

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**ANÁLISIS CINEMÁTICO DE SEGUNDO ORDEN DE  
UNA PLATAFORMA *GOUGH-STEWART* Y SU  
VALIDACIÓN EXPERIMENTAL**

**TESIS:  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO EN MECATRÓNICA**

PRESENTA:

**FREDY URIEL NAVA ANDRES**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. MANUEL ARIAS MONTIEL**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO  
OCTUBRE DE 2024





## *Dedicatoria*

*A mis amigos Angel y Beny, quienes hicieron más ameno este proceso.*

*A mi amiga Norma, quien estuvo presente siempre que la necesite.*

*A Karen Lizeth, por darme ánimo cuando todo parecía estar mal.*

*A mi hermana Karen, por todas las noches de desvelo en las que me acompañó.*

*A mi papá Adrián, por enseñarme a ser persistente.*

*Pero sobre todo, a mi mamá Catarina, quien me lo ha dado todo.*



## Agradecimientos

- Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Manuel Arias Montiel, por permitirme desarrollar este proyecto bajo su guía.
- Agradezco a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindar sus laboratorios en el desarrollo de este proyecto.
- Finalmente, agradezco al Dr. Jaime Gallardo Alvarado por su asesoría que permitió culminar este proyecto.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. Teoría de tornillos . . . . .	2
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	7
1.3. Justificación . . . . .	8
1.4. Hipótesis . . . . .	9
1.5. Objetivos . . . . .	9
1.5.1. Objetivo general . . . . .	9
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	9
1.6. Limitantes . . . . .	9
1.7. Metodología . . . . .	10
<b>2. Marco teórico</b>	<b>13</b>
2.1. Tornillo infinitesimal . . . . .	13
2.1.1. Parte primaria . . . . .	13
2.1.2. Parte dual . . . . .	14
2.2. Álgebra de Lie . . . . .	14
2.2.1. Operaciones fundamentales . . . . .	14
2.2.2. Producto Lie . . . . .	15
2.2.3. Formas simétricas bilineales . . . . .	15
2.3. Campo helicoidal . . . . .	16
2.4. Estado de velocidad . . . . .	17
2.5. Estado de aceleración . . . . .	20
2.5.1. Ecuaciones de aceleración . . . . .	20
2.5.2. Estado de aceleración reducido . . . . .	21
2.6. Representación de pares cinemáticos inferiores en forma de tornillo . . . . .	23
2.6.1. Junta revoluta . . . . .	24
2.6.2. Junta Prismática . . . . .	25
2.6.3. Juntas esférica y universal . . . . .	25
2.7. Tornillo recíproco . . . . .	25
2.8. Unidad de medición inercial . . . . .	26
2.8.1. Acelerómetro . . . . .	26

---

2.8.2. Giroscopio . . . . .	26
2.8.3. Filtros . . . . .	27
<b>3. Análisis cinemático infinitesimal</b>	<b>29</b>
3.1. Caso de estudio . . . . .	29
3.1.1. Cadenas cinemáticas . . . . .	29
3.1.2. Puntos de interés . . . . .	30
3.1.3. Definición de tornillos . . . . .	31
3.1.4. Base de tornillos recíprocos . . . . .	34
3.2. Análisis de velocidad . . . . .	35
3.2.1. Análisis directo de velocidad . . . . .	35
3.2.2. Análisis inverso de velocidad . . . . .	37
3.3. Análisis de aceleración . . . . .	38
3.3.1. Análisis directo de aceleración . . . . .	38
3.3.2. Análisis inverso de aceleración . . . . .	40
3.4. Codificación de la cinemática infinitesimal . . . . .	40
<b>4. Validación mediante simulación multicuerpo</b>	<b>41</b>
4.1. Funciones de trayectoria . . . . .	41
4.2. Modelo tridimensional . . . . .	42
4.2.1. Modelado de cuerpos sólidos . . . . .	43
4.2.2. Restricciones de movimiento . . . . .	46
4.2.3. Asignación de movimiento . . . . .	46
4.3. Comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW . . . . .	47
4.4. Resultados . . . . .	50
4.4.1. Velocidad . . . . .	50
4.4.2. Aceleración . . . . .	54
<b>5. Validación experimental</b>	<b>65</b>
5.1. Elección de sensor . . . . .	65
5.2. Procesamiento de señal. . . . .	66
5.2.1. Calibración de la unidad de medición inercial. . . . .	66
5.2.2. Filtrado de señal. . . . .	67
5.2.3. Eliminación de infiltraciones de gravedad. . . . .	69
5.3. Comunicación entre MATLAB y Arduino . . . . .	74
5.4. Interfaz . . . . .	74
5.4.1. Diseño . . . . .	75
5.4.2. Mensajes emergentes . . . . .	77
5.5. Reacondicionamiento del manipulador paralelo . . . . .	78
5.6. Resultados . . . . .	80
5.6.1. Velocidad . . . . .	80
5.6.2. Aceleración . . . . .	83

---

<b>6. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>87</b>
6.1. Conclusión . . . . .	87
6.2. Trabajos futuros . . . . .	88
<b>Referencias</b>	<b>89</b>
<b>A. Programación de los modelos matemáticos</b>	<b>93</b>
A.1. Programación de trayectorias . . . . .	93
A.1.1. Trayectoria para el estado de la plataforma móvil . . . . .	93
A.1.2. Trayectoria de los actuadores lineales . . . . .	94
A.2. Programación del análisis de velocidad . . . . .	94
A.2.1. Programación del análisis de velocidad directo . . . . .	95
A.2.2. Programación del análisis de velocidad inverso . . . . .	96
A.3. Programación análisis de aceleración . . . . .	96
<b>B. Programación en Arduino</b>	<b>99</b>





# Índice de figuras

1.1. Manipulador paralelo plano [10] . . . . .	3
1.2. Prototipo de plataforma <i>Gough–Stewart</i> [11] . . . . .	4
1.3. Manipulador híbrido [12] . . . . .	5
1.4. Manipulador paralelo 4-PRUR [13] . . . . .	6
1.5. Manipulador paralelo configurable [14] . . . . .	7
1.6. Etapas de la metodología DMAIC Six Sigma. Modificada de [23]. . . . .	10
1.7. Metodología aplicada al análisis cinemático de una plataforma <i>Gough–Stewart</i> . . . . .	11
2.1. Campo vectorial helicoidal [24]. . . . .	16
2.2. Movimiento relativo entre dos cuerpos rígidos [2]. . . . .	18
2.3. Movimiento relativo entre tres cuerpos rígidos [2]. . . . .	18
3.1. Bosquejo del robot paralelo. . . . .	29
3.2. Definición de tornillos para el robot paralelo. . . . .	31
3.3. Vectores de posición para el robot paralelo. . . . .	33
4.1. Modelo tridimensional de la base fija y plataforma móvil. . . . .	44
4.2. Modelado de los cuerpos $C_i$ . . . . .	45
4.3. Modelado de los actuadores lineales. . . . .	45
4.4. Modelado tridimensional de la plataforma <i>Gough–Stewart</i> . . . . .	47
4.5. Configuración de las variables de estado. . . . .	48
4.6. Ventana de configuración para el sistema de bloques que exporta ADAMS VIEW. . . . .	49
4.7. Bloque con la cinemática del modelo tridimensional. . . . .	49
4.8. Representación visual de la comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW. . . . .	50
4.9. Comparación de velocidad angular. . . . .	51
4.10. Discrepancias en la comparación de velocidad angular. . . . .	52
4.11. Comparación de velocidad lineal. . . . .	53
4.12. Discrepancias en la comparación de velocidad lineal. . . . .	54
4.13. Comparación de aceleración angular. . . . .	55
4.14. Discrepancias en la comparación de aceleración angular. . . . .	56
4.15. Comparación de aceleración lineal. . . . .	57
4.16. Discrepancias en la comparación de aceleración lineal. . . . .	57
4.17. Comparación de velocidad angular. . . . .	59

---

4.18. Discrepancias en la comparación de velocidad angular. . . . .	60
4.19. Comparación de velocidad lineal. . . . .	60
4.20. Discrepancias en la comparación de velocidad lineal. . . . .	61
4.21. Comparación de aceleración angular. . . . .	61
4.22. Discrepancias en la comparación de aceleración angular. . . . .	62
4.23. Comparación de aceleración lineal. . . . .	62
4.24. Discrepancias en la comparación de aceleración lineal. . . . .	63
5.1. Comparación entre una señal calibrada y una sin calibrar. . . . .	67
5.2. Aplicación del filtro a una señal del sensor en reposo. . . . .	68
5.3. Aplicación del filtro a una señal del sensor en movimiento. . . . .	69
5.4. Infiltración de la gravedad. . . . .	70
5.5. Procesado de las velocidades angulares obtenidas con el sensor. . . . .	73
5.6. Aceleraciones lineales obtenidas con el sensor. . . . .	73
5.7. Procesado de las aceleraciones lineales obtenidas con el sensor. . . . .	74
5.8. Interfaz gráfica . . . . .	75
5.9. Mensajes emergentes dentro de la interfaz. . . . .	78
5.10. Problemas en la plataforma. . . . .	78
5.11. Problemas en la plataforma. . . . .	79
5.12. Secuencia para obtener datos experimentales. . . . .	81
5.13. Comparación de velocidad angular. . . . .	82
5.14. Comparación de velocidad lineal. . . . .	83
5.15. Comparación de velocidad lineal con la fase corregida. . . . .	83
5.16. Comparación de aceleración angular. . . . .	84
5.17. Comparación de aceleración lineal. . . . .	85
A.1. Función de trayectoria de la plataforma móvil en MATLAB. . . . .	94
A.2. Trayectoria de los actuadores lineales en MATLAB. . . . .	94
A.3. Función para calcular el estado de velocidad en MATLAB. . . . .	95
A.4. Estado de velocidad directo en MATLAB. . . . .	95
A.5. Cálculo de velocidades pasivas en <i>MATLAB</i> . . . . .	96
A.6. Función para calcular el estado de aceleración en MATLAB. . . . .	96
A.7. Estado de aceleración en MATLAB. . . . .	97
B.1. Parámetros de inicialización en la comunicación. . . . .	99
B.2. Actualización de lecturas de la unidad de medición inercial. . . . .	100
B.3. Función del filtro de media móvil ponderada exponencialmente. . . . .	100
B.4. Establecimiento de la comunicación. . . . .	101
B.5. Envío de información a MATLAB. . . . .	102
B.6. Función del filtro de media móvil ponderada exponencialmente. . . . .	102

# Índice de Tablas

2.1. Pares cinemáticos y su representación en un sistema de tonillos [30]. . . . .	24
3.1. Coordenadas iniciales de los puntos $B_i$ , $P_i$ y $O$ en mm. . . . .	30
3.2. Coordenadas iniciales de los puntos $P_i$ y $O$ corregidos en mm. . . . .	31
4.1. Ubicación de los puntos $b_i$ y $p_i$ en mm. . . . .	44
5.1. Especificaciones técnicas de diferentes sensores. . . . .	65
5.2. Especificaciones técnicas de la LSM9DS1. . . . .	66
5.3. Coeficientes de correlación . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción

Los robots más conocidos en diferentes industrias son los brazos robóticos o también denominados manipuladores seriales. Este tipo de robots se conforman de un efector final, una base fija y un conjunto de eslabones y juntas cinemáticas, lo que se conoce como cadena cinemática, que unen a dicho efector con la base fija. El efector final es el último elemento del manipulador y puede ser un dispositivo tipo pinza, una ventosa o alguna herramienta necesaria para el trabajo que realizará. Por otro lado, los manipuladores paralelos también tienen presencia en la industria, aunque claramente no tan notoria. De hecho, se recurre a este tipo de robots como una solución a las problemáticas presentes en los manipuladores seriales y no como una solución directa.

Un manipulador paralelo es un robot que se conforma por dos plataformas, una móvil y una fija, que son unidas por más de una cadena cinemática, donde la plataforma móvil es análoga al efector final en los manipuladores seriales y puede complementarse con las mismas herramientas. Uno de los manipuladores paralelos más famosos es la plataforma de *Gough-Stewart*, este consta de seis cadenas cinemáticas que unen la plataforma fija con la plataforma móvil, obteniendo así un manipulador con seis grados de libertad. Su popularidad creció gracias al trabajo publicado por Stewart, donde propone esta plataforma como un simulador de vuelo. Sin embargo, años atrás Gough había desarrollado un mecanismo similar para comprobar el desgaste en los neumáticos de aeronaves y debido a las similitudes que estos trabajos presentan, es el motivo de nombrar *Gough-Stewart* a cualquier plataforma que tenga las características ya mencionadas.

Ambos manipuladores se encuentran dentro del ámbito aeroespacial. No obstante, esta área no es la única que aprovecha el potencial de los manipuladores paralelos, la industria automovilística, la manufacturera, de ensamble, de electrónica, inclusive en el área médica se utilizan los manipuladores paralelos. Estas áreas son exigentes en cuanto a la realización de sus productos o procedimientos, requieren de una gran rigidez, altas velocidades, capacidad de carga y una gran precisión, características que son parte de las distintas ventajas que poseen este tipo de manipuladores. En contraste, las desventajas que presentan son limitadas; un espacio de trabajo reducido; una cinemática y dinámica complicada, debido a que no se pueden generalizar, y problemas con las configuraciones singulares [1].

La mayoría de las desventajas de un manipulador paralelo están en torno a su cinemática, específicamente a su cinemática directa, pues comúnmente conduce a un sistema de ecuaciones no lineales. El análisis directo de posición es el primer problema que se presenta porque los manipuladores paralelos suelen tener geometrías caprichosas que permiten múltiples resultados de posición y orientación de la plataforma móvil para una misma posición en los actuadores. A pesar de que existen diversos métodos numéricos para resolver este problema, estos son complicados y en ocasiones demasiado extensos, lo que conduce a un segundo problema, pues estos métodos numéricos se tienen que aplicar a los análisis de velocidad y de aceleración, resultando en procedimientos muy extensos y laboriosos.

En los últimos años, se ha utilizado de forma exitosa la teoría de tornillos infinitesimales, parte de la cinemática diferencial, para solucionar este tipo de problemas. Esta teoría es atribuida a Ball [2] e inicialmente fue aplicada a la dinámica de cuerpos rígidos. No obstante, diversos autores la han utilizado para obtener el análisis cinemático de los manipuladores paralelos debido a que gracias a ella se omite el uso de derivadas y un gran número de operaciones matemáticas. Además, su utilidad es tal, que puede emplearse incluso para obtener la dinámica y el análisis de singularidades de cualquier tipo de manipulador, ya sea serial o paralelo.

## 1.1. Antecedentes

No es de extrañar que la plataforma *Gough–Stewart* sea el manipulador paralelo más estudiado, motivo por el cual se han desarrollado varios métodos que permiten encontrar la cinemática de este manipulador. Sin embargo, uno de los más eficientes es la teoría de tornillos. Esta teoría se acopla perfectamente a manipuladores con seis pares cinemáticos inferiores, pero también es capaz de resolver la cinemática de manipuladores con geometrías y configuraciones aún más complejas o más simples.

### 1.1.1. Teoría de tornillos

La teoría de tornillos es definida como una herramienta matemática capaz de describir la cinemática espacial, siendo Ball a quien se le atribuye esta teoría por su trabajo en [3] acerca de la dinámica de cuerpos rígidos. La teoría de tornillos toma sus bases de dos teoremas, el teorema de Poincaré y el teorema de Chasles, donde el primer teorema describe que cualquier sistema de fuerzas en un cuerpo rígido puede sustituirse por una sola fuerza y un par, mientras que el segundo teorema menciona que cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede efectuarse a través de una rotación y una traslación con respecto a un eje.

Los trabajos realizados por Hunt, como en [4], donde describe la búsqueda de restricciones excesivas presentes en los pares prismáticos de los mecanismos, son de los primeros trabajos

en utilizar la teoría de tornillos para la cinemática espacial de los manipuladores paralelos. Además de los trabajos realizados por Hunt, se encuentran los hechos por Phillips y Waldron [5, 6] con los que también se innovó al comenzar a utilizar la teoría de tornillos en la cinemática de manipuladores.

La teoría de tornillos es útil para describir la movilidad de los manipuladores de manera exacta y sistemática, ya sean paralelos o seriales. El análisis cinemático de los manipuladores se puede escalar al siguiente orden, análisis de velocidad, con facilidad gracias al uso del álgebra de Lie. En contraste, el análisis de aceleración no fue nada fácil de hallar, de hecho, antes de los trabajos de Brand, Mises, Sugimoto y Duffy [7, 8, 9] donde definen y aplican tanto el álgebra como el cálculo motor en los manipuladores, la teoría de tornillos era considerada únicamente para los análisis cinemáticos de primer orden. De tal modo que gracias a ellos, entre muchos otros, la teoría de tornillos pudo alcanzar los análisis cinemáticos de orden superior, tales como el análisis de aceleración, pulso e hiper-pulso de cualquier manipulador. A continuación, se describen algunos trabajos donde se realiza el análisis cinemático de manipuladores con diferentes geometrías mediante la teoría de tornillos. Las configuraciones bajo las que se encuentran se presentan en forma de siglas, donde el caracter P es utilizado para representar una junta prismática, R una junta revoluta, S una junta esférica y U una junta universal.

### Manipulador paralelo plano

Un manipulador paralelo se considera plano cuando el espacio de trabajo de éste es en un plano bidimensional, en [10] se toma como caso de estudio un manipulador no redundante de tres grados de libertad que se encuentra conectado por pares cinemáticos inferiores bajo la configuración RPR. Este manipulador se muestra en la Figura 1.1.

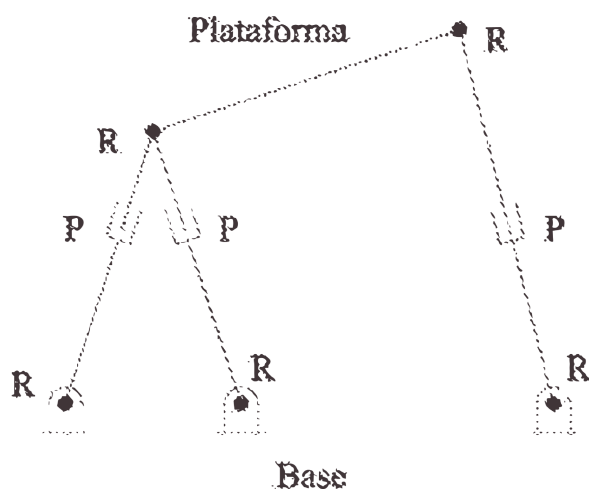


Figura 1.1: Manipulador paralelo plano [10]

El análisis cinemático de posición se realizó a través de un procedimiento geométrico, lo que

evita el uso de métodos numéricos y las consecuencias de usarlos. En un manipulador con estas características relativamente sencillas, el método geométrico es una alternativa para encontrar la solución real de acuerdo a la geometría del manipulador. Sin embargo, utilizarlo en manipuladores con un espacio de trabajo tridimensional es más complicado y se deben usar otros tipos de métodos.

Para el análisis de velocidad se utiliza la teoría de tornillos, resaltando el hecho de que no es necesario conocer las velocidades articulares pasivas del manipulador gracias a que se emplea el álgebra de Lie. Además, ciertas matrices desarrolladas en el análisis de velocidad son de utilidad para el análisis de singularidades, presentado también en el documento. Los resultados obtenidos por ambos análisis son presentados por los autores en la parte final del documento a través de un caso de estudio y con ayuda de un *software* matemático.

### Prototipo de plataforma *Gough–Stewart*

En [11] Cortés-Ruiz construyó un prototipo de una plataforma *Gough–Stewart*, donde las plataformas móvil y fija se unen a través de cadenas cinemáticas bajo la configuración UPUR. En la Figura 1.2 se encuentra representado el prototipo final de la plataforma.



Figura 1.2: Prototipo de plataforma *Gough–Stewart* [11]

El análisis cinemático de posición de este prototipo se realizó a través de las ecuaciones de cerradura, dando como resultado un sistema de ecuaciones no lineales que se resolvieron mediante funciones preestablecidas en MATLAB. En cuanto al análisis posterior, el análisis de velocidad, se realizó con la teoría de tornillos, ya que la configuración de este manipulador permite utilizar el álgebra de Lie sin problemas y esto a su vez evita el uso de derivadas necesarias en los análisis cinemáticos convencionales.

Los resultados obtenidos a partir de la teoría de tornillos se compararon con los resultados de una simulación realizada en SOLIDWORKS y con los valores proporcionados por una unidad de medición inercial. Ambas comparaciones se graficaron con ayuda de MATLAB y

permitieron observar las similitudes que los resultados de la simulación y la unidad de medición inercial tuvieron respecto a los arrojados por la teoría de tornillos.

## Manipulador híbrido

Un manipulador híbrido es aquel que es una combinación entre los manipuladores seriales y los manipuladores paralelos, aunque en ocasiones también puede llamarse así a la unión de dos manipuladores paralelos, como es el caso del manipulador bajo análisis en [12], donde Gallardo descubre la forma de simplificar el análisis cinemático de posición de manipuladores más complejos como lo es la plataforma *Gough-Stewart* a través del método geométrico al dividir los movimientos del manipulador, uno para la rotación y otro para la traslación. De modo que el análisis de posición se ve exento de los errores ocasionados por los métodos numéricos al resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

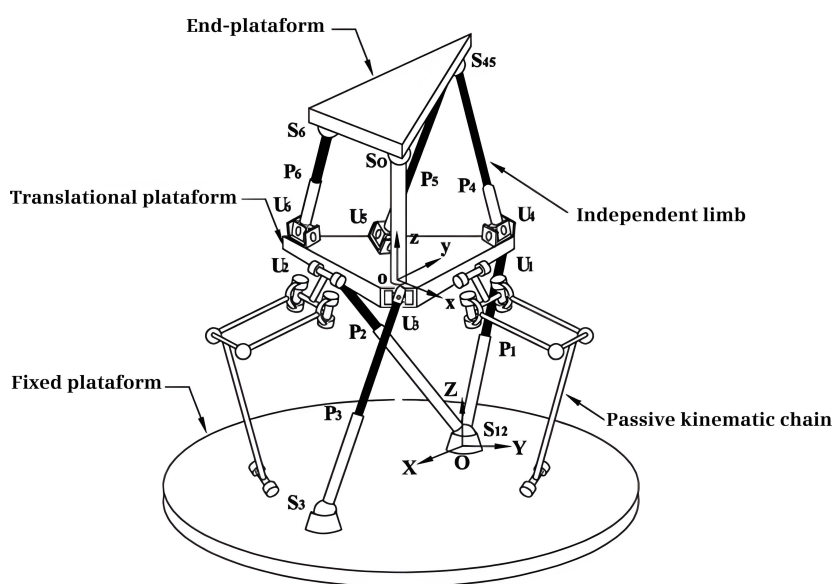


Figura 1.3: Manipulador híbrido [12]

En la Figura 1.3 se presenta el manipulador bajo análisis, en ella se muestra cómo el manipulador posee tres cadenas cinemáticas con una configuración UPS en cada uno de los manipuladores conectados. El análisis cinemático de este manipulador híbrido llega hasta el segundo orden y en palabras del propio autor se obtienen de forma sencilla gracias a la aplicación de la teoría de tornillos, los resultados de dichos análisis se muestran a través de un caso de estudio en la parte final del documento y se grafican utilizando un *software* matemático.

## Manipulador paralelo 4-PRUR

Como el nombre lo menciona, el manipulador paralelo bajo análisis en [13] posee cuatro extremidades que unen la plataforma fija con la plataforma móvil mediante la configuración PRUR como se muestra en la Figura 1.4.



A diferencia del manipulador anterior, el análisis cinemático de posición directa en este manipulador no puede obtenerse de forma completamente geométrica, por lo que exentar el uso de métodos numéricos no es posible. No obstante, se puede evitar el uso de matrices de rotación obteniendo las coordenadas de dos puntos en la plataforma móvil. Otra de las características peculiares de este trabajo es que para realizar los análisis cinemáticos de orden superior con la teoría de tornillos es necesario hacer uso de cadenas y pares cinemáticos virtuales, es decir, que se crearon cadenas y pares cinemáticos no existentes con velocidades y aceleraciones articulares nulas para que no aporten nada al análisis, pero permitan aplicar el álgebra de Lie sin restricción alguna.

Con la finalidad de demostrar la precisión que puede tener la teoría de tornillos, en el documento se realiza un ejemplo numérico que muestra la gran similitud que existe entre los resultados arrojados por el análisis cinemático en un *software* matemático y los resultados obtenidos a través de ADAMS VIEW, un *software* especializado en análisis multicuerpo muy reconocido.

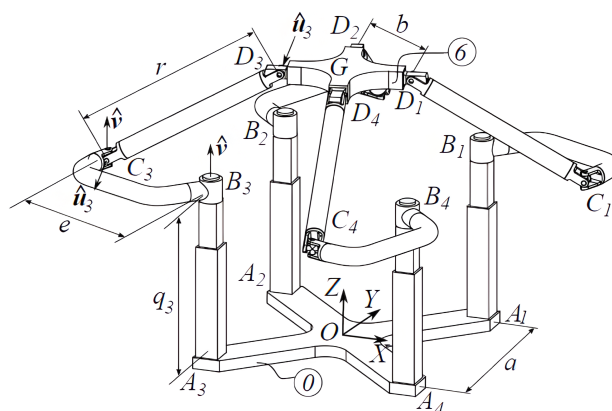


Figura 1.4: Manipulador paralelo 4-PRUR [13]

### Manipulador paralelo configurable

Por último y con el propósito de demostrar la versatilidad que posee la teoría de tornillos para desarrollar el análisis cinemático de diferentes tipos de manipuladores, en [14] se emplea esta teoría para realizar el análisis cinemático de velocidad de un manipulador paralelo cuya plataforma móvil es configurable, dando la posibilidad de poseer dos efectores finales. La Figura 1.5 muestra la configuración del manipulador planteado, en ella se observa cómo es que las cadenas cinemáticas se encuentran conectadas por juntas revolutas, donde las únicas juntas con velocidades generalizadas son las juntas revolutas que unen la plataforma fija con las cadenas cinemáticas.

El hecho de presentar una plataforma configurable y que las únicas juntas con velocidades generalizadas sean las que conectan la plataforma fija con la cadena cinemática, implica que las velocidades articulares pasivas deben expresarse en términos de una única variable para

eliminarlas a través de la teoría de tornillos. En [14] se logra hacer lo anterior con ayuda de los coeficientes de influencia, desarrollados también con la teoría de tornillos, y una ecuación de cadena cinemática cerrada. Al final del análisis, los resultados obtenidos se comparan con los resultados arrojados mediante el *software* ADAMS VIEW, demostrando la exactitud de la teoría de tornillos para diferentes tipos de manipuladores.

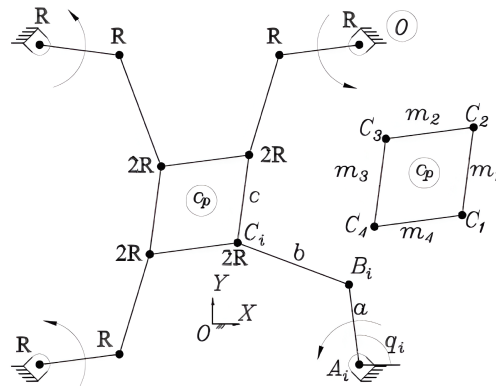


Figura 1.5: Manipulador paralelo configurable [14]

## 1.2. Planteamiento del problema

Los manipuladores son utilizados por diferentes industrias en tareas que son realizadas a una velocidad o aceleración controlada. El control de estos movimientos, generalmente se ejecuta en tiempo real, por lo que la cinemática de los manipuladores juega un rol importante. Si la cinemática es sencilla, el control en tiempo real es realizable. Sin embargo, si la cinemática es complicada, entonces el control en tiempo real se torna muy difícil de alcanzar. El problema de una cinemática complicada es que conducen a sistemas de ecuaciones no lineales que solo se resuelven con ayuda de métodos numéricos, y al emplearse alguno de ellos las soluciones necesarias para el control tardan en obtenerse, dejando fuera de alcance un control en tiempo real [15, 16]. Estos inconvenientes están presentes mayormente en los manipuladores paralelos como la plataforma *Gough-Stewart*, ocasionando que las diferentes industrias que necesitan de un manipulador centren su atención en los manipuladores seriales dejando de lado a los manipuladores paralelos y todas sus ventajas.

En los últimos años, se ha utilizado la teoría de tornillos para solucionar este tipo de problemas en la cinemática porque permite evitar el uso de derivadas, un gran número de operaciones matemáticas y el uso de métodos numéricos. En la Universidad Tecnológica de la Mixteca durante el año 2019 se construyó un prototipo de una plataforma *Gough-Stewart* con la finalidad de poner en práctica la resolución de la cinemática de manipuladores paralelos mediante la teoría de tornillos, observar las diferencias que existen con el método tradicional y sobre todo corroborar la veracidad de los resultados obtenidos por la teoría de tornillos a través de pruebas experimentales y numéricas. Sin embargo, en el trabajo presentado por Cortés-Ruiz

[11] no se cumplen por completo los objetivos planteados, ya que el análisis de primer orden contiene un pequeño error, se utilizó un *software* de dibujo asistido por computadora y no un *software* especializado en el análisis multicuerpo. Además, factores como el tiempo, el clima e intervenciones no deseadas influyeron en el deterioro del funcionamiento del manipulador, lo que impide corroborar la veracidad de los datos, pues existe una discrepancia entre los resultados obtenidos con la teoría de tornillos y los adquiridos mediante el *software* CAD y la unidad de medición inercial.

