



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**COMPARATIVA ENTRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y  
DISTRIBUCIONES ALFA ESTABLES EN LOS RENDIMIENTOS DE  
ACCIONES DE AMAZON, NETFLIX, DISNEY Y SUS IMPLICACIONES  
EN LA VALUACIÓN DE OPCIONES MEDIANTE EL USO DEL MODELO  
BLACK-SCHOLES.**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA**

**PRESENTADA POR:  
OSCAR FLORES MERINO**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. GUILLERMO ARTURO LANCHO ROMERO**

**HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.  
OCTUBRE DEL 2024**



*A quienes guían cada uno de mis  
pasos con su amor incondicional.*

---

A mis padres



# Dedicatoria y reconocimientos

Quiero dedicar el presente trabajo de investigación a mi familia, como una muestra de profundo cariño y gratitud por todo el amor y apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de mi vida universitaria. Gracias por creer en mí y por ayudarme a alcanzar mis sueños, objetivos y metas.

Agradezco especialmente a mi padre Gustavo Flores Sosa y a mi madre Francisca Merino Palacios por proporcionarme todos los recursos necesarios para culminar mis estudios universitarios, por estar siempre presentes, aconsejarme y guiarme por el sendero de la vida. Ustedes han sido mi fuente de inspiración constante. También quiero agradecer a mi hermanita, Sofía Celina Flores Merino, por su compañía, por hacerme reír y por regalarme golosinas durante el proceso de esta investigación.

Además, quiero agradecer a mis amigos Víctor, Gerardo, Criss, Juan Ramón, Carreño, Daniela, Deysi, Santiel, Alan, Canseco, Isra y especialmente a mis mejores amigos Alejandra Alverdín, Karina, Gerardo Ballesteros, Cynthia, Ricardo, Aldair, Froylan, Josué Adrián, Alberto Tonatiuh y Hernán José, por cada momento de alegría, frustración y tristeza que compartimos durante nuestra estancia en la universidad. Gracias por el constante ánimo que siempre brindaron.

Quiero expresar mi gratitud a mi director de tesis, el Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero, por brindarme la oportunidad de desarrollar este tema de investigación. Su orientación ha contribuido significativamente a mi formación profesional y me ha permitido explorar la intersección de la física con otras áreas.

Por último, deseo manifestar mi profunda gratitud a los profesores Ana Delia Olvera Cervantes, Luis Eduardo Angoa, Ricardo Rosas Rodríguez, Mathieu Kessler, Manuel Menéndez Sánchez, Luis Miguel Espinoza Reyes, Fernando Cuauhtémoc Solís Cortés, Mauricio Labadie Martínez, Mirna Denisse Barreiro Argüelles, Alejandro Iván Aguirre Salado y Armando Alcalá Vallejo por su mentoría y asesoramiento a lo largo de este trabajo de investigación.



# Introducción

La belleza de la física reside en la comprensión y el desarrollo de modelos matemáticos, los cuales nos permiten comprender fenómenos a todas las escalas, desde el mundo de las partículas subatómicas hasta el universo entero, mediante las leyes de la naturaleza, mismas que fueron descubiertas mediante la observación y la descripción precisa del universo que nos rodea [1]. Sin embargo, las fronteras de la física no solamente se delimitan al estudio de fenómenos naturales, sino que también provee herramientas para el estudio de fenómenos puramente estocásticos, estos desarrollos demuestran cómo los conceptos y métodos de la física pueden ser aplicados con éxito en el análisis y la gestión de riesgos financieros.

Louis Bachelier se ganó el mérito de ser nombrado el padre de las matemáticas financieras modernas, debido al gran impacto de su tesis doctoral, “Teoría de la Especulación”, que ha sido considerada como la piedra angular del estudio de los mercados financieros, en la cual estudió los movimientos irregulares de los precios de acciones pertenecientes al mercado de valores francés, basándose en los estudios realizados por el botánico escocés Robert Brown, en el año de 1827, sobre el movimiento errático de partículas de polen suspendidas en un fluido. Al poco tiempo, en 1905, Albert Einstein describió y explicó la naturaleza del movimiento Browniano. Posteriormente, el físico y matemático Norbert Wiener consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano. Lo cual proporcionó un camino para el desarrollo posterior de las matemáticas financieras como los trabajos de Kolmogorov sobre ecuaciones diferenciales estocásticas o la hipótesis de mercado eficiente planteada por Fama.

Con base en el trabajo de investigación realizado por Bachelier; Fisher Black, Myron Scholes y Robert C. Merton dedujeron una fórmula para la valuación de opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos, bajo el supuesto de normalidad en los rendimientos, lo que les permitió modelar la evolución del valor de un activo financiero simple mediante un movimiento geométrico Browniano. Sin embargo, al realizar un análisis estadístico más riguroso sobre los rendimientos, se ha encontrado evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de normalidad, debido a la presencia de asimetría y leptocurtosis en los datos como se verá en los Capítulos 2 y 6, por lo que suponer normalidad en los rendimientos subestimaría valores extremos presentes en los rendimientos, lo que da a lugar a una mayor exposición al riesgo en la toma de decisiones financieras.

Sin embargo, existen pocos estudios empíricos donde se demuestre que el rendimiento porcentual de los activos que cotizan en el mercado accionario no se distribuye de manera

normal. Por lo tanto, en este trabajo de investigación, nos centraremos en analizar la distribución de los rendimientos de los activos de Amazon, Netflix y Disney mediante el uso de distribuciones de cola pesada (o distribuciones  $\alpha$ -estables), con el objetivo de establecer una comparativa con la distribución normal. Además, se proporcionará la solución del modelo Black-Scholes-Merton con el uso de cambios de variable que nos permitan transformarla en la conocida *ecuación de difusión de calor*, para poder así deducir la fórmula de Black-Scholes para la valuación de opciones europeas de compra o venta.

Para lograr los objetivos del presente trabajo de investigación, los capítulos se distribuirán de la siguiente manera:

- A lo largo del Capítulo 1, exploraremos la estructura de los mercados financieros y los principales instrumentos cotizados en ellos. Además, se ofrecerá una introducción a los términos financieros que utilizaremos en este trabajo.
- En el Capítulo 2, se presentan las herramientas de probabilidad que utilizaremos para estudiar la distribución de los rendimientos de las acciones. Además, se introduce el test de normalidad Jarque-Bera.
- En el Capítulo 3, describiremos la relación que existe entre la dinámica de evolución de un activo financiero simple y el movimiento Browniano unidimensional. Además, se deducirá el modelo Black-Scholes-Merton.
- En el Capítulo 4, se demostrará cómo el modelo Black-Scholes-Merton puede simplificarse a la ecuación de difusión de calor mediante cambios específicos de variable, lo que nos permitirá obtener una expresión en forma cerrada para la valoración de una opción europea de compra o venta.
- En el Capítulo 5, se estudiarán las propiedades básicas de las distribuciones estables univariadas y su función característica. Además, se describirán los cuatro parámetros principales que las caracterizan y los métodos que se emplean para poder determinarlos.
- En el Capítulo 6 demostraremos que asumir que los cambios porcentuales en los precios de las acciones no siguen una distribución normal lo que contradice uno de los pilares fundamentales de las matemáticas financieras modernas. Por ello, proponemos estudiar la distribución de los rendimientos de los activos de Amazon.com Incorporated (AMZN), Netflix Incorporated (NFLX) y The Walt Disney Company (DIS) mediante el uso de distribuciones  $\alpha$ -estables.

# Índice general

<b>Dedicatoria y reconocimientos</b>	<b>i</b>
<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>x</b>
<b>1. Conceptos financieros</b>	<b>1</b>
1.1. Historia de los derivados financieros . . . . .	1
1.2. Derivados . . . . .	2
1.2.1. Forward . . . . .	4
1.2.2. Futuros . . . . .	6
1.2.3. Opciones . . . . .	6
1.2.4. Swaps . . . . .	9
1.3. Estructura de los mercados financieros . . . . .	9
1.4. Instrumentos del mercado financiero . . . . .	11
1.5. Análisis de retornos . . . . .	13
<b>2. Probabilidad y variables aleatorias</b>	<b>17</b>
2.1. Experimento aleatorio . . . . .	17
2.2. Espacio muestral . . . . .	17
2.3. $\sigma$ -álgebra . . . . .	17
2.4. Medida de probabilidad . . . . .	18
2.5. Variable aleatoria . . . . .	19
2.5.1. Función de Distribución . . . . .	20
2.5.2. Medidas de dispersión . . . . .	21

2.6.	Distribución normal . . . . .	24
2.7.	Ley de los grandes números . . . . .	25
2.8.	Teorema del límite central . . . . .	26
2.9.	Test de normalidad . . . . .	26
2.9.1.	Test de normalidad Jarque-Bera . . . . .	26
2.9.2.	Gráfico Q-Q . . . . .	27
<b>3.</b>	<b>Modelo Black-Scholes-Merton</b>	<b>29</b>
3.1.	Teoría de la especulación . . . . .	29
3.1.1.	Movimiento Browniano . . . . .	30
3.2.	Movimiento Geométrico Browniano . . . . .	34
3.3.	Deducción del modelo Black-Scholes-Merton . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Fórmula Black-Scholes y su origen en la ecuación de calor</b>	<b>43</b>
4.1.	Modelo Black-Scholes para una opción de compra europea . . . . .	43
4.2.	Transformada de Fourier . . . . .	48
4.3.	Solución de la ecuación de calor en el dominio infinito . . . . .	48
4.4.	Solución del modelo Black-Scholes mediante la solución de la ecuación de calor . . . . .	51
4.5.	Modelo Black-Scholes para una opción de venta europea . . . . .	56
<b>5.</b>	<b>Propiedades básicas de las distribuciones estables</b>	<b>65</b>
5.1.	Definiciones y propiedades básicas . . . . .	65
5.2.	Parametrizaciones de las leyes estables . . . . .	67
5.3.	Estimación de parámetros . . . . .	70
5.3.1.	Estimación de máxima verosimilitud . . . . .	70
<b>6.</b>	<b>Análisis del rendimiento de valores en el mercado bursátil</b>	<b>73</b>
6.1.	Análisis temporal de las acciones de Amazon, Netflix y Disney . . . . .	73

6.2. Análisis de la normalidad en los rendimientos de las acciones	76
6.3. Estudio de rendimientos financieros mediante distribuciones de colas pesadas	82
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>



# Índice de figuras

1.1. Posición larga en forwards. . . . .	4
1.2. Posición corta en forwards. . . . .	5
1.3. Posición larga de una opción. . . . .	7
1.4. Posición en corto de una opción. . . . .	8
1.5. Análisis temporal para el valor de cierre de mercado para las acciones de The Walt Disney Company (DIS) y Netflix (NFLX) correspondientes al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023. . . . .	14
3.1. Análisis temporal para el valor de cierre de mercado del Índice de Precios y Cotizaciones ( $\hat{MXX}$ ) que corresponde al período del 04 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023, en comparación con una trayectoria simulada mediante el movimiento Browniano unidimensional distribuido normalmente. . . . .	32
3.2. Histograma de retornos simples del Índice de Precios y Cotizaciones ( $\hat{MXX}$ ). Para su elaboración se empleó una muestra de 666 rendimientos diarios correspondiente al 04 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023. . . . .	33
3.3. Análisis temporal para el valor de cierre de mercado para la acción de Pfizer (PFE) que corresponde al período del 02 de agosto del 2021 al 28 de marzo del 2024, en comparación con una trayectoria simulada mediante el movimiento Browniano unidimensional distribuido normalmente. . . . .	35

3.4.	(a) Presencia de una tendencia bajista en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado de la acción The Walt Disney Company (DIS), correspondientes al período de agosto del 2021 a mayo del 2024. (b) Presencia de una tendencia alcista en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado de la acción de NVIDIA Corporation (NVDA), correspondientes al período de agosto del 2021 a marzo del 2024. (c) Predominancia de la componente estocástica en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado del Volatility Index ( $\hat{VIX}$ ), correspondientes al período de agosto del 2021 a abril del 2024. . . . .	41
6.1.	Serie temporal para el valor de cierre de mercado de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix, que corresponde al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023. . . . .	74
6.2.	Rendimientos logarítmicos diarios de las acciones (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix, correspondientes al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023. . . . .	75
6.3.	Ajuste normal para el histograma de rendimientos logarítmicos de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix. . . . .	78
6.4.	Gráfico Q-Q para las acciones de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix frente a la distribución normal. . . . .	79
6.5.	Ajuste de las distribuciones de cola pesada para los rendimientos logarítmicos de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix. . . . .	83

# Índice de tablas

6.1. Estadística descriptiva de los retornos por activo . . . . .	77
6.2. Test de normalidad Jarque–Bera. . . . .	80
6.3. Número esperado y observado de valores extremos en la cola izquierda. .	80
6.4. Número esperado y observado de valores extremos en la cola derecha. .	81
6.5. Comparativa entre el porcentaje de rendimientos observados y la probabilidad en la distribución normal. . . . .	81
6.6. Ajuste de los rendimientos logarítmicos mediante el método de máxima verosimilitud. . . . .	82



# 1

## Conceptos financieros

### 1.1. Historia de los derivados financieros

A pesar de que los derivados financieros son uno de los principales productos de inversión para la protección ante adversas fluctuaciones en el mercado financiero o tasas de interés, se desconoce el momento histórico en el cual este tipo de activos comenzaron a emplearse. Sin embargo, se ha encontrado evidencia histórica que muestra cómo Tales de Mileto, un matemático y filósofo de la antigua Grecia, utilizó este tipo de contratos para adquirir grandes cantidades de aceitunas a un precio inferior antes de la cosecha. Esto le permitió revenderlas a un precio más alto una vez que la temporada de aceitunas había terminado y su valor había aumentado. Por otro lado, los antiguos romanos y fenicios empleaban los derivados en el transporte marítimo [2].

Durante la edad media los mercados de futuros comenzaron a consolidarse entre los agricultores y comerciantes, debido a que, durante las temporadas de escasez, los agricultores obtenían precios superiores por sus cosechas, además de que la oferta de sus productos en el mercado era menor. Por otra parte, en las temporadas de abundancia el precio de su cosecha era inferior a la inversión que se realizaba para poder cultivar sus tierras. Por lo cual, los agricultores y comerciantes se encontraban expuestos a situaciones de alto riesgo [3].

Mientras que, en Holanda durante el siglo XVII comenzó a florecer el mercado de derivados en el comercio de tulipanes, en donde los comerciantes empleaban opciones compra que les permitía conseguir un precio de compra razonable con el cual se pudiese satisfacer la demanda. Al mismo tiempo que los productores empleaban opciones de venta para garantizar un precio de venta favorable. Sin embargo, con el paso del tiempo los especuladores se unieron a este mercado para negociar con estos contratos y así poder obtener ganancias [2].

El primer esfuerzo por desarrollar las matemáticas financieras para la valuación de opciones fue Luis Bachelier, quien se ganó el mérito de ser nombrado el padre de las matemáticas financieras modernas, por su tesis doctoral titulada “*Theorie de la spéculation*”, con la cual fundó las bases para el modelado en la dinámica de los precios

1.2. DERIVADOS

---

de acciones mediante el movimiento Browniano. Sin embargo, no fue hasta 1960 que algunos académicos colaboraron para desarrollar un modelo de valuación de opciones. Fisher Black (físico-matemático doctorado en Harvard), Myron Scholes (doctorado en la Universidad de Chicago) y Robert Merton (profesor de matemáticas en el MIT) fueron quienes formularon el modelo más conocido en la valuación de opciones financieras en el año de 1970 [4, 5].

En el año de 1973, Fisher Black y Myron Scholes lograron publicar un artículo titulado "*The pricing of options and corporate liabilities*" [6], en la revista de la Universidad de Chicago (The Journal of Political Economy). Gracias a esta publicación, su artículo se convirtió en una de las investigaciones más importantes en el mundo de las finanzas internacionales, por lo cual, su trabajo obtuvo el premio Nobel de Economía en 1997.

En julio de 1979, Mark Rubinstein, John Cox y Stephen Ross publicaron un artículo en The Journal of Financial Economy titulado "*Options pricing: A simplified approach*". En él propusieron un modelo alternativo al de Black y Scholes para la valuación de opciones mediante el uso de un modelo binomial, el cual, tiene la ventaja para el poseedor de poder evaluar y ejercer una opción en cualquier momento durante la vida de la opción [5].

En México, el Mercado de Derivados es el MexDer, que inició sus operaciones en diciembre de 1998. En sus inicios se listaron contratos de futuros financieros. En junio del 2003 el MexDer y el Mercado Español de Futuros y Opciones Financieros (MEFF) celebraron un acuerdo de asociación estratégica para desarrollar un mercado de contratos de opciones listados en México, que inició en marzo de 2004 con las opciones del IPC (índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores) y sobre acciones individuales [5].

## 1.2. Derivados

Las matemáticas financieras clásicas son las encargadas de estudiar el comportamiento de los instrumentos financieros básicos como lo son las acciones, divisas, bonos y materias primas [7]. Sin embargo, existen instrumentos financieros como los derivados cuyo valor depende del precio de un activo subyacente o un instrumento financiero básico.

A principios del siglo XIX, la bolsa de valores europea introdujo a su lista de activos financieros los derivados simples. Sin embargo, estos activos financieros cayeron en desuso por causa de la Primera y Segunda Guerra Mundial, y no fue hasta la década de los setenta que estos activos se comenzaron a retomar gracias al trabajo publicado por

Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton, quienes desarrollaron un modelo teórico para la valuación de opciones, además de que este modelo puede ser aplicado a otros ámbitos financieros en los cuales se mide y controla el riesgo de instrumentos financieros complejos, por ello fueron condecorados con el Premio Nobel de Economía en 1997; al mismo tiempo que desencadenaron el desarrollo de las matemáticas financieras modernas [7].

Con el paso del tiempo los derivados financieros han sido clasificados en tres principales instrumentos derivados, los cuales son: opciones, futuros y swaps. Los cuáles se explicarán más adelante. Los derivados financieros únicamente pueden ser negociados de dos formas, a través de los mercados organizados y mercados extrabursátiles u OTC (por sus siglas en inglés Over-The-Counter); donde los mercados organizados se encuentran sujetos a normas regulatorias, además requieren un grado de estandarización en los instrumentos negociados (precio de ejercicio, la fecha de vencimiento, la longitud del contrato, entre otras cosas) y cuentan con una ubicación física en donde se llevan a cabo su comercio. Algunos ejemplos de ellos son: la Bolsa de Opciones de la Junta de Chicago (CBOE), la Bolsa Internacional de Futuros Financieros de Londres (LIFFE) y la Bolsa de Futuros Alemana (DTB). Mientras que los mercados extrabursátiles se realizan a través de ordenadores y teléfonos de bancos comerciales y de inversión, dentro de las principales instituciones podemos encontrar a Citibank, Bankers Trust, Goldman Sachs y Deutsche Bank [2, 3, 8].

Los instrumentos derivados más simples, denominados de primera generación o plain vanilla, son los contratos de: opciones, futuros, forwards y swaps. Estos contratos tienen tres finalidades básicas:

1. **Cobertura de riesgos (hedging).** Los productos derivados son útiles para el agente económico que desea mitigar o cubrir el riesgo de variaciones o cambios adversos en los precios de los activos que dicho agente tiene en el mercado de contado o físicos.
2. **Especulación.** En este caso el agente económico no desea reducir el riesgo. Por el contrario, el especulador realiza una apuesta direccional en los movimientos del precio de un producto derivado para obtener una ganancia o rendimiento acorde con el riesgo que asume. Esta actividad es muy útil en los mercados organizados, ya que, a mayor número de especuladores, existe una mayor liquidez.
3. **Arbitraje.** Consiste en realizar una operación en los mercados financieros para obtener una ganancia a valor presente sin riesgo, aprovechando alguna imperfección detectada en dichos mercados. El arbitraje más simple consiste en comprar y

## 1.2. DERIVADOS

vender simultáneamente un mismo activo en dos mercados distintos, para asegurar una utilidad (la imperfección consiste en que el activo de referencia podría tener dos precios diferentes en sendos mercados) [5].

## 1.2.1. Forward

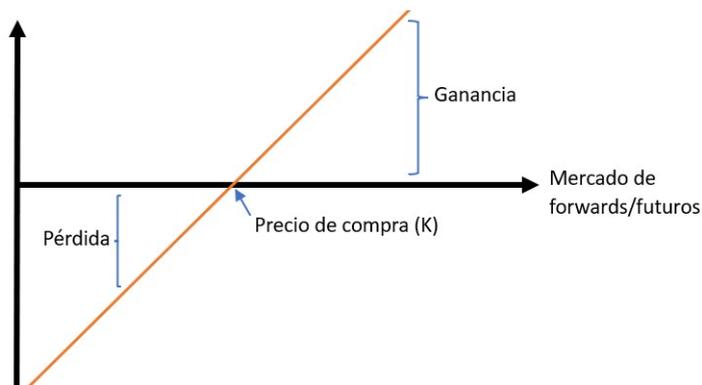
Un contrato adelantado o forward es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en una fecha futura y a un precio previamente pactado. Es decir, la operación se pacta en el presente, pero ocurre (se liquida) en el futuro.

Los contratos forward operan en el mercado extrabursátil (OTC), y éstos se pueden dar entre dos instituciones o entre una institución financiera y uno de sus clientes. Una de las partes en el contrato forward asume una posición larga y se compromete a comprar el activo en una fecha futura. Por tanto, un agente económico tiene una posición larga cuando al comprar el contrato de futuros adquiere la obligación de comprar el bien subyacente en una fecha futura y a un precio acordado en el mercado. Si se tiene una posición larga y el precio del futuro aumenta, se registrará una ganancia en la posición; de lo contrario, si el precio en el mercado de futuros disminuye, se registrará una pérdida en la posición.

