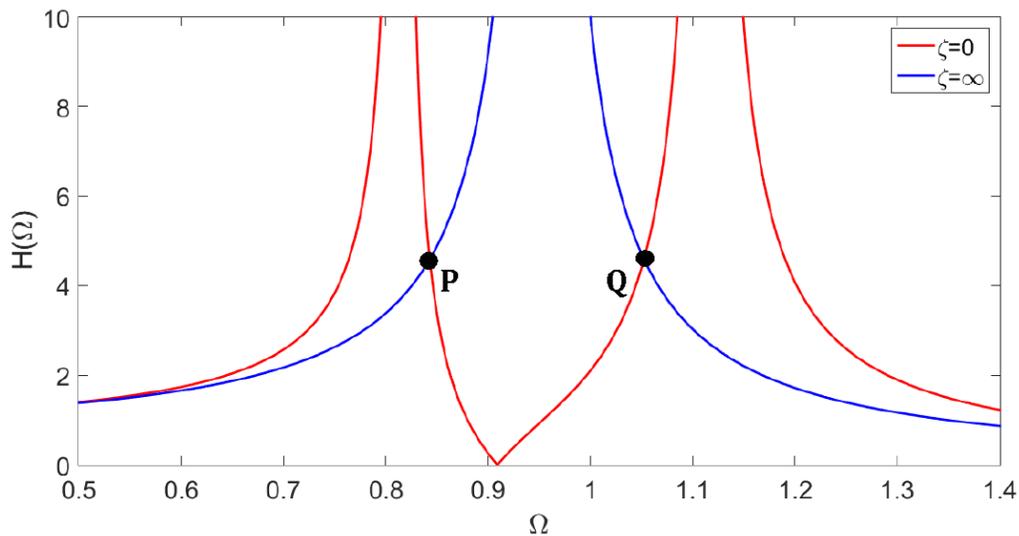


Figura 3.5: Puntos fijos P y Q cuando el amortiguamiento es cero e infinito de un DVA clásico [56].

**Definición 3** *Todas las curvas pasan a través de los puntos fijos y son independientes del amortiguamiento [9].*

En la Figura 3.6 se ejemplifica la definición 3 en donde se muestra el comportamiento de un absorbedor de vibración no tradicional (NDVA) cuando la relación de

amortiguamiento toma valores arbitrarios incluyendo las dos condiciones fundamentales de operación del DVA, considerando como puntos fijos a  $P_1$  y  $P_2$ .

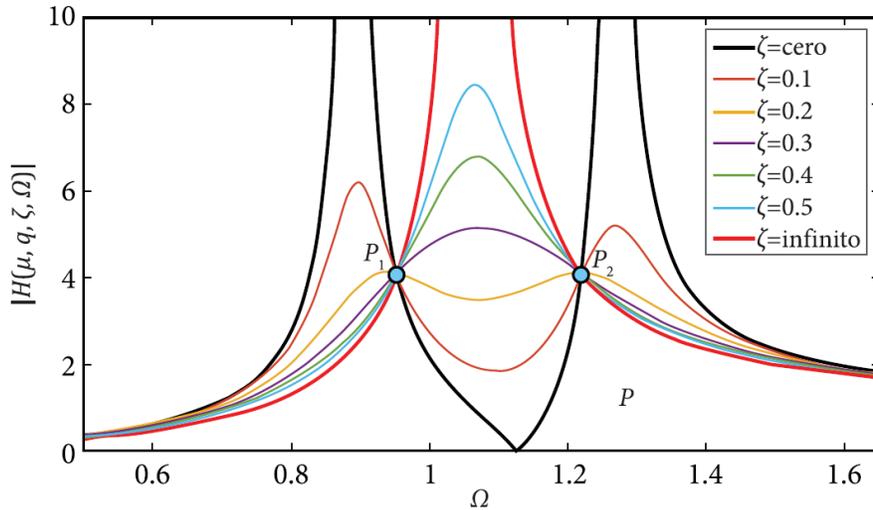


Figura 3.6: FRF de la estructura primaria para diferentes valores de amortiguamiento [71].

**Nota** *A manera de resumen, la técnica de optimización de los puntos fijos se basa en dos condiciones límite de operación, cuando el amortiguamiento es cero y cuando tiende a infinito, para los cuales las amplitudes de vibración del sistema (masa principal) son iguales. La aplicación de la técnica de los puntos fijos produce como resultado una serie de ecuaciones simples de forma cerrada. Estas ecuaciones servirán para el diseño óptimo del DVA para el control de vibraciones no deseadas y poder minimizar la curva de respuesta localizada entre los puntos fijos P y Q. Por lo tanto, la aplicación de la técnica de los puntos fijos es equivalente a resolver de forma analítica un conjunto de ecuaciones no lineales.*

### 3.10 Técnica de los puntos fijos extendida (TPFE)

La técnica de los puntos fijos extendida fue propuesta por Barredo et al. [32] y se trata de una generalización de la teoría de Den Hartog, donde se desarrollan nuevas soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo de absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor. Los resultados de esta técnica mostraron resultados

similares a la técnica de optimización  $H_\infty$ , por tal motivo la técnica de los puntos fijos extendida presenta una alternativa más simple para el diseño de los IDVA's.

Esta técnica consiste en modificar los puntos invariantes del sistema, obteniendo variables óptimas relacionadas con la respuesta del sistema  $R(s)$  y su norma euclidiana  $\|H\|$  y se expresa como:

$$R(s) = \|H\| \quad (3.36)$$

A manera de ejemplo y para comprender mejor esta metodología de los puntos fijos extendida se presenta el siguiente sistema mecánico de la Figura 3.7.

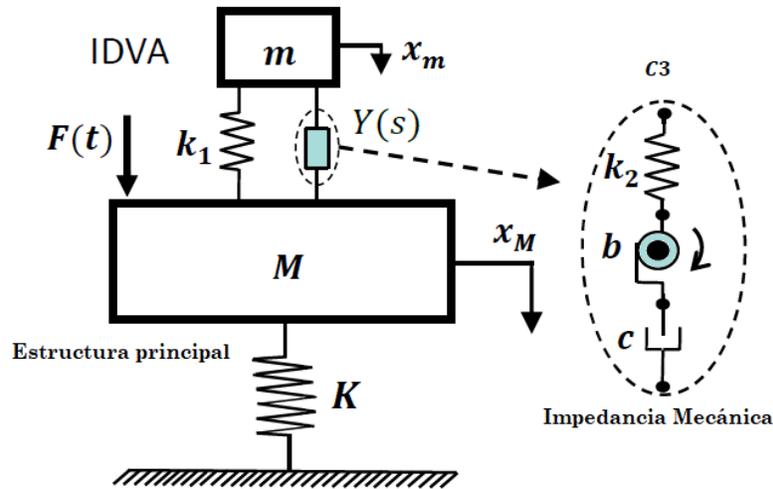


Figura 3.7: Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor en arreglo tipo C3 (IDVA-C3) [32].

A continuación, se describen los pasos que se deben de seguir para aplicar esta metodología de los puntos fijos extendidos y así obtener la solución del sistema de la Figura 3.7. A continuación, se presentan los pasos para la aplicación de la TPFE.

- I. Se obtiene el modelo matemático del sistema en el dominio  $s$  de Laplace.

$$Ms^2X + KX + k_1(X - X_1) = F - F_d \quad (3.37)$$

$$ms^2X_1 + k_1(X_1 - X) = F_d \quad (3.38)$$

- II. Se obtiene la función de transferencia  $H$  del sistema, también conocida como la respuesta  $R(s)$  del sistema.

- III. Sustituir la última expresión por  $s = i\omega$ . Donde  $i$  es la parte imaginaria esto debido a que solo nos interesa conocer la respuesta en estado estable.
- IV. Se definen las variables A, B, C Y D y se reescribe la función de transferencia  $H$  de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{A + iB}{C + iD} \quad (3.39)$$

- V. Sustituir los parámetros adimensionales asociados al teorema de  $\Pi$  de Buckingham. Para el IDVA C3 son:

$$\omega_1^2 = \frac{K}{M}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_1}{m}; \quad \omega_3^2 = \frac{k_2}{b}; \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_2}; \quad \mu = \frac{b}{m};$$

$$\eta = \frac{\omega_3}{\omega_2}; \quad \beta = \frac{m}{M}; \quad q = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$$

- VI. La ecuación (3.39) representa la función de respuesta en frecuencia del sistema, sin embargo, la ecuación está en su forma compleja por lo tanto se obtiene la magnitud de  $H$  mediante binomios conjugados y el teorema de Pitágoras.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.40)$$

- VII. Se aplican las dos condiciones fundamentales de los puntos fijos de la sección 3.9 a la ecuación (3.40).

Cuando  $\zeta = 0$  tenemos:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.41)$$

Cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  tenemos:

$$|H(s)|^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.42)$$

- VIII. Se igualan las ecuaciones (3.41) y (3.42) agregando un  $\pm$  de lado derecho de la ecuación para eliminar los exponentes.

$$\frac{A}{C} = \pm \frac{B}{D} \quad (3.43)$$

Al realizar la igualación, se obtendrán dos posibles resultados. Sin embargo, una será la solución trivial y la otra será la que proporcione mayor información al sistema. Generalmente, esta última ecuación es de grado 8.

IX. Realizar un cambio de variable para reducir la ecuación de la forma:

$$\lambda = \Omega^2 \quad (3.44)$$

De esta manera la ecuación de grado 8 se convierte a una de grado 4.

X. Convertir la ecuación resultante en una ecuación mónica con la finalidad de utilizar el teorema de Vieta.

XI. Igualar a h el lado derecho de la ecuación (3.42) es decir;

$$h = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.45)$$

XII. Realizar el mismo cambio de variable de la ecuación 3.44.

XIII. Convertir en una ecuación mónica con la finalidad de usar el teorema de vieta.

De esta manera se tiene dos ecuaciones mónicas de grado 4 que se obtuvieron en el paso X y XIII de la forma:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (3.46)$$

$$\lambda^4 + e\lambda^3 + f\lambda^2 + g\lambda + h = 0 \quad (3.47)$$

XIV. Obtener las soluciones óptimas mediante el teorema de vieta de la sección 3.6.

Recordemos que al aplicar las condiciones fundamentales de los puntos fijos se obtienen dos ecuaciones mónicas de cuarto grado, que son independientes de la relación de amortiguamiento. Y por lo tanto las sumas y los productos de las

raíces de ambas ecuaciones se igualan, por tal motivo la técnica de puntos fijos se extiende a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 &= \sum_{i=1}^4 \Omega_{i,\zeta \rightarrow \infty}^2 \\ \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 &= \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \\ \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2 &= \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \\ \prod_{i=1}^4 \Omega_i^2 &= \prod_{i=1}^4 \Omega_{i,\zeta \rightarrow \infty}^2 \end{aligned} \right\} \forall \beta \in \mathbb{R}^+$$

XV. Se obtienen los parámetros óptimos  $(\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt})$  [56].

XVI. Sustituir los parámetros óptimos y resolver para  $h$ .

Que es una aproximación de la norma de  $H_\infty$  y es la amplitud de vibración en los puntos invariantes, es decir,  $\|H\|$ . Esta ecuación es la respuesta adimensional del sistema en el dominio de la frecuencia para el desplazamiento de la estructura cuando actúa una fuerza de excitación armónica.

XVII. Por último, se obtienen las soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento  $\zeta_{opt}$  a partir de la teoría de Krenk [64].

La teoría de Krenk se emplea para aplanar la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal y determinar la relación de amortiguamiento óptimo  $\zeta_{opt}$  [64]. La aplicación de la teoría de Krenk indicará que para obtener el amortiguamiento óptimo  $\zeta_{opt}$  del sistema, se producirán tres frecuencias invariantes  $\Omega_0, \Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Para calcular  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.42). Después, se sustituyen los parámetros óptimos  $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}$  y se resuelve la ecuación resultante en

términos de  $\Omega$ . De esta manera, las raíces obtenidas serán las frecuencias invariantes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Para calcular la frecuencia invariante  $\Omega_0$  se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.41) y al sustituir los parámetros óptimos  $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}$  se obtiene una ecuación en  $\Omega$ . Al resolver la ecuación resultante, se toma la raíz que cumpla con la siguiente condición  $\Omega_1 < \Omega_0 < \Omega_2$ .

En la Figura 3.8 se muestra un ejemplo de las frecuencias invariantes.

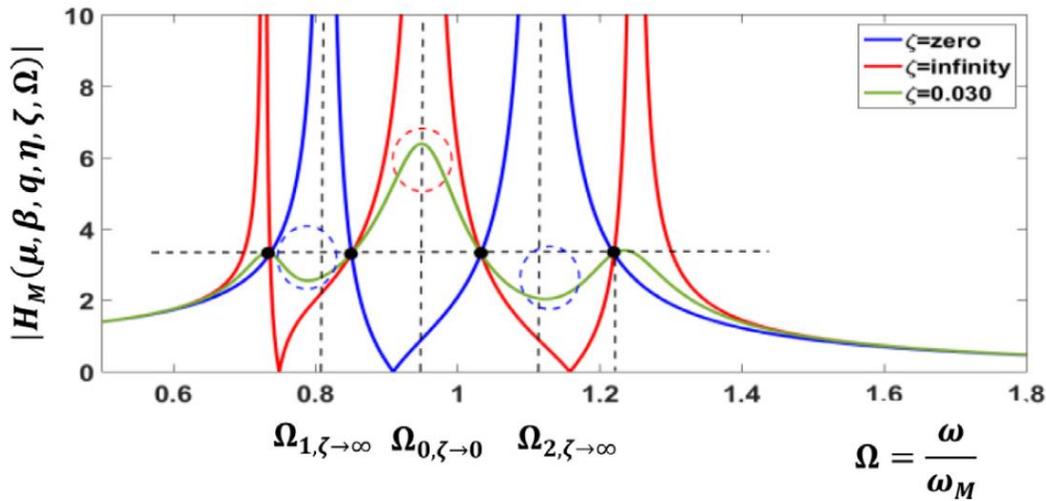


Figura 3.8: Frecuencias invariantes  $\Omega_0, \Omega_1$  y  $\Omega_2$  [32].

Para obtener la relación de amortiguamiento óptimo  $\zeta_{opt}$ , Than-Tung et al. [65] proponen calcular el valor RMS de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia invariante, es decir:

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_{\Omega_1, \zeta \rightarrow \infty}^2 + \zeta_{\Omega_2, \zeta \rightarrow \infty}^2 + \zeta_{\Omega_0, \zeta \rightarrow 0}^2}{3}} \quad (3.48)$$

### 3.11 Optimización $H_\infty$

El objetivo de optimización por el método  $H_\infty$  es minimizar la magnitud máxima de la función de respuesta en frecuencia normalizada (o de forma adimensional), es decir, minimizar las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia de la respuesta

en frecuencia  $R(s)$  de la masa de la estructura principal, conocida como la norma  $\|H_\infty\|$  [35]. La técnica  $H_\infty$  es de las más conocidas en la teoría de la minimización de la respuesta vibratoria en el control pasivo de vibraciones mediante absorbedores de vibración dinámicos.

En la teoría de absorbedores de vibración, la minimización de la norma  $\|H_\infty\|$  conduce a producir un equilibrio dinámico entre las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia del sistema, por lo tanto, la minimización de la norma  $\|H_\infty\|$  conduce a la formulación de un problema de optimización no lineal multivariable con restricciones, el cual se puede expresar como [56], [66]:

$$\min_{P_{opt}} \left( \max_{\Omega} |H_{IDVA}(\Omega)| \right) = \max_{\Omega} (|H_{IDVA}(P_{opt}, \beta, \Omega)|) \quad (3.49)$$

Sujeto a que los parámetros a optimizar  $P_{opt}$  del sistema, sean soluciones reales y positivas  $\{P_{opt} \geq 0\}$  de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial |H_{IDVA}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (3.50)$$

La interpretación física de las dos restricciones de la ecuación (3.49) son: el intervalo físico admisible para analizar la relación de frecuencias y las limitaciones físicas de diseño para construir el dispositivo.

El problema de optimización mín-máx a resolver en las ecuaciones (3.49) y (3.50) radica en que la técnica de los puntos fijos descrita por Den Hartog se emplean los puntos fijos para minimizar de forma aproximada la norma  $\|H_\infty\|$ , en cambio la técnica de optimización de  $H_\infty$  ocupa las frecuencias de resonancia para minimizar de forma exacta la norma  $\|H_\infty\|$ .

Existen dos métodos para resolver el problema de optimización mín-máx:

- Método de optimización de programación cuadrática secuencial.
- Método de Nishihara.

Para este caso se utiliza el método de Nishihara por su alta precisión en la resolución numérica.

### 3.11.1 Método de Nishihara

Encontrar una solución general en casos donde hay amortiguamiento en el sistema primario resulta complicado. Hasta ahora, la técnica de optimización  $H_\infty$  no ha proporcionado una solución exacta para esta situación. Sin embargo, al utilizar el método de Nishihara [13], [67], una aproximación viable sería considerar el amortiguamiento como nulo o insignificante, fijando su valor en cero.

Bajo este argumento, la idea novedosa de Nishihara fue proponer un artificio matemático en términos de la norma  $\|H_\infty\|$ . Matemáticamente se expresa como:

$$r^2 = 1 - \frac{1}{h_{max}^2} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (3.51)$$

$$f_n = \text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h_{max}^2} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.51) es empleada para minimizar el valor máximo  $h_{max}$  de la función de transferencia referente a la norma  $\|H_\infty\|$ .

A continuación, se presenta el procedimiento de la metodología de optimización de Nishihara [56], los pasos son los mismos a los de la técnica de puntos fijos extendida hasta el paso VI donde se obtiene la función de respuesta en frecuencia del sistema.

