



Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

Estudio de la polarización atómica dentro de una cavidad con pérdidas y temperatura diferente de cero, considerando un estado coherente como estado inicial del campo.

Tesis
para obtener el grado de

Maestro en Modelación Matemática

Presenta

Ing. David Aquino Hernández

Director: Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán.

Co-Director: Dr. Raúl Juárez Amaro.

Asesor: Dr. Héctor Manuel Moya Cessa.

Heroica Cd. de Huajuapán de León, Oax., octubre de 2024

Índice general

1. Introducción	1
2. Fundamentos de la mecánica cuántica	3
2.1. Principios de la mecánica cuántica	3
2.2. Ecuación de Schrödinger	3
2.3. Postulados de la mecánica cuántica	4
2.4. Operador de densidad y sus propiedades	5
2.5. Operador densidad y la imagen de Schrödinger	7
2.6. Imagen de Heisenberg	7
2.7. Imagen de interacción	8
3. Cuantización del campo electromagnético	10
3.1. Descomposición espectral del campo eléctrico y magnético	10
3.2. Energía del campo eléctrico y magnético	11
3.3. Variables canónicas	12
3.4. Operadores de creación, aniquilación y número	13
3.5. Estados coherentes	15
4. Método de superoperadores	17
4.1. Factorización de operadores exponenciales	17
5. Interacción átomo campo	20
5.1. Operadores de subida y bajada	20
5.2. Interacción exacta Átomo-Campo	21
5.3. Interacción electromagnética carga-campo	21
5.4. Campo monomodo en equilibrio térmico	23
5.5. Modelo de Jaynes-Cummings	24
6. Solución de la ecuación maestra del sistema	26
6.1. Detalles de la cavidad cuántica	26
6.2. Aplicación del método de superoperadores	27
6.3. Cálculo de la polarización atómica	41
7. Resultados y análisis de resultados.	44
7.1. Variando $\chi = 0,1, 0,5, 0,8, 1.$	46
7.2. Variando $\bar{n} = 1, 2, 4, 8.$	47
7.3. Variando $\alpha = 3, 4, 5, 6.$	48
7.4. Variando $C = 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1.$	49
7.5. Conclusiones.	50

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por brindarme la oportunidad de obtener el grado de maestro.

A Conahcyt por la ayuda económica brindada, sin la cual esto no sería posible.

Al Dr. Cuauhtémoc por el apoyo brindado durante la realización del proyecto.

Al Dr. Raúl mi más sincero agradecimiento, por sus atinadas indicaciones y consejos, mismos que me fueron de gran utilidad en la realización del presente trabajo de tesis.

Al Dr. Hector Manuel Moya Cessa por su orientación, apoyo y colaboración desinteresada en el presente trabajo.

A mis profesores, compañeros de clase, mi familia y todas aquellas personas que de alguna manera me apoyaron, a todos gracias.

*Familia, amigos y personas especiales en mi vida, no podría sentirme menos agradecido con la confianza puesta en mi persona especialmente cuando he contado con su mejor apoyo y compañía desde que siquiera tengo memoria. Quisiera dedicar mi tesis a ustedes.
Gracias.*

Capítulo 1

Introducción

La computación cuántica es una de las líneas de investigación actuales de interés tecnológico y científico [1]. La base fundamental de la computación cuántica consiste en almacenar información en los estados cuánticos de la materia y usar compuertas cuánticas para realizar procesos con dicha información [2]. Tal avance tecnológico y científico, requiere de un desarrollo completo en la comprensión de la unidad fundamental de información cuántica, análogamente al bit clásico el bit cuántico, es decir el Cúbit [2], que a diferencia de los computadores tradicionales no tiene una representación binaria en los estados de un electrón, que es representado físicamente por un sistema cuántico de dos estados propios que pueden ser manipulados arbitrariamente [3].

Hay muchas ramas de la física que proponen sistemas cuánticos para la realización del Cúbit, tales como cavidades ópticas [3], trampas de iones [4], resonancia magnética nuclear [5] o sistemas que se basan en semiconductores [6]. En todos existen inconvenientes, uno de los principales es la falta de comprensión del fenómeno de decoherencia cuántica [7], tal fenómeno está ligado al colapso de la función de onda por el proceso irreversible de medición.

El campo de la electrodinámica cuántica en cavidades (QCED) propone alternativas en la generación de Cúbits mediante la óptica. Basado en el aislamiento de un átomo dentro de un arreglo de espejos y un campo electromagnético en el interior de la cavidad [8], la interacción entre los fotones y electrones del átomo provoca su excitación, en la práctica se envía un haz de átomos de Rydberg a través de la cavidad con el fin de conseguir entrelazamiento cuántico en la interacción entre átomos y fotones [9]. La manipulación de los estados del átomo se realiza a través del uso de microondas, esta propuesta cuántica genera un sistema de dos Cúbits, el de la polarización de las ondas dentro de la cavidad y el de la excitación del electrón que interactúa con las ondas [10].

Dentro de la QCED uno de los modelos más simples para el sistema cuántico es el modelo de Rabi [11], uno de los primeros modelos que intenta dar una descripción completa del sistema de la cavidad cuántica de manera semiclásica, posteriormente, el modelo de Jaynes-Cummings propone resolver el problema bajo algunas restricciones utilizando un desarrollo cuántico para obtener mejores resultados [11]. Los sistemas propuestos por la QCED al igual que todas las demás opciones incluyen cualidades aprovechables y algunas limitantes para el desarrollo tecnológico, aun así, el sistema de cavidades cuánticas tiene una amplia utilidad en el estudio de la coherencia cuántica [13].

El estudio de la cavidad cuántica consiste en el análisis de un sistema atómico de dos niveles de energía posibles, el estado fundamental de menor energía y el estado excitado de mayor energía, en el caso no degenerado de este sistema la transición de un estado

a otro es consecuencia de su interacción con el campo electromagnético y provoca la absorción o emisión de un cuanto de energía, es decir, cuando un sistema de dos niveles es iluminado por un haz coherente de fotones, éste los absorbe y emite de manera cíclica, a uno de estos ciclos se le conoce como ciclo de Rabi en honor a Isidor Isaac Rabi y es descrito por el modelo Jaynes-Cummings [11].

Con la intención de un estudio del átomo dentro de la cavidad de manera precisa el análisis se hace con un desarrollo cuántico en ambas partes, para el sistema atómico con el nivel de energía oscilante y para el campo electromagnético.

Para el campo electromagnético se toma el criterio de la segunda cuantización de Dirac [12], bajo este criterio se propone poner los potenciales correspondientes a los campos eléctrico y magnético en términos de los operadores de creación y aniquilación, de tal manera que cumplan con reglas de conmutación propias de la descripción cuántica, el cambio permite el aumento y la disminución de la energía electromagnética fotón a fotón de manera discreta.

El sistema atómico se analiza de manera análoga pues el planteamiento de los operadores de subida y bajada es como los de creación y aniquilación, bajo algunas restricciones que los acoplen a las transiciones de estados energéticos propios del sistema de dos niveles. Profundizando en el comportamiento de los operadores para encontrar la relación con las matrices de Pauli y específicamente con el llamado operador de inversión atómica que toma un papel importante, de esta manera la descripción del sistema deja de lado los operadores de subida y bajada, para estar en términos del operador de inversión atómica [14].

Una vez que las características de la cavidad cuántica son establecidas por separado, átomo y campo, se pretende encontrar las consecuencias de esta interacción. Utilizando el momento dipolar del átomo que tiene dependencia directa de los operadores de subida y bajada al interactuar con el campo en función del momento y del potencial vectorial del campo [14], que a su vez depende de los operadores de creación y aniquilación, se obtiene un hamiltoniano que describe la interacción entre los cuatro operadores en conjunto y una constante de interacción átomo-campo, donde a esta constante se le conoce como frecuencia de Rabi [15] y es una frecuencia característica de la interacción.

La aportación conjunta de los tres hamiltonianos; el del átomo, el del campo y el de interacción, conforman el llamado Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC), aportación consecuente del modelo JC. La descripción del sistema mediante este Hamiltoniano da una descripción cuántica mucho más cercana que la del modelo semiclásico de Rabi, sin embargo, aún es estacionaria por lo que debe añadirse la evolución temporal del Hamiltoniano planteando la ecuación maestra del sistema [16].

La ecuación maestra se plantea para darle evolución temporal a un sistema que puede ser descrito como una distribución probabilística en un momento dado, de aquí que se representa el sistema en términos del operador de densidad para los estados posibles del sistema, la consecuencia de resolver la ecuación maestra será un operador de densidad que varía con el tiempo. Y es sensible a las condiciones iniciales. Para resolver la ecuación maestra se utiliza el método de superoperadores, además de que se utiliza un sistema disipativo, es decir, se espera que la energía pueda escapar de la cavidad a través de los espejos. Por último, se supondrá como condición importante que el sistema no presenta temperatura nula lo que modifica el problema y permite tener mayores alcances en los resultados del problema.

Capítulo 2

Fundamentos de la mecánica cuántica

2.1. Principios de la mecánica cuántica

Históricamente la mecánica cuántica en un inicio fue formulada de manera matricial por Born, Pascual Jordan y Heisenberg, este último es a quien se le atribuye. Se trata de un desarrollo elegante y riguroso en las que las variables dinámicas son representadas por matrices. Normalmente a esta parte se le conoce como mecánica matricial de Heisenberg, de manera paralela, Louis de Broglie inició un estudio que culminaría con la teoría de Erwin Schrödinger, un enfoque distinto conocido como mecánica ondulatoria [18]. Ambos enfoques son sólo dos interpretaciones distintas de la misma teoría física abordada desde bases y posturas diferentes. Para lograr un desarrollo ondulatorio se considera una onda electromagnética con amplitud, frecuencia, periodo y todas las características comunes de una onda, siguiendo este planteamiento ondulatorio la descripción cuántica de un sistema debe cumplir ciertas características ondulatorias y probabilísticas para una función que describa el estado del sistema. Para introducir la difracción característica de un fenómeno ondulatorio, se toman en cuenta los cambios de fase por lo cual esta amplitud Ψ debe ser compleja de tal manera que obedezca a las siguientes propiedades:

- Ψ debe satisfacer la ecuación de onda [19]

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

-El cuadrado del módulo de la función de onda proporciona la probabilidad de encontrar a la partícula en cada punto del espacio;

$$p(x) = N |\Psi|^2,$$

$$\int \Psi^* \Psi dv = 1.$$

2.2. Ecuación de Schrödinger

El problema que resuelve la ecuación Schrödinger es el de generalizar el concepto de onda asociada a un corpúsculo de materia, si se añade dependencia temporal a la función de onda, se obtiene la ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento de una

onda asociada a una partícula de materia con dependencia temporal. Si se considera una onda que se mueve en dirección $+x$, $\omega = 2\pi\nu$ y $v = \lambda\nu$, además $E = \hbar\nu = 2\pi\hbar\nu$ y $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$, entonces

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}, \quad (2.1)$$

esta última ecuación describe la onda equivalente de una partícula libre de energía E y momento p que se mueve en dirección $+x$. De manera general, para una partícula con momento p y con alguna interacción con su entorno, se puede escribir su energía como

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + U(x, t)\Psi. \quad (2.2)$$

De las expresiones (2.1) y (2.2) se obtiene la ecuación [20]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(x, t)\Psi.$$

El Hamiltoniano se puede escribir como $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x, t)$ y entonces se encuentra la ecuación de Schrödinger completa o dependiente del tiempo [21]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (2.3)$$

2.3. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica se fundamenta en los siguientes 5 principios [21]:

1. Todo posible estado físico $\Psi(x)$ de un sistema dado, corresponde a un cierto vector $|\Psi(x)\rangle$ del espacio de Hilbert, y recíprocamente, todo vector $|\Psi(x)\rangle$ del espacio de Hilbert corresponde a un posible estado físico del sistema. Esta correspondencia es biunívoca salvo que difieran en un factor escalar.
2. A cada observable físico corresponde en el espacio de Hilbert un operador lineal Hermítico \hat{A} que posee un conjunto completo ortogonal de vectores propios $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, \dots$ y un conjunto correspondientes de valores propios reales a_1, a_2, a_3, \dots

$$\hat{A}|\Psi_i\rangle = a_i|\Psi_i\rangle.$$

3. Si un operador \hat{A} tiene una base propia $\{a_i(x)\}$ y valores propios $\{A_i\}$, y se mide un observable A en un sistema que, inmediatamente antes de la medida esté en el estado $|\Psi\rangle$, lo más que se puede predecir del resultado de esta medida es lo siguiente: la probabilidad de que la medida del valor propio A_k sea $|\langle\Psi|A_k\rangle|^2$. De manera general para el caso discreto

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle\Psi_n|\Psi\rangle|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle},$$

y para un espectro continuo la densidad de probabilidad es

$$P(x) = \frac{\int |\Psi(x)|^2 dx}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\int |\Psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x')|^2 dx'}.$$

4. La medición de un observable ocasiona una alteración en el vector de estado del sistema, el vector de estado inmediatamente antes de la medición en el instante posterior a ella coincidirá con el vector propio correspondiente al valor propio obtenido.
5. La evolución temporal del estado $|\Psi\rangle$ de un sistema está dada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle,$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano que caracteriza la energía total de la función de onda.

2.4. Operador de densidad y sus propiedades

Un sistema físico no está caracterizado necesariamente por una función de onda $\Psi_n(x, t)$, frecuentemente este sistema está conformado por subsistemas independientes entre sí. En tal caso, un observable A estará definido en cada subsistema por A_i por lo que A depende de la aportación o el peso de cada A_i . Si se asigna el nombre ω_i al peso del subsistema i donde este peso es una fracción entre $0 \leq \omega \leq 1$, lo que quiere decir que del total de subsistemas que componen el sistema, la fracción ω_i se encuentran en el estado i , entonces el promedio de A sobre el sistema total queda definido como [22]

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i A_i, \quad (2.4)$$

la manera de pasar de la teoría de un solo vector de estado a un sistema cuya descripción requiere un conjunto apropiado de vectores de estado y sus pesos correspondientes es a partir de la llamada matriz de densidad u operador de densidad [18]

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i|,$$

los estados $|i\rangle$ pueden expresarse en términos de una base ortonormal. De tal manera que se deriva una expresión más general para el operador de densidad con estados ortonormales en la que $\hat{\rho}_{nm}$ es el peso de cada componente n, m asociado a la probabilidad de ocurrencia de ese estado

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|.$$

Por otro lado, si \hat{A} es un operador cualquiera, el valor medio por cada subensamble i es $\langle A_i \rangle = \langle i | \hat{A} | i \rangle$ tal que

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \left(\hat{\rho} \hat{A} \right)_{nn} = tr \left(\hat{\rho} \hat{A} \right),$$

donde el operador traza significa sumar los valores en la diagonal de la matriz, para este caso $\hat{\rho} \hat{A}$ [19]. De acuerdo a la definición de matriz de densidad y de valor esperado de un

operador, se pueden obtener algunas propiedades para la matriz de densidad $\hat{\rho}$ [23]. Si se toma $\hat{A} = 1$ de la definición de la matriz de densidad, entonces

$$\text{tr}(\hat{\rho}) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i| \right) = \sum_{i=1}^N \omega_i \langle i|i\rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i = 1,$$

por definición, los pesos son reales y positivos, $\omega_i^* = \omega_i$ y $\omega_i \geq 0$, es decir,

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i| \right)^\dagger = \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i| = \hat{\rho},$$

además, si $|i\rangle = \sum_n a_{in} |n\rangle$, $\langle i| = \sum_n a_{in}^* \langle n|$, al sustituir en la definición

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i| = \sum_{i=1}^N \omega_i a_{in} |n\rangle a_{in}^* \langle n|, \\ \rho_{nn} &= \sum_{i=1}^N \omega_i a_{in} a_{in}^* \langle n|n\rangle, \end{aligned}$$

utilizando la condición $\omega_i \geq 0$

$$\rho_{nn} = \sum_{i=1}^N \omega_i |a_{in}|^2 \geq 0.$$

Se ha definido que el peso satisface $0 \leq \omega_i \leq 1$, por lo que todas las entradas de la traza también cumplen la condición [20]

$$0 \leq \rho_{nn} \leq 1.$$

Si cada elemento de la matriz de densidad es representado por $\rho_{nm} = \rho_n \delta_{mn}$, la traza cumple con

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\rho}^2) &\geq (\text{tr} \rho)^2, \\ \text{tr}(\hat{\rho}^2) &\geq 1, \end{aligned}$$

cabe especificar que los estados $|i\rangle$ pueden pasar a otra representación $|j\rangle$, mediante el operador unitario \hat{U} , respetando las reglas generales de transformación de un operador

$$|j\rangle = \hat{U}|i\rangle,$$

entonces

$$\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}',$$

siendo $\hat{\rho}'$ la matriz de densidad en la nueva representación con estados $|j\rangle$. De esta propiedad sigue que el valor esperado de cualquier operador es independiente de la representación. Donde se denotan como $\langle \hat{A}' \rangle$ y $\hat{\rho}'$ a las variables en la nueva representación, es decir,

$$\langle \hat{A}' \rangle = \langle \hat{A} \rangle.$$

2.5. Operador densidad y la imagen de Schrödinger

El siguiente paso es encontrar una ecuación que describa la evolución temporal de $\hat{\rho}$, para esto es necesario desarrollar ideas previas, según la descripción de Schrödinger, aprovechando la notación de Dirac [24]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle,$$

si \hat{H} no depende del tiempo se tiene la solución general

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle,$$

aquí se introduce el operador de evolución \hat{S} [25]

$$\hat{S} \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t},$$

de esta manera se tiene todo lo necesario, pues entonces al sustituir \hat{S} en las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{S}(t)|\psi_0\rangle, \\ i\hbar \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial t} &= \hat{H}\hat{S}(t). \end{aligned}$$

Al sustituir la derivada del operador de densidad en la ecuación de Schrödinger y simplificar la expresión con notación de conmutadores se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)],$$

la cual se conoce como ecuación de von Neumann [12] y describe el desarrollo del operador de densidad a través del tiempo. Esta ecuación sólo se cumple cuando se toma el operador de densidad en la imagen de Schrödinger, es decir, cuando los estados o funciones de onda $|\psi\rangle$ dependen explícitamente del tiempo t , mientras que los operadores \hat{A}, \hat{B} no tienen dependencia temporal.