El perfil de pago de una opción larga de forwards es la siguiente:

$$F_m - K, \quad (1.1)$$

donde  $K$  es el precio pactado de entrega del activo (parámetro fijo) y  $F_m$  es el precio de mercado del forward o futuro (parámetro variable). En la Figura 1.1 se muestra una gráfica del perfil de pago de una posición larga de un forward.



**Figura 1.1.** Posición larga en forwards.

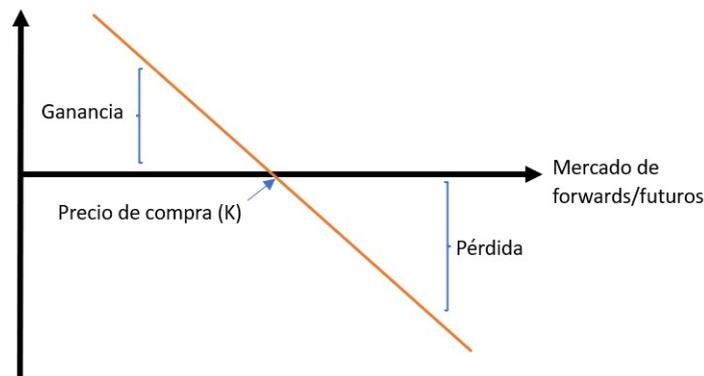
De tal manera que la otra parte del contrato asume una posición corta y se compro-

## 1.2. DERIVADOS

mete a vender o entregar el activo en la misma fecha. Por lo tanto, un agente económico tiene una posición corta cuando al vender o escribir (sinónimo de emitir) el contrato de futuros, adquiere la obligación de vender el bien subyacente en una fecha futura y a un precio acordado en el mercado. Si se tiene una posición corta y el precio del futuro aumenta, se registrará una pérdida en la posición; de lo contrario, si el precio en el mercado de futuros disminuye, se registrará una ganancia en la posición. De manera semejante, el perfil de pago de una posición corta en forwards está dada por:

$$K - F_m, \quad (1.2)$$

donde  $K$  es el precio pactado de entrega del activo y  $F_m$  es el precio de mercado del forward o futuro. En la Figura 1.2 se muestra una gráfica del perfil de pago de una posición corta de un forward o futuro.



**Figura 1.2.** Posición corta en forwards.

Es importante aclarar que, en el mercado de forwards o futuros, a diferencia del mercado de contado, es posible vender contratos sin que previamente se requieran contar con el bien subyacente. Recuérdese que, en el mercado de contado, para vender un bien que no se tiene, se debe pedir prestado previamente, y es a lo que se le conoce como operación de venta en corto.

En la fecha de vencimiento del contrato forward, los participantes se comprometen a realizar la liquidación (entrega del activo subyacente contra el pago en efectivo) en la fecha definida en el contrato. Por lo general, en las operaciones de forwards, la liquidación es en  $t + 2$ , es decir, dos días después de vencimiento del contrato [5].

### 1.2.2. Futuros

Al igual que los contratos adelantados o forwards, un contrato de futuros es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en una fecha futura y a un precio previamente pactado. También en este caso la operación se pacta en el presente, pero ocurre (se liquida) en el futuro.

A diferencia de los contratos forward, los contratos futuros son estandarizados y son operados en mercados organizados o en la bolsa de productos derivados. Las dos partes no se conocen necesariamente, ya que los mercados organizados contemplan mecanismos de liquidación que garantizan que los compromisos contraídos tanto por los compradores como por los vendedores, se cumplirán. En otras palabras, en un mercado organizado de derivados, el riesgo de contraparte no existe. A esta ventaja se le suma la gran liquidez que se ofrece en dichos mercados, lo que permite cancelar o cerrar posiciones abiertas en cualquier momento.

El contrato estandarizado de futuros debe contener al menos las siguientes especificaciones: activo o bien subyacente, calidad y lugar de entrega (en particular si el activo es alguna materia prima), tamaño del contrato y fecha de vencimiento.

El precio pactado es fijado por el mercado a través de la postura más competitiva que se encuentre en el momento de realizar la operación. En la mayoría de los casos, los participantes en el mercado no mantienen los contratos pactados hasta el final, ya que prefieren cerrar su posición antes del vencimiento [5].

### 1.2.3. Opciones

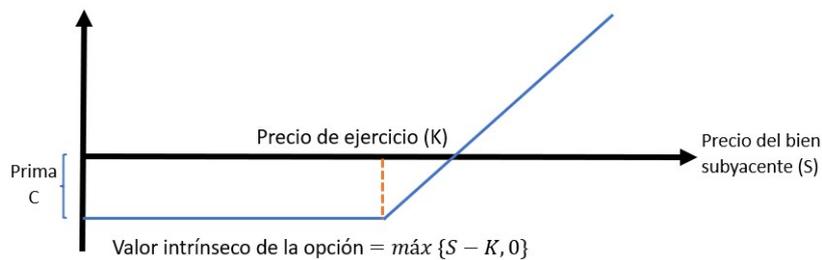
Los contratos de opciones se diseñaron para que el comprador de la opción se beneficie de los movimientos del mercado en una dirección, pero no sufra pérdidas como consecuencia de movimientos del mercado en dirección contraria. Una opción le da a su poseedor el derecho mas no la obligación de ejercer el contrato para adquirir o vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio preestablecido. Sin embargo, para poder adquirir una opción, el poseedor deberá pagar una prima, cuyo valor será mucho menor al monto notional. Mientras que el vendedor, por su parte recibirá como pago único el valor de la prima, se ejerza o no la opción.

Hoy en día existe una gran variedad de opciones en el mercado, por ejemplo: la opción americana, la cual le brinda el derecho al poseedor de ejercer su opción de compra o venta en un momento previo a la fecha de vencimiento; la opción asiática, la cual depende del precio medio durante el período de vida de la opción; la opción en retrospectiva depende del valor máximo o mínimo del precio durante el periodo de vida de la opción; la opción europea, la cual le brinda el derecho de comprar o vender un

## 1.2. DERIVADOS

activo subyacente en una fecha pactada en el futuro. Sin embargo, nos concentraremos principalmente en las opciones de compra (call option) y las opciones de venta (put option) [5, 8].

Una opción (financiera) de compra, o contrato de opción de compra, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de las partes a vender un activo financiero, mientras que a la contra parte le otorga el derecho, mas no la obligación, de comprar dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Es común decir que el comprador toma una posición larga y el vendedor una posición corta. Además, una opción de compra europea con fecha de vencimiento  $T$ , otorga el derecho de adquirir un valor  $S$  al vencimiento  $T$  a un precio de ejercicio  $K$ . De manera que, se representará al valor del activo subyacente (o precio de contado) al tiempo  $t$ , como  $S(t)$  o  $S_t$ . En los contratos de opciones existen dos partes involucradas. En donde, al propietario de la opción se le conoce como comprador o poseedor de la opción. Mientras que a su contraparte (quien vende la opción) es llamado vendedor o escritor. Por otro lado, el poseedor de la opción ejercerá su contrato cuando: el precio de mercado  $S(T)$  del activo subyacente sea mayor que el precio de ejercicio, mientras que si el precio de mercado  $S(T)$  es menor al precio de ejercicio, el poseedor no estará obligado a ejercer su contrato y su pérdida máxima que tendrá será el valor de la prima, como se observa en la Figura 1.3 [9, 10].



**Figura 1.3.** Posición larga de una opción.

En la Figura 1.3, podemos observar que una opción europea de compra, es un instrumento financiero el cual nos permite restringir las pérdidas al valor de la prima, a diferencia de los contratos forwards los cuales no acotan las pérdidas ante las variaciones del precio en el mercado. A su vez los contratos de opciones no restringirán el crecimiento de las ganancias.

De manera que podemos escribir a la función de pago para una opción europea de

## 1.2. DERIVADOS

compra, mediante la siguiente expresión:

$$c(S_t, T) = \max(S - K, 0) = [S - K]^+. \quad (1.3)$$

En donde  $[S - K]^+$  se lee como la parte positiva de  $S - K$ , de manera que  $[S - K]^+$  estará definida cuando la diferencia entre  $S$  y  $K$  sea mayor que cero y la función  $[S - K]^+$  valdrá cero si la diferencia entre  $S$  y  $K$  es menor a cero.

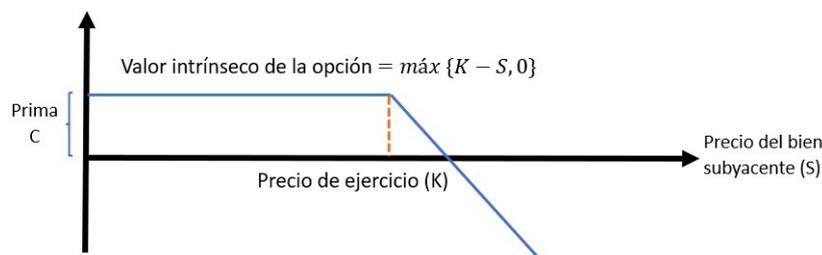
En general, la ganancia que se obtendrá por un contrato opción de compra, será:

$$\Upsilon(S_T) = \max(S_T - K, 0) - c(S_t, K, T - t, \sigma, r), \quad (1.4)$$

donde  $c(S_t, K, T - t, \sigma, r)$  es la prima pagada en el momento  $t < T$  (escrita sobre el activo subyacente  $S_t$ ) para celebrar un contrato de opción de compra.

Mientras que una opción (financiera) de venta, o contrato de opción de venta, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de las partes a comprar un activo financiero, mientras que a la contra parte le otorga el derecho, mas no la obligación, de vender dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Adicionalmente, una opción europea de venta, otorga el derecho de vender un valor  $S(T)$  a un precio de ejercicio  $K$  al vencimiento  $T$ . El propietario de una opción de venta no la ejercerá cuando el precio del activo  $S(T)$  exceda el precio de ejercicio  $K$ , porque el activo podría venderse a un precio superior en el mercado,  $S(T) > K$ . De manera que podemos escribir a la función de pago para una opción europea de venta, mediante la siguiente expresión:

$$p(S_t, T) = \max(K - S, 0) = [K - S]^+. \quad (1.5)$$



**Figura 1.4.** Posición en corto de una opción.

En la Figura 1.4, podemos observar que una opción europea de venta, es un instrumento financiero el cual restringe a la ganancia al valor de la prima, mientras que, las

pérdidas por una posición en corto no estarán acotadas y crecerán tanto el valor del activo supere al precio de ejercicio.

De manera que la ganancia obtenida por un contrato de opción de venta, será:

$$\Upsilon(S_T) = \max(K - S_T, 0) - p(S_t, K, T - t, \sigma, r) \quad (1.6)$$

donde  $p(S_t, K, T - t, \sigma, r)$  es la prima pagada en el momento  $t < T$  (escrita sobre el activo subyacente  $S_t$ ) para celebrar un contrato de opción de venta.

#### 1.2.4. Swaps

El término swap significa intercambio. Por lo tanto, un swap se refiere a que dos participantes en el mercado intercambian simultáneamente varios flujos de efectivo. La definición básica de swap de tasa de interés es la siguiente:

- es un acuerdo entre dos partes;
- para intercambiar flujos de efectivo periódicos, en fechas previamente establecidas en el futuro y basadas en un monto denominado nocional o principal;
- denominados en la misma moneda;
- pero calculados en diferentes bases (tasas de referencia): una parte paga flujos de efectivo basados en una tasa fija y otra parte paga flujos de efectivo basados en tasa flotante;
- no se intercambia el monto principal resultante, solamente el flujo de intereses.

Las modalidades de swaps básicos o plain vanilla son las tasas de interés (IRS, Interest Rate Swaps) y monedas (CCIRS, Cross Currency Interest Rate Swaps) [5].

### 1.3. Estructura de los mercados financieros

Los mercados financieros son medios físicos o virtuales, en donde se realizan operaciones de compraventa de valores, facilitando la interacción y los intercambios para la negociación de diversos productos o instrumentos financieros, llamados activos financieros, además, una de sus principales características es que favorecen a la libre competencia a través de la Ley de la oferta y la demanda [11]. Los mercados con mayor relevancia son:

1. **Mercado de acciones.** La bolsa de valores es el principal mercado secundario para acciones de corporaciones (es decir, sociedades de responsabilidad limitada). Se clasifica como un mercado secundario debido a que las acciones ya fueron emitidas, de manera que su comercio tiene lugar entre los inversionistas y no es necesario involucrar directamente a las propias empresas. Mientras que el mercado primario es el encargado de la emisión de nuevas acciones por parte de las corporaciones [12].
2. **Mercados de bonos.** Son los mercados de valores a largo plazo; por ejemplo, la deuda pública o los bonos corporativos. Se considera que los bonos presentan un menor riesgo a diferencia de las acciones, debido a que los bonos obligan al emisor a tomar medidas específicas en fechas determinadas en el futuro. Un bono es una promesa de pago de un valor a un vencimiento por una suma global en una fecha especificada en el futuro. Los bonos se negocian comúnmente en las bolsas de valores al igual que las acciones o en plataformas digitales reguladas por el gobierno [12].
3. **Mercado monetario.** Los mercados monetarios facilitan el intercambio de valores tales como los certificados de deuda emitidos por el gobierno (comúnmente, deuda pública a tres o seis meses) u otros con un corto plazo de vencimiento [12].
4. **Mercado de materias primas.** Aunque todas las materias primas tienen un mercado en específico en el cual pueden ser negociadas, la literatura financiera se limita a los mercados altamente organizados, como lo son: los metales preciosos (oro, plata y platino), metales industriales (como el plomo, cobre y estaño), petroquímicos y productos agrícolas (como los cereales, la soya, el azúcar y el café). A pesar de que la lista anterior no es muy exhaustiva, sugiere que los productos deben cumplir con ciertas características físicas, como: una clasificación mediante atributos bien definidos, que sean divisibles en unidades definidas con precisión y que puedan ser almacenados. La mayoría de los mercados organizados de productos primarios implican la negociación de contratos para la adquisición de productos en una fecha futura [12].
5. **Mercados de activos físicos.** Un ejemplo de este tipo de mercados es el mercado inmobiliario. En este caso, el activo más relevante para el análisis financiero suele ser un valor para tener una relación bien definida con el activo físico (por ejemplo, una hipoteca es un préstamo garantizado contra el valor líquido de la propiedad) [12].

6. **Mercado de divisas o Foreign Exchange (FOREX).** Los mercados de tipos de cambio nacieron con el objetivo de facilitar la cobertura al flujo monetario derivado del comercio internacional. Dentro de sus principales características se destacan la mayor concentración de recursos y el comercio en las 24 horas del día [12].
7. **Mercado de derivados.** Los mercados de productos derivados son mercados de transferencia de riesgos, ya que el riesgo que algunos agentes económicos no desean asumir se traspa a otros agentes económicos que tienen interés por dichos riesgos a cambio de obtener una ganancia o rendimiento [5].

## 1.4. Instrumentos del mercado financiero

1. **Acciones.** Es un título de crédito que representa una de las partes en que se divide el capital social de una empresa, permitiendo al inversionista la posibilidad de participar como accionista. Estos instrumentos no cuentan con garantía. En caso de liquidación de la empresa, los accionistas tienen derecho al remanente de los activos una vez que se hayan cubierto todas sus deudas. Su rendimiento es variable y se encuentra en función de: la ganancia o pérdida de capital o, el reparto de dividendos en efectivo o en acciones [13].
2. **Divisas.** Una divisa es la denominación de las unidades nacionales de pago (dinero) y como tal es un activo financiero [8].
3. **Fibras.** Son títulos fiduciarios generalmente documentados a través del Certificado Bursátil Fiduciario, dedicados a la inversión en bienes inmuebles cuyo rendimiento parcial o total se vincule a los activos fideicomitidos que otorguen derechos sobre los rentas y, en su caso, adicionalmente, otras características de estos instrumentos son :
  - No existe obligación de pago de principal ni de intereses derivados de las inversiones realizadas.
  - Los flujos a recibir son variables e inciertos, vinculados al resultado fiscal proveniente de las rentas de los inmuebles [13].
4. **Cetes.** Los Cetes (Certificados de Tesorería) son títulos de crédito al portador emitidos por el Gobierno Federal en mercado de dinero, con un plazo máximo de un año, y sirven como herramienta de política monetaria que permite al Banco de México operar el circulante monetario en sus ciclos más cortos y regular así la

tasa de interés de un modo más efectivo lo que permite el financiamiento del gasto público. Se colocan a descuento teniendo un precio menor a su valor nominal, por lo que el rendimiento que se obtiene al invertir en ellos es a través de ganancias de capital. El rendimiento del CETE funciona como tasa de interés de referencia de un gran número de operaciones financieras [13].

5. **Bonos , Udibonos o Bondes (Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal).** Son títulos de crédito denominados en pesos o en Unidades de Inversión (UDI's), que consignan la obligación directa e incondicional del Gobierno Federal a liquidar una suma de dinero; con cortes periódicos de cupón y tienen como objetivo ayudarlo a financiar proyectos de inversión de largo plazo. Estos instrumentos pagan, generalmente, un rendimiento superior al de Cetes de colocación primaria, al ofrecer una sobretasa, al emitirlos en UDI's, se busca proteger la inversión de problemas de tipo inflacionario, para mantener el poder adquisitivo del capital. Los Bonos M tienen cortes de cupón cada 182 días y la tasa de interés que pagan es fija. Actualmente se tienen referencias de bonos a plazos de 3, 5, 10, 20 y 30 años, aunque se puedan emitir a cualquier plazo, respetando múltiplos de 182 días. Cuando un bono se emite en UDIS, se conoce como UDIBONO y cuando el bono tiene tasa revisable se le denomina BONDE [13].
6. **Derivados.** Son contratos que te permiten proteger el precio de activos subyacentes contra futuras fluctuaciones del mercado. Así, los derivados son instrumentos financieros, cuyo valor depende del precio de mercado de un activo llamado subyacente. Los subyacentes pueden ser: tasas de interés, tipos de cambio, acciones entre otros. Y además se emplean como protección en caso de que los precios del producto subyacente al que estén ligados, cambien.
7. **ETFs.** Los fondos cotizados o ETFs, por sus siglas en inglés Exchange-Traded Funds, son vehículos que replican el índice de referencia de un mercado financiero, de manera que los activos que componen la cartera serán los mismos que aquellos que componen al índice. Los fondos cotizados, como instituciones de inversión colectiva que son, poseen la ventaja de que su cartera invierte en distintos valores, lo que aporta diversificación [14].
8. **TRACs.** La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) define a los TRACs como certificados de participación que representan el patrimonio de fideicomisos de inversión, y que mantienen en posición canastas de acciones de empresas cotizadas en bolsa. Es decir, es un mecanismo de inversión colectiva cuya cartera replica a un índice, el cual es negociado y cotizado en la bolsa de valores [14].

9. **Índice bursátil.** Un índice bursátil nos permite principalmente analizar las variaciones en los precios de los valores de diversas empresas, sin la necesidad de evaluar a cada una [15].
10. **Bono cupón cero.** Es un bono que no paga cupones, solo existe el pago de nominal al vencimiento.
11. **Bono cupón fijo.** Es un instrumento que devuelve la inversión inicial a vencimiento y paga un tipo de interés fijo sobre este nominal hasta vencimiento.

## 1.5. Análisis de retornos

Cuando deseamos realizar un análisis comparativo entre distintas series temporales de acciones o activos subyacentes, una de las principales dificultades que afrontamos es la dimensionalidad de los datos, debido a que la escala del precio para cada activo subyacente es distinta, por lo tanto, no se pueden comparar las dimensiones de los incrementos o caídas del precio, como se muestra en la Figura 1.5. Por lo cual, surge la necesidad de definir una unidad que permita medir el desempeño de diferentes activos subyacentes. De esta manera basándonos en el cambio de precio definiremos al retorno como el principal objeto de análisis financieros. Además, los rendimientos poseen propiedades estadísticas más atractivas que el precio, como lo son la estacionariedad y la ergodicidad.