- I. Obtener la FRF mediante el teorema de Pitágoras.

$$H^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.53)$$

- II. Se define el numerador  $\mathcal{N}$  y denominador  $\mathcal{D}$ , de la ecuación (3.53):

$$\mathcal{N}_{um} = A^2 + B^2 \quad ; \quad \mathcal{D}_{en} = C^2 + D^2 \quad (3.54)$$

- III. Se propone la función descrita por Nishihara para determinar el valor mínimo  $h_{min}$  de la amplitud máxima  $h_{max}$  mediante la siguiente ecuación:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (3.55)$$

IV. Se reescribe la ecuación (3.52) de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}_{en} - \frac{\mathcal{N}_{um}}{h^2} = 0 \quad (3.56)$$

V. Sustituir todos los términos correspondientes.

VI. Convertir la ecuación en una ecuación mónica teniendo como resultado:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (3.57)$$

VII. Se expresan los coeficientes  $c_n$  mediante el siguiente sistema de ecuaciones, los cuales representa las sumas y los productos de las raíces de la ecuación (3.57):

$$f_1 \rightarrow (4c_2 - c_1^2)\sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (3.58)$$

$$f_2 \rightarrow c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} = 0 \quad (3.59)$$

$$f_3 \rightarrow 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (3.60)$$

Donde  $f_1, f_2, f_3$  están expresadas en términos de los parámetros a optimizar:  $\eta, q, \mu, \zeta$  y del parámetro  $h$ .

VIII. Sustituir los coeficientes  $c_n$  en  $f_1, f_2, f_3$  y llevar a su mínima expresión.

IX. Encontrar la matriz jacobiana en base a los parámetros  $\eta, q, \mu$  y  $\zeta$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

La matriz es de 3x4 y se satisface para cualquier determinante menor de 3x3 igualado a cero.

X. Obtener los determinantes  $f_4$  y  $f_5$  de 3x3 para encontrar la solución a la matriz jacobiana.

$$f_4 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} = A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = 0 \quad (3.62)$$

$$f_5 = \begin{bmatrix} D_1 & A_1 & B_1 \\ D_2 & A_2 & B_2 \\ D_3 & A_3 & B_3 \end{bmatrix} = A_1 B_2 D_3 - A_1 B_3 D_2 - A_2 B_1 D_3 + A_2 B_3 D_1 + A_3 B_1 D_2 - A_3 B_2 D_1 = 0 \quad (3.63)$$

- XI. Se propone un valor arbitrario para  $\beta$  y se sustituye en las ecuaciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$ .
- XII. Resolver mediante algún método numérico el sistema de ecuaciones no lineales de  $5 \times 5$  estableciendo valores iniciales.



# 4

## 4 Modelo matemático

En este capítulo se llevó a cabo el desarrollo e implementación de los modelos matemáticos que fueron previamente descritos en el marco teórico. Estos modelos están fundamentados en la literatura científica existente sobre absorbedores de vibración dinámicos, específicamente aquellos que integran un componente conocido como inersor.

### 4.1 Función de respuesta en frecuencia

El modelo propuesto en la Figura 4.1 es una configuración de una estructura mecánica sujeta a una base, dicha base recibe una excitación de tipo armónica definida como  $x_0$ . Para poder controlar las vibraciones excesivas se acopla un DVA a la estructura, donde el amortiguador del absorbedor se sustituye por las impedancias mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  Y  $C_6$  generando de esta manera un absorbedor dinámico de vibración basado en inersor (IDVA).

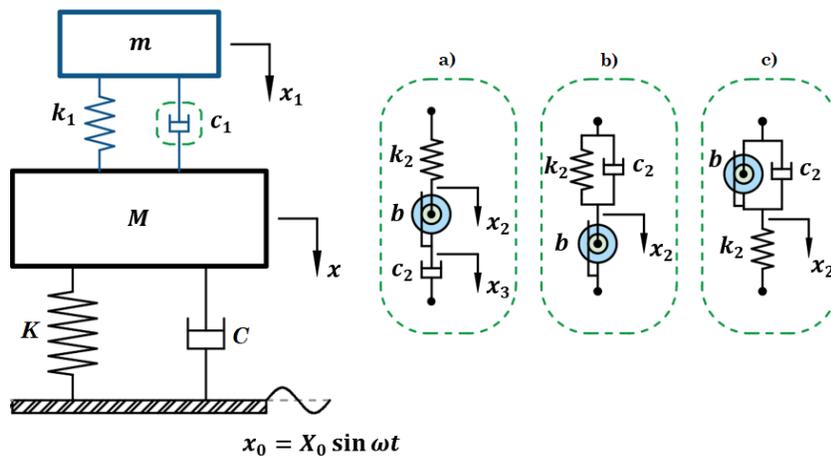


Figura 4.1: Esquema del modelo propuesto en este trabajo.

Donde:

$M$	<i>Masa de la estructura principal</i>
$m$	<i>Masa correspondiente al IDVA</i>
$b$	<i>Inertancia del inersor</i>
$C$	<i>Amortiguamiento de la estructura principal</i>
$c_2$	<i>Amortiguamiento del inersor</i>
$K$	<i>Rigidez de la estructura principal</i>
$k_1$	<i>Rigidez correspondiente al IDVA</i>
$k_2$	<i>Rigidez del inersor</i>
$x, x_1, x_2, x_3$	<i>Coordenadas generalizadas (desplazamientos)</i>
$x_0$	<i>Excitación de tipo armónica</i>

El desarrollo matemático completo para la estructura de la figura 4.1, se presenta en el **apéndice A**.

Para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange realizando un análisis de energías. Para esto se consideran principalmente las coordenadas generalizadas del sistema, recordando que estas definen la cantidad de ecuaciones resultantes. Las ecuaciones de movimiento del sistema de la Figura 4.1 quedan de la siguiente manera:

#### IDVA-C3

$$Ms^2X + cs(X - X_3) + KX + k_1(X - X_1) = KX_0 \quad (4.1)$$

$$ms^2X_1 + k_1(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (4.2)$$

$$bs^2(X_2 - X_3) + k_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (4.3)$$

$$bs^2(X_3 - X_2) + cs(X_3 - X) = 0 \quad (4.4)$$

#### IDVA-C4

$$Ms^2X + bs^2(X - X_2) + KX + k_1(X - X_1) = KX_0 \quad (4.5)$$

$$bs^2(X_2 - X) + cs(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (4.6)$$

$$ms^2X_1 + cs(X_1 - X_2) + k_1(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (4.7)$$

### IDVA-C6

$$Ms^2X + KX + k_1(X - X_1) + k_2(X - X_2) = KX_0 \quad (4.8)$$

$$bs^2(X_2 - X_1) + cs(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X) = 0 \quad (4.9)$$

$$ms^2x_1 + bs^2(X_1 - X_2) + cs(X_1 - X_2) + k_1(X_1 - X) = 0 \quad (4.10)$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones para cada impedancia mecánica, se obtiene la función de transferencia del sistema y se sustituye  $s = I * \omega$ , esto es válido debido a que solo nos interesa la respuesta del sistema en estado estable.

Posteriormente, se proponen los parámetros adimensionales ( $\mu, \eta, \beta, q, \Omega, \zeta$ ) utilizando el teorema de Pi de Buckingham.

**Nota:** Los parámetros son los mismos para las tres impedancias mecánicas.

$$\omega_1^2 = \frac{K}{M} \quad \omega_2^2 = \frac{k_1}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{k_2}{b} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_2} \quad \mu = \frac{b}{m} \quad (4.11)$$

$$\eta = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad \beta = \frac{m}{M} \quad q = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (4.12)$$

Donde:

$\omega_1^2$	<i>Frecuencia natural al cuadrado asociado a la estructura</i>
$\omega_2^2$	<i>Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA</i>
$\omega_3^2$	<i>Frecuencia natural al cuadrado asociado al IDVA</i>
$\zeta$	<i>Relación de amortiguamiento</i>
$\mu$	<i>Relación inercia-masa</i>
$\eta$	<i>Relación de frecuencia inercia-masa</i>
$\beta$	<i>Relación de masas</i>
$q$	<i>Relación de frecuencia natural</i>
$\Omega$	<i>Relación de frecuencia forzada</i>

La función de respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional se representa de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{A + iB}{C + iD} \quad (4.13)$$

Donde las variables A, B, C y D se describen en el **apéndice B**.

Para obtener la norma de  $H(s)$  en el espacio euclidiano, se multiplica la ecuación (4.13) por el conjugado complejo del numerador y denominador, respectivamente, obteniendo:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (4.14)$$

Luego de sustituir los parámetros adimensionales en las variables A, B, C y D se obtiene la función de respuesta en frecuencia en estado estable de la estructura en su forma adimensional para cada red mecánica.

### IDVA-C3

$$|H(s)|^2 = \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{q^8\eta^4} + \frac{1}{4} \frac{\mu^2\Omega^2(\Omega^2 - q^2)^2}{\zeta^2q^6} \right) / \left( \frac{1}{q^8\eta^4} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{\mu^2\Omega^2(-\Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2 + q^2)^2}{\zeta^2q^6} \right) \quad (4.15)$$

### IDVA-C4

$$|H(s)|^2 = \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{\eta^4q^8} + \frac{4\zeta^2\Omega^2(\Omega^2\mu + \Omega^2 - q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) / \left( \frac{1}{\eta^4q^8} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 + \frac{4\zeta^2\Omega^2(\Omega^4\beta\mu + \Omega^4\mu - \Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2\mu - \Omega^2 + q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) \quad (4.16)$$

### IDVA-C6

$$|H(s)|^2 = \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{\eta^4q^8} + \frac{4\Omega^2\zeta^2(-\eta^2\mu q^2 + \Omega^2 - q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) / \left( \frac{1}{\eta^4q^8} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 + \frac{4\Omega^2\zeta^2(-\Omega^2\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\beta q^2 + \eta^2\mu q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2 + q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) \quad (4.17)$$

# 5

## 5 Desarrollo de las técnicas de optimización

En este capítulo se detallan las técnicas de optimización utilizadas en esta tesis: la técnica de puntos fijos extendida y la optimización  $H^\infty$ . Para la implementación de estas técnicas es necesario obtener la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la estructura en su forma adimensional.

### 5.1 Puntos fijos extendida

#### a) IDVA-C3

Al aplicar el procedimiento hasta el paso VII de la sección 3.10 y aplicando las dos condiciones fundamentales de los puntos fijos de la sección 3.9 a la ecuación 4.15 se obtiene:

$$|H|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{(\Omega^4 - q^2(1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 + \eta^2 q^4)^2}{(\Omega^6 + (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + q^2(q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2 q^4)^2} \quad (5.1)$$

$$|H|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{(-\Omega^2 + q^2)^2}{(-\Omega^4 + (1 + q^2(\beta + 1))\Omega^2 - q^2)^2} \quad (5.2)$$

Del paso VIII de la sección 3.10 cuando se analiza con el signo positivo se obtiene la siguiente solución trivial:

$$-\Omega^6 \beta \eta^2 \mu q^2 = 0 \quad (5.3)$$

Sin embargo, cuando se analiza con el signo negativo y siguiendo el procedimiento hasta el paso XIII de la sección 3.10 se obtienen las siguientes ecuaciones mónicas de la forma:

$$\lambda^4 + a_i \lambda^3 + b_i \lambda^2 + c_i \lambda + d_i = 0 \quad (5.4)$$

$$\lambda^4 + \tilde{a}_i \lambda^3 + \tilde{b}_i \lambda^2 + \tilde{c}_i \lambda + \tilde{d}_i = 0 \quad (5.5)$$

Con  $i = 3, 4$  y  $6$  que corresponden a las impedancias mecánicas C3, C4 y C6 respectivamente. Las variables  $(a_i, b_i, c_i, d_i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d}_i)$  se muestran en el **apéndice C**.

Para obtener las soluciones óptimas mediante el teorema de vieta es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones mencionadas en el paso XIV de la sección 3.10.

$$\sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 = \sum_{i=1}^4 \Omega_{\zeta \rightarrow \infty, i}^2 \quad \rightarrow \quad a_i = \tilde{a}_i \quad (5.6)$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \quad \rightarrow \quad b_i = \tilde{b}_i \quad (5.7)$$

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \quad \rightarrow \quad c_i = \tilde{c}_i \quad (5.8)$$

$$\prod_{i=1}^4 \Omega_i^2 = \prod_{i=1}^4 \Omega_{\zeta \rightarrow \infty, i}^2 \quad \rightarrow \quad d_i = \tilde{d}_i \quad (5.9)$$

Al resolver la ecuación 5.6 se tiene:

$$q^2 = \frac{2}{(\beta \mu + 2\mu + 2)\eta^2 - 2\beta} \quad (5.10)$$

La ecuación 5.10 es una condición necesaria pero no suficiente para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del IDVA-C3. Esta condición se puede lograr resolviendo el resto de ecuaciones 5.7 - 5.9.

Al resolver la ecuación 5.7 se tiene:

$$h = -\frac{1}{-1 + (((\mu + 1)\beta + \mu + 2)\eta^2 - \beta^2 - \beta)q^4 + ((\mu + 1)\eta^2 - 2\beta - 2)q^2} \quad (5.11)$$

Al resolver la ecuación 5.8 se tiene:

$$h = -\frac{2}{-2 + \eta^2(\beta + 1)q^4 + ((\mu + 2)\eta^2 - 2\beta - 1)q^2} \quad (5.12)$$

Al resolver la ecuación 5.9 se tiene:

$$h = -\frac{1}{\eta^2 q^2 - 1} \quad (5.13)$$

Iguando las ecuaciones 5.12 y 5.13 se tiene:

$$q^2 = \frac{-\eta^2 \mu + 2\beta + 1}{\eta^2(\beta + 1)} \quad (5.14)$$

Iguando las ecuaciones 5.11 y 5.13 se tiene:

$$q^2 = \frac{-\eta^2 \mu + 2\beta + 2}{-\beta^2 + (-1 + (\mu + 1)\eta^2)\beta + (\mu + 2)\eta^2} \quad (5.15)$$

Como se observa existen tres soluciones para  $q$  por lo tanto se igualan y se resuelven para  $\eta$ , posteriormente se hallan los parámetros óptimos.

$$\eta^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\left(\beta^2 + \frac{3}{2}\beta + 1\right)^2 \mu^2 + (8\beta^3 - 4\beta^2 - 8\beta)\mu + 4\beta^2 + (2\beta^2 + 7\beta + 2)\mu + 2\beta}}{\mu(2 + (\beta + 2)\mu)} \quad (5.16)$$

**Parámetros óptimos obtenidos:**

$$\mu_{opt,C3} = \frac{2\beta}{\beta + 1} \quad (5.17)$$

$$\eta_{opt,C3} = \sqrt{\beta + 1} \quad (5.18)$$

$$q_{opt,C3} = \frac{1}{\beta + 1} \quad (5.19)$$

$$\|H_{C3}\| = \sqrt{\frac{\beta + 1}{\beta}} \quad (5.20)$$

La ecuación 5.20 representa la amplitud de vibración del sistema en los puntos invariantes.

El conjunto de soluciones óptimas  $\mu_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$  y  $q_{opt}$  generan los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes o resonantes del IDVA-C3. Sin embargo, para aplanar la curva de respuesta en frecuencia del IDVA-C3 en todas las frecuencias de excitación, estos parámetros no son suficientes y es forzoso encontrar la relación de amortiguamiento óptima  $\zeta_{opt}$ .

### Soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento $\zeta_{opt}$ .

Al aplicar la teoría de Krenk para obtener el amortiguamiento óptimo del IDVA-C3 se producen tres frecuencias resonantes no amortiguadas:  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  cuando  $\zeta_{\rightarrow\infty}$  y  $\Omega_0$  cuando  $\zeta_{\rightarrow 0}$ .

- Para poder calcular las frecuencias resonantes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  cuando  $\zeta_{\rightarrow\infty}$  se debe resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la ecuación 5.2.

$$-\Omega^4 + (1 + q^2(\beta + 1))\Omega^2 - q^2 = 0 \quad (5.21)$$

Por lo tanto, después de sustituir los parámetros óptimos en la ecuación 5.21 las frecuencias resonantes cuando  $\zeta_{\rightarrow\infty}$  son:

$$\Omega_{1,\zeta_{\rightarrow\infty}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\beta + 1)(\beta + 2 + \sqrt{\beta^2 + 4\beta})}}{\beta + 1} \quad (5.22)$$

$$\Omega_{2,\zeta_{\rightarrow\infty}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\beta + 1)(\beta + 2 - \sqrt{\beta^2 + 4\beta})}}{\beta + 1} \quad (5.23)$$

- Para poder calcular la frecuencia resonante  $\Omega_0$  cuando  $\zeta_{\rightarrow 0}$  se debe resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la ecuación 5.1.

$$\Omega^6 + (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + q^2(q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2q^4 = 0 \quad (5.24)$$

Después de sustituir los parámetros óptimos en la ecuación 5.24 la frecuencia resonante cuando  $\zeta_{\rightarrow 0}$  es:

$$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\beta + 1}} \quad (5.25)$$

Para obtener analíticamente la relación de amortiguamiento óptimo que aplanara la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, se sustituyen  $\mu_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$ ,  $q_{opt}$ ,  $\|H\|$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_0$  en la función de respuesta en frecuencia en estado estable de la estructura en su forma adimensional (ecuación 4.15). Esto producirá tres cantidades de amortiguamiento en cada frecuencia resonante no amortiguada.

La relación de amortiguamiento para  $\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{1}{3} \frac{\beta}{\beta + 1} \quad (5.26)$$

La relación de amortiguamiento para  $\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{1}{3} \frac{\beta}{\beta + 1} \quad (5.27)$$

La relación de amortiguamiento para  $\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{1}{4} \frac{\beta}{\beta + 1} \quad (5.28)$$

El factor de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor cuadrático medio de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia resonante no amortiguada.