2.6. Imagen de Heisenberg

Para tener una formulación de la mecánica cuántica basada en la imagen de Heisenberg donde los estados o funciones de onda $|\psi\rangle$ no dependen del tiempo y donde los operadores $\hat{A}(t), \hat{B}(t)$ sí dependen explícitamente del tiempo t , se debe observar que ambas imágenes están relacionadas entre sí por un operador unitario que transforma de una imagen a otra.

Se nombra $\hat{T}(t)$ al operador encargado de realizar la transformación, este operador tiene dependencia temporal. Para hacer más precisa la notación, se denotan con subíndice H a los estados y operadores de la imagen de Heisenberg y con subíndice S a los estados y operadores de la imagen de Schrödinger, para establecer un punto de referencia inicial se pide que ambas imágenes coincidan en el instante $t = 0$ [26]

$$|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S,$$

es decir, el operador \hat{T} debe satisfacer las condiciones siguientes

$$|\psi\rangle_H = \hat{T}(t)|\psi\rangle_S,$$

$$\hat{T}(0) = 1,$$

una vez que se ha establecido esto, si $|\psi(t)\rangle \neq 0$, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{T}(t),$$

esta es la ecuación que se rige por la imagen de Heisenberg [26], con solución

$$\hat{T}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_s t},$$

donde \hat{T} es el inverso del operador de evolución temporal \hat{S} .

2.7. Imagen de interacción

En muchas ocasiones el Hamiltoniano del sistema puede ser dividido en dos partes, donde una de ellas es el hamiltoniano sin ningún tipo de perturbación, mientras la otra parte corresponde a las perturbaciones sucesivas hechas sobre el estado no perturbado. La evolución temporal del sistema entre estados y operadores está caracterizado por la suma de ambos [18]

$$\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^0(t) + \hat{H}_s^1(t).$$

Para que la imagen de interacción sea útil para simplificar el análisis de los fenómenos físicos y fácil de resolver matemáticamente, en general las partes se elegirán de modo que $\hat{H}_s^0(t)$ sea conocido y se resuelva exactamente, mientras que $\hat{H}_s^1(t)$ contenga una perturbación de la primera con grado de dificultad mayor. Como los vectores de estado $|\psi(r, t)\rangle$ y los operadores $\hat{A}_I(t)$ dependen del tiempo, éstos se obtienen de los vectores de estado y los operadores en la representación de Schrödinger mediante el operador unitario

$$\hat{S}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}.$$

El operador unitario puede ser aplicado a los vectores de estado y a los operadores de la imagen de Schrödinger, de tal manera que se obtienen operadores y vectores de estado en la imagen de interacción [28]:

$$\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_s t} \hat{A}_s(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{0,s} t} |\psi_s\rangle,$$

de esta manera en el tiempo $t = 0$ se obtiene que la imagen de interacción y la de Schrödinger coinciden, es decir, $|\psi\rangle_S = |\psi(t)\rangle_I$. Con el operador de transformación y la ecuación de Schrödinger, se tiene

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{0,s} t} |\psi_s\rangle,$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_s = \hat{H} |\psi\rangle_s, \quad (2.5)$$

ambas expresiones son introducidas en la ecuación (2.5) para obtener

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = -\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{H} |\Psi\rangle_s. \quad (2.6)$$

Para simplificar se toma en cuenta que $\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^0(t) + \hat{H}_s^1(t)$. Además, se puede describir

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) = \left(e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st}.$$

Si se escribe $e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} = \hat{H}_I^1(t)$, entonces

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) = \hat{H}_I^1(t) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st},$$

de esta manera en la ecuación (2.6) se sustituye $\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^0(t) + \hat{H}_s^1(t)$ para obtener la representación e interacción de un operador y utilizando la definición ya presentada se tiene que

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = \hat{H}_I^1(t) |\Psi(t)\rangle_I,$$

al utilizar la definición $\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st} \hat{A}_s(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0, st}$ y derivar con respecto al tiempo se obtiene un conmutador para la evolución temporal de operadores [29]:

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0].$$

Capítulo 3

Cuantización del campo electromagnético

Es de interés analizar el campo electromagnético de manera cuántica, por lo que es necesario ir más allá de una interpretación clásica de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Tanto el campo eléctrico \vec{E} como el campo magnético \vec{B} son cantidades medibles, así que para conformar una teoría cuántica completa debería de especificarse los operadores \hat{E} y \hat{B} .

La técnica empleada para tratar sistemas cuánticos de muchas partículas idénticas sean bosones o fermiones es llamado formalismo de la segunda cuantización, desarrollada a partir de 1927 por Paul A.M. Dirac para los bosones o partículas que respetan la estadística de Bose-Einstein y extendido a los fermiones por Eugene Wigner y Pascual Jordan en 1928, es decir, partículas que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac [30].

Tal formalismo permite tomar en cuenta automáticamente en los cálculos los aspectos estadísticos apropiados al tipo de partículas del sistema. Además, facilita, extender la mecánica cuántica no relativista a sistemas en los cuales el número de partículas no es una constante del movimiento, extensión que por otra parte es necesaria para describir los fenómenos que se presentan en el dominio relativista.

En este sentido para iniciar el proceso de cuantización del campo electromagnético debe partirse por establecer que el fotón es un bosón, y en consecuencia el proceso de cuantización se desarrollara bajo este marco [24].

3.1. Descomposición espectral del campo eléctrico y magnético

Se tiene como punto de partida una cavidad cúbica de lado L y de volumen L^3 vacía, por simplicidad vamos a considerar condiciones de contorno periódicas. El campo electromagnético dentro de la cavidad respeta las ecuaciones de Maxwell; considerando que

la densidad de carga dentro de la cavidad es nula [31], se tiene que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.4)$$

Por la propiedad vectorial $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ y la ecuación (3.4) resulta inmediato deducir que puede obtenerse una expresión para los campos eléctrico y magnético, en términos de los potenciales

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.5)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Obteniendo la ecuación

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

donde \vec{J} , la intensidad magnética, está conformada por la aportación del campo magnético y la magnetización del medio, \vec{D} , el desplazamiento eléctrico, está conformado por una aportación del campo eléctrico y otra de parte de la polarización eléctrica del medio [32]. Al introducir (3.5) y (3.6) en (3.7) se llega a una ecuación parecida a la ecuación de onda pero para el potencial del campo magnético, por lo que la manera de solucionarla es similar a la ecuación de onda [33]:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

3.2. Energía del campo eléctrico y magnético

El análisis a seguir es muy similar al utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger completa salvo por algunas consideraciones extras, puede escribirse la solución de la ecuación (3.8) utilizando la velocidad de propagación $v = c = \frac{\omega}{k}$, además de considerar que debe cumplir periodicidad en el espacio y en el tiempo, es decir, $kL = 2\pi l_i$ con $l_i = x, y, z$ y $\omega T = 2\pi$, también se renombran las amplitudes para ajustarlas a la notación de tal manera que la solución está dada por [33],

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Dado que la solución general es una superposición de ondas, en igual o diferente dirección, debe considerarse en la solución, la suma de todos los posibles vectores de onda en sentido positivo o negativo, es decir, todos los $\vec{A}_{\vec{k}}$ y sus complejos conjugados $\vec{A}_{\vec{k}}^*$, tal que

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right],$$

los coeficientes de amplitud se determinan con la condición impuesta de transversalidad:

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} = 0.$$

Con la solución de la ecuación de onda para el potencial vectorial \vec{A} se pueden describir los campos eléctrico y magnético, teniendo en cuenta que durante la deducción de la ecuación del potencial \vec{A} se considera que ϕ es nulo (ya que la aportación del campo eléctrico no es comparable al magnético), por lo que los campos quedan como

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\vec{k}} \left[ick\vec{a}_{\vec{k}}e^{i\omega(\vec{k})t-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + ick\vec{a}_{\vec{k}}^*e^{-i\omega(\vec{k})t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right], \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[i(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}})e^{i\omega(\vec{k})t-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + i(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}^*)e^{-i\omega(\vec{k})t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right].\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores cumplen perfectamente el trabajo de describir el campo eléctrico y magnético como un desarrollo de ondas planas de los campos. Ahora se trata de encontrar una expresión para la energía almacenada dentro de estos campos (a la que se le nombrará H) utilizando estos resultados. Para esto es necesario sumar la energía almacenada dentro del campo eléctrico y magnético por separado [34]

$$H = \int_V (\mathcal{U}_E + \mathcal{U}_B) dr^3,$$

donde $\mathcal{U}_E = \frac{1}{2}\epsilon_o E^2$ es la energía almacenada en el campo eléctrico y $\mathcal{U}_B = \frac{1}{2\mu_o} B^2$ es la energía almacenada en el campo magnético. Al sustituir las ecuaciones del campo eléctrico y magnético dentro de la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}\epsilon_o V c^2 \sum_{\vec{k}} k^2 \left[2\vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* - \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} e^{2i\omega(\vec{k})t} - \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-2i\omega(\vec{k})t} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_o} V \sum_{\vec{k}} k^2 \left[2\vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* + \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} e^{2i\omega(\vec{k})t} + \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-2i\omega(\vec{k})t} \right],\end{aligned}$$

dado que $c^2\epsilon_o = \frac{1}{\mu_o}$ los términos con exponenciales se anulan. Así, se obtiene una base con la cual escribir el Hamiltoniano para este sistema de campos y la expresión para la energía [34]

$$H = \frac{2V}{\mu_o} \sum_{\vec{k}} k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^*. \quad (3.9)$$

3.3. Variables canónicas

La formulación de Hamilton se basa en una visión diferente a la formulación de Lagrange donde el uso de coordenadas generalizadas termina de manera inevitable por incluir ecuaciones de movimiento de segundo orden dentro del análisis.

La diferencia con la formulación de Hamilton inicia cuando se utiliza las cantidades de movimiento conjugados o generalizados dejando de lado las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, i.e.,

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}_i},$$

con esto en mente las cantidades (Q, P) se denominan variables canónicas. Entonces para continuar con el proceso de cuantización se requiere reescribir la ecuación (3.9) en el marco del lenguaje de Hamilton, haciendo uso de las variables canónicas, esto es, coordenadas y momentos generalizados que satisfacen las ecuaciones de Hamilton. Se define entonces las variables canónicas de la siguiente manera [35]

$$\vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega(\vec{k})t} + \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\omega(\vec{k})t} \right], \quad (3.10)$$

$$\vec{P}_{\vec{k}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[i\omega(\vec{k}) \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\omega(\vec{k})t} - i\omega(\vec{k}) \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\omega(\vec{k})t} \right]. \quad (3.11)$$

Al resolver el sistema 2×2 con las incógnitas \vec{a} y \vec{a}^* , se obtiene

$$\vec{a} = \frac{1}{2\alpha} e^{-i\omega(\vec{k})t} \left(\vec{Q}_{\vec{k}} - \frac{i}{\omega(\vec{k})} \vec{P}_{\vec{k}} \right), \quad (3.12)$$

$$\vec{a}^* = \frac{1}{2\alpha} e^{i\omega(\vec{k})t} \left(\vec{Q}_{\vec{k}} + \frac{i}{\omega(\vec{k})} \vec{P}_{\vec{k}} \right), \quad (3.13)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.12) y (3.13) en la ecuación (3.9) de la energía, además de utilizar $\mu_o \epsilon_o = c^{-2}$ y $\frac{k^2}{\omega^2} = c^{-2}$ se obtiene la expresión

$$H = \frac{\epsilon_o V}{2\alpha^2} \sum_{\vec{k}} \left[\omega^2(\vec{k}) Q_{\vec{k}}^2 + P^2 \right].$$

La constante α toma importancia porque es la que determinará si las variables canónicas propuestas satisfacen las ecuaciones de Hamilton [36],

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\vec{k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{P}_{\vec{k}}}, \\ \dot{P}_{\vec{k}} &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{Q}_{\vec{k}}}. \end{aligned}$$

El α requerido resulta ser

$$\alpha = \sqrt{\epsilon_o V},$$

la deducción continúa considerando la transversalidad de los campos, es decir, los vectores $Q_{\vec{k}}$ y $P_{\vec{k}}$ son normales a la dirección de propagación de la onda dictada por el vector de onda \vec{k} [37]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, j} \left[\omega^2(\vec{k}) Q_{\vec{k}, j}^2 + P_{\vec{k}, j}^2 \right], \quad (3.14)$$

donde j denota una de las componentes ortogonales de la polarización lineal.

3.4. Operadores de creación, aniquilación y número

En su criterio de cuantización P. Dirac sugirió que el campo electromagnético podía ser cuantizado haciendo que las variables canónicas \hat{Q} y \hat{P} obedecieran las relaciones de

conmutación siguientes [12]:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar, \quad (3.15)$$

$$[\hat{Q}, \hat{Q}] = 0, \quad (3.16)$$

$$[\hat{P}, \hat{P}] = 0. \quad (3.17)$$

Además, se definen los operadores de creación y aniquilación de la siguiente manera [38],

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} \left(\hat{Q} + \frac{i}{\omega(\vec{k})} \hat{P} \right), \quad (3.18)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} \left(\hat{Q} - \frac{i}{\omega(\vec{k})} \hat{P} \right). \quad (3.19)$$

Los conmutadores (3.15), (6.3) y (3.17), se cumplen si se cumple la sugerencia de P. Dirac para \hat{a} y \hat{a}^\dagger [12, 27], i. e.,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.20)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 0, \quad (3.21)$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (3.22)$$

Las ecuaciones (3.18) y (3.19) conforman un sistema cuadrado de dos incógnitas, al resolverlo se puede encontrar expresiones para las coordenadas generalizadas en términos de los operadores de creación y aniquilación, i. e.,

$$\hat{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega(\vec{k})}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.23)$$

$$\hat{P} = \frac{\omega}{2i} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega(\vec{k})}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.24)$$

Con estas nuevas expresiones se puede reescribir el Hamiltoniano de la ecuación (3.14) sustituyendo las ecuaciones (3.23) y (3.24). Con lo que se obtiene la ya conocida expresión cuántica para las energías del oscilador armónico aplicado al campo electromagnético [39, 32].

$$\hat{H} = \omega(\vec{k})\hbar \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.25)$$

Del Hamiltoniano (3.25) se puede definir los operadores número de ocupación, también se le conoce como operador número de partículas [40]:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.26)$$

Si el estado $|n\rangle$ es estado propio del operador \hat{N} con valor propio n , se tiene que

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle,$$

entonces el valor propio de energía para este estado es [41]

$$\hat{H}|n\rangle = \left(\frac{1}{2} + n \right) \omega\hbar|n\rangle,$$

en esta ecuación se ve claramente la interpretación de n como el número de partículas, donde el estado de energía más bajo es el estado fundamental y corresponde al estado en el que el número de partículas es igual a 0, el valor propio de la energía está dado por $\frac{\omega\hbar}{2}$.