En este proyecto se propone corregir el análisis de primer orden, reacondicionar el prototipo de la plataforma *Gough-Stewart*, realizar un modelo tridimensional de dicha plataforma con un *software* especializado en el análisis multicuerpo, procesar la señal obtenida de la unidad de medición inercial para eliminar el ruido así como las infiltraciones de gravedad que dicha señal presente, y finalmente, rediseñar la interfaz para que sea capaz de mover el manipulador e interactuar con el *software* de análisis multicuerpo y el *software* con el que se controla a la unidad de medición inercial. De esta forma, la interfaz podrá mostrar al usuario los resultados de cualquiera de los tres análisis realizados. Así, el usuario comparará y corroborará la veracidad de los resultados arrojados por el análisis desarrollado con la teoría de tornillos y determinará si la teoría de tornillos es una buena alternativa a los métodos convencionales. El análisis cinemático de la plataforma también se extenderá al segundo orden con la teoría de tornillos para aclarar que esta teoría no es únicamente una herramienta que facilita el análisis cinemático de primer orden, sino también es útil en análisis de orden superior. Cabe mencionar que, el punto de partida de este proyecto será el análisis de posición directa realizado en [11], de modo que los programas de cinemática directa e inversa de posición se tomarán de dicho trabajo.

### 1.3. Justificación

Diversos autores han utilizado la teoría de tornillos para obtener los análisis cinemáticos de diferentes manipuladores, ya sean seriales o paralelos. En [14] se utiliza la teoría de tornillos para solucionar el análisis de primer orden de un manipulador paralelo con la plataforma móvil configurable, en algunos otros trabajos también se utiliza la teoría de tornillos para el análisis de singularidades como en [10, 17, 18, 19] y otros más extienden al análisis cinemático de los manipuladores al segundo orden tal y como se muestra en [7, 12, 13, 20], demostrando la utilidad y versatilidad de esta herramienta para omitir el uso de derivadas y métodos numéricos. Sin embargo, en la mayoría se utiliza el *software* ADAMS VIEW para corroborar los resultados obtenidos, en otros más solo se grafican los resultados de la teoría de tornillos con un *software* matemático y casi ninguno corrobora los datos de forma experimental como se hace en el trabajo presentado por Cortés-Ruiz [11]. No obstante, en dicho trabajo se cuenta con los detalles mencionados en la sección anterior, por lo que este proyecto permitirá corroborar los resultados proporcionados por los análisis cinemáticos de primer y segundo orden realizados con teoría de tornillos, no solo con un *software* de análisis multicuerpo sino también de forma experimental, acercando a la teoría de tornillos a una aplicación real. Además, este proyecto también abre la posibilidad de considerar a la teoría de tornillos para el control de velocidad

en tiempo real del manipulador bajo análisis.

## 1.4. Hipótesis

Los resultados obtenidos del análisis de primer y segundo orden de la plataforma *Gough-Stewart* a través de la teoría de tornillos serán similares a los resultados obtenidos mediante las simulaciones multicuerpo y la unidad de medición inercial al ser comparados.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo general

Desarrollar el análisis cinemático de segundo orden de la plataforma *Gough-Stewart* a través de la teoría de tornillos, con el fin de evitar procedimientos tediosos, y validar experimentalmente los resultados con una unidad de medición inercial para comprobar la fiabilidad de los mismos.

### 1.5.2. Objetivos específicos

- ✓ Reacondicionar la plataforma *Gough-Stewart*.
- ✓ Definir el concepto de tornillo infinitesimal.
- ✓ Completar el análisis de velocidad mediante la teoría de tornillos.
- ✓ Crear el modelo tridimensional de la plataforma *Gough-Stewart* en un software de análisis multicuerpo.
- ✓ Aplicar un filtro a los datos experimentales para eliminar el ruido que presenten.
- ✓ Eliminar las infiltraciones de la gravedad en los datos experimentales.
- ✓ Cambiar el marco de referencia de los datos experimentales a un marco inercial.

## 1.6. Limitantes

Para el desarrollo del proyecto, se tienen las siguientes limitantes:

- ✓ Desarrollo únicamente del análisis de velocidad y aceleración. Los análisis de pulso e hiper-pulso no se abordarán.
- ✓ Validación experimental de la cinemática con ángulos de inclinación mayores a 10 grados para compensar la inestabilidad de la plataforma móvil debido a las juntas universales.

## 1.7. Metodología

En este proyecto se propone la metodología DMAIC Six Sigma [21], la cual consta de 5 fases estructuradas que llevan a la solución de problemas en un proceso existente, razón por la cual se vuelve útil en este proyecto. Las cinco fases de dicha metodología son definir, medir, analizar, mejorar y controlar.

La metodología DMAIC Six Sigma es de carácter secuencial, pues se debe cumplir con una etapa antes de avanzar a la siguiente. En la primera fase se define el problema y se conoce el proceso, después, en la segunda fase se realiza una recolección de datos del proceso con sistemas de medición validados. El análisis de los resultados obtenidos se realiza en la siguiente fase, donde también se buscan las causas potenciales del problema. Para la fase cuatro se definen las actividades de mejora con el fin de solucionar las causas potenciales del problema, se ejecutan y se vuelven a analizar los datos, si los problemas se han resuelto entonces se pasa a la etapa final donde se crea un control para mantener las mejoras y cerrar el proyecto, en caso contrario, se buscan nuevas causas potenciales del problema, se definen nuevas acciones de mejora, se ejecutan y se analizan para observar si el problema ya se ha resuelto [21, 22].

En la Figura 1.6 se muestra una representación gráfica de la metodología para observar cómo interactúan sus fases. La figura fue realizada tomando como referencia el diagrama mostrado en [23].

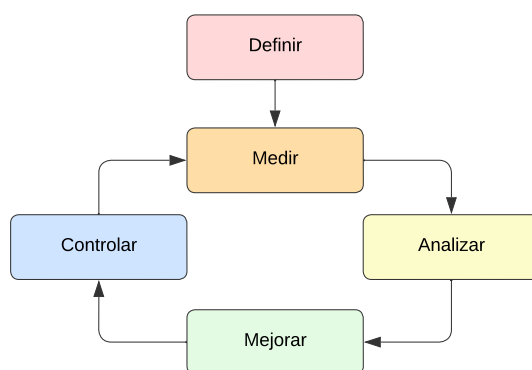


Figura 1.6: Etapas de la metodología DMAIC Six Sigma. Modificada de [23].

En la Figura 1.7 se presenta la metodología DMAIC Six Sigma adaptada a este proyecto, en ella se observa un diagrama con diferentes colores pastel, donde cada color representa una fase de la metodología. En color rojo se encuentra la fase de definición, donde hay una descripción del proceso y la definición del planteamiento del problema. De color naranja se encuentra la segunda fase, en ella se utilizarán varios métodos de medición como lo son una unidad de medición inercial, un *software* de análisis multicuerpo y la cinemática directa. Estos métodos de medición deben cumplir con una buena sensibilidad, reproducibilidad y exactitud. La fase de análisis se encuentra de color amarillo, y en ella se debe realizar una interfaz para comparar los resultados e identificar las posibles causas del problema, estas causas estarán relacionadas

con el *software*, el *hardware* y con el propio análisis cinemático. En color verde está la fase cuatro, donde se propone corregir varios aspectos como el problema del análisis cinemático, utilizar un software adecuado para el análisis multicuerpo y mejorar el procesamiento de la señal de la unidad de medición inercial, entre otros. Por último, la fase cinco se encuentra de color azul, ésta es la parte final del proyecto donde se logra eliminar las discrepancias entre todas las formas de validación y se comprueba la veracidad de los datos obtenidos con la teoría de tornillos, por lo que se proponen ciertas actividades que permitan mantener las mejoras en el proceso, y con ello dar por terminado el proyecto.

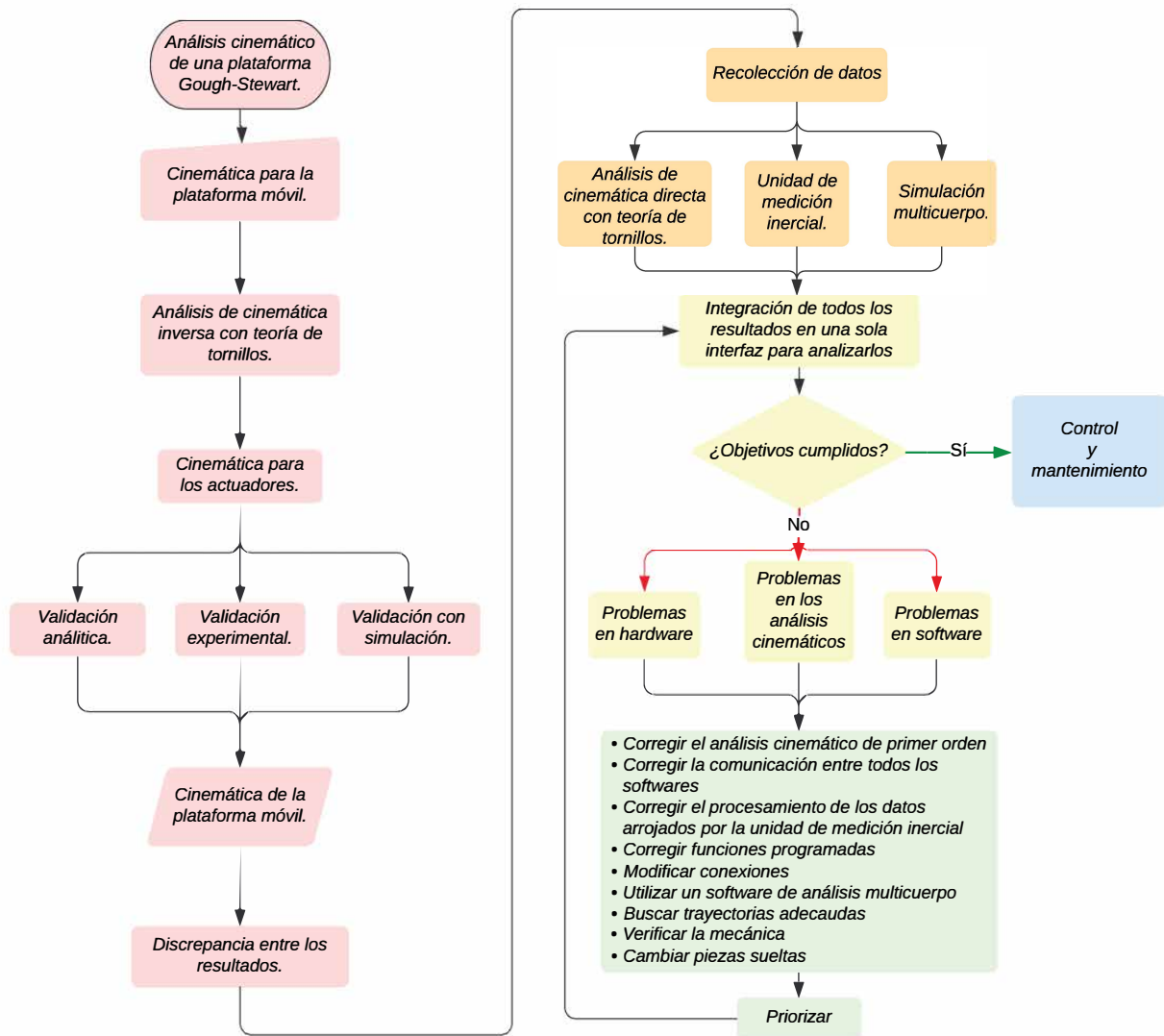


Figura 1.7: Metodología aplicada al análisis cinemático de una plataforma *Gough-Stewart*.



# Capítulo 2

## Marco teórico

La notación utilizada en las ecuaciones referentes a la teoría de tornillos en este documento debe diferenciar las variables que representan vectores de las que representan una magnitud, de modo que los vectores serán asociados a letras con superíndices y la magnitud será representada por letras con subíndices. Para ambos casos se deberá leer de derecha a izquierda, es decir, que  ${}^A v_O^B$ , se lee como la velocidad del cuerpo  $B$  respecto al cuerpo  $A$  en un punto de referencia  $O$ .

### 2.1. Tornillo infinitesimal

Un tornillo infinitesimal o en este contexto únicamente tornillo, como se le llamará de ahora en adelante, es la parte fundamental de la teoría de tornillos. En [3] se define como una línea recta en el espacio que, al igual que un tornillo común, cuenta con un paso  $h$ . De hecho, es gracias a  $h$  y a un giro alrededor del tornillo que se puede obtener cualquier cinemática, ya sea lineal o angular, de un cuerpo rígido respecto a otro, siempre y cuando se encuentren unidos a través del tornillo en el que se presenta el giro.

La representación matemática de un tornillo se lleva a cabo con ayuda de las coordenadas Plücker, las cuales permiten asignar seis coordenadas homogéneas a cualquier línea en el espacio proyectivo  $\mathbb{E}^3$ , en [2] un tornillo que une dos cuerpos rígidos denominados  $A$  y  $B$  se modela a través de coordenadas Plücker como en la ecuación (2.1).

$${}^A \mathcal{S}^B = \begin{bmatrix} {}^A S^B \\ {}^A S_o^B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

#### 2.1.1. Parte primaria

La parte primaria de un tornillo, representada como  $P({}^A \mathcal{S}^B)$ , es un vector de magnitud uno, modelado por  ${}^A S^B$  en la ecuación (2.1), cuya dirección es la dirección del eje denominado en [17] como el eje instantáneo del tornillo o ISA, por sus siglas en inglés. El eje instantáneo del tornillo es alrededor del cual se realiza el giro mencionado con anterioridad y que es indispensable para los análisis cinemáticos.



### 2.1.2. Parte dual

La parte dual, representada como  $D({}^A\mathfrak{S}_o^B)$ , es el momento producido por  ${}^AS^B$  en el polo de referencia, entiéndase por polo de referencia a un punto en el cuerpo rígido  $B$  sobre el cual se requiere obtener la cinemática. La componente dual de un tornillo, a diferencia de la parte primaria, no necesita ser normalizada, solo se obtiene a través de la siguiente ecuación:

$${}^AS_O^B = {}_Ah_B {}^AS^B + {}^AS^B \times r_{O/P} \quad (2.2)$$

cuyo componente  $r_{O/P}$  modela un vector de posición que inicia en cualquier parte del eje instantáneo del tornillo y termina en el polo de referencia, por otro lado,  ${}_Ah_B$  es el paso del tornillo y se define como:

$${}_Ah_B = \frac{{}^Av_O^B \bullet {}^Aw^B}{{}^Aw_B^2} \quad (2.3)$$

donde  $v$  es la velocidad lineal,  $w$  la velocidad angular y  $\bullet$  el producto interno del álgebra vectorial tridimensional.

## 2.2. Álgebra de Lie

Los tornillos, al ser isomorfos a los grupos euclidianos, se operan mediante el álgebra de Lie. Este tipo de álgebra tiene las propiedades de un espacio vectorial, ya que responde a la suma y multiplicación por un escalar en cualquiera de los elementos pertenecientes a dicho conjunto. Además, cuenta con la operación denominada producto de Lie y con dos formas simétricas bilineales que son de utilidad para los análisis cinemáticos.

### 2.2.1. Operaciones fundamentales

Las operaciones con las que son operados los elementos infinitesimales en forma de tornillo y las propiedades de cada una de ellas se encuentran descritas en [20], donde las tres operaciones fundamentales están bien definidas por:

1. Adición

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{\begin{bmatrix} \omega_1 + \omega_2 \\ v_{o1} + v_{o2} \end{bmatrix}} \quad (2.4)$$

2. Multiplicación por un escalar

$$\lambda \overline{V}_1 = \overline{\begin{bmatrix} \lambda \omega_1 \\ \lambda v_{o1} \end{bmatrix}} \quad (2.5)$$

3. Producto Lie

$$[\overline{V}_1 \ \overline{V}_2] = \overline{\begin{bmatrix} \omega_1 \times \omega_2 \\ \omega_1 \times v_{o2} - \omega_2 \times v_{o1} \end{bmatrix}} \quad (2.6)$$

donde  $\overline{V}_n$  es un elemento del conjunto denominado grupo euclidiano y es equivalente a la ecuación (2.1) que modela a un tornillo, por lo que,  $\omega_i$  y  $v_{oi}$  representan la parte primaria y parte dual del elemento  $V_n$ , respectivamente. En cuanto a la variable  $\lambda$ , ésta es un escalar que pertenece al conjunto de los números reales, y  $\times$  es el producto cruz del espacio vectorial tridimensional.

### 2.2.2. Producto Lie

El producto de Lie es la clave para los análisis cinemáticos de orden superior [2], por ello a continuación se muestran algunas propiedades de este producto.

1. Nilpotente

$$[\overline{V}_1 \ \overline{V}_2] = 0 \quad (2.7)$$

2. Distributiva

$$[\overline{V}_1 \ \lambda_2 \overline{V}_2 + \lambda_3 \overline{V}_3] = \lambda_2 [\overline{V}_1 \ \overline{V}_2] + \lambda_3 [\overline{V}_1 \ \overline{V}_3] \quad (2.8)$$

$$[\lambda_1 \overline{V}_1 + \lambda_2 \overline{V}_2 \ \overline{V}_3] = \lambda_1 [\overline{V}_1 \ \overline{V}_3] + \lambda_2 [\overline{V}_2 \ \overline{V}_3]$$

3. Identidad de Jacobi

$$[\overline{V}_1 \ [\overline{V}_2 \ \overline{V}_3]] + [\overline{V}_3 \ [\overline{V}_1 \ \overline{V}_2]] + [\overline{V}_2 \ [\overline{V}_3 \ \overline{V}_1]] = 0 \quad (2.9)$$

### 2.2.3. Formas simétricas bilineales

Por último, el nombre de las dos formas simétricas bilineales son la forma de Klein y la forma de Killing cuyas representaciones están dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.11), respectivamente.

1. Forma de Klein

$$\{\overline{V}_1, \overline{V}_2\} = \omega_1 \bullet v_{o2} + \omega_2 \bullet v_{o1} \quad (2.10)$$

2. Forma de Killing

$$\langle \overline{V}_1, \overline{V}_2 \rangle = \omega_1 \bullet \omega_2 \quad (2.11)$$

En ambas ecuaciones el símbolo  $\bullet$  representa el producto interno del espacio vectorial de tres dimensiones. Es importante observar que, estas formas son productos con un resultado del tipo escalar, característica que será de gran utilidad en apartados posteriores, especialmente los resultados producidos al utilizar la forma de Klein en tornillos. La operación de estos elementos es análoga a la ecuación (2.10). No obstante, para evitar confusiones se representará la forma de Klein utilizando como argumentos un par de tornillos tal como se hace en [14]. La ecuación (2.12) modela la forma de Klein de dos tornillos y puede aplicarse directamente a los análisis cinemáticos.

$$\{\$1; \$2\} = S_1 \bullet S_{o2} + S_2 \bullet S_{o1} \quad (2.12)$$

## 2.3. Campo helicoidal

El campo helicoidal es uno de los conceptos más importantes que se debe tener en cuenta en los análisis cinemáticos a través de la teoría de tornillos, debido a que el campo helicoidal posee una propiedad que permite conocer si los estados tanto de velocidad como de aceleración están completamente definidos. Además, gracias a dichas propiedades también se puede obtener la derivada temporal de un vector con cierto tipo de características en un espacio físico, haciendo del campo helicoidal una herramienta indispensable en ese tipo de análisis.

El campo helicoidal es definido como un sistema de vectores que se encuentran tangenciales al espacio generado por el vector del campo helicoidal, cabe señalar que este vector guarda relación con el eje instantáneo de un tornillo [24, 25]. De acuerdo con Gallardo [2], un campo helicoidal se modela como:

$$X : E \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad X(P) = X(P) \quad \forall P \in E \quad (2.13)$$

donde  $P$  es cualquier punto en un espacio físico  $E$  perteneciente a  $\mathbb{R}^3$ , en el cual el producto cruz entre sus elementos es posible.

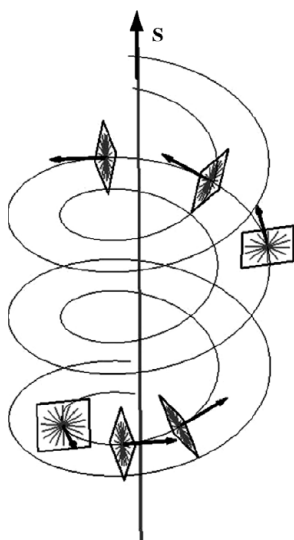


Figura 2.1: Campo vectorial helicoidal [24].

En la Figura 2.1 se ejemplifica la definición anterior de campo helicoidal, en ella se observa el eje instantáneo del tornillo denotado por la letra  $S$  y el campo de vectores helicoidales a su alrededor. Sin duda, esta representación geométrica guarda una gran similitud con lo que es un estado de velocidad, de hecho, en [26, 27] se afirma que un campo helicoidal es geoméricamente similar a un estado de velocidad o cualquier análisis de movimiento de un cuerpo rígido.

Una de las características más importantes de un campo helicoidal es obtener cualquier vector tangencial al espacio generado por el vector del campo helicoidal a través de la siguiente ecuación:

$$X(Q) = X(P) + S \times R_{Q/P} \quad (2.14)$$

donde  $S$  es el vector de campo helicoidal,  $X(Q)$  es un vector tangente al punto  $Q$  perteneciente al espacio generado por  $S$ ,  $X(P)$  un vector ya conocido tangente a  $P$  perteneciente al mismo espacio que  $Q$  y  $R_{Q/P}$  un vector de posición que une ambos vectores desde  $P$  hasta  $Q$ .

Debido a que un campo helicoidal mantiene similitudes geométricas con cualquier análisis de movimiento en un cuerpo rígido al que se le puede considerar como un espacio físico, los estados de velocidad y aceleración son campos helicoidales que deben cumplir con la propiedad definida en la ecuación (2.14) para considerarse completamente definidos. En [27] se demuestra que el estado de velocidad de un cuerpo rígido es un campo helicoidal. Esto se logra a través del vector de posición  $R_{Q/P}$  y haciendo al vector  ${}^A\omega^B$  el vector del campo helicoidal  $S$ , ya que  ${}^A\omega^B$  no cambia de acuerdo a la posición dentro de un espacio físico  $E$  y además guarda relación con los vectores tangenciales a cualquier punto en dicho espacio físico. Con los vectores  $R_{Q/P}$  y  ${}^A\omega^B$  definidos y conociendo la velocidad lineal de un punto  $Q$  respecto al cuerpo  $j$ , entonces, la velocidad lineal de un punto  $P$  es dada por:

$${}^jv_P^m = {}^jv_Q^m + {}^j\omega^m \times r_{P/Q} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.14) es idéntica a la ecuación (2.15). Por consiguiente, el estado de velocidad cumple con las propiedades de un campo helicoidal y se considera completamente definido.

## 2.4. Estado de velocidad

El estado de velocidad es un vector columna capaz de representar por completo la velocidad que tiene un cuerpo rígido respecto a otro, de hecho, en [3] se define al estado de velocidad como un giro en el tornillo que une a dos cuerpos rígidos. Matemáticamente dicho giro puede representarse con la multiplicación de la magnitud de la velocidad angular a un tornillo, de tal forma que el estado de velocidad queda modelado por:

$${}^AV_o^B = {}^A\omega_B \begin{bmatrix} {}^AS^B \\ {}^AS_o^B \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Desarrollando la multiplicación entre un escalar y un tornillo se obtiene la definición formal del estado de velocidad entre dos cuerpos, esta multiplicación produce:

$${}^AV_o^B = \begin{bmatrix} {}^B\omega^A \\ {}^Av_o^B \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde se nota que la parte primaria del estado de velocidad es la velocidad angular del cuerpo bajo análisis y que la parte dual es la velocidad lineal en el polo de referencia. La velocidad angular se mantiene constante en cualquier punto del cuerpo bajo análisis, ya que es una propiedad del cuerpo rígido [2], mientras que la velocidad lineal depende del polo de referencia elegido y, por lo tanto, la parte dual del estado de velocidad es el que debe cumplir con la propiedad representada por la ecuación (2.14) que le permite encontrar la velocidad de cualquier punto en el cuerpo rígido, y así el estado de velocidad se considere completamente definido.

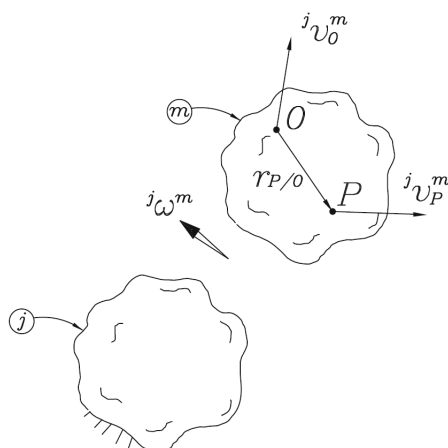


Figura 2.2: Movimiento relativo entre dos cuerpos rígidos [2].

Mediante la Figura 2.2 se encontrará la ecuación que permite obtener la velocidad de cualquier punto en un cuerpo rígido, en ella se observan dos cuerpos, el cuerpo  $j$  y el cuerpo  $m$ , este último presenta una velocidad angular  ${}^j\omega^m$  y la velocidad lineal de los puntos  $O$  y  $P$ , donde solo la velocidad del punto  $O$ ,  ${}^jv_O^m$ , es conocida. Además, en la figura también se observa el vector  $r_{P/O}$  que une a los puntos  $O$  y  $P$ , entonces, mediante la cinemática convencional se obtiene la velocidad del punto  $P$  como sigue:

$${}^jv_P^m = {}^jv_O^m + {}^j\omega^m \times r_{P/O} \quad (2.18)$$

En la ecuación (2.18) se muestra cómo la velocidad de un punto cualquiera en un cuerpo rígido, es obtenida mediante los vectores de velocidad angular y de posición, así como de la velocidad de un punto ya conocido en el mismo cuerpo rígido. La ecuación (2.18) es idéntica a la ecuación (2.15) y ésta a su vez es igual a la ecuación (2.14). Por consiguiente, el estado de velocidad de la ecuación (2.17) cumple con las propiedades de un campo helicoidal y está completamente definido.

Por último, la ecuación (2.17) debe extender el número de cuerpos sobre los que se aplica para ser utilizada en los análisis cinemáticos de un manipulador.

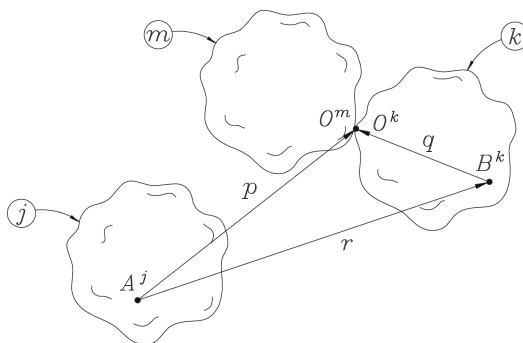


Figura 2.3: Movimiento relativo entre tres cuerpos rígidos [2].

La Figura 2.3 muestra los cuerpos  $j$ ,  $k$  y  $m$ , relacionados por los vectores  $r$ ,  $p$  y  $q$ . El vector  $r$  representa la posición del punto  $B^k$ , fijo al cuerpo  $k$ ; el vector  $p$  define la posición del punto  $O^m$ , fijo al cuerpo  $m$ ; y el vector  $q$  es la distancia que hay entre los puntos  $B^k$  y  $O^k$ , donde este último punto, fijo al cuerpo  $k$ , es coincidente con el punto  $O^m$ . De modo que, la velocidad de los puntos  $O^m$  y  $B^k$ , se obtiene de aplicar la derivada temporal a la ecuación de cerradura formada por la relación:

$$p = r + q \quad (2.19)$$

Antes de desarrollar la derivada temporal se debe considerar que la derivada de un vector depende del marco de referencia. En [28] se demuestra que la derivada de un vector  $\beta$  en un cuerpo  $l$ , respecto a un cuerpo  $k$ , se representa como sigue:

$$\frac{{}^k d}{dt} \beta = \frac{{}^l d}{dt} \beta + {}^k \omega^l \times \beta \quad (2.20)$$

donde  $\beta$  es un vector en el cuerpo rígido en movimiento y  ${}^k \omega^l$  es la velocidad angular del cuerpo  $l$ . Si el vector  $\beta$  es un vector fijo en el cuerpo  $l$ , entonces la ecuación (2.20) se simplifica en la ecuación (2.21).

$$\frac{{}^k d}{dt} \beta = {}^k \omega^l \times \beta \quad (2.21)$$

Por lo tanto, aplicando la derivada temporal respecto al cuerpo  $j$ , a la ecuación (2.19), resulta en:

$$\frac{{}^j d}{dt} p = \frac{{}^j d}{dt} r + \frac{{}^j d}{dt} q \quad (2.22)$$

Obsérvese que en la Figura 2.3 los vectores  $p$  y  $r$  son parte del cuerpo  $j$ , por lo que el resultado de la derivada temporal de esos vectores, es directamente la velocidad de los puntos  $O^m$  y  $B^k$ . No obstante, el vector  $q$  es parte del cuerpo  $k$  y al ser un vector libre en dicho cuerpo, la ecuación (2.20) es la adecuada para desarrollar la derivada temporal del vector  $q$ . La sustitución de la ecuación (2.20) en la ecuación (2.22) y el cambio de la notación en la velocidad de los puntos  $O^m$  y  $B^k$  conduce a:

$${}^j v_O^m = {}^j v_B^k + {}^j \omega^k \times q + \frac{{}^k d}{dt} q \quad (2.23)$$

El último término de la ecuación (2.23) puede sustituirse por la velocidad del punto  $O^k$  visto desde el cuerpo  $k$ . Además, los dos primeros términos son similares a los presentes en la ecuación (2.18), por lo que haciendo las sustituciones se obtiene:

$${}^j v_O^m = {}^j v_O^k + {}^k v_O^m \quad (2.24)$$

En [29] con la ecuación (2.24) se demuestra que la velocidad lineal total de un sistema multicuerpo puede obtenerse a través de la suma de las velocidades relativas de cada uno de sus cuerpos.