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_{\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}}^2 + \zeta_{\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}}^2 + \zeta_{\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}}^2}{3}} \quad (5.29)$$

Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo para el IDVA-C3 se expresa como:

$$\zeta_{opt,C3} = \frac{1}{6} \sqrt{11} \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} \quad (5.30)$$

## b) IDVA-C4

Aplicando las dos condiciones fundamentales de los puntos fijos de la sección 3.9 a la ecuación 4.16 para IDVA-C4 se tiene:

$$|H|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{(\Omega^4 - q^2(1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 + \eta^2 q^4)^2}{(\Omega^6 + (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + q^2(q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2 q^4)^2} \quad (5.31)$$

$$|H|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{((-\mu - 1)\Omega^2 + q^2)^2}{((-1 + (-\beta - 1)\mu)\Omega^4 + (\mu + 1 + (\beta + 1)q^2)\Omega^2 - q^2)^2} \quad (5.32)$$

Solución trivial:

$$-\Omega^8 \beta \mu = 0 \quad (5.33)$$

Se obtienen las ecuaciones mónicas 5.4 y 5.5.

Al resolver la ecuación 5.6 se tiene:

$$q^2 = \frac{(\mu + 1)^2}{\eta^2(\beta + 1)^2\mu^3 + (\beta + 1)((\eta^2 + 1)\beta + 3\eta^2 + 1)\mu^2 + (2\beta\eta^2 + 3\eta^2 + \beta + 1)\mu + \eta^2 - \beta} \quad (5.34)$$

Al resolver la ecuación 5.7 se tiene:

$$h = -((2 + (\beta + 2)\mu)(\mu + 1)^2)/(2q^2\eta^2(\beta + 1)^2\mu^4 + (4\eta^2(\beta + 1)^3q^4 + (4\beta^2\eta^2 + 12\beta\eta^2 + 2\beta^2 + 8\eta^2 + 4\beta + 2)q^2 - \beta - 2)\mu^3 + (2(\beta + 1)^2((\eta^2 + 1)\beta + 6\eta^2 + 1)q^4 + 2\eta^2(\beta^2 + 6\beta + 6)q^2 - 2\beta - 6)\mu^2 + ((-\beta^3 + 4\beta^2\eta^2 + (16\eta^2 + 3)\beta + 12\eta^2 + 2)q^4 + (4\beta\eta^2 - 2\beta^2 + 8\eta^2 - 8\beta - 6)q^2 - \beta - 6)\mu - 2 + (2\beta\eta^2 - 2\beta^2 + 4\eta^2 - 2\beta)q^4 + (2\eta^2 - 4\beta - 4)q^2) \quad (5.35)$$

Al resolver la ecuación 5.8 se tiene:

$$h = -((2 + (\beta + 2)\mu)(\mu + 1))/(2q^2\eta^2(\beta + 1)^2\mu^3 + (\eta^2(\beta + 1)^3q^4 + (2\beta^2\eta^2 + 8\beta\eta^2 + \beta^2 + 6\eta^2 + 2\beta + 1)q^2 - \beta - 2)\mu^2 + (2\eta^2(\beta + 1)^2q^4 + (4\beta\eta^2 - \beta^2 + 6\eta^2 - \beta)q^2 - \beta - 4)\mu - 2 + \eta^2(\beta + 1)q^4 + (2\eta^2 - 2\beta - 1)q^2) \quad (5.36)$$

Al resolver la ecuación 5.9 se tiene:

$$h = \frac{-2 + (-\beta - 2)\mu}{2q^2\eta^2(\beta + 1)^2\mu^2 + (4q^2\eta^2(\beta + 1) - \beta - 2)\mu + 2q^2\eta^2 - 2} \quad (5.37)$$

Igualando las ecuaciones 5.36 y 5.37 se tiene:

$$q^2 = \frac{-(\beta + 1)^2\mu^2 + (\beta^2 + \beta)\mu + 2\beta + 1}{\eta^2(\beta + 1)(1 + (\beta + 1)\mu)^2} \quad (5.38)$$

Igualando las ecuaciones 5.35 y 5.37 se tiene:

$$q^2 = -(2(\beta + 1)(\mu + 1)(-2 + (\beta + 1)\mu^2 + (-\beta - 1)\mu))/(4\eta^2(\beta + 1)^3\mu^3 + 2(\beta + 1)^2((\eta^2 + 1)\beta + 6\eta^2 + 1)\mu^2 + (4\beta^2\eta^2 - \beta^3 + (16\eta^2 + 3)\beta + 12\eta^2 + 2)\mu + 2\beta\eta^2 + 4\eta^2 - 2\beta^2 - 2\beta) \quad (5.39)$$

Existen tres soluciones para  $q$  por lo tanto se igualan y se resuelve para  $\eta$ .

$$\eta^2 = -\frac{((\beta + 1)^2\mu^2 + (\beta + 1)\mu - \beta)((\beta + 1)^2\mu^2 + (-\beta^2 - \beta)\mu - 2\beta - 1)}{(\mu + 1)((\beta + 1)\mu - \beta)(1 + (\beta + 1)\mu)^3} \quad (5.40)$$

**Parámetros óptimos obtenidos:**

$$\mu_{opt,C4} = \frac{\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1}}{2\beta + 2} \quad (5.41)$$

$$\eta_{opt,C4} = \sqrt{\frac{2(\beta + 1)}{3\beta + 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1}}} \quad (5.42)$$

$$q_{opt,C4} = \sqrt{\frac{3\beta + 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1}}{(\beta + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + 1)(\beta + 1)^2}} \quad (5.43)$$

$$\|H_{C4}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + 1}{\beta}} \quad (5.44)$$

**Soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento  $\zeta_{opt}$ .**

$$\Omega_{1,2,\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{((\beta^2 + 3\beta + 1)\sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + \beta^3 + 6\beta^2 + 6\beta + 1)}\beta}{(\beta + 1)((\beta + 1)\sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + \beta^2 + 4\beta + 1)}} + \frac{1}{\beta + 1} \quad (5.45)$$

$$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\beta + 1}} \quad (5.46)$$

Debido a que las soluciones son extremadamente extensas, se considera aplanar la curva más alta, siendo esta la frecuencia resonante no amortiguada  $\Omega_0$  cuando  $\zeta_{\rightarrow 0}$ .

Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo para el IDVA-C4 se expresa como:

$$\zeta_{opt,C4} = \frac{1}{6}\sqrt{3} \sqrt{\frac{(3\beta^5 + 10\beta^4 - 3\beta^3)\sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + 3\beta^6 + 19\beta^5 + 15\beta^4 - 13\beta^3}{\left(\left(\beta^4 + \frac{10}{3}\beta^3 + \beta^2 - \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\right)\sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} + \left(\beta^4 + 6\beta^3 + 5\beta^2 - 2\beta - \frac{1}{2}\right)\left(\beta + \frac{1}{3}\right)\right)(\beta + 1)}}} \quad (5.47)$$

### c) IDVA-C6

Aplicando las dos condiciones fundamentales de los puntos fijos de la sección 3.9 a la ecuación 4.17 para IDVA-C6 se tiene:

$$|H|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{(\Omega^4 - q^2(1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 + \eta^2 q^4)^2}{(\Omega^6 + (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + q^2(q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2 q^4)^2} \quad (5.48)$$

$$|H|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{((\eta^2\mu + 1)q^2 - \Omega^2)^2}{((-1 + (\beta + 1)\Omega^2)(\eta^2\mu + 1)q^2 - \Omega^4 + \Omega^2)^2} \quad (5.49)$$

Solución trivial:

$$-\Omega^4\beta\eta^4\mu q^4 = 0 \quad (5.50)$$

Se obtienen las ecuaciones mónicas 5.4 y 5.5.

Al resolver la ecuación 5.6 se tiene:

$$q^2 = -\frac{1}{(\beta\mu - 1)\eta^2 + \beta} \quad (5.51)$$

Al resolver la ecuación 5.7 se tiene:

$$h = 2/(2 + ((2\mu^2\beta^2 + (2\mu^2 - \mu)\beta - 2\mu)\eta^4 + (-4 + 4\mu\beta^2 + (4\mu - 2)\beta)\eta^2 + 2\beta^2 + 2\beta)q^4 + ((4\beta\mu + 4\mu - 2)\eta^2 + 4\beta + 4)q^2) \quad (5.52)$$

Al resolver la ecuación 5.8 se tiene:

$$h = (-2\eta^2\mu - 2)/(\eta^2(\beta + 1)(\eta^2\mu + 1)q^4 + (((-2\beta - 1)\mu^2 + \mu)\eta^4 + (2 + (-4\beta - 2)\mu)\eta^2 - 2\beta - 1)q^2 - 2\eta^2\mu - 2) \quad (5.53)$$

Al resolver la ecuación 5.9 se tiene:

$$h = \frac{-\eta^2\mu - 1}{-1 + (q^2 - \mu)\eta^2} \quad (5.54)$$

Igualando las ecuaciones 5.53 y 5.54 se tiene:

$$q^2 = \frac{((2\beta + 1)\mu^2 - \mu)\eta^4 + (4\beta + 2)\mu\eta^2 + 2\beta + 1}{\eta^2(\beta + 1)(\eta^2\mu + 1)} \quad (5.55)$$

Igualando las ecuaciones 5.52 y 5.54 se tiene:

$$q^2 = \frac{1}{2} \frac{((-4\beta - 4)\mu^2 + 2\mu)\eta^4 - 8(\beta + 1)\mu\eta^2 - 4\beta - 4}{\left(\mu\left(\beta^2 + \beta\right)\mu - \frac{1}{2}\beta - 1\right)\eta^4 + ((2\beta^2 + 2\beta)\mu - \beta - 2)\eta^2 + \beta^2 + \beta} (\eta^2\mu + 1) \quad (5.56)$$

Existen tres soluciones para  $q$  por lo tanto se igualan y se resuelve para  $\eta$ .

$$\eta^2 = -\frac{2\beta + 1}{2\beta\mu + \mu - 1} \quad (5.57)$$

**Parámetros óptimos obtenidos:**

$$\mu_{opt,C6} = \frac{2\beta}{(2\beta + 1)^2} \quad (5.58)$$

$$\eta_{opt,C6} = 2\beta + 1 \quad (5.59)$$

$$q_{opt,C6} = \sqrt{\frac{1}{(2\beta + 1)(\beta + 1)}} \quad (5.60)$$

$$\|H_{C6}\| = \sqrt{\frac{\beta + 1}{\beta}} \quad (5.61)$$

**Soluciones óptimas para la relación de amortiguamiento  $\zeta_{opt}$ .**

$$\Omega_{1,2,\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}}} \quad (5.62)$$

$$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\beta + 1}} \quad (5.63)$$

## Relación de amortiguamiento.

Para  $\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{1}{4} \frac{\left( (\beta + 1)^2 \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} + \beta^2 + \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{8} \right) \beta^3}{\left( \left( \beta + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} + \beta + \frac{1}{4} \right) \left( \beta + \frac{1}{2} \right)^3 (\beta + 1)} \quad (5.64)$$

Para  $\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{1}{4} \frac{\beta^3 \left( (\beta + 1)^2 \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} - \beta^2 - \frac{3}{2}\beta - \frac{3}{8} \right)}{\left( \left( \beta + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} - \beta - \frac{1}{4} \right) (\beta + 1) \left( \beta + \frac{1}{2} \right)^3} \quad (5.65)$$

Para  $\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}$  es:

$$\zeta^2 = \frac{4\beta^3}{(2\beta + 1)^3} \quad (5.66)$$

Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo para el IDVA-C6 se expresa como:

$$\zeta_{opt,C6} = \frac{1}{3} \sqrt{30} \sqrt{\frac{\beta^3}{(2\beta + 1)^3}} \quad (5.67)$$

## 5.2 Criterio $H_\infty$

Para el desarrollo de este estudio se ha utilizado el método de Nishihara, descrito en [67]. Este enfoque permite alcanzar resultados más exactos y confiables, garantizando un alto nivel de precisión en los resultados obtenidos.

Para el desarrollo del método es necesario seguir los pasos mencionados en la sección 3.11.1 considerando que el procedimiento es el mismo para los tres IDVA's de estudio.

Se inicia el análisis con la función de respuesta en frecuencia en su forma adimensional  $H(s)$ , correspondiente al IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6 asociadas con las ecuaciones 4.15, 4.16 y 4.17 respectivamente. A continuación, se definen las siguientes variables:

$$N_{um,c3} = 4\Omega^8\zeta^2 + \left((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^4\right)q^2\Omega^6 + 4\left((1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4\right)q^4\Omega^4 + \eta^2\left((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^2\right)q^6\Omega^2 + 4q^8\eta^4\zeta^2 \quad (5.68)$$

$$D_{en,c3} = 4\Omega^{12}\zeta^2 + \left(\left((-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8\right)\zeta^2 + \mu^2\eta^4\right)q^2 - 8\zeta^2\Omega^{10} + \left(\left(4(1 + (\beta + 1)\mu)^2\eta^4 + 8(2 + (\beta + 1)\mu)(\beta + 1)\eta^2 + 4(\beta + 1)^2\right)\zeta^2 - 2\mu^2\eta^4(\beta + 1)\right)q^4 + \left(\left(16 + (8\beta + 16)\mu\right)\eta^2 + 8\beta + 16\right)\zeta^2 - 2\mu^2\eta^4\right)q^2 + 4\zeta^2\Omega^8 + \left(\left(\beta + 1\right)\left((-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8\right)\zeta^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1)\right)\eta^2q^4 + \left(-8(1 + (\beta + 1)\mu)(\mu + 1)\eta^4 + (-16\beta - 16)\mu - 16\beta - 32\right)\eta^2 - 8\beta - 8\right)\zeta^2 + 2\mu^2\eta^4(\beta + 2)\right)q^2 + (-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^4\right)q^2\Omega^6 + 4\left(\eta^4\zeta^2(\beta + 1)^2q^4 - \frac{1}{2}\left(\left((-8\beta - 8)\mu - 4\beta - 8\right)\eta^2 - 8\beta - 8\right)\zeta^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1)\right)\eta^2q^2 + (1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4\right)q^4\Omega^4 - 8\eta^2\left(\eta^2\zeta^2(\beta + 1)q^2 + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2\right)q^6\Omega^2 + 4q^8\eta^4\zeta^2 \quad (5.69)$$

$$N_{um,c4} = \Omega^8\mu^2 - 2q^2(\mu^3\eta^2 + (-2\zeta^2 + \eta^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta^2 - 2\zeta^2)\Omega^6 + q^4(\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta^2 - 8\zeta^2)\Omega^4 - 2(\mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta^2)q^6\Omega^2 + q^8\eta^4\mu^2 \quad (5.70)$$

$$D_{en,c4} = \Omega^{12}\mu^2 + \left(\left(-2\eta^2(\beta + 1)\mu^3 + \left(-2\eta^2 + 4\left(\zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{2}\right)(\beta + 1)\right)\mu^2\right) + 8\zeta^2(\beta + 1)\mu + 4\zeta^2\right)q^2 - 2\mu^2\Omega^{10} + \left(\eta^4(\beta + 1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta + 1)(\eta^2 + \beta + 1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta + 4)\eta^2 + (\beta + 1)^2)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta + 1)^2\mu - 8\zeta^2(\beta + 1)q^4 + (2\eta^2(\beta + 2)\mu^3 + (-8\zeta^2\beta - 8\zeta^2 + 4\eta^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta + 2)\mu - 8\zeta^2)q^2 + \mu^2\right)\Omega^8 - 2q^2\left(\left(\beta + 1\right)\left(\eta^4(\beta + 1)\mu^3 + \eta^2(\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 2\zeta^2(\beta + 1)\right)q^4 + \left(\eta^4(\beta + 1)\mu^4 + (\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\eta^2\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta + 4)\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta + 1)\mu - 4\zeta^2(\beta + 2)\right)q^2 + \mu^3\eta^2 + (-2\zeta^2 + \eta^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta^2 - 2\zeta^2\right)\Omega^6 + q^4\left(\mu^2\eta^4(\beta + 1)^2q^4 + (4\eta^4(\beta + 1)\mu^3 + 2(\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\eta^2\mu^2 - 8\zeta^2(\beta + 1)q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta^2 - 8\zeta^2)\Omega^4 - 2q^6(\mu^2\eta^4(\beta + 1)q^2 + \mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta^2)\Omega^2 + q^8\eta^4\mu^2\right) \quad (5.71)$$

$$N_{um,c6} = \Omega^8\mu^2 - 2(\mu^3\eta^2 + (\eta^2 + 1)\mu^2 - 2\zeta^2)q^2\Omega^6 + (\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\eta^2\zeta^2 - 8\zeta^2)q^4\Omega^4 - 2(\mu^3\eta^4 + ((-2\zeta^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 4\mu\eta^2\zeta^2 - 2\zeta^2)q^6\Omega^2 + q^8\eta^4\mu^2 \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}
D_{en,C6} = & \Omega^{12}\mu^2 + ((-2\eta^2(\beta + 1)\mu^3 + (-2\eta^2 - 2\beta - 2)\mu^2 + 4\zeta^2)q^2 - 2\mu^2)\Omega^{10} \\
& + ((\eta^4(\beta + 1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta + 1)(\eta^2 + \beta + 1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta + 4)\eta^2 + (\beta + 1)^2)\mu^2 \\
& - 8\eta^2\zeta^2(\beta + 1)\mu - 8\zeta^2(\beta + 1))q^4 + (2\eta^2(\beta + 2)\mu^3 + (4\eta^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta^2)q^2 \\
& + \mu^2)\Omega^8 - 2 \left( \left( \eta^4(\beta + 1)\mu^3 - 2 \left( \left( \zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{2} \right) \eta^2 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} \right) \eta^2\mu^2 - 4\eta^2\zeta^2(\beta + 1)\mu \right. \right. \\
& - 2\zeta^2(\beta + 1))(\beta + 1)q^4 + (\eta^4(\beta + 1)\mu^4 + (\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\eta^2\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta \\
& + 4)\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 4\eta^2\zeta^2(\beta + 2)\mu - 4\zeta^2(\beta + 2))q^2 + \mu^3\eta^2 + (\eta^2 + 1)\mu^2 - 2\zeta^2)q^2\Omega^6 \\
& + \left( \mu^2\eta^4(\beta + 1)^2q^4 + \left( 4\eta^4(\beta + 1)\mu^3 - 8 \left( \left( \zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{2} \right) \eta^2 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} \right) \eta^2\mu^2 \right. \right. \\
& - 16\eta^2\zeta^2(\beta + 1)\mu - 8\zeta^2(\beta + 1))q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 \\
& - 8\mu\eta^2\zeta^2 - 8\zeta^2)q^4\Omega^4 - 2q^6(\mu^2\eta^4(\beta + 1)q^2 + \mu^3\eta^4 + ((-2\zeta^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 \\
& \left. \left. - 4\mu\eta^2\zeta^2 - 2\zeta^2)\Omega^2 + q^8\eta^4\mu^2 \right. \right.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Donde:

$N_{um,C3}$  y  $D_{en,C3}$  corresponden al numerador y denominador de la ecuación 4.15.