Usando las propiedades de los conmutadores se pueden demostrar las siguientes identidades, tomando en cuenta que se suprimen los subíndices, dado que se considera que se trabaja bajo el mismo vector de onda y la misma componente de polarización:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}^\dagger, \\ [\hat{N}, \hat{a}] &= -\hat{a}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que, si se impone la normalización $\langle n|n\rangle = 1$ para todo n , se tiene las siguientes propiedades [20]:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3.27)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

aplicando el mismo operador m veces se puede obtener de manera general las siguientes expresiones

$$\hat{a}^{\dagger m}|n\rangle = \sqrt{\frac{(m+n)!}{n!}}|m+n\rangle, \quad (3.30)$$

$$\hat{a}^m|n\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}|n-m\rangle. \quad (3.31)$$

3.5. Estados coherentes

Desde un principio se ha especificado el tipo de partículas con las que se trabaja, las consideraciones y su naturaleza cambia completamente de bosones a fermiones, el comportamiento de los bosones es distinto al de los fermiones, para el fotón, como bosón, no existe el principio de exclusión de Pauli.

Pueden producirse interacciones entre grandes cantidades de bosones para entrar en estados uniformes de vibración unitaria que son llamados estados de coherencia cuántica, fueron introducidos por Schrödinger por el año de 1926, y son los fundamentos de lo que hoy se conoce como óptica cuántica [29].

Matemáticamente un estado coherente $|\alpha\rangle$ se define como el estado propio del operador de aniquilación \hat{a} con valor propio α [46]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.32)$$

A su vez los estados propios $|\alpha\rangle$ también son estados propios a la izquierda del operador de creación, con valor propio conjugados

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*, \quad (3.33)$$

dado que \hat{a} no es hermitiano, en general α es un número complejo que puede ser escrito como

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta},$$

donde $|\alpha|$ es la amplitud y θ es la fase del estado $|\alpha\rangle$. El estado propio $|\alpha\rangle$ puede ser desarrollado en la base de estados propios $|n\rangle$, como una combinación lineal

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle,$$

y al aplicar \hat{a} se obtiene

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle,$$

de estas expresiones se obtiene

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0,$$

y entonces

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Nuevamente, al normalizar esta expresión con $\langle n|n\rangle = 1$, se puede obtener el valor de $C_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$, y entonces se tiene que

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right)^* \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle = |C_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}.$$

Así,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

es la representación de un estado coherente [46].

Capítulo 4

Método de superoperadores

Para encontrar el desarrollo temporal de un sistema cuántico se recurre a resolver la ecuación de Schrödinger, cuya solución, por ejemplo, si el hamiltoniano no depende del tiempo, es la siguiente

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\phi(0)\rangle.$$

Para ejemplificar en el método de superoperadores y para factorizar operadores exponenciales se hace la consideración de tomar el operador como una suma de otros operadores, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{i}(\hat{A} + \hat{B})$, donde el operador exponencial se aplica sobre el estado $|\phi(0)\rangle$.

$$|\phi(t)\rangle = e^{(\hat{A}+\hat{B})t}|\phi(0)\rangle,$$

el problema de la factorización de operadores exponenciales surge al evaluarlos, si la ecuación anterior se expande en una serie de potencias se obtiene $(\hat{A} + \hat{B})^n$, mientras más grande es n más difícil es evaluar los operadores, así que es conveniente factorizar los operadores para simplificar el cálculo. El caso simple ocurre cuando los operadores conmutan pero en general lo que ocurrirá es que la factorización no es directa

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})} \neq e^{\hat{A}}e^{\hat{B}},$$

cuando se cumplen los conmutadores $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ es posible factorizar el operador exponencial ya que $[\hat{A}, \hat{B}]$ es un número y no un operador, quedando de la siguiente manera

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]},$$

utilizando esta factorización al momento de aplicar el operador exponencial como una expansión en series de potencia se vuelve directo aplicar un solo operador elevado a la n y después el otro. Con este ejemplo se puede ver que, sí es posible separar el argumento de los operadores exponenciales.

4.1. Factorización de operadores exponenciales

Si un operador de densidad obedece la siguiente ecuación

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R}+\hat{J})t}\hat{\rho}(0), \tag{4.1}$$

donde los operadores respetan la siguiente regla de conmutación:

$$\left[\hat{R}, \hat{J} \right] \hat{\rho} = \hat{S} \hat{J} \hat{\rho}, \quad (4.2)$$

$$\left[\hat{R}, \hat{S} \right] \hat{\rho} = 0. \quad (4.3)$$

Entonces, se pueden definir las siguientes ecuaciones, para la función $f(t)$

$$f(t) = e^{(\hat{R} + \hat{J})t},$$

$$f(t) = e^{\hat{R}t} e^{g(t)\hat{J}}.$$

El proceso de separación comienza al derivar ambas ecuaciones con respecto a t

$$\frac{df(t)}{dt} = (\hat{R} + \hat{J})f(t), \quad (4.4)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R} e^{\hat{R}t} e^{g(t)\hat{J}} + e^{\hat{R}t} \frac{dg(t)}{dt} \hat{J} e^{g(t)\hat{J}}. \quad (4.5)$$

En la ecuación (4.5) se introduce el operador identidad $I = e^{\hat{R}t} e^{-\hat{R}t}$ y agrupando se obtiene lo siguiente

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R} (e^{\hat{R}t} e^{g(t)\hat{J}}) + \frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t} (e^{\hat{R}t} e^{g(t)\hat{J}}), \quad (4.6)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R} f(t) + \frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t} f(t). \quad (4.7)$$

El producto de los operadores $e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t}$ que aparecen en los segundos términos se pueden desarrollar en series de potencias y al agrupar se obtienen los conmutadores [42]

$$e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t} = \hat{J} + t \left[\hat{R}, \hat{J} \right] + \frac{t^2}{2!} \left[\hat{R}, \left[\hat{R}, \hat{J} \right] \right] + \dots,$$

si se utiliza el conmutador definido (4.2) y la propiedad $\left[\hat{R}, \hat{S} \hat{J} \right] = \left[\hat{R}, \hat{S} \right] \hat{J} + \hat{S} \left[\hat{R}, \hat{J} \right]$, se encuentra

$$\left[\hat{R}, \hat{S} \hat{J} \right] = 0 + \hat{S} \hat{S} \hat{J} = \hat{S}^2 \hat{J}, \quad (4.8)$$

entonces al sustituir en (4.8) y factorizar el operador \hat{J} , se tiene

$$e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t} = \left(I + t \hat{S} + \frac{(t \hat{S})^2}{2!} + \dots \right) \hat{J},$$

por lo que

$$e^{\hat{R}t} \hat{J} e^{-\hat{R}t} = e^{\hat{S}t} \hat{J}. \quad (4.9)$$

El resultado (4.9) se sustituye en (4.7), tal que

$$\frac{df(t)}{dt} = \left[\hat{R} + \frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{S}t} \hat{J} \right] f(t), \quad (4.10)$$

si se comparan las ecuaciones (4.4) y (4.10), se observa que sólo se cumple si

$$\frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{S}t} = 1,$$

es decir,

$$g(t) = -e^{-\hat{S}t} \hat{S}^{-1} \Big|_0^t = (1 - e^{-\hat{S}t}) \hat{S}^{-1},$$

con lo que $f(t)$ se puede escribir de la siguiente forma

$$f(t) = e^{\hat{R}t} e^{(1-e^{-\hat{S}t})\hat{S}^{-1}},$$

entonces siempre que se pueda obtener los conmutadores (4.2) y (4.3) es posible factorizar (4.1) y por lo tanto el operador de densidad puede ser escrito de la forma

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{R}t} e^{(1-e^{-\hat{S}t})\hat{S}^{-1}} \hat{J} \hat{\rho}(0),$$

donde el operador de densidad ya se ha separado y al realizar la expansión en series de potencia no aparece el problema de los operadores en forma de binomio a la n , con lo que se pueden aplicar de uno en uno.

Capítulo 5

Interacción átomo campo

5.1. Operadores de subida y bajada

Se tiene un sistema simple de un átomo de dos niveles descrito por el hamiltoniano de un dipolo, donde el sistema atómico cuántico tiene dos niveles de energía [42]. Tal conjunto de estados del sistema cumple con la condición de que es un conjunto ortonormal de tal manera que,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^2 |i\rangle\langle i| = 1, i = 1, 2. \quad (5.2)$$

De manera general, todos los estados del sistema están representados en el estado ψ como una combinación linealmente independiente.

$$|\psi\rangle = C_1|g\rangle + C_2|e\rangle = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en la cuantización del campo se introdujeron convenientemente los operadores no Hermitianos \hat{a} y \hat{a}^\dagger , que cumplen con el papel de subir y bajar la excitación del campo en $\hbar\omega$, se introducirán operadores de subida y de bajada $\hat{\sigma}_-$ y $\hat{\sigma}_+$ que modificarán el nivel de excitación en $\hbar\omega_o$ para los estados del sistema atómico. Estos operadores cumplen las siguientes reglas

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_-|e\rangle &= |g\rangle, & \hat{\sigma}_+|e\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_-|g\rangle &= |0\rangle, & \hat{\sigma}_+|g\rangle &= |e\rangle \end{aligned} \right\}.$$

De manera análoga los operadores $\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ toman el papel del operador número para los operadores de creación y de aniquilación en el campo, los operadores de subida y de bajada pueden ser aplicados de manera consecutiva siendo asociativa la aplicación de éstos, salvo en los dos casos siguientes, satisfacen

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+|e\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-|g\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_- &= 0 \\ \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_+ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Siguiendo la notación del apartado anterior los operadores de subida y de bajada se pueden escribir en términos de los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_- &= |g\rangle\langle e|, \\ \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g|, \\ \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ &= |g\rangle\langle g|, \\ \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- &= |e\rangle\langle e|.\end{aligned}$$

5.2. Interacción exacta Átomo-Campo

Para describir de manera satisfactoria la interacción Átomo-Campo es necesario tomar en cuenta el Hamiltoniano del campo como primera aportación, la segunda aportación a tomar en cuenta es la del átomo y la última es la interacción entre ambos que es consecuencia directa de la imagen de interacción.

Dada la naturaleza atómica, el sistema puede ser descrito por un oscilador armónico, si los dos estados son nombrados por $|g\rangle$ y $|e\rangle$, lo niveles están cuantizados en múltiplos de $\hbar\omega_0$ entonces los niveles de energía son los siguientes,

$$\hat{H}|e\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_0\right)|e\rangle, \quad (5.3)$$

$$\hat{H}|g\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_0\right)|g\rangle. \quad (5.4)$$

De acuerdo a la definición de la matriz de Pauli \hat{R}_3 [22], se puede obtener una expresión para los estados en términos de este operador:

$$\begin{aligned}\hat{R}_3|e\rangle &= \frac{1}{2}|e\rangle\langle e|e\rangle = \frac{1}{2}|e\rangle, \\ \hat{R}_3|g\rangle &= \frac{1}{2}|g\rangle\langle g|g\rangle = -\frac{1}{2}|g\rangle,\end{aligned}$$

con esta notación puede reescribirse el Hamiltoniano del átomo de las ecuaciones (5.3) y (5.4) utilizando el operador de polarización atómica $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ [41]:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \hbar\omega_0 \hat{R}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z,$$

con el objetivo de simplificar la notación, se introduce E_i la energía del átomo en el estado i . Como $|i\rangle$ representa el conjunto completo de los estados propios de energía atómica, donde la ecuación de valores propios es $\hat{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle$, entonces

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z, \quad (5.5)$$

donde ω_0 es la frecuencia angular.

5.3. Interacción electromagnética carga-campo

Para ver la interacción, se supone que el campo electromagnético al igual que la materia están cuantizados, de esta manera se busca una solución exacta y no una aproximación

semiclásica donde el campo no está cuantizado. Ya se ha encontrado el Hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado, está dado por

$$\hat{H}_c = \sum_{\vec{k},j} \omega \hbar \left[\hat{n} + \frac{1}{2} \right],$$

donde \hat{n} es el operador de número. Supóngase una partícula de carga e , masa m , y momento \hat{p} , localizada en la posición \vec{r} y que está influenciada por un potencial $U(\vec{r})$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}),$$

al aplicar la regla de sustitución mínima para el momento, es decir, $\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - e\hat{A}$ [43], que caracteriza el momento de un sistema con una carga y un campo electromagnético a partir del vector potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\vec{k},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \frac{(\vec{p} - e\hat{A})^2}{2m} + eU(\vec{r}), \\ \hat{H} &= \sum_{\vec{k},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}) \right] - \frac{e}{2m} [\hat{p} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{p}] + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2, \end{aligned}$$

es posible tratar a \hat{p} y \hat{A} como variables de conmutación y puede demostrarse que $\hat{p} \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{p}$ [43], entonces

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}) \right] - \frac{e}{m} (\hat{p} \cdot \hat{A}) + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2.$$

Como se puede ver el Hamiltoniano total está conformado por tres términos: el Hamiltoniano del campo, el de la partícula y el Hamiltoniano para la interacción, por lo que entonces el Hamiltoniano de interacción se define como

$$\hat{H}_I = -\frac{e}{m} (\hat{p} \cdot \hat{A}) + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2, \quad (5.6)$$

dado que el operador de potencial vectorial correspondiente al campo electromagnético, fundamentalmente tiene una dependencia al inverso del radio al cuadrado, entonces el término del potencial al cuadrado se hace despreciable para el análisis, así $\frac{e^2}{2m} \hat{A}^2$ en la interacción puede ser despreciado y si se relaciona el momento canónico del electrón p con $\frac{m\mu}{e}$ donde μ es el momento dipolar atómico [41], después de un desarrollo matemático se obtiene el Hamiltoniano de interacción,

$$\hat{H}_I = i\omega_0 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \left[(\mu_{12}\hat{b} - \mu_{12}^*\hat{b}^\dagger) \cdot (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}}) \right].$$

Se define el elemento matricial del dipolo eléctrico

$$\mathcal{P}_{ij} = e\langle i|\vec{r}|j\rangle,$$

también, se define la constante

$$\mathcal{E}_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega(\vec{k})}{2\epsilon_0 V}},$$

y el tensor

$$g_k^{ij} = \frac{\mathcal{P}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_k \mathcal{E}_k}{\hbar},$$

con lo que se llega a la expresión para el hamiltoniano de interacción [44]

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{ij} \sum_k g_k^{ij} \hat{b}_{ij} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}} \right), \quad (5.7)$$

donde

$$\hat{b}_{ij} = |i\rangle\langle j|.$$

5.4. Campo monomodo en equilibrio térmico

Para estudiar las implicaciones térmicas dentro de la cavidad debe tenerse en cuenta que las fluctuaciones del campo electromagnético dependen en amplia medida de su naturaleza bosónica y un análisis térmico de la dinámica del sistema debe incluir el caso particular de la cavidad cuántica a temperatura cero. Un campo monomodo térmico es un campo del que sólo se conoce la energía promedio [43]

$$\langle \hat{H} \rangle = \text{tr}\{\hat{\rho}\hat{H}\}. \quad (5.8)$$

El objetivo aquí es determinar la matriz de densidad $\hat{\rho}$ que describe el campo electromagnético. Se puede encontrar $\hat{\rho}$ maximizando la entropía del modo sujeto a restricciones como (5.8). Recordando que en mecánica estadística la entropía esta dada por la ecuación

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i,$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y P_i es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado i [46]. Para dar el paso hacia la mecánica cuántica se mantiene el concepto de entropía, pero se hace una pequeña modificación cambiando P_i por la matriz de densidad ρ y cambiando la suma por la traza,

$$S = -k_B \text{tr}\{\rho \ln \rho\},$$

consecuentemente la equivalencia cuántica de la condición de normalización $\sum_i P_i = 1$ es

$$\text{tr}\{\rho\} = 1, \quad (5.9)$$

las ecuaciones (5.8) y (5.9) son las dos limitaciones bajo las que se desea maximizar la entropía. Al encontrar la variación de entropía δS debida a una variación de la matriz de densidad $\delta\rho$

$$\delta S \approx -k_B \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \ln \rho) \delta \rho \right) = -k_B \text{tr} ((1 + \ln \rho) \delta \rho),$$

se busca que se cumplan las condiciones $tr\{\delta\rho\} = 0$ y $tr\{\mathcal{H}\delta\rho\} = 0$, por lo que se añaden los parámetros λ y β , entonces para maximizar la entropía se debe cumplir $\delta S = 0$ para algún $\delta\rho$, por lo que al resolver $1 + \ln\rho + \lambda + \beta\mathcal{H} \geq 0$ se obtiene

$$\rho = e^{-(1+\lambda)} e^{-\beta\mathcal{H}}. \quad (5.10)$$

Utilizando la condición (5.9) se define

$$Z \equiv e^{1+\lambda} = tr\{e^{-\beta\mathcal{H}}\}, \quad (5.11)$$

la cual es llamada función de partición del sistema; es bien conocido de la mecánica estadística clásica que $\beta = \frac{1}{k_B T}$ y que al sustituir (5.11) en (5.10) se tiene

$$\rho = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}}}{Z},$$

aquí T es la temperatura absoluta del sistema. Este último operador de densidad describe cualquier sistema con Hamiltoniano \mathcal{H} en equilibrio térmico. Por supuesto, el punto clave del análisis termodinámico es definir de acuerdo a la teoría de la mecánica estadística el número medio de fotones de la siguiente manera,

$$\bar{n} = \sum_n n \rho_{nm} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\nu} - 1},$$

donde ν es la frecuencia de oscilación del campo monomodo [43].