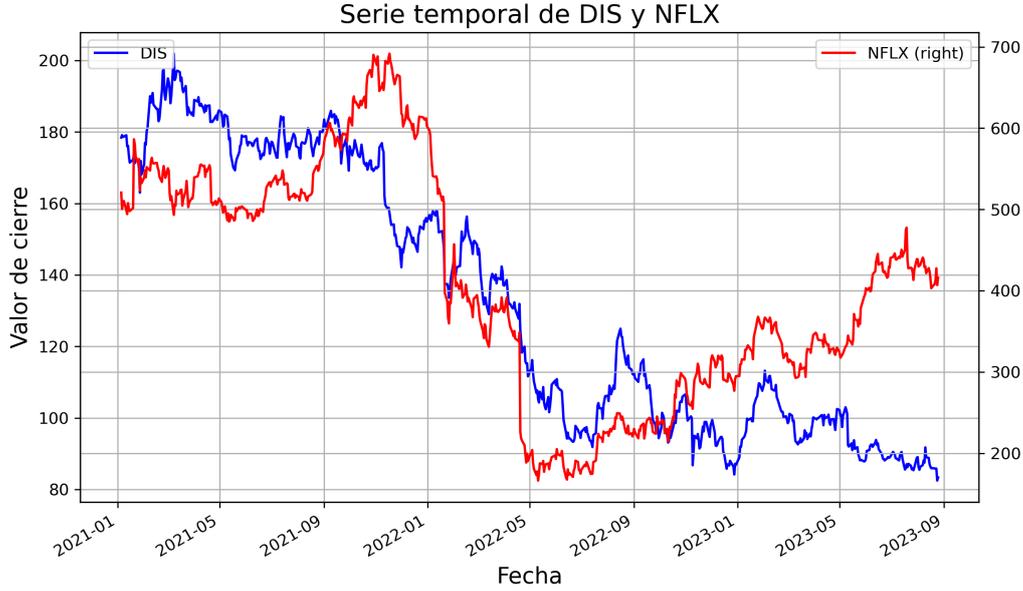
Consideremos a  $S_t$  el precio de un activo que no paga dividendos en el momento  $t$ . El rendimiento neto simple ( $R_t$ ) del activo en el intervalo de tiempo  $t - 1$  y  $t$ , se definirá por:

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1. \quad (1.7)$$

Basándonos en la definición de rendimiento neto simple, podemos definir el retorno bruto para un activo durante  $k$  periodos para el intervalo de tiempo  $t - k$  a  $t$ , como  $1 + R_t$ , que es igual al producto de los  $k$  rendimientos de un solo periodo  $t - k + 1$ , es decir:

$$\begin{aligned} R_t(k) &= 1 + R_t = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= \frac{S_t}{S_{t-1}} \cdot \frac{S_{t-1}}{S_{t-2}} \cdot \frac{S_{t-2}}{S_{t-3}} \cdots \frac{S_{t-k+1}}{S_{t-k}} \\ &= \frac{S_t}{S_{t-k}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sin embargo, recordemos que, en el ámbito profesional y el periodismo financiero, se suele



**Figura 1.5.** Análisis temporal para el valor de cierre de mercado para las acciones de The Walt Disney Company (DIS) y Netflix (NFLX) correspondientes al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023.

asumir implícitamente al horizonte de rentabilidad anual, de manera que para poder calcularlo emplearemos el promedio geométrico, que se define mediante la siguiente expresión:

$$Anualizado[R_t(k)] = \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{1/k} - 1. \quad (1.9)$$

Dado que los rendimientos de un solo período generalmente son muy pequeños, a menudo se utiliza la siguiente aproximación basada en una expansión de series de Taylor a primer orden, para anualizar los rendimientos:

$$Anualizado[R_t(k)] \approx \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}. \quad (1.10)$$

Debido a la dificultad que presenta manipular constantemente promedios geométricos, véase la ecuación (1.9), surgió la motivación por el desarrollo de un enfoque para rendimientos compuestos que permita modelar el rendimiento de activos; ésta es la noción de capitalización continua. El rendimiento compuesto continuo o rendimiento logarítmico  $r_t$  de un activo se define como el logaritmo natural del rendimiento bruto

$(1 + R_t)$ :

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}). \quad (1.11)$$

La principal ventaja de emplear los retornos logarítmicos se presenta cuando calculamos los rendimientos multi-periódicos, ya que:

$$\begin{aligned} r_t(k) &= \ln(1 + R_t(k)) = \ln[(1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}), \end{aligned} \quad (1.12)$$

por lo tanto, el rendimiento multiperíodo continuamente compuesto es simplemente la suma de los rendimientos compuestos continuos de un solo período. La capitalización es una operación multiplicativa, sin embargo, se transforman en una operación aditiva al tomar el logaritmo natural. Además, es favorable modelar el comportamiento estadístico de los rendimientos de los activos a largo plazo, debido a que es mucho más sencillo deducir las propiedades de las series temporales de procesos aditivos que de procesos multiplicativos.

Observemos que, aunque los retornos carecen de dimensionalidad, es importante resaltar que el rendimiento siempre se define con respecto a un intervalo de tiempo, por ejemplo, el rendimiento diario de la acción de Amazon. De hecho, la terminología apropiada para referirnos a  $R_t$  es la tasa de rendimiento junto al horizonte de rentabilidad [16].



# 2

## Probabilidad y variables aleatorias

### 2.1. Experimento aleatorio

El concepto básico sobre el que descansa toda la teoría de probabilidad es el de experimento aleatorio. Un experimento aleatorio  $\mathcal{E}$  es un experimento que presenta las siguientes tres propiedades:

1. tiene al menos dos posibles resultados,
2. el conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice,
3. y puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones [9].

### 2.2. Espacio muestral

Un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados, o estados de la naturaleza, de un experimento aleatorio,  $\mathcal{E}$ , es llamado espacio muestral y será denotado por  $\Omega$ . Los subconjuntos de  $\Omega$  son llamados *eventos*, y en ocasiones *sucesos*. Por ejemplo, si  $\mathcal{E}$  consiste en observar el resultado de lanzar una moneda, entonces  $\Omega = \{a, s\}$  donde  $a$  representa águila y  $s$  sol (cara y cruz) [9].

### 2.3. $\sigma$ -álgebra

Una  $\sigma$ -álgebra es un conjunto que tiene como elementos a aquellos eventos que contienen información relevante para el experimentador. El cálculo de la probabilidad de algún evento requiere, en general, del conteo de los resultados que sean favorables a la ocurrencia de dicho evento. Por esta razón, el concepto de  $\sigma$ -álgebra requiere de un procedimiento para contar, el cual está disponible en el concepto de sucesión.

Sea  $\Omega$  un espacio muestral, no vacío. Una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$  es un conjunto de subconjuntos de  $\Omega$ , denotado por  $\mathcal{F}$ , que cumple con las siguientes tres propiedades :

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .

2. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{F}$ , entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

3. Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$ .

Es importante destacar de la condición 2 solamente puede aplicarse a sucesiones, concretamente a familias numerables de eventos, y no a familias arbitrarias de elementos de  $\mathcal{F}$ . La pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  es llamada un *espacio medible*, debido a que es posible definir una medida de probabilidad sobre dicho espacio. Algunas de las principales propiedades de las  $\sigma$ -álgebra son:

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .

2. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de  $\mathcal{F}$ , entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

3. Si  $A \in \mathcal{F}$  Y  $B \in \mathcal{F}$ , entonces  $A \setminus B \in \mathcal{F}$ .

Dado un espacio muestral  $\Omega$ , la  $\sigma$ -álgebra más pequeña está dad por  $\{\Omega, \emptyset\}$  y la más grande por el conjunto potencia,  $2^{\Omega}$ , es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de  $\Omega$  [9].

## 2.4. Medida de probabilidad

El concepto de medida de probabilidad cuantifica la creencia sobre la ocurrencia del evento  $A \in \mathcal{F}$ . Una medida de probabilidad definida sobre un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  que satisface los siguientes tres axiomas, introducidos por Kolmogorov (1933) [17]:

1.  $\mathbb{P}(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ ;

2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;

3. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión en  $\mathcal{F}$  con  $A_n \cap A_m = \emptyset$  para  $n \neq m$ , entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (2.1)$$

2.5. VARIABLE ALEATORIA

Un espacio de probabilidad es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  constituida por un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  y una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  definida sobre  $\mathcal{F}$ . La medida  $\mathbb{P}$  cuantifica la creencia acerca de la ocurrencia del evento  $A \in \mathcal{F}$ . Algunas propiedades importantes de  $\mathbb{P}$  son:

1. Si  $A, B \in \mathcal{F}$  con  $A \subset B$ , entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ . En efecto,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$ .
2. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de elementos en  $\mathcal{F}$ , en el sentido  $A_n \subset A_{n+1}$  para toda  $n$ , entonces:

$$\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

3. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión decreciente de elementos de  $\mathcal{F}$ , en el sentido  $A_{n+1} \subset A_n$  para toda  $n$ , entonces:

$$\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

4. Si  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión arbitraria de elementos de  $\mathcal{F}$ , entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

ya que puede presentarse doble conteo en la suma [9].

## 2.5. Variable aleatoria

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad finito. Una variable aleatoria es una función de valor real  $X$  definida en  $\Omega$  con la propiedad de que para cada subconjunto de Borel  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$ , el subconjunto  $\Omega$  está dado por:

$$\{X \in \mathcal{B}\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in \mathcal{B}\}$$

y es una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  (una variable aleatoria puede tomar valores  $+\infty$  y  $-\infty$ .) [18] Para obtener los subconjuntos Borel de  $\mathbb{R}$ , comenzaremos con el intervalo cerrado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y añadiremos todos los demás conjuntos que sean necesarios para obtener una  $\sigma$ -álgebra.

Lo que significa que la unión de sucesiones de intervalos cerrados son un conjunto Borel. Podemos considerar a cada intervalo abierto como un conjunto de Borel, debido a que un intervalo abierto puede ser escrito como la unión de una secuencia de intervalos abiertos. Además, todo intervalo abierto (sea o no un intervalo) es un conjunto Borel debido a que cada conjunto abierto es la unión de una secuencia de intervalos abiertos. Cada conjunto cerrado es un conjunto Borel debido a que es el complemento de un conjunto abierto. Representamos a la colección de subconjuntos Borel de  $\mathbb{R}$  por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , la cual recibe el nombre de  $\sigma$ -álgebra Borel de  $\mathbb{R}$ .

Una variable aleatoria  $X$  es una cantidad numérica cuyo valor es determinado por un experimento aleatorio de escoger una  $\omega \in \Omega$ . Nos interesa la probabilidad de que  $X$  tome diferentes valores. A menudo ocurre que la probabilidad de que  $X$  tome un valor particular cero, por lo cual nos interesa que  $X$  tome un valor en algún conjunto en lugar de que la probabilidad de  $X$  tome un valor particular. Queremos  $\mathbb{P}X \in \mathcal{B}$ , ya que sabemos que  $X \in \mathcal{B}$  está en  $\mathcal{F}$  para todo  $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  de forma que la probabilidad de este conjunto esté definida [18].

### 2.5.1. Función de Distribución

La relación entre variables aleatorias y probabilidad, se caracteriza mediante cantidades numéricas. Si  $X$  es una variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , la función de distribución de  $X$  es el mapeo de  $F_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definido por

$$F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La probabilidad  $F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  es la probabilidad de que  $X$  tome un valor en el intervalo infinito  $(-\infty, x]$ . Para encontrar la probabilidad de que  $X$  tome un valor en el intervalo acotado  $(a, b]$ . Considere  $a < b$ ; de forma que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a), \end{aligned}$$

dado que el evento  $\{X \leq a\}$  es un subconjunto del evento  $\{X \leq b\}$ . Entonces

$$\mathbb{P}(\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}) = F_x(b) - F_x(a), \quad a < b.$$

Las variables aleatorias se clasifican principalmente en dos clases: variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. Una variable aleatoria discreta solamente toma un número contable de valores, además, sus funciones de distribución se asemejan

a funciones escalonadas de la forma:

$$F_x(x) = \sum_{k:x_k \leq x} p_k, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde,  $0 \leq p_k \leq 1$  para todo  $k$  y

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Mientras que una variable aleatoria  $X$  es continua si su función de distribución  $F_x$  puede escribirse de la forma:

$$F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

en donde  $f_x$  representa a la función densidad de probabilidad [19, 20, 21].

### 2.5.2. Medidas de dispersión

El *valor esperado* (o esperanza) de una variable aleatoria es el concepto más importante para el estudio de las distribuciones de probabilidad. De manera que consideraremos una variable aleatoria  $X$  definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Si  $\Omega$  es infinitamente numerable, sus elementos pueden enumerarse como una secuencia  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ , podemos definir a el *valor esperado* de una variable aleatoria discreta como:

$$\mathbb{E}[X] = \mu = \sum_{k=1}^{\infty} X(\omega_k) \mathbb{P}(\omega_k), \quad (2.2)$$

y para el caso de una variable aleatoria continua, la *esperanza* se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.3)$$

En general, se puede describir el comportamiento de un conjunto de datos mediante el uso de los momentos centrales o momentos alrededor de la media. Los momentos de una variable aleatoria  $X$  forman una colección de medidas descriptivas que pueden emplearse para caracterizar la distribución de probabilidad de  $X$  y especificar si todos los momentos de  $X$  son conocidos. A pesar de que los momentos de  $X$  pueden definirse alrededor de cualquier punto de referencia, generalmente se definen alrededor del cero o del valor esperado de  $X$ . Por lo tanto, definiremos al *n-ésimo momento central* de una

## 2.5. VARIABLE ALEATORIA

variable aleatoria discreta  $X$ , como:

$$\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mu)^n] = \sum_x (x - \mu)^n, \quad (2.4)$$

análogamente, si  $X$  es una variable aleatoria continua su  $n$ -ésimo momento se definirá por:

$$\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx. \quad (2.5)$$

Observemos que el primer momento central para cualquier variable aleatoria será cero, dado que:

$$\mu_1 = \mathbb{E}[X - \mu] = \mathbb{E}[X] - \mu = 0.$$

El segundo momento central:

$$\mu_2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2(X), \quad (2.6)$$

es conocido como la *varianza* de una variable aleatoria y se denota comúnmente por  $\sigma^2$ , constituye una medida que caracteriza la dispersión de la distribución de probabilidad correspondiente a dicha variable. La varianza mide así el grado de agrupamiento de los valores de la variable respecto a su valor medio. La relación general siguiente se utiliza frecuentemente en el cálculo de la varianza:

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2. \quad (2.7)$$

Mientras que la raíz cuadrada positiva de la varianza recibe el nombre de *desviación estándar* de una variable aleatoria  $X$ , la cual representa una medida de dispersión y constituye la variabilidad de los datos respecto a la media.

Durante el desarrollo del presente trabajo de investigación se emplearán las fórmulas muestrales para los cálculos de la varianza, desviación estándar, asimetría y curtosis, debido a que estudiaremos el desempeño de las acciones de Amazon, Netflix y Disney en un intervalo de tiempo definido.

El tercer momento central:

$$\mu_3 = \mathbb{E}[(X - \mu)^3], \quad (2.8)$$

se relaciona con la asimetría de una distribución de probabilidad. Para las distribuciones de probabilidad que presentan un solo pico, si  $\mu_3$  es menor a cero, se dice que la

distribución es *asimétrica negativamente*; si  $\mu_3$  es mayor a cero, la distribución es *asimétrica positivamente*; y si  $\mu_3$  es igual a cero, la distribución recibe el nombre de *simétrica*. Sin embargo, a menos que la distribución presente un solo pico, el conocer el valor de  $\mu_3$  no es suficiente para tener una idea de la forma de la distribución. Debido a que el tercer momento central puede brindar resultados erróneos, ya que solamente depende de las unidades en las cuales se mide la variable aleatoria  $X$ . Por lo que una medida más apropiada para la asimetría, es el tercer momento estandarizado, definido por:

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}, \quad (2.9)$$

que recibe el nombre de *coeficiente de asimetría*. El coeficiente de asimetría  $\gamma_1$  es la medida de la asimetría de una distribución de probabilidad con respecto a su dispersión. Una distribución de probabilidad es *asimétrica positiva* si  $\gamma_1$  es mayor que cero; será *asimétrica negativa* cuando  $\gamma_1$  es menor que cero; y presentará *simetría* si  $\gamma_1$  es igual a cero. Y, por último, el cuarto momento central se definirá como:

$$\mu_4 = \mathbb{E}[(X - \mu)^4], \quad (2.10)$$

y recibe el nombre de *curtosis*, este es un indicador que mide el nivel de levantamiento de una distribución de probabilidad. Sin embargo, es preferible emplear el cuarto momento estandarizando

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}, \quad (2.11)$$

como una medida relativa de la curtosis. Cuando el valor de  $\gamma_2$  es mayor a tres, la distribución presentará colas pesadas y además un pico con mayor elevación en comparación a una distribución normal, las distribuciones con una curtosis elevada son nombradas *leptocúrticas*; si el valor de  $\gamma_2$  es menor a tres, la distribución es relativamente plana y presentará colas ligeras, de manera que nombraremos a las distribuciones que presentan una baja curtosis como *platicúrticas*; mientras que una distribución será *mesocúrtica* si  $\gamma_2$  es igual a tres, debido a que no habrá presencia de colas pesadas o ligeras [18, 22].

## 2.6. Distribución normal

La distribución normal tiene un papel importante en cualquier campo de la estadística y, en particular, en la medición de riesgos en finanzas. Los parámetros más importantes que la definen son la media ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ), siendo la notación más conocida para la distribución normal  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

La distribución normal de probabilidad de una variable aleatoria continua se puede representar como un histograma de frecuencias de una forma suavizada y basada en un número grande de observaciones. A continuación, se muestra la función densidad de probabilidad para una distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.12)$$

con  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \mu < \infty$  y  $-\infty < x < \infty$ .

Tomemos en consideración que la curva normal está centrada alrededor de la media, la cual se representa por  $\mu$ . La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar, representada por  $\sigma$ . Además, la probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida  $X$  sea menor o igual a un valor específico  $x$ , está dada por la función de distribución acumulativa

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (2.13)$$

Observemos que la integral en (2.13) no puede evaluarse en forma cerrada; sin embargo, cabe señalar que la función densidad de probabilidad para una distribución normal es simétrica respecto a la media y, por lo tanto, sólo es necesario calcular y tabular las áreas de un solo lado de la media. Las áreas tabuladas son áreas a la derecha o a la izquierda de valores  $z$ , en donde  $z$  es la distancia de un valor  $x$  respecto de la media, expresada en unidades de desviación estándar. Si lo anterior es cierto, entonces

$$x = \mu + z\sigma$$

y por lo tanto

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \quad (2.14)$$

Si  $z$  localiza un punto medio a partir de la media de una variable aleatoria normal con la distancia expresada en unidades de la desviación estándar de la variable aleatoria

original, el valor medio de  $z$  tiene que ser 0 y su desviación estándar igual a 1. A  $z$  se le conoce como la *variable aleatoria normal estándar* y tiene una distribución normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Junto con la media y la desviación estándar, la curva de distribución normal presenta dos propiedades adicionales conocidas como sesgo y curtosis. Estos dos aspectos son también denominados como el tercer y cuarto momento, respectivamente.

El *sesgo* es un indicador que mide la simetría de la curva. En el caso de una curva normal, el sesgo será igual a cero (debido a que la simetría en la curva es perfecta). Si éste es distinto de cero, estará sesgada hacia la izquierda o hacia la derecha, según el signo del sesgo.

La *curtosis* es el indicador que mide el nivel de levantamiento de la curva respecto a la horizontal. Esta situación se presenta cuando existen pocas observaciones muy alejadas de la media. A este fenómeno de alta curtosis también se le conoce como *colas pesadas* o *fat tails*. La curtosis de una distribución normal perfecta es igual a 3 (debido a que en tres desviaciones estándar se cuenta con el 99.7% de las observaciones).

La simetría inherente de la distribución normal suele describirse en función de la probabilidad abarcada por un intervalo dado alrededor de la media. De esta manera, el área dentro del intervalo  $[\mu \pm \sigma]$  representa aproximadamente el 68.26% de todas las observaciones, mientras que en el intervalo  $[\mu \pm 2\sigma]$  cubre alrededor del 95.44%, y en  $[\mu \pm 3\sigma]$  se encuentra aproximadamente el 99.74% de las observaciones totales [5, 22, 23].

## 2.7. Ley de los grandes números

Consideremos una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_1, \dots, X_n$ , definidas en un mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , cada una con una media y varianza finita. Supongamos que las varianzas están uniformemente acotadas. Consideremos a  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Entonces  $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n$  converge en probabilidad a 0, es decir, dado  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Observemos que, a partir de la ley de los grandes números se puede obtener el siguiente resultado, el cual, es de particular interés:

Si,  $E[X_i] = \mu$  para toda  $i$ , entonces  $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n = (S_n/n) - \mu$ ; por lo tanto,  $S_n/n \rightarrow \mu$  en probabilidad. Cuando el valor de  $n$  es muy grande, la media aritmética de las  $n$  variables aleatorias independientes se aproxima al valor de  $\mu$ .

De manera intuitiva, la ley de los grandes números expresa lo siguiente: si consideramos a  $X_1, \dots, X_n$ , como observaciones de la realización de un único experimento, y  $n$  es un valor muy grande pero fijo, entonces, al repetir el experimento de manera independiente, la expresión  $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n$  se aproximará a cero la mayor parte del tiempo [24].

## 2.8. Teorema del límite central

Consideremos una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , las cuales poseen una media  $\mu \in \mathbb{R}$  y varianza  $\sigma^2 > 0$  en común.

Se empleará la notación de  $S_n$  para indicar la suma parcial de  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , por lo tanto, sea

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

en donde  $\mathbb{E}[\bar{S}_n] = \mu$  y  $\text{Var}[\bar{S}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$ . Por definición

$$Z_n = \frac{\bar{S}_n - \mathbb{E}[\bar{S}_n]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{S}_n]}} = \frac{\bar{S}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.16)$$

en donde  $\xrightarrow{D}$  denota convergencia en distribución. Es decir,  $Z_n$  sigue asintóticamente una distribución normal estándar [25].

## 2.9. Test de normalidad

### 2.9.1. Test de normalidad Jarque-Bera

En el análisis estadístico, es una práctica común asumir que los datos se distribuyen de manera normal. No obstante, para evaluar si una distribución de frecuencias se ajusta a una distribución normal, se han desarrollado varias pruebas de normalidad, entre las que se incluyen la prueba de Kolmogorov-Smirnov, la prueba de Weisberg-Bingham, la prueba de Shapiro-Wilk, la prueba de Jarque-Bera, entre otras. Sin embargo, en la literatura financiera se ha comprobado empíricamente que al estudiar las series

temporales de acciones se presentan sesgos distintos de cero y curtosis mayores a tres. Por lo cual se implementará la prueba de normalidad Jarque-Bera, debido a que la prueba evalúa si la distribución de un conjunto de datos difiere de una distribución normal en términos de asimetría y curtosis.