$N_{um,C4}$  y  $D_{en,C4}$  corresponden al numerador y denominador de la ecuación 4.16.

$N_{um,C6}$  y  $D_{en,C6}$  corresponden al numerador y denominador de la ecuación 4.17.

Posteriormente, se emplea la ecuación 3.55 propuesta por Nishihara:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \tag{5.74}$$

De la ecuación 3.56 se define:

$$\text{Denominador, } C_n - \frac{\text{Numerador, } C_n}{h^2} = 0 \quad \text{Donde } n = 3, 4 \text{ y } 6 \tag{5.75}$$

Al sustituir los términos correspondientes en la ecuación 5.75 se obtiene una ecuación de grado 12 en  $\Omega$ . Luego, se convierte en una ecuación mónica de la forma:

$$\Omega^{12} + \mathbb{C}_1\Omega^{10} + \mathbb{C}_2\Omega^8 + \mathbb{C}_3\Omega^6 + \mathbb{C}_4\Omega^4 + \mathbb{C}_5\Omega^2 + \mathbb{C}_6 = 0 \tag{5.76}$$

Donde los coeficientes  $\mathbb{C}_n$  se describen en el **apéndice D**.

Al realizar el cambio de variable  $y = \Omega^2$  para disminuir la ecuación (5.76) a grado 6 respecto de  $y$ . Se encuentra que la ecuación correspondiente a  $f_n$  es:

$$f_n \rightarrow y^6 + \mathbb{C}_1 y^5 + \mathbb{C}_2 y^4 + \mathbb{C}_3 y^3 + \mathbb{C}_4 y^2 + \mathbb{C}_5 y^1 + \mathbb{C}_6 = 0 \quad (5.77)$$

$$f_n \rightarrow (y - y_A)^2 (y - y_B)^2 (y - y_C)^2 = 0 \quad (5.78)$$

Al expandir la ecuación (5.78) y comparar los términos correspondientes con los coeficientes  $\mathbb{C}_n$  de la ecuación (5.77) se obtiene el sistema de ecuaciones (3.58) - (3.60) correspondientes a  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ .

Para los IDVA's utilizados en esta investigación se tiene:

$$f_1(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta) = (4\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1^2) \sqrt{\mathbb{C}_6} + 4 - \mathbb{C}_5 \quad (5.79)$$

$$f_2(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta) = \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_5 + 4\mathbb{C}_6 + 2\mathbb{C}_3 \sqrt{\mathbb{C}_6} \quad (5.80)$$

$$f_3(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta) = 4\mathbb{C}_6 (\mathbb{C}_1 \sqrt{\mathbb{C}_6} + \mathbb{C}_4) - \mathbb{C}_5^2 \quad (5.81)$$

Las funciones  $f_n(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta)$  para  $n = 1, \dots, 5$  son expresiones muy extensas y se expresan por  $\mathbb{C}_i(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta)$ . Por lo tanto, la matriz jacobiana  $J_N$  asociada al sistema es:

$$J_N = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Para calcular las ecuaciones  $f_4$  y  $f_5$ , se seleccionan los determinantes de  $3 \times 3$  más "simples" de la matriz jacobiana, con el propósito de reducir el uso de memoria de cómputo en su resolución. De este modo, se obtienen los determinantes  $f_4$  y  $f_5$  como:

$$f_4(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(q, \eta, \zeta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (5.83)$$

$$f_5(\beta, \mu, q, \eta, r, \zeta) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, q, \zeta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (5.84)$$

De este modo, se obtiene un sistema de 5 ecuaciones no lineales ( $f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$ ) con 5 incógnitas ( $\mu, q, \eta, r$  y  $\zeta$ ). Para solucionar el sistema de ecuaciones se utiliza método de Newton-Raphson tomando como valores iniciales las soluciones obtenidas en la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida.

# 6

## 6 Resultados

En este apartado se exponen los resultados numéricos de la estructura empleando la metodología de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo et al. [32] y el método de Nishihara [67]. Con el objetivo de encontrar soluciones numéricas para los parámetros óptimos del sistema y de esta forma poder visualizar los resultados obtenidos, se establece un valor para la relación de masa  $\beta = 0.1$ .

### 6.1 IDVA-C3

#### Técnica de los puntos fijos extendida

Utilizando algún sistema de cómputo numérico se sustituye el valor de la relación de masa ( $\beta$ ) en los parámetros óptimos  $\mu_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$ ,  $q_{opt}$  y  $\|H_{\infty}\|$  (ecuaciones (5.17)–(5.20)). Los resultados se muestran en la Tabla 6.1 considerando 10 cifras significativas.

Tabla 6.1: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia en su forma adimensional.

Puntos fijos extendida		
Parámetro		Valor
$\mu_{opt,C3}$	=	0.181818181
$\eta_{opt,C3}$	=	1.048808848
$q_{opt,C3}$	=	0.909090909
$H_{C3}$	=	3.316624790

Después de sustituir  $\beta$  y los valores numéricos de la Tabla 6.1 en la ecuación (5.1) se tiene la FRF cuando el amortiguamiento es cero:

$$H_{\zeta \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{(\Omega^4 - 1.900\Omega^2 + 0.751)^2}{(\Omega^6 - 3.000\Omega^4 + 2.727\Omega^2 - 0.751)^2}} \quad (6.1)$$

De la ecuación (5.2) se obtiene la FRF cuando el amortiguamiento es infinito:

$$H_{\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{(-\Omega^2 + 0.826)^2}{(-\Omega^4 + 1.909\Omega^2 - 0.826)^2}} \quad (6.2)$$

Al sustituir  $\beta$  y los valores numéricos de la Tabla 6.1 en la ecuación (4.15) para un amortiguamiento  $\zeta = 0.30$  se obtiene:

$$H_{\zeta \rightarrow 0.30} = \sqrt{\frac{1.771(\Omega^4 - 1.900\Omega^2 + 0.751)^2 + 0.162\Omega^2(\Omega^2 - 0.826)^2}{1.771(\Omega^6 - 3.000\Omega^4 + 2.727\Omega^2 - 0.751)^2 + 0.162\Omega^2(\Omega^4 - 1.909\Omega^2 + 0.826)^2}} \quad (6.3)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3) se muestra en la Figura 6.1. Para hallar las coordenadas rectangulares de los puntos fijos P, Q, R y S, se sabe que  $h \approx \|H_{\infty}\|^2$ . Por lo tanto, al igualar las ecuaciones (6.1) y (6.2) se resuelve para  $\Omega$ , obteniendo:

$$P = (0.849, 3.316), \quad Q = (1.031, 3.316), \quad R = (0.735, 3.316), \quad \text{y} \quad S = (1.217, 3.316)$$

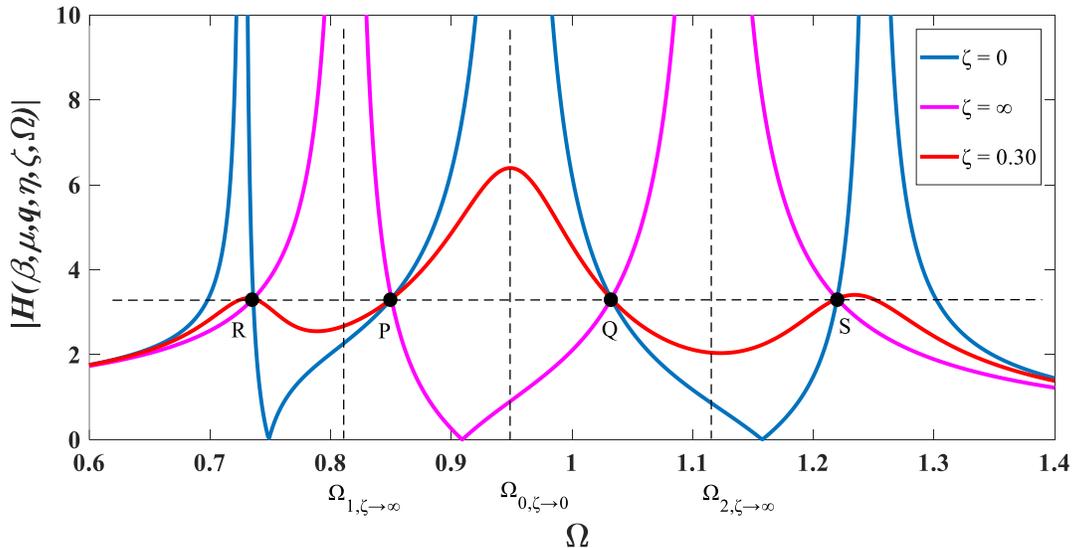


Figura 6.1: Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al IDVA-C3 vs la relación de frecuencias  $\Omega$ , siendo P, Q, R y S los puntos fijos.

Al sustituir el valor de  $\beta$  en las ecuaciones (5.22), (5.23) y (5.25) se obtienen las frecuencias resonantes no amortiguadas. Los resultados se muestran en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Valores numéricos para cada frecuencia resonante no amortiguada.

Frecuencia ( $\Omega$ )		Valor
$\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}$	=	0.814551627
$\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}$	=	1.116062971
$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}$	=	0.953462589

De las ecuaciones (5.26) – (5.28) se obtienen 3 valores de amortiguamiento en cada frecuencia resonante no amortiguada, como se muestra en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.

Amortiguamiento		Valor
$\zeta_{\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}}^2$	=	0.030303030
$\zeta_{\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}}^2$	=	0.030303030
$\zeta_{\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}}^2$	=	0.022727272

Así, de la ecuación (5.30) se obtiene el factor de amortiguamiento optimo:

$$\zeta_{opt,C3} = \mathbf{0.1666666667} \quad (6.4)$$

Por lo tanto, al sustituir  $\beta$ , la ecuación (6.4) y los valores numéricos de la tabla 6.1 en la ecuación (4.15) se obtiene:

$$H_{\zeta opt} = \sqrt{\frac{1.771(\Omega^4 - 1.900\Omega^2 + 0.751)^2 + 0.527\Omega^2(\Omega^2 - 0.826)^2}{1.771(\Omega^6 - 3.000\Omega^4 + 2.727\Omega^2 - 0.751)^2 + 0.527\Omega^2(\Omega^4 - 1.909\Omega^2 + 0.826)^2}} \quad (6.5)$$

En la Figura 6.2 se muestra la repuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el IDVA-C3 sujeta a una fuerza de excitación armónica en la base con los valores de los parámetros óptimos que se obtienen a partir del teorema II de Buckingham. Esta respuesta se compara con la respuesta obtenida para diferentes valores de relación de amortiguamiento  $\zeta$ . Se puede observar que el comportamiento vibratorio se estabiliza (curva negra) conforme a los puntos invariantes y a la relación de amortiguamiento óptima  $\zeta_{opt}$  (ecuación (6.5)), es decir, la amplitud de la curva de color negro disminuye notablemente.

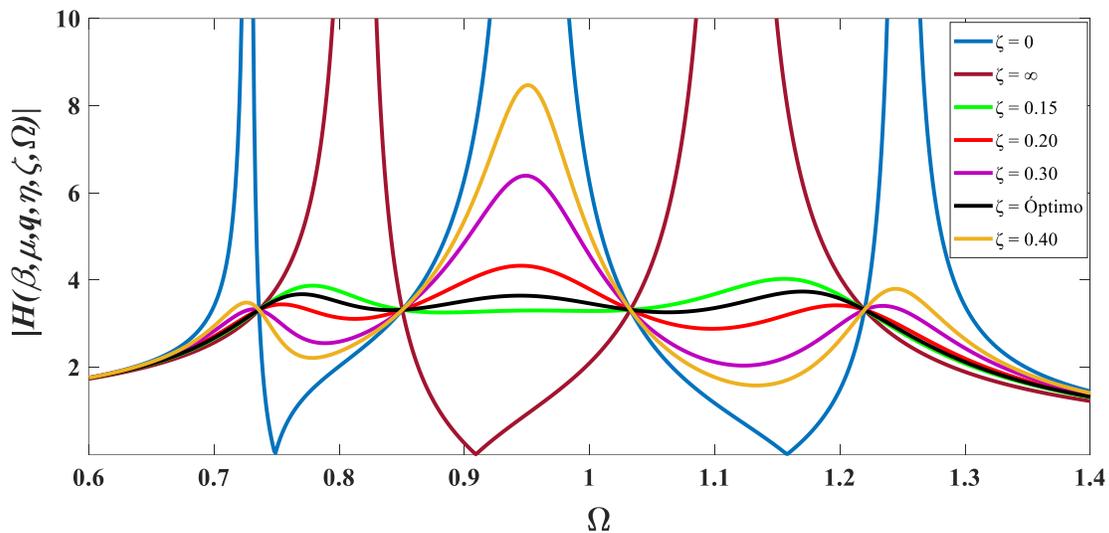


Figura 6.2: Repuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el IDVA-C3 sujeta a una fuerza de excitación armónica en la base para diferentes valores de amortiguamiento.

### Criterio $H_\infty$

Los resultados obtenidos para los parámetros óptimos a través del método de Nishihara con los valores de una relación de masa  $\beta = 0.10$  se muestran en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4: Resultados numéricos de los parámetros óptimos mediante el método de Nishihara.

Método Nishihara	
Parámetro	Valor
$\mu_{opt,C3}$	= 0.220821845
$\eta_{opt,C3}$	= 1.048081595
$q_{opt,C3}$	= 0.908321801
$\zeta_{opt,C3}$	= 0.165682870
$r$	= 0.961033079
$H_{C3}$	= 3.617507986

Al sustituir los valores de la Tabla 6.4 en la ecuación (4.15) se obtiene:

$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{1.788(-1.931\Omega^2 + 0.747 + \Omega^4)^2 + 0.790\Omega^2(\Omega^2 - 0.825)^2}{1.788(-3.033\Omega^4 + 2.753\Omega^2 + \Omega^6 - 0.747)^2 + 0.790\Omega^2(\Omega^4 - 1.907\Omega^2 + 0.825)^2}} \quad (6.6)$$

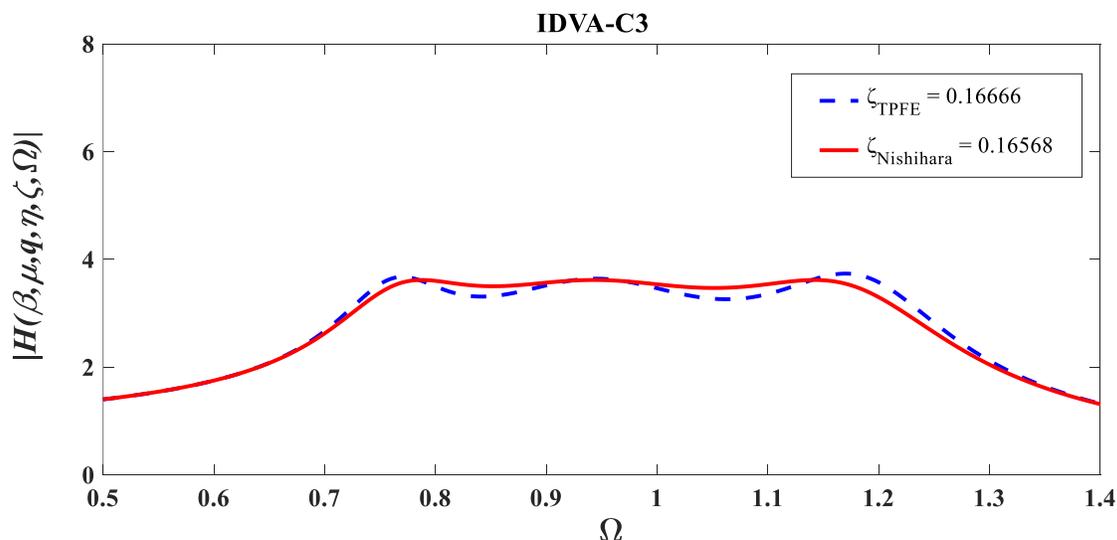


Figura 6.3: Respuesta en frecuencia del IDVA-C3 utilizando la técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara.

En la Figura 6.3 se muestra una comparación entre los resultados de los métodos de optimización, ecuación (6.6) y (6.5) en donde se puede apreciar que el método de Nishihara (curva color rojo) satisface con una mayor precisión los resultados obtenidos con la técnica de los puntos fijos extendida.

## 6.2 IDVA-C4

### Técnica de los puntos fijos extendida

Tabla 6.5: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos del IDVA-C4.

Puntos fijos extendida		
Parámetro		Valor
$\mu_{opt,C4}$	=	0.167662615
$\eta_{opt,C4}$	=	0.925425179
$q_{opt,C4}$	=	0.946690135
$H_{C4}$	=	3.441553248

Tabla 6.6: Valores numéricos para las frecuencias resonantes del IDVA-C4.