5.5. Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings (JCM) es usado en el estudio de la óptica cuántica como un desarrollo teórico que describe una cavidad óptica de dos niveles energéticos conocido como átomo de dos niveles que interactúa con un campo electromagnético cuantizado. Se considera que el baño de radiación electromagnética puede causar emisión y absorción espontánea. El modelo fue desarrollado por Edwin Jaynes y Fred Cummings en 1963; el JCM revela resultados interesantes entre los que resalta la existencia de oscilaciones de Rabi entre los estados del sistema de dos niveles a medida que interactúa con el campo electromagnético, la existencia de *colapsos* y *revivimientos* de la probabilidad de detectar al sistema de dos niveles en algún estado cuando el campo está en un estado coherente. Si se representan los estados del átomo mediante los vectores $|g\rangle$ para el estado base y $|e\rangle$ para el estado excitado. Al mismo tiempo el campo está representado por los estados numéricos $|n\rangle$. Estos operadores respetan las acciones,

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

Si se omite en cada Hamiltoniano la energía del estado base, dado que esas energías corresponden a la energía de estado fundamental y puede elegirse el nivel de energía base de manera que no interfiera en la evolución del hamiltoniano, las ecuaciones (3.25), (5.5) y (5.7), además de poner la energía del estado excitado como $\hbar\omega$, entonces se puede escribir el Hamiltoniano para el sistema compuesto átomo-campo como [46]

$$\hat{H}_T = \hbar\omega\hat{n} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{a}),$$

aquí el primer término del Hamiltoniano describe el operador que representa el campo dentro de la cavidad y es igual al producto de un paquete de energía (cuanto), es decir, la energía de un fotón $\hbar\omega$ y el operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ que al aplicarse en un estado del campo arroja como valor propio el número de fotones en la cavidad. El segundo término es el operador que representa el átomo de dos niveles, donde $\hbar\omega_0$ es la diferencia de energía entre estos. El último término describe el Hamiltoniano que representa la interacción entre el átomo y el campo dentro de la cavidad.

Este Hamiltoniano es conocido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

Capítulo 6

Solución de la ecuación maestra del sistema

6.1. Detalles de la cavidad cuántica

Para estudiar el sistema de la cavidad cuántica se considera las aportaciones de energía del Hamiltoniano y las pérdidas de energía presentes en la cavidad, entonces la ecuación a resolver para el sistema es la siguiente

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I, \hat{\rho}(t)] + \hat{\mathbb{L}}_F\hat{\rho}(t) + \hat{\mathbb{L}}_A\hat{\rho}(t), \quad (6.1)$$

los operadores $\hat{\mathbb{L}}_A$ y $\hat{\mathbb{L}}_F$ representan las pérdidas de energía debido a las paredes de la cavidad y a la temperatura a la que se encuentran [19], están definidos por

$$\hat{\mathbb{L}}_A\hat{\rho}(t) = k_1(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger). \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathbb{L}}_F\hat{\rho}(t) = k_2(2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (6.3)$$

donde k_1 y k_2 están dadas por:

$$k_1 = \frac{C}{2}\bar{n},$$
$$k_2 = \frac{C}{2}(\bar{n} + 1),$$

en estas, \bar{n} es el número medio de fotones dentro de la cavidad que depende de la temperatura, definido por $\bar{n} = (\exp(\frac{\nu\hbar}{kT}) - 1)^{-1}$ y C es la constante de decaimiento de la cavidad, en ella estan caracterizadas las propiedades geométricas y el tipo de material del que está hecha.

Se define la **desintonía** como $\delta = \omega_A - \omega_F$, que mide el desfaseamiento entre los dos sistemas, en el caso no resonante, cuando el desfaseamiento es muy grande se tiene el llamado “límite dispersivo” cuyo Hamiltoniano efectivo es [45]:

$$\hat{H}_I = \chi\hbar\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z, \quad (6.4)$$

donde χ es la constante de interacción entre átomo y campo y mide que tan acoplados están.

Al sustituir el hamiltoniano (6.4) y los superoperadores (6.2), (6.3) en la ecuación maestra (6.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = & -i\chi\hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) + i\chi\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_z + k_1(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger) \\ & + k_2(2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}), \end{aligned}$$

si se define $k_{12} = k_1 + k_2$ y se considera $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, se obtiene

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -i\chi\hat{\sigma}_z\hat{n}\hat{\rho}(t) + i\chi\hat{\rho}(t)\hat{n}\hat{\sigma}_z + k_12\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} + k_22\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - k_{12}\hat{\rho}(t)\hat{n} - k_{12}\hat{n}\hat{\rho}(t) - 2k_1\hat{\rho}(t), \quad (6.5)$$

esta es la ecuación diferencial que se desea resolver.

6.2. Aplicación del método de superoperadores

Para aplicar el método de superoperadores lo primero es definirlos. Sean los superoperadores

$$\hat{J}_1\hat{\rho}(t) = 2k_1\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a}, \quad (6.6)$$

$$\hat{J}_2\hat{\rho}(t) = 2k_2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger, \quad (6.7)$$

$$\hat{R}\hat{\rho}(t) = i\chi\hat{\rho}(t)\hat{n}\hat{\sigma}_z - i\chi\hat{\sigma}_z\hat{n}\hat{\rho}(t), \quad (6.8)$$

$$\hat{S}\hat{\rho}(t) = -k_{12}\hat{\rho}(t)\hat{n} - k_{12}\hat{n}\hat{\rho}(t), \quad (6.9)$$

$$\hat{L}\hat{\rho}(t) = i\chi\hat{\sigma}_z\hat{\rho}(t) - i\chi\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_z. \quad (6.10)$$

Si se sustituyen los superoperadores en la ecuación (6.5) se obtiene

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -2k_1\hat{\rho}(t) + \hat{J}_1\hat{\rho}(t) + \hat{R}\hat{\rho}(t) + \hat{S}\hat{\rho}(t) + \hat{J}_2\hat{\rho}(t). \quad (6.11)$$

Como los operadores \hat{a}^\dagger , \hat{a} y $\hat{\sigma}_z$ no dependen del tiempo, se puede ver que es una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \left(-2k_1 + \hat{J}_1 + \hat{R} + \hat{S} + \hat{J}_2 \right) \hat{\rho}(t), \quad (6.12)$$

cuya solución es

$$\hat{\rho}(t) = e^{t(-2k_1 + \hat{J}_1 + \hat{R} + \hat{S} + \hat{J}_2)} \hat{\rho}(0). \quad (6.13)$$

La dificultad está en aplicar los superoperadores a $\hat{\rho}(0)$, por lo que se propone la siguiente separación de la exponencial

$$\hat{\rho}(t) = e^{f_0(t)} e^{f_1(t)\hat{J}_1} e^{f_2(t)\hat{R}} e^{f_3(t)\hat{S}} e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0), \quad (6.14)$$

para conocer la forma de las funciones se calcula la derivada de $\hat{\rho}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & \frac{df_0(t)}{dt} e^{f_0(t)} e^{f_1(t)\hat{J}_1} e^{f_2(t)\hat{R}} e^{f_3(t)\hat{S}} e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0) \\ & + e^{f_0(t)} \frac{df_1(t)}{dt} \hat{J}_1 e^{f_1(t)\hat{J}_1} e^{f_2(t)\hat{R}} e^{f_3(t)\hat{S}} e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0) \\ & + e^{f_0(t)} e^{f_1(t)\hat{J}_1} \frac{df_2(t)}{dt} \hat{R} e^{f_2(t)\hat{R}} e^{f_3(t)\hat{S}} e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0) \\ & + e^{f_0(t)} e^{f_1(t)\hat{J}_1} e^{f_2(t)\hat{R}} \frac{df_3(t)}{dt} \hat{S} e^{f_3(t)\hat{S}} e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0) \\ & + e^{f_0(t)} e^{f_1(t)\hat{J}_1} e^{f_2(t)\hat{R}} e^{f_3(t)\hat{S}} \frac{df_4(t)}{dt} \hat{J}_2 e^{f_4(t)\hat{J}_2} \hat{\rho}(0), \end{aligned}$$

lo siguiente es sacar las derivadas por un lado y observar que

$$e^{f_i(t)\hat{A}}e^{-f_i(t)\hat{A}} = e^{-f_i(t)\hat{A}}e^{f_i(t)\hat{A}} = \hat{I}, \quad (6.15)$$

donde \hat{A} es un operador y $f_i(t)$ una función del tiempo únicamente. Aplicando esto se introduce el operador identidad en cada sumando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \frac{df_0(t)}{dt}e^{f_0(t)}e^{f_1(t)\hat{J}_1}e^{f_2(t)\hat{R}}e^{f_3(t)\hat{S}}e^{f_4(t)\hat{J}_2}\hat{\rho}(0) \\ &\quad + \frac{df_1(t)}{dt}\hat{J}_1e^{f_0(t)}e^{f_1(t)\hat{J}_1}e^{f_2(t)\hat{R}}e^{f_3(t)\hat{S}}e^{f_4(t)\hat{J}_2}\hat{\rho}(0) \\ &\quad + \frac{df_2(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\hat{R}e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right)e^{f_0(t)}e^{f_1(t)\hat{J}_1}e^{f_2(t)\hat{R}}e^{f_3(t)\hat{S}}e^{f_4(t)\hat{J}_2}\hat{\rho}(0) \\ &\quad + \frac{df_3(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\left(e^{f_2(t)\hat{R}}\hat{S}e^{-f_2(t)\hat{R}}\right)e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right)e^{f_0(t)}e^{f_1(t)\hat{J}_1}e^{f_2(t)\hat{R}}e^{f_3(t)\hat{S}}e^{f_4(t)\hat{J}_2}\hat{\rho}(0) \\ &\quad + \frac{df_4(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\left(e^{f_2(t)\hat{R}}\left(e^{f_3(t)\hat{S}}\hat{J}_2e^{-f_3(t)\hat{S}}\right)e^{-f_2(t)\hat{R}}\right)e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right) \\ &\quad \times e^{f_0(t)}e^{f_1(t)\hat{J}_1}e^{f_2(t)\hat{R}}e^{f_3(t)\hat{S}}e^{f_4(t)\hat{J}_2}\hat{\rho}(0), \end{aligned}$$

se puede ver que la parte derecha de cada sumando es el operador $\rho(t)$ propuesto, por lo que después de sustituir se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \frac{df_0(t)}{dt}\hat{\rho}(t) + \frac{df_1(t)}{dt}\hat{J}_1\hat{\rho}(t) + \frac{df_2(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\hat{R}e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right)\hat{\rho}(t) \\ &\quad + \frac{df_3(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\left(e^{f_2(t)\hat{R}}\hat{S}e^{-f_2(t)\hat{R}}\right)e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right)\hat{\rho}(t) \\ &\quad + \frac{df_4(t)}{dt}\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1}\left(e^{f_2(t)\hat{R}}\left(e^{f_3(t)\hat{S}}\hat{J}_2e^{-f_3(t)\hat{S}}\right)e^{-f_2(t)\hat{R}}\right)e^{-f_1(t)\hat{J}_1}\right)\hat{\rho}(t). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ahora lo que interesa saber es de qué manera actúan las exponenciales en los superoperadores. Para lo siguiente, note que los siguientes resultados son correctos

$$\begin{aligned} \left[\hat{J}_1, \hat{J}_2\right]\rho(t) &= 4\frac{k_1k_2}{k_{12}}\hat{S}\hat{\rho}(t) - 4k_1k_2\hat{\rho}(t), \\ \left[\hat{J}_1, \hat{R}\right]\rho(t) &= \hat{L}\hat{J}_1\hat{\rho}, \\ \left[\hat{J}_1, \hat{S}\right]\rho(t) &= 2k_{12}\hat{J}_1\hat{\rho}, \\ \left[\hat{J}_2, \hat{R}\right]\rho(t) &= -\hat{L}\hat{J}_2\hat{\rho}, \\ \left[\hat{J}_2, \hat{S}\right]\rho(t) &= -2k_{12}\hat{J}_2\hat{\rho}, \\ \left[\hat{J}_2, \hat{L}\right]\rho(t) &= \left[\hat{R}, \hat{S}\right]\rho(t) = \left[\hat{R}, \hat{L}\right]\rho(t) = \left[\hat{S}, \hat{L}\right]\rho(t) = \left[\hat{J}_1, \hat{L}\right]\rho(t) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta se aplica la siguiente propiedad [42]

$$e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}}\hat{\rho}(t) = \left(\hat{A} + \left[\hat{B}, \hat{A}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{B}, \left[\hat{B}, \hat{A}\right]\right] + \dots\right)\hat{\rho}(t). \quad (6.17)$$