En cuanto a la velocidad angular total, también se obtiene de la suma de velocidades angulares relativas del resto de cuerpos. Por ejemplo, si se considera un vector  $\beta$  fijo en el cuerpo

$m$ , se obtiene la derivada de ese vector respecto al cuerpo  $j$  y el cuerpo  $k$ , y si se sustituyen dentro de la ecuación (2.20) se obtiene la siguiente relación:

$${}^j\omega^m \times \beta = {}^k\omega^m \times \beta + {}^j\omega^k \times \beta \quad (2.25)$$

Nótese que en la parte derecha de ecuación (2.25) se puede factorizar el vector  $\beta$ , entonces, la ecuación solo puede cumplirse si la velocidad angular total es igual a la suma de las velocidades angulares relativas [29]. Es decir, que las velocidades angulares deben satisfacer:

$${}^j\omega^m = {}^j\omega^k + {}^k\omega^m \quad (2.26)$$

Con la ecuación (2.24) y la ecuación (2.26), el estado de velocidad de un sistema multicuerpo puede obtenerse como en [20] a través de la combinación lineal de tornillos definida en la ecuación (2.27).

$${}^A V_o^B = \sum_{i=A}^{B-1} {}^i\omega_{i+1} {}^i\mathcal{S}^{i+1} \quad (2.27)$$

Obsérvese cómo el término dentro de la sumatoria es equivalente a la ecuación (2.16), por lo que el estado de velocidad de un sistema multicuerpo no es más que la sumatoria de los estados de velocidad relativos entre los diferentes cuerpos rígidos que lo conforman.

## 2.5. Estado de aceleración

La aceleración de un cuerpo es la razón de cambio que presenta su velocidad en un intervalo de tiempo determinado, por lo que el análisis de aceleración de la plataforma *Gough–Stewart* consiste en encontrar expresiones que describan dicho cambio a partir de los movimientos articulares en sus cadenas cinemáticas.

### 2.5.1. Ecuaciones de aceleración

La aceleración, al ser un cambio de velocidad en un instante de tiempo, puede obtenerse mediante la derivada temporal de la velocidad sin ningún problema. De hecho, en [2] las aceleraciones lineal y angular de un cuerpo rígido  $l$  respecto a un cuerpo rígido  $k$  se representan como sigue:

$${}^k\alpha^l \equiv \frac{{}^k d}{{}^k dt}({}^k\omega^l) \quad (2.28)$$

$${}^k a_o^l \equiv \frac{{}^k d}{{}^k dt}({}^k v_o^l)$$

donde  $\alpha$  es la aceleración angular,  $a_o$  la aceleración lineal,  ${}^k v_o^l$  es la velocidad lineal del cuerpo  $l$  en el polo de referencia  $o$  y  ${}^k\omega^l$  es la velocidad angular de todo el cuerpo  $l$ . En [28] se menciona

que la aceleración  ${}^k\alpha^l$  solamente puede obtenerse a través de la derivada temporal si  ${}^k\omega^l$  es una velocidad angular simple, es decir, que la velocidad angular puede ser representada, por su magnitud y un vector unitario invariante en el tiempo, como:

$${}^A\omega^B = {}_A\omega_B {}^AS^B \quad (2.29)$$

donde  ${}^AS^B$  es el vector unitario invariable en el tiempo que une los cuerpos  $A$  y  $B$ , mientras que  ${}_A\omega_B$  es la magnitud de la velocidad angular del cuerpo  $B$  respecto al cuerpo  $A$ . Al aplicar la derivada temporal a la ecuación (2.29) resulta:

$${}^A\alpha^B = {}_A\dot{\omega}_B {}^AS^B \quad (2.30)$$

Nótese que la ecuación (2.30) presenta similitudes con la parte primaria del estado de velocidad en la ecuación (2.16), razón por la cual un tornillo podría utilizarse para representar el estado de aceleración de un manipulador. Sin embargo, antes de hacer dicha representación, hay que considerar que un manipulador es un sistema multicuerpo y se necesita una combinación lineal de tornillos para representar el estado de aceleración, lo que representa un problema, pues en general:

$${}^j\alpha^m \neq {}^j\alpha^{j+1} + {}^{j+1}\alpha^{j+2} + \dots + {}^{m-2}\alpha^{m-1} + {}^{m-1}\alpha^m \quad (2.31)$$

En la ecuación (2.31) se muestra que, a diferencia de las velocidades angulares, las aceleraciones angulares de las diferentes partes de un sistema multicuerpo no se pueden sumar para obtener la aceleración total. En [28], a través de la derivada temporal de la ecuación (2.26), se demuestra que en la ecuación (2.31) falta considerar las contribuciones de la derivada, vista desde el cuerpo principal, de las velocidades angulares del resto de cuerpos. Estas contribuciones se obtienen a través de un producto cruz entre las velocidades angulares de los cuerpos involucrados. En [2, 29], la aceleración total de un sistema multicuerpo compuesto por tres cuerpos rígidos, se define como en la ecuación (2.32).

$${}^j\alpha^m = {}^j\alpha^k + {}^k\alpha^m + {}^j\omega^k \times {}^k\omega^m \quad (2.32)$$

Al igual que la aceleración angular, la aceleración lineal total de un sistema multicuerpo no se puede obtener a través de la suma de las aceleraciones lineales en cada cuerpo, y hay que considerar nuevos términos, en este caso la aceleración de Coriolis. En [29], mediante la derivada temporal de la ecuación (2.24), se define la aceleración lineal total de un sistema multicuerpo como la ecuación (2.33).

$${}^j a_o^m = {}^j a_o^k + {}^k a_o^m + 2{}^j\omega^k \times {}^k v_o^m \quad (2.33)$$

Las ecuaciones (2.32) y (2.33) describen la aceleración angular y lineal total de un sistema multicuerpo con únicamente tres cuerpos rígidos, pero el número de cuerpos no es un limitante para ambas ecuaciones y pueden extenderse sin ningún problema.

### 2.5.2. Estado de aceleración reducido

El estado de aceleración es un vector columna que contiene información suficiente para representar la aceleración total de un cuerpo rígido respecto a otro. Tomando en cuenta que



las ecuaciones que describen la aceleración de un sistema multicuerpo se deducen a partir de las derivadas temporales de las ecuaciones de velocidad, se puede intuir que el estado de aceleración se obtiene a partir de la derivada del estado de velocidad dada por:

$$A = \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde  $\alpha$  y  $a_o$  están representadas por las ecuaciones (2.32) y (2.33), respectivamente. Sin embargo, esta representación no es útil en teoría de tornillos porque no cumplen con la propiedad de campo helicoidal definida en la ecuación (2.14). El problema radica en que  $a_o$  no es igual a  $\frac{d}{dt}v_o$ , esto se debe a que  $\frac{d}{dt}v_o$  representa la aceleración obtenida a través de la velocidad de una serie de puntos sucesivos, mientras que  $a_o$  es la aceleración de un único punto, por lo que, aunque coincidan en un instante de tiempo  $t$ , en el tiempo  $t + \delta$  ambas representaciones de la aceleración son totalmente diferentes [26].

Dado que  $a_o$  no es igual a  $\frac{d}{dt}v_o$ , se asume que la parte dual de la ecuación en (2.34) está incompleta y es por eso que no cumple con la propiedad de campo helicoidal. Para completar dicha ecuación, en [27] se propone considerar las siguientes tres características.

- ✓ La aceleración angular es una propiedad propia de todo el cuerpo rígido, por lo tanto, puede considerarse como la parte primaria del estado de aceleración.
- ✓ El vector de campo helicoidal debe representarse con el vector de aceleración angular.
- ✓ El estado de aceleración debe contener la aceleración lineal del polo de referencia elegido.

Considerando los puntos anteriores, el estado de aceleración puede representarse como un estado de aceleración reducido, al completarse con un campo helicoidal  $F$  en la parte dual, como se modela en la ecuación (2.35).

$${}^j A^m = \begin{bmatrix} {}^j \alpha^m \\ {}^j a^m + F \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Asumiendo que la ecuación (2.35) está completamente definida, la ecuación (2.14) es utilizada para encontrar el valor de  $F$ . El resultado de sustituir la parte dual de la ecuación (2.35) dentro de la ecuación (2.14) puede organizarse como sigue:

$${}^j a_P^m - {}^j a_Q^m - {}^j \alpha^m \times r_{P/Q} = F(Q) - F(P) \quad (2.36)$$

La parte izquierda de la ecuación (2.36) es igual a la derivada de la ecuación (2.18) adaptada al sistema de la Figura 2.3. De esta manera, el valor de  $F(P)$  y  $F(Q)$  es dado por:

$$\begin{aligned} F(Q) &= -{}^j \omega^m \times {}^j v_Q^m \\ F(P) &= -{}^j \omega^m \times {}^j v_P^m \end{aligned} \quad (2.37)$$

Remplazando el valor de  $F$  en la ecuación (2.35), el estado de aceleración queda definido completamente por la ecuación (2.38).

$${}^j A^m = \begin{bmatrix} {}^j \alpha^m \\ {}^j a^m - {}^j \omega^m \times {}^j v_Q^m \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

El estado de aceleración modelado por la ecuación (2.38) recibe el nombre de estado de aceleración reducido, y a diferencia del representado en la ecuación (2.34) este estado puede expresarse en forma de tornillo. Uno de los primeros trabajos en demostrar este hecho, es el presentado en [8], donde al anular la velocidad angular del efector final, vista desde el sistema de referencia, el estado de aceleración de un cuerpo rígido se representó en forma de tornillo, como se muestra en la ecuación (2.39).

$$\begin{aligned}
{}^j A^m = & {}_j \dot{\omega}_{j+1} {}^j \mathcal{S}^{j+1} + {}_{j+1} \dot{\omega}_{j+2} {}^{j+1} \mathcal{S}^{j+2} + \dots + {}_{m-2} \dot{\omega}_{m-1} {}^{m-2} \mathcal{S}^{m-1} + {}_{m-1} \dot{\omega}_m {}^{m-1} \mathcal{S}^m \\
& + \begin{bmatrix} {}_{m-2} \omega_{m-1} {}^{m-2} \mathcal{S}^{m-1} & {}_{m-1} \omega_m {}^{m-1} \mathcal{S}^m \end{bmatrix} + \dots \\
& + \begin{bmatrix} {}_j \omega_{j+1} {}^j \mathcal{S}^{j+1} & {}_{j+1} \omega_{j+2} {}^{j+1} \mathcal{S}^{j+2} + \dots + {}_{m-2} \omega_{m-1} {}^{m-2} \mathcal{S}^{m-1} + {}_{m-1} \omega_m {}^{m-1} \mathcal{S}^m \end{bmatrix} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

aunque en [7], para simplificar, se modela como:

$${}^j A^m = \sum_{i=j}^{m-1} {}_i \dot{\omega}_{i+1} {}^i \mathcal{S}^{i+1} + \sum_{i=j}^{m-2} \begin{bmatrix} {}_i \omega_{i+1} {}^i \mathcal{S}^{i+1} & \sum_{k=j+1}^{m-1} {}_k \omega_{k+1} {}^k \mathcal{S}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Comúnmente, al último término de la ecuación (2.40) se le representa con el símbolo  $\mathcal{A}_i$  y es denominado tornillo de Lie. Una forma más compacta de representar la ecuación (2.40) se presenta en [2], donde a partir del estado de aceleración reducido mostrado en la ecuación (2.38) se sustituyen los términos  ${}^j \alpha^m$  y  ${}^j a_o^m$  por las ecuaciones (2.32) y (2.33), respectivamente. De lo cual, se obtiene el estado de aceleración reducido de un sistema multicuerpo, donde el número de elementos no es una limitante.

$${}^j A_o^m = {}^j A_o^k + {}^k A_o^m + [{}^j V_o^k \quad {}^k V_o^m] \quad (2.41)$$

La ecuación (2.41) contiene los mismos elementos que la ecuación (2.40), en ambas ecuaciones se observa la sumatoria de los estados de aceleración de cada cuerpo, así como la suma de los productos de Lie entre los cuerpos involucrados.

Con el estado de aceleración reducido, el análisis cinemático de segundo orden de un manipulador puede obtenerse mediante teoría de tornillos. Sin embargo, es importante recordar que el estado de aceleración reducido no es la aceleración total del manipulador bajo análisis, ya que este se obtiene de anular la velocidad angular del efector final respecto al sistema de referencia. Por lo que para encontrar la aceleración total del manipulador debe considerarse la velocidad angular del efector final vista desde el sistema de referencia. En [2] se demuestra que el término descrito anteriormente es equivalente al producto cruz entre la parte primaria y la parte dual del estado de velocidad, por lo que es necesario primero desarrollar el análisis de velocidad para poder desarrollar el análisis de orden superior.

## 2.6. Representación de pares cinemáticos inferiores en forma de tornillo

La característica de describir el movimiento relativo entre dos cuerpos rígidos, presente en un tornillo, es análoga a la función que llevan a cabo los pares cinemáticos inferiores en un

manipulador, razón por la cual un par cinemático inferior se puede representar en forma de tornillo.

Dentro de los pares cinemáticos inferiores más comunes se encuentran las juntas revolutas (R), prismáticas (P), universales (U), esféricas (S) y cilíndricas (C). En [2, 9] se menciona que una junta revoluta y prismática se pueden representar como casos específicos de un tornillo modificando la parte dual de éste, que se encuentra establecido en la ecuación (2.2). Y al igual que los pares cinemáticos inferiores toman como base a este par de representaciones para formar el resto de juntas bajo ciertas geometrías restrictivas, la combinación de las juntas revolutas y prismáticas en forma de tornillo pueden obtener la representación en forma de tornillo del resto de juntas.

En la Tabla 2.1 se muestran diversos pares cinemáticos inferiores y el número de tornillos que requieren para modelarlos, además de sus respectivas restricciones.

Tabla 2.1: Pares cinemáticos y su representación en un sistema de tonillos [30].

Juntas	Sistema de tornillos	Condiciones restrictivas	Movilidad
R	$\$1$	—	1
P	$\$1$	—	1
U	$\$1$ $\$2$	$\$1 \perp \$2$	2
S	$\$1$ $\$2$ $\$3$	$\$1 \perp \$2 \perp \$3$	3

### 2.6.1. Junta revoluta

Una junta revoluta permite un movimiento angular relativo entre dos cuerpos rígidos sin que éste provoque un movimiento lineal en alguno de ellos, lo que se puede modelar como un tornillo con un paso  $h$  nulo.

En las ecuaciones (2.16) y (2.17) se observa cómo es que la parte dual de un tornillo, que une a los cuerpos  $A$  y  $B$ , multiplicada por la magnitud de la velocidad angular  ${}_A\omega_B$ , representa la velocidad lineal del cuerpo  $B$ . Por lo tanto, si se modifica el paso del tornillo en la ecuación (2.2) con un valor  $h$  nulo, la velocidad lineal debida al giro se ve desvanecida. Al aplicar esta modificación, la junta revoluta queda representada por el tornillo modelado en la ecuación (2.42).

$${}^B\mathbb{S}^A = \begin{bmatrix} {}^B S^A \\ {}^B S^A \times r_{O/P} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

### 2.6.2. Junta Prismática

La junta prismática, en contraste a una junta revoluta, únicamente cuenta con velocidad lineal de un cuerpo  $B$  respecto a un cuerpo  $A$ , es decir, que el cuerpo  $B$  tiene una velocidad angular nula. Tomando en cuenta cómo se definió el paso de un tornillo en la ecuación (2.3) y que  ${}^A\omega_B = 0$ , es fácil notar que, el paso  $h$  de un tornillo tiende a infinito cuando se trata de una junta prismática. Considerando al paso  $h$  como infinito y a  ${}^A\omega_B = 0$ , la junta prismática queda modelada por el tornillo representado en la ecuación (2.43).

$${}^B\$_A = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^B S^A \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

### 2.6.3. Juntas esférica y universal

Las juntas esférica y universal se pueden representar por un grupo de juntas revolutas, por lo tanto, la representación de una junta esférica o una junta universal en forma de tornillo no es más que un conjunto de tornillos modelando a juntas revolutas bajo ciertas restricciones. El número de juntas revolutas y las restricciones que se deben seguir se muestran en la Tabla 2.1.

## 2.7. Tornillo recíproco

Un tornillo recíproco es aquel que, mediante la operación denominada forma de Klein, logra eliminar las contribuciones de los movimientos articulares pasivos, haciendo que los análisis cinemáticos se obtengan únicamente por los movimientos articulares generalizados. Es importante encontrar los tornillos recíprocos para cada una de las cadenas cinemáticas, ya que es gracias a estos que el análisis se torna sumamente sencillo.

Se considera que dos tornillos son recíprocos si al realizar la forma de Klein con ellos, el resultado es el mostrado por la ecuación (2.44).

$$\{\$_1; \$_2\} = 0 \quad (2.44)$$

Considerando (2.12) y (2.44) es sencillo verificar si un par de tornillos son recíprocos o no. Sin embargo, el problema radica en proponer o encontrar un tornillo recíproco a todos los demás, excepto al tornillo que posee la velocidad generalizada. Originalmente, el procedimiento para encontrar un tornillo o base de tornillos recíprocos era mediante métodos algebraicos muy tediosos, en [5] se hace uso del *gramiano*, que es el determinante de una matriz de *Gram*, cuyos elementos son tornillos representados en coordenadas Plücker. La complejidad de este método aumenta conforme se continúa con el siguiente tornillo, dado que tiene que ser ortogonal a todos los tornillos anteriores. A pesar de ser un método tedioso, en [31] se utiliza para obtener las velocidades de todos los pares cinemáticos de un manipulador, demostrando su utilidad.

Pese a que el método anterior funciona, no es nada práctico y no permite ningún cambio

en los tornillos, puesto que a partir de ellos se obtienen las matrices de *Gram*. Para evitar las complejidades como las del método antes mencionado, en [32] se propone un método geométrico que se rige bajo los siguientes tres enunciados:

- ✓ Dos vectores línea son recíprocos si son coplanares.
- ✓ Dos vectores pares son recíprocos por sí solos.
- ✓ Un vector línea y un vector par son recíprocos si son perpendiculares.

donde un vector línea y un vector par es la manera en la que se refiere a una junta revoluta y una junta prismática en forma de tornillo, respectivamente. Con lo intuitivo de los tres enunciados anteriores, encontrar una base de tornillos recíprocos para un manipulador se vuelve una tarea fácil, solamente hay que tener en consideración qué par inferior representa cada tornillo en el manipulador y así escoger el tipo de tornillo recíproco adecuado con base en los tres enunciados.

## 2.8. Unidad de medición inercial

Una unidad de medición inercial es un dispositivo que contiene como mínimo dos sensores capaces de capturar movimientos, estos sensores son un acelerómetro y un giroscopio, algunos más también pueden contener magnetómetros y barómetros. Generalmente, estos sensores son capaces de hacer mediciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , por lo que una unidad de medición inercial puede tener seis o más grados de libertad. La unidad de medición inercial permite combinar estos sensores para obtener información como orientación, velocidad, aceleración y fuerzas gravitacionales del objeto donde se encuentra el dispositivo [33].

### 2.8.1. Acelerómetro

Sensor capaz de medir aceleraciones lineales en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las aceleraciones medidas normalmente pertenecen a un rango que va desde 1  $g$  hasta los 16  $g$ , donde  $g$  tiene un valor de  $9,81 \frac{m}{s^2}$  y es la unidad de medida que tiene el acelerómetro. Las aceleraciones medidas son debido al movimiento presente en el sensor, a la gravedad o a ambas y gracias a que el sensor puede medir la aceleración de la gravedad, aunque se encuentre en reposo, es posible obtener los ángulos de inclinación del sensor y, por tanto, del objeto sobre el que se encuentre apoyado.

Existen diversos tipos de acelerómetros, pero los más comunes son los acelerómetros con tecnología *MEMS*, este tipo de tecnología permite fabricar dispositivos a una escala micrométrica que logra una eficiencia mayor para captar cierto tipo de fenómenos físicos, los cuales posteriormente transforma en una señal digital [34].

### 2.8.2. Giroscopio

Sensor que mide las velocidades angulares, mediante el efecto Coriolis, en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  medidas en  $\frac{\circ}{s}$ . Generalmente, estas velocidades angulares se encuentran en el orden de los

$\frac{200^\circ}{s}$  a  $\frac{2000^\circ}{s}$ . Al igual que los acelerómetros, los giroscopios más comunes son los que utilizan tecnología *MEMS* lo que les permite tener elementos vibratorios y puedan captar el efecto Coriolis. En [33], este efecto está definido por:

$$F_c = -2m(\omega \times v) \quad (2.45)$$

donde  $m$  es la masa en movimiento,  $v$  es la velocidad a la que se mueve dicha masa y  $\omega$  es la velocidad angular que debe retornar el giroscopio.

### 2.8.3. Filtros

Una de las desventajas de la tecnología *MEMS* es la imprecisión de sus mediciones, pues se ven afectadas por distintos fenómenos como lo son el ruido, la temperatura o la desalineación. Los filtros digitales son ideales para mitigar este tipo de imprecisiones a una señal por su mejor rendimiento respecto a los filtros analógicos.

Este tipo de filtros se pueden clasificar, de acuerdo a la forma de construirlos, como sigue:

#### ✓ Respuesta al impulso finita

Los filtros realizados por convolución entre la señal de entrada y la respuesta de impulso del filtro son llamados filtros de respuesta al impulso finita o por sus siglas en inglés filtros FIR. Las salidas de este tipo de filtros se obtienen sumando las muestras de entradas que ya se encuentran debidamente ponderadas [35].

#### ✓ Respuesta al impulso infinita

También son conocidos como filtros IIR, este tipo de filtros se realizan mediante recursividad, es decir, que sus salidas utilizan los valores de salida calculados anteriormente junto con las muestras de entradas ponderadas para obtener su respuesta al impulso, y debido a la recursividad que los filtros IIR presentan, estos se vuelven más eficientes y rápidos que los filtros FIR [35].



# Capítulo 3

## Análisis cinemático infinitesimal

### 3.1. Caso de estudio

La plataforma *Gough–Stewart* bajo análisis en este documento se muestra en la Figura 3.2. Fue construida por Cortés-Ruiz en [11] y consiste en una plataforma fija que se une a una plataforma móvil a través de seis cadenas cinemáticas conformadas por juntas universales, prismáticas y revolutas, razón por la cual se considera que este manipulador paralelo se encuentra bajo la configuración 6-UPUR.

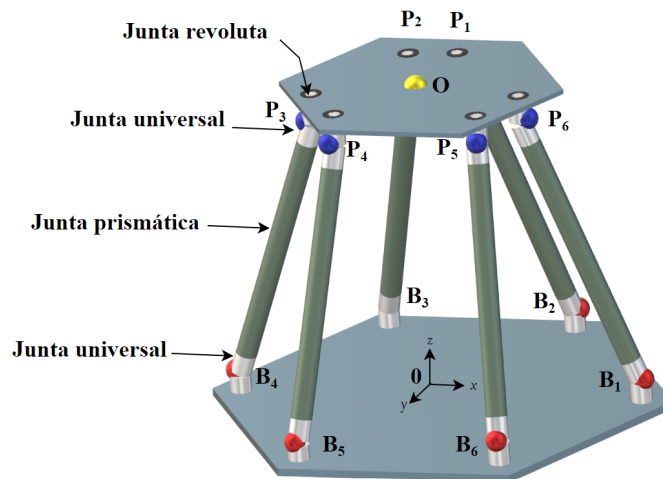


Figura 3.1: Bosquejo del robot paralelo.

#### 3.1.1. Cadenas cinemáticas

Las cadenas cinemáticas constan de tres tipos de pares cinemáticos inferiores, dos juntas universales, una junta prismática y una junta revoluta que une a la junta universal con la plataforma móvil. En la Figura 3.1, estas juntas son representadas por cilindros, dos cilindros pequeños de color plata para el caso de las juntas universales y un cilindro color verde para el caso de las juntas prismáticas. En cuanto a las juntas revolutas, estas se encuentran en



la parte superior de la plataforma móvil en forma de rodamientos que le permiten girar a la cadena cinemática alrededor de un eje perpendicular a la plataforma móvil.

Las cadenas cinemáticas no solo unen ambas plataformas, también originan el movimiento de la plataforma móvil, específicamente a través de un actuador lineal en la junta prismática. Este actuador lineal permite controlar la velocidad de las juntas prismáticas a voluntad y, por tanto, tener una velocidad articular deseada. Comúnmente a las velocidades deseadas en una junta se les conoce con el nombre de velocidades articulares generalizadas. En contraste, las velocidades en las juntas ocasionadas por el propio movimiento del manipulador y sus restricciones son llamadas velocidades articulares pasivas. Este tipo de movimiento pasivo está presente en las juntas revoluta y universal del manipulador analizado. Cabe señalar que en el análisis de aceleración se utiliza una nomenclatura similar, solamente que con el movimiento de aceleración, es decir, las juntas que tienen una aceleración deseada se nombran como aceleraciones articulares generalizadas y a las aceleraciones articulares debidas al movimiento y las restricciones del manipulador son llamadas aceleraciones articulares pasivas.

### 3.1.2. Puntos de interés

Los puntos de interés en la plataforma *Gough–Stewart* son cuatro; el punto  $O$  donde se encuentra el marco de referencia fijo; el punto  $O$  sobre el cual se obtendrá la cinemática, conocido como el polo de referencia; los puntos que ubican a las juntas revolutas inferiores, puntos  $B_i$  y los puntos que ubican a las juntas revolutas superiores, puntos  $P_i$ .

El marco de referencia se encuentra ubicado en el centro de la parte superior de la plataforma fija, en la Figura 3.1 está representado por la intersección de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , mientras que el polo de referencia está representado por un punto amarillo ubicado en el centro de la plataforma móvil. Por otro lado, los puntos  $B_i$  y  $P_i$  se encuentran resaltados por puntos de color rojo y azul, respectivamente. Estos puntos están localizados en el centro de la cruceta que tiene la junta universal y sus ubicaciones iniciales están dadas por las coordenadas obtenidas en [11], presentes en la Tabla 3.1 junto con la ubicación inicial de polo de referencia.

Tabla 3.1: Coordenadas iniciales de los puntos  $B_i$ ,  $P_i$  y  $O$  en mm.

Puntos	$[x$	$y$	$z]$	$P_1$	$[14,01$	$114,14$	$-27,85]$
$B_1$	$[200$	$0$	$21,5]$	$P_2$	$[-14,01$	$114,14$	$-27,85]$
$B_2$	$[100$	$173,20$	$21,5]$	$P_3$	$[-105,85$	$-44,93$	$-27,85]$
$B_3$	$[-100$	$173,20$	$21,5]$	$P_4$	$[-91,84$	$-69,20$	$-27,85]$
$B_4$	$[-200$	$0$	$21,5]$	$P_5$	$[91,84$	$-69,20$	$-27,85]$
$B_5$	$[-100$	$-173,20$	$21,5]$	$P_6$	$[105,85$	$-44,93$	$-27,85]$
$B_6$	$[100$	$-173,20$	$21,5]$	$O$	$[0$	$0$	$-3,175]$

En la Tabla 3.1 se muestran los puntos  $P_i$  y el polo de referencia  $O$  con un valor negativo en la componente  $z$ , esto se debe a que sus mediciones se hicieron desde el centro de la parte superior de la plataforma móvil porque facilita las mediciones. No obstante, todas las coordenadas deben representarse respecto a un único marco de referencia, y en este caso en

particular, el marco de referencia elegido es el que se encuentra en la plataforma fija. Por lo que, considerando que la distancia entre caras superiores de la plataforma fija y la plataforma móvil es de  $303 \text{ mm}$ , los puntos  $P_i$  y  $O$  quedan definidos como se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Coordenadas iniciales de los puntos  $P_i$  y  $O$  corregidos en mm.

Puntos	[ $x$	$y$	$z$ ]
$P_1$	[14,01	114,14	275,15]
$P_2$	[-14,01	114,14	275,15]
$P_3$	[-105,85	-44,93	275,15]
$P_4$	[-91,84	-69,20	275,15]
$P_5$	[91,84	-69,20	275,15]
$P_6$	[105,85	-44,93	275,15]
$O$	[0	0	299,825]

### 3.1.3. Definición de tornillos

La definición de los tornillos de cualquier manipulador se torna elemental antes de desarrollar los análisis cinemáticos, pues hay que definir la dirección, la posición y el polo de referencia de cada tornillo para que estos describan la cinemática correcta del manipulador analizado. Por un lado, encontrar la posición y la dirección de los tornillos resulta sencillo, solo requiere de la representación en forma de tornillo de los pares cinemáticos inferiores que describen la configuración bajo la que se encuentre el manipulador, en este caso la configuración 6-UPUR. Por otro lado, el polo de referencia debe encontrarse en el cuerpo de interés y ser definido de acuerdo a la geometría del manipulador durante todo el análisis cinemático, haciendo de esto una tarea meticulosa.