Frecuencia ( $\Omega$ )		Valor
$\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}$	=	0.803081295
$\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}$	=	1.083163077
$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}$	=	0.953462589

De la ecuación (5.47) se obtiene el factor de amortiguamiento óptimo:

$$\zeta_{opt,C4} = 0.04329348217 \quad (6.7)$$

De la ecuación (5.31) se obtiene:

$$H_{\zeta \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{(\Omega^4 - 1.792\Omega^2 + 0.687)^2}{(\Omega^6 - 2.894\Omega^4 + 2.549\Omega^2 - 0.687)^2}} \quad (6.8)$$

De la ecuación (5.32) se obtiene:

$$H_{\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{(-1.167\Omega^2 + 0.896)^2}{(-1.184\Omega^4 + 2.153\Omega^2 - 0.896)^2}} \quad (6.9)$$

Sustituyendo los valores de la Tabla 6.5 y la ecuación (6.7) en (4.16) se obtiene:

$$H_{\zeta_{opt}} = \sqrt{\frac{2.113(-1.792\Omega^2 + 0.687 + \Omega^4)^2 + 0.505\Omega^2(1.167\Omega^2 - 0.896)^2}{2.113(-2.894\Omega^4 + 2.549\Omega^2 + \Omega^6 - 0.687)^2 + 0.505\Omega^2(1.184\Omega^4 - 2.153\Omega^2 + 0.896)^2}} \quad (6.10)$$

En la Figura 6.4 se muestra la repuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el IDVA-C4 sujeta a una fuerza de excitación armónica en la base para distintos valores de amortiguamiento incluyendo las ecuaciones (6.8) a la (6.10).

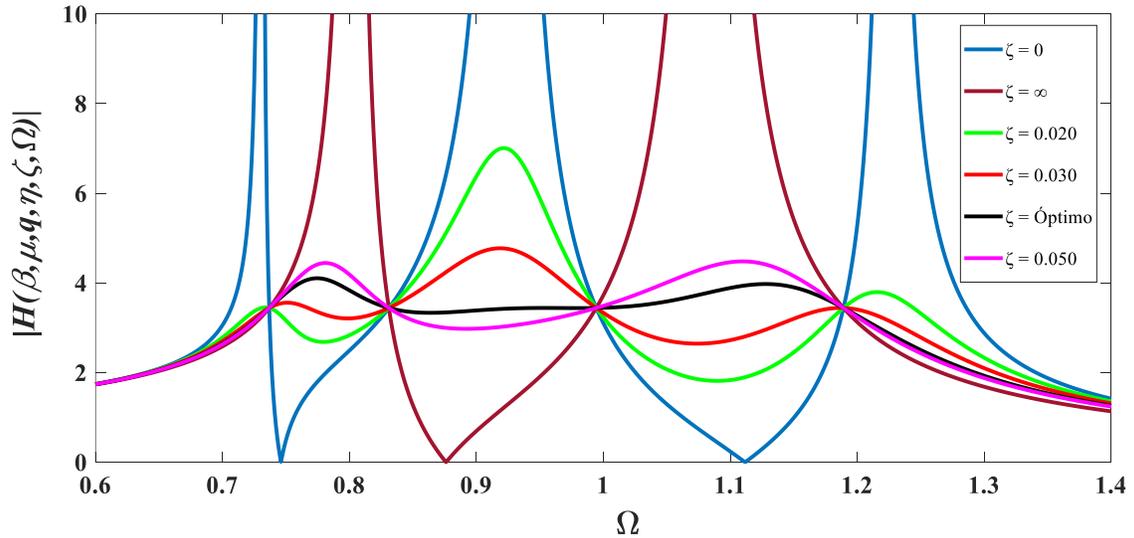


Figura 6.4: Respuesta en frecuencia del IDVA-C4 para distintos valores de amortiguamiento.

### Criterio $H_{\infty}$

Los resultados obtenidos para los parámetros óptimos a través del método de Nishihara con los valores de una relación de masa  $\beta = 0.10$  se muestran en la Tabla 6.7.

Tabla 6.7: Resultados numéricos de los parámetros óptimos para el IDVA-C4.

Método Nishihara	
Parámetro	Valor
$\mu_{opt,C4}$	= 0.190494387
$\eta_{opt,C4}$	= 0.904562185
$q_{opt,C4}$	= 0.949040156
$\zeta_{opt,C4}$	= 0.049330847
$r$	= 0.963674579
$H_{C4}$	= 3.744207561

Al sustituir los valores de la Tabla 6.7 en la ecuación (4.16) se obtiene:

$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{2.269(-1.778\Omega^2 + 0.663 + \Omega^4)^2 + 0.548\Omega^2(1.190\Omega^2 - 0.900)^2}{2.269(-2.882\Omega^4 + 2.508\Omega^2 + \Omega^6 - 0.663)^2 + 0.548\Omega^2(1.209\Omega^4 - 2.181\Omega^2 + 0.900)^2}} \quad (6.11)$$

En la Figura 6.5 se muestra una comparación entre los resultados de los métodos de optimización, ecuación (6.10) y (6.11).

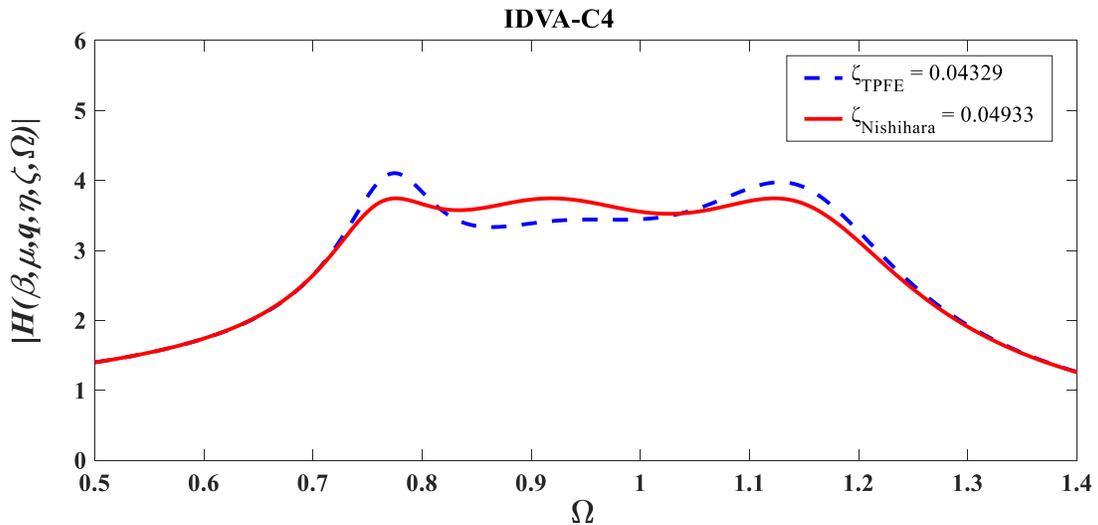


Figura 6.5: Técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara para el IDVA-C4.

### 6.3 IDVA-C6

#### Técnica de los puntos fijos extendida

Tabla 6.8: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos del IDVA-C6.

Puntos fijos extendida		
Parámetro		Valor
$\mu_{opt,C6}$	=	0.138888888
$\eta_{opt,C6}$	=	1.200000000
$q_{opt,C6}$	=	0.870388279
$H_{C6}$	=	3.316624790

Tabla 6.9: Valores numéricos para las frecuencias resonantes del IDVA-C6.

Frecuencia ( $\Omega$ )		Valor
$\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}$	=	0.835756337
$\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}$	=	1.140838001
$\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}$	=	0.953462589

Tabla 6.10: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada del IDVA-C6.

Amortiguamiento		Valor
$\zeta_{\Omega_{1,\zeta \rightarrow \infty}}^2$	=	0.001910596
$\zeta_{\Omega_{2,\zeta \rightarrow \infty}}^2$	=	0.001561625
$\zeta_{\Omega_{0,\zeta \rightarrow 0}}^2$	=	0.002314814

De la ecuación (5.67) se obtiene el factor de amortiguamiento óptimo:

$$\zeta_{opt,C6} = 0.0439205230 \quad (6.12)$$

De la ecuación (5.48) se obtiene:

$$H_{\zeta \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{(\Omega^4 - 2.000\Omega^2 + 0.826)^2}{(\Omega^6 - 3.090\Omega^4 + 2.909\Omega^2 - 0.826)^2}} \quad (6.13)$$

De la ecuación (5.49) se obtiene:

$$H_{\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{(0.909 - \Omega^2)^2}{(-0.909 + 2.000\Omega^2 - \Omega^4)^2}} \quad (6.14)$$

Sustituyendo los valores de la Tabla 6.5 y la ecuación (6.8) en (4.17) se obtiene:

$$H_{\zeta_{opt}} = \sqrt{\frac{1.464(-2.000\Omega^2 + 0.826 + \Omega^4)^2 + 0.443\Omega^2(-0.909 + \Omega^2)^2}{1.464(-3.0909\Omega^4 + 2.909\Omega^2 + \Omega^6 - 0.826)^2 + 0.443\Omega^2(-2.000\Omega^2 + 0.909 + \Omega^4)^2}} \quad (6.15)$$

En la Figura 6.6 se muestra la repuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el IDVA-C6 sujeta a una fuerza de excitación armónica en la base para distintos valores de amortiguamiento incluyendo las ecuaciones (6.13) a la (6.15).

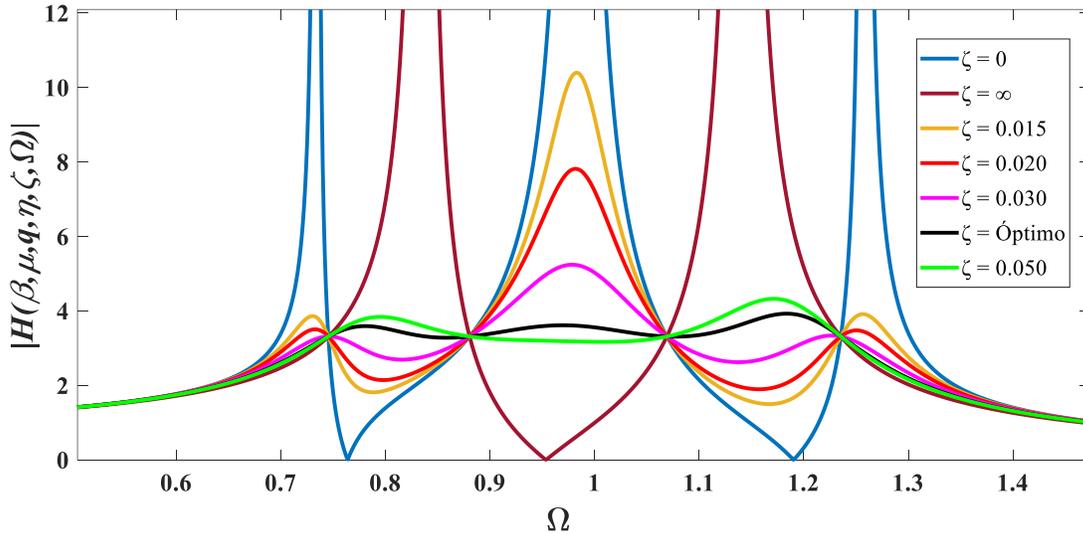


Figura 6.6: Respuesta en frecuencia del IDVA-C6 para distintos valores de amortiguamiento.

### Criterio $H_{\infty}$

Los resultados obtenidos con el método de Nishihara para una relación de masa  $\beta = 0.10$  se muestran en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11: Resultados numéricos de los parámetros óptimos para el IDVA-C4.

Método Nishihara	
Parámetro	Valor
$\mu_{opt,C6}$	= 0.156888062
$\eta_{opt,C6}$	= 1.243429488
$q_{opt,C6}$	= 0.862871165
$\zeta_{opt,C6}$	= 0.061115396
$r$	= 0.961033079
$H_{C6}$	= 3.617507988

Al sustituir los valores de la Tabla 6.11 en la ecuación (4.17) se obtiene:

$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{1.361(-2.076\Omega^2 + 0.857 + \Omega^4)^2 + 0.615\Omega^2(-0.925 + \Omega^2)^2}{1.361(-3.168\Omega^4 + 3.019\Omega^2 + \Omega^6 - 0.857)^2 + 0.615\Omega^2(-2.017\Omega^2 + 0.925 + \Omega^4)^2}} \quad (6.16)$$

En la Figura 6.7 se muestra una comparación entre los resultados de los métodos de optimización, ecuación (6.15) y (6.16).

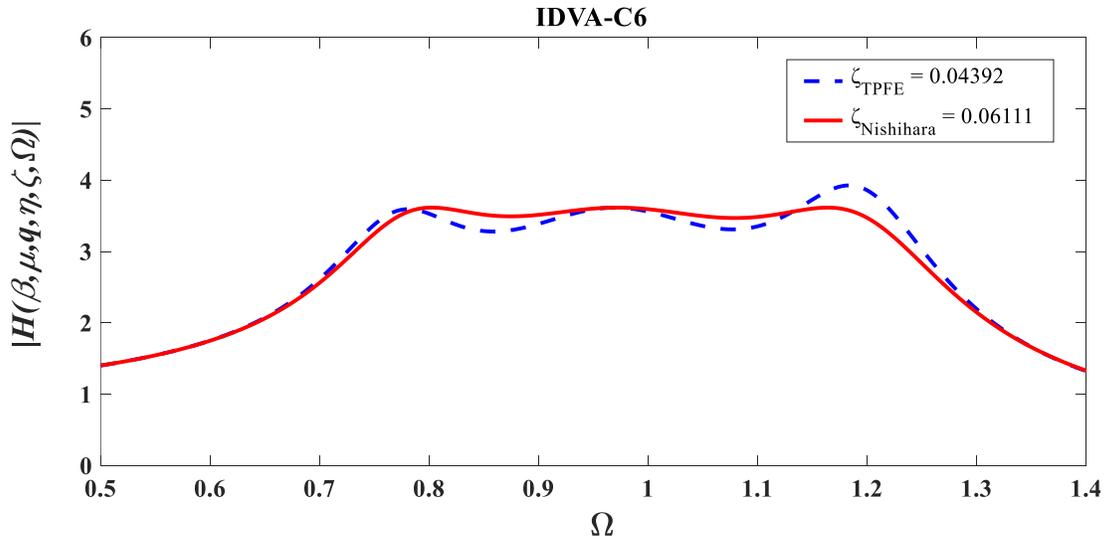


Figura 6.7: Técnica de los puntos fijos extendida VS método de Nishihara para el IDVA-C6.

## 6.4 Comparación de los IDVA's

En este apartado se realiza una comparación de la FRF que se obtiene de los IDVA's presentados en esta investigación utilizando la técnica de los puntos fijos extendida y el método descrito por Nishihara. La finalidad de esta comparativa es poder identificar cuál de las tres redes mecánicas ( $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$ ) proporciona un mejor rendimiento en la supresión de vibración al utilizar estos métodos de optimización.

En la Figura 6.8 se muestra el comportamiento de la FRF para cada uno de los IDVA's utilizando la técnica de los puntos fijos extendida. De la figura se puede observar que el IDVA-C3 (curva de color rojo) tiene un mayor control en la supresión de vibración para cada frecuencia invariante.

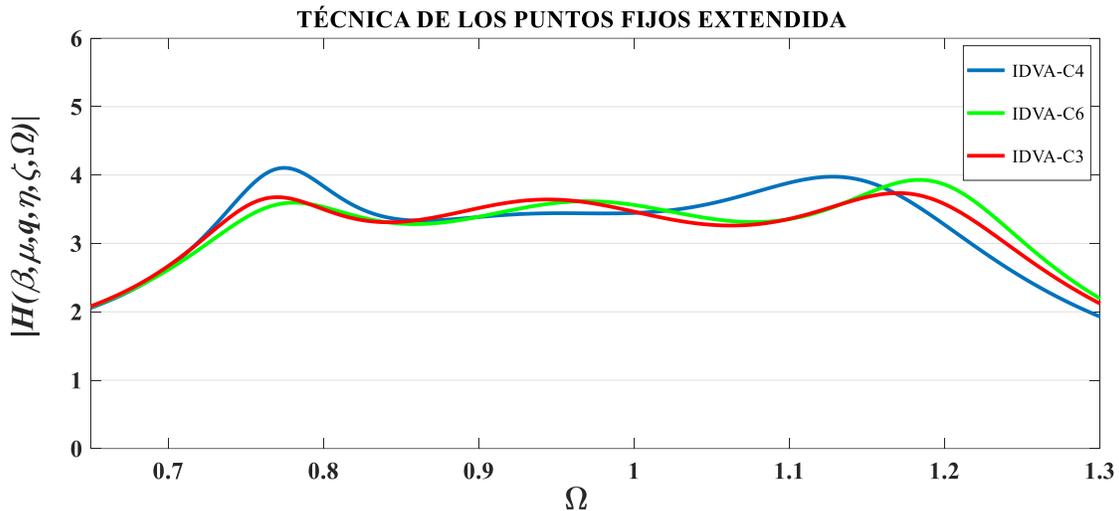


Figura 6.8: FRF para el IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6 utilizando la técnica de los puntos fijos extendida.

En la Figura 6.9 se muestra el comportamiento de la FRF para cada uno de los IDVA's utilizando el método de optimización propuesta por Nishihara. De la figura se puede observar que el IDVA-C3 (curva de color rojo) sigue siendo la que mayor control en la supresión de vibración aporta para cada frecuencia invariante.

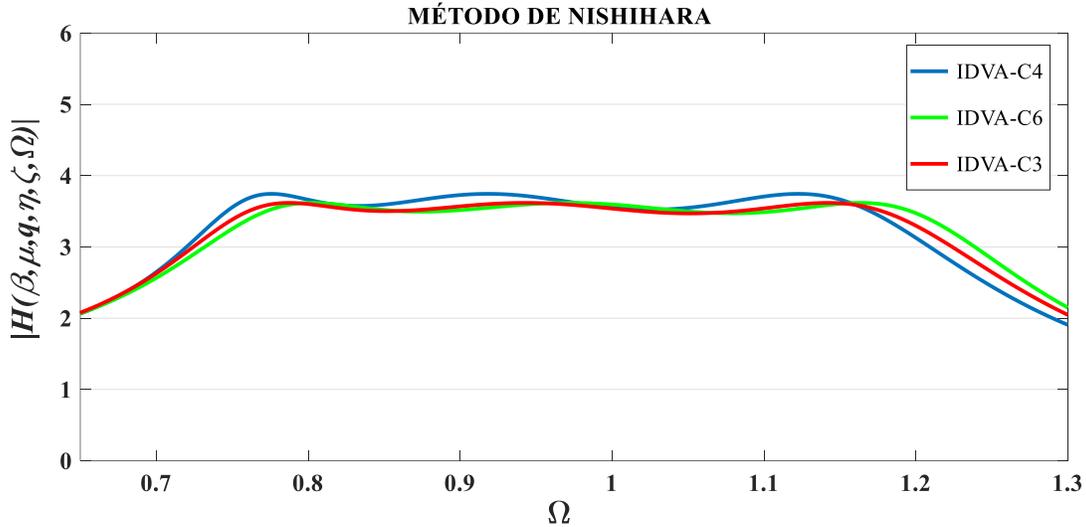


Figura 6.9: FRF para el IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6 utilizando el método de optimización descrito por Nishihara.