El estadístico se calcula de la siguiente forma:

$$JB = \frac{n}{6} \left( \gamma_1^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2 - 3)^2 \right) \quad (2.17)$$

en donde  $n$  representa el número de observaciones,  $\gamma_1$  denota el sesgo o medida de asimetría y  $\gamma_2$  representa a la curtosis, y se definen como

$$\gamma_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{(n-1)\sigma^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.18)$$

$$\gamma_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{(n-1)\sigma^4}. \quad (2.19)$$

JB es un estadístico de prueba que sigue asintóticamente una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad, por lo cual será necesario realizar una prueba de hipótesis, en la cual la hipótesis nula es:

- $H_0$ : Los datos siguen una distribución normal con un nivel de confianza de un 95 %,

y la hipótesis alternativa será:

- $H_1$ : Los datos no siguen una distribución normal.

Al buscar un nivel de significancia del 5% para la prueba de normalidad, recurrimos a las tablas de la distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad, donde encontramos un valor crítico de 5.99. Si el estadístico de prueba excede este umbral, se rechaza la hipótesis nula, lo que sugiere que los datos no siguen una distribución normal [5, 26].

### 2.9.2. Gráfico Q-Q

El gráfico probabilístico normal nos permite comparar la distribución empírica de un conjunto de datos con la distribución Normal. Por consiguiente, este gráfico puede ser visto como una herramienta gráfica para evaluar la normalidad de un conjunto de datos.

Para la elaboración de un gráfico de probabilidad normal emplearemos los cuantiles teóricos de una distribución normal estándar, de forma que aceptaremos la hipótesis de

normalidad en los datos si los cuantiles de la muestra presentan un comportamiento lineal.

El gráfico de probabilidad se constituye en un método gráfico que nos permite comparar la distribución de un conjunto de datos con una distribución especificada.

Partiremos de un conjunto de observaciones  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $F(x)$  la función de distribución específica. De forma que se construirá el gráfico de probabilidad mediante los siguientes pasos:

1. Se organizarán los datos de forma ascendente

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

2. Determinar los valores

$$p_i = \frac{i - 0.5}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si por  $Q_x(p)$  notamos al cuantil de orden  $p$  ( $0 < p < 1$ ) de las observaciones, tenemos que:

$$x_i = Q_x(p_i); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3. Determinar el valor de los cuantiles teóricos  $p_i$  de la distribución teórica representada por la función de distribución  $F$ , es decir:

$$Q_t(p_i) = F^{-1}(p_i); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Representar el conjunto de puntos  $(Q_t(p_i), Q_x(p_i))$ , análogamente podemos reescribir al par ordenado como  $(F^{-1}(p_i), x_i)$ .

El gráfico resultante es nombrado como gráfico de probabilidad normal o Q-Q Plot Normal. Si la distribución teórica constituye una buena aproximación de la distribución empírica, los cuantiles de la muestra se encontrarán muy próximos a los cuantiles de la distribución teórica y, por lo tanto, los puntos del gráfico se dispondrán próximos a la bisectriz del primer cuadrante. Sin embargo, puede presentarse el caso en el que los puntos no estén próximos a la recta  $y = x$ , pero los puntos se posicionen de forma rectilínea, lo que sugiere buscar el valor de constantes que produzcan un cambio de origen y/o escala en los datos, de forma que los valores resultantes produzcan una disposición de los puntos en el gráfico lo suficientemente próxima a la recta  $y = x$  [27].

# 3

## Modelo Black-Scholes-Merton

### 3.1. Teoría de la especulación

En los mercados bursátiles existe una innumerable cantidad de factores que determinan el movimiento del precio, citando algunos ejemplos de ello, son: la política, el surgimiento de nuevos competidores en un determinado sector de mercado, la innovación o incluso factores que a menudo no presentan alguna conexión clara con un determinado sector económico, por ejemplo, el clima. Además, los mercados bursátiles reaccionan a sí mismos, por lo cual, el movimiento del precio para algún determinado activo financiero, no solamente estará en función de los factores anteriormente mencionados, sino también del movimiento de los precios pasados y su valor actual. De manera que, resulta casi imposible desarrollar un modelo matemático el cual involucre a una gran diversidad de variables y además nos permita predecir con gran exactitud el comportamiento de los factores anteriormente mencionados. A pesar de las dificultades expresadas anteriormente para el desarrollo de un modelo matemático que nos permita estudiar la evolución de un activo, los especuladores apuestan a la plusvalía o minusvalía de estos activos, con la intención de poder vencer al mercado. Aunque el cálculo de probabilidades no pueda ser aplicado en los movimientos de las cotizaciones bursátiles de manera exacta, es posible estudiar matemáticamente el mercado en un instante de tiempo, como un proceso estacionario, es decir, que podemos asignar una distribución de probabilidad para las variaciones en el precio que el mercado admite en ese instante de tiempo [28].

Basado en los supuestos anteriormente planteados, en el año 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870 – 1946) bajo la dirección de Henri Poincaré, presentó su tesis doctoral titulada "*Teoría de la especulación*", en la cual presentaba como resultado un modelo que permitía estudiar el comportamiento aleatorio en los precios de las acciones que cotizaban en la bolsa de valores de París, mediante una formulación matemática para el movimiento Browniano, anticipando la formulación planteada por Albert Einstein en su artículo sobre el movimiento de partículas suspendidas en líquidos estacionarios requeridos por la teoría cinética molecular [29], presentado en 1905.

Dentro de las aportaciones más destacadas presentadas en la tesis doctoral de Louis

## 3.1. TEORÍA DE LA ESPECULACIÓN

Bachelier, encontramos: que el precio de un activo debe modelarse mediante el uso de cadenas de Markov, debido a que en ellas se supone que la distribución de los precios futuros solamente dependerá del valor actual del activo y no dependerá de sus valores pasados; él dedujo la ecuación

$$c^2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

la cual representa una ecuación diferencial parcial que satisface la densidad de transición  $\mathcal{P}$ , además demostró que era un proceso Gaussiano, y la nombró: “Radiación de Probabilidad”, redescubriendo así la ecuación diferencial parcial de calor propuesta por Joseph Fourier en 1822; obtuvo la deducción matemática del movimiento Browniano como el límite de caminatas aleatorias y además el principio de reflexión de un movimiento Browniano el cual le permitió encontrar la probabilidad de superar un determinado umbral para poder así valorar el precio de una opción [30].

Sin embargo, su trabajo no obtuvo el reconocimiento y la aprobación por parte de sus compañeros y profesores, por lo que su investigación permaneció en el olvido y no fue hasta el año de 1960 cuando el economista y profesor Paul A. Samuelson recuperó una copia de la tesis doctoral de Bachelier en la biblioteca del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) y reconoció la relevancia de su trabajo.

## 3.1.1. Movimiento Browniano

Un movimiento Browniano (o proceso de Wiener [31]) es un proceso estocástico  $W(t)$  o  $W_t$ , que es continuo para toda  $t \geq 0$ , además se encuentra definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y cumple con las siguientes propiedades:

1.  $W_0 = 0$ .
2. Cada incremento  $W_t - W_s$  en el intervalo  $t - s$  está distribuido normalmente con media cero y varianza  $t - s$ , es decir

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s),$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva, para todo  $s \leq t$ .

3. Para todos los intervalos de tiempo que no se sobrepongan, es decir,  $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$  son independientes para todo  $0 \leq t_1 \leq \dots < t_n$ .
4. Las trayectorias  $W_t$  son continuas para toda  $t$ .

## 3.1. TEORÍA DE LA ESPECULACIÓN

Además, basándonos en la propiedad 3, sabemos que  $W(s) = x_0$  y  $W(0) = 0$  son independientes, por lo cual, el conocer los valores de  $W(\tau)$ , con  $\tau < s$ , no nos proporciona información adicional para conocer el valor que tomará el incremento  $W(t) - W(s)$ , con  $t > s$ . De manera formal, decimos que para cualquier tiempo  $t$ :

$$\mathbb{P}[W(t) \geq x \mid W(t_0) = x_0, W(t_1) = x_1, \dots, W(t_n) = x_n] = \mathbb{P}[W(t) \geq x \mid W(t_n) = x_n]. \quad (3.2)$$

Es decir, el futuro (tiempo  $t$ ), dado el presente (tiempo  $s$ ), es independiente del pasado (tiempos  $s, \dots, 0$ ). La ecuación (3.2), es la probabilidad de transición o de salto del estado  $x$  al estado  $x_n$ . Y es conocida como la propiedad de Markov para un movimiento Browniano (o proceso de Wiener) [32, 31].

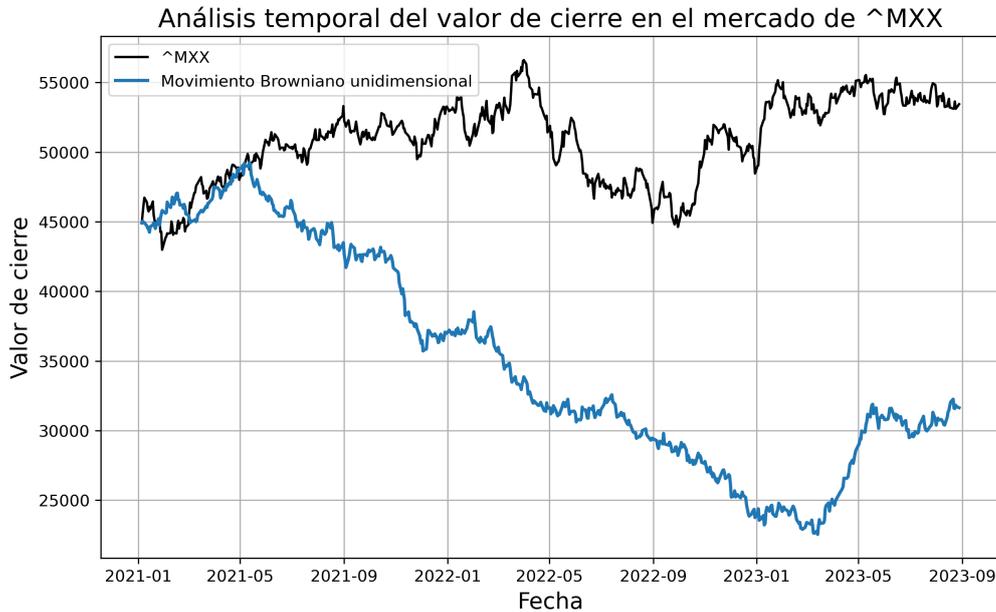
**Aplicación del movimiento Browniano en la estimación de precios de activos**

Cuando realizamos un análisis temporal para el valor de cierre de mercado de un determinado activo subyacente en un período de tiempo, y lo comparamos con el gráfico de un movimiento Browniano unidimensional, observamos una gran semejanza entre ambos gráficos, como se muestra en la Figura 3.1. Por lo cual, surge la idea de emplear el movimiento Browniano como una primera aproximación para modelar la evolución del precio de un determinado activo subyacente en el tiempo. Sin embargo, es necesario verificar que el precio cumple con las cuatro propiedades definidas de un movimiento Browniano.

Para ello, recordemos que en la primera propiedad se establece que  $W(0) = 0$ , sin embargo, este es un supuesto normalizador, lo que nos permite establecer el comienzo del movimiento Browniano unidimensional en  $S_0 = W(0)$ , por lo cual, se cumple con la primera propiedad.

Para poder verificar que la segunda propiedad se satisface, debemos comprobar que el supuesto de normalidad se cumple en los rendimientos de diversos activos financieros. En base a lo anterior, se elaboró la Figura 3.2, para ilustrar mediante un histograma la distribución de los rendimientos simples para el Índice de Precios y Cotizaciones. Además, el Teorema del Límite Central nos proporciona información adicional para verificar esta propiedad, sin embargo, al realizar un análisis estadístico riguroso se ha concluido que los rendimientos en acciones no se distribuyen normalmente. Asimismo, el suponer una varianza constante para diferentes intervalos de tiempo de igual longitud representa un error, debido a que la volatilidad en el precio de una acción es variable y no es proporcional a la duración del intervalo de tiempo.

Para poder satisfacer la tercera propiedad de un movimiento Browniano, es necesario

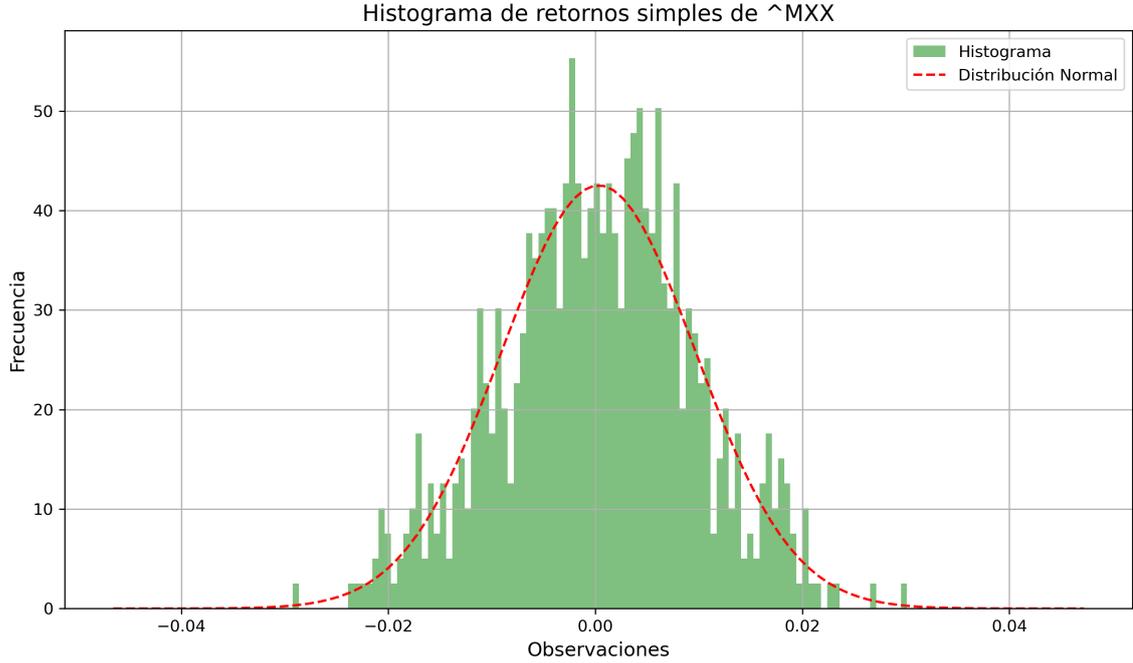


**Figura 3.1.** Análisis temporal para el valor de cierre de mercado del Índice de Precios y Cotizaciones ( $\hat{MXX}$ ) que corresponde al período del 04 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023, en comparación con una trayectoria simulada mediante el movimiento Browniano unidimensional distribuido normalmente.

mostrar que cada incremento en el precio es independiente. Lo cual, se verifica mediante la Hipótesis del Mercado Eficiente (EMH, por sus siglas en inglés Efficient Market Hypothesis) propuesta por Eugene F. Fama [33], la cual plantea que el precio de un valor para cualquier instante de tiempo refleja plenamente toda la información disponible de dicho activo.

Por último, es necesario verificar que las trayectorias generadas por los diversos productos listados en la bolsa de valores son continuas para toda  $t$ . Observemos que los valores son negociados con una granularidad de un segundo o minuto, por lo que estos pequeños incrementos pueden ser tratados discretamente, sin embargo, cuando examinamos los datos con una granularidad diaria, semanal o mensual, los incrementos a corto plazo son pequeños, lo cual nos permite estudiar las trayectorias generadas por los valores en una forma continua.

Basándonos en las propiedades de un movimiento Browniano, podemos definir un modelo que permita estudiar la evolución temporal de un determinado activo subyacente mediante un modelo estocástico. Es decir, podríamos suponer que el subyacente  $S_t$



**Figura 3.2.** Histograma de retornos simples del Índice de Precios y Cotizaciones ( $\hat{MXX}$ ). Para su elaboración se empleó una muestra de 666 rendimientos diarios correspondiente al 04 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023.

evoluciona en el tiempo como si fuera el mismo movimiento Browniano, de manera que

$$S_t = W_t,$$

en términos de una ecuación diferencial estocástica, obtenemos

$$dS_t = dW_t. \quad (3.3)$$

Sin embargo, la ecuación (3.3) no describe por completo la información presente en una serie temporal, por lo que nuestro objetivo será proporcionar un modelo que defina los movimientos del precio a lo largo del tiempo. De manera que incluiremos un parámetro que incorpore la incertidumbre sobre los resultados futuros a nuestra componente aleatoria, además, es necesario especificar la tasa de rendimiento media que ha presentado nuestro activo durante un periodo de tiempo determinado. Bajo las siguientes consideraciones, ahora podemos escribir una ecuación diferencial estocástica que describa los incrementos en el precio de la siguiente forma:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad (3.4)$$

donde  $\mu(S_t, t)$  y  $\sigma(S_t, t)$  son funciones deterministas que definen la deriva y la volatilidad en función del tiempo actual ( $t$ ) y el precio ( $S_t$ ), donde  $W_t$  representa un movimiento Browniano estándar. De manera equivalente, podemos expresar a la ecuación 3.4 en su forma integral:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(S_s, s)ds + \int_0^t \sigma(S_s, s)dW_s. \quad (3.5)$$

Observemos que en la ecuación (3.5) el precio del activo subyacente ( $S_t$ ) evoluciona conforme a dos parámetros. El primero de ellos es la *deriva*, la cual define el movimiento determinista del activo a lo largo del tiempo, este puede depender del tiempo y del valor actual del activo. Y el segundo parámetro representa la *volatilidad* o *incertidumbre* en el proceso estocástico [32, 34, 35, 36].

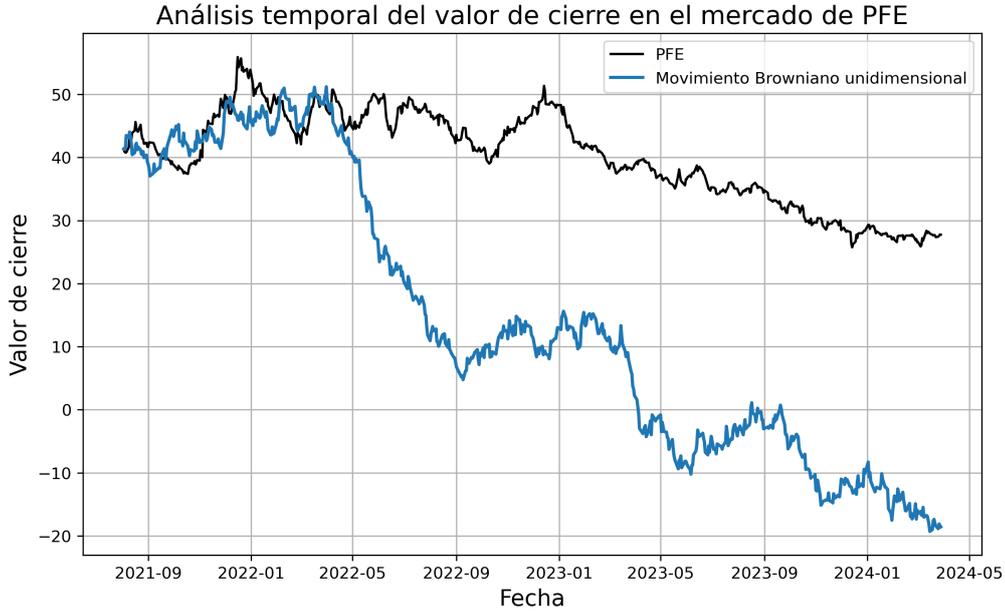
### 3.2. Movimiento Geométrico Browniano

A pesar de que el movimiento Browniano constituye una de las bases fundamentales en los modelos de riesgos financieros y económicos, éste no puede, por sí mismo representar el comportamiento de todas las variables financieras presentes en los modelos aplicados a finanzas. Debido a que los precios de los activos no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero y además el supuesto de normalidad ignora la posibilidad de que el precio de un activo pueda tomar un valor negativo, como se muestra en la Figura 3.3. Además, sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o podrían tener varianzas que no necesariamente sean proporcionales al tiempo.

Como una alternativa de solución a los inconvenientes mencionados anteriormente se definió el movimiento geométrico Browniano, el cual se obtiene mediante una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Sin embargo, es necesario definir una ecuación diferencial estocástica que satisfaga lo anteriormente mencionado. Por lo que nos apoyaremos en un modelo discreto de precios para activos sin riesgo, con el fin de obtener un modelo continuo y después replicarlo para el caso de un activo con riesgo.

Consideremos un activo sin riesgo ( $S$ ), con fecha de vencimiento  $T$ , de manera que nos interesa conocer como varía  $S$  en el intervalo de tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ . Debido a la ausencia de riesgo presente en el activo, el valor de  $S(t + \Delta t)$  será la capitalización del valor de  $S(t)$  a un determinado tipo de interés ( $\mu$ ), por lo cual obtendremos que:

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \mu S(t)\Delta t.$$



**Figura 3.3.** Análisis temporal para el valor de cierre de mercado para la acción de Pfizer (PFE) que corresponde al período del 02 de agosto del 2021 al 28 de marzo del 2024, en comparación con una trayectoria simulada mediante el movimiento Browniano unidimensional distribuido normalmente.