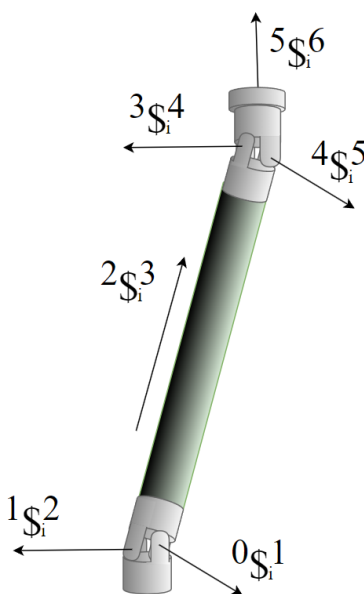


Figura 3.2: Definición de tornillos para el robot paralelo.

En la Figura 3.2 se observa el esquema para cada una de las cadenas cinemáticas de la plataforma bajo análisis. Esta representación toma como base los pares cinemáticos inferiores y las restricciones obtenidas en [11] para el análisis cinemático de velocidad. La cadena cinemática mostrada contiene los tornillos numerados del uno al seis, donde cada número representa un cuerpo rígido que va desde la plataforma fija, cuerpo 0, hasta la plataforma móvil, cuerpo 6.

En [11] se expresaron los tornillos infinitesimales que describen la cinemática infinitesimal de la plataforma *Gough–Stewart* analizada como en la ecuación (3.1). Esta representación se modeló conociendo la ubicación de los tornillos y de los puntos  $B_i$  y  $P_i$  que posee el manipulador en las seis cadenas cinemáticas.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbb{S}_i^1 &= \begin{bmatrix} {}^0S_i^1 \\ {}^0S_i^1 \times -B_i \end{bmatrix} & {}^2\mathbb{S}_i^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2S_i^3 \end{bmatrix} & {}^1\mathbb{S}_i^2 &= \begin{bmatrix} {}^1S_i^2 \\ {}^1S_i^2 \times -B_i \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbb{S}_i^4 &= \begin{bmatrix} {}^3S_i^4 \\ {}^3S_i^4 \times -P_i \end{bmatrix} & {}^5\mathbb{S}_i^6 &= \begin{bmatrix} {}^5S_i^6 \\ {}^5S_i^6 \times -P_i \end{bmatrix} & {}^4\mathbb{S}_i^5 &= \begin{bmatrix} {}^4S_i^5 \\ {}^4S_i^5 \times -P_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cabe destacar que las coordenadas de los puntos  $B_i$  y  $P_i$  están presentes en la Tabla 3.2, es decir, se hallan representados respecto al marco de referencia fijo. Por lo que la parte dual de los tornillos en la ecuación (3.1), específicamente el vector  $r_{O/P}$ , es representado por los vectores de posición de los puntos  $B_i$  y  $P_i$  corregidos. Es importante notar como la nomenclatura propuesta en [11] no identifica entre vectores y puntos, además de no distinguir entre los puntos referenciados al punto 0 y al punto O, lo que daría a entender que la parte dual de un tornillo se obtiene respecto a diferentes polos de referencia. Los tornillos en los puntos  $B_i$  tendrían como polo de referencia el marco fijo, mientras que los tornillos en los puntos  $P_i$  lo tendrían en el marco de referencia colocado encima de la plataforma móvil. En consecuencia, hay que tener cuidado con el cálculo de los vectores para la parte dual de los tornillos. De hecho, el motivo por el cual se mencionó que el análisis cinemático de primer orden en [11] contiene un error, guarda relación con la forma en que se calculó la parte dual de los tornillos.

En [11], la parte dual de los tornillos infinitesimales se les denota como a los puntos  $B_i$  y  $P_i$  con las coordenadas de la Tabla 3.1. Sin embargo, durante el análisis cinemático se les suma el vector que representa el estado deseado de la plataforma móvil, entiéndase por estado a la posición y orientación de un cuerpo en el espacio, con lo que se evitan confusiones respecto al marco de referencia, pues los vectores resultantes estarán representados respecto al marco fijo. Al considerar a estos vectores respecto al marco fijo, la ecuación (3.1) modela tornillos cuyo polo de referencia se encuentra en la plataforma fija. En [2, 9] se menciona que el polo de referencia debe encontrarse en el cuerpo de interés y ser único durante todo el análisis cinemático, motivo por el cual, se considera que el polo de referencia en la ecuación (3.1) fue ubicado erróneamente, ocasionando que dichos tornillos no describan la cinemática del cuerpo de interés.

Para desarrollar el análisis cinemático de velocidad en [11], la plataforma móvil se trasladó lo más cerca posible de la plataforma fija, de tal modo que el marco de referencia fijo coincidiera con el punto de la plataforma móvil sobre el cual se desea obtener la cinemática. Pese a ello, este enfoque requiere que el estado deseado de la plataforma se encuentre lo más

cerca posible del marco fijo, limitando así los movimientos que pueden validarse, ya sea por *software* o experimentalmente.

El análisis de aceleración requiere de trayectorias largas en tiempos cortos para obtener altas aceleraciones que puedan leerse con la unidad de medición inercial. Así pues, es necesario encontrar los tornillos que no cambien la geometría del manipulador y con ello se puedan usar trayectorias dentro de todo el espacio de trabajo de la plataforma *Gough–Stewart*. Con este fin, se cambiará la parte dual de cada tornillo para que estén dirigidos a un polo de referencia que se encuentre en el cuerpo de interés.

Redefinir los tornillos presentes en la ecuación (3.1) requiere primero de seleccionar el marco de referencia fijo, y a pesar de que en [20] se recomienda hacer instantáneamente coincidentes tanto el marco como el polo de referencia para simplificar las coordenadas *Plücker* de los tornillos, en este documento se utilizará como marco de referencia el localizado en la plataforma fija del manipulador, esto con la intención de no modificar las coordenadas ya proporcionadas por el análisis de posición y comprobar que al hacer instantáneamente coincidentes tanto al marco como al polo de referencia se simplifica el cálculo de las coordenadas *Plücker* de los tornillos. Con el marco de referencia seleccionado, resta definir el polo de referencia como se explicó en la Sección 3.1.2, dado que el análisis cinemático de la plataforma *Gough–Stewart* en este documento debe obtener la cinemática de la plataforma móvil respecto a la plataforma fija, entonces el polo de referencia para el análisis será el centro de la plataforma móvil, por lo que el vector  $r_{O/P}$  de la parte dual de todos los tornillos ahora debe dirigirse a dicho punto. Para encontrar estos vectores se requiere conocer las características geométricas que tiene el manipulador, específicamente los vectores de posición de los puntos  $B_i$  y  $P_i$ , ya que al realizar operaciones básicas con estos se puede obtener el vector  $r_{O/P}$  de la parte dual de todos los tornillos.

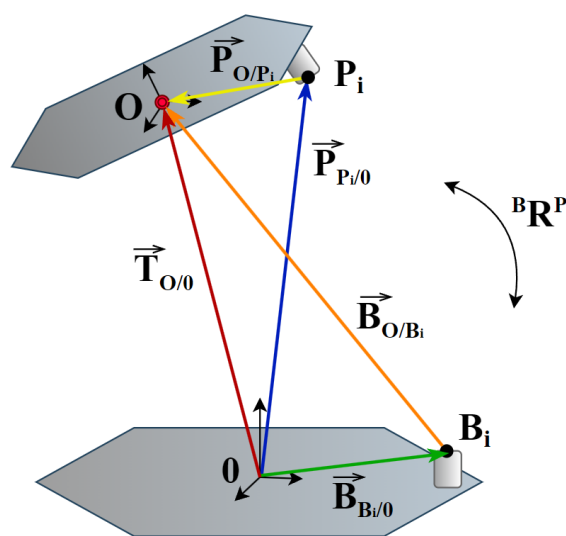


Figura 3.3: Vectores de posición para el robot paralelo.

En la Figura 3.3 se observan las características geométricas del manipulador bajo análisis,

en ella los puntos  $B_i$  y  $P_i$  son representados respecto al marco de referencia fijo por los vectores  $\vec{B}_{B_i/0}$  y  $\vec{P}_{P_i/0}$ , respectivamente, mientras que la posición de la plataforma móvil se define mediante el vector  $\vec{T}_{O/0}$ . Con esta figura, se muestra que los vectores  $\vec{B}_{O/B_i}$  y  $\vec{P}_{O/P_i}$  son equivalentes al vector  $r_{O/P}$  de la parte dual de cada tornillo. El vector  $\vec{B}_{O/B_i}$  se obtiene de la diferencia entre los vectores  $\vec{T}_{O/0}$  y  $\vec{B}_{B_i/0}$ , mientras que la diferencia entre los vectores  $\vec{T}_{O/0}$  y  $\vec{P}_{P_i/0}$  tiene como resultado al vector  $\vec{P}_{O/P_i}$ . Por lo tanto, la parte dual de los tornillos representados por la ecuación (3.1) debe sustituirse como sigue:

$$\begin{aligned}
{}^0\mathcal{S}_i^1 &= \begin{bmatrix} {}^0S_i^1 \\ {}^0S_i^1 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{B}_{B_i/0}) \end{bmatrix} & {}^2\mathcal{S}_i^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2S_i^3 \end{bmatrix} \\
{}^1\mathcal{S}_i^2 &= \begin{bmatrix} {}^1S_i^2 \\ {}^1S_i^2 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{B}_{B_i/0}) \end{bmatrix} & {}^3\mathcal{S}_i^4 &= \begin{bmatrix} {}^3S_i^4 \\ {}^3S_i^4 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{P}_{P_i/0}) \end{bmatrix} \\
{}^5\mathcal{S}_i^6 &= \begin{bmatrix} {}^5S_i^6 \\ {}^5S_i^6 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{P}_{P_i/0}) \end{bmatrix} & {}^4\mathcal{S}_i^5 &= \begin{bmatrix} {}^4S_i^5 \\ {}^4S_i^5 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{P}_{P_i/0}) \end{bmatrix} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Nótese que en la ecuación (3.2) los vectores  $\vec{B}_{O/B_i}$  y  $\vec{P}_{O/P_i}$  son representados por las diferencias con las que se obtuvieron. De esta manera se muestra que la parte dual de todos los tornillos está dirigida hacia un único polo de referencia y hace notar que las coordenadas *Plücker* de los tornillos pueden simplificarse al hacer el marco y el polo de referencia instantáneamente coincidentes, pues facilita la tarea de cambiar coordenadas y operaciones vectoriales.

### 3.1.4. Base de tornillos recíprocos

Una base de tornillos recíprocos es el conjunto de cada tornillo recíproco en las diferentes cadenas cinemáticas de un manipulador. La base de tornillos recíprocos correspondiente a la plataforma *Gough–Stewart* bajo análisis puede encontrarse a partir de los enunciados descritos en la Sección 2.7. De modo que según el primer enunciado, si hay que eliminar las contribuciones de juntas revolutas, como es el caso, la base recíproca debe conformarse por tornillos que representen una junta revoluta coplanar al resto. A su vez, el tercer enunciado determina que los tornillos de la base recíproca no deben ser perpendiculares a los tornillos que tienen movimientos articulares generalizados, como los que tienen las juntas prismáticas en el manipulador bajo análisis. Por lo tanto, los tornillos de la base recíproca deben ser capaces de intersectar los puntos  $B_i$  y  $P_i$ , mientras se encuentran a un ángulo diferente a 90 grados respecto a las juntas prismáticas.

En [11] se define a la base de tornillos recíprocos de la plataforma *Gough–Stewart* analizada como se muestra en la ecuación (3.3), donde se observa que esta base cumple con las restricciones antes mencionadas.

$${}^2\mathcal{S}_{ri}^3 = \begin{bmatrix} {}^2S_{ri}^3 \\ {}^2S_{ri}^3 \times -P_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Obsérvese que la parte dual de los tornillos en la ecuación (3.3) es obtenida con el vector posición del punto  $P_i$  que se encuentra referido al marco de referencia encima de la plataforma fija, y no considera que el polo de referencia debe estar en el centro de la plataforma móvil. Por lo que al igual que los tornillos de la ecuación (3.2), la base de tornillos recíprocos debe corregirse. Así pues, tomando en cuenta la ubicación del polo de referencia y que el marco de referencia se encuentra localizado en la base fija del manipulador, la base de tornillos recíprocos queda expresada, con la misma notación de la Figura 3.3, como se muestra en la ecuación (3.4).

$${}^2\mathcal{S}_{ri}^3 = \begin{bmatrix} {}^2S_{ri}^3 \\ {}^2S_{ri}^3 \times (\vec{T}_{O/0} - \vec{P}_{P_i/0}) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

## 3.2. Análisis de velocidad

### 3.2.1. Análisis directo de velocidad

El análisis directo de velocidad consiste en encontrar el estado de velocidad de la plataforma móvil a partir de las velocidades de cada una de las juntas que posee el manipulador, siendo este de los principales problemas que presenta la cinemática directa de velocidad, pues hay que conocer las velocidades articulares pasivas del manipulador, y esta complejidad aumenta con el número de cadenas cinemáticas que el manipulador presente. A través del álgebra de Lie, la teoría de tornillos se encarga de resolver este tipo de inconvenientes, pues logra que el análisis cinemático del manipulador dependa únicamente de las contribuciones de los movimientos articulares generalizados, dejando de lado el requerimiento de los movimientos articulares pasivos.

Para el análisis de velocidad de la plataforma *Gough–Stewart*, a través de la teoría de tornillos, primero hay que tener en cuenta que el estado velocidad puede representarse como una combinación lineal de los tornillos presentes en cualquiera de sus cadenas cinemáticas [13, 14, 18]. De tal forma que el estado de velocidad de la plataforma móvil puede representarse con la sumatoria de los tornillos mostrados en la Figura 3.2, tal y como se muestra en la ecuación (3.5).

$${}^B V_o^P = {}_0\omega_1^i {}^0\mathcal{S}_i^1 + {}_1\omega_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2 + {}_2\omega_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3 + {}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 + {}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6 \quad (3.5)$$

Obsérvese que en la ecuación (3.5) en el estado de velocidad se encuentran todas las velocidades del manipulador, incluyendo las velocidades articulares pasivas. No obstante, al aplicar a dicha ecuación la forma de Klein con la base de tornillos recíprocos definida en la ecuación (3.4), el estado de velocidad se expresa como:

$$\begin{aligned} \{ {}^B V_o^P, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3 \} &= \{ \cancel{{}_0\omega_1^i {}^0\mathcal{S}_i^1, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3} \} + \{ \cancel{{}_1\omega_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3} \} + \{ {}_2\omega_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3 \} \\ &+ \{ \cancel{{}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3} \} + \{ \cancel{{}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3} \} + \{ \cancel{{}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3} \} \end{aligned} \quad (3.6)$$

que puede reducirse a:

$$\{ {}^B V_o^P, {}^2\mathcal{S}_{ri}^3 \} = {}_2\omega_3^i \quad (3.7)$$

En la ecuación (3.7) se eliminaron todas las velocidades articulares pasivas del manipulador, haciendo que solo se involucren tres variables, donde solo una de ellas, el estado de velocidad

${}^B V_o^P$ , es desconocida. El estado de velocidad puede despejarse al desarrollar la forma de Klein. Sin embargo, una forma sistemática y compacta de obtenerlo es pasar la ecuación (3.7) a su forma matricial, ya que la forma de Klein guarda similitudes con el producto entre matrices. Para obtener la forma matricial de la ecuación (3.7), hay que acomodar las matrices de manera que el producto entre estas pueda efectuarse, además de anexar el operador de polaridad, lo que conduce a:

$$J^T \Delta {}^B V_o^P = \dot{Q} \quad (3.8)$$

A la ecuación (3.8) se le conoce como la ecuación entrada - salida de velocidad, donde  ${}^B V_o^P$  es el estado de velocidad definido como en la ecuación (2.17),  $J$  es la matriz jacobiana directa asociada a la base de tornillos recíprocos del manipulador [14], que se representa como:

$$J = \begin{bmatrix} {}^2 S_{r1}^3 & {}^2 S_{r2}^3 & {}^2 S_{r3}^3 & {}^2 S_{r4}^3 & {}^2 S_{r5}^3 & {}^2 S_{r6}^3 \\ {}^2 S_{o1}^3 & {}^2 S_{o2}^3 & {}^2 S_{o3}^3 & {}^2 S_{o4}^3 & {}^2 S_{o5}^3 & {}^2 S_{o6}^3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$\dot{Q}$  es el vector columna de las velocidades articulares generalizadas modelado por:

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} {}^2 \dot{q}_1^3 \\ {}^2 \dot{q}_2^3 \\ {}^2 \dot{q}_3^3 \\ {}^2 \dot{q}_4^3 \\ {}^2 \dot{q}_5^3 \\ {}^2 \dot{q}_6^3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

y  $\Delta$  es el operador de polaridad, definido en la ecuación (3.11) como una matriz de  $6 \times 6$  [2].

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

El operador de polaridad es integrado a la ecuación (3.8) con la finalidad de invertir la parte dual con la parte primaria de cada uno de los tornillos recíprocos contenidos en la matriz jacobiana directa, de esta forma resta desarrollar el producto matricial para obtener la forma de Klein y concluir obteniendo las velocidades articulares generalizadas si se cuenta con algún estado de velocidad o, por el contrario, obteniendo el estado de velocidad si se tienen únicamente las velocidades articulares generalizadas del manipulador. Para realizar esto último, se debe despejar  ${}^B V_o^P$  verificando siempre que la matriz jacobiana directa sea invertible, ya que de lo contrario el manipulador estaría bajo una singularidad como se menciona en [19] y sería imposible obtener cualquier análisis cinemático.

Con la ecuación entrada - salida de velocidad se concluye el análisis de velocidad directo. Aunque es importante mencionar que el caso de la plataforma *Gough-Stewart* es un caso especial en el que la matriz jacobiana directa no requiere de ningún ajuste para no exceder o completar los seis tornillos linealmente independientes que acepta su dimensión. La matriz jacobiana directa es de dimensión 6 y Sugimoto en [5] explica que este límite se debe a que

en un espacio tridimensional únicamente puede existir un total de seis tornillos linealmente independientes. Sin embargo, no es estrictamente necesario que el manipulador posea siempre estos seis tornillos, pues en caso de que presente menos se puede completar la matriz como se menciona en [13] o hacer una reducción a la matriz jacobiana directa como en [10].

### 3.2.2. Análisis inverso de velocidad

El análisis inverso de velocidad consiste en encontrar las velocidades de cada uno de los pares cinemáticos a partir del estado de velocidad de la plataforma móvil, y aunque parezca tentador utilizar directamente la ecuación (3.7) para hallar todas las velocidades articulares del manipulador, hay que recordar que esta ecuación solamente encuentra las velocidades articulares generalizadas. Para encontrar el resto de velocidades se tiene que ahondar más en la representación del estado de velocidad en forma de tornillo de la ecuación (3.5), puesto que ahí se ven implicadas todas las velocidades articulares.

De acuerdo con lo mencionado en [10], la ecuación (3.5) se reescribe de forma matricial como sigue:

$${}^B V_o^P = J_i \Omega_i \quad (3.12)$$

donde  $J_i$  es la  $i$ -ésima matriz jacobiana modelada por:

$$J_i = \begin{bmatrix} {}^0 S_i^1 & {}^1 S_i^2 & {}^2 S_i^3 & {}^3 S_i^4 & {}^4 S_i^5 & {}^5 S_i^6 \\ {}^0 S_o_i^1 & {}^1 S_o_i^2 & {}^2 S_o_i^3 & {}^3 S_o_i^4 & {}^4 S_o_i^5 & {}^5 S_o_i^6 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

mientras que  $\Omega_i$  es el vector columna que contiene las velocidades articulares de la  $i$ -ésima cadena cinemática del manipulador, tanto pasivas como generalizadas, y se define como en la ecuación (3.14).

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} {}^0 \omega_i^1 \\ {}^1 \omega_i^2 \\ {}^2 \omega_i^3 \\ {}^3 \omega_i^4 \\ {}^4 \omega_i^5 \\ {}^5 \omega_i^6 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A diferencia de la ecuación (3.8), donde la matriz jacobiana directa representa a los tornillos recíprocos de todas las cadenas cinemáticas, en la ecuación (3.12) la  $i$ -ésima matriz jacobiana representa los tornillos de una sola cadena cinemática, ya que el estado de velocidad de un manipulador paralelo se encuentra mediante cualquiera de ellas.

Debido a que el estado de velocidad de un manipulador paralelo puede obtenerse a partir de cualquier cadena cinemática que presente, como si fuese un manipulador serial, el análisis inverso de velocidad se puede realizar de manera similar. De hecho, en [36] se muestra que la



solución del análisis inverso de velocidad entre un manipulador serial y una cadena cinemática de un manipulador paralelo es la misma. Entonces, las velocidades de todos los pares inferiores de una sola cadena cinemática en un manipulador paralelo queda representada por la ecuación (3.15) como se demuestra en [17].

$$\Omega_i = J_i^{-1} {}^B V_o^P \quad (3.15)$$

En el caso de la plataforma *Gough–Stewart*, la  $i$ -ésima matriz jacobiana debe contener los tornillos representados en la Figura 3.2, mientras que el estado de velocidad  ${}^B V_o^P$  es el obtenido de la ecuación (3.8). Cabe recalcar que la ecuación (3.15) debe emplearse cinco veces más, ya que la plataforma *Gough–Stewart* tiene seis cadenas cinemáticas, es decir, que el número de veces que debe aplicarse dicha ecuación para obtener todas las velocidades articulares del manipulador está relacionado con el número de cadenas cinemáticas que este posea.

### 3.3. Análisis de aceleración

#### 3.3.1. Análisis directo de aceleración

El análisis directo de aceleración presenta los mismos inconvenientes del análisis de velocidad, pues se requiere obtener la aceleración tanto angular como lineal del cuerpo de interés a partir de las aceleraciones articulares en cada una de las juntas en sus extremidades, incluyendo las aceleraciones articulares pasivas. Por tal motivo, al definir el estado de aceleración como una combinación lineal de tornillos, el concepto de tornillo recíproco puede aplicarse para eliminar la influencia de las aceleraciones articulares pasivas.

Encontrar el estado de aceleración reducido de la plataforma *Gough–Stewart*, requiere de adaptar la ecuación (2.40) al manipulador bajo análisis. Los tornillos que se usarán para este fin serán los mismos que se muestran en la Figura 3.2, por lo tanto, el estado de aceleración reducido del manipulador bajo análisis en forma de tornillo satisface:

$${}^B A_o^P = {}_0\dot{\omega}_1^i {}^0\mathcal{S}_i^1 + {}_1\dot{\omega}_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2 + {}_2\dot{\omega}_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3 + {}_3\dot{\omega}_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 + {}_4\dot{\omega}_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\dot{\omega}_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6 + \mathcal{A}_i \quad (3.16)$$

donde  $\mathcal{A}_i$  es definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i = & [{}_0\omega_1^i {}^0\mathcal{S}_i^1 \quad {}_1\omega_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2 + {}_2\omega_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3 + {}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 + {}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6] \\ & + [{}_1\omega_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2 \quad {}_2\omega_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3 + {}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 + {}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6] \\ & + [{}_2\omega_3^i {}^2\mathcal{S}_i^3 \quad {}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 + {}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6] \\ & + [{}_3\omega_4^i {}^3\mathcal{S}_i^4 \quad {}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6] \\ & + [{}_4\omega_5^i {}^4\mathcal{S}_i^5 \quad {}_5\omega_6^i {}^5\mathcal{S}_i^6] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Obsérvese que la ecuación (3.17) contiene elementos encontrados durante el análisis de velocidad, de modo que las únicas variables desconocidas en la ecuación (3.16) son las aceleraciones

articulares pasivas, y al igual que en el análisis de velocidad, el análisis de aceleración puede desarrollarse a partir de las aceleraciones articulares generalizadas aplicando la forma de Klein al estado de aceleración reducido. Considerando que la ecuación (3.16) es la combinación lineal de los tornillos que se utilizaron en el análisis de velocidad, entonces la base de tornillos recíprocos es la misma que está modelada por la ecuación (3.4). Por lo tanto, aplicando la forma de Klein con la base de tornillos recíprocos a la ecuación (3.16) da como resultado:

$$\begin{aligned} \{ {}^B A_o^P, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} &= \{ \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^1, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} + \{ \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} + \{ \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} \\ &+ \{ \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} + \{ \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} + \{ \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} \\ &+ \{ \mathcal{A}_i, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} \end{aligned} \quad (3.18)$$

reduciendo términos se obtiene:

$$\{ {}^B A_o^P, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} = {}_2 \dot{\omega}_3^i + \{ \mathcal{A}_i, {}^2 \mathcal{S}_{ri}^3 \} \quad (3.19)$$

y pasando a forma matricial la ecuación (3.19) resulta:

$$J \Delta {}^B A_o^P = \ddot{S} + C \quad (3.20)$$

donde  $J$  es la misma matriz jacobiana directa modelada en la ecuación (3.9),  $\Delta$  el operador de polaridad que se representa en la ecuación (3.11),  $\ddot{S}$  es el vector columna de aceleraciones articulares generalizadas representado por:

$$\ddot{S} = \begin{bmatrix} \ddot{S}_1 \\ \ddot{S}_2 \\ \ddot{S}_3 \\ \ddot{S}_4 \\ \ddot{S}_5 \\ \ddot{S}_6 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

y  $C$  es el vector columna de aceleración complementaria que se define como en la ecuación (3.22).

$$C = \begin{bmatrix} \{ \mathcal{A}_1, {}^2 \mathcal{S}_{r1}^3 \} \\ \{ \mathcal{A}_2, {}^2 \mathcal{S}_{r2}^3 \} \\ \{ \mathcal{A}_3, {}^2 \mathcal{S}_{r3}^3 \} \\ \{ \mathcal{A}_4, {}^2 \mathcal{S}_{r4}^3 \} \\ \{ \mathcal{A}_5, {}^2 \mathcal{S}_{r5}^3 \} \\ \{ \mathcal{A}_6, {}^2 \mathcal{S}_{r6}^3 \} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.20) es la denominada ecuación entrada-salida de aceleración, con la cual el análisis de aceleración directo se concluye, únicamente hay que despejar  ${}^B A_o^P$  si se cuenta

con las aceleraciones articulares generalizadas o despejar  $\ddot{S}$  si ya se cuenta con algún estado de aceleración, siempre cuidando que el manipulador no se encuentre en una posición de singularidad que evite que la matriz  $J$  sea invertible.

### 3.3.2. Análisis inverso de aceleración

Para concluir el análisis de aceleración de la plataforma *Gough–Stewart* se deben encontrar todas las aceleraciones implicadas, incluyendo las aceleraciones articulares pasivas. Por lo que análogo al análisis inverso de velocidad, donde se recurrió al modelo matricial del estado de velocidad en forma de tornillo para encontrar todas las velocidades del manipulador, el análisis de aceleración debe utilizar la misma representación matricial, pero esta vez de la ecuación (3.16), lo que conduce a:

$${}^B A_o^P = J_i \dot{\Omega}_i + \mathcal{A}_i \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) representa el estado de aceleración descrito por cualquiera de las cadenas cinemáticas del manipulador, donde  $J_i$  es la misma matriz representada en la ecuación (3.13), mientras que  $\dot{\Omega}_i$  es un vector columna que contiene todas las aceleraciones articulares de la  $i$ -ésima cadena cinemática y se encuentra representada como en la expresión (3.24).

$$\dot{\Omega}_i = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\omega}_i^1 \\ {}^1\dot{\omega}_i^2 \\ {}^2\dot{\omega}_i^3 \\ {}^3\dot{\omega}_i^4 \\ {}^4\dot{\omega}_i^5 \\ {}^5\dot{\omega}_i^6 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Con las ecuaciones anteriores, se intuye que para encontrar todas las aceleraciones articulares, tanto pasivas como generalizadas, basta con despejar el vector columna  $\dot{\Omega}_i$  de la ecuación (3.23), como se observa en [12] con la ecuación (3.25).

$$\dot{\Omega}_i = J_i^{-1} ({}^B A_o^P - \mathcal{A}_i) \quad (3.25)$$

Cabe recalcar que al igual que en el análisis de velocidad inverso, la ecuación anterior obtiene las aceleraciones articulares de una sola cadena cinemática, por lo que para encontrar las 36 aceleraciones articulares que posee la plataforma *Gough–Stewart* habrá que aplicar la ecuación cinco veces más, una por cada cadena cinética que el manipulador posee.

## 3.4. Codificación de la cinemática infinitesimal

Con la finalidad de corroborar los análisis desarrollados en este capítulo, se programarán las ecuaciones (3.8), (3.15), (3.20) y (3.25) en el software matemático denominado MATLAB, se procesarán distintas trayectorias y los resultados se mostrarán de forma gráfica. Los códigos de programación realizados se muestran en el Apéndice A.

# Capítulo 4

## Validación mediante simulación multicuerpo

### 4.1. Funciones de trayectoria

Antes de iniciar con las validaciones, hay que asignar movimientos a los actuadores lineales que permitan llevar a la plataforma móvil del manipulador a un estado deseado, en un lapso de tiempo específico. Es decir, es necesario desarrollar una función de trayectoria que guíe el movimiento de los actuadores y estos a su vez guíen a la plataforma móvil.