### Relación de masa para el IDVA-C3

En la Tabla 6.12 se estiman los valores numéricos asociados a los parámetros óptimos del sistema  $\mu_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$ ,  $q_{opt}$  y  $\zeta_{opt}$  al variar la relación de masas  $\beta$  conforme al 4%, 6%, 8% y 10% para el IDVA-C3, en la Figura 6.10 se muestra la representación gráfica.

Tabla 6.12: Valores numéricos para los parámetros óptimos del IDVA-C3 al modificar el valor de  $\beta$  obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio  $H_{\infty}$ .

Parámetros óptimos para el IDVA-C3								
$\beta$	Puntos fijos extendida				Criterio $H_{\infty}$			
	$\mu_{opt}$	$\eta_{opt}$	$q_{opt}$	$\zeta_{opt}$	$\mu_{opt}$	$\eta_{opt}$	$q_{opt}$	$\zeta_{opt}$
0.04	0.07692	1.01980	0.96153	0.10840	0.09308	1.01951	0.96120	0.10774
0.06	0.11320	1.02956	0.94339	0.13151	0.13716	1.02912	0.94290	0.13072
0.08	0.14814	1.03923	0.92592	0.15044	0.17971	1.03865	0.92529	0.14954
0.10	0.18181	1.04880	0.90909	0.16666	0.22082	1.04808	0.90832	0.16568

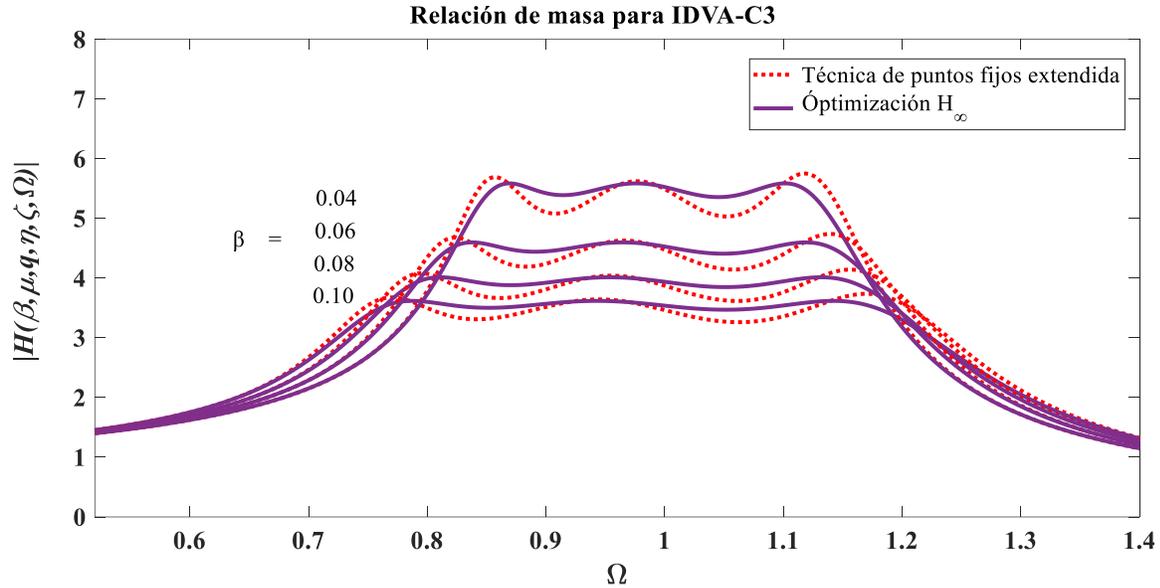


Figura 6.10: Gráfica para los distintos valores de  $\beta$  obtenidos utilizando la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio de  $H_\infty$ .

### Cálculo del porcentaje en la supresión de vibración.

Para calcular el porcentaje en la supresión de vibraciones, se calcula el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones  $\%SB_i$ . De esta manera, se considera la función de respuesta en frecuencia de los IDVA's utilizando las impedancias mecánicas y la FRF de la estructura mecánica con absorbedor dinámico de vibración clásico (DVA), ver Figura 1.1. Para comparar ambos sistemas, se toma como referencia la FRF cuando no existe absorbedor dinámico de vibración en la estructura mecánica (estructura sin control).

En la Figura 6.11 se muestran las curvas mencionadas anteriormente. Cabe mencionar, que para los IDVA's y el DVA clásico se emplearon las FRF's obtenidas por el criterio  $H_\infty$ . A manera de ejemplo se ilustra específicamente el comportamiento del sistema para el IDVA-C3.

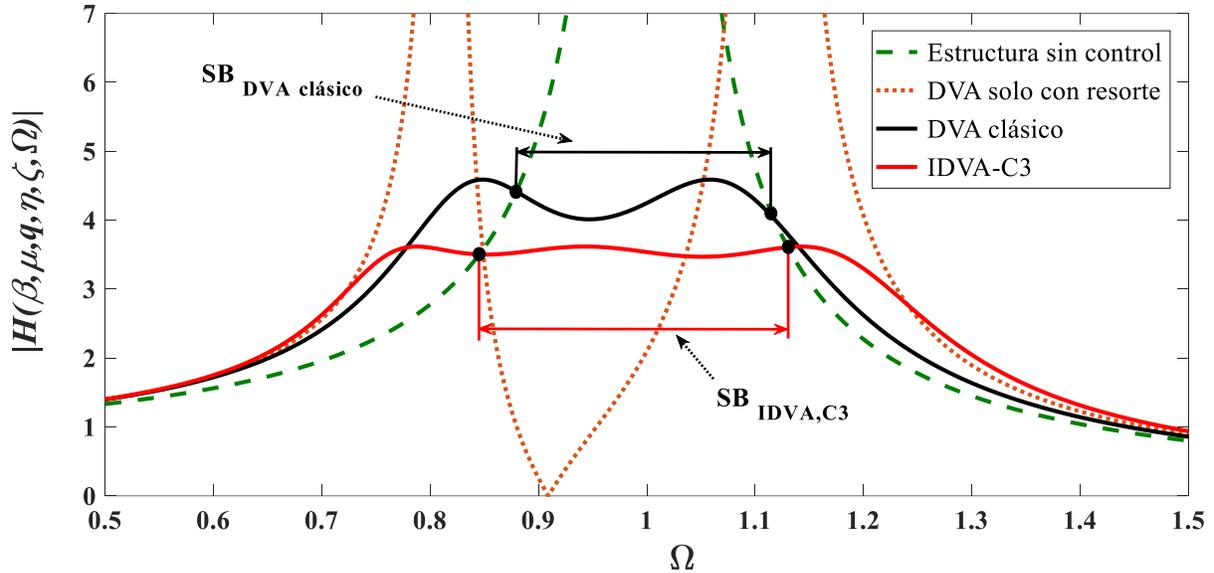


Figura 6.11: Comparación de las curvas de las FRF y el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones %S<sub>Bi</sub> del IDVA-C3 y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el IDVA-C3 son:  $\mu_{opt}=0.22082$ ,  $\eta_{opt}=1.04808$ ,  $q_{opt}=0.90832$  y  $\zeta_{opt}=0.16568$ , mientras para el DVA clásico son:  $q_{opt}=0.90905$  y  $\zeta_{opt}=0.18546$ .

Por consiguiente, la ecuación para calcular el agrandamiento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SB_{IDVA's} = \frac{SB_{IDVA's} - SB_{DVA \text{ clásico}}}{SB_{DVA \text{ clásico}}} \times 100\% \quad (6.17)$$

De la misma forma, para calcular el índice de reducción de la amplitud de vibración de los IDVA's con respecto al DVA clásico, se encuentran los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por lo tanto, la ecuación para el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema es:

$$\%SP_{IDVA's} = \frac{SP_{DVA \text{ clásico}} - SP_{IDVA's}}{SP_{DVA \text{ clásico}}} \times 100\% \quad (6.18)$$

En la Tabla 6.13 se muestran los resultados al implementar las impedancias mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$ .

Tabla 6.13 resultados para el agrandamiento del ancho de banda operativo (%SB) VS el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema (%SP). Así como también el valor de la amplitud máxima ( $\|H_{\infty}\|$ ).

Porcentaje en la supresión de vibración			
Impedancia	% SB	% SP	$\ H_{\infty}\ $
IDVA-C3	20.67 %	26.85 %	3.617507986
IDVA-C4	17.29 %	22.56 %	3.744207561
IDVA-C6	19.83 %	26.85 %	3.617507988

De los resultados de la Tabla 6.13 se puede observar que los IDVA's propuestos mejoran y superan al DVA clásico al obtener un mayor rendimiento en la supresión de vibración. Consecuentemente, los IDVA's producen un adecuado desempeño en la mitigación de vibraciones cuando se encuentra sujeta a una fuerza de excitación armónica.

# 7

## 7 Conclusiones

Mediante el desarrollo matemático realizado en esta investigación, se determinó el diseño óptimo de un absorbedor dinámico de vibración basado en inersor (IDVA) acoplado a una estructura mecánica. El análisis matemático considera el comportamiento de la estructura al aplicarse una fuerza de excitación armónica en su base. El IDVA se compone de las impedancias mecánicas denominadas C3, C4 y C6. Cada impedancia está compuesta por un conjunto de resorte, amortiguador e inersor, dispuestos en configuraciones serie-paralelo.

Para realizar el análisis dinámico, fue indispensable obtener las ecuaciones de movimiento aplicando la teoría de Euler-Lagrange para fuerzas generalizadas no conservativas. Posteriormente, se obtuvieron los parámetros adimensionales mediante el teorema II de Buckingham, lo que permitió hallar la respuesta en frecuencia adimensional del sistema. Para la validación del modelo matemático de forma numérica fue necesario el uso de un sistema de cómputo numérico utilizando los criterios de optimización  $H_\infty$ , basado en el método de Nishihara, siendo un método rápido y eficiente para la solución numérica de los parámetros óptimos de los IDVA's y la técnica de los puntos fijos extendida, siendo una aproximación de la norma  $H_\infty$  que considera el teorema de Vieta y la teoría de Steen Krenk.

La principal ventaja de implementar la técnica de los puntos fijos extendida se basa en encontrar fórmulas de diseño simples para los IDVA's al conocer información de la suma y el producto de las raíces reales de las ecuaciones cuárticas, sin la necesidad de resolver

un conjunto de ecuaciones no lineales como es el caso del método propuesto por Nishihara, que para su solución dependen directamente de la capacidad de procesamiento de cómputo y puede llegar a ser tedioso.

Al comparar los resultados obtenidos para los parámetros óptimos de la técnica de puntos fijos extendida y el método de Nishihara aplicados al IDVA-C3, IDVA-C4 e IDVA-C6, se demuestra que se logró minimizar las amplitudes de vibración de cada sistema. Esta minimización se refleja en la reducción de la respuesta adimensional en frecuencia dentro de un intervalo específico de frecuencias. Adicionalmente, se corrobora la similitud de los mismos.

De lo que se concluye que, el IDVA con la impedancia mecánica C3 ofrece un rendimiento superior en la reducción de las amplitudes de vibración, proporcionando resultados más precisos en comparación con las impedancias C4 y C6. Sin embargo, la diferencia de resultados es mínima cuando se compara el porcentaje de supresión de vibración y la amplitud máxima de respuesta en frecuencia. Por lo tanto, los IDVA's con las impedancias  $C3 > C6 > C4$  pueden utilizarse para controlar las amplitudes de vibración en una estructura mecánica sometida a la excitación de una fuerza armónica en la base, sin inconvenientes. De esta manera, la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación ha sido demostrada exitosamente.

## 7.1 Trabajos futuros

Para complementar el trabajo desarrollado en esta tesis, se proponen los siguientes estudios futuros para mejorar algunos aspectos del mismo y ampliar los resultados obtenidos.

- Realizar la implementación física del modelo de la estructura mecánica con IDVA's utilizando las impedancias mecánicas C3, C4, C6.
- Corroborar los resultados obtenidos de forma teórica vs los resultados experimentales, para demostrar la efectividad del modelo matemático y sus medidas de incertidumbre para evaluar la validez de los datos conseguidos.
- Desarrollar un método matemático que considere analíticamente todos los coeficientes de amortiguamiento presentes en un sistema mecánico.



# APÉNDICE

## A. Modelo matemático

### IDVA-C3

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las energías asociadas al sistema de la Figura 4.1 son:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + b(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 \quad (\text{A.1})$$

$$U = \frac{1}{2}K(x_0 - x)^2 + \frac{1}{2}k_1(x - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 \quad (\text{A.2})$$

$$D = \frac{1}{2}C(\dot{x}_0 - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x} - \dot{x}_3)^2 \quad (\text{A.3})$$

Utilizando las ecuaciones (3.8) y (3.12) las ecuaciones del sistema para sistemas no conservativos se expresan como:

$$M\ddot{x} + c_2(\dot{x} - \dot{x}_3) + Kx + k_1(x - x_1) = Kx_0 \quad (\text{A.4})$$

$$m\ddot{x}_1 - k_1(x - x_1) - k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$-b(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$b(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2) - c_2(\dot{x} - \dot{x}_3) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Considerando que la técnica de la transformada de Laplace es ideal para resolver problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, las ecuaciones (A.4) a la (A.7) quedan de la siguiente manera:

$$Ms^2X + cs(X - X_3) + KX + k_1(X - X_1) = KX_0 \quad (\text{A.8})$$

$$ms^2X_1 + k_1(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$bs^2(X_2 - X_3) + k_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$bs^2(X_3 - X_2) + cs(X_3 - X) = 0 \quad (\text{A.11})$$

El interés primordial está dirigido en el movimiento de la masa principal por lo tanto al resolver el sistema de ecuaciones (A.8) a la (A.11) para X se tiene:

$$X = (KX_0(bcms^4 + bms^3k_2 + (bck_1 + bck_2 + cmk_2)s^2 + bsk_1k_2 + ck_1k_2)) / (Mbcms^6 + Mbms^5k_2 + (Kbcm + Mbck_1 + Mbck_2 + Mcmk_2 + bcmk_1 + bcmk_2)s^4 + (Kbmk_2 + Mbck_1k_2 + bmk_1k_2)s^3 + (Kbck_1 + Kbck_2 + Kcmk_2 + Mck_1k_2 + cmk_1k_2)s^2 + Kbsk_1k_2 + Kck_1k_2) \quad (A.12)$$

La función de transferencia del sistema se obtiene al dividir el lado derecho de la ecuación (A.12) por  $Kck_1k_2$  con la finalidad de tener cantidades adimensionales. Esto es:

$$\frac{X}{X_0} = \left( \frac{bms^4}{k_1k_2} + \frac{bms^3}{ck_1} + \frac{(bck_1 + bck_2 + cmk_2)s^2}{ck_1k_2} + \frac{bs}{c} + 1 \right) / \left( \frac{Mbms^6}{Kk_1k_2} + \frac{Mbms^5}{Kck_1} + \frac{(Kbcm + Mbck_1 + Mbck_2 + Mcmk_2 + bcmk_1 + bcmk_2)s^4}{Kck_1k_2} + \frac{(Kbmk_2 + Mbck_1k_2 + bmk_1k_2)s^3}{Kck_1k_2} + \frac{(Kbck_1 + Kbck_2 + Kcmk_2 + Mck_1k_2 + cmk_1k_2)s^2}{Kck_1k_2} + \frac{bs}{c} + 1 \right) \quad (A.13)$$

Al Sustituir la ecuación (A.13) por  $s = I * \omega$  se obtiene la ecuación (A.14), esto es válido debido a que solo interesa la respuesta del sistema en estado estable.

$$\frac{X}{X_0} = \left( \frac{bm\omega^4}{k_1k_2} - \frac{lbm\omega^3}{ck_1} - \frac{(bck_1 + bck_2 + cmk_2)\omega^2}{ck_1k_2} + \frac{lb\omega}{c} + 1 \right) / \left( -\frac{Mbm\omega^6}{Kk_1k_2} + \frac{IMbm\omega^5}{Kck_1} + \frac{(Kbcm + Mbck_1 + Mbck_2 + Mcmk_2 + bcmk_1 + bcmk_2)\omega^4}{Kck_1k_2} - \frac{I(Kbmk_2 + Mbck_1k_2 + bmk_1k_2)\omega^3}{Kck_1k_2} - \frac{(Kbck_1 + Kbck_2 + Kcmk_2 + Mck_1k_2 + cmk_1k_2)\omega^2}{Kck_1k_2} + \frac{lb\omega}{c} + 1 \right) \quad (A.14)$$

Se proponen los siguientes parámetros adimensionales utilizando el teorema Pi de Buckingham. Los parámetros son los mismos para las impedancias mecánicas  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$ .

$$\omega_1^2 = \frac{K}{M} \quad \omega_2^2 = \frac{k_1}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{k_2}{b} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_2} \quad \mu = \frac{b}{m} \quad (A.15)$$

$$\eta = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad \beta = \frac{m}{M} \quad q = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (A.16)$$

Con la finalidad de obtener la magnitud de la ecuación (A.14), se reescribe como el cociente entre dos números complejos, es decir,

$$H(s) = \frac{A + iB}{C + iD} \quad (A.17)$$

La ecuación (A.17) representa la función de respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional, sin embargo, la ecuación está en su forma compleja.