Con lo cual, aplicando los conmutadores anteriores se obtiene

$$\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1} \hat{R} e^{-f_1(t)\hat{J}_1} \right) = \hat{R} + f_1(t) \hat{L} \hat{J}_1, \quad (6.18)$$

$$\left(e^{f_1(t)\hat{J}_1} \left(e^{f_2(t)\hat{R}} \hat{S} e^{-f_2(t)\hat{R}} \right) e^{-f_1(t)\hat{J}_1} \right) = \hat{S} + 2k_{12} f_1(t) \hat{J}_1, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} & \left(e^{f_1(t)\hat{J}_1} \left(e^{f_2(t)\hat{R}} \left(e^{f_3(t)\hat{S}} \hat{J}_2 e^{-f_3(t)\hat{S}} \right) e^{-f_2(t)\hat{R}} \right) e^{-f_1(t)\hat{J}_1} \right) = e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{J}_2, \\ & + \frac{2k_1 2k_2}{k_{12}} f_1 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{S} - 2k_1 2k_2 f_1(t) e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} + 4k_1 k_2 f_1^2 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{J}_1. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación (6.16) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= \frac{df_0(t)}{dt} \hat{\rho}(t) + \frac{df_1(t)}{dt} \hat{J}_1 \hat{\rho}(t) + \frac{df_2(t)}{dt} \left(\hat{R} + f_1(t) \hat{L} \hat{J}_1 \right) \hat{\rho}(t) \\ &+ \frac{df_3(t)}{dt} \left(\hat{S} + 2k_{12} f_1(t) \hat{J}_1 \right) \hat{\rho}(t) \\ &+ \frac{df_4(t)}{dt} \left(e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{J}_2 + \frac{2k_1 2k_2}{k_{12}} f_1 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{S} - 2k_1 2k_2 f_1(t) e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \right. \\ &\quad \left. + 4k_1 k_2 f_1^2 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}} \hat{J}_1 \right) \hat{\rho}(t). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para que esta ecuación coincida con (6.12) es necesario que se cumpla lo siguiente

$$\frac{df_0(t)}{dt} = -2k_1 + \frac{df_4(t)}{dt} 2k_1 2k_2 f_1(t) e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}}, \quad (6.22)$$

$$1 = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt} f_1(t) \hat{L} + \frac{df_3(t)}{dt} 2k_{12} f_1(t) + \frac{df_4(t)}{dt} 4k_1 k_2 f_1^2 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}}, \quad (6.23)$$

$$1 = \frac{df_2(t)}{dt}, \quad (6.24)$$

$$1 = \frac{df_3(t)}{dt} + \frac{df_4(t)}{dt} \frac{2k_1 2k_2}{k_{12}} f_1 e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}}, \quad (6.25)$$

$$1 = \frac{df_4(t)}{dt} e^{2k_{12}f_3(t)+f_2(t)\hat{L}}. \quad (6.26)$$

Estas ecuaciones forman un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas donde la solución no se obtiene directamente, lo que se hace es utilizar el método de suma y resta para eliminar en las ecuaciones (6.22), (6.23) y (6.25) el término con la exponencial, haciendo esto, se obtienen ecuaciones diferenciales para f_0 y f_3 que se resuelven integrando directamente. La ecuación (6.24) también se resuelve integrando directamente y para resolver (6.26) se sustituye la solución de f_2 y f_3 , luego se integra para obtener f_4 . la ecuación (6.23) después de eliminar el término exponencial se sustituyen todas las expresiones para f_1 , f_2 y f_3 , para terminar integrando. Las cinco funciones que resuelven el sistema son:

$$f_0(t, \hat{L}) = \left[\frac{(\hat{L} + 2k_{12}) - 4k_1}{2} \right] (t) + \ln \left(\frac{\cos(\alpha(\hat{L}))}{\cos\left(\frac{c(\hat{L})}{2}t + \alpha(\hat{L})\right)} \right), \quad (6.27)$$

$$f_1(t, \hat{L}) = \frac{c(\hat{L})}{8k_1 k_2} \tan \left(\frac{c(\hat{L})}{2}t + \alpha(\hat{L}) \right) + \frac{(\hat{L} + 2k_{12})}{8k_1 k_2}, \quad (6.28)$$

$$f_2(t) = t, \quad (6.29)$$

$$f_3(t, \hat{L}) = \frac{-\hat{L}}{2k_{12}}t + \frac{1}{k_{12}} \ln \left(\frac{\cos\left(\frac{c(\hat{L})}{2}t + \alpha(\hat{L})\right)}{\cos(\alpha(\hat{L}))} \right), \quad (6.30)$$

$$f_4(t, \hat{L}) = \frac{2 \cos^2(\alpha(\hat{L}))}{c(\hat{L})} \tan \left(\frac{c(\hat{L})}{2}t + \alpha(\hat{L}) \right) + \frac{2(\hat{L} + 2k_{12}) \cos^2(\alpha(\hat{L}))}{(c(\hat{L}))^2}, \quad (6.31)$$

donde

$$c(\hat{L}) = \sqrt{16k_1k_2 - (\hat{L} + 2k_{12})^2}, \quad (6.32)$$

y

$$\alpha(\hat{L}) = \arctan \left(-\frac{(\hat{L} + 2k_{12})}{\sqrt{16k_1k_2 - (\hat{L} + 2k_{12})^2}} \right). \quad (6.33)$$

Por lo que la ecuación diferencial separada es

$$\hat{\rho}(t) = e^{f_0(t, \hat{L})} e^{f_1(t, \hat{L})} \hat{J}_1 e^{t\hat{R}} e^{f_3(t, \hat{L})} \hat{S} e^{f_4(t, \hat{L})} \hat{J}_2 \hat{\rho}(0). \quad (6.34)$$

Ahora se va a calcular el operador de densidad $\hat{\rho}(t)$, para esto se necesita conocer $\hat{\rho}(0)$. Como la interacción entre el átomo y el campo inicia en $t = 0$, $\hat{\rho}(0)$ se puede escribir como

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_f(0) \hat{\rho}_A(0), \quad (6.35)$$

por el momento se propone que $\hat{\rho}_f(0)$ sea arbitraria y que

$$\hat{\rho}_A(0) = |\psi_A(0)\rangle \langle \psi_A(0)|, \quad (6.36)$$

donde $|\psi_A(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$, $\langle \psi_A(0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle e| + \langle g|)$ por lo tanto

$$\hat{\rho}_A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle e| + \langle g|), \quad (6.37)$$

desarrollando el producto de estados del átomo

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(0) &= \frac{1}{2}(|e\rangle + |g\rangle)(\langle e| + \langle g|), \\ \hat{\rho}_A(0) &= \frac{1}{2}(|e\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g|), \\ \hat{\rho}_A(0) &= \frac{1}{2}(|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g|). \end{aligned}$$

En la última ecuación aparece la identidad

$$|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| = \hat{I}, \quad (6.38)$$

con lo que se obtiene

$$\hat{\rho}_A(0) = \frac{1}{2}(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|), \quad (6.39)$$

por tanto se tiene la siguiente expresión para $\hat{\rho}(t)$:

$$\hat{\rho}(t) = e^{f_0(t,\hat{L})} e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} e^{t\hat{R}} e^{f_3(t,\hat{L})\hat{S}} e^{f_4(t,\hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right). \quad (6.40)$$

Por definición el operador \hat{L} actúa de la siguiente manera

$$\hat{L}\hat{\rho} = i\chi\hat{\sigma}_z\hat{\rho} - i\chi\hat{\rho}\hat{\sigma}_z, \quad (6.41)$$

por lo que, al actuar sobre la identidad se obtiene la igualdad que es una ecuación de valores propios para el superoperador \hat{L}

$$\hat{L}\hat{I} = 0\hat{I}, \quad (6.42)$$

y en analogía con la ecuación de valores propios para operadores, se puede generalizar que cualquier función dependiente del superoperador \hat{L} se puede escribir como [33], tal que

$$F(\hat{L})\hat{I} = F(0)\hat{I}. \quad (6.43)$$

Por otro lado, se cumplen también las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{I} &= 0\hat{I}, \\ \hat{L}|e\rangle \langle g| &= 2i\chi|e\rangle \langle g|, \\ \hat{L}|g\rangle \langle e| &= -2i\chi|g\rangle \langle e|, \\ F(\hat{L})\hat{I} &= F(0)\hat{I}, \\ F(\hat{L})|e\rangle \langle g| &= F(2i\chi)|e\rangle \langle g|, \\ F(\hat{L})|g\rangle \langle e| &= F(-2i\chi)|g\rangle \langle e|, \end{aligned}$$

aplicando el operador $e^{f_4(t,\hat{L})\hat{J}_2}$ a $\hat{\rho}(0)$, se tiene

$$\begin{aligned} & e^{f_4(t,\hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{J}_2^m \hat{\rho}_f(0) \left(f_4(t,\hat{L}) \right)^m \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{J}_2^m \hat{\rho}_f(0) \left(\left(f_4(t,\hat{L}) \right)^m \hat{I} + \left(f_4(t,\hat{L}) \right)^m |e\rangle \langle g| + \left(f_4(t,\hat{L}) \right)^m |g\rangle \langle e| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2)^m}{m!} \hat{a}^m \hat{\rho}_f(0) \hat{a}^{\dagger m} \left((f_4(t,0))^m \hat{I} + (f_4(t,2i\chi))^m |e\rangle \langle g| + (f_4(t,-2i\chi))^m |g\rangle \langle e| \right). \end{aligned}$$

Para aplicar $e^{f_3(t,\hat{L})\hat{S}}$, se propone que

$$e^{f_3(t)\hat{S}} \hat{\rho}(0) = e^{-k_{12}f_3(t,\hat{L})\hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12}f_3(t,\hat{L})\hat{n}}, \quad (6.44)$$

para confirmar que esto es correcto, se derivan ambos lados de esta ecuación con respecto a t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{\rho}(0) &= \frac{d}{dt} e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} + e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \\ &\quad + e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) \frac{d}{dt} e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \\ \frac{df_3(t, \hat{L})}{dt} \hat{S} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{\rho}(0) &= -k_{12} \hat{n} \frac{df_3(t, \hat{L})}{dt} e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \\ &\quad + e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \left(-k_{12} \hat{n} \frac{df_3(t, \hat{L})}{dt} \right), \end{aligned}$$

dividiendo ambos lados de la última ecuación por $\frac{df_3(t, \hat{L})}{dt}$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{S} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{\rho}(0) &= -k_{12} \hat{n} e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} - k_{12} e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{n} \\ \hat{S} \left[e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{\rho}(0) \right] &= -k_{12} \hat{n} \left[e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \right] \\ &\quad - k_{12} \left[e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \right] \hat{n}, \end{aligned}$$

definimos $\hat{\rho}_0(t) = e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{\rho}(0)$ y de (6.44), $\hat{\rho}_0(t) = e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}} \hat{\rho}(0) e^{-k_{12} f_3(t, \hat{L}) \hat{n}}$, se sustituye en la ecuación anterior el lado derecho de ambas ecuaciones y se obtiene

$$\hat{S} \hat{\rho}_0(t) = -k_{12} \hat{n} \hat{\rho}_0(t) - k_{12} \hat{\rho}_0(t) \hat{n},$$

que es como se definió el superoperador $\hat{S} \hat{\rho}(t)$ (6.9), lo cual muestra que es correcta la propuesta. Note que

$$e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{I} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \hat{S}^j f_3^j(t, \hat{L}) \hat{I} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \hat{S}^j f_3^j(t, 0) \hat{I} = e^{f_3(t, 0) \hat{S}} \hat{I},$$

por lo que

$$e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \hat{I} = e^{f_3(t, 0) \hat{S}} \hat{I},$$

de forma similar a la anterior se obtienen expresiones para $|e\rangle\langle g|$ y $|e\rangle\langle g|$

$$\begin{aligned} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} |e\rangle\langle g| &= e^{f_3(t, 2i\chi) \hat{S}} |e\rangle\langle g|, \\ e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} |g\rangle\langle e| &= e^{f_3(t, -2i\chi) \hat{S}} |g\rangle\langle e|, \end{aligned}$$

al utilizar las 3 ecuaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2)^m}{m!} \hat{a}^m \hat{\rho}_f(0) \hat{a}^{\dagger m} ((f_4(t, 0))^m \hat{I} + (f_4(t, 2i\chi))^m |e\rangle\langle g| \\ &\quad + (f_4(t, -2i\chi))^m |g\rangle\langle e|) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m}{m!} e^{f_3(t, 0) \hat{S}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} \hat{I} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m}{m!} e^{f_3(t, 2i\chi) \hat{S}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} |e\rangle\langle g| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m}{m!} e^{f_3(t, -2i\chi) \hat{S}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} |g\rangle\langle e|, \end{aligned}$$

aplicando el resultado (6.44) a la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
& e^{f_3(t, \hat{L})\hat{S}} \left(e^{f_4(t, \hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right) \right) = \\
& \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m}{m!} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{I} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m}{m!} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g| \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m}{m!} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e|.
\end{aligned}$$

Continuando con la evaluación, se aplica ahora $e^{f_2(t)\hat{R}} = e^{t\hat{R}}$, esta exponencial entra en cada uno de los sumandos

$$\begin{aligned}
& e^{t\hat{R}} \left(e^{f_3(t, \hat{L})\hat{S}} \left(e^{f_4(t, \hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right) \right) \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m}{m!} e^{t\hat{R}} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{I} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m}{m!} e^{t\hat{R}} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g| \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m}{m!} e^{t\hat{R}} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e|.
\end{aligned}$$

De la misma manera que con la función $f_3(t, \hat{L})$, se obtiene la relación

$$e^{t\hat{R}} \hat{\rho}(0) = e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z},$$

ya se puede aplicar en los estados del átomo

$$\begin{aligned}
& e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{I} = e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{I}, \\
& e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} |e\rangle \langle g| = e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} |e\rangle \langle g|, \\
& e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} |g\rangle \langle e| = e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{\rho}(0) e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} |g\rangle \langle e|,
\end{aligned}$$

entonces al sustituir los resultados se obtiene

$$\begin{aligned}
& e^{t\hat{R}} \left(e^{f_3(t, \hat{L})\hat{S}} \left(e^{f_4(t, \hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \right) \right) \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{I} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z}.
\end{aligned}$$

La siguiente función a aplicar es $e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1}$

$$\begin{aligned}
& e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \left(e^{t\hat{R}} e^{f_3(t,\hat{L})\hat{S}} \left(e^{f_4(t,\hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} (\hat{I} + |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \right) \right) \\
&= e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,0))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{I} \\
&+ e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,2i\chi))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \\
&\times \langle g| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \\
&+ e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,-2i\chi))^m}{m!} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \\
&\times \langle e| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z}.
\end{aligned}$$

De forma similar a como se aplicó $e^{f_3(t,\hat{L})\hat{J}_2}$, se aplica $e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1}$

$$\begin{aligned}
e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \hat{I} &= e^{f_1(t,0)\hat{J}_1} \hat{I}, \\
e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} |e\rangle\langle g| &= e^{f_1(t,2i\chi)\hat{J}_1} |e\rangle\langle g|, \\
e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} |g\rangle\langle e| &= e^{f_1(t,-2i\chi)\hat{J}_1} |g\rangle\langle e|,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& e^{f_1(t,\hat{L})\hat{J}_1} \left(e^{t\hat{R}} e^{f_3(t,\hat{L})\hat{S}} \left(e^{f_4(t,\hat{L})\hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} (\hat{I} + |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,0))^m}{m!} e^{f_1(t,0)\hat{J}_1} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{I} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,2i\chi))^m}{m!} e^{f_1(t,2i\chi)\hat{J}_1} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \\
&\times \langle g| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,-2i\chi))^m}{m!} e^{f_1(t,-2i\chi)\hat{J}_1} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \\
&\times \langle e| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z},
\end{aligned}$$

al expandir la exponencial en una serie de potencias

$$\begin{aligned}
& e^{f_1(t, \hat{L}) \hat{J}_1} \left(e^{t \hat{R}} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \left(e^{f_4(t, \hat{L}) \hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} (\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m (2k_1 f_1(t, 0))^l}{m! l!} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m (2k_1 f_1(t, 2i\chi))^l}{m! l!} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m (2k_1 f_1(t, -2i\chi))^l}{m! l!} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Finalmente la última función se aplica directamente para obtener el operador de densidad completo

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= e^{f_0(t, \hat{L})} \left(e^{f_1(t, \hat{L}) \hat{J}_1} e^{t \hat{R}} e^{f_3(t, \hat{L}) \hat{S}} \left(e^{f_4(t, \hat{L}) \hat{J}_2} \hat{\rho}_f(0) \frac{1}{2} (\hat{I} + |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^m (2k_1 f_1(t, 0))^l}{m! l!} e^{f_0(t, 0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, 2i\chi))^m (2k_1 f_1(t, 2i\chi))^l}{m! l!} e^{f_0(t, 2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, 2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t, -2i\chi))^m (2k_1 f_1(t, -2i\chi))^l}{m! l!} e^{f_0(t, -2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m \\
&\quad \times \hat{\rho}(0) \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t, -2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e| e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Como se planteó en el primer capítulo, el operador de densidad del campo es de la siguiente forma

$$\hat{\rho}_f(0) = |\alpha\rangle \langle \alpha|,$$

donde cada uno de estos estados es un estado coherente, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,0))^m (2k_1 f_1(t,0))^l}{m!l!} e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \\
&\times \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,2i\chi))^m (2k_1 f_1(t,2i\chi))^l}{m!l!} e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \\
&\times \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} |e\rangle \langle g | e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(2k_2 f_4(t,-2i\chi))^m (2k_1 f_1(t,-2i\chi))^l}{m!l!} e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \\
&\times \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} |g\rangle \langle e | e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es el operador de densidad donde se ha trabajado con la parte correspondiente a los estados del átomo $|e\rangle$ y $|g\rangle$. Ahora se debe prestar atención en lo estados del campo, específicamente en los estados coherentes del campo. Un estado coherente es de la forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

$$\langle \alpha | = \langle s | e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}},$$

sabemos que los operadores de creación y aniquilación actúan de la siguiente manera en estados coherentes

$$\begin{aligned}
\hat{a}^m |\alpha\rangle &= \alpha^m |\alpha\rangle, \\
\langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} &= \langle \alpha | (\alpha^*)^m.
\end{aligned}$$