Para crear una función de trayectoria para cada actuador debe conocerse su posición inicial y final, tomando la posición inicial como cero y a la posición final como la longitud requerida para llevar a la plataforma móvil al estado deseado. Sin embargo, es importante considerar que una vez obtenidas las trayectorias hay que obtener la posición de la plataforma móvil en cada instante de tiempo donde la función de trayectoria es válida, esto debido a que la parte dual de los tonillos cambia dependiendo del estado que tiene la plataforma móvil. Por ello, la cinemática directa debe emplearse, y al ser resuelta por un método numérico, provee de cierto porcentaje de error al estado de la plataforma móvil y por ende a los resultados.

Con la finalidad de evitar la adición de errores se creará un conjunto de seis trayectorias que describan los seis grados de libertad de la plataforma *Gough-Stewart* y no una trayectoria para cada actuador, de esta manera, se obtiene el estado deseado de la plataforma móvil en cada instante de tiempo y la cinemática inversa obtiene la longitud del actuador en el mismo lapso de tiempo hasta llegar a la posición deseada, entonces el uso de la cinemática directa es completamente innecesario.

Las seis trayectorias que describirán al estado de la plataforma móvil se obtendrán a partir de una sola función de trayectoria, pero con diferentes coeficientes dependiendo del estado deseado en el manipulador. Dicha función será de tercer grado para que al aplicar el análisis cinemático de aceleración se obtengan funciones de primer orden, entonces la función de trayectoria será del tipo:

$$x(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 \quad (4.1)$$

Para obtener todos los coeficientes de la función (4.1) se requiere de condiciones iniciales y finales que describan la cinemática que lleven a la plataforma móvil al estado deseado. Es decir, hay que tener condiciones iniciales y finales tanto de posición como de velocidad y dado que el manipulador empezará y finalizará su movimiento en estado de reposo, las condiciones iniciales son las siguientes:

$$x(t = 0) = x_i \quad (4.2)$$

$$x(t = t_f) = x_f \quad (4.3)$$

$$\dot{x}(t = 0) = 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{x}(t = t_f) = 0 \quad (4.5)$$

donde  $x_i$  es la posición inicial,  $x_f$  la posición final y  $t_f$  el tiempo que durará el movimiento o tiempo final. Si en la ecuación (4.1) y en su derivada temporal se sustituyen las condiciones iniciales, resulta:

$$x_i = a_3 \quad (4.6)$$

$$x_f = a_0 t_f^3 + a_1 t_f^2 + x_i \quad (4.7)$$

$$0 = a_2 \quad (4.8)$$

$$0 = 3a_0 t_f^2 + 2a_1 t_f \quad (4.9)$$

Obsérvese que las ecuaciones (4.6) y (4.8) muestran el valor de los coeficientes  $a_3$  y  $a_2$ , respectivamente de forma directa. Al sustituir estos valores en las ecuaciones (4.7) y (4.9) se obtiene un sistema de dos ecuaciones que al resolverse, los valores de los coeficientes faltantes son hallados y representados como:

$$a_0 = -\frac{2(x_f - x_i)}{t_f^3} \quad (4.10)$$

$$a_1 = \frac{3(x_f - x_i)}{t_f^2} \quad (4.11)$$

Por lo tanto, si se remplazan los coeficientes de la función (4.1) por los valores encontrados, la función de trayectoria capaz de describir cualquier desplazamiento de la plataforma móvil se representa como en la ecuación (4.12).

$$x(t) = -\frac{2(x_f - x_i)}{t_f^3} t^3 + \frac{3(x_f - x_i)}{t_f^2} t^2 + x_i \quad (4.12)$$

## 4.2. Modelo tridimensional

Para este caso en particular, el modelo tridimensional de la plataforma *Gough–Stewart* se construirá con la edición estudiantil de ADAMS VIEW. Esta edición posee las mismas características que la edición normal, pero con ciertas restricciones, siendo la limitación de cuerpos por modelo la que más ocasionó inconvenientes en este proyecto, ya que el número de cuerpos del manipulador excede los 20 cuerpos permitidos por la edición estudiantil. Por tal motivo,

el número de cuerpos del modelo tridimensional debe reducirse sin afectar el funcionamiento del manipulador.

### 4.2.1. Modelado de cuerpos sólidos

La plataforma *Gough–Stewart* cuenta con 44 cuerpos sólidos, de los cuales la mayoría representan el cuerpo de las juntas universales y revolutas. En ADAMS VIEW las juntas universales pueden colocarse sin un cuerpo físico, por lo que el número de cuerpos con los que cuenta la plataforma puede reducirse si se omite el cuerpo de las juntas universales. Sin embargo, para unir las juntas universales con la plataforma móvil hay que añadir una junta revoluta perpendicular a la plataforma móvil, y esta unión impide que los cuerpos de las juntas universales superiores sean eliminados.

Eliminando únicamente los cuerpos de las juntas universales inferiores, el número de cuerpos de la plataforma se ve reducido a 32, lo que aún continúa siendo una limitación debido a la versión del *software*. Para solucionar este inconveniente se propuso eliminar solo la mitad de las juntas universales superiores, dejando la mitad que conecta a la plataforma móvil con la junta universal. De esta manera, se eliminan 6 cuerpos pertenecientes a las juntas universales y 6 pertenecientes a las juntas revolutas, dejando al número de cuerpos totales del manipulador en el máximo permitido por la edición estudiantil de ADAMS VIEW.

Considerando lo anterior, se inició la construcción del modelo tridimensional de la plataforma *Gough–Stewart*. Lo primero es seleccionar el plano de trabajo, y con el fin de evitar inconvenientes se respeta el marco de referencia fijo y la numeración establecidas en [11], por lo tanto, el plano sobre el que se trabajó es el plano  $XY$ . En dicho plano deben ubicarse los puntos  $P_i$  y  $B_i$  que se encuentran bien definidos por la Tabla 3.1, porque a partir de ellos ubican las plataformas móvil y fija, así como las cadenas cinemáticas que las unen.

Colocar las plataformas móvil y fija en el modelo tridimensional requiere de nuevos puntos que posicionen adecuadamente ambas plataformas, a estos puntos se les denomina como  $b_i$  y  $p_i$  para diferenciarlos de los puntos en la Tabla 3.1. Los puntos  $b_i$  son los que ubican la plataforma fija y los  $p_i$  los que ubican la plataforma móvil. Para situar estos puntos en el espacio de trabajo hay que considerar que ADAMS VIEW coloca el centro de masa del cuerpo a la altura de los puntos que se le indique, por lo que el grosor del cuerpo debe contemplarse a la hora de ubicar los puntos  $b_i$  y  $p_i$ . En el caso de la base fija y la plataforma móvil, el grosor es de  $6,35 \text{ mm}$ , de tal manera que el valor de los puntos de referencia en el eje  $Z$  para la plataforma fija y la plataforma móvil deben tener una altura de  $-3,175 \text{ mm}$  y de  $299,825 \text{ mm}$ , respectivamente. En cuanto a las coordenadas en los ejes  $x$  y  $y$ , los puntos  $b_i$  tienen las mismas coordenadas en esos ejes que los puntos  $B_i$ , mientras que las coordenadas de los puntos  $p_i$  son dos terceras partes de las coordenadas de los puntos  $P_i$ , debido a la relación que la base fija mantiene con la plataforma móvil. De tal manera que los puntos  $b_i$  y  $p_i$  quedan ubicados mediante las coordenadas que se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Ubicación de los puntos  $b_i$  y  $p_i$  en mm.

$b_1$	[200,0,-3.175]	$p_1$	[133.333,0,299.825]
$b_2$	[100,173.2,-3.175]	$p_2$	[66.666,115.466,299.825]
$b_3$	[-100,173.2,-3.175]	$p_3$	[-66.666,115.466,299.825]
$b_4$	[-200,0,-3.175]	$p_4$	[-133.333,0,299.825]
$b_5$	[-100,-173.2,-3.175]	$p_5$	[-66.666,-115.466,299.825]
$b_6$	[100,-173.2,-3.175]	$p_6$	[66.666,-115.466,299.825]

Las coordenadas de la tabla anterior junto con la herramienta *plate* permitieron crear las plataformas fija y móvil como se muestra en la Figura 4.1. En la figura se observan la plataforma móvil, la plataforma fija y los puntos  $b_i$ ,  $p_i$ ,  $B_i$  y  $P_i$ , donde los dos últimos se ven representados de color verde, mientras que el resto están representados de color negro.

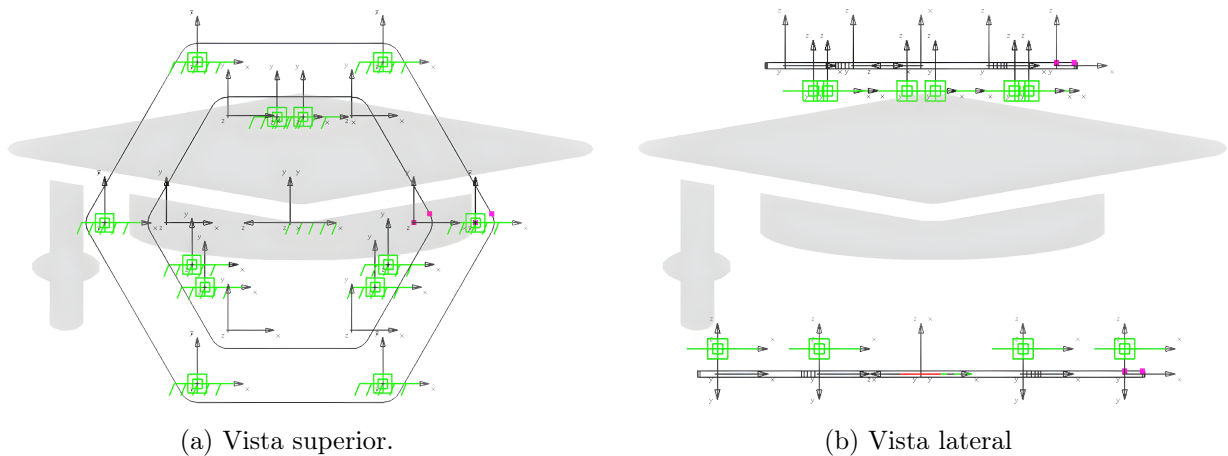


Figura 4.1: Modelo tridimensional de la base fija y plataforma móvil.

Una vez realizadas las plataformas fija y móvil, hay que unir las a través de los actuadores lineales para completar el modelo tridimensional del manipulador, siempre siguiendo el orden que se menciona en [11]. Los actuadores lineales fueron representados por juntas traslacionales, los cuales a diferencia de las juntas universales necesitan dos cuerpos sólidos para funcionar, el primero representa la cubierta del actuador lineal y el segundo al vástago móvil.

A través de la herramienta *cylinder* los cuerpos  $V_i$ , como se les llamó a los vástagos móviles, se construyeron con un radio de 6 mm y una longitud de 140 mm, mientras que el radio de los cuerpos  $C_i$ , como se les llamó a las cubiertas de los actuadores lineales, fueron de 10 mm y con una longitud distinta a la distancia que separa a los puntos  $B_i$  y  $P_i$ , pues hay que recordar que los extremos de los actuadores lineales están conectados con parte del cuerpo de las juntas universales y aunque puedan considerarse como un solo cuerpo, debido a que están unidos fijamente, en el modelo tridimensional se hizo la distinción entre ambos cuerpos.

La longitud de los cuerpos  $C_i$  puede encontrarse al sustraer dos veces  $21,5 \text{ mm}$  de la distancia entre los puntos  $B_i$  y  $P_i$ , valor que representa la mitad del cuerpo de una junta universal. En cuanto a su ubicación en el espacio de trabajo, al desconocer el ángulo de inclinación de cualquiera de las cadenas cinemáticas, se propuso el uso de dos cilindros pequeños con una longitud de  $21,5 \text{ mm}$ , uno que inicia en el punto  $B_i$  y con dirección hacia el punto  $P_i$  correspondiente, mientras que el otro inicia en el punto  $P_i$  y se dirige al punto  $B_i$  como se muestra en la Figura 4.2a, de esta manera los cuerpos  $C_i$  se colocaron de forma sencilla uniendo ambos cilindros con la herramienta *cylinder* sin especificar la longitud del cilindro como se observa en la Figura 4.2b.

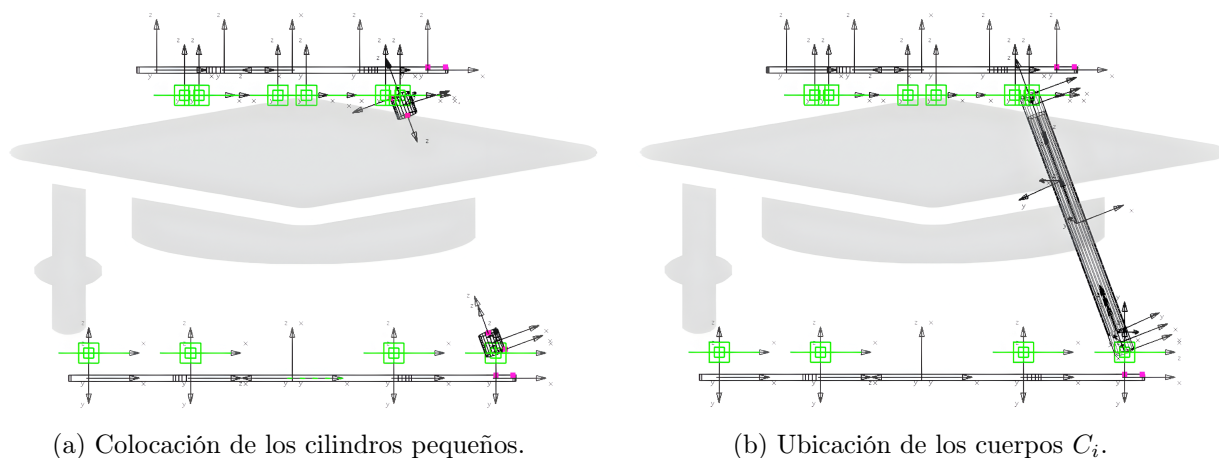


Figura 4.2: Modelado de los cuerpos  $C_i$ .

Por último, los cuerpos  $V_i$  se colocaron en la parte superior de los cuerpos  $C_i$  con dirección hacia el punto  $B_i$ . Así, los cuerpos  $V_i$  tienen el mismo eje de acción que los cuerpos  $C_i$  cumpliendo con las características de un actuador real. En la figura también se observa que los cilindros pequeños fueron eliminados, puesto que ya no serán de utilidad para el modelo tridimensional. Por otro lado, en la Figura 4.3b se muestra el modelo tridimensional con los actuadores lineales faltantes y con la mitad de las juntas universales superiores que no pudieron ser eliminadas.

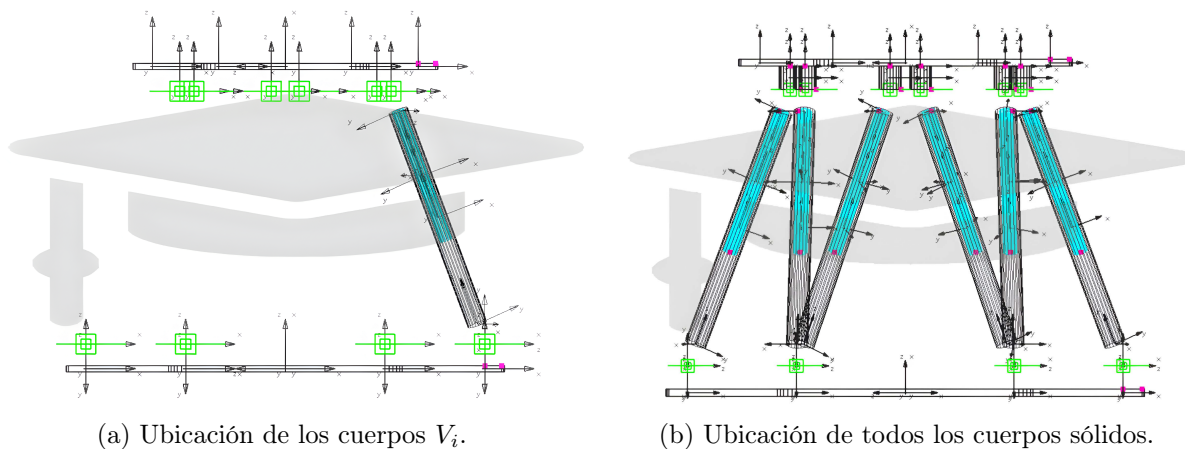


Figura 4.3: Modelado de los actuadores lineales.



### 4.2.2. Restricciones de movimiento

Con todos los cuerpos sólidos colocados, resta darles restricciones a través de los pares cinemáticos inferiores para obtener un modelo tridimensional funcional. En ADAMS VIEW se cuenta con varios tipos de pares cinemáticos inferiores, de los cuales solo las requeridas para este modelo tridimensional se describen en el siguiente listado.

✓ Junta fija

Representada por un gráfico en forma de candado, es la junta encargada de mantener en una posición específica los cuerpos en los que es colocada. Su colocación requiere de dos cuerpos y la ubicación donde actuará.

✓ Junta universal

Formada por un par de estructuras en forma de horquilla a  $90^\circ$ , son las encargadas de transmitir el movimiento de un cuerpo a otro sin necesidad de que estos cuerpos sean colineales. Su colocación igual requiere de dos cuerpos y la ubicación donde actuará.

✓ Junta traslacional

Se encuentra representada por un par de prismas rectangulares, donde uno se mueve respecto a otro, cumpliendo así la misma función de un actuador lineal. Para colocar este tipo de juntas es necesario tener dos cuerpos, el cuerpo móvil y el cuerpo estático, la posición donde actuará y también la dirección en la que se desplazará.

Cabe mencionar que el orden en el que se elijan los cuerpos a unir, con cualquier junta cinemática, puede afectar el resultado. Por este motivo, se propone siempre seleccionar como primer cuerpo el que este más cerca de la plataforma móvil.

### 4.2.3. Asignación de movimiento

En cuanto al movimiento, éste puede colocarse en cualquier par cinemático a través del apartado *Motion*. Por defecto, el movimiento colocado se encuentra regido bajo una función de posición, pero estos parámetros pueden ser cambiados por una función de velocidad o aceleración según el usuario lo requiera. En ADAMS VIEW los movimientos son representados por flechas color negro que apuntan en dirección hacia donde los cuerpos se moverán, para este caso en particular el movimiento debe guiar a la junta traslacional y estar colineal a la cadena cinemática.

Aplicados los movimientos a las juntas traslacionales, el modelo tridimensional queda totalmente construido, tal y como se observa en la Figura 4.4. En ella están de rojo todas las juntas utilizadas a excepción de las juntas revolutas, estas se encuentran de color azul para que puedan diferenciarse del resto de juntas en la parte superior del manipulador. De color negro se encuentran los cuerpos exteriores, de azul cielo los cuerpos interiores y con una flecha negra los movimientos que regirán a las juntas traslacionales mediante la función de trayectoria que llevará a la plataforma móvil a un estado deseado.

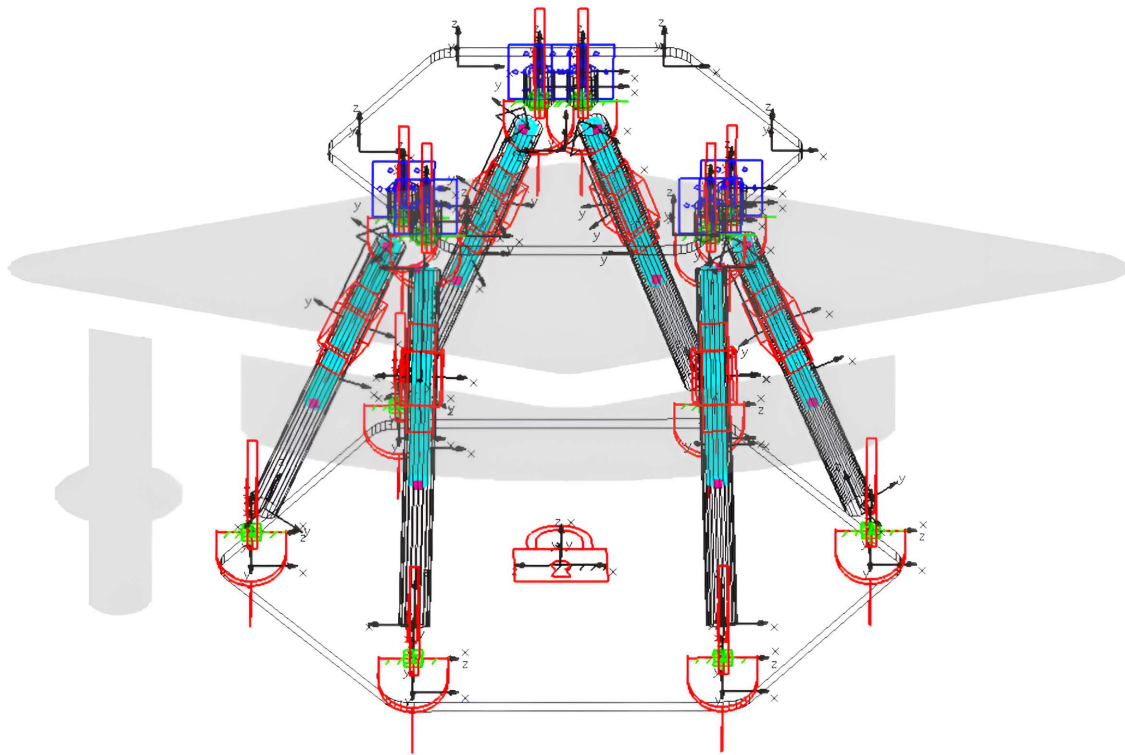


Figura 4.4: Modelado tridimensional de la plataforma *Gough–Stewart*.

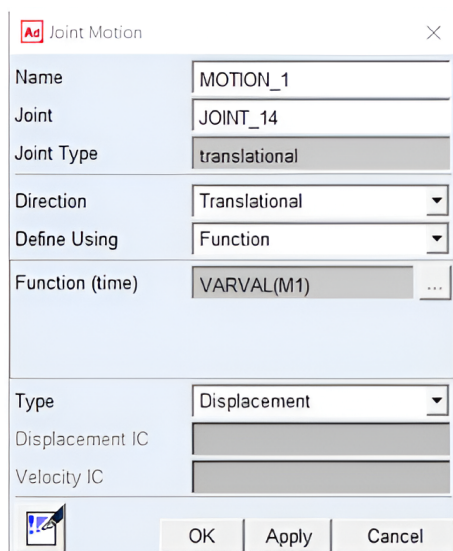
### 4.3. Comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW

La comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW se realiza gracias a que ADAMS VIEW permite exportar la cinemática del modelo tridimensional en un sistema de bloques que pueden interpretarse mediante SIMULINK, un entorno propio de MATLAB capaz de diseñar y simular sistemas a través de diagramas de bloque. De esta forma se pueden obtener los resultados de la simulación multicuerpo directamente en MATLAB y así comparar fácilmente los resultados obtenidos con la simulación multicuerpo y los obtenidos mediante la teoría de tornillos.

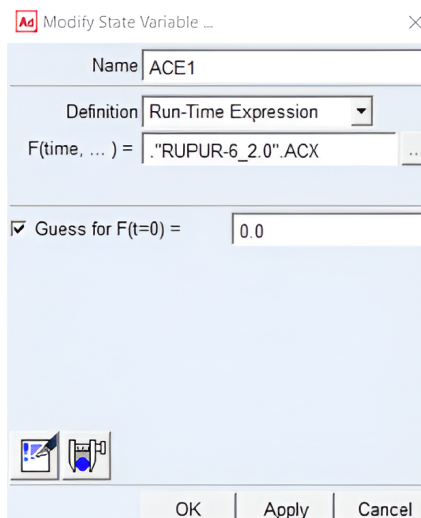
Para exportar la cinemática es necesario modificar ciertos elementos del modelo tridimensional. Primero, hay que definir las variables de entrada y salida en el modelo mediante variables de estado y vincularlas con los elementos correspondientes para que puedan ser utilizadas por SIMULINK. Agregar este tipo de variables en el modelo tridimensional requiere de acceder a la pestaña *Elements* y posteriormente al apartado *System Elements*, donde se podrán agregar el número de variables de estado que se requieran, en este caso, dieciocho en total. De las dieciocho variables de estado seis son variables de entrada, es decir, son las variables que se necesitan para comenzar el movimiento del modelo tridimensional, y doce son variables de salida que representan la cinemática resultante de aplicar las variables de entrada, específicamente se trata de la velocidad angular, velocidad lineal, aceleración angular y la aceleración lineal de la plataforma móvil en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Las variables de estado que representarán a las variables de entrada no necesitan de alguna modificación, únicamente hay que enlazarlas con el elemento que se desea mover, y como en el modelo tridimensional de la plataforma *Gough-Stewart* se requiere mover a los actuadores lineales, las variables de entrada se enlazarán a cada movimiento asignado a la junta traslacional, de esta manera el movimiento de los actuadores lineales dependerá de los datos proporcionados por las variables de entrada. El enlace entre ambos elementos se realiza mediante la configuración de movimiento del actuador lineal en el apartado *function* mediante el comando  $VARVAL(X)$ , donde  $X$  es el nombre de cualquier variable de entrada. Por otro lado, las variables de salida necesitan enlazarse con las mediciones cinemáticas que se desean obtener, a los que ADAMS VIEW denomina como *measures*. Estas mediciones se obtienen seleccionando el cuerpo de interés y eligiendo el apartado *measures*, lo que desplegará una ventana en la que se debe seleccionar el valor que se desea medir. Definidas las mediciones, estas pueden enlazarse con las variables de estado a través de su configuración en el apartado  $F(time...)$ , donde se debe seleccionar la medición que representará dicha variable, y así considerarse como variables de salida.

En las Figuras 4.5a y 4.5b se muestra la configuración del movimiento de los actuadores lineales para enlazarse con las variables de entrada y el enlazamiento de las variables de estado con las mediciones cinemáticas seleccionadas, respectivamente.



(a) Enlace entre el movimiento de los actuadores lineales y las variables de entrada.

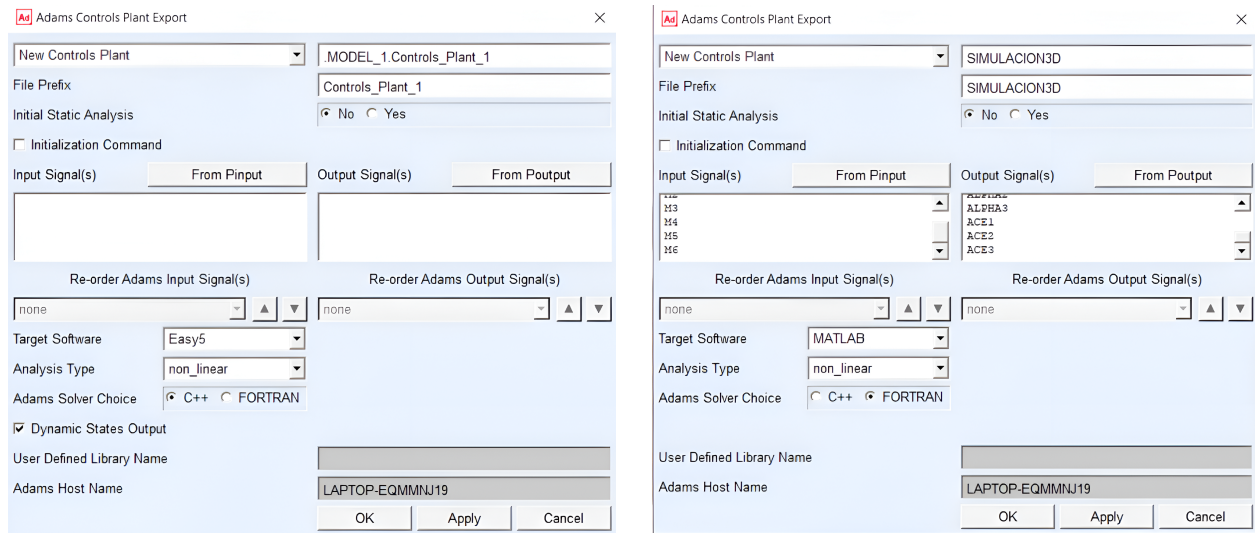


(b) Enlace entre las mediciones cinemáticas y las variables de salida.

Figura 4.5: Configuración de las variables de estado.

Ya configuradas todas las variables de estado, puede iniciarse la exportación del sistema de bloques que contienen la cinemática de todo el modelo tridimensional. Para ello, se ingresa a la pestaña *Plugins* y en el apartado *Controls* se selecciona la opción *Plant export*. En la Figura 4.6a se observa la ventana por defecto que surge al seleccionar la opción *Plant export*,

en esta ventana se modifica el nombre del archivo, las variables de entrada y salida, el software al que será exportado y la manera en la que ADAMS VIEW resolverá las simulaciones. La configuración final de la ventana en este proyecto se muestra en la Figura 4.6b.



(a) Configuración inicial.

(b) Configuración final.

Figura 4.6: Ventana de configuración para el sistema de bloques que exporta ADAMS VIEW.

Al aceptar la configuración, ADAMS VIEW exportará una serie de archivos que abrirán el sistema de bloques en SIMULINK después de ejecutar el comando *adams\_sys* dentro del *Command Window* de MATLAB. De todos los bloques presentes en el archivo de SIMULINK, solo el bloque mostrado en la Figura 4.7 es de interés. Obsérvese que el lado izquierdo del bloque tiene seis pines de entrada, a los que se les debe enviar los valores de posición de los actuadores lineales, mientras que el lado derecho tiene doce pines de salida que deben enviarse al espacio de trabajo de MATLAB.