Observemos que ahora podemos determinar la variación relativa en el intervalo de tiempo de nuestro interés, de manera que:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t. \quad (3.6)$$

Al tomar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el valor del activo satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad (3.7)$$

Sabemos que al resolver la ecuación (3.7), obtendremos como resultado la capitalización del activo a una tasa de interés continuo. Cabe resaltar que nuestro objetivo principal es obtener un modelo de precios para activos con riesgo. De manera que ahora emplearemos como punto de partida la Hipótesis de Mercado Eficiente, la cual plantea que el valor actual del activo refleja plenamente toda la información de dicho activo, además, el mercado responde de manera instantánea a cualquier nueva información sobre el mismo.

Como se planteó anteriormente en la subsección 3.1.1, es necesario incluir una componente aleatoria y un parámetro que mida la incertidumbre en (3.7). Por lo que, al

añadir estos parámetros, obtendremos:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (3.8)$$

En donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes. Este proceso recibe el nombre de *Movimiento Geométrico Browniano*. A través de este enfoque podemos asumir que los precios siguen una distribución log-normal y que los rendimientos se distribuyen normalmente. Cabe señalar que el parámetro,  $\sigma$ , define la volatilidad del activo. Mientras que  $\mu$  es la tasa de crecimiento promedio [37].

De manera que, ahora nuestro principal interés es resolver de forma exacta la ecuación diferencial estocástica (3.8). Debemos tomar en cuenta que la solución de la ecuación diferencial estocástica para un movimiento geométrico Browniano deberá reproducir la solución para un activo libre de riesgo cuando consideremos la ausencia de volatilidad en el activo. Tengamos en mente que podemos reescribir el lado izquierdo de la ecuación (3.8) como la derivada del  $\ln(S_t)$ , obteniendo así la siguiente expresión:

$$d(\ln S_t) = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (3.9)$$

Por consiguiente, el Lema de Itô [38] nos permite calcular una expresión explícita para  $S_t$  en todo tiempo  $t$ . Debido a la delimitación del proyecto de investigación, sólo se presentará la solución de la ecuación (3.9), si el lector desea desarrollar los cálculos para verificar la solución le sugerimos consultar la referencia [38]. Cuya solución estará dada por:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad (3.10)$$

la cual tiene una forma cerrada para el precio de los activos según el modelo de Black - Scholes. Tenga en cuenta que si hacemos la consideración de que nuestro activo es libre de riesgo, obtenemos la solución de la ecuación (3.7).

Ahora, observemos que el comportamiento asintótico de la ecuación (3.10) dependerá del término  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ , debido a que este término depende linealmente del tiempo. Mientras que la parte estocástica dependerá del movimiento Browniano estándar  $W_t$  que crece proporcional a la  $\sqrt{t}$ , es decir:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\xi} \quad (3.11)$$

donde  $\xi$  se distribuye  $\mathcal{N}(0,1)$ . Por lo cual encontraremos tres casos de estudio para (3.11), cuando  $\mu < \frac{1}{2}\sigma^2$ , se observará una tendencia decreciente en la serie temporal del activo, como se ilustra en la Figura 3.4 (a). Por otro lado, si  $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$ , se evidencia un

crecimiento en la serie temporal del activo, véase la Figura 3.4 (b). En el caso en que  $\mu = \frac{1}{2}\sigma^2$ , el modelo depende exclusivamente del movimiento Browniano estándar y la volatilidad, lo que resulta en cambios abruptos en la serie temporal en intervalos de tiempo pequeños, tal como se muestra en la Figura 3.4 (c).

### 3.3. Deducción del modelo Black-Scholes-Merton

A principios de la década de los setenta, Fisher Black (físico – matemático doctorado en Harvard), Myron Scholes (matemático y economista financiero) y Robert C. Merton (economista y profesor de matemáticas en MIT) dedujeron una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, mediante la formulación de una cartera libre de riesgo, construida a través de una cobertura dinámica, empleando como activos principales una opción y una estrategia de colocación de activos en el mercado.

Sin embargo, para poder deducir una fórmula para la valuación de una opción europea en términos del precio del activo, es necesario asumir condiciones ideales en el mercado para la acción y la opción:

1. La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante en el tiempo.
2. El precio de la acción sigue una caminata aleatoria en tiempo continuo con una tasa de varianza proporcional al cuadrado del precio de la acción. Por lo tanto, la distribución de los posibles precios de la acción al final de cualquier intervalo finito es log-normal. La tasa de varianza del rendimiento de la acción es constante.
3. La acción no paga dividendos ni otras distribuciones.
4. La opción es europea, es decir, sólo se puede ejercer al vencimiento.
5. No existen costos de transacción al comprar o vender la acción o la opción.
6. Es posible pedir prestada cualquier fracción del precio de un valor para comprarlo o mantenerlo, a la tasa de interés a corto plazo.
7. No hay penalizaciones por ventas en corto. Un vendedor que no posee un valor simplemente aceptará el precio del valor de un comprador y acordará liquidar con el comprador en una fecha futura pagando una cantidad igual al precio del valor en esa fecha.

Bajo estos supuestos, el valor de la opción dependerá únicamente del precio de la acción y el tiempo; aunque en el modelo se consideran variables adicionales, se asumirán

constantes. Por lo tanto, es posible crear una cobertura que se conforme de una posición larga en la acción y una posición corta para la opción, cuyo valor solo dependerá del tiempo. Por lo tanto, considere un portafolio  $\Pi(S_t, t)$  conformado por:

$$\Pi(S_t, t) = V(S_t, t) - \Delta S_t, \quad (3.12)$$

en donde,  $V(S, t)$  representa el valor de una opción europea y  $S_t$  es el valor de una acción. Debido a que estamos construyendo una cartera que cubra el riesgo generado por la opción, es necesario adquirir  $\Delta$  unidades de  $S_t$  para protegernos ante la incertidumbre presente en el activo. A continuación, estudiaremos como evoluciona el portafolio  $\Pi(S_t, t)$  a lo largo del tiempo, por lo que nos interesa conocer el valor de  $d\Pi(S_t, t)$ :

$$d\Pi(S_t, t) = dV(S_t, t) - \Delta dS_t. \quad (3.13)$$

Ahora, observemos que necesitamos definir cómo evoluciona el valor de la opción en el tiempo en función de sus componentes, por ende, calculemos el valor de  $dV$ :

$$dV = V(S(t + \Delta t), t + \Delta t) - V(S(t), t).$$

Suponiendo que  $V(S(t), t)$  tiene derivadas parciales continuas de al menos segundo orden. Realicemos una expansión en series de Taylor para la función multivariada  $V(S(t + \Delta t), t + \Delta t)$ , obteniendo así:

$$dV = V(S_t, t) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S_t} (dt)(dS_t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right] - V(S_t, t)$$

Se podría asumir por el cálculo clásico que todos los términos de orden superior en la expresión anterior son insignificantes. Sin embargo, debido a la variación cuadrática del movimiento Browniano el término  $(dS_t)^2$  es del orden de  $\mathcal{O}(dt)$ . Por consiguiente

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2. \quad (3.14)$$

Cabe señalar que es necesario identificar un modelo que satisfaga el supuesto 2 para las condiciones ideales del mercado, note que el movimiento geométrico Browniano cumple con estas condiciones, por consiguiente, al reemplazar la ecuación (3.8) en (3.14), se

obtiene una expresión para el cambio en el valor de la opción:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Véase que sólo existe un único término que se encuentra expuesto a la aleatoriedad en la ecuación (3.15), por ende, si poseemos una unidad de un contrato de opciones  $V(S, t)$ , entonces será necesario adquirir  $-\frac{\partial V}{\partial S_t}$  unidades de  $S_t$  para construir una cartera inmune a la aleatoriedad presente por el término  $dW_t$ . Dado que el modelo Black-Scholes asume que esta es la única fuente de aleatoriedad, la cartera es libre de riesgo. De manera que podemos escribir la ecuación (3.13) como:

$$d\Pi(S_t, t) = dV(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t,$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.15) y (3.8) en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t - \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dt \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Donde los dos términos que involucran a  $dW_t$  se cancelan, debido a la cobertura delta. Por lo cual, la principal característica en la evolución de nuestro portafolio será la ausencia del proceso estocástico. Por este motivo podemos asumir que nuestro portafolio deberá generar el mismo rendimiento que un activo libre de riesgo. Sin embargo, si nuestro portafolio  $\Pi(S_t, t)$  genera un rendimiento superior al activo libre de riesgo, existirá una oportunidad de arbitraje, debido a que alguien podría adquirir nuestro portafolio para venderlo al valor de un activo libre de riesgo, obteniendo así una ganancia sin asumir ningún riesgo. Para evitar esto, podemos agregar la siguiente condición en la evolución de nuestra cartera delta:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (3.17)$$

$$d\Pi = r \left( V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dt. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, hemos podido deducir dos expresiones distintas para describir la evolución

de nuestro portafolio  $\Pi(S_t, t)$ ; la primera de ellas basada en la dinámica del activo subyacente mediante el movimiento geométrico Browniano y la segunda mediante el argumento de no arbitraje. Lo que significa que el valor de los portafolios debería ser el mismo, por lo tanto, al igualar las ecuaciones (3.16) y (3.18), se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} = rV - rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t}.$$

Reordenando términos, obtenemos como resultado la famosa ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal de Black-Scholes-Merton.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \quad (3.19)$$

Cabe señalar que la mayoría de los modelos financieros carecen de una solución analítica, por lo que es necesario emplear métodos numéricos para solucionarlos. Sin embargo, el modelo Black-Scholes-Merton es una excepción, debido a que podemos proponer cambios de variable específicos para poder encontrar una relación entre la ecuación (3.19) y la ecuación de difusión de calor, para así obtener la célebre fórmula Black-Scholes [6, 19, 35].

## 3.3. DEDUCCIÓN DEL MODELO BLACK-SCHOLES-MERTON



(a)



(b)



(c)

**Figura 3.4.** (a) Presencia de una tendencia bajista en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado de la acción The Walt Disney Company (DIS), correspondientes al período de agosto del 2021 a mayo del 2024. (b) Presencia de una tendencia alcista en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado de la acción de NVIDIA Corporation (NVDA), correspondientes al período de agosto del 2021 a marzo del 2024. (c) Predominancia de la componente estocástica en el análisis temporal para el valor de cierre de mercado del Volatility Index ( $\hat{VIX}$ ), correspondientes al período de agosto del 2021 a abril del 2024.



# 4

## Fórmula Black-Scholes y su origen en la ecuación de calor

**Nota:** Es importante mencionar que durante el desarrollo del capítulo, se utilizaron conceptos e ideas del libro “*Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*” de Francisco Venegas Martínez [9].

### 4.1. Modelo Black-Scholes para una opción de compra europea

En el año de 1973, Fisher Black y Myron Scholes publicaron un artículo en “The Journal of Political Economy”, en este artículo presentaron un modelo matemático que permitía describir la evolución de los precios de un activo subyacente en el tiempo y establecer el valor teórico de una opción de compra o venta mediante una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, la cual se define como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0, \quad (4.1)$$

junto a la condición de frontera

$$c(S_t, T) = \text{máx}(S_t - K, 0), \quad (4.2)$$

donde la variable  $c$  representa el precio de compra de una opción europea, que se define como  $c = c(S_t, t)$ ,  $r$  representa la tasa libre de riesgo,  $\sigma$  es la volatilidad del activo subyacente y  $S_t$  representa el precio de un activo subyacente al tiempo  $t$  y que además sigue un movimiento geométrico Browniano.

Sin embargo, observemos que no podemos resolver la ecuación diferencial anterior mediante el método de separación de variables, debido a que los coeficientes de la ecuación (4.1) son variables y de forma polinómica, por lo cual consideraremos los siguientes cambios de variables, que nos permitirán eliminar a los términos  $S_t$  y  $S_t^2$ .

Sean los cambios de variable de la forma

$$S_t = Ke^{x_t}, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad y \quad \kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (4.3)$$

Venegas [9] explica que las nuevas variables  $x_t$  y  $\tau$ , representan, respectivamente la diferencia entre el logaritmo del precio del activo subyacente con el logaritmo del precio de ejercicio y a el tiempo invertido yendo a la fecha de vencimiento multiplicado por un factor constante,  $\frac{1}{2}\sigma^2$ .

$$x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t). \quad (4.4)$$

El precio de la opción bajo estos cambios de variable se denotará mediante

$$\begin{aligned} c(S_t, T) &= \text{máx}(S_t - K, 0) \\ &= \text{máx}(Ke^{x_t} - K, 0) \\ &= K\nu(x_t, \tau). \end{aligned} \quad (4.5)$$

A continuación, se procederá a realizar el cálculo de las derivadas parciales de  $c$  respecto de  $t$  y  $S_t$ , en términos de las nuevas variables  $\nu$ ,  $\tau$  y  $x_t$ , empleando la regla de la cadena y los cambios de variable propuestos en (4.4). Sea

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} Kc(x_t, \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \right) \right] = -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial \nu}{\partial \tau}. \quad (4.6)$$

De manera análoga se procederá a realizar el cálculo de la derivada parcial de  $c$  respecto de  $S_t$ , mediante el cambio de variable propuesto en (4.4)

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = \frac{\partial c}{\partial x_t} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_t} K\nu(x_t, \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial S_t} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \right] = \frac{K}{S_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}.$$

Sin embargo, note que podemos reescribir el cociente de  $S_t$  y  $K$ , como:

$$e^{x_t} = \frac{S_t}{K} \Rightarrow e^{-x_t} = \frac{K}{S_t}, \quad (4.7)$$

por lo cual podemos reescribir a la derivada parcial de  $c$  respecto a  $S_t$ , como:

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}. \quad (4.8)$$

Por último, calcularemos la segunda derivada parcial de  $c$  respecto a  $S_t$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left[ e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right] \cdot \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \\
 &= \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \left[ -e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + e^{-x_t} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{S_t} \left[ -e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + e^{-x_t} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{K} \left( -e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right),
 \end{aligned}$$

empleando la ecuación (4.7), podemos reescribir a la segunda derivada parcial de  $c$  respecto de  $S_t$ , como:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{e^{-2x_t}}{K} \left( -\frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right). \quad (4.9)$$

Reescribiendo la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en términos de las nuevas variables, sustituiremos las derivadas parciales (4.5),(4.6),(4.8) y (4.9) en la ecuación (4.1), obteniendo como resultado:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 e^{2x_t} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \left( \frac{e^{-2x_t}}{K} \right) + K r e^{x_t} e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + r K \nu = 0, \quad (4.10)$$

al simplificar la ecuación (4.10) tenemos

$$-\frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \nu = 0.$$

En virtud de la definición de  $\kappa$  propuesta en (4.3) y agrupando términos semejantes, el modelo se reduce a

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \kappa \nu. \quad (4.11)$$

Observemos que después del primer cambio de variable los coeficientes de la ecuación (4.11) no dependen de las variables  $x_t$  o  $\tau$ , además existe una similitud a la ecuación diferencial de la difusión de calor. Sin embargo, para que la ecuación (4.11) se convierta en la ecuación de difusión de calor, se propondrá un segundo cambio de variable de la forma:

$$\nu(x_t, \tau) = u(x_t, \tau) e^{\alpha x_t + \beta \tau}, \quad (4.12)$$

en donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. De forma análoga, se procederá a calcular las derivadas parciales de  $\nu$  respecto de  $\tau$  y  $x_t$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ u(x_t, \tau) e^{\alpha x_t + \beta \tau} \right] \\ &= \beta u e^{\alpha x_t + \beta \tau} + e^{\alpha x_t + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau},\end{aligned}$$

al factorizar términos semejantes, obtenemos:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right). \quad (4.13)$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial x_t} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ u(x_t, \tau) e^{\alpha x_t + \beta \tau} \right] \\ &= \alpha u e^{\alpha x_t + \beta \tau} + e^{\alpha x_t + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x_t},\end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_t} = e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x_t} \right). \quad (4.14)$$

Y por último

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) \right] \\ &= \alpha e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) + e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \right),\end{aligned}$$

tenemos

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} = e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \right). \quad (4.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) en la ecuación (4.11), se obtiene

$$\begin{aligned}e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \right) \\ &\quad + (\kappa - 1) e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) - \kappa u e^{\alpha x_t + \beta \tau} \\ \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) - \kappa u \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -u \left[ \beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa \right] + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial u}{\partial x_t}.\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -u \left[ \beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa \right] + (2\alpha + \kappa - 1) \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \quad (4.16)$$

Escogemos adecuadamente el valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (4.16) de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$2\alpha + \kappa - 1 = 0 \quad (4.17)$$

y

$$\beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa = 0. \quad (4.18)$$

De la condición (4.17), podemos obtener el valor de  $\alpha$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa - 1), \quad (4.19)$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  en la condición (4.18), y despejando el valor de  $\beta$

$$\begin{aligned} 0 &= \beta - \left[ -\frac{1}{2}(\kappa - 1) \right]^2 - (\kappa - 1) \left[ -\frac{1}{2}(\kappa - 1) \right] + \kappa \\ 0 &= \beta + \frac{1}{4}(\kappa - 1)^2 + \kappa \\ -\beta &= \kappa + \frac{1}{4}(\kappa^2 - 2\kappa + 1) \\ \beta &= -\frac{1}{4}(\kappa^2 + 2\kappa + 1), \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\beta = -\frac{1}{4}(\kappa + 1)^2. \quad (4.20)$$

Al sustituir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación (4.16) obtendremos como resultado la ecuación de difusión de calor, lo que nos permitirá poder resolver el modelo Black-Scholes para una opción de compra, debido a que las soluciones a la ecuación de calor son conocidas.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < \infty, \quad \tau > 0, \quad (4.21)$$

## 4.2. Transformada de Fourier

Sin embargo, para resolver la ecuación de difusión del calor, utilizaremos la Transformada de Fourier. Recordemos que la Transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es un operador en el espacio de funciones con valores complejos a funciones con valores complejos [39].

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . La Transformada de Fourier de  $f$  se denota por  $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$  donde

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f(x, t)] = \hat{f}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx. \quad (4.22)$$

De manera similar, la transformada inversa de Fourier de  $f$  se denota por  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)]$  donde

$$f(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega. \quad (4.23)$$

## 4.3. Solución de la ecuación de calor en el dominio infinito

Como siguiente paso para poder solucionar el modelo de Black-Scholes, nos enfocaremos en resolver la ecuación diferencial de difusión de calor en el dominio infinito, para ello partiremos de la ecuación (4.21)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2},$$

junto con la condición inicial

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = \text{máx} \left( e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0 \right), \quad (4.24)$$

ya que

$$\nu(x_t, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} u(x_t, \tau). \quad (4.25)$$

Y condiciones de frontera

$$u = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x_t \rightarrow \infty, \\ 0, & \text{cuando } x_t \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_t} = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x_t \rightarrow \infty, \\ 0, & \text{cuando } x_t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.27)$$

Aplicando el operador  $\mathcal{F}$  a la ecuación (4.21), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) e^{-i\omega x_t} dx_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \right) e^{-i\omega x_t} dx_t. \quad (4.28)$$

Integrando por partes el lado derecho de la ecuación (4.28) y usando derivación bajo el signo integral ( o la regla de integración de Leibniz [40]) en el lado izquierdo, obtenemos

$$\frac{d}{d\tau} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x_t} dx_t \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) e^{-i\omega x_t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \left( \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) e^{-i\omega x_t} dx_t,$$

evaluando la condición (4.27), obtenemos que el primer término del lado derecho de la igualdad es cero, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x_t} dx_t \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) e^{-i\omega x_t} dx_t \\ \frac{d\hat{u}}{d\tau} &= \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_t} \right) e^{-i\omega x_t} dx_t \\ \frac{d\hat{u}}{d\tau} &= i\omega u e^{-i\omega x_t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x_t} dx_t, \end{aligned}$$

de manera similar al evaluar la condición (4.26), el primer término del lado derecho de la igualdad es cero, en consecuencia:

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = -\omega^2 \hat{u}, \quad (4.29)$$

observemos que al emplear el método de la Transformada de Fourier para resolver la ecuación (4.21) se obtiene como resultado una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Al resolver la ecuación (4.29) se obtiene

$$\hat{u}(\omega, \tau) = \hat{u}(\omega, 0) e^{-\omega^2 \tau}. \quad (4.30)$$

Por otro lado, para hallar el valor de  $\hat{u}(\omega, 0)$ , emplearemos la definición de Transformada de Fourier. Sea

$$\hat{f}(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s, 0) e^{-i\omega s} ds = \hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-i\omega s} ds. \quad (4.31)$$

En consecuencia,

$$\hat{u}(\omega, \tau) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 \tau}. \quad (4.32)$$

El resultado (4.32) es una solución a la ecuación de difusión de calor, sin embargo, la solución se encuentra en el dominio de frecuencias  $\omega$ , para poder obtener una solución en términos de  $x_t$ , emplearemos la Transformada de Fourier inversa. Aplicando el operador  $\mathcal{F}^{-1}$  a la ecuación (4.32), obtenemos

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 \tau} e^{i\omega x} d\omega.$$

Reemplazando el valor de  $\hat{f}(\omega)$  en la expresión anterior

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-i\omega s} ds \right] e^{-\omega^2 \tau} e^{i\omega x_t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\omega^2 \tau + i\omega(x_t - s)} d\omega ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\left(\omega\sqrt{\tau} + \frac{(x_t - s)}{2i\sqrt{\tau}}\right)^2 - \left(\frac{(x_t - s)}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} d\omega ds, \end{aligned}$$

considere el cambio de variable

$$\gamma = \omega\sqrt{\tau} + \frac{x_t - s}{2i\sqrt{\tau}} \quad \rightarrow \quad d\gamma = \sqrt{\tau} d\omega,$$

al evaluar los límites de integración en nuestro cambio de variable, notaremos que estos seguirán tendiendo a  $-\infty$  y  $\infty$ . Sustituyendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\gamma^2 - \left(\frac{(x_t - s)}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} d\gamma ds, \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\left(\frac{(x_t - s)}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} ds \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2} d\gamma \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\left(\frac{(x_t - s)}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} ds \right] [\sqrt{\pi}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tau}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x_t - s)^2}{4\tau}} ds. \end{aligned}$$