Nombrando $H_{m,l}(t,0) = \frac{(2k_2 f_4(t,0))^m f_1^l(t,0) (2k_1)^l}{m!l!}$, $H_{m,l}(t,2i\chi) = \frac{(2k_2 f_4(t,2i\chi))^m f_1^l(t,2i\chi) (2k_1)^l}{m!l!}$ y $H_{m,l}(t,-2i\chi) = \frac{(2k_2 f_4(t,-2i\chi))^m f_1^l(t,-2i\chi) (2k_1)^l}{m!l!}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \langle \alpha ||e\rangle \\
&\times \langle g | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} \hat{a}^m |\alpha\rangle \langle \alpha ||g\rangle \\
&\times \langle e | \hat{a}^{\dagger m} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Evaluando los operadores \hat{a}^m y $\hat{a}^{\dagger m}$ que rodean el producto $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ en la última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} |\alpha|^{2m} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} |\alpha|^{2m} |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &\times |e\rangle\langle g| e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} |\alpha|^{2m} |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &\times |g\rangle\langle e| e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.\end{aligned}$$

Redefiniendo $H_{m,l}^2(t,0) = \frac{(2k_2 f_4(t,0))^m f_1^l(t,0) (2k_1)^l |\alpha|^{2m}}{m! l!}$, $H_{m,l}^2(t,2i\chi) = \frac{(2k_2 f_4(t,2i\chi))^m f_1^l(t,2i\chi) (2k_1)^l |\alpha|^{2m}}{m! l!}$, $H_{m,l}^2(t,-2i\chi) = \frac{(2k_2 f_4(t,-2i\chi))^m f_1^l(t,-2i\chi) (2k_1)^l |\alpha|^{2m}}{m! l!}$, el operador de densidad queda como

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &\times |e\rangle\langle g| e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &\times |g\rangle\langle e| e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.\end{aligned}$$

Sustituyendo $|\alpha\rangle$ y $\langle\alpha|$ dados por (6.2) y (6.2), se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &\times e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| e^{-k_{12} f_3(t,0) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &\times e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s||e\rangle\langle g| e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &\times e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s||g\rangle\langle e| e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi) \hat{n}} e^{i\chi t \hat{n} \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.\end{aligned}$$

Ahora se aplica el operador \hat{n} que se encuentra como argumento de las exponenciales en los estados de número $|n\rangle$ y $\langle s|$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) e^{-k_{12} f_3(t,0)s} e^{i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) |e\rangle \langle g| e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)s} e^{i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) |g\rangle \langle e| e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi)s} e^{i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Una forma de aplicar el operador $\hat{\sigma}_z$ es teniendo en cuenta lo siguiente, para ambos estados del átomo son ecuaciones de valores propios, se tiene

$$\hat{\sigma}_z |e\rangle = (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) |e\rangle = (1) |e\rangle,$$

$$\hat{\sigma}_z |g\rangle = (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) |g\rangle = (-1) |g\rangle,$$

lo cual se puede generalizar como

$$F(\hat{\sigma}_z) |e\rangle = F(1) |e\rangle,$$

$$F(\hat{\sigma}_z) |g\rangle = F(-1) |g\rangle.$$

Utilizando estos dos resultados se puede reescribir

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,0)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) e^{-k_{12} f_3(t,0)s} e^{i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \hat{I} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) |e\rangle \langle g| e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)s} e^{-i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} \hat{a}^{\dagger l} e^{-i\chi t n \hat{\sigma}_z} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi)n} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
& \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) |g\rangle \langle e| e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi)s} e^{i\chi t s \hat{\sigma}_z} \hat{a}^l.
\end{aligned}$$

Ahora se agrupan la exponenciales de tal forma que

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} e^{-k_{12}f_3(t,0)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \hat{a}^{\dagger l} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) \hat{a}^l e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} \hat{I} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,2i\chi)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \hat{a}^{\dagger l} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) \hat{a}^l |e\rangle \langle g| \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,-2i\chi)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \hat{a}^{\dagger l} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s| \right) \hat{a}^l |g\rangle \langle e|.
\end{aligned}$$

Lo siguiente es aplicar el operador de creación y de aniquilación elevado a la l recordando que los estados $|n\rangle$, $|s\rangle$ son estados de número y se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{\dagger l} |n\rangle &= \sqrt{\frac{(l+n)!}{n!}} |l+n\rangle, \\
\langle n | \hat{a}^l &= \langle n+l | \sqrt{\frac{(n+l)!}{n!}},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,0) e^{f_0(t,0)} e^{-k_{12}f_3(t,0)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sqrt{\frac{(l+n)!}{n!}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) \sqrt{\frac{(s+l)!}{s!}} e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} \hat{I} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,2i\chi)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sqrt{\frac{(l+n)!}{n!}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) \sqrt{\frac{(s+l)!}{s!}} |e\rangle \langle g| \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^2(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,-2i\chi)(n+s)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sqrt{\frac{(l+n)!}{n!}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\
&\quad \times \left(e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) \sqrt{\frac{(s+l)!}{s!}} |g\rangle \langle e|.
\end{aligned}$$

Se redefine $H_{m,l}^3(t, 0) = H_{m,l}^2(t, 0)e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}}$, $H_{m,l}^3(t, 2i\chi) = H_{m,l}^2(t, 2i\chi)e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}}$ y $H_{m,l}^3(t, -2i\chi) = H_{m,l}^2(t, -2i\chi)e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}}$ lo que simplifica $\hat{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^3(t, 0) e^{f_0(t,0)} e^{-k_{12}f_3(t,0)(n+s)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\ & \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} \hat{I} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^3(t, 2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,2i\chi)(n+s)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\ & \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) |e\rangle \langle g| \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} H_{m,l}^3(t, -2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,-2i\chi)(n+s)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \\ & \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) |g\rangle \langle e|. \end{aligned}$$

Ahora se factorizan los términos en común

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,l=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) \\ & \times (H_{m,l}^3(t, 0) e^{f_0(t,0)} e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} e^{-k_{12}f_3(t,0)(n+s)} \hat{I} \\ & + H_{m,l}^3(t, 2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,2i\chi)(n+s)} |e\rangle \langle g| \\ & + H_{m,l}^3(t, -2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,-2i\chi)(n+s)} |g\rangle \langle e|). \end{aligned}$$

Este es el operador de densidad que describe el comportamiento del sistema átomo campo a través del tiempo con temperatura diferente de cero. Para evitar confusiones con la siguiente sección a partir de este punto el contador m de la última ecuación será renombrado por p , con lo que resulta de la siguiente manera el operador de densidad

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{p,l=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) \\ & (H_{p,l}^3(t, 0) e^{f_0(t,0)} e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} e^{-k_{12}f_3(t,0)(n+s)} \hat{I} \\ & + H_{p,l}^3(t, 2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,2i\chi)(n+s)} |e\rangle \langle g| \\ & + H_{p,l}^3(t, -2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12}f_3(t,-2i\chi)(n+s)} |g\rangle \langle e|), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H_{p,l}^3(t, 0) &= \frac{(2k_2f_4(t, 0))^p f_1^l(t, 0)(2k_1)^l |\alpha|^{2p}}{p!l!} e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}} \\ H_{p,l}^3(t, 2i\chi) &= \frac{(2k_2f_4(t, 2i\chi))^p f_1^l(t, 2i\chi)(2k_1)^l |\alpha|^{2p}}{p!l!} e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}} \\ H_{p,l}^3(t, -2i\chi) &= \frac{(2k_2f_4(t, 2i\chi))^p f_1^l(t, 0, 2i\chi)(2k_1)^l |\alpha|^{2p}}{p!l!} e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{(l+n)!(s+l)!}{n!s!}}. \end{aligned}$$

6.3. Cálculo de la polarización atómica

El operador $\hat{\sigma}_x$ da la polarización del átomo, por lo que es un buen indicador del comportamiento del sistema, también se le conoce como operador de polarización atómica. El valor del operador está dado por

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = Tr (\hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t)) = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle e | \langle m | \hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t) | m \rangle | e \rangle + \langle g | \langle m | \hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t) | m \rangle | g \rangle),$$

donde $\hat{\sigma}_x = (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) = (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$, así que

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle e | \langle m | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | m \rangle | e \rangle + \langle g | \langle m | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | m \rangle | g \rangle),$$

como los estados del campo $|m\rangle$ no interactúan con los del átomo $|e\rangle$ y $|g\rangle$ entonces pueden conmutar, i. e.,

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle g | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Dado que los estados del átomo son ortogonales entonces los productos cruzados se anulan, i. e., $\langle e | g \rangle = \langle g | e \rangle = 0$, con lo que al distribuir los únicos productos que no se anulan son $\langle e | e \rangle$ y $\langle g | g \rangle$, tal que

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | e \rangle \langle g | \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle g | g \rangle \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Como el producto $\langle e | e \rangle = \langle g | g \rangle = 1$, entonces

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle g | \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Por lo que, de momento sólo se trabajará con la primera parte y la segunda sólo será el complejo conjugado,

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle + c.c.).$$

Lo siguiente es sustituir la expresión para el operador de densidad en la última ecuación para simplificar, teniendo en cuenta que los estados del campo $\langle m |$ y $|m\rangle$ conmutan con operadores del átomo y los estados del átomo $\langle e |$, $\langle g |$, $|e\rangle$ y $|g\rangle$ conmutan con los operadores del campo

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{p,l=0}^{\infty} H_{p,l} \langle m | \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) | m \rangle \right. \\ &\quad (f_1^l(t,0) e^{f_0(t,0)} e^{-k_{12} f_3(t,0)(n+s)} \langle e | e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} \hat{I} | g \rangle \\ &\quad + f_1^l(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)(n+s)} \langle e | e \rangle \langle g | g \rangle \\ &\quad \left. + f_1^l(t,-2i\chi) e^{f_0(t,-2i\chi)} e^{i\chi t(n+s)} e^{-k_{12} f_3(t,-2i\chi)(n+s)} \langle e | g \rangle \langle e | g \rangle \right), \end{aligned}$$

simplificando los productos que son la identidad $\langle e|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1$ y los que son nulos $\langle e|g\rangle = \langle g|e\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{p,l=0}^{\infty} H_{p,l} \langle m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) |m\rangle \right. \\ &\quad \left. (f_1^l(t,0) e^{f_0(t,0)} e^{-k_{12} f_3(t,0)(n+s)} \langle e|e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z} \hat{I}|g\rangle \right. \\ &\quad \left. + f_1^l(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)(n+s)} \right). \end{aligned}$$

Obsérvese lo que pasa con el siguiente producto

$$\langle e|e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z}|g\rangle = \langle e| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z)^q |g\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (i\chi t(s-n))^q \langle e|\hat{\sigma}_z^q|g\rangle,$$

al sustituir $\hat{\sigma}_z$ se puede simplificar el producto de estados

$$\langle e|e^{i\chi t(s-n)\hat{\sigma}_z}|g\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (i\chi t(s-n))^q \langle e|\hat{\sigma}_z^q|g\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (i\chi t(s-n))^q (-1)^q \langle e|g\rangle = 0,$$

por lo que, el operador de densidad se simplifica, i. e.,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{p,l=0}^{\infty} H_{p,l} \langle m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) |m\rangle \right. \\ &\quad \left. (f_1^l(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-i\chi t(n+s)} e^{-k_{12} f_3(t,2i\chi)(n+s)} \right). \end{aligned}$$

Analizando ahora los estados del campo obsérvese que en los siguientes productos sólo toman el valor $\langle m|l+n\rangle = 1$ si $m = l+n$ y $\langle s+l|m\rangle = 1$ si $s+l = m$, en caso contrario los productos individuales son iguales a 0

$$\begin{aligned} \langle m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |l+n\rangle \right) &= \frac{\alpha^{m-l}}{\sqrt{(m-l)!}} \langle m|m\rangle = \frac{\alpha^{m-l}}{\sqrt{(m-l)!}}, \\ \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} \langle s+l| \right) |m\rangle &= \frac{\alpha^{m-l}}{\sqrt{(m-l)!}} \langle m|m\rangle = \frac{\alpha^{m-l}}{\sqrt{(m-l)!}}, \end{aligned}$$

la expresión para $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$, después de resolver los productos del campo es la siguiente,

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{p,l=0}^{\infty} \left(\frac{H_{p,l} \alpha^{2(m-l)}}{\sqrt{(m-l)!} \sqrt{(m-l)!}} \right) f_1^l(t,2i\chi) e^{f_0(t,2i\chi)} e^{-2i\chi(m-l)t} e^{-2k_{12} f_3(t,2i\chi)(m-l)} \right).$$

donde $H_{p,l} = \frac{(2k_2 f_4(t,0))^p (2k_1)^l |\alpha|^{2p}}{p!l!} e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{m!m!}{(m-l)!(m-l)!}}$. Para simplificar los factoriales a partir de aquí se redefine

$$\begin{aligned} H_{p,l,m} &= \frac{(2k_2 f_4(t,0))^p (2k_1)^l |\alpha|^{2p}}{p!l!} e^{-|\alpha|^2} \sqrt{\frac{m!m!}{(m-l)!(m-l)!}} \left(\frac{\alpha^{2(m-l)}}{\sqrt{(m-l)!} \sqrt{(m-l)!}} \right), \\ H_{p,l,m} &= \frac{(2k_2 f_4(t,0))^p (2k_1)^l |\alpha|^{2p} \alpha^{2(m-l)} m!}{((m-l)!)^2 p!l!} e^{-|\alpha|^2}. \end{aligned}$$

Si se agrupan los términos elevados a la p , $H_{p,l,m}$ puede transformarse en una serie de potencias de una exponencial

$$\begin{aligned} H_{p,l,m} &= \frac{(2k_2 f_4(t, 0))^p (2k_1)^l |\alpha|^{2p} \alpha^{2(m-l)} m!}{((m-l)!)^2 p! l!} e^{-|\alpha|^2} \\ &= \frac{(2k_2 |\alpha|^2 f_4(t, 0))^p (2k_1)^l \alpha^{2(m-l)} m!}{p! ((m-l)!)^2 l!} e^{-|\alpha|^2}, \end{aligned}$$

de esta manera se puede ver que con la suma en p se puede transformar en la exponencial,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2k_2 |\alpha|^2 f_4(t, 0))^p (2k_1)^l \alpha^{2(m-l)} m!}{p! ((m-l)!)^2 l!} e^{-|\alpha|^2} = e^{2k_2 |\alpha|^2 f_4(t, 0)} \frac{(2k_1)^l \alpha^{2(m-l)} m!}{((m-l)!)^2 l!} e^{-|\alpha|^2}.$$

Finalmente, definiendo $H_{l,m} = \frac{(2k_1)^l \alpha^{2(m-l)} m!}{((m-l)!)^2 l!}$ se obtiene el valor esperado para la polarización del sistema

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} H_{l,m} f_1^l(t, 2i\chi) e^{f_0(t, 2i\chi)} e^{-2i\chi(m-l)t} e^{-2k_{12} f_3(t, 2i\chi)(m-l)} e^{2k_2 |\alpha|^2 f_4(t, 2i\chi)} + c.c \right). \quad (6.45)$$

Capítulo 7

Resultados y análisis de resultados.