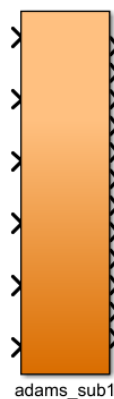


Figura 4.7: Bloque con la cinemática del modelo tridimensional.

Para culminar la comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW debe unirse el bloque de la figura anterior con el espacio de trabajo de MATLAB, de esta manera, toda la simulación

podrá ser controlada por MATLAB mediante los comandos *load\_system* y *set\_param* sin necesidad de acceder al entorno de SIMULINK. El primer comando mencionado carga el modelo en espacio de trabajo de MATLAB, mientras que el segundo inicia la simulación.

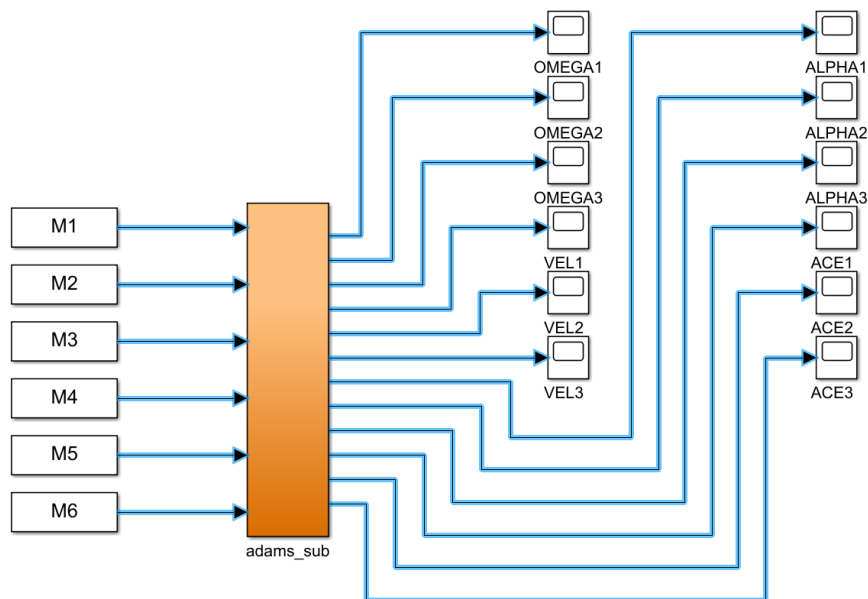


Figura 4.8: Representación visual de la comunicación entre MATLAB y ADAMS VIEW.

En la Figura 4.8 se muestra la unión entre MATLAB y el bloque obtenido mediante ADAMS VIEW, donde las variables de entrada son representadas a través de bloques con el nombre  $M_i$  que se encargan de extraer la variable del mismo nombre en el espacio de trabajo de MATLAB y guardarlas en el entorno de SIMULINK. Por otro lado, las variables de salida se encuentran dirigidas a un bloque de tipo *scope* permitiendo la visualización y el envío de los datos arrojados por análisis cinemático al espacio de trabajo de MATLAB.

## 4.4. Resultados

Una vez establecida la comunicación entre ambos *softwares* y con ayuda del Apéndice A.1, donde se describe el código de programación de la trayectoria desarrollada en la Sección 4.1, puede ejecutarse la simulación multicuerpo y comparar sus resultados con los obtenidos mediante el código descrito en los Apéndices A.2 y A.3 que describen el análisis cinemático con la teoría de tornillos.

### 4.4.1. Velocidad

Debido a la modificación de los tornillos infinitesimales, los resultados del estado de velocidad del manipulador paralelo deben corroborarse. Esto con la finalidad de observar si las modificaciones no influyeron negativamente al análisis cinemático. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del estado de velocidad cuando se quiere llegar al estado

deseado:

$$\begin{aligned}
 x &= 15 \text{ mm} \\
 y &= 18 \text{ mm} \\
 z &= 38 \text{ mm} \\
 \alpha &= 10^\circ \\
 \beta &= 5^\circ \\
 \gamma &= 3^\circ
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Con el estado deseado de la plataforma móvil bien definido en (4.13) y considerando un tiempo de cinco segundos para que la plataforma móvil llegue desde su posición de reposo a la posición del estado deseado, entonces se obtienen las condiciones iniciales necesarias en la ecuación (4.12) para obtener las trayectorias de la plataforma móvil. Estas trayectorias deben introducirse en la función de cinemática inversa y así obtener los valores de los bloques  $M_i$  mostrados en la Figura 4.8 para que la simulación sea capaz de iniciar.

Obtenidos los valores de  $M_i$  se realizó la simulación a cinco segundos, ya que este es el tiempo que tarda la plataforma en llegar al estado deseado, y se comparó con los resultados obtenidos mediante la teoría de tornillos, como se muestra en las siguientes figuras. Los resultados fueron divididos en velocidad lineal y velocidad angular para observar de mejor manera las discrepancias, pues tanto la velocidad lineal como la velocidad angular presentan magnitudes diferentes y deben representarse en una escala adecuada.

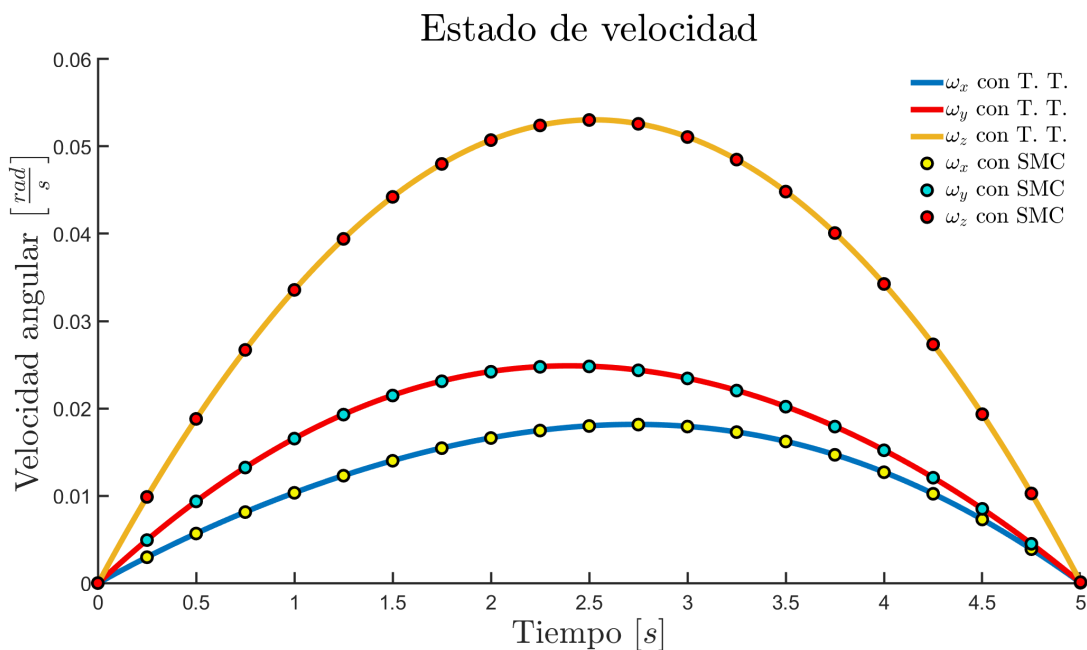


Figura 4.9: Comparación de velocidad angular.

En la Figura 4.9 se encuentra la velocidad angular de la plataforma *Gough-Stewart* obtenidas

mediante la teoría de tornillos (T.T.) y con la simulación multicuerpo (SMC), donde se utilizó líneas continuas para los resultados obtenidos con la teoría de tornillos y líneas compuestas por puntos para los resultados arrojados por la simulación multicuerpo. Además del tipo de línea que tiene cada gráfica, también se le asignó un color distinto a cada una de acuerdo al eje sobre el que el movimiento se efectúa. De modo que, la línea continua de color amarillo y la línea de puntos rojos representa el movimiento en el eje  $z$ , la línea continua de color rojo y la línea de puntos color azul representan el movimiento en el eje  $y$  y el movimiento en el eje  $x$  es representado por la línea continua de color azul y la línea compuesta de puntos color amarilla. Cabe recalcar que las líneas compuestas por puntos contienen más puntos de los mostrados. Sin embargo, para una mejor comparación se graficaron únicamente cierta cantidad de puntos.

Obsérvese que en la figura, a pesar de representar seis velocidades angulares, una por cada eje, solo presenta tres formas bien definidas, es decir, que los resultados obtenidos con la teoría de tornillos y los obtenidos con la simulación multicuerpo coinciden, incluso aun cuando las gráficas presenten ligeras inclinaciones como es el caso de la velocidad angular en  $x$ . Como se observa, la velocidad angular en todos los ejes presenta una magnitud nula en el tiempo  $t = 0$  y  $t = 5$ , lo que es lógico, ya que el manipulador comienza y termina su trayectoria con una velocidad nula. Por otro lado, la magnitud de las velocidades angulares en  $t = 2,5$  mediante la teoría de tornillos son: en el eje  $x$   $0,018 \frac{rad}{s}$ , en  $y$   $0,024 \frac{rad}{s}$  y en  $z$   $0,053 \frac{rad}{s}$ . Mientras que las magnitudes obtenidas mediante la simulación multicuerpo durante el mismo tiempo  $t$  son: en el eje  $x$   $0,017 \frac{rad}{s}$ , en  $y$   $0,024 \frac{rad}{s}$  y en  $z$   $0,053 \frac{rad}{s}$ , lo que demuestra que entre los resultados obtenidos mediante la teoría de tornillos y los obtenidos a través de la simulación multicuerpo presentan una ligera discrepancia, al menos en el eje  $x$ . Con el fin de observar cuan grandes son las discrepancias se recurrió a obtener y graficar el error absoluto, pues es una forma rápida y sencilla de observar las discrepancias de las gráficas.

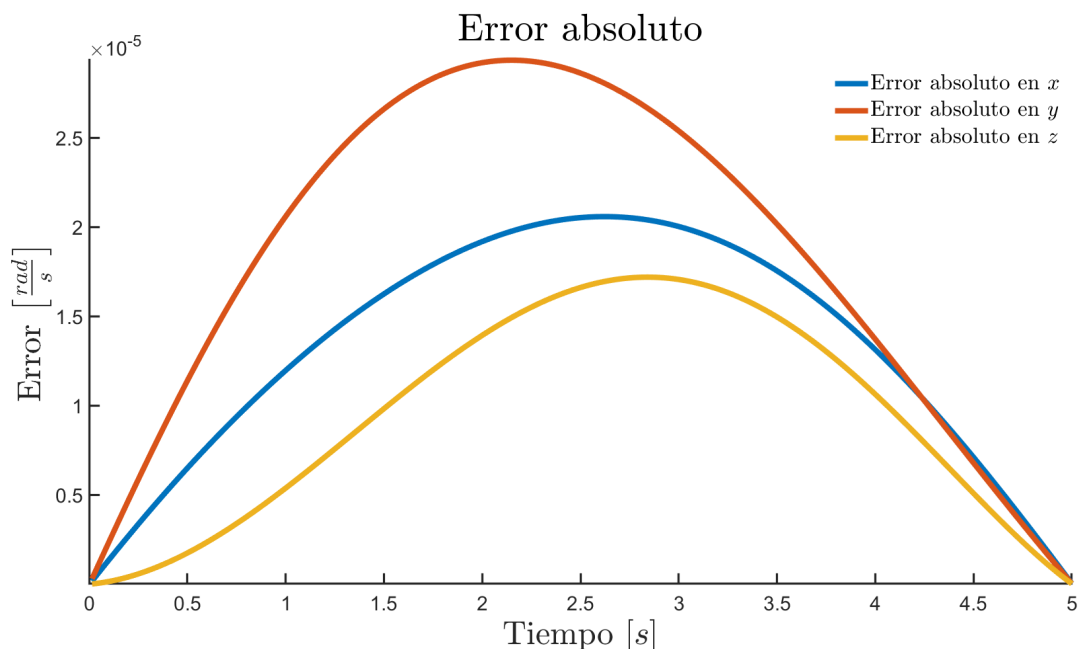


Figura 4.10: Discrepancias en la comparación de velocidad angular.



En la Figura 4.10 se muestra el error que existe entre los resultados obtenidos con la teoría de tornillos y con la simulación multicuerpo en cada eje. De color amarillo se muestra el error en el eje  $z$ , de color rojo el error en el eje  $y$  y de color azul el error en el eje  $x$ . En la figura se observa como el error máximo se presenta en el eje  $y$  con una magnitud de  $2,93e^{-5}$  durante el tiempo  $t = 2,1$ , contrario a lo que se mencionaba con anterioridad, donde se percibió un error solo en el eje  $x$ . Con el error absoluto se observa que existen discrepancias entre ambos resultados durante la mayor parte del tiempo. No obstante, la magnitud del error está en el orden de los micro radianes por segundo ( $\frac{\mu rad}{s}$ ), por lo que se puede considerar al error prácticamente como nulo.

Por otro lado, en la Figura 4.11 se muestra la comparación de la velocidad lineal en la plataforma móvil, obtenida con la teoría de tornillos y con la simulación multicuerpo. Al igual que en la Figura 4.9, el tipo y color de línea en las gráficas representan los mismos ejes de acción del movimiento.

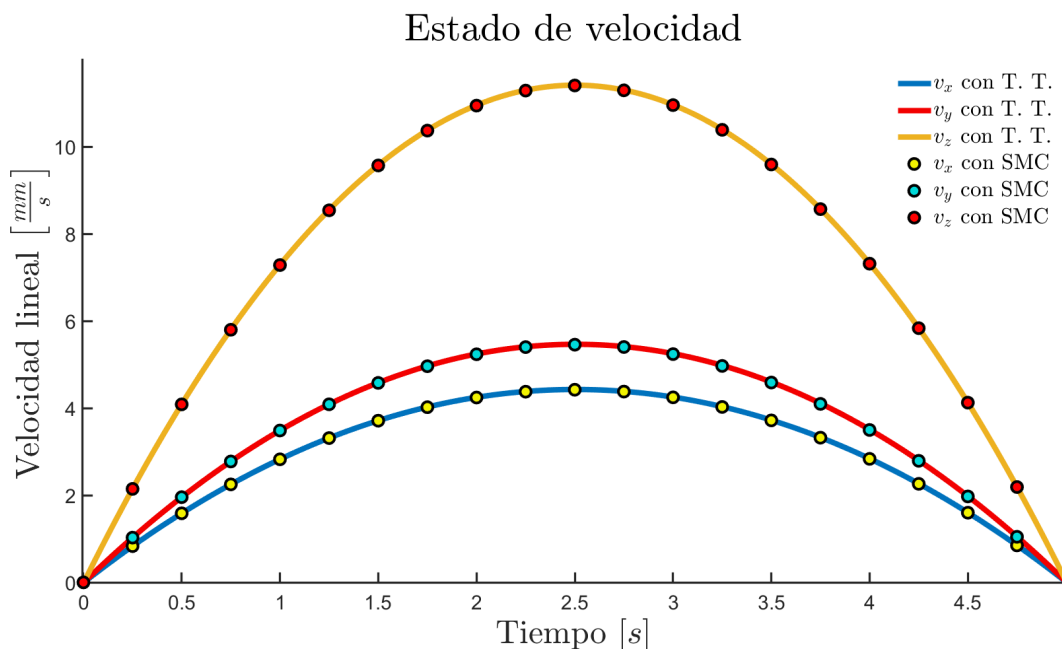


Figura 4.11: Comparación de velocidad lineal.

Nótese que en la Figura 4.11 predominan tres formas, de modo que ambos resultados también se asemejan. Nuevamente, la magnitud de las velocidades lineales es nula en los tiempos  $t = 0$  y  $t = 5$  porque el manipulador inicia y termina su movimiento en reposo. En lo que se refiere al tiempo  $t = 2,5$ , las magnitudes de las velocidades lineales obtenidas con la teoría de tornillos son las siguientes: en el eje  $x$  se tiene una velocidad lineal igual a  $4,426 \frac{mm}{s}$ , para el eje  $y$  una velocidad lineal de  $5,463 \frac{mm}{s}$  y de  $11,41 \frac{mm}{s}$  para el caso del eje  $z$ . En contraste, las velocidades lineales obtenidas con la simulación multicuerpo son de  $4,421 \frac{mm}{s}$ ,  $5,454 \frac{mm}{s}$ ,  $11,402 \frac{mm}{s}$  para los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Como se nota, las discrepancias en la velocidad lineal son más notorias, pero es conveniente observar las discrepancias entre ambos resultados mediante el error absoluto.



En la Figura 4.12 se muestra el error absoluto que presentan los resultados en cada eje, de color azul el error en el eje  $x$ , de amarillo el error en el eje  $z$  y de rojo el error en  $y$  que continúa siendo el error más grande con una magnitud de 0,011 en el tiempo  $t = 3,38$ . No obstante, a diferencia de la velocidad angular, la velocidad lineal presenta errores del orden de  $10^{-3}$  y a simple vista pareciera que son más grandes que los errores de la velocidad angular. Sin embargo, las unidades de la velocidad lineal son milímetros por segundo, por lo tanto, el error se representa en milésimas de milímetro por segundo, es decir, un micrómetro por segundo ( $\frac{\mu m}{s}$ ). Esta unidad de medida es muy pequeña, razón por la cual el estado de velocidad obtenido con la teoría de tornillos y el obtenido con la simulación multicuerpo pueden considerarse como iguales, quedando así validado el análisis de velocidad desarrollado mediante la teoría de tornillos.

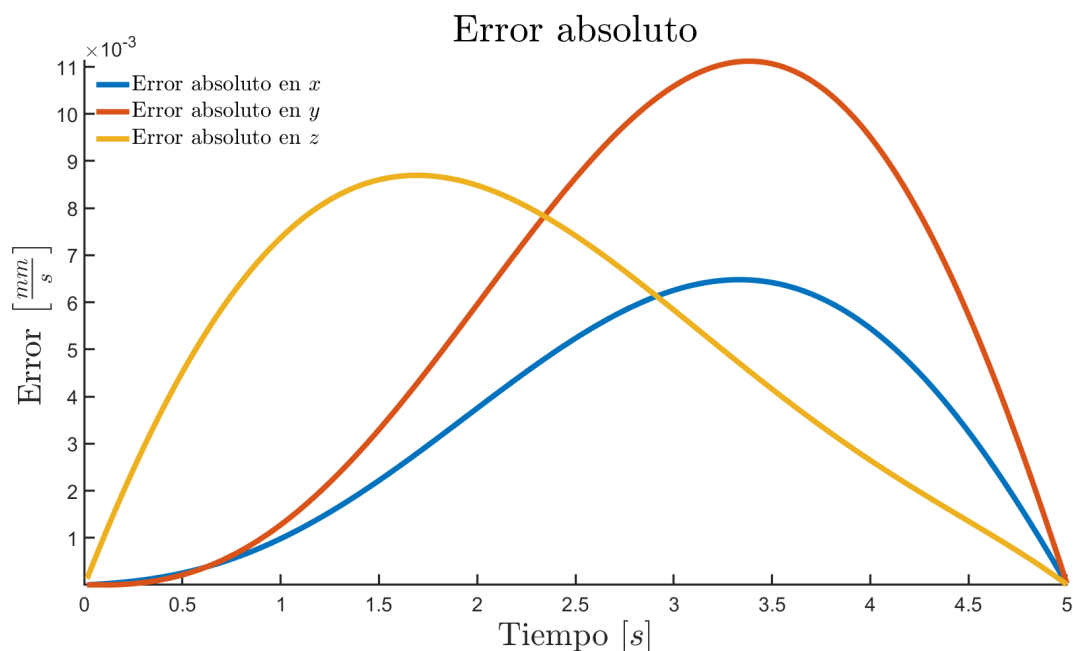


Figura 4.12: Discrepancias en la comparación de velocidad lineal.

#### 4.4.2. Aceleración

Al igual que el estado de velocidad, el estado de aceleración desarrollado con la teoría de tornillos debe validarse con la simulación multicuerpo. Para ello, a continuación se presentan las gráficas obtenidas de la comparación de dichos resultados. Cabe mencionar que las gráficas obtenidas se representan con la convención de color y tipo de línea que se utilizó en las gráficas del estado de velocidad.

La Figura 4.13 muestra la aceleración angular de la plataforma móvil cuando va del estado de posición inicial hasta el estado deseado modelado por la ecuación (4.13). Nótese que la figura presenta tres formas bien definidas, lo que implica que los resultados obtenidos con la

teoría de tornillos coinciden con los resultados obtenidos de la simulación multicuerpo. En la figura se aprecia que la magnitud de las aceleraciones obtenidas mediante la teoría de tornillos y el análisis multicuerpo en el tiempo  $t = 0$  y  $t = 5$  ya no son nulas, a pesar de que se sigue analizando al manipulador con un movimiento que inicia y termina en reposo. No obstante, debe notarse que en la figura se aprecia una línea amarilla paralela al eje  $y$  del plano cartesiano, esta línea representa el cambio brusco que tuvo la velocidad entre el tiempo  $t = 0$  y  $t + 1$ , es decir, la aceleración en  $t = 0$  sí es nula, pero un instante después se incrementa para representar el cambio de velocidad que existe a través del tiempo, cabe recalcar que la aceleración en el instante de tiempo  $t = 0$  es nula en los tres ejes, únicamente que el incremento de aceleración de los ejes  $x$  y  $y$  son ocultados por el incremento de la aceleración en el eje  $z$ . Para el caso que se presenta en la Figura 4.13, la magnitud de la aceleración angular obtenida mediante la teoría de tornillos en un instante de tiempo posterior de  $t = 0$  es de  $0,012 \frac{rad}{s^2}$  para el movimiento en el eje  $x$ , de  $0,020 \frac{rad}{s^2}$  para el movimiento en el eje  $y$  y de  $0,041 \frac{rad}{s^2}$  para el movimiento en el eje  $z$ . Por otro lado, las magnitudes de las aceleraciones obtenidas mediante la simulación multicuerpo son de  $0,012 \frac{rad}{s^2}$ ,  $0,020 \frac{rad}{s^2}$ ,  $0,041 \frac{rad}{s^2}$  en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Como se nota, para el caso de las aceleraciones angulares obtenidas con la teoría de tornillos y con la simulación multicuerpo, no existe discrepancia que se perciba de forma sencilla. Sin embargo, al obtener el error absoluto se aprecian las discrepancias que existen entre los resultados.

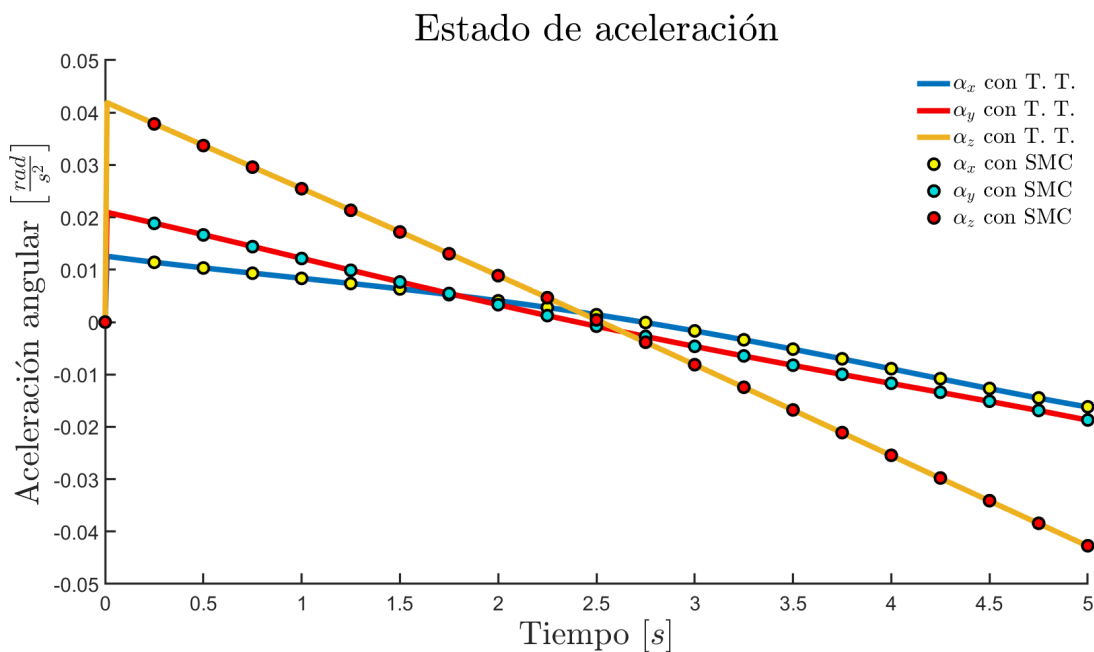


Figura 4.13: Comparación de aceleración angular.

En la Figura 4.14 se grafica el error absoluto, donde se observa que el error más grande lo presenta el movimiento en el eje  $z$  con una magnitud de  $5,189e^{-5}$  en el tiempo  $t = 4,77$ . A pesar de que la Figura 4.14 demuestra que existen discrepancias entre los resultados, estas discrepancias se encuentran en el orden de los micro radianes por segundo al cuadrado ( $\frac{\mu rad}{s^2}$ ), lo que significa que ambos resultados, la aceleración angular obtenida mediante la teoría de

tornillos y la aceleración angular obtenida con la simulación multicuerpo, tienden a ser iguales. Con esto la parte primaria del estado de aceleración desarrollado con la teoría de tornillo queda validada y solo resta verificar los resultados de la parte dual del estado de aceleración.

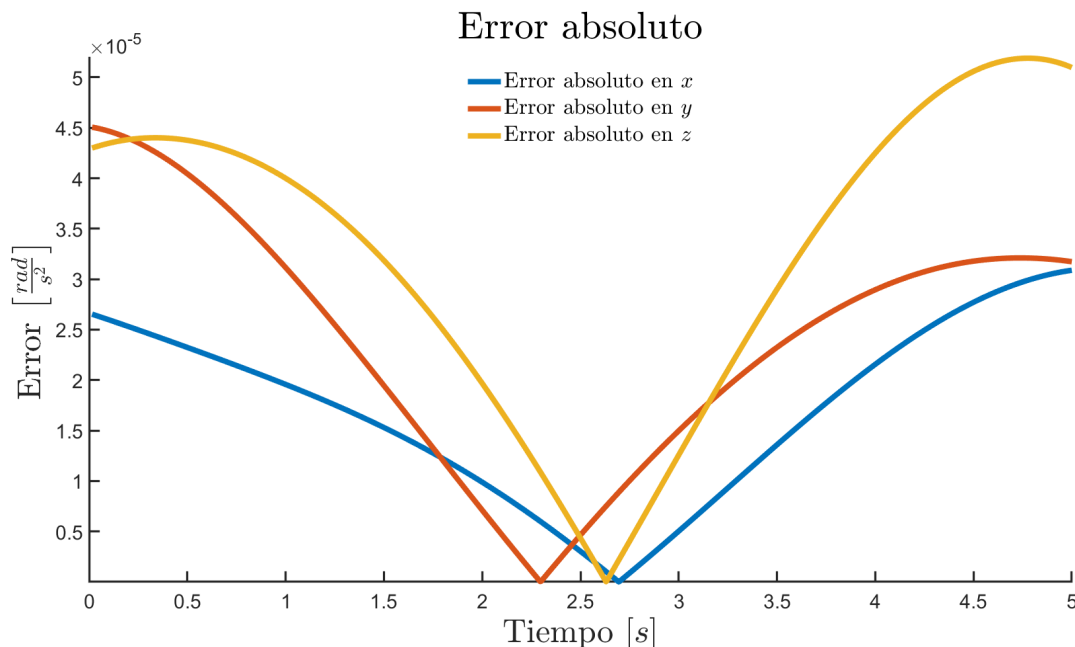


Figura 4.14: Discrepancias en la comparación de aceleración angular.

Por último, la Figura 4.15 muestra la aceleración lineal de la plataforma móvil, y al igual que en las figuras anteriores, entre el tiempo  $t = 0$  y  $t + 1$  se presenta el cambio abrupto que existe en la velocidad después de iniciar el movimiento a partir de un estado en reposo. Las magnitudes de las aceleraciones lineales en un instante de tiempo después de  $t = 0$  en cada eje son las siguientes. Para el eje  $x$  se tiene una aceleración lineal de  $3,533 \frac{mm}{s^2}$ ,  $4,359 \frac{mm}{s^2}$  para el eje  $y$  y de  $9,119 \frac{mm}{s^2}$  para el eje  $z$ . Mientras que, la magnitud de las aceleraciones lineales obtenida a través de la simulación multicuerpo, en el mismo instante de tiempo, son:  $3,536 \frac{mm}{s^2}$  para el eje  $x$ ,  $4,363 \frac{mm}{s^2}$  para el eje  $y$  y  $9,138 \frac{mm}{s^2}$  para el eje  $z$ . En este caso, las discrepancias son notorias. Sin embargo, en la Figura 4.15 se observan tres formas bien definidas para las seis gráficas presentadas, por lo que es conveniente graficar el error absoluto y observar que tan grades son las discrepancias.

En la Figura 4.16 se encuentra el error absoluto que existe entre los resultados, estos errores se encuentran en el orden de los micrómetros por segundo al cuadrado, siendo  $y$  el eje donde se presenta el error máximo con una magnitud de 0,030 en el tiempo  $t = 2,08$ . Esta magnitud no es significativa y puede considerarse que los resultados obtenidos a través de la teoría de tornillos son prácticamente iguales con los resultados conseguidos a través de la simulación multicuerpo.