Por lo tanto, para obtener la norma de  $H(s)$  en el espacio euclidiano, se multiplica la ecuación (A.17) por el conjugado complejo del numerador y denominador, respectivamente. Obteniendo:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (\text{A.18})$$

Al sustituir los parámetros adimensionales en las variables A, B, C y D la ecuación (A.18) para el IDVA-C3 se expresa como:

$$|H(s)|^2 = \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{q^8\eta^4} + \frac{1}{4} \frac{\mu^2\Omega^2(\Omega^2 - q^2)^2}{\zeta^2q^6} \right) / \left( \frac{1}{q^8\eta^4} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{\mu^2\Omega^2(-\Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2 + q^2)^2}{\zeta^2q^6} \right) \quad (\text{A.19})$$

## IDVA-C4

Las energías asociadas al sistema son:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}b(\dot{x} - \dot{x}_2)^2 \quad (\text{A.20})$$

$$U = \frac{1}{2}K(x_0 - x)^2 + \frac{1}{2}k_1(x - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 \quad (\text{A.21})$$

$$D = \frac{1}{2}C(\dot{x}_0 - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (\text{A.22})$$

Utilizando las ecuaciones (3.8) y (3.12) las ecuaciones resultantes del sistema son:

$$M\ddot{x} + b(\ddot{x} - \ddot{x}_2) + Kx + k_1(x - x_1) = Kx_0 \quad (\text{A.23})$$

$$b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$m\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x) + k_2(x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{A.25})$$

Al aplicar la técnica de la transformada de Laplace, las ecuaciones A.23-A.25 se expresan como:

$$Ms^2X + bs^2(X - X_2) + KX + k_1(X - X_1) = KX_0 \quad (\text{A.26})$$

$$bs^2(X_2 - X) + cs(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$ms^2X_1 + cs(X_1 - X_2) + k_1(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (A.26) a la (A.28) para X se tiene:

$$X = (KX_0(bms^4 + bcs^3 + cms^3 + bs^2k_1 + bs^2k_2 + ms^2k_2 + csk_1 + k_1k_2))/(Mbms^6 + Mbc s^5 + Mcm^5 + bcms^5 + Kbms^4 + Mbs^4k_1 + Mbs^4k_2 + Mms^4k_2 + bms^4k_1 + bms^4k_2 + Kbc s^3 + Kcms^3 + Mcs^3k_1 + cms^3k_1 + Kbs^2k_1 + Kbs^2k_2 + Kms^2k_2 + Ms^2k_1k_2 + ms^2k_1k_2 + Kcsk_1 + Kk_1k_2) \quad (\text{A.29})$$

La función de transferencia del sistema se obtiene al dividir el lado derecho de la ecuación (A.29) por  $Kk_1k_2$  con la finalidad de tener cantidades adimensionales. El resultado es:

$$\frac{X}{X_0} = \left( \frac{bms^4}{k_1k_2} + \frac{(bc + cm)s^3}{k_1k_2} + \frac{(bk_1 + bk_2 + mk_2)s^2}{k_1k_2} + \frac{cs}{k_2} + 1 \right) / \left( \frac{Mbms^6}{Kk_1k_2} + \frac{(Mbc + Mcm + bcm)s^5}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1 + bmk_2)s^4}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbc + Kcm + Mck_1 + cmk_1)s^3}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 + mk_1k_2)s^2}{Kk_1k_2} + \frac{cs}{k_2} + 1 \right) \quad (\text{A.30})$$

Al Sustituir la ecuación (A.30) por  $s = I * \omega$  se obtiene la ecuación (A.31), esto es válido debido a que solo nos interesa la respuesta del sistema en estado estable.

$$\frac{X}{X_0} = \left( \frac{bm\omega^4}{k_1k_2} - \frac{I(bc + cm)\omega^3}{k_1k_2} - \frac{(bk_1 + bk_2 + mk_2)\omega^2}{k_1k_2} + \frac{Ic\omega}{k_2} + 1 \right) / \left( -\frac{Mbm\omega^6}{Kk_1k_2} + \frac{I(Mbc + Mcm + bcm)\omega^5}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1 + bmk_2)\omega^4}{Kk_1k_2} - \frac{I(Kbc + Kcm + Mck_1 + cmk_1)\omega^3}{Kk_1k_2} - \frac{(Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 + mk_1k_2)\omega^2}{Kk_1k_2} + \frac{Ic\omega}{k_2} + 1 \right) \quad (\text{A.31})$$

Al sustituir los parámetros adimensionales (A.15) y (A.16) en las variables A, B, C y D la ecuación (A.18) para el IDVA-C4 se expresa como:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{H}(s)|^2 = & \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{\eta^4q^8} + \frac{4\zeta^2\Omega^2(\Omega^2\mu + \Omega^2 - q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) / \\
& \left( \frac{1}{\eta^4q^8} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 \right. \\
& + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 \\
& \left. + \frac{4\zeta^2\Omega^2(\Omega^4\beta\mu + \Omega^4\mu - \Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2\mu - \Omega^2 + q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right)
\end{aligned} \tag{A.32}$$

## IDVA-C6

Las energías asociadas al sistema son:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \tag{A.33}$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_0 - x)^2 + \frac{1}{2}k_1(x - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - x_2)^2 \tag{A.34}$$

$$D = \frac{1}{2}C(\dot{x}_0 - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \tag{A.35}$$

Utilizando las ecuaciones (3.8) y (3.12) las ecuaciones resultantes del sistema son:

$$M\ddot{x} + Kx + k_1(x - x_1) + k_2(x - x_2) = Kx_0 \tag{A.36}$$

$$b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x) = 0 \tag{A.37}$$

$$m\ddot{x}_1 + b(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x) = 0 \tag{A.38}$$

Al aplicar la técnica de la transformada de Laplace, las ecuaciones (A.36) a la (A.38) se expresan como:

$$Ms^2X + KX + k_1(X - X_1) + k_2(X - X_2) = KX_0 \tag{A.39}$$

$$bs^2(X_2 - X_1) + cs(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X) = 0 \tag{A.40}$$

$$ms^2x_1 + bs^2(X_1 - X_2) + cs(X_1 - X_2) + k_1(X_1 - X) = 0 \tag{A.41}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (A.39) a la (A.41) para X se tiene:

$$\begin{aligned}
X = & (KX_0(bms^4 + cms^3 + (bk_1 + bk_2 + mk_2)s^2 + (ck_1 + ck_2)s + k_1k_2)) / (Mbms^6 \\
& + Mcms^5 + (Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1 + bmk_2)s^4 + (Kcm \\
& + Mck_1 + Mck_2 + cmk_1 + cmk_2)s^3 + (Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 \\
& + mk_1k_2)s^2 + (Kck_1 + Kck_2)s + Kk_1k_2)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

La función de transferencia del sistema se obtiene al dividir el lado derecho de la ecuación (A.42) por  $Kk_1k_2$  con la finalidad de tener cantidades adimensionales. El resultado es:

$$\begin{aligned} \frac{X}{X_0} = & \left( \frac{bms^4}{k_1k_2} + \frac{cms^3}{k_1k_2} + \frac{(bk_1 + bk_2 + mk_2)s^2}{k_1k_2} + \frac{(ck_1 + ck_2)s}{k_1k_2} + 1 \right) / \left( \frac{Mbms^6}{Kk_1k_2} \right. \\ & + \frac{Mcms^5}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1 + bmk_2)s^4}{Kk_1k_2} \\ & + \frac{(Kcm + Mck_1 + Mck_2 + cmk_1 + cmk_2)s^3}{Kk_1k_2} \\ & \left. + \frac{(Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 + mk_1k_2)s^2}{Kk_1k_2} + \frac{(Kck_1 + Kck_2)s}{Kk_1k_2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (A.43)$$

Al sustituir la ecuación (A.43) por  $s = I * \omega$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{X}{X_0} = & \left( \frac{bm\omega^4}{k_1k_2} - \frac{Icm\omega^3}{k_1k_2} - \frac{(bk_1 + bk_2 + mk_2)\omega^2}{k_1k_2} + \frac{I(ck_1 + ck_2)\omega}{k_1k_2} + 1 \right) / \left( -\frac{Mbm\omega^6}{Kk_1k_2} \right. \\ & + \frac{IMcm\omega^5}{Kk_1k_2} + \frac{(Kbm + Mbk_1 + Mbk_2 + Mmk_2 + bmk_1 + bmk_2)\omega^4}{Kk_1k_2} \\ & - \frac{I(Kcm + Mck_1 + Mck_2 + cmk_1 + cmk_2)\omega^3}{Kk_1k_2} \\ & \left. - \frac{(Kbk_1 + Kbk_2 + Kmk_2 + Mk_1k_2 + mk_1k_2)\omega^2}{Kk_1k_2} + \frac{I(Kck_1 + Kck_2)\omega}{Kk_1k_2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (A.44)$$

Al sustituir los parámetros adimensionales (A.15) y (A.16) en las variables A, B, C y D la ecuación (A.18) para el IDVA-C6 se expresa como:

$$\begin{aligned} |H(s)|^2 = & \left( \frac{(-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2q^2 + \eta^2q^4 + \Omega^4 - \Omega^2q^2)^2}{\eta^4q^8} + \frac{4\Omega^2\zeta^2(-\eta^2\mu q^2 + \Omega^2 - q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) / \left( \frac{1}{\eta^4q^8} ( \right. \\ & -\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2q^4 - \Omega^4\eta^2q^2 + \Omega^2\eta^2q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4q^2 \\ & + \Omega^2\eta^2q^2 - \eta^2q^4 - \Omega^4 + \Omega^2q^2)^2 \\ & \left. + \frac{4\Omega^2\zeta^2(-\Omega^2\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\beta q^2 + \eta^2\mu q^2 + \Omega^4 - \Omega^2q^2 - \Omega^2 + q^2)^2}{q^6\mu^2\eta^4} \right) \end{aligned} \quad (A.45)$$

# APÉNDICE

## B. Respuesta en frecuencia

$$A_{C3,C4,C6} = \frac{-\Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4\eta^2} \quad (\text{B.1})$$

$$B_{C3} = -\frac{1}{2} \frac{\mu\Omega(\Omega^2 - q^2)}{\zeta q^3} \quad (\text{B.2})$$

$$B_{C4} = -\frac{2\zeta\Omega(\Omega^2\mu + \Omega^2 - q^2)}{q^3\mu\eta^2} \quad (\text{B.3})$$

$$B_{C6} = -\frac{2\Omega\zeta(-\eta^2\mu q^2 + \Omega^2 - q^2)}{q^3\mu\eta^2} \quad (\text{B.4})$$

$$C_{C3,C4,C6} = -\frac{1}{q^4\eta^2} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2 q^4 - \Omega^4\eta^2 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2) \quad (\text{B.5})$$

$$D_{C3} = \frac{1}{2} \frac{\mu\Omega(-\Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)}{\zeta q^3} \quad (\text{B.6})$$

$$D_{C4} = \frac{2\zeta\Omega(\Omega^4\beta\mu + \Omega^4\mu - \Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2\mu - \Omega^2 + q^2)}{q^3\mu\eta^2} \quad (\text{B.7})$$

$$D_{C6} = \frac{2\Omega\zeta(-\Omega^2\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\beta q^2 + \eta^2\mu q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)}{q^3\mu\eta^2} \quad (\text{B.8})$$



# APÉNDICE

## C. Puntos fijos extendida

$$a_3 = -\frac{1}{2}(\beta\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2 q^2 + 2\beta q^2 + 4q^2 + 2) \quad (C.1)$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}(-2\beta\eta^2\mu q^4 - 2\beta\eta^2 q^4 - 2\eta^2\mu q^4 - 4\eta^2 q^4 - 2\beta q^4 - 2\eta^2\mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 2q^4 - 4q^2) \quad (C.2)$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}(2\beta\eta^2 q^6 + 2\eta^2 q^6 + 2\eta^2\mu q^4 + 4\eta^2 q^4 + 2q^4) \quad (C.3)$$

$$d_3 = \eta^2 q^6 \quad (C.4)$$

$$\tilde{a}_3 = (-2 - 2(\beta + 1)q^2) \quad (C.5)$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{(h(2q^2 + (1 + (\beta + 1)q^2)^2) - 1)}{h} \quad (C.6)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{(-2hq^2(1 + (\beta + 1)q^2) + 2q^2)}{h} \quad (C.7)$$

$$\tilde{d}_3 = \frac{hq^4 - q^4}{h} \quad (C.8)$$

$$a_4 = \frac{-2q^2\eta^2(\beta + 1)\mu^2 + (-2 + (-2\beta\eta^2 - 4\eta^2 - 2\beta - 2)q^2)\mu - 2 + (-2\eta^2 - 2\beta - 4)q^2}{2 + (\beta + 2)\mu} \quad (C.9)$$

$$b_4 = \frac{(-4\beta\eta^2\mu q^4 - 2\beta\eta^2 q^4 - 4\eta^2\mu q^4 - 2\eta^2\mu^2 q^2 - 4\eta^2 q^4 - 2\beta q^4 - 4\eta^2\mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 2q^4 - 2\mu q^2 - 4q^2)}{-\beta\mu - 2\mu - 2} \quad (C.10)$$

$$c_4 = \frac{(2\beta\eta^2 q^6 + 2\eta^2 q^6 + 4\eta^2\mu q^4 + 4\eta^2 q^4 + 2q^4)}{-\beta\mu - 2\mu - 2} \quad (C.11)$$

$$d_4 = -\frac{2\eta^2 q^6}{-\beta\mu - 2\mu - 2} \quad (C.12)$$

$$\tilde{a}_4 = \frac{2(\mu + 1 + (\beta + 1)q^2)\lambda^3}{-1 + (-\beta - 1)\mu} \quad (C.13)$$

$$\tilde{b}_4 = \frac{((-2q^2(-1 + (-\beta - 1)\mu) + (\mu + 1 + (\beta + 1)q^2)^2)h - (-\mu - 1)^2)}{(-1 + (-\beta - 1)\mu)^2 h} \quad (C.14)$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{(-2q^2(\mu + 1 + (\beta + 1)q^2)h - 2q^2(-\mu - 1))}{(-1 + (-\beta - 1)\mu)^2 h} \quad (\text{C.15})$$

$$\tilde{d}_4 = \frac{hq^4 - q^4}{(-1 + (-\beta - 1)\mu)^2 h} \quad (\text{C.16})$$

$$a_6 = -1 + ((-\beta\mu - 2\mu - 1)\eta^2 - \beta - 2)q^2 \quad (\text{C.17})$$

$$b_6 = \left( \left( \mu \left( (\beta + 1)\mu + \frac{1}{2}\beta + 1 \right) \eta^4 + ((2\beta + 2)\mu + \beta + 2)\eta^2 + \beta + 1 \right) q^2 + 2 + (2\mu + 1)\eta^2 \right) q^2 \quad (\text{C.18})$$

$$c_6 = -(1 + \mu(\mu + 1 + (\beta + 1)q^2)\eta^4 + (2\mu + 2 + (\beta + 1)q^2)\eta^2)q^4 \quad (\text{C.19})$$

$$d_6 = \eta^4 \mu q^6 + \eta^2 q^6 \quad (\text{C.20})$$

$$\tilde{a}_6 = (-2 - 2(\beta + 1)(\eta^2 \mu + 1)q^2) \quad (\text{C.21})$$

$$\tilde{b}_6 = \frac{((-2(-\eta^2 \mu - 1)q^2 + (1 + (\beta + 1)(\eta^2 \mu + 1)q^2)^2)h - 1)}{h} \quad (\text{C.22})$$

$$\tilde{c}_6 = \frac{(2(-\eta^2 \mu - 1)q^2(1 + (\beta + 1)(\eta^2 \mu + 1)q^2)h + 2(\eta^2 \mu + 1)q^2)}{h} \quad (\text{C.23})$$

$$\tilde{d}_6 = \frac{(-\eta^2 \mu - 1)^2 q^4 h - (\eta^2 \mu + 1)^2 q^4}{h} \quad (\text{C.24})$$

# APÉNDICE

## D. Método de Nishihara

### IDVA-C3

$$\mathbb{C}_1 = \frac{1}{4} \frac{((-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta^2 + \mu^2\eta^4}{\zeta^2} q^2 - 8\zeta^2 \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta^2} \left( ((4(1 + (\beta + 1)\mu)^2\eta^4 + 8(2 + (\beta + 1)\mu)(\beta + 1)\eta^2 + 4(\beta + 1)^2)\zeta^2 - 2\mu^2\eta^4(\beta + 1))q^4 + (((16 + (8\beta + 16)\mu)\eta^2 + 8\beta + 16)\zeta^2 - 2\mu^2\eta^4)q^2 + 4\zeta^2 - 4\zeta^2(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbb{C}_3 = \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta^2} \left( ((\beta + 1)((-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1))\eta^2 q^4 + ((-8(1 + (\beta + 1)\mu)(\mu + 1)\eta^4 + ((-16\beta - 16)\mu - 16\beta - 32)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta^2 + 2\mu^2\eta^4(\beta + 2))q^2 + (-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^4)q^2 - ((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^4)q^2(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbb{C}_4 = \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta^2} \left( 4 \left( \eta^4 \zeta^2 (\beta + 1)^2 q^4 - \frac{1}{2} (((-8\beta - 8)\mu - 4\beta - 8)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1))\eta^2 q^2 + (1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4 \right) q^4 - 4((1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4) q^4(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbb{C}_5 = \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta^2} \left( -8\eta^2 \left( \eta^2 \zeta^2 (\beta + 1) q^2 + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2 \right) q^6 - \eta^2((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta^2 + \mu^2\eta^2)q^6(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbb{C}_6 = q^8\eta^4 r^2 \quad (\text{D.6})$$