La solución de ecuación de calor, estará dada por

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s - x_t)^2}{4\tau}} ds. \quad (4.33)$$

## 4.4. Solución del modelo Black-Scholes mediante la solución de la ecuación de calor

Observemos que la ecuación (4.33) se asemeja a la esperanza de una variable aleatoria que se distribuye  $Y \sim \mathcal{N}(x_t, 2\tau)$ , con  $u(x_t, \tau) = \mathbb{E}[u_0(Y)]$ . Nótese que la ecuación (4.33) puede reescribirse como una distribución normal reducida, mediante el uso del siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow y\sqrt{2\tau} + x_t = s \Rightarrow \sqrt{2\tau}dy = ds,$$

al evaluar los límites de integración en nuestro cambio de variable, notaremos que estos seguirán tendiendo a  $-\infty$  y  $\infty$ . Sustituyendo el cambio de variable

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x_t) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (4.34)$$

Recordemos que  $u_0$  se define mediante la expresión (4.24), reescribiendo la ecuación (4.34) en términos de la condición (4.24) obtenemos:

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left( e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)}, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (4.35)$$

Sin embargo, la función  $\max$  se encuentra definida para valores mayores que cero, por lo que es necesario buscar el intervalo en el cual la función es distinta de cero, para ello propondremos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} &> 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) &> \frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} &> -\frac{1}{2}x_t - \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} \\ \Rightarrow y &> -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned}$$

Reemplazando la expresión anterior en el límite inferior de la ecuación (4.35), obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) - \frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) - \frac{1}{2}y^2} dy, \end{aligned}$$

de manera que

$$u(x_t, \tau) = I_1 - I_2. \quad (4.36)$$

Así, las integrales  $I_1$  e  $I_2$  se calcularán en forma separada. Calculemos  $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y^2-y(\kappa+1)\sqrt{2\tau}]} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[y^2-y(\kappa+1)\sqrt{2\tau}+\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2-\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right]} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[y-\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)\right]^2} dy. \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau} \Rightarrow d\xi = dy, \\ \xi\left(-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}\right) &= -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{\sqrt{2\tau}}(\kappa+1)\tau ; \quad \xi(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Al reemplazar el cambio de variable propuesto anteriormente junto a los nuevos límites de integración, se puede reescribir a  $I_1$  como

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\ &= e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \left[ 1 - \Phi\left(-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi\left(\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right). \end{aligned}$$

Observemos que, mediante el cambio de variable propuesto, la integral original se ha reducido a la función de distribución acumulativa para una distribución normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ . De manera que la solución para  $I_1$  estará dada por:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(d_1), \quad (4.37)$$

4.4. SOLUCIÓN DEL MODELO BLACK-SCHOLES MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR

CAPÍTULO 4. FÓRMULA BLACK-SCHOLES Y SU ORIGEN EN LA ECUACIÓN DE CALOR

con

$$d_1 = \frac{x_t + (\kappa + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (4.38)$$

De forma análoga realizamos el cálculo para  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} e^{\frac{1}{2}y(\kappa-1)(\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y^2-y(\kappa-1)(\sqrt{2\tau})]} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\left[y^2-y\sqrt{2\tau}(\kappa-1)+\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2-\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right]} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[y-\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)\right]^2} dy. \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right) \Rightarrow d\xi = dy, \\ \xi\left(-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}\right) &= -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}; \quad \xi(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Sustituyendo el cambio de variable propuesto en la expresión anterior y los nuevos límites de integración en  $I_2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)\right] \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi\left(\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right). \end{aligned}$$

De manera similar,  $I_2$  se ha reducido a la función de distribución acumulativa de una distribución normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Así que  $I_2$  estará dada por:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(d_2), \quad (4.39)$$

con

$$d_2 = \frac{x_t + (\kappa - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (4.40)$$

Ahora bien, escribiendo las ecuaciones (4.38) y (4.40) en términos del cambio de variable propuesto en (4.3), se tiene que  $d_1$  queda dado por

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x_t + (\kappa + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

y  $d_2$  está dado por:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{x_t + (\kappa - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.4. SOLUCIÓN DEL MODELO BLACK-SCHOLES MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR

CAPÍTULO 4. FÓRMULA BLACK-SCHOLES Y SU ORIGEN EN LA ECUACIÓN DE CALOR

Es importante señalar que podemos reescribir a la ecuación (4.42) en términos de la ecuación (4.41), para ello partiremos de la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned}
 & d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} - \sigma\sqrt{T-t} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} - \sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2.
 \end{aligned}$$

Así, que la diferencia propuesta anteriormente nos provee una nueva forma de reescribir a la ecuación (4.42), lo cual proporciona una ventaja computacional para calcular el valor de  $d_2$ . Por lo que  $d_2$  puede expresarse como:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (4.43)$$

Sustituyendo (4.37) y (4.39) en (4.36) obtenemos

$$u(x_t, \tau) = e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1) + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}\Phi(d_2). \quad (4.44)$$

En donde la ecuación (4.44) es una solución para la ecuación de difusión de calor, sin embargo, al reemplazar los cambios de variables propuestos en (4.5) y (4.25) para obtener la solución al modelo Black-Scholes. Sustituyendo (4.44) en (4.25), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \nu(x_t, \tau) &= e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2} \left[ e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1) + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}\Phi(d_2) \right] \\
 &= e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2 + \frac{1}{2}x_t(\kappa+1) + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\Phi(d_1) \\
 &\quad - e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2 + \frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}\Phi(d_2).
 \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene que

$$\nu(x_t, \tau) = e^{x_t} \Phi(d_1) - e^{-\tau\kappa} \Phi(d_2), \quad (4.45)$$

sustituyendo (4.45) en (4.5), obtenemos

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= K\nu(x_t, \tau) \\ &= K [e^{x_t} \Phi(d_1) - e^{-\tau\kappa} \Phi(d_2)] \\ &= Ke^{x_t} \Phi(d_1) - Ke^{-\tau\kappa} \Phi(d_2). \end{aligned}$$

Por lo cual, al reemplazar los cambios de variables propuestos en (4.3) se obtiene la solución para el modelo Black-Scholes de una opción de compra.

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (4.46)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

## 4.5. Modelo Black-Scholes para una opción de venta europea

Considere la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes del precio de una opción europea de venta,  $p = p(S_t, t)$ , la cual está dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial p}{\partial S_t} - rp = 0, \quad (4.47)$$

junto con la condición de frontera

$$p(S_t, T) = \max(K - S_t, 0). \quad (4.48)$$

Observemos que las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.47) son idénticas, sin embargo, sus condiciones de frontera difieren por un signo menos, por lo que emplearemos el

siguiente cambio de variable

$$S_t = Ke^{x_t}, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad y \quad \kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (4.49)$$

De manera que, al expresarlas en términos de las nuevas variables  $x_t$  y  $\tau$ , se obtienen

$$x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t). \quad (4.50)$$

Y al sustituir éstos últimos en la condición de frontera obtenemos

$$\begin{aligned} p(S_t, T) &= \text{máx}(K - S_t, 0) \\ &= \text{máx}(K - Ke^{x_t}, 0) \\ &= K\nu(x_t, 0), \end{aligned} \quad (4.51)$$

con

$$\nu(x_t, 0) = \text{máx}(1 - e^{x_t}, 0). \quad (4.52)$$

De forma que, el precio de una opción bajo estos cambios de variable se denotará mediante

$$P(S_t, t) = -K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) = -K\nu(x_t, \tau). \quad (4.53)$$

A continuación se procederá a realizar el cálculo de las derivadas parciales de  $p$  respecto de  $t$  y  $S_t$ , en términos de las nuevas variables, mediante la regla de la cadena y el cambio de variable propuesto en (4.49). Considere

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} K\nu(x_t, \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \right) \right] = \frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial \nu}{\partial \tau}. \quad (4.54)$$

Por otro lado, calculemos la derivada parcial de  $p$  con respecto de  $S_t$ , mediante los cambios de variables propuestos anteriormente.

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} = \frac{\partial p}{\partial x_t} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x_t} K\nu(x_t, \tau) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial S_t} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \right] = - \frac{K}{S_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}.$$

Por la ecuación (4.7), podemos reescribir a la expresión anterior como

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} = -e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}. \quad (4.55)$$

Por último, calcularemos la segunda derivada parcial de  $p$  respecto a  $S_t$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\partial p}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left[ -e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ -e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right] \cdot \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \\
 &= \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \left[ e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - e^{-x_t} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{S_t} \left[ e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - e^{-x_t} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{K} \left( e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right),
 \end{aligned}$$

empleando la ecuación (4.7), podemos reescribir a la segunda derivada parcial de  $p$  respecto de  $S_t$ , como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} = \frac{e^{-2x_t}}{K} \left( \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} \right). \quad (4.56)$$

Al reescribir el modelo de Black-Scholes de una opción de venta europea en términos de las nuevas variables, obtenemos

$$\frac{1}{2} \sigma^2 K \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 e^{2x_t} \left( -\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \left( \frac{e^{-2x_t}}{K} \right) - K r e^{x_t} e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + r K \nu = 0. \quad (4.57)$$

Simplificando la ecuación (4.57) tenemos

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} \nu = 0.$$

En virtud de la definición de  $\kappa$  propuesta en (4.49), obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \kappa \nu. \quad (4.58)$$

Observemos la similitud entre las ecuaciones (4.12) y (4.58), como se demostró previamente en la sección 4.1, podemos reducir la expresión anterior a la ecuación diferencial de calor mediante el uso de un segundo cambio de variable. Considere

$$\nu(x_t, \tau) = u(x_t, \tau) e^{\alpha x_t + \beta \tau}, \quad (4.59)$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa - 1), \quad (4.60)$$

y

$$\beta = -\frac{1}{4}(\kappa + 1)^2. \quad (4.61)$$

De manera que al realizar el cálculo de las derivadas parciales de  $\nu$  respecto a  $\tau$  y  $x_t$ , como se realizó en la parte final de la sección 4.1, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -u \left[ \beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa \right] + (2\alpha + \kappa - 1) \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \quad (4.62)$$

De manera que al sustituir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en (4.62), se obtiene como resultado la ecuación diferencial de calor en el dominio infinito

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < \infty, \quad \tau > 0. \quad (4.63)$$

Como se demostró en la sección 4.3, el núcleo de Gauss-Weierstrass es una solución fundamental de la ecuación del calor. De manera que la solución para (4.63) estará dada por

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x_t)^2}{4\tau}} ds. \quad (4.64)$$

Observe que la ecuación (4.64) puede reescribirse como una distribución normal reducida mediante el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow y\sqrt{2\tau} + x_t = s \Rightarrow \sqrt{2\tau} dy = ds,$$

además, notemos que los límites de integración seguirán tendiendo de  $-\infty$  a  $\infty$ . De manera que, nuestra integral bajo el cambio de variable propuesto se reescribirá como

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x_t) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (4.65)$$

Por otro lado, necesitamos encontrar la condición  $u_0(y\sqrt{2\tau} + x_t)$ , de manera que, para poder calcularla emplearemos las ecuaciones (4.52) y (4.59)

$$\begin{aligned} \nu(x_t, 0) &= e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(0)(\kappa+1)^2} u(x_t, 0) \\ \text{máx}(1 - e^{x_t}, 0) &= e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} u_0 \\ u_0 &= \text{máx}\left(e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t}, 0\right). \end{aligned}$$

Al evaluar la expresión anterior en  $u_0(y\sqrt{2\tau} + x_t)$ , se obtiene

$$u_0(y\sqrt{2\tau} + x_t, 0) = \text{máx} \left( e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)}, 0 \right). \quad (4.66)$$

Sustituyendo (4.66) en (4.65) tenemos

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx} \left( e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)}, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (4.67)$$

Sin embargo, la función *máx* se encuentra definida para valores mayores que cero, por lo que es necesario buscar el intervalo en el cual la función es distinta de cero, para ello suponemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)} &> 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) &> \frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t) \\ -\frac{1}{2}x_t - \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} &> \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} \\ y &< -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

De manera que al reemplazar la expresión (4.68) en los límites de integración de la ecuación (4.67), se obtiene

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

de manera que

$$u(x_t, \tau) = I_1 - I_2. \quad (4.69)$$

Procedemos a realizar el cálculo de las integrales  $I_1$  e  $I_2$  de forma separada. Calculemos el valor de  $I_2$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}[y^2-y(\kappa+1)\sqrt{2\tau}]} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\left[y^2-y(\kappa+1)\sqrt{2\tau}+\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2-\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right]} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\left[y-\left(\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)\right]^2} dy.
 \end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}
 \xi &= y - \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau} \Rightarrow d\xi = dy, \\
 \xi\left(-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}\right) &= -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{\sqrt{2\tau}}(\kappa+1)\tau ; \quad \xi(\infty) = \infty.
 \end{aligned}$$

De forma que al reemplazar nuestro cambio de variable en  $I_2$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\
 &= e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right).
 \end{aligned}$$

De manera que la solución para  $I_2$  estará dada por

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(-d_1), \quad (4.70)$$

con

$$d_1 = \frac{x_t + (\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (4.71)$$

Análogamente realizaremos el cálculo para  $I_1$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(y\sqrt{2\tau}+x_t)-\frac{1}{2}y^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} e^{\frac{1}{2}y(\kappa-1)(\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}y^2} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}[y^2-y(\kappa-1)(\sqrt{2\tau})]} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\left[y^2-y\sqrt{2\tau}(\kappa-1)+\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2-\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right]} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\left[y-\left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)\right]^2} dy.
 \end{aligned}$$

Sea ahora

$$\begin{aligned}
 \xi &= y - \left(\frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right) \Rightarrow d\xi = dy, \\
 \xi\left(-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}\right) &= -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} ; \quad \xi(\infty) = \infty.
 \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t+(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x_t+(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \right) \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \left[ \Phi\left(-\frac{x_t+(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Así, la solución para  $I_2$  estará dada por

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(-d_2), \quad (4.72)$$

con

$$d_2 = \frac{x_t + (\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (4.73)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.70) y (4.72) en (4.69) obtenemos

$$u(x_t, \tau) = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(-d_2) - e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1)+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(-d_1). \quad (4.74)$$

Aunque la ecuación (4.74) es una solución al modelo de Black-Scholes para una opción de venta, es necesario devolver los cambios de variable propuestos en (4.49) y (4.59), con el objetivo de obtener una solución en términos de las variables originales. De manera que podemos reescribir a  $d_1$  como

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{x_t + (\kappa + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Y a  $d_2$  como:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{x_t + (\kappa - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (4.74) en (4.59), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \nu(x_t, \tau) &= e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2} \left[ -e^{\frac{1}{2}x_t(\kappa+1) + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(-d_1) + e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(-d_2) \right] \\
 &= -e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2 + \frac{1}{2}x_t(\kappa+1) + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(-d_1) \\
 &\quad + e^{-\frac{x_t}{2}(\kappa-1) - \frac{\tau}{4}(\kappa+1)^2 + \frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(-d_2).
 \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene que

$$\nu(x_t, \tau) = -e^{x_t} \Phi(-d_1) + e^{-\tau\kappa} \Phi(-d_2). \tag{4.77}$$

Reemplazando del valor de  $\nu$  en la ecuación (4.51) tenemos

$$\begin{aligned}
 p(S_t, t) &= K\nu(x_t, \tau) \\
 &= K \left[ -e^{x_t} \Phi(-d_1) + e^{-\tau\kappa} \Phi(-d_2) \right] \\
 &= -K e^{x_t} \Phi(-d_1) + K e^{-\tau\kappa} \Phi(-d_2).
 \end{aligned}$$

De manera que la solución para el modelo Black-Scholes de una opción de venta será

$$p(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1), \quad (4.78)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

# 5

## Propiedades básicas de las distribuciones estables

### 5.1. Definiciones y propiedades básicas

En el año de 1925, Paul Lévy se encontraba estudiando la suma de variables independientes e idénticamente distribuidas, en base a ello, introdujo el concepto de distribuciones estables en su libro “*Calcul des Probabilités*”. El nombre “estable” refleja el hecho de que la suma de dos variables aleatorias independientes, que tienen una distribución estable con el mismo índice  $\alpha$  es nuevamente estable con índice  $\alpha$ . Esta propiedad de invarianza también se cumple para las variables gaussianas. Por ende, estas distribuciones son una consecuencia del Teorema Generalizado del Límite Central, en el cual, se establece que el único límite no trivial posible de sumas normalizadas de variables independientes e idénticamente distribuidas es una distribución  $\alpha$ -estable. Cabe señalar que podemos obtener una extensa familia de distribuciones de probabilidad que satisfagan esta propiedad, lo cual nos permitiría modelar distribuciones empíricas que presenten un alto grado de curtosis y asimetría.

Por ende, definiremos a una variable aleatoria como estable ( $\alpha$ -estable o de Lévy) si una combinación lineal de dos copias independientes de la variable aleatoria tiene la misma distribución que la variable aleatoria. Específicamente,  $X$  se define como estable si para cualquier número positivo  $a$  y  $b$ , existe un número positivo  $c$  y un número real  $d$ , tal que:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad (5.1)$$

donde  $X_1$  y  $X_2$  son copias independientes de  $X$ ,  $\stackrel{d}{=}$  representa la igualdad en la distribución, es decir, ambas expresiones tienen la misma ley de probabilidad. Si  $d = 0$  para todas las opciones de  $a$  y  $b$ , entonces se dice que  $X$  es *estrictamente estable*. Si la distribución  $X$  es simétrica (es decir, si  $X$  y  $-X$  tienen la misma distribución), entonces  $X$  se llama *variable aleatoria simétrica estable*.

Cabe señalar que existen otras formas de definir a una distribución estable. Una de

ellas es la siguiente: una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución estable si para  $n > 2$ , existe un número positivo  $c_n$  y un número real  $d_n$  tal que si las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son copias independientes de  $X$ , entonces:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n. \quad (5.2)$$

A pesar de que las definiciones anteriores utilizan propiedades distribucionales de  $X$ , no ofrecen un método concreto de parametrización. Siendo éste uno de los principales inconvenientes al momento de modelar con ellas, debido a que no existe una forma analítica para su función de densidad de probabilidad y su función de distribución acumulativa. Por lo cual la forma más concreta de describir todas las posibles distribuciones estables es a través de la función característica o Transformada de Fourier. Para una variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F(x)$ , la función característica se define por  $\phi(u) = \mathbb{E} [e^{iuZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x)$ . La función  $\phi(u)$  determina completamente la distribución de  $X$ . Por tanto, una variable aleatoria  $X$  es estable si y solo si  $X \stackrel{d}{=} aZ + b$ , donde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $Z$  es una variable aleatoria con función característica:

$$\phi(u) = \mathbb{E} [e^{iuZ}] = \begin{cases} \exp(-|u|^\alpha [1 - i\beta (\tan(\frac{\pi\alpha}{2})) (\text{sign } u)]), & \alpha \neq 1, \\ \exp(-|u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log |u|]), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (5.3)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  y  $\text{sing } u$  es la función signo que se define como:

$$\text{sing } u = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, existen tres casos especiales en los cuales podemos escribir una expresión analítica para la densidad de probabilidad y a la vez verificar directamente que son distribuciones estables, éstas son:

1. **Distribución normal o gaussiana.**  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , si su función densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

y su función de distribución acumulada se expresa como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right),$$

debido a la ausencia de una forma cerrada para evaluarla. Observemos que una distribución normal es estable con parámetros  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ .

2. **Distribuciones de Cauchy.**  $X \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$ , si su función densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Además, su función de distribución acumulada está dada por:

$$F(x|1, 0, \gamma, \delta; 0) = F(x|1, 0, \gamma, \delta; 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - \delta}{\gamma}\right).$$

Es importante señalar que una distribución de Cauchy es estable con parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ .

3. **Distribuciones de Lévy.**  $X \sim \text{Levy}(\gamma, \delta)$ , si su función densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\gamma}{2(x - \delta)}}, \quad \delta < x < \infty.$$

y su función de distribución acumulada se expresa como:

$$F(x|1/2, 1, \gamma, \delta; 1) = 2 \left( 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\gamma}{(x - \delta)}}\right) \right).$$

Es importante señalar que una distribución Lévy es estable con parámetros  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 1$ . Cabe destacar que algunos autores utilizan el término distribución de Lévy para todas las leyes de sumas estables; sin embargo, aquí sólo se utilizará para esta distribución en particular [41, 42, 43].

## 5.2. Parametrizaciones de las leyes estables

La clase completa de distribuciones estables se caracteriza por cuatro parámetros principales, usualmente designados como:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ . El parámetro de localización  $\delta$  simplemente desplaza la distribución hacia la izquierda o derecha. El parámetro de

escala  $\gamma$  comprime o extiende la distribución alrededor de  $\delta$  en proporción a  $\gamma$ . Si la variable  $x$  tiene una distribución estable  $S(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , la variable transformada  $z = (x - \delta)/\gamma$  tendrá la misma forma de distribución, pero con parámetro de localización 0 y parámetro de escala 1.