A continuación se muestran los resultados obtenidos al realizar el cálculo numérico de la ecuación (6.45) donde se variaron α , χ , n y C . En todas las gráficas en el eje- y se encuentra el valor esperado de la polarización con valores dentro del intervalo $-1 \leq \langle \hat{\sigma}_x \rangle \leq 1$, este valor representa la probabilidad de encontrar el sistema polarizado en estado base o excitado, en el eje- x se encuentra el tiempo representado en segundos. Para generar las simulaciones del valor esperado del operador de polarización se inicia la simulación a partir del instante cero. Tomando como parámetros $\alpha = 4$, $\chi = 1$, $C = 0,001$ y $\bar{n} = 2$, se obtiene la visualización del comportamiento de la polarización como se muestra en la Figura 7.1.

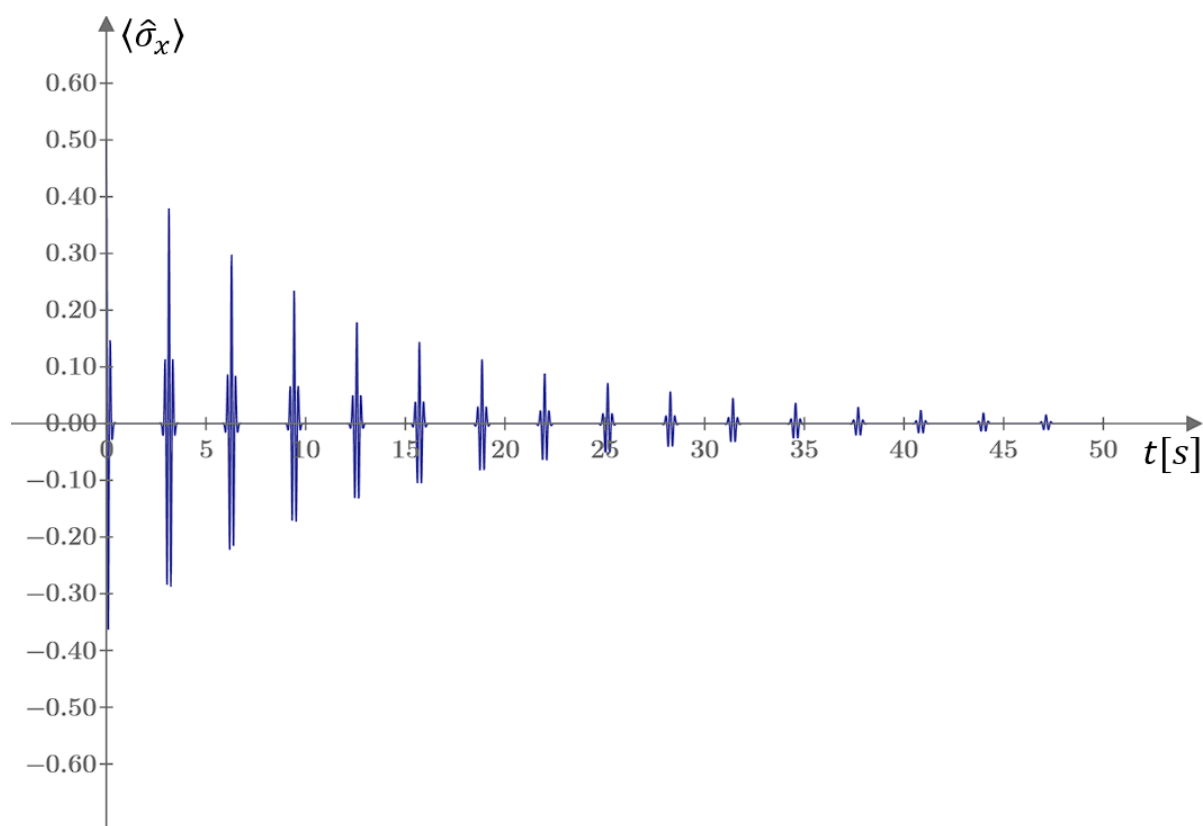


Figura 7.1: Polarización con parámetros $\alpha = 4$, $\chi = 1$, $C = 0,001$ y $\bar{n} = 2$.

Las oscilaciones de Rabi son un fenómeno cuántico que ocurre cuando un sistema de dos niveles, como un átomo, interactúa con un campo electromagnético. Este fenómeno se caracteriza por un intercambio periódico de energía entre los dos estados del sistema, conocido como oscilaciones de Rabi.

Se puede ver que el comportamiento que muestran las gráficas tiene dos elementos importantes: el primero son los intervalos en los que la gráfica tiene valor cero, tales intervalos son llamados *colapsos*, durante un colapso la amplitud de las oscilaciones de Rabi disminuye gradualmente hasta que las oscilaciones desaparecen lo que introduce una pérdida de información cuántica. El siguiente elemento son esos intervalos de oscilación entre polarización excitada y base donde se aprecia que la polarización es muy variable en comparación a los *colapsos*, a estos pequeños intervalos de oscilación se le conoce como *revivimientos*, después de un colapso, las oscilaciones de Rabi pueden volver a aparecer.

Al asumir que el operador de densidad es de la forma $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_f(0) \hat{\rho}_A(0)$ para $t = 0$ como momento inicial para la dinámica del sistema, el operador de polarización no está definido para $t < 0$, lo que muestra que la gráfica inicia en $t = 0$.

El comportamiento conformado por *colapsos* y *revivimientos* de manera periódica muestra en la Figura 7.1 que está acotado por una función envolvente. Para los apartados posteriores se muestra un análisis de los parámetros implicados en el operador de polarización tales como α , χ , C y \bar{n} , donde se muestra de manera gráfica que esos parámetros modifican el comportamiento.

7.1. Variando $\chi = 0,1, 0,5, 0,8, 1$.

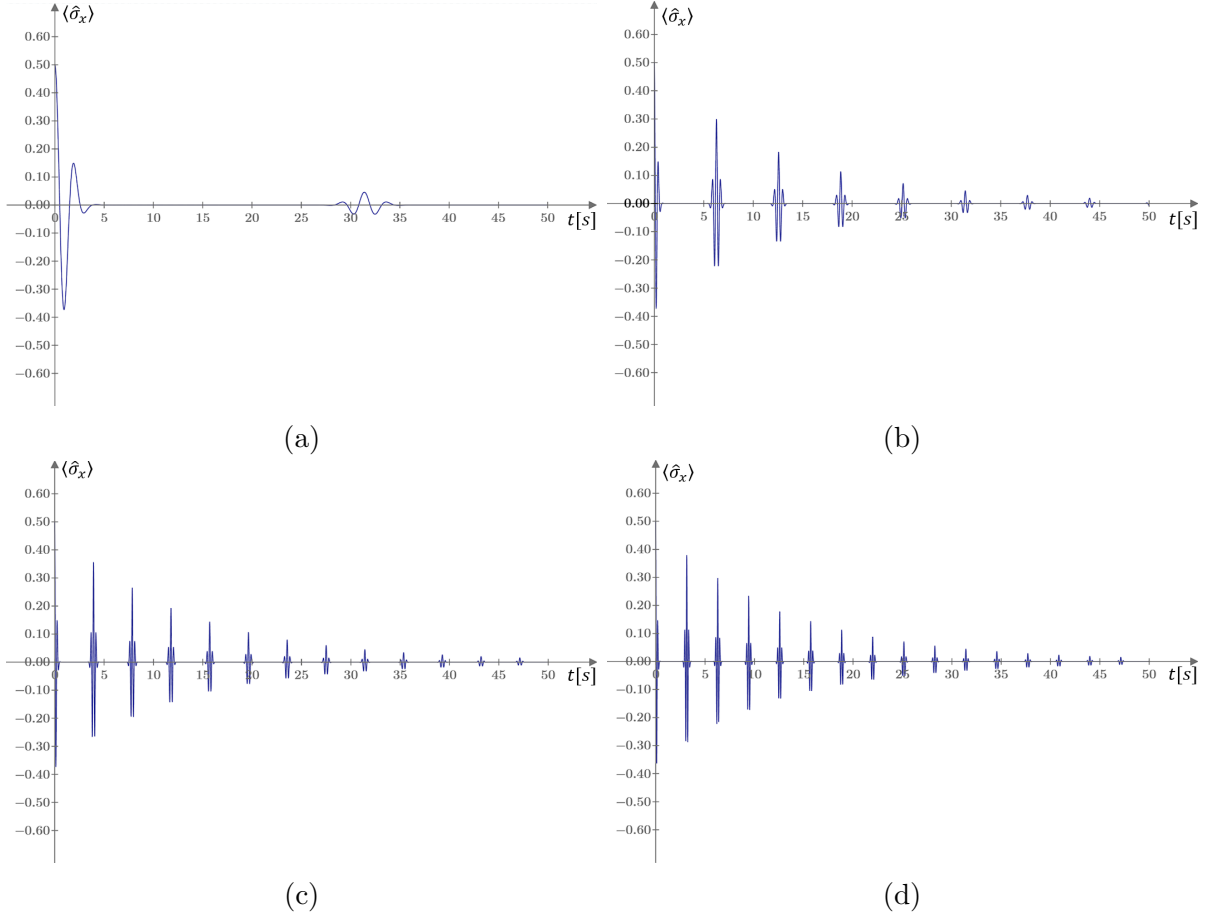


Figura 7.2: Comportamiento de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ con parámetros $\alpha = 4$, $C = 0,005$ y $\bar{n} = 2$ al variar la constante χ : (a) $\chi = 0,1$, (b) $\chi = 0,5$, (c) $\chi = 0,8$ y (d) $\chi = 1$.

Las gráficas de la Figura 7.2, muestran el comportamiento de la polarización atómica para diferentes valores de $0 \leq \chi \leq 1$, es decir, el valor de la constante de interacción. Mientras χ se acerca más a 1 la duración de los *colapsos* se acorta más y mientras más se acerca a 0 la duración de los *colapsos* es más grande, como el parámetro está acotado por $\chi = 1$ como valor de máxima interacción entonces la duración del tiempo de *colapso* tiene un valor mínimo, lo que implica que no es posible evitar la pérdida de información del sistema durante los *colapsos*, por otra parte, también el comportamiento muestra que el tiempo de duración de los *colapsos* tiende a ser infinito conforme χ tiende a ser cero.

La variación del parámetro χ no sólo afecta la duración de los *colapsos*, también retarda la duración de los *revivimientos* sin modificar el número de oscilaciones mostradas entre dos *colapsos* consecutivos. En principio pareciera que la dinámica del sistema es ralentizada, sin embargo, no es así, ya que el segundo *revivimiento* en (a), (b), (c) y (d) no tienen la misma amplitud máxima, por lo que no modifica la velocidad en que decrecen las amplitudes a través del tiempo.

Por último, cabe resaltar que para $t = 0$ se inicia con la mayor amplitud durante toda la simulación, es decir, es el tiempo en que se tiene mayor información del sistema, esto reafirma que al momento inicial se conoce con mayor precisión cómo funcionan el sistema átomo y el sistema campo de forma separada: $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_f(0) \hat{\rho}_A(0)$.

7.2. Variando $\bar{n} = 1, 2, 4, 8$.

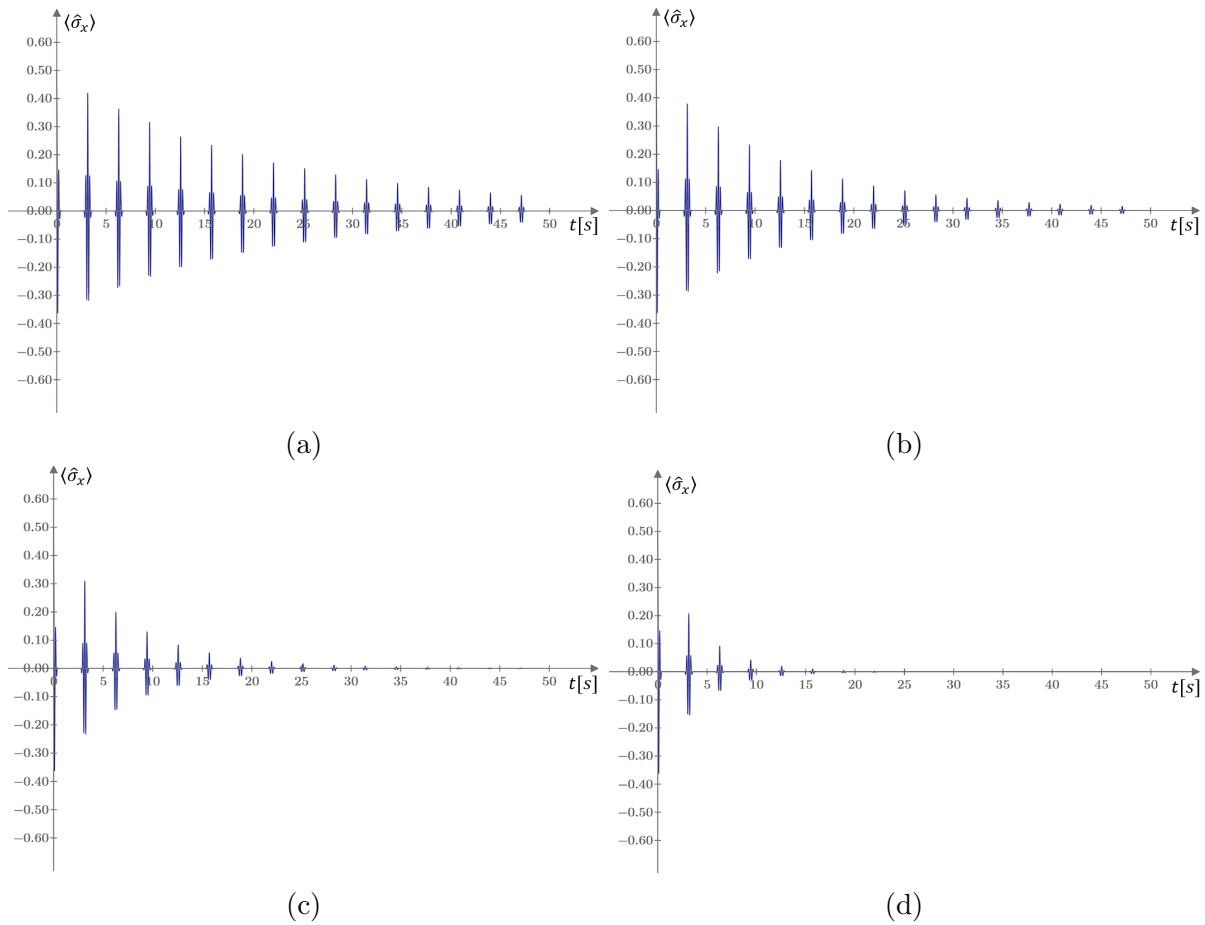


Figura 7.3: Comportamiento de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ con parámetros $\alpha = 4$, $\chi = 1$ y $C = 0,001$ al variar la constante n : (a) $\bar{n} = 1$, (b) $\bar{n} = 2$, (c) $\bar{n} = 4$ y (d) $\bar{n} = 8$.

En la Figura 7.3 se muestra que la duración de los *colapsos*, la duración de los *revivimientos* y el número de oscilaciones por *revivimientos* no se ven afectados al variar el parámetro \bar{n} , el número medio de fotones debido a la temperatura de la cavidad. Es evidente que mientras mayor es el número de fotones mayor es la velocidad a la que cae la amplitud, es decir, la información de la cavidad se pierde con mayor facilidad y específicamente el aumento en la velocidad es de forma exponencial.

Un aspecto importante a observar es que el número de fotones no afecta la amplitud inicial, en las cuatro gráficas la primera oscilación es la misma.