### IDVA-C4

$$\mathbb{C}_1 = \frac{1}{\mu^2} \left( (-2\eta^2(\beta + 1)\mu^3 + (-2\eta^2 + 4(\zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{2})(\beta + 1))\mu^2 + 8\zeta^2(\beta + 1)\mu + 4\zeta^2)q^2 - 2\mu^2 \right) \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{\mu^2} ((\eta^4(\beta+1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta+1)(\eta^2+\beta+1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta+4)\eta^2 + (\beta+1)^2)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta+1)^2\mu - 8\zeta^2(\beta+1))q^4 + (2\eta^2(\beta+2)\mu^3 + (-8\zeta^2\beta - 8\zeta^2 + 4\eta^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta+2)\mu - 8\zeta^2)q^2 + \mu^2 - \mu^2(-r^2+1)) \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbb{C}_3 = \frac{1}{\mu^2} (-2q^2((\beta+1)(\eta^4(\beta+1)\mu^3 + \eta^2(\eta^2+\beta+1)\mu^2 - 2\zeta^2(\beta+1))q^4 + (\eta^4(\beta+1)\mu^4 + (\eta^2(\beta+2) + 2\beta+2)\eta^2\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta+4)\eta^2 + \beta+1)\mu^2 - 8\zeta^2(\beta+1)\mu - 4\zeta^2(\beta+2))q^2 + \mu^3\eta^2 + (-2\zeta^2 + \eta^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta^2 - 2\zeta^2) + 2q^2(\mu^3\eta^2 + (-2\zeta^2 + \eta^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta^2 - 2\zeta^2)(-r^2+1)) \quad (\text{D.9})$$

$$\mathbb{C}_4 = \frac{1}{\mu^2} (q^4(\mu^2\eta^4(\beta+1)^2q^4 + (4\eta^4(\beta+1)\mu^3 + 2(\eta^2(\beta+2) + 2\beta+2)\eta^2\mu^2 - 8\zeta^2(\beta+1))q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta^2 - 8\zeta^2) - q^4(\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta^2 - 8\zeta^2)(-r^2+1)) \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbb{C}_5 = \frac{1}{\mu^2} (-2q^6(\mu^2\eta^4(\beta+1)q^2 + \mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta^2) + 2(\mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta^2)q^6(-r^2+1)) \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbb{C}_6 = q^8\eta^4r^2 \quad (\text{D.12})$$

## IDVA-C6

$$\mathbb{C}_1 = \frac{(-2\eta^2(\beta+1)\mu^3 + (-2\eta^2 - 2\beta - 2)\mu^2 + 4\zeta^2)q^2 - 2\mu^2}{\mu^2} \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{\mu^2} ((\eta^4(\beta+1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta+1)(\eta^2+\beta+1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta+4)\eta^2 + (\beta+1)^2)\mu^2 - 8\eta^2\zeta^2(\beta+1)\mu - 8\zeta^2(\beta+1))q^4 + (2\eta^2(\beta+2)\mu^3 + (4\eta^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta^2)q^2 + \mu^2 - \mu^2(-r^2+1)) \quad (\text{D.14})$$

$$\mathbb{C}_3 = \frac{1}{\mu^2} \left( -2 \left( (\eta^4(\beta+1)\mu^3 - 2 \left( (\zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{2})\eta^2 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} \right) \eta^2\mu^2 - 4\eta^2\zeta^2(\beta+1)\mu - 2\zeta^2(\beta+1))(\beta+1)q^4 + (\eta^4(\beta+1)\mu^4 + (\eta^2(\beta+2) + 2\beta+2)\eta^2\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta+4)\eta^2 + \beta+1)\mu^2 - 4\eta^2\zeta^2(\beta+2)\mu - 4\zeta^2(\beta+2))q^2 + \mu^3\eta^2 + (\eta^2+1)\mu^2 - 2\zeta^2)q^2 + 2(\mu^3\eta^2 + (\eta^2+1)\mu^2 - 2\zeta^2)q^2(-r^2+1) \right) \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbb{C}_4 = \frac{1}{\mu^2} \left( (\mu^2\eta^4(\beta+1)^2q^4 + (4\eta^4(\beta+1)\mu^3 - 8 \left( (\zeta^2\beta + \zeta^2 - \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{2})\eta^2 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} \right) \eta^2\mu^2 - 16\eta^2\zeta^2(\beta+1)\mu - 8\zeta^2(\beta+1))q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\eta^2\zeta^2 - 8\zeta^2)q^4 - (\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\eta^2\zeta^2 - 8\zeta^2)q^4(-r^2+1) \right) \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbb{C}_5 = \frac{1}{\mu^2} (-2q^6(\mu^2\eta^4(\beta + 1)q^2 + \mu^3\eta^4 + ((-2\zeta^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 4\mu\eta^2\zeta^2 - 2\zeta^2) + 2(\mu^3\eta^4 + ((-2\zeta^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 4\mu\eta^2\zeta^2 - 2\zeta^2)q^6(-r^2 + 1)) \quad (\text{D.17})$$

$$\mathbb{C}_6 = q^8\eta^4r^2 \quad (\text{D.18})$$



# Bibliografía

- [1] M. C. Smith, “Synthesis of mechanical networks: The inerter,” *IEEE Trans Automat Contr*, vol. 47, no. 10, pp. 1648–1662, Oct. 2002, doi: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [2] Y. Hu and M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers,” *Int J Mech Sci*, vol. 99, pp. 297–307, Jun. 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [3] M. Canales, W. Paucar, and N. Juipa, “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica,” Perú, 2017.
- [4] Frahm Hermann, “Device for damping vibrations of bodies,” Pat. 0989958, 1911.
- [5] S. Pani, S. K. Senapati, K. C. Patra, and P. Nath, “Review of an Effective Dynamic Vibration Absorber for a Simply Supported Beam and Parametric Optimization to Reduce Vibration Amplitude,” *Int J Eng Res Appl*, vol. 07, no. 07, pp. 49–77, Jul. 2017, doi: 10.9790/9622-0707034977.
- [6] J. Ormondroyd y J. P. Den Hartog, “*Theory of the dynamic vibration absorber*,” vol. 50. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1928.
- [7] E. Hahnkamm, “Die Dämpfung von Fundamentalschwingungen bei veränderlicher Erregerfrequenz,” *Ingenieur-Archiv*, vol. 4, no. 2, pp. 192–201, 1933, doi: 10.1007/BF02079857.
- [8] J. E. Brock, “A Note on the Damped Vibration Absorber,” *J Appl Mech*, vol. 13, no. 4, pp. A284–A284, 1946, doi: 10.1115/1.4009588.
- [9] J. P. Den Hartog, “*Mechanical Vibrations*,” 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [10] M. B. Ozer and T. J. Royston, “Extending Den Hartog’s vibration absorber technique to multi-degree-of-freedom systems,” *J Vib Acoust*, vol. 127, no. 4, pp. 341–350, 2005, doi: 10.1115/1.1924642.
- [11] M. B. Ozer and T. J. Royston, “Application of Sherman-Morrison matrix inversion formula to damped vibration absorbers attached to multi-degree of freedom systems,” *J Sound Vib*, vol. 283, no. 3–5, pp. 1235–1249, May 2005, doi: 10.1016/j.jsv.2004.07.019.

- [12] S. Krenk, "Frequency analysis of the tuned mass damper," *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, vol. 72, no. 6, pp. 936–942, Nov. 2005, doi: 10.1115/1.2062867.
- [13] O. Nishihara and T. Asami, "Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors)," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 124, no. 4, pp. 576–582, 2002, doi: 10.1115/1.1500335.
- [14] T. Asami, O. Nishihara, and A. M. Baz, "Analytical Solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems," *J Vib Acoust*, vol. 124, no. 2, pp. 284–295, Mar. 2002, doi: 10.1115/1.1456458.
- [15] T. Asami and O. Nishihara, "Closed-form exact solution to  $H_\infty$  optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems)," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 125, no. 3, pp. 398–411, 2003, doi: 10.1115/1.1569514.
- [16] T. Argentini, M. Belloli, and P. Borghesani, "A closed-form optimal tuning of mass dampers for one degree-of-freedom systems under rotating unbalance forcing," *J Vib Acoust*, vol. 137, no. 3, Jun. 2015, doi: 10.1115/1.4029576.
- [17] M. Z. Ren, "A variant design of the dynamic vibration absorber [3]," Aug. 23, 2001, *Academic Press*. doi: 10.1006/jsvi.2001.3564.
- [18] K. Liu and J. Liu, "The damped dynamic vibration absorbers: Revisited and new result," *J Sound Vib*, vol. 284, no. 3–5, pp. 1181–1189, Jun. 2005, doi: 10.1016/j.jsv.2004.08.002.
- [19] W. O. Wong and Y. L. Cheung, "Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion," *Eng Struct*, vol. 30, no. 1, pp. 282–286, Jan. 2008, doi: 10.1016/j.engstruct.2007.03.007.
- [20] Y. L. Cheung and W. O. Wong, "Design of a non-traditional dynamic vibration absorber," *J Acoust Soc Am*, vol. 126, no. 2, pp. 564–567, Aug. 2009, doi: 10.1121/1.3158917.
- [21] Y. L. Cheung and W. O. Wong, "H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber - Revisited and new results," in *Journal of Sound and Vibration*, Aug. 2011, pp. 3901–3912. doi: 10.1016/j.jsv.2011.03.027.
- [22] Y. L. Cheung and W. O. Wong, "H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation," *J Sound Vib*, vol. 330, no. 6, pp. 1039–1044, Mar. 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2010.10.031.

- [23] M. Z. Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, F. C. Wang, and M. Smith, “The missing mechanical circuit element,” *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 9, no. 1, pp. 10–26, Mar. 2009, doi: 10.1109/MCAS.2008.931738.
- [24] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, and Z. Shu, “Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements,” *J Sound Vib*, vol. 333, no. 8, pp. 2212–2225, Apr. 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2013.12.016.
- [25] T. Asami, “Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers arranged in series or in parallel,” *J Vib Acoust*, vol. 139, no. 1, Feb. 2017, doi: 10.1115/1.4034776.
- [26] K. Ikago, K. Saito, and N. Inoue, “Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper,” *Earthq Eng Struct Dyn*, vol. 41, no. 3, pp. 453–474, 2012, doi: 10.1002/eqe.1138.
- [27] I. F. Lazar, S. A. Neild, and D. J. Wagg, “Using an inerter-based device for structural vibration suppression,” *Earthq Eng Struct Dyn*, vol. 43, no. 8, pp. 1129–1147, Jul. 2014, doi: 10.1002/eqe.2390.
- [28] H. Garrido, O. Curadelli, and D. Ambrosini, “Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper,” *Eng Struct*, vol. 56, pp. 2149–2153, Nov. 2013, doi: 10.1016/j.engstruct.2013.08.044.
- [29] L. Marian and A. Giaralis, “Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 38, pp. 156–164, Oct. 2014, doi: 10.1016/j.probengmech.2014.03.007.
- [30] A. Javidialesaadi and N. Wierschem, “Extending the fixed-points technique for optimum design of rotational inertial tuned mass dampers,” in *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, Springer New York LLC, 2017, pp. 83–86. doi: 10.1007/978-3-319-54777-0\_11.
- [31] D. Pietrosanti, M. De Angelis, and M. Basili, “Optimal design and performance evaluation of systems with Tuned Mass Damper Inerter (TMDI),” *Earthq Eng Struct Dyn*, vol. 46, no. 8, pp. 1367–1388, Jul. 2017, doi: 10.1002/eqe.2861.
- [32] E. Barredo *et al.*, “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers,” *Int J Mech Sci*, vol. 144, pp. 41–53, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025.
- [33] C. Liu, L. Chen, H. P. Lee, Y. Yang, and X. Zhang, “A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: Theory, devices, and applications,” Sep. 01, 2022, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.jfranklin.2022.07.030.

- [34] Cuauhtémoc Mazón, “Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico,” Tesis de maestría. Tecnológico Nacional de México , 2019.
- [35] M. Z. Q. Chen and Y. Hu, “Inerter and Its Application in Vibration Control Systems,” Springer, 2019.
- [36] W. K. y C. G. Chen Michael Zhiqiang, “Passive Network Synthesis: Advances With Inerter,” World Scientific, 2020.
- [37] M. C. Smith, “The Inerter: A Retrospective,” *Robotics, and Autonomous Systems Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst*, vol. 14, pp. 361–391, 2020, doi: 10.1146/annurev-control-053018.
- [38] R. Ma, K. Bi, and H. Hao, “Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review,” Sep. 15, 2021, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112655.
- [39] S. Evangelou, D. J. N. Limebeer, R. S. Sharp, and M. C. Smith, “Mechanical steering compensators for high-performance motorcycles,” *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, vol. 74, no. 2, pp. 332–346, Mar. 2007, doi: 10.1115/1.2198547.
- [40] S. Evangelou, D. J. N. Limebeer, R. S. Sharp, and M. C. Smith, “Steering compensation for high-performance motorcycles,” 2004.
- [41] F.-C. Wang, C.-H. Yu, M.-L. Chang, and M. Hsu, “The Performance Improvements of Train Suspension Systems with Inerters,” 2006.
- [42] F. C. Wang, M. K. Liao, B. H. Liao, W. J. Su, and H. A. Chan, “The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 7, pp. 805–830, Jul. 2009, doi: 10.1080/00423110802385951.
- [43] H. Y. Zhang, Z. Q. Chen, X. G. Hua, Z. W. Huang, and H. W. Niu, “Design and dynamic characterization of a large-scale eddy current damper with enhanced performance for vibration control,” *Mech Syst Signal Process*, vol. 145, Nov. 2020, doi: 10.1016/j.ymsp.2020.106879.
- [44] S. S. Rao, “Vibraciones mecánicas,” 2012.
- [45] F. S. Tse, I. E. Morse, and T. Hinkle, “Mechanical Vibrations Theory and Applications second edition.”
- [46] B. Balachandran and E. B. Magrab, *Vibrations*, Second edición. Cengage learning, 2009.
- [47] S. Graham Kelly, “Mechanical Vibration Theory And Applications,” 2012.

- [48] Dennis G. Zill., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, 7ma edición. International Thomson, 1997.
- [49] Patricio cordero S., “Mecánica,” Departamento de física, facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile, May 2013.
- [50] Katsuhiko Ogata, “*Dinámica de sistemas*,” Primera edición., vol. 1. Universidad de Minnesota, 1987.
- [51] Jessus Edmman Hernandez Ibarra, “Control pasivo de vibraciones en una estructura tipo edificio utilizando múltiples absorbedores flexibles,” Tesis de Maestría, Tecnológico Nacional de México, Pachuca de Soto, Hidalgo, 2024.
- [52] Ramón Fernández Fera & Joaquín Ortega Casanova, “Mecánica de fluidos, teoría, problemas y prácticas,” Universidad de Málaga, Escuela técnica superior de ingeniería industrial.
- [53] Miguel Ángel Bernal Yermanos, “Teorema II-Construyendo ciencia en el aula,” Trabajo de Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias Bogotá D.C. Colombia, 2015.
- [54] Bahman Zohuri, *Dimensional Analysis Beyond the Pi Theorem*. ISBN 978-3-319-45725-3, DOI 10.1007/978-3-319-45726-0: Springer International Publishing Switzerland , 2017.
- [55] “Fórmulas de Vieta.” Accessed: Jun. 26, 2024. [Online]. Available: [http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A5\\_Vieta.pdf](http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A5_Vieta.pdf), págs 1-3.
- [56] Gustavo López García, “Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga,” Trabajo de Tesis, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Hca. Ciudad de Huajuapán de León Oaxaca, México., 2021.
- [57] I. M. Gelfand, “The Gelfand Mathematical Seminars Series Editor.”
- [58] J. Stewart, *Cálculo; Trascendentes tempranas*, Octava Edición. Universidad de Toronto, pp. 1055-1060.
- [59] “Tema 9: Matriz Jacobiana,” Universidad de Granada. Accessed: Jun. 27, 2024. [Online]. Available: <https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/AnalisisI/2017-18/Jacobiana.pdf>
- [60] A. R. Enrique Gabriel Baquela, “Optimización Matemática con R. Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de Problemas,” Mar. 2013.
- [61] P. Varberg, R. Purcell, and V. Rigdon, *Cálculo diferencial e integral*, Novena Edición. ISBN: 978-970-26-0989-6, Pág. 151-155, 2007.

- [62] “Matriz Hessiana «Máximos y Mínimos relativos».” Accessed: Jun. 29, 2024. [Online]. Available: <https://notasfisicaymatematicas.blogspot.com/2022/02/matriz-hessiana-maximos-y-minimos.html>
- [63] Ana Elizabeth García Hernández, *Cálculo de varias variables*, Primera edición. Instituto Politécnico Nacional México, 2014. [Online]. Available: [www.editorialpatria.com.mx](http://www.editorialpatria.com.mx)
- [64] S. Krenk and J. Høgsberg, “Tuned mass absorber on a flexible structure,” *J Sound Vib*, vol. 333, no. 6, pp. 1577–1595, Mar. 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2013.11.029.
- [65] C. H. e H. H. Thanh-Tung Tran, “Integrated inerter design and application to optimal vehicle suspension system,” *International Journal of Computer-Aided technologies (IJCAx)*, vol. 1, no. 2, pp. 1–16, 2014.
- [66] Eduardo Barredo, “Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica,” Tesis doctorado, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2019. [Online]. Available: [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx)
- [67] T. Asami, Y. Mizukawa, and T. Ise, “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function,” *J Vib Acoust*, vol. 140, no. 6, Dec. 2018, doi: 10.1115/1.4040229.
- [68] Y. Shen, L. Chen, X. Yang, D. Shi, and J. Yang, “Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension,” *J Sound Vib*, vol. 361, pp. 148–158, 2016, doi: 10.1016/j.jsv.2015.06.045.
- [69] F. C. Wang, M. F. Hong, and T. C. Lin, “Designing and testing a hydraulic inerter,” *Proc Inst Mech Eng C J Mech Eng Sci*, vol. 225, no. 1, pp. 66–72, Jan. 2011, doi: 10.1243/09544062JMES2199.
- [70] D. De Domenico, P. Deastra, G. Ricciardi, N. D. Sims, and D. J. Wagg, “Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings,” *J Franklin Inst*, vol. 356, no. 14, pp. 7626–7649, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.jfranklin.2018.11.012.
- [71] J. G. Mendoza-Larios, E. Barredo-Hernández, and I. A. Maldonado-Bravo, “Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial,” *Cultura Científica y Tecnológica*, vol. 19, no. 2, 2022, doi: 10.20983/culecyt.2022.2.2.1.