Los dos parámetros restantes determinan completamente la forma de la distribución. El exponente característico  $\alpha$  se encuentra definido en el intervalo  $(0, 2]$  y determina la tasa a la cual las colas de la distribución se atenúan. De manera que, cuando  $\alpha = 2$ , obtendremos una distribución normal, con media  $\delta$  y varianza  $2\gamma^2$ . Para  $\alpha < 2$ , la varianza es infinita. Si  $\alpha > 1$ , la media de la distribución existe y es igual a  $\delta$ . Sin embargo, cuando  $\alpha \leq 1$ , las colas de la distribución son muy pesadas y la media no existe.

El cuarto parámetro determina la asimetría de la distribución, y se representa mediante la letra griega  $\beta$ , además, se encuentra definido en el intervalo  $[-1, +1]$ . Con base en la definición planteada en (5.3),  $\beta$  tendrá una propiedad informativa al ser el valor límite de la razón entre la diferencia de las probabilidades de las colas y la suma de las probabilidades de las colas:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - S(x; a, b, c, d) - S(-x; a, b, c, d)}{1 - S(x; a, b, c, d) + S(-x; a, b, c, d)}, \quad \alpha \neq 2. \quad (5.4)$$

Cuando el valor de  $\beta$  es positivo, la distribución presentará un sesgo hacia la derecha. Si el valor de  $\beta$  es negativo, observaremos un sesgo hacia la izquierda. Cuando  $\beta = 0$ , la distribución será simétrica. Además, cuando el valor de  $\alpha$  se aproxime a 2, el valor de  $\beta$  será despreciable debido a que la distribución se aproximará a una distribución normal simétrica, independientemente del valor de  $\beta$ .

Aunque existen múltiples parametrizaciones para las leyes estables, su uso puede generar una gran cantidad de confusiones. Estas parametrizaciones han surgido como consecuencia de la evolución histórica y de los numerosos problemas que se han analizado utilizando formas especializadas de las distribuciones estables. Sin embargo, tener diferentes parametrizaciones es una ventaja significativa. Si se desea realizar un trabajo numérico o ajustar datos, se puede optar por una parametrización específica. Por otro lado, si se desean estudiar las propiedades analíticas de las leyes estrictamente estables, se puede emplear otro tipo de parametrización.

De manera que, emplearemos la notación  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$  para definir una parametrización en específico. Observemos que esta notación enfatiza que los parámetros  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  son desconocidos y además deben ser calculados, por otra parte, se nos indica que los parámetros de escala y ubicación no son la desviación estándar y la media respectivamente. Por último, para poder establecer una clara distinción entre las diferentes

parametrizaciones de las distribuciones se emplea el entero  $k$ . Por lo cual, a través de esta notación podemos establecer de forma clara y precisa la parametrización de la distribución que necesitemos emplear.

Denotaremos por  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  a la familia de distribuciones estables con parametrización cero. Una variable aleatoria  $X$  tendrá  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  si

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma(Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma Z + \delta, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $Z = Z(\alpha, \beta)$  está dada por la ecuación (5.3) y la función característica para  $X$  está dada por:

$$\mathbb{E} \left[ e^{iuX} \right] = \begin{cases} \exp \left( -\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[ 1 + i\beta \left( \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\text{sign } u) (|\gamma u|^{1-\alpha} - 1) \right] + i\delta u \right), & \alpha \neq 1, \\ \exp \left( -\gamma |u| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log(\gamma |u|) \right] + i\delta u \right), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Es recomendable emplear la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  para trabajos numéricos e inferencia estadística con distribuciones estables debido a que tiene la forma más simple para la función característica y es continua para todos los parámetros. Además, permite que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  determinen la forma de la distribución, mientras que  $\gamma$  y  $\delta$  determinan la escala y la ubicación. Si  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ , entonces  $(X - \delta) / \gamma \sim S(\alpha, \beta, 1, 0; 0)$ .

Denotaremos por  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$  a la familia de distribuciones estables con parametrización estándar. Una variable aleatoria  $X$  tendrá  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$  si

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta, & \alpha \neq 1, \\ \gamma Z + \left( \delta + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma \right), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

donde  $Z = Z(\alpha, \beta)$  está dada por la ecuación (5.3) y la función característica para  $X$  está dada por:

$$\mathbb{E} \left[ e^{iuX} \right] = \begin{cases} \exp \left( -\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[ 1 - i\beta \left( \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\text{sign } u) \right] + i\delta u \right), & \alpha \neq 1, \\ \exp \left( -\gamma |u| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log |u| \right] + i\delta u \right), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Emplearemos la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$  cuando estemos demostrando hechos sobre distribuciones estables, debido a la simpleza de su función característica y a las buenas propiedades algebraicas que posee. Cabe señalar que la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$  no posee propiedades intuitivas deseables en aplicaciones (como continuidad en las distribuciones a medida que los parámetros varían, una familia de ubicación

y escala, etcétera) [41, 44].

### 5.3. Estimación de parámetros

La estimación de los parámetros de las leyes estables está generalmente obstaculizada por la ausencia de una función de densidad de probabilidad para cada una de las posibles familias estables, a excepción de los casos ya mencionados. De manera que la mayoría de los métodos convencionales en estadística, incluyendo el método de estimación de máxima verosimilitud, no pueden emplearse directamente debido a que estos dependen de una forma explícita para la función de densidad. Sin embargo, existen tres métodos numéricos principales para la estimación de los parámetros de la función característica:

1. Métodos de cuantiles de muestra.
2. Regresión sobre la función característica.
3. Estimación de máxima verosimilitud.

A pesar de que el método de cuantiles por muestra y regresión sobre la función característica resultan ser más eficientes que la estimación por máxima verosimilitud, éstos presentan una menor precisión en la estimación de los parámetros. Por el contrario, la estimación por máxima verosimilitud presenta una mayor precisión en la determinación de los parámetros. Por lo cual, el método más común para estimar un modelo paramétrico de la distribución de rendimientos es el método de máxima verosimilitud [43, 45].

#### 5.3.1. Estimación de máxima verosimilitud

Consideremos un vector de  $T$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas estables (i.i.d.),  $X = (X_1, \dots, X_T)$ , es decir,  $X \stackrel{i.i.d.}{\sim} S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  y sea  $x = (x_1, \dots, x_T)$  el vector correspondiente de observaciones. Definiendo  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)'$ , la estimación de máxima verosimilitud (ML) de  $\theta$  se obtiene maximizando la función log-verosimilitud

$$\ell(\theta, x) = \sum_{i=1}^T \log f(x_i; \theta) \quad (5.9)$$

con respecto al vector de parámetros desconocidos  $\theta$ .

DuMouchel [46] ha investigado las propiedades teóricas del estimador ML para  $\theta$  y muestra su normalidad asintótica bajo ciertas condiciones de regularidad; es decir:

$$\sqrt{T} (\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, I^{-1}(\theta_0) \right), \quad (5.10)$$

en donde  $\xrightarrow{d}$  denota convergencia en distribución e  $I$  representa la matriz de información de Fisher:

$$I(\theta_0) = -E \left( \frac{\partial^2 \ell(\theta; X)}{\partial \theta \partial \theta'} \right), \quad (5.11)$$

la cual puede ser aproximada mediante la matriz Hessiana resultante de la maximización o a través de integración numérica [47].

En el algoritmo de estimación de ML se maximiza la función de log-verosimilitud numéricamente. En lugar de emplear una optimización restringida, se emplea una versión transformada de  $\theta$ ; es decir,  $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})'$ , tal que  $\theta = h(\tilde{\theta})$ . De manera que la transformación tomará la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{2}{1 + \tilde{\alpha}^2}, \quad \beta = \frac{2 - \tilde{\beta}^2}{2 + \tilde{\beta}^2}, \quad \gamma = \tilde{\gamma}^2. \quad (5.12)$$

En muchas aplicaciones se asume que los primeros momentos de  $X_i$  existen. Entonces, podemos restringir a  $\alpha \in (1, 2]$  adoptando la transformación  $\alpha = 1 + 1/(1 + \tilde{\alpha}^2)$ . Con las transformaciones de los parámetros implementadas y definiendo el gradiente  $\nabla_{\tilde{\theta}} h = \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}}$ , la ecuación (5.10) se convierte en [48]:

$$\sqrt{T} (\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \nabla_{\tilde{\theta}} h I^{-1}(\theta_0) \nabla_{\tilde{\theta}} h' \right). \quad (5.13)$$



# 6

## Análisis del rendimiento de valores en el mercado bursátil

### 6.1. Análisis temporal de las acciones de Amazon, Netflix y Disney

El análisis de series temporales financieras desempeña un papel fundamental en la valuación de activos a lo largo del tiempo, especialmente debido a la presencia de factores como la incertidumbre, que no pueden ser medidos directamente. Por ello, la teoría y los métodos estadísticos jugarán un papel crucial en el estudio de estos activos.

Por tanto, para la elaboración de un análisis temporal se seleccionaron a los activos: Amazon.com Incorporated (AMZN), Netflix Incorporated (NFLX) y The Walt Disney Company (DIS), de los cuales se obtuvo una base de datos con una granularidad diaria para los precios de cierre correspondientes al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023 de la página Yahoo Finance (véase la Figura 6.1). Cabe señalar que durante esta ventana de observaciones se recabaron 668 precios de cierre para cada activo.

Adicionalmente podemos inferir que los activos seleccionados para el presente análisis pertenecen al sector de consumo discrecional (XLY) y al sector de servicios de comunicación (XLC) del S&P500. Se detectó que los datos obtenidos se traslapan en parte con la crisis económica generada por la pandemia de SARS-COVID-2. Lo que nos brinda una ventaja para estudiar el comportamiento de nuestras acciones durante un ciclo económico, así como la obtención de datos del mercado en situaciones de alto riesgo y estrés. Además, se pueden apreciar agrupaciones de volatilidad estrechamente vinculadas con el periodo de recesión y auge económico.

Sin embargo, una de las principales dificultades al realizar un análisis comparativo entre distintas series temporales es la dimensionalidad de los datos, ya que la escala de precios varía para cada activo, como se muestra en la Figura 6.1. Esto impide comparar directamente las dimensiones de los incrementos o las caídas de precios. Por lo cual se empleará al rendimiento compuesto continuo (o rendimiento logarítmico) como la

6.1. ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS ACCIONES DE AMAZON, NETFLIX Y DISNEY  
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE VALORES EN EL MERCADO BURSÁTIL



(a)



(b)



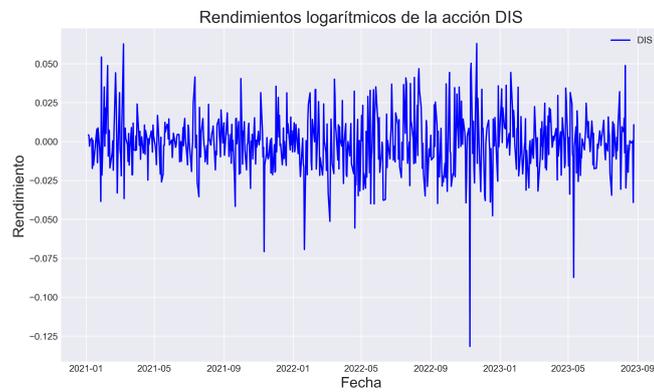
(c)

**Figura 6.1.** Serie temporal para el valor de cierre de mercado de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix, que corresponde al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023.

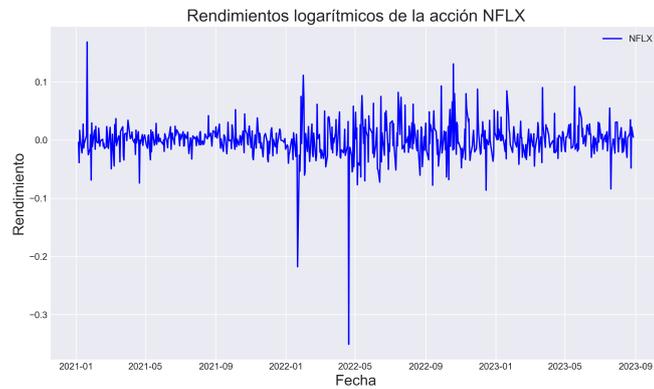
6.1. ANÁLISIS TEMPORAL DE LAS ACCIONES DE AMAZON, NETFLIX Y DISNEY  
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE VALORES EN EL MERCADO BURSÁTIL



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.2.** Rendimientos logarítmicos diarios de las acciones (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix, correspondientes al período del 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023.

unidad de medida para poder establecer una comparativa entre nuestros activos.

Basados en el rendimiento compuesto continuo para cada una de las acciones, se elaboró la Figura 6.2, en la cual se muestra la evolución de los rendimientos logarítmicos correspondientes al 05 enero del 2021 al 28 agosto del 2023. Al estudiar estos gráficos, podemos apreciar en el caso de Amazon y Disney que sus retornos oscilan entre los valores de  $-0.1514$  a  $0.12695$  y  $-0.14114$  a  $0.06106$  respectivamente, además, se pueden observar períodos con alta volatilidad en sus rendimientos, debido a la presencia de saltos abruptos en el precio, lo que indica la ausencia de una tendencia favorable en los activos y la presencia de valores extremos, por lo que se puede intuir que los rendimientos logarítmicos de Amazon y Disney tendrán una distribución de colas pesadas (o leptocúrtica).

Mientras que, al analizar el gráfico de rendimientos logarítmico de Netflix durante el mismo período de tiempo, se encontró que los retornos tomaban valores en el intervalo de  $-0.43258$  a  $0.15576$ . Sin embargo, observemos que podemos subdividir el gráfico de rendimientos continuos de Netflix en dos períodos, el primero corresponde de enero del 2021 a enero del 2022, en el se puede apreciar un periodo de baja volatilidad, mientras que en el segundo periodo correspondiente a febrero 2021 a agosto del 2023 los rendimientos del activo presentan una alta volatilidad, lo cual se debe a la presencia de saltos abruptos en el precio. Lo que contradice al supuesto 2 de Black-Scholes-Merton. Así mismo, es importante señalar que los rendimientos logarítmicos de Netflix también presentaran una distribución de colas pesadas.

## 6.2. Análisis de la normalidad en los rendimientos de las acciones

Una vez determinados los valores de los retornos continuos para las acciones de Amazon, Disney y Netflix, es importante elaborar una descripción de estos mediante las herramientas que nos provee la estadística. Para el caso particular de la presente investigación se obtuvieron 666 retornos por cada uno de los activos, los cuales son datos suficientes y actuales para realizar un estudio estadístico que nos permita tomar decisiones en el mercado. Por lo cual se elaboró la Tabla 6.1, en la cual presentamos los cuatro primeros momentos: media, desviación estándar (o volatilidad), coeficiente de asimetría (o sesgo), coeficiente de curtosis.

Basándonos en la Tabla 6.1, podemos apreciar que el desempeño de Disney, Netflix y Amazon durante el período de estudio exhibe un rendimiento anualizado negativo de un

Parámetro	Amazon	Disney	Netflix
Observaciones	666	666	666
Media	-0.00027	-0.00114	-0.00034
Media anualizada	-0.06804	-0.28728	-0.08568
Desviación estándar	0.02412	0.01942	0.03356
Volatilidad anualizada	0.38289	0.30828	0.53275
Coefficiente de asimetría	-0.13396	-0.60455	-3.44428
Coefficiente de curtosis	4.78702	4.91508	45.54700

**Tabla 6.1.** Estadística descriptiva de los retornos por activo

−28.728 %, −8.568 % y −6.804 % respectivamente. Además, los rendimientos presentan una alta volatilidad, lo que conlleva la reproducibilidad de valores extremos.

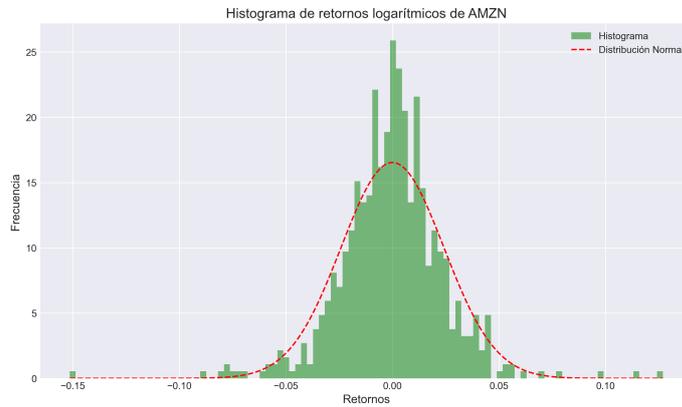
Al mismo tiempo, se detectó que los rendimientos continuos de los activos presentan un coeficiente de asimetría negativo, lo que nos indica que la base de datos obtenida posee una mayor cantidad de rendimientos logarítmicos negativos que positivos. Por otra parte, un coeficiente de curtosis mayor a 3, nos indica la presencia de colas pesadas en la distribución de los rendimientos, sin embargo, es importante recordar que el supuesto de normalidad en los rendimientos constituye una de las bases en la matemática financiera moderna, por lo cual será necesario implementar una prueba de normalidad para verificar este supuesto.

Como se muestra en la Figura 6.3, el histograma de rendimientos logarítmicos-diarios para cada activo exhibe un exceso de curtosis y una mayor cantidad de valores atípicos, por lo que será necesario elaborar un gráfico Q-Q para realizar un diagnóstico gráfico de normalidad en la serie de datos. Sin embargo, será necesario implementar una prueba de bondad de ajuste para verificar la normalidad en los rendimientos.

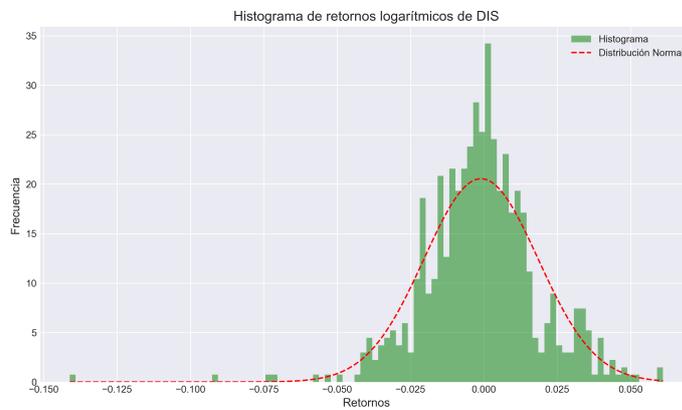
El gráfico cuantil-cuantil (Q-Q), Figura 6.4, permite diagnosticar diferencias entre la distribución implícita de una serie de datos frente a una distribución teórica. En este caso, emplearemos los rendimientos logarítmicos diarios de las acciones de Amazon, Disney y Netflix, para comparar cada uno de sus percentiles con el valor que se obtendría de una serie de datos distribuida normalmente, con la media y varianza de los retornos. En el eje X se muestran el número de desviaciones estándar alrededor de la media y en el eje Y el valor de los retornos. La línea diagonal roja es la línea de referencia que representa a la distribución teórica normal, mientras que los puntos azules representan los cuantiles de los datos.

Notemos que cuando nos acercamos a los valores extremos, los datos no se ajustan adecuadamente a la curva normal, lo cual nos confirma presencia de leptocurtosis en la distribución de rendimientos. Por lo que suponer que los rendimientos se distribuyen de

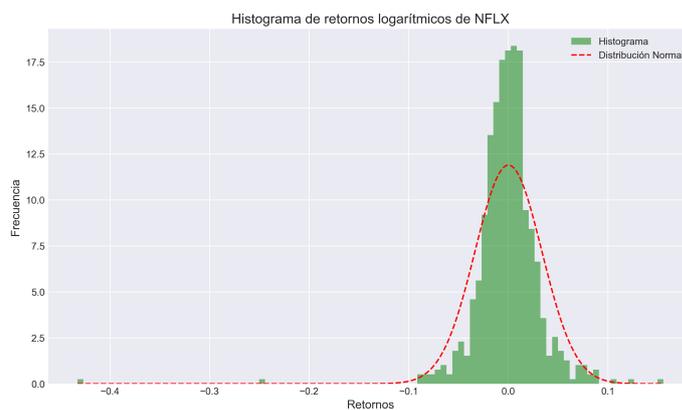
6.2. ANÁLISIS DE LA NORMALIDAD EN LOS RENDIMIENTOS DE LAS ACCIONES  
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE VALORES EN EL MERCADO BURSÁTIL



(a)



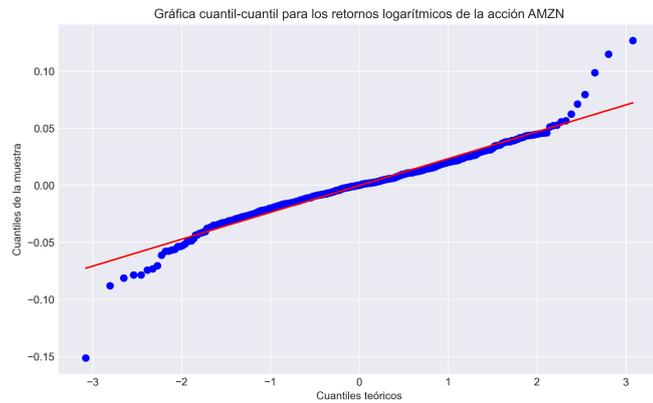
(b)



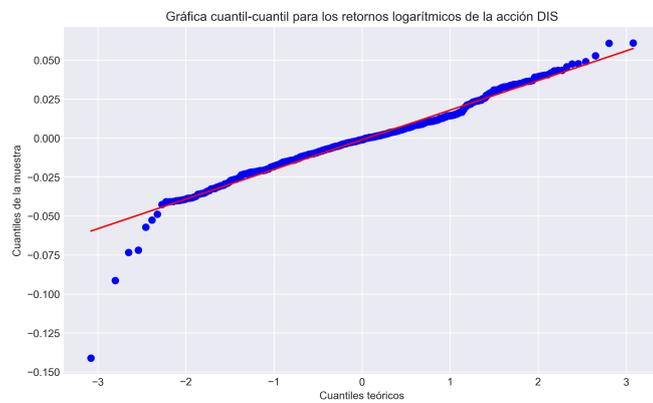
(c)

**Figura 6.3.** Ajuste normal para el histograma de rendimientos logarítmicos de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix.