7.3. Variando $\alpha = 3, 4, 5, 6$.

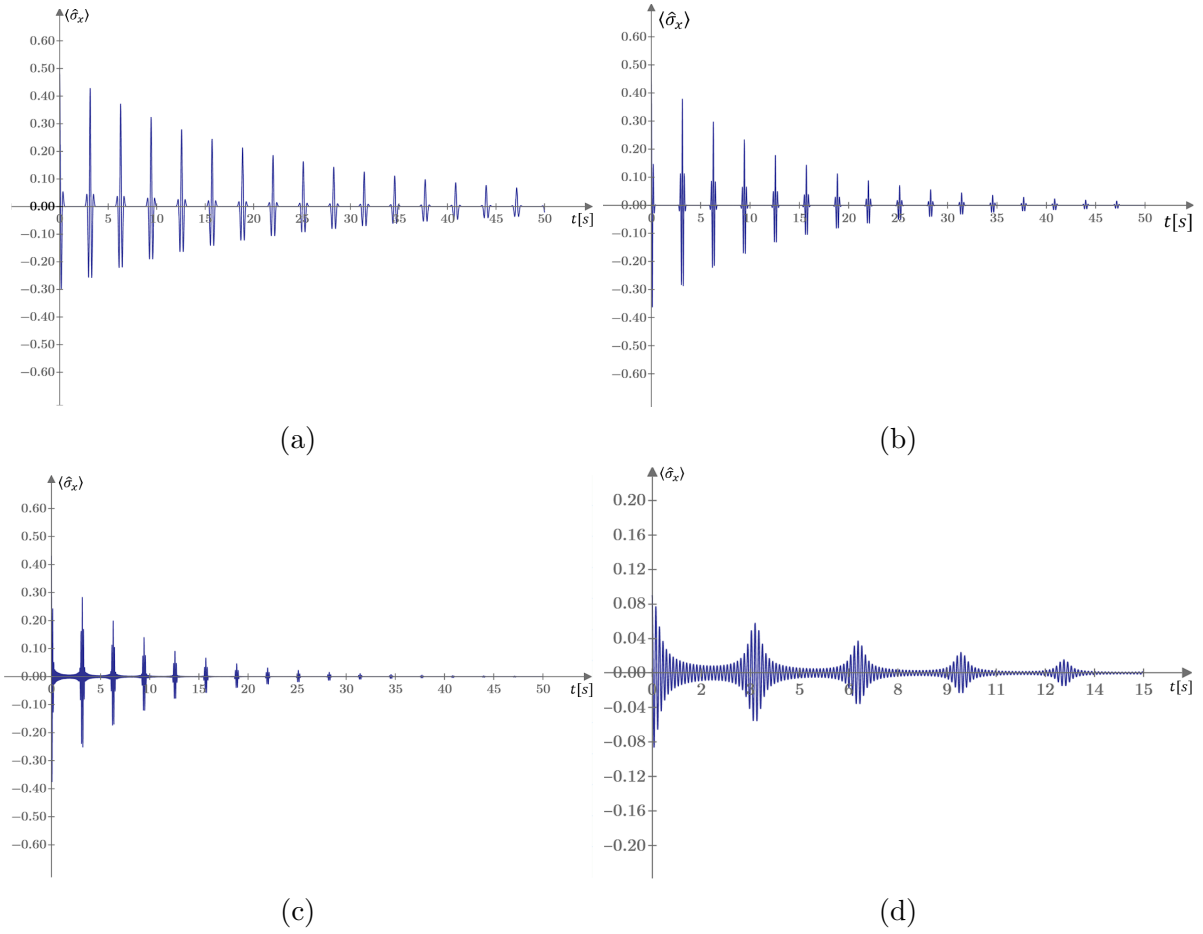


Figura 7.4: Comportamiento de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ con parámetros $\chi = 1$, $C = 0,001$ y $\bar{n} = 2$ al variar la constante α : (a) $\alpha = 3$, (b) $\alpha = 4$, (c) $\alpha = 5$ y (d) $\alpha = 6$.

El siguiente parámetro que se varía es el número inicial de fotones del campo electromagnético dentro de la cavidad, cuyo número es igual a la magnitud de alfa al cuadrado. Nuevamente, para $\alpha = 3$ y $\alpha = 4$, la duración de *colapsos* y *revivimientos* no son afectados por el parámetro α y la amplitud disminuye mientras α crece. Para $\alpha > 4$, se observa que no hay *colapsos*, pero sigue existiendo oscilación y la amplitud máxima decae más rápido conforme α es más grande.

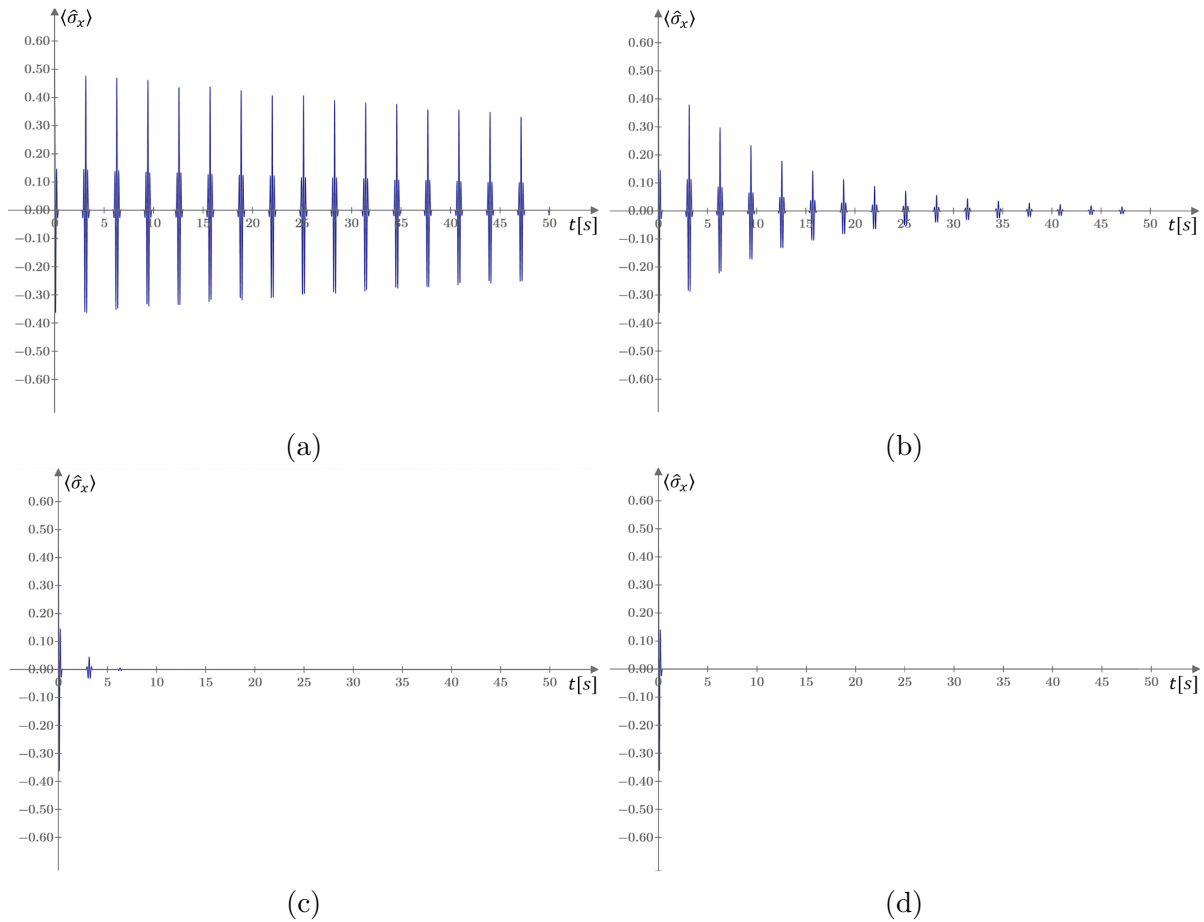
7.4. Variando $C = 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1$.

Figura 7.5: Comportamiento de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ con parámetros $\alpha = 4$, $\chi = 1$ y $\bar{n} = 2$ al variar la constante C : (a) $C = 0,0001$, (b) $C = 0,001$, (c) $C = 0,01$ y (d) $C = 0,1$.

El último parámetro que se puede variar es la constante C , que es la constante que relaciona las constantes k_1 y k_2 de las pérdidas de energía consideradas al plantear la ecuación maestra del sistema. Este parámetro tiene una alteración directa y muy clara sobre la función envolvente que modula la amplitud de las oscilaciones máximas por cada *revivimiento*, modificar el parámetro C no modifica el tiempo de colapso, el tiempo de *revivimiento* ni el número de oscilaciones. Por lo que se puede considerar que C define qué tan rápido pierde energía la cavidad o en otras palabras qué tan rápido se pierde la información del sistema.

7.5. Conclusiones.

El objetivo del trabajo fue concluido adecuadamente. El problema de la interacción entre el campo electromagnético cuantizado (mediante estados coherentes como estado inicial del campo) y el átomo de dos niveles dentro de una cavidad, sujeta a la pérdida de energía y temperatura diferente de cero fue estudiado mediante el comportamiento de la polarización atómica. Con este trabajo se contribuye a entender la interacción entre el átomo y el campo al demostrar que aún en el límite dispersivo existe dinámica entre ellos, es posible observar los *colapsos* y *revivimientos* en las oscilaciones de la polarización atómica tal y como sucede con el caso a temperatura cero. Los resultados obtenidos muestran la manera en que están relacionados los parámetros α , C , χ y \bar{n} en el tiempo de duración de los *colapsos*, el número de oscilaciones y la pérdida de amplitud de estas oscilaciones, proporcionando alternativas de controlar con las condiciones iniciales el comportamiento de la cavidad.

Permitir que la temperatura pueda variar y no limitarlo a la idealización del cero absoluto, introduce el parámetro \bar{n} (número medio de fotones térmicos). El aumento de la temperatura provoca un aumento en el parámetro \bar{n} y a su vez el aumento del parámetro provoca una mayor caída de la amplitud, por lo tanto se puede concluir que permitir que la cavidad tenga temperaturas más altas ocasiona que las oscilaciones de la polarización decrezcan rápidamente y ocasiona que los fenómenos cuánticos de interés observados en la cavidad puedan ser aprovechados durante un menor tiempo.

La consecuencia de la manipulación de los parámetros C , \bar{n} , χ y α arroja lo siguiente:

- La polarización de la cavidad al tiempo $t = 0$ es la misma sin importar la variación de los parámetros, a excepción de aquellas configuraciones donde la polarización se anula para todo t .
- El parámetro χ controla la duración de los *colapsos* y los *revivimientos*, cuanto más cerca de 1 se encuentra éste, la duración de los *colapsos* disminuyen y la amplitud de las oscilaciones aumenta.
- El parámetro \bar{n} controla el tiempo de duración y la amplitud de las oscilaciones, a menor \bar{n} mayor amplitud y duración.
- El número de fotones iniciales del campo dentro de la cavidad controla la amplitud de las oscilaciones, a mayor α menor amplitud tienen las oscilaciones y el periodo se mantiene para $\alpha \leq 4$. Para $\alpha > 4$, se observa que no hay *colapsos*, pero sigue existiendo oscilación y la amplitud máxima decae más rápido conforme α es más grande.
- El parámetro C , que controla la amplitud de las oscilaciones y la duración de estas, mientras C crece la amplitud decrece y el periodo permanece constante.

Bibliografía

- [1] S. KUYPERS, *ArXiv e-print 2108.02771v1*, 2021.
- [2] F. TAMBURINI, D. VICINO, *Phys.Rev. A* **78** 052116, 2008.
- [3] M. DUELL, W. DYBALSKI, *ArXiv e-print 2111.04831v1*, 2021.
- [4] Y. ZHANG, Q. WU, S. SU, Q. LOU, C.X. SHAN, K. MØLMER, *ArXiv e-print 2110.10950v1*, 2021.
- [5] Y. SHEE ,P-K.TSAI, C-L. HONG, H-C. CHENG, H-S. GOAN, *ArXiv e-print 2110.04112v1*, 2021.
- [6] A. KAHAN, L. ERMANN, C. CORMIK, *Phys.Rev. A* 104 043705v1, 2021.
- [7] K. YOSHII, *ArXiv e-print 2111.05999v1*, 2021.
- [8] G. CRIPPA, G. STEFANI, *ArXiv e-print 2110.15648v1*, 2021.
- [9] K. KARMARAJ, P. S. JOHNSON, A. SATHEESH, *ArXiv e-print 2108.05873v1*, 2021.
- [10] Y. AONO, S. LIU, T.TANAKA, S. UNO, R. VAN METER, N. SHINOHARA, R. NOJMA, *ArXiv e-print 2111.06102v1*, 2021.
- [11] S.KHORASANI, *ArXiv e-print 1810.08030v1*, 2018.
- [12] P. A. M. DIRAC, *Principios de la Mecánica Cuántica*, Ediciones Ariel, 1958.
- [13] M. WANG, S. WANG, T. M. YA LI, Y. XIE, H. JIAO, H. LIU, S. LIU, H. WANG, *ArXiv e-print 2110.10971v1*, 2021.
- [14] B. M. WHITE, P. J. LOW, Y. SEREVILLE, M. L. DAY, N. GREENBERG, R. RADEMACHER, C. SENKO, *ArXiv e-print 2110.08456v1*, 2021.
- [15] D. A. VAJNER, L. RICHERT, T. GAO, K. KAYMAZLAR, T. HEINDEL, *ArXiv e-print 2108.13877v1*, 2021.
- [16] A. ZUÑIGA-SEGUNDO, R. JUÁREZ-AMARO, O.AGUILAR-LORETO, H. M. MOYA-CESSA, *Phys.Rev. A* **379** 150-158, 2017.
- [17] R. JUÁREZ-AMARO, A. ZUÑIGA-SEGUNDO, H. M. MOYA-CESSA, *Sci.* 9, No. 1 299-303, 2015.
- [18] D. T. GUILLESPIE, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Ediciones Ariel, 1976.
- [19] D. J. GRIFFITHS, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2nd Ed., Springer, 1995.
- [20] L.D. LANDAU, *Mecánica Cuántica No-Relativista*, 3th Ed., Reverté, 1983.

- [21] N. ZETTLI, *Quantum Mechanics Concepts and Applications*, 2nd Ed., Wiley, 1995.
- [22] L. DE LA PEÑA, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, 3a Ed., Universidad Nacional Autónoma de México, Fondo de Cultura Económica, 1976.
- [23] YNDURAIN MUÑOS y FRANCISCO JOSE, *Mecánica Cuántica*, 2a Ed., Springer, 2003.
- [24] W. GREINER, *Quantum Mechanics. An Introduction*, 4th Ed., Springer, 2001.
- [25] P. R. FERRER, L. H. MASSMANN, G. V. MUÑOS, B. J. RÖSSLER y C. J. ROGAN, *Mecánica Cuántica I*, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, 2007.
- [26] P. ATKINS y R. FRIEDMAN, *Molecular Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2005.
- [27] E. M. ROBERTO, *Teoría Cuántica de Campos*, Universidad Nacional de Bogotá, Colombia, 2002.
- [28] F. MANDL y G. SHAW, *Quantum Field Theory*, Springer, 1986.
- [29] C. C. GERRY y P. L. KNIGHT, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2005.
- [30] R. M. EISBERG y R. RESNICK, *Física Cuántica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas*, Limusa, 1989.
- [31] P. YOAV, P. REUVEN y Z. ELYAHU, *Theory and Problems of Quantum Mechanics*, MCGRAW-HILL, 1998.
- [32] H. DEKKER, *Classical and Quantum Mechanics of the Damped Harmonic Oscillator*, North-Hollan Publishing Company, 1981.
- [33] J. M. ZIMAN, *Elements of Advanced Quantum Theory*, Cambridge University Press, 1969.
- [34] C. T. CLAUD, D. R. JACQUES, G. GILBERT, *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, Springer, 1997.
- [35] C. G. CALLAN, *Advanced Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1996.
- [36] A. C. PHILLIPS, *Introduction to Quantum Mechanics*, Wiley, 2003.
- [37] R. P. FEYNMAN, *QED. The Strange Theory of Light and Matter*, Prince University Press, 1983.
- [38] R. L. LIBOFF, *Introductory Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [39] R. GREINER, *Field Quantization*, Springer, 1996.
- [40] L. E. BALLENTINE, *Quantum Mechanics A Modern Development*, 3th Ed., World Scientific Publishing, 1998.
- [41] S. M. DUTRA, *Cavity Quantum Electrodynamics. The Strange Theory of Ligh in a Box*, Wiley, 2005.
- [42] W. GREINER, *Quantum Mechanics an Introductution*, 4th Ed., Springer, 2001.

- [43] M. LEONARD y W. EMIL, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995
- [44] J. I. ILLANA, *Teoría Cuántica de Campos*, Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2021.
- [45] J. G. PEIXOTO DE FARIA, M. C. NEMES, *Phys.Rev. A* **59**, 3918, 1999.
- [46] H. PAUL, *Introduction to Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2004.