Nótese que a diferencia de los errores de velocidad, los errores de la aceleración tienen su error máximo en la parte inicial del movimiento, mientras que en el resto del movimiento son

menores a los alcanzados por los de las velocidades lineales. De forma que, contrario a lo que se pensaría, la adición de todos los tornillos al análisis de aceleración no incrementa los errores numéricos, o no son significativos, en específico para los movimientos angulares, ya que en los movimientos lineales se llega a tener un ligero incremento en el error.

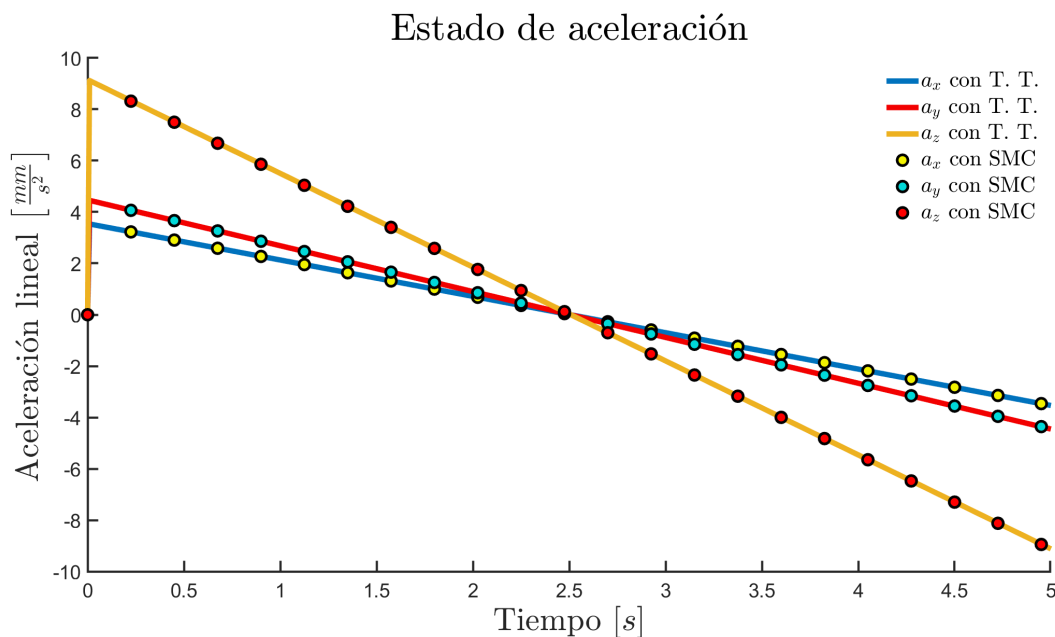


Figura 4.15: Comparación de aceleración lineal.

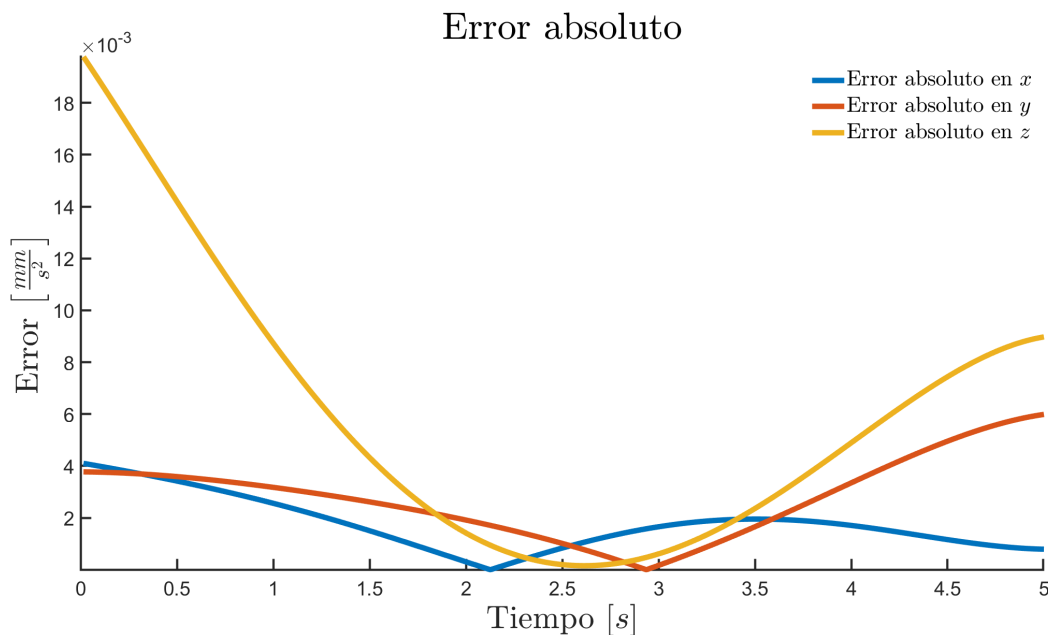


Figura 4.16: Discrepancias en la comparación de aceleración lineal.

Con la finalidad de continuar validando los análisis cinemáticos mediante la simulación mul-

ticuerpo, se propone un nuevo estado deseado a la plataforma y una trayectoria diferente. El estado deseado queda definido como:

$$\begin{aligned}x &= 32 \text{ mm} \\y &= 40 \text{ mm} \\z &= 100 \text{ mm} \\ \alpha &= 12^\circ \\ \beta &= 3^\circ \\ \gamma &= 21^\circ\end{aligned}\tag{4.14}$$

En cuanto a la nueva trayectoria, esta se propone de tipo sinusoidal, ya que en el capítulo posterior también será de utilidad para la validación experimental. Por lo tanto, la trayectoria que guiará a la plataforma móvil al estado deseado será de la forma:

$$x(t) = A \text{ Sin}(\omega t + \theta) + B\tag{4.15}$$

donde  $A$  representa la amplitud de la señal,  $\omega$  su frecuencia,  $\theta$  el desfaseamiento y  $B$  un desplazamiento vertical. Debido a las características físicas del manipulador y los requerimientos para el sensor, las incógnitas  $A$ ,  $B$  y  $\theta$  deben establecerse con valores específicos.

La variable  $A$ , al ser la amplitud de la señal, debe representarse con la posición que se desea alcanzar. Sin embargo, dadas las características de la función sinusoidal, se tendrá un valor negativo de dicha amplitud y por ende el manipulador recorrerá el doble de la posición deseada. Por lo tanto, el valor de  $A$  es:

$$A = \frac{x_i}{2}\tag{4.16}$$

y el valor de la variable  $B$  resulta en:

$$B = \frac{x_i}{2}\tag{4.17}$$

dado que es el valor que hace falta para que la función sinusoidal vaya desde la posición inicial hasta la posición final. Por otro lado, la variable  $\theta$  retrasa a la función para que se comporte como una función coseno que inicia en cero y termina en el valor de la variable  $A$ , representando de esta manera que el manipulador inicie en su posición de origen y termine en la posición deseada. Por tanto, el valor de  $\theta$  resulta en:

$$\theta = -\frac{\pi}{2}\tag{4.18}$$

En cuanto a la variable  $\omega$ , esta determina el periodo que tendrá la señal sinusoidal, para este proyecto el valor de la variable  $\omega$  se representa como:

$$\omega = \frac{4\pi}{t_f}\tag{4.19}$$

donde  $t_f$  es el tiempo que dura la trayectoria. En cuanto al valor de  $\omega$ , este puede modificarse según se desee, pero se eligió este valor para que el manipulador vaya al estado deseado y

regrese a la posición original dos veces.

Sustituyendo los valores mostrados desde la ecuación (4.16) hasta la ecuación (4.19) dentro de la ecuación (4.15) se obtiene:

$$x(t) = \frac{x_i}{2} \text{Sin}\left(\frac{4\pi}{t_f}t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x_i}{2} \quad (4.20)$$

Remplazando la ecuación (4.12) por la ecuación (4.20), los grados de libertad de la plataforma móvil quedarán descritos por trayectorias sinusoidales. De modo que, la simulación multicuerpo puede ejecutarse y observar como la teoría de tornillos se comporta con una trayectoria distinta a una trayectoria de tercer orden.

Ejecutando la simulación multicuerpo con las modificaciones de trayectoria se obtuvieron los siguientes resultados. Estos se presentan con líneas continuas para los resultados obtenidos con la teoría de tornillos y con líneas formadas por puntos para los resultados de la simulación multicuerpo. En cuanto a los movimientos en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  obtenidos mediante la teoría de tornillos, estos son representados por los colores azul, rojo y amarillo, respectivamente. Mientras que se utilizaron los colores amarillo, azul y rojo para representar los movimientos en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la simulación multicuerpo. Además, también se presentan las figuras que muestran los errores entre los resultados. Donde las discrepancias en los ejes  $x$  se representan por líneas continuas de color azul, en el eje  $y$  por líneas de color rojo y en  $z$  a través de líneas continuas en color amarillo.

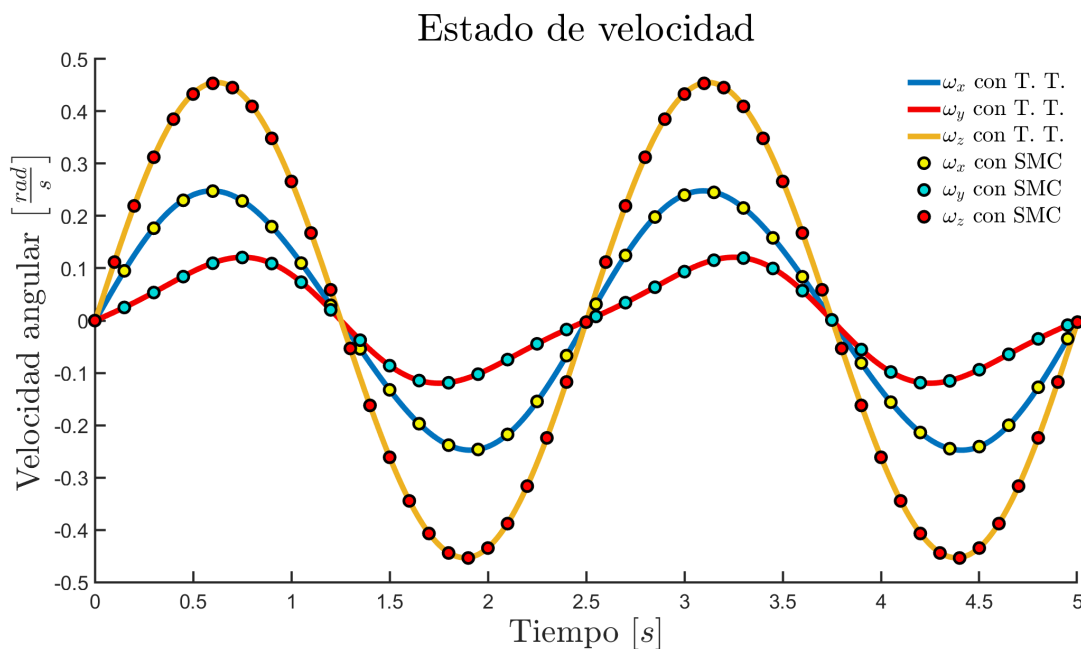


Figura 4.17: Comparación de velocidad angular.

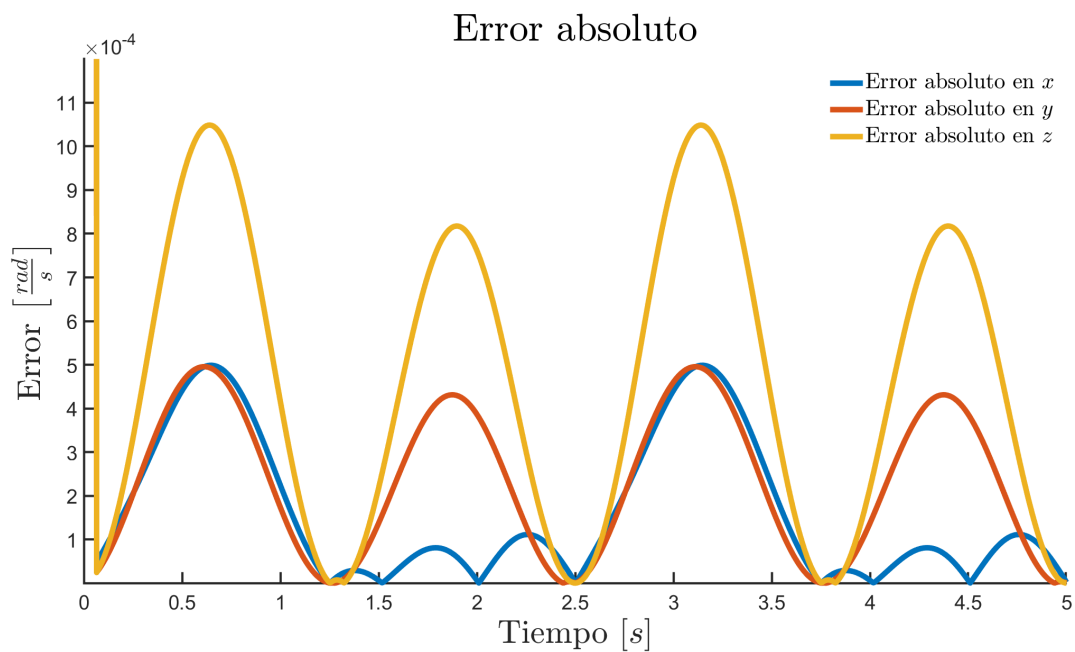


Figura 4.18: Discrepancias en la comparación de velocidad angular.

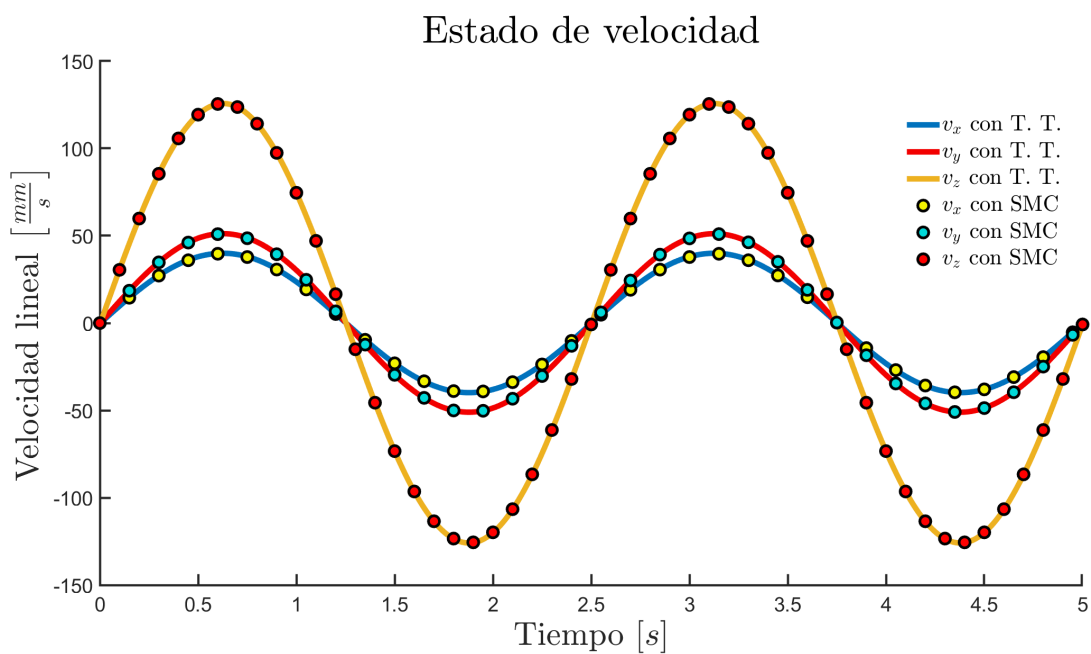


Figura 4.19: Comparación de velocidad lineal.

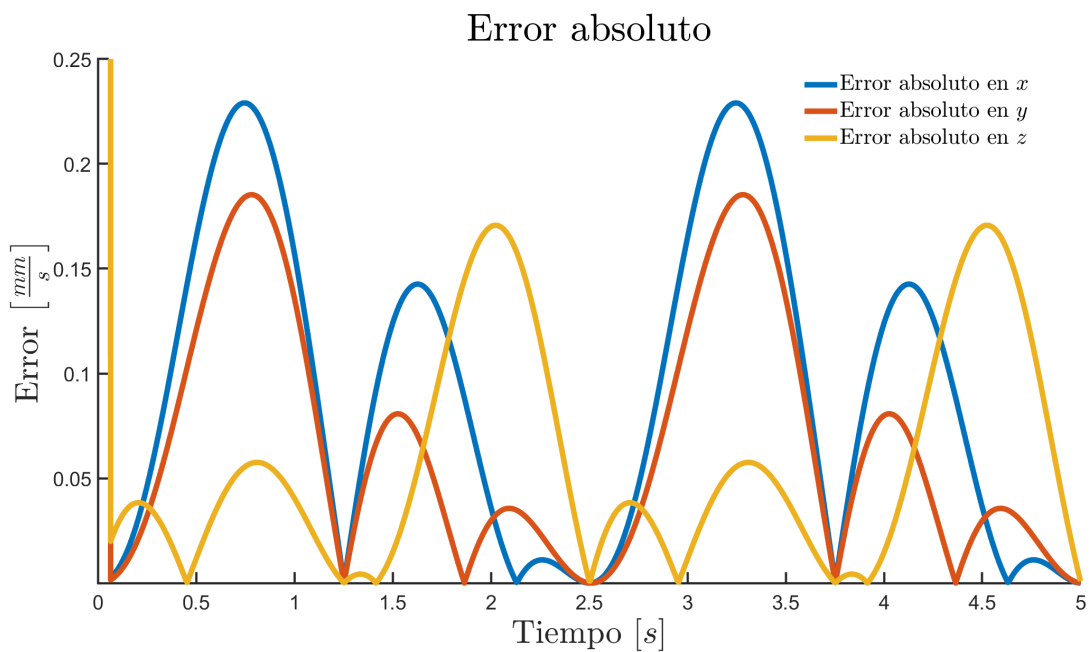


Figura 4.20: Discrepancias en la comparación de velocidad lineal.

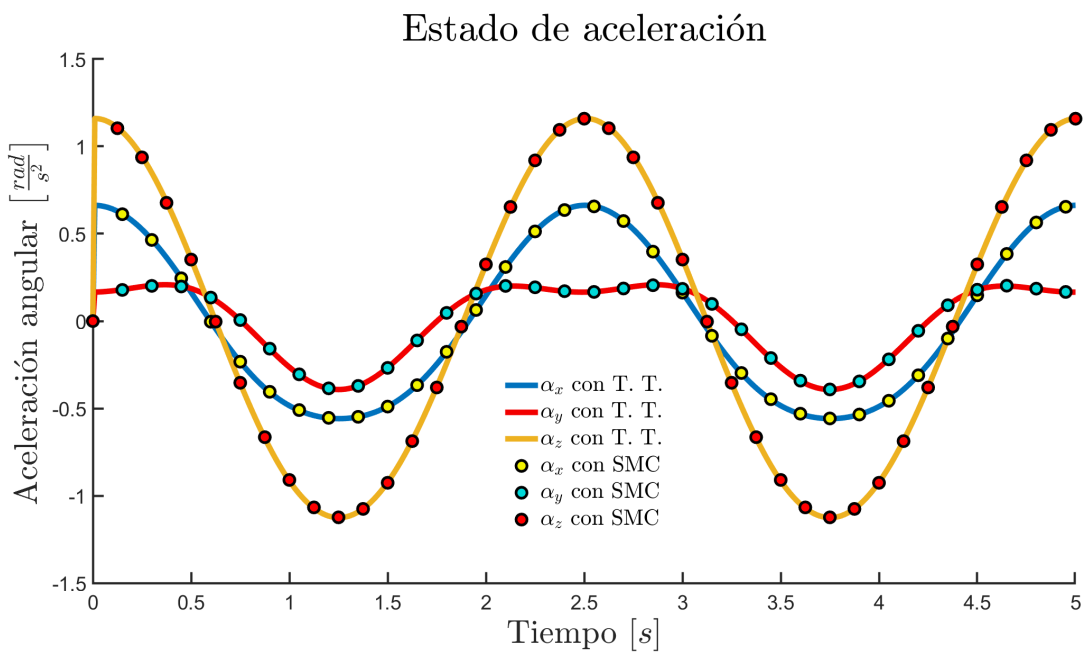


Figura 4.21: Comparación de aceleración angular.



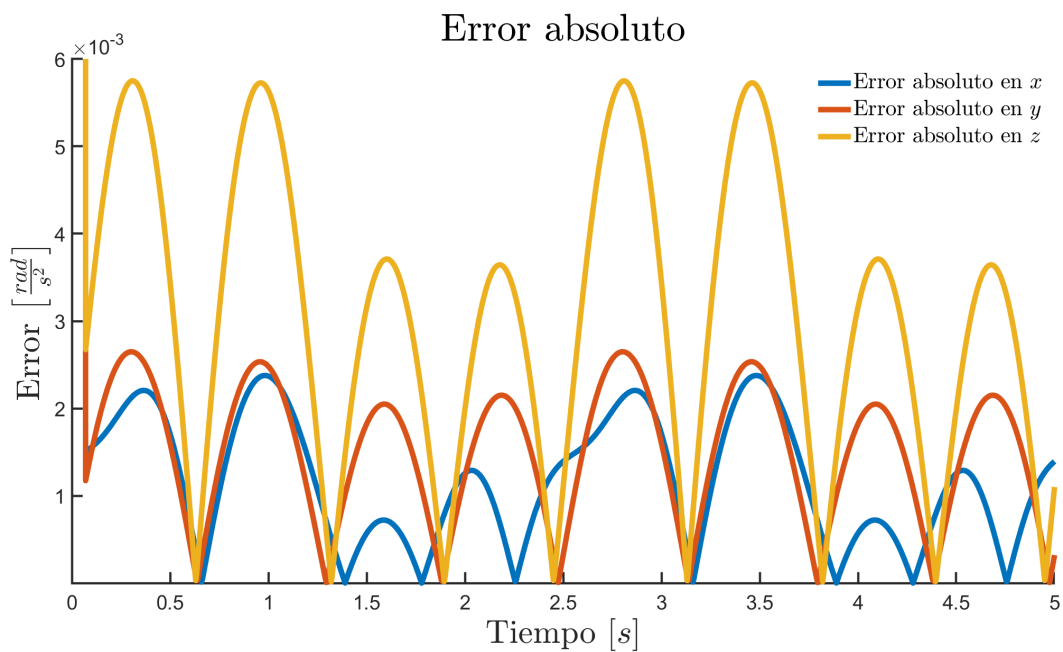


Figura 4.22: Discrepancias en la comparación de aceleración angular.

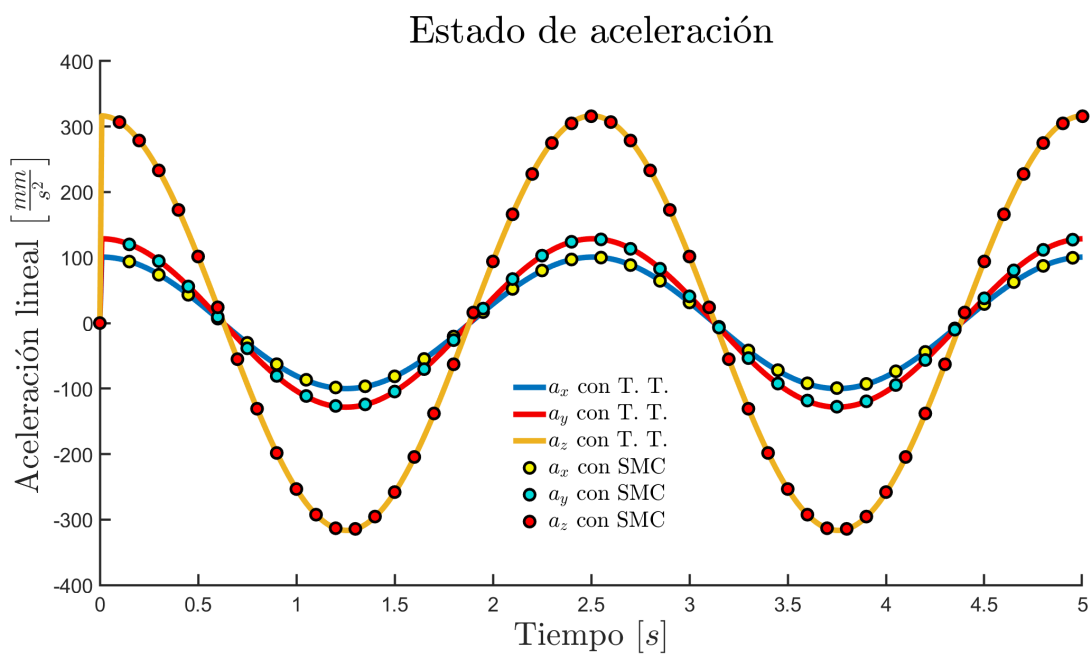


Figura 4.23: Comparación de aceleración lineal.

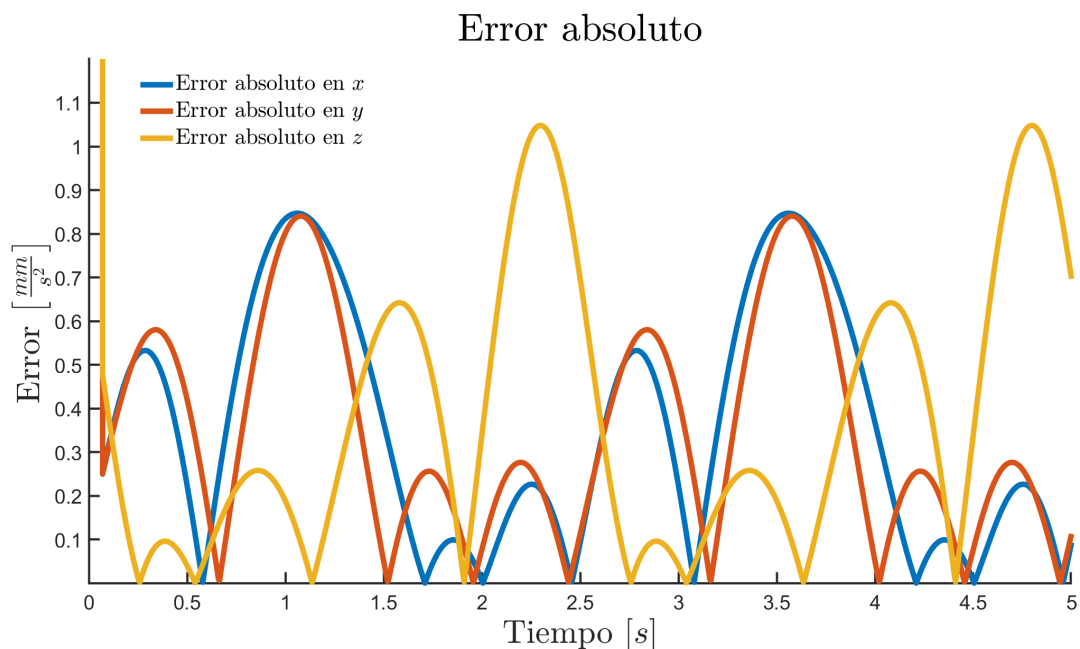


Figura 4.24: Discrepancias en la comparación de aceleración lineal.

Obsérvese cómo los resultados obtenidos tanto con la teoría de tornillos como con la simulación multicuerpo presentan las mismas formas bien definidas, es decir, las magnitudes de los movimientos son similares. Además, la magnitud de los errores absolutos mostrados, aún se mantiene en rangos bajos, motivo por el cual el análisis desarrollado mediante la teoría de tornillos queda validado a través de la simulación multicuerpo.

Es importante notar que las trayectorias ingresadas en el análisis desarrollado con la teoría de tornillos influyen en la precisión que ésta puede tener respecto a los resultados mostrados por la simulación multicuerpo, puesto que los errores presentes en las Figuras 4.20 y 4.24 alcanzan el orden de los milímetros por segundo ( $\frac{mm}{s}$ ) y los milímetros por segundo al cuadrado ( $\frac{mm}{s^2}$ ), errores más grandes que los presentados con una trayectoria de tercer orden, pero que aún son irrelevantes por su magnitud respecto a la del movimiento del manipulador y se considera que ambos resultados tienden a ser iguales.



# Capítulo 5

## Validación experimental

### 5.1. Elección de sensor

La validación de los análisis cinemáticos obtenidos mediante la teoría de tornillos se llevará al área experimental a través de un sensor cuyas características principales deben ser un rango y resolución adecuados, ya que el manipulador produce movimientos con magnitudes pequeñas que podrían confundirse con las vibraciones ocasionadas por el propio movimiento del manipulador paralelo o alguna fuerza externa. Además, en la etapa de filtrado es necesario eliminar de la lectura las infiltraciones de la gravedad, que es como se refieren en [37] a las alteraciones en las lecturas debidas a la fuerza de gravedad. De modo que el sensor que se seleccione tiene que obtener su orientación de la forma más precisa posible para eliminar dichas infiltraciones de gravedad.

Tabla 5.1: Especificaciones técnicas de diferentes sensores.