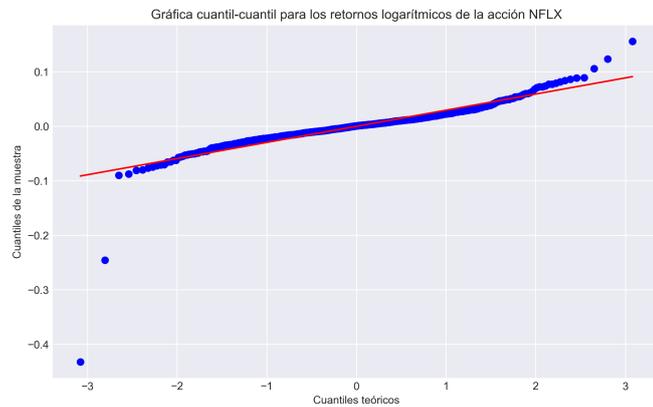
6.2. ANÁLISIS DE LA NORMALIDAD EN LOS RENDIMIENTOS DE LAS ACCIONES  
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE VALORES EN EL MERCADO BURSÁTIL



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.4.** Gráfico Q-Q para las acciones de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix frente a la distribución normal.

manera normal omitiría exposiciones al riesgo presentes en los datos.

Por consiguiente, es necesario emplear una prueba de bondad de ajuste para aceptar o rechazar la hipótesis de normalidad en los rendimientos. Por lo cual, implementaremos la prueba de normalidad Jarque-Bera (JB). La cual plantea como hipótesis nula ( $H_0$ ) que los datos provienen de una distribución normal con un nivel de confianza del 95%. Ésta es una prueba de ajuste de ambos lados de la distribución. La determinación del estadístico de prueba fue calculada mediante la ecuación (2.17). En donde JB es un estadístico de prueba que sigue asintóticamente una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad.

Parámetro	Amazon	Disney	Netflix
Valor del estadístico obtenido	637.89973	709.88530	58884.9734
Valor crítico del estadístico	5.99	5.99	5.99
Nivel de significancia	5%	5%	5%
La hipótesis se acepta	No	No	No

**Tabla 6.2.** Test de normalidad Jarque-Bera.

En la Tabla 6.2 se muestran los resultados obtenidos al realizar la prueba de bondad de ajuste para los retornos logarítmicos, concluyendo para los tres casos que la hipótesis de normalidad es *falsa*.

A partir de las pruebas de normalidad empleadas se identificó la presencia de leptocurtosis en las distribuciones de rendimientos. Sin embargo, el poder establecer una comparativa entre el número de valores según la distribución normal y el número de datos observados, nos brindaría una mejor descripción del comportamiento de los datos en las colas de la distribución. Por lo cual se elaboraron las Tablas 6.3 y 6.4, en las cuales se muestra el número de datos presentes en la distribución normal (que se determinan por el producto del tamaño de la muestra y la probabilidad teórica de la distribución normal a 2, 3, 4 y 5 desviaciones estándar de la media) y los retornos observados a la misma distancia.

Desviaciones estándar	$2\sigma$	$3\sigma$	$4\sigma$	$5\sigma$
Distribución normal	15.151587912	0.899032068	0.021092886	0.000191142
Empresa	Número observado			
Amazon	20	7	1	1
Disney	12	4	2	1
Netflix	11	2	2	2

**Tabla 6.3.** Número esperado y observado de valores extremos en la cola izquierda.

Basándonos en los resultados obtenidos en las Tablas 6.3 y 6.4, se elaboró la Tabla

Desviaciones estándar	$2\sigma$	$3\sigma$	$4\sigma$	$5\sigma$
Distribución normal	15.151587912	0.899032068	0.021092886	0.000191142
<b>Empresa</b>	<b>Número observado</b>			
Amazon	11	4	3	1
Disney	17	2	0	0
Netflix	16	3	1	0

**Tabla 6.4.** Número esperado y observado de valores extremos en la cola derecha.

6.5 con el objetivo de establecer una comparativa entre el porcentaje de rendimientos que se encuentran después de 2, 3, 4 y 5 desviaciones estándar presentes en el histograma de rendimientos y el porcentaje de rendimientos que se esperan bajo el supuesto de normalidad.

<b>Probabilidad en la cola izquierda según la distribución normal</b>				
Desviaciones estándar	$2\sigma$	$3\sigma$	$4\sigma$	$5\sigma$
<b>Distribución normal</b>	2.2750132 %	0.1349898 %	0.0031671 %	0.0000287 %
<b>Empresa</b>	<b>Porcentaje de observaciones en la cola izquierda</b>			
Amazon	3.003003 %	1.0510511 %	0.1501502 %	0.1501502 %
Disney	1.8045113 %	0.6015038 %	0.3007519 %	0.1503759 %
Netflix	1.6516517 %	0.3003003 %	0.3003003 %	0.3003003 %
<b>Probabilidad en el centro según la distribución normal</b>				
<b>Distribución normal</b>	95.4499736 %	99.7300204 %	99.9936658 %	99.9999426 %
<b>Empresa</b>	<b>Porcentaje de observaciones en el centro</b>			
Amazon	95.3453453 %	98.3483483 %	99.3993993 %	99.6996996 %
Disney	95.6390977 %	99.0977443 %	99.6992481 %	99.8496241 %
Netflix	95.9459459 %	99.2492492 %	99.5495495 %	99.6996997 %
<b>Probabilidad en la cola derecha según la distribución normal</b>				
<b>Distribución normal</b>	2.2750132 %	0.1349898 %	0.0031671 %	0.0000287 %
<b>Empresa</b>	<b>Porcentaje de observaciones en la cola derecha</b>			
Amazon	1.6516517 %	0.6006006 %	0.4504505 %	0.1501502 %
Disney	2.556391 %	0.3007519 %	0.0 %	0.0 %
Netflix	2.4024024 %	0.4504505 %	0.1501502 %	0.0 %

**Tabla 6.5.** Comparativa entre el porcentaje de rendimientos observados y la probabilidad en la distribución normal.

Al estudiar los resultados de las Tablas 6.3 y 6.4 se puede apreciar una mayor cantidad de datos observados en las colas de las distribuciones. Por lo cual, se propone estudiar a los rendimientos mediante distribuciones de cola pesada (o  $\alpha$ -estables), ya que nos permiten trabajar series de datos que presenten asimetría y colas pesadas.

### 6.3. Estudio de rendimientos financieros mediante distribuciones de colas pesadas

Por tanto, analizaremos la distribución de los rendimientos mediante distribuciones de colas pesadas (o  $\alpha$ -estables). Sin embargo, para poder realizar este estudio es necesario determinar los parámetros principales de las distribuciones. Por lo que emplearemos la función característica de la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ . Cabe señalar que se empleará esta parametrización por su uso en la modelación de datos financieros.

A través de la serie de rendimientos logarítmicos de Amazon, Netflix y Disney se obtuvieron los parámetros principales de la distribución de cola pesada por el método de máxima verosimilitud mediante el uso de la paquetería “`levy_stable`” en Python. La estimación de los parámetros  $\alpha$ -estables se presentan en la Tabla 6.6.

Empresa	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Amazon	1.74845	-0.10282	0.01394	-0.00034
Disney	1.81057	0.19590	0.01192	-0.00065
Netflix	1.60628	0.11345	0.01518	0.00052

**Tabla 6.6.** Ajuste de los rendimientos logarítmicos mediante el método de máxima verosimilitud.

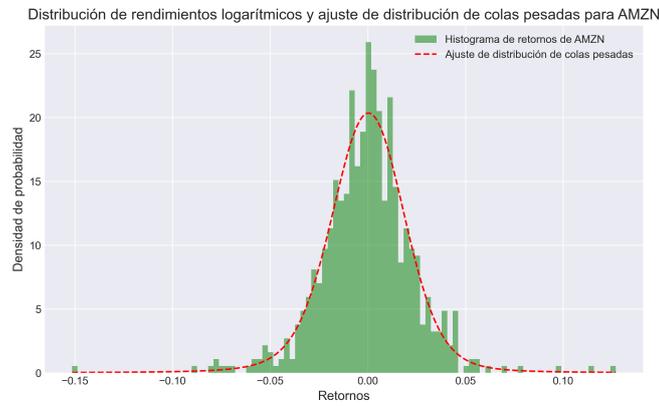
A partir de los parámetros obtenidos en la Tabla 6.6, podemos apreciar que los rendimientos logarítmicos de Netflix son los que exhiben colas más gruesas, mientras que los datos de Disney son los que presentan las colas más ligeras, debido a la cercanía que presenta el valor de  $\alpha$  a 2. Por otra parte, la distribución de rendimientos logarítmicos de Amazon indica una mayor concentración de datos en la cola izquierda, mientras que Netflix y Disney presentan el sesgo en la cola derecha, lo que se puede verificar con el valor de  $\beta$ . Sin embargo, cuando estudiamos el parámetro  $\delta$  de las distribuciones podemos apreciar en el caso de Amazon y Disney un recorrido de sus distribuciones hacia la izquierda, mientras que Netflix posee un desplazamiento hacia la derecha. Por último, se observa que los datos presentan un parámetro de compresión semejante.

Por lo cual, al reemplazar los parámetros brindados por la Tabla 6.6 en la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  se realizó la Figura 6.5, en la cual se muestran los ajustes de las distribuciones de cola pesada para la distribución de rendimientos de los activos seleccionados. Esto nos permite confirmar que las distribuciones  $\alpha$ -estables son adecuadas para modelar datos con asimetría y leptocurtosis, lo cual es una ventaja significativa al estudiar el comportamiento de los rendimientos, especialmente cuando

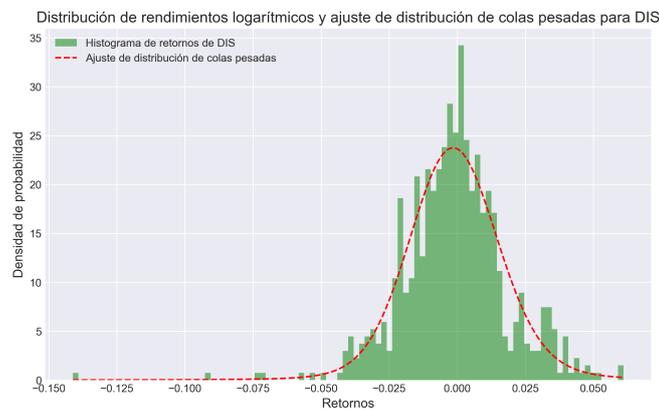
6.3. ESTUDIO DE RENDIMIENTOS FINANCIEROS MEDIANTE DISTRIBUCIONES DE COLAS PESADAS

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE VALORES EN EL MERCADO BURSÁTIL

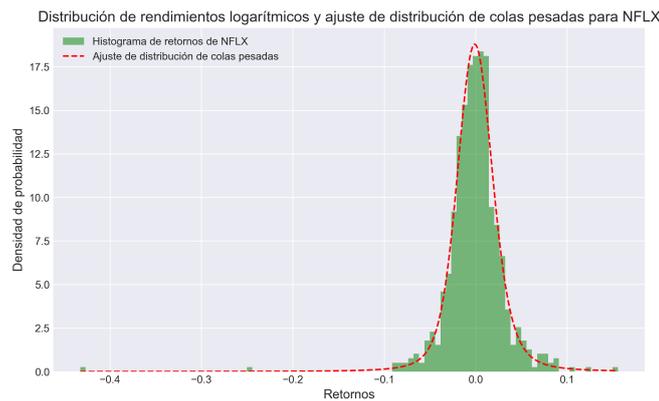
se busca cuantificar el riesgo asociado a los activos.



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.5.** Ajuste de las distribuciones de cola pesada para los rendimientos logarítmicos de (a) Amazon, (b) Disney y (c) Netflix.



# Conclusiones

El análisis de series temporales financieras proporciona una de las bases fundamentales en la valuación de activos financieros, sin embargo, son muy pocos los modelos financieros que se apegan a la realidad. Por ejemplo, el supuesto de normalidad en la distribución de los rendimientos para la valuación de opciones europeas subestima la probabilidad de ocurrencia de valores extremos, por lo cual fue necesario desarrollar un estudio empírico que nos permita verificar si el supuesto de normalidad se cumple en el mercado accionario.

Por tanto, con un análisis temporal de los activos: Amazon.com Incorporated (AMZN), Netflix Incorporated (NFLX) y The Walt Disney Company (DIS) (que pertenecen a los sectores de consumo discrecional (XLY) y servicios de comunicación (XLC) del S&P500), se obtuvo una base de datos con una granularidad diaria para los precios de cierre de mercado durante el período correspondiente al 05 de enero del 2021 al 28 de agosto del 2023 de la página de Yahoo Finance. Durante esta ventana de observaciones se recabaron 668 precios de cierre para cada uno de los activos, con los cuales se calcularon 666 rendimientos continuos y en base a ello se determinaron los primeros cuatro momentos centrales, en los que se obtuvo como resultado una tasa continua de decrecimiento diaria para cada activo, una alta volatilidad (lo que nos indicó la presencia de leptocurtosis en los datos) y se verificó al determinar el valor del cuarto momento central, por lo que el suponer normalidad en los rendimientos subestimaría utilidades relevantes o caídas muy grandes en el valor de los activos seleccionados. Además, el coeficiente de asimetría evidenció un valor negativo, lo que nos indica una mayor presencia de rendimientos negativos durante nuestro período de estudio. De manera que la descripción estadística mostró que los retornos continuos de los activos financieros analizados no muestran un comportamiento normal.

Por lo mencionado anteriormente, fue necesario implementar la prueba de bondad de ajuste Jarque-Bera, en la que se rechazó la hipótesis nula que nos indica que los datos siguen una distribución normal con un nivel de confianza de un 95%. Y a través de un gráfico cuantil-cuantil se apreció que los datos no se ajustan a la curva normal

para  $\sigma > 2$ .

Por esa razón, empleamos la parametrización  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  de las distribuciones de cola pesada (o  $\alpha$ -estable) para modelar los datos de Amazon, Netflix y Disney. El estudio empírico muestra que las distribuciones  $\alpha$ -estables proporcionan un mejor ajuste a los retornos logarítmicos de los activos seleccionados. Además, las características leptocúrticas y asimétricas presentes en el rendimiento continuo pueden ser capturadas por las distribuciones de cola pesada.

# Bibliografía

- [1] S. J. Ling, J. Sanny, W. Moebs, G. Friedman, S. D. Druger, A. Kolakowska, D. Anderson, D. Bowman, D. Demaree, E. Ginsberg *et al.*, *University Physics Volume 1*. OpenStax, 2016.
- [2] W. Schoutens, *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. Wiley Online Library, 2003.
- [3] J. Hull, *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. PEARSON, Sexta Edición, 1996.
- [4] B. Luis, “Theorie de la speculation,” *Doctor Thesis. Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 1900.
- [5] A. De Lara, *Productos derivados financieros: instrumentos, valuación y cobertura de riesgo*. LIMUSA, 2005.
- [6] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*. The University of Chicago Press, 1973, vol. 81, no. 3.
- [7] J. Franke, W. K. Härdle, and C. M. Hafner, *Statistics of financial markets*. Springer, 2004, vol. 2.
- [8] N. H. Bingham and R. Kiesel, *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] F. Venegas-Martínez, S. Medina Hurtado, J. A. Jaramillo, and F. H. Ramírez Atehortúa, *Riesgos financieros y económicos*. Universidad de Medellín, 2008.
- [10] J. Cvitanic and F. Zapatero, *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*. MIT press, 2004.

- [11] S. N. H. University. (2022, sep) ¿qué son los mercados financieros y cuáles son sus tipos? [Online]. Available: <https://es.snhu.edu/noticias/definicion-y-tipos-de-mercados-financieros>
- [12] R. E. Bailey, *The economics of financial markets*. Cambridge University Press, 2005.
- [13] C. N. B. y de Valores. (2013, oct) Instrumentos. [Online]. Available: <https://lc.cx/JzMmXO>
- [14] S. R. Ustáriz, “¿qué son los títulos referenciados a activos?” <https://www.bbva.com/es/mx/que-son-los-titulos-referenciados-a-activos/>, Agosto 2019, accedido en marzo de 2024.
- [15] —, “Los índices bursátiles: concepto, uso y ejemplos,” <https://www.bbva.ch/noticia/los-indices-bursatiles-concepto-uso-y-ejemplos/>, Febrero 2022, accedido en marzo de 2024.
- [16] J. Y. Campbell, A. W. Lo, and A. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1997. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5>
- [17] E. Schrödinger, “The foundation of the theory of probability: I,” in *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 51. JSTOR, 1945, pp. 51–66.
- [18] S. E. Shreve *et al.*, *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer, 2004, vol. 11.
- [19] T. Mikosch, *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World scientific, 1998.
- [20] J. M. Barbeito and J. G. Villalón, *Introducción al cálculo estocástico aplicado a la modelización económico-financiero-actuarial*. Netbiblo, 2003.
- [21] G. Grimmett and D. Welsh, *Probability: an introduction*. Oxford University Press, 1986.
- [22] G. Canavos, “Probabilidad y estadística, aplicaciones y métodos, vol. 1,” *Universidad Autónoma de México, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias*, 1988.

- [23] S. Mishra and A. Datta-Gupta, *Applied statistical modeling and data analytics: A practical guide for the petroleum geosciences*. Elsevier, 2017.
- [24] R. B. Ash, *Real analysis and probability: probability and mathematical statistics: a series of monographs and textbooks*. Academic press, 2014.
- [25] E. Chin, D. Nel et al., *Problems and Solutions in Mathematical Finance, Volume 1: Stochastic Calculus*. John Wiley & Sons, 2014.
- [26] C. M. Jarque and A. K. Bera, “Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals,” *Economics letters*, vol. 6, no. 3, pp. 255–259, 1980.
- [27] S. Castillo-Gutiérrez and E. D. L. Aguilera, “Qq plot normal. los puntos de posición gráfica,” *Iniciación a la Investigación*, no. 2, p. 8, 2007.
- [28] L. Bachelier, *Louis Bachelier’s theory of speculation: the origins of modern finance*. Princeton University Press, 2011.
- [29] A. Einstein, “On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular kinetic theory of heat, chapter 16,” *Annalen der Physik*, vol. 2, pp. 123–134, 1905.
- [30] K. Mathieu, “i-math: Jornadas sobre matemática de los mercados financieros,” <https://tv.um.es/video?id=11171&cod=a1>, Marzo 2010, accedido en marzo de 2024.
- [31] P. Henry-Labordere, *Analysis, geometry, and modeling in finance: Advanced methods in option pricing*. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [32] S. R. Dunbar, *Mathematical modeling in economics and finance: probability, stochastic processes, and differential equations*. American Mathematical Soc., 2019, vol. 49.
- [33] E. F. Fama, “Efficient market hypothesis,” *Diss. PhD Thesis, Ph. D. dissertation*, 1960.
- [34] A. Hirsa and S. N. Neftci, *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Academic press, 2013.
- [35] C. Kelliher, *Quantitative Finance with Python: A Practical Guide to Investment Management, Trading, and Financial Engineering*. Chapman and Hall/CRC, 2022.

- [36] M. S. Manuel, “i-math: Jornadas sobre matemática de los mercados financieros,” <https://tv.um.es/video?id=11181&cod=a1>, Marzo 2010, accedido en marzo de 2024.
- [37] C. V. Cendón., “i-math: Jornadas sobre matemática de los mercados financieros,” <https://tv.um.es/video?id=11191&cod=a1>, Marzo 2010, accedido en marzo de 2024.
- [38] N. Privault, *Stochastic finance: An introduction with market examples*. CRC Press, 2013.
- [39] S. L. Brunton and J. N. Kutz, *Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control*. Cambridge University Press, 2022.
- [40] J. E. Marsden, A. J. Tromba, and M. L. Mateos, *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana México, 1991, vol. 69.
- [41] J. P. Nolan, “Univariate stable distributions,” *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, vol. 10, pp. 978–3, 2020.
- [42] G. Samoradnitsky, *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. Routledge, 2017.
- [43] P. Čížek, W. Härdle, R. Weron, and W. Härdle, *Statistical tools for finance and insurance*. Springer, 2011.
- [44] J. H. McCulloch, “Simple consistent estimators of stable distribution parameters,” *Communications in statistics-simulation and computation*, vol. 15, no. 4, pp. 1109–1136, 1986.
- [45] R. Cont and P. Tankov, “Financial modelling with jump processes, 2004,” *Chapman &amp*, 1975.
- [46] W. H. DuMouchel, “On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution,” *The Annals of Statistics*, vol. 1, no. 5, pp. 948–957, 1973.
- [47] J. Nolan, “Maximum likelihood estimation of stable parameters,” *Levy processes: Theory and applications*, pp. 379–400, 2001.
- [48] S. Mittnik, S. Rachev, T. Doganoglu, and D. Chenyao, “Maximum likelihood of stable paretian estimation models,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 29, no. 10-12, pp. 276–293, 1999.