	Resolución	Rango del acelerómetro	Grados de libertad	Voltaje de operación
ADXL345	$4 \frac{mg}{LSB}$	$\pm 2g, 4 g, 8g$ y $16g$	3	2 V-3.6 V
MPU-6050	$0.061 \frac{mg}{LSB}$	$\pm 2g, 4 g, 8g$ y $16g$	6	2.3 V-3.4 V
LSM9DS1	$0.061 \frac{mg}{LSB}$	$\pm 2g, 4 g, 8g$ y $16g$	9	1.9 V-3.6 V

Las características de algunos sensores se presentan en la Tabla 5.1, donde el sensor *ADXL345* es el único que posee una resolución adecuada para el tipo de movimiento que tiene el manipulador. Sin embargo, este sensor no es capaz de medir velocidad angular, movimiento necesario en este proyecto. Motivo por el que la elección del sensor recae en los dos dispositivos restantes. Ambos sensores, tanto el LSM9DS1 como el MPU6050, tienen el mismo rango de medición en el acelerómetro, diferentes resoluciones de acuerdo al rango del acelerómetro que se configure, un giroscopio que es utilizado para mejorar las lecturas de orientación y cuentan con voltajes de operación similares. No obstante, la unidad de medición inercial LSM9DS1 posee tecnología reciente y tres grados de libertad más, razón por la cual será el sensor utilizado para

la validación experimental de los análisis cinemáticos obtenidos con la teoría de tornillos. A continuación, en la Tabla 5.2 se muestran características más específicas de dicho unidad de medición inercial.

Tabla 5.2: Especificaciones técnicas de la LSM9DS1.

LSM9DS1		
Parámetro	Rango	Resolución
Aceleración lineal	$\pm 2 g$	$0.061 \frac{mg}{LSB}$
	$\pm 4 g$	$0.122 \frac{mg}{LSB}$
	$\pm 8 g$	$0.244 \frac{mg}{LSB}$
	$\pm 16 g$	$0.732 \frac{mg}{LSB}$
Velocidad angular	$\pm 245 dps$	$8.75 \frac{mdps}{LSB}$
	$\pm 500 dps$	$17.50 \frac{mdps}{LSB}$
	$\pm 2000 dps$	$70 \frac{mdps}{LSB}$

## 5.2. Procesamiento de señal.

Debido a la alta resolución y a que el rango mínimo de la LSM9DS1 es amplio para captar las magnitudes del manipulador, la señal que se obtendrá a través de la unidad de medición inercial será con ruido. Por ello, es necesario desarrollar el procesamiento de la señal. De esta manera, la señal describirá de mejor forma el movimiento bajo el que se sometió al manipulador.

### 5.2.1. Calibración de la unidad de medición inercial.

Antes de filtrar los valores que se leerán, la unidad de medición inercial debe calibrarse para obtener valores con una mejor precisión y buena reproducibilidad. En [37] y [38] se mencionan varios métodos para calibrar un sensor, algunos requieren del sensor en reposo y otros más utilizan instrumentación especializada para la calibración de estos sensores, siendo este último el más recomendado. Pese a ello, la ausencia de este tipo de equipos de calibración impide el uso de este método, y aunque la LSM9DS1 no está en reposo a la hora del análisis, la calibración provista por la biblioteca del propio sensor será utilizada antes de que comience el movimiento.

A continuación, en la Figura 5.1 se muestran dos gráficas que representan las lecturas del eje  $z$  obtenidas de la unidad de medición inercial antes y después de calibrarse mediante la biblioteca del sensor. Hay que tener en cuenta que las señales mostradas en la figura se obtuvieron con el sensor en reposo, pero con la misma inclinación no nula. Por ello, la única fuerza captada por el sensor en reposo, la gravedad, se ve afectada. En la Figura 5.1, la gráfica

color amarillo es la señal obtenida de forma directa, es decir, sin calibrar el sensor. Por el contrario, la señal calibrada se encuentra de color rojo. Nótese que la magnitud de esta señal se encuentra cerca de los  $9800 \frac{mm}{s^2}$ , valor cercano al del campo gravitacional terrestre. Entonces, un sensor calibrado permite tomar como estado de origen el estado donde se encuentra dicho sensor, eliminando los *offsets* que alguna inclinación pueda añadir a las lecturas. Sin embargo, esto no garantiza la reproducibilidad de los resultados y hay que considerarlo a la hora de interpretarlos.

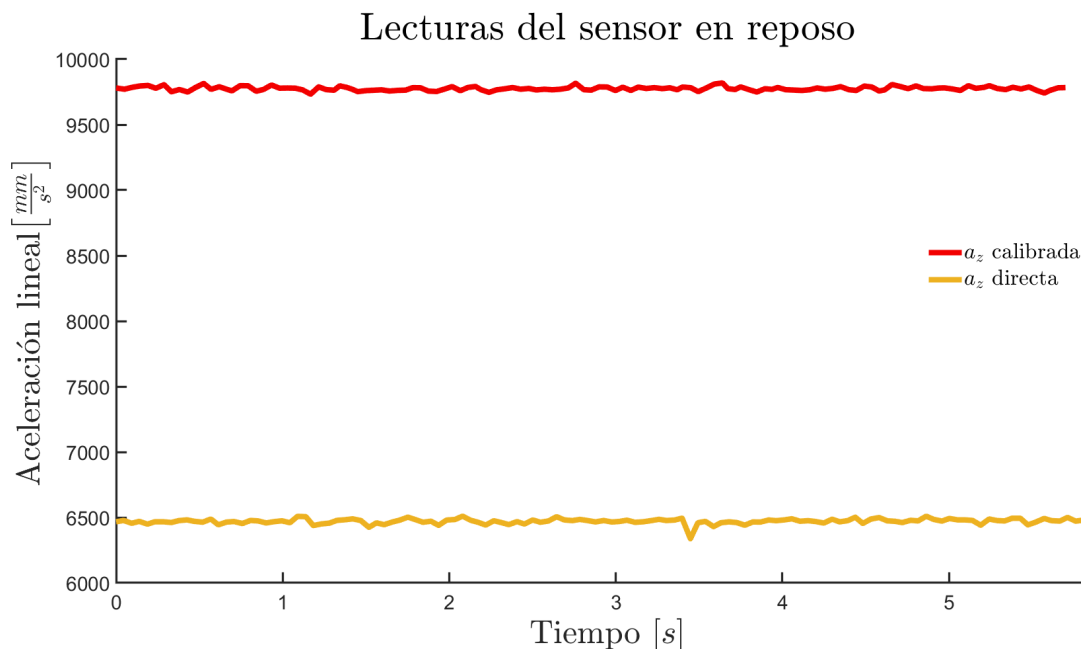


Figura 5.1: Comparación entre una señal calibrada y una sin calibrar.

### 5.2.2. Filtrado de señal.

Una vez calibrada la unidad de medición inercial, los valores proporcionados por esta unidad deben filtrarse para eliminar el máximo ruido posible. La media móvil ponderada exponencialmente es uno de los filtros más sencillos que se pueden implementar para este fin, pues suaviza una señal con ruido mientras permanece susceptible a cambios.

La media móvil ponderada exponencialmente es una variante de la media móvil, pero sin el abuso de memoria y con mejor velocidad de cálculo en el microcontrolador por su comportamiento correspondiente al filtro tipo IIR [39]. Específicamente, este filtro realiza la predicción de un valor a través de la adición entre la predicción anterior y un porcentaje de error que existe entre el valor medido y la predicción anterior. En [40] este filtro se modela como en la ecuación (5.1).

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \lambda e_t \quad (5.1)$$

donde  $\hat{y}_{t+1}$  es el nuevo valor previsto,  $\lambda$  la constante de ponderación y  $e_t$  el error en el tiempo que existe entre el valor medido ( $y_t$ ) y el valor previsto con anterioridad ( $\hat{y}_t$ ). Si a  $e_t$  se le

sustituye por la diferencia que representa, entonces el filtro puede reescribirse como sigue:

$$\hat{y}_{t+1} = \lambda y_t + (1 - \lambda)\hat{y}_t \quad (5.2)$$

Con la representación de la ecuación (5.2) se infiere que este filtro da mayor importancia o ponderación a los datos actuales que a los datos anteriores, lo que le permitirá adaptarse fácilmente a los cambios de movimiento del manipulador durante la adquisición de los datos. Esta ponderación es controlada por la constante  $\lambda$ , si la constante tiende a cero, los valores medidos tendrán una ponderación pequeña, mientras que los valores previstos anteriores tendrán una ponderación mayor. En contraste, si  $\lambda$  tiende a uno, los valores medidos tendrán mayor ponderación. Es trabajo del analista encontrar un valor para  $\lambda$  adecuado a los requerimientos del proyecto. En este caso, es recomendable usar valores pequeños para  $\lambda$  que permitan mayor influencia de los datos antiguos, amortiguando así el ruido provocado por las vibraciones.

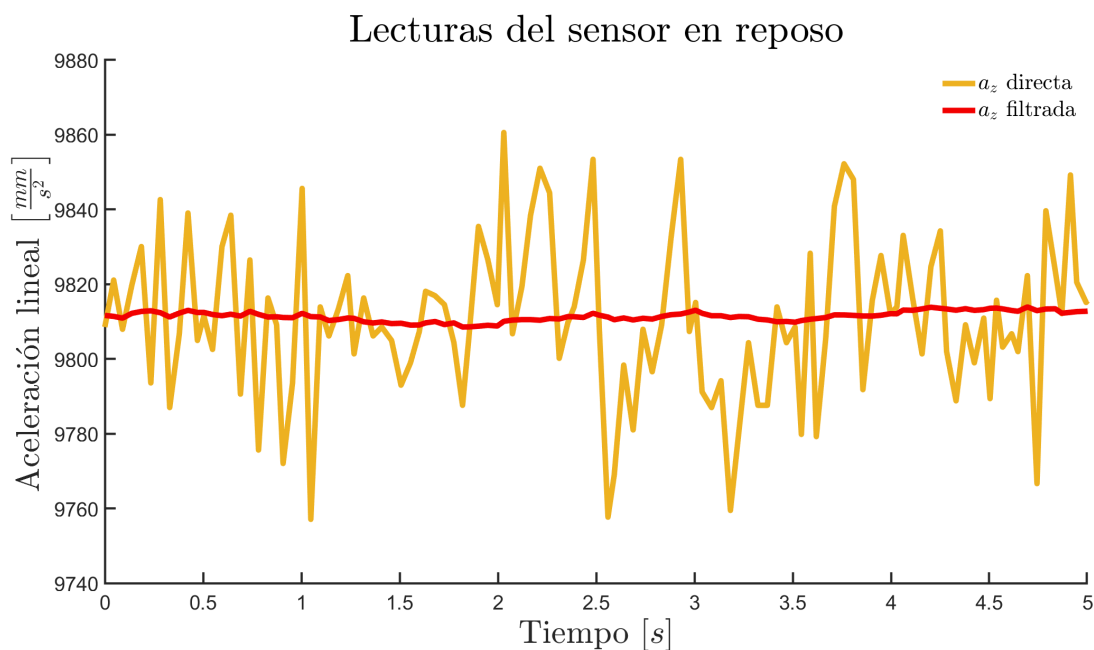


Figura 5.2: Aplicación del filtro a una señal del sensor en reposo.

En la Figura 5.2 se muestra la comparación entre la señal que se obtuvo de forma directa del sensor en reposo, gráfica de color amarillo, y la señal ya filtrada, gráfica de color rojo. En ella, se observa cómo la media ponderada móvil es capaz de mitigar la mayor parte del ruido de la señal original y mantenerla en un valor promedio, en este caso, al tratarse de la señal en el eje  $z$ , el valor promedio se aproxima a los  $9810 \frac{mm}{s^2}$ , lo que demuestra que el filtro funciona.

Por otra parte, la media ponderada móvil no se comporta de forma tan adecuada cuando la señal es obtenida con el sensor en movimiento, en la Figura 5.3 se muestra el comportamiento del filtro en dicha situación. Nótese cómo el filtro es capaz de mitigar los valores atípicos de la señal original y aun así permanece susceptible a los cambios fluidos debidos a un movimiento, como es el caso de la onda sinusoidal que puede apreciarse. No obstante, la

magnitud y la fase de esta onda sinusoidal se encuentran desplazadas, siendo el desfase el más evidente. Pese a ello, las diferencias son aceptables considerando las magnitudes de los movimientos a medir y que el desfase no va más allá de un segundo.

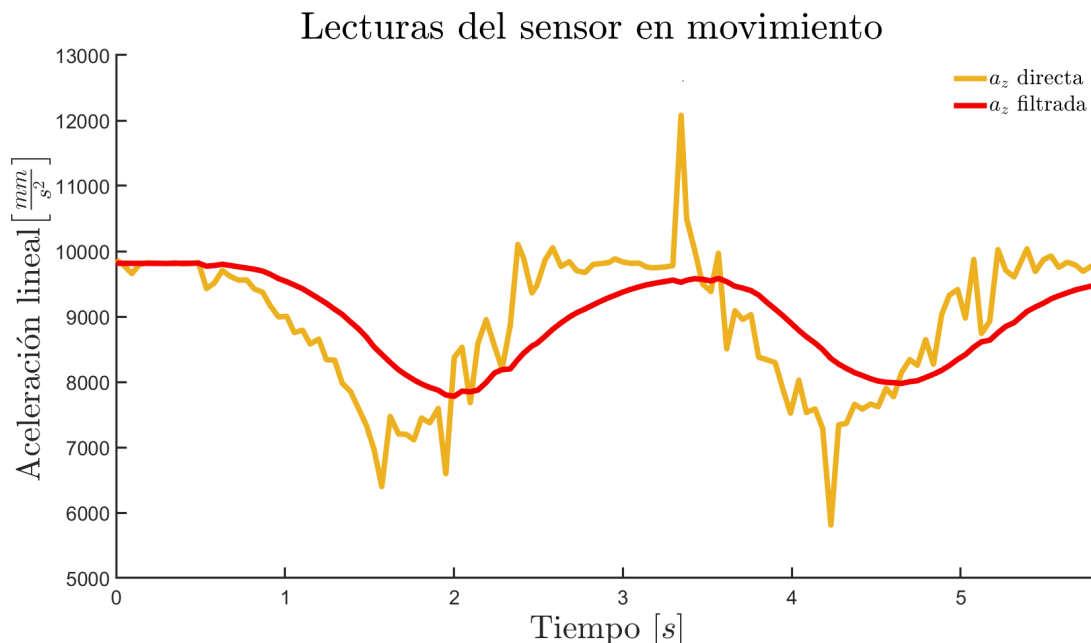


Figura 5.3: Aplicación del filtro a una señal del sensor en movimiento.

### 5.2.3. Eliminación de infiltraciones de gravedad.

Al aplicar el filtro de media ponderada móvil, la señal que se obtendrá de la unidad de medición inercial será más estable y por consiguiente es posible realizar la rectificación de la señal debido a las infiltraciones de la gravedad. Estas infiltraciones se deben a que la unidad de medición inercial es capaz de medir la aceleración gravitacional y esta altera las mediciones ocasionadas por el movimiento del manipulador, motivo principal por el que las infiltraciones deben mitigarse de la señal.

Cuando la unidad de medición inercial se encuentra paralela al piso, es evidente que la infiltración de la gravedad se encuentra en el eje  $Z$ , cuya magnitud es equivalente al valor del campo gravitatorio terrestre. Sin embargo, cuando la unidad de medición inercial está inclinada, la infiltración de la gravedad está distribuida a lo largo de los tres ejes y su magnitud en cada uno de ellos es desconocida. Para encontrar dicha magnitud, es necesario conocer los ángulos de inclinación que presenta la unidad de medición inercial, con ello y a través de un poco de trigonometría la magnitud de la infiltración en cada eje puede ser conocida. La Figura 5.4 muestra la idea principal para eliminar dichas infiltraciones, en la figura se observa cómo la gravedad, representada por el vector de color negro, contribuye a las mediciones de la unidad de medición inercial en cada uno de sus ejes con las componentes  $G_z$  y  $G_x$ , vectores de color rojo y azul, respectivamente. Por lo tanto, si se eliminan las componentes de la gravedad en



cada eje, en teoría se obtienen las lecturas reales debidas únicamente al movimiento de la plataforma móvil.

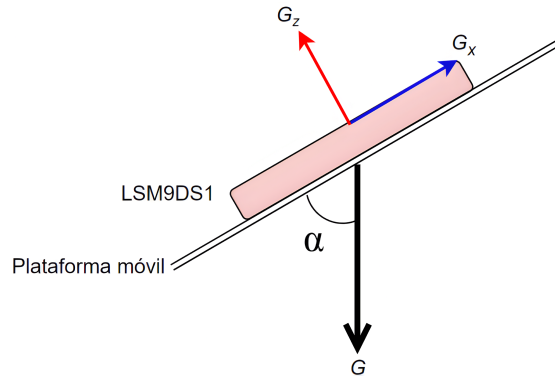


Figura 5.4: Infiltración de la gravedad.

Para encontrar las componentes de la gravedad podría utilizarse la orientación de la plataforma móvil, con la cual el vector de gravedad se proyectaría en cada eje y obtener así la magnitud de cada componente. De tal forma que las infiltraciones de gravedad se ven relacionadas con la orientación de la unidad de medición inercial. De hecho, lo que en [37] se nombra como infiltraciones de gravedad, en [41] se define como un error de inclinación, debido a que los sensores como el acelerómetro no son capaces de distinguir entre movimientos lineales y de inclinación. Las lecturas de un acelerómetro que se vea afectado por algún movimiento de inclinación reflejarán una aceleración lineal diferente a la aceleración lineal real que sufrió el sensor. De modo que la aceleración medida por un acelerómetro satisface la relación:

$$s(t) = \ddot{y}_a(t) + \varepsilon(t) \quad (5.3)$$

donde  $s(t)$  es la aceleración lineal medida por el sensor,  $\ddot{y}_a(t)$  es la aceleración lineal real y  $\varepsilon(t)$  es el error de inclinación. En [41] al error de inclinación se le define como en la ecuación (5.4).

$$\varepsilon(t) = R\mathbf{g} \quad (5.4)$$

$R$  es la matriz de rotación que rige la inclinación presente en el sensor y  $\mathbf{g}$  es el vector de campo gravitacional terrestre representado por la ecuación (5.5), donde  $g$  es la magnitud del campo gravitacional terrestre.

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Obsérvese que al eliminar  $\varepsilon$  de la ecuación (5.3) se puede obtener la aceleración lineal real del acelerómetro. Por lo que, para obtener la aceleración real que presenta el manipulador paralelo bajo estudio o por lo menos una aceleración más cercana a la real, hay que considerar la rotación total que sufre la unidad de medición inercial.

En [42] se muestra que a través de un acelerómetro es posible obtener los ángulos de inclinación que el dispositivo presente, únicamente hay que aplicar la ecuación (5.4) con una matriz de rotación  $R$  que permita obtener un vector columna donde se relacionen solamente dos ángulos de inclinación con la magnitud del campo gravitacional terrestre. Considerando lo anterior, la matriz de rotación a utilizar en este proyecto se realizará bajo la convención *roll*, *pitch* y *yaw* porque no solo facilitará la obtención de los ángulos de inclinación, sino también facilitará la interpretación de los resultados arrojados por los análisis de teoría de tornillos. Los ángulos *roll*, *pitch* y *yaw* representan una rotación en el eje  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Esta convención de ángulos realiza las rotaciones alrededor de los ejes iniciales, por lo tanto, la matriz de rotación total debe representarse por una premultiplicación de las matrices de rotación de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , lo que da como resultado:

$$R_{zyx} = \begin{bmatrix} C(\Psi)C(\Theta) & C(\Psi)S(\Phi)S(\Theta) - C(\Phi)S(\Psi) & S(\Psi)S(\Phi) + C(\Psi)C(\Phi)S(\Theta) \\ C(\Theta)S(\Psi) & C(\Psi)C(\Phi) + S(\Psi)S(\Phi)S(\Theta) & C(\Phi)S(\Psi)S(\Theta) - C(\Psi)S(\Phi) \\ -S(\Theta) & C(\Theta)S(\Phi) & C(\Phi)C(\Theta) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

donde  $C$  representa la función trigonométrica coseno,  $S$  la función seno,  $\Phi$  el giro alrededor del eje  $x$ ,  $\Theta$  el giro alrededor del eje  $y$  y  $\Psi$  el giro alrededor del eje  $z$ . Debido a que se necesitan obtener las coordenadas del vector de campo gravitacional terrestre respecto al marco de referencia no inercial, es decir, el marco de referencia que tiene la propia unidad de medición inercial, entonces hay que obtener la matriz inversa de  $R_{zyx}$ , multiplicarlo por el vector de campo gravitacional terrestre visto desde un marco inercial, como se representa en la ecuación (5.5), e igualarlo con las mediciones de la unidad de medición inercial. Realizando lo mencionado anteriormente, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_x &= -\text{Sin}(\Theta) \\ M_y &= \text{Cos}(\Theta)\text{Sin}(\Phi) \\ M_z &= \text{Cos}(\Theta)\text{Cos}(\Phi) \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $M$  es la variable asignada para referirse a la medición obtenida por la unidad de medición inercial en el eje  $x$ ,  $y$  o  $z$ . Al resolver el sistema de ecuaciones en (5.7) los ángulos de inclinación resultan:

$$\Phi = \text{Arctan} \left( \frac{M_y}{M_z} \right) \quad (5.8)$$

$$\Theta = \text{Arctan} \left( \frac{-M_x}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}} \right) \quad (5.9)$$

Cabe recalcar que dependiendo de la matriz de rotación que se utilice, la magnitud de los ángulos de inclinación será distinta. Por lo que, las ecuaciones (5.8) y (5.9) solo son válidas para la matriz de rotación total realizada bajo la convención *roll*, *pitch* y *yaw*.

Obteniendo los ángulos de inclinación, la ecuación (5.7) puede aplicarse para obtener las infiltraciones de gravedad en cada eje y restarla a las aceleraciones leídas para obtener la aceleración lineal real. Sin embargo, se entraría en un bucle donde se obtienen los ángulos de

inclinación a partir de las aceleraciones medidas con el error de inclinación para corregir las mismas aceleraciones medidas del error de inclinación. De hecho, en [41] se recomienda el uso de un inclinómetro para obtener los ángulos de inclinación y después corregir las lecturas de las aceleraciones medidas por el acelerómetro. Por ello, y gracias a la forma en la que interactúa el usuario para mover la plataforma *Gough–Stewart*, es que pueden usarse los ángulos de inclinación utilizados para el movimiento del manipulador, que son bien conocidos. Con los ángulos definidos y despejando la ecuación (5.3) como:

$$\ddot{y}_a = s(t) - R'g \quad (5.10)$$

donde  $R'g$  es el error de inclinación  $\epsilon(t)$ , se puede obtener una aceleración lineal más cercana a la aceleración lineal del manipulador.

Obsérvese que para quitar las infiltraciones de gravedad de las lecturas dadas por la unidad de medición inercial hay que pasar las coordenadas del vector del campo gravitacional terrestre al marco no inercial del dispositivo y para que sean comparadas hay que pasarlas al marco de referencia inercial volviendo a realizar un producto matricial. Por ello, es conveniente primero pasar las coordenadas de las aceleraciones obtenidas con la unidad de medición inercial a un marco de referencia inercial, multiplicando las aceleraciones por la matriz en (5.6), y posterior a ello eliminar la contribución del vector del campo gravitacional terrestre, es decir, la ecuación (5.10) se modifica como:

$$y_{af}'' = R s(t) - g \quad (5.11)$$

donde  $y_{af}''$  son las aceleraciones del sensor modificadas al marco inercial. De esta manera se obtiene el mismo resultado, pero con una cantidad menor de operaciones.

Por último, hay que tener en cuenta que el cambio de las coordenadas de las aceleraciones obtenidas por la unidad de medición inercial a un marco inercial es un proceso que también debe aplicarse a las coordenadas de las velocidades angulares. En contraste, la eliminación de los errores de inclinación, solo es aplicable a las aceleraciones lineales, ya que el vector de campo gravitacional no influye en las lecturas del giroscopio.

En la Figura 5.5 se muestra la velocidad angular de la plataforma móvil obtenida de forma experimental, las líneas continuas representan las velocidades angulares obtenidas directamente del sensor calibrado, mientras que las líneas compuestas por puntos representan las velocidades angulares ya procesadas. Obsérvese cómo el movimiento en el eje  $z$  es donde se muestra de mejor forma el efecto del filtro en la señal. Por otro lado, la Figura 5.6 representa la aceleración lineal obtenida directamente del sensor, con ella es fácil notar la influencia que llega a tener la gravedad en las mediciones y lo importante que es eliminar dichas infiltraciones, pues las magnitudes de las aceleraciones superan por mucho a las aceleraciones alcanzadas por el manipulador. En contraste, si a las aceleraciones lineales obtenidas de forma directa se les aplica el procesamiento descrito con anterioridad, se obtienen resultados más consistentes. Las aceleraciones lineales procesadas se muestran en la Figura 5.7, donde se observa que las magnitudes, las fases y los valores atípicos presentes en la Figura 5.6 cambian por completo.

Como se nota, los cambios entre las velocidades angulares obtenidas de forma directa del sensor y las procesadas no presentan cambios muy bruscos, mientras que los cambios entre las aceleraciones lineales obtenidas de forma directa y procesada, son muy notorios. Esto último debido a las infiltraciones de gravedad en la señal.

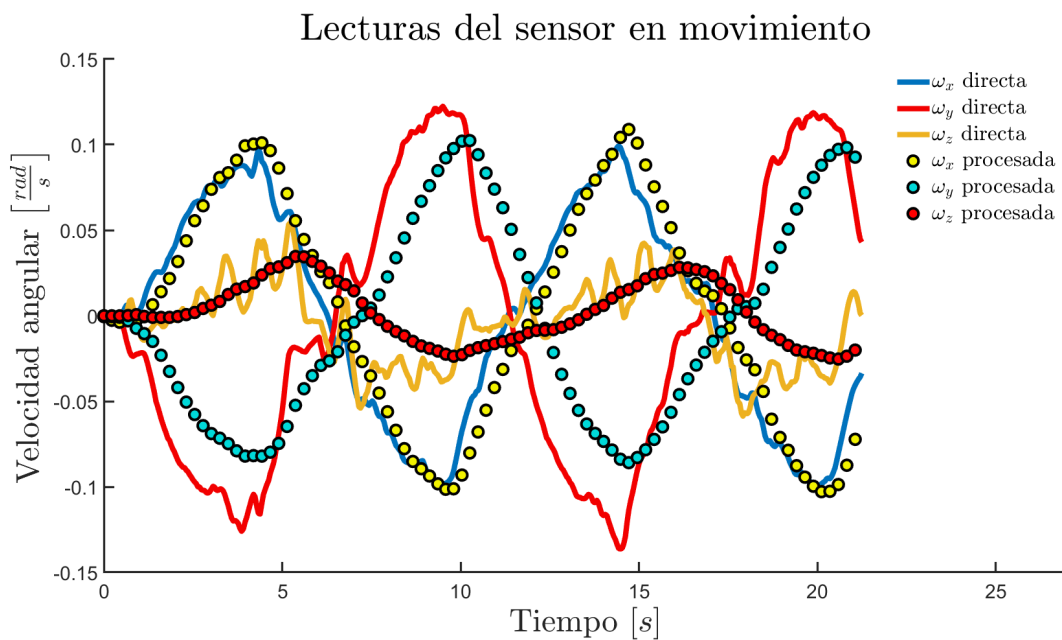


Figura 5.5: Procesado de las velocidades angulares obtenidas con el sensor.

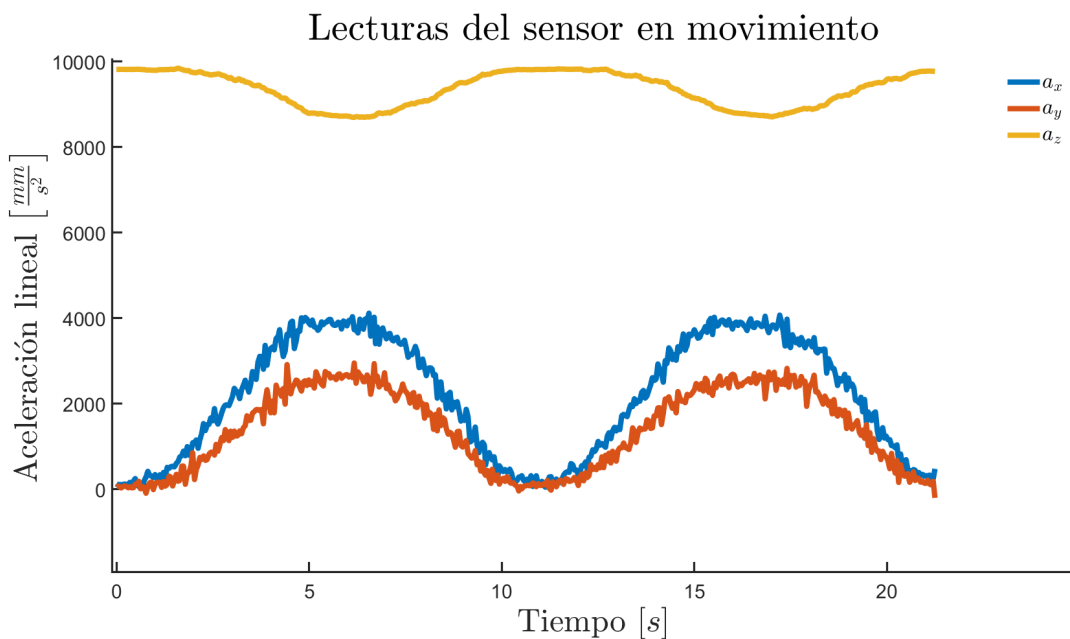


Figura 5.6: Aceleraciones lineales obtenidas con el sensor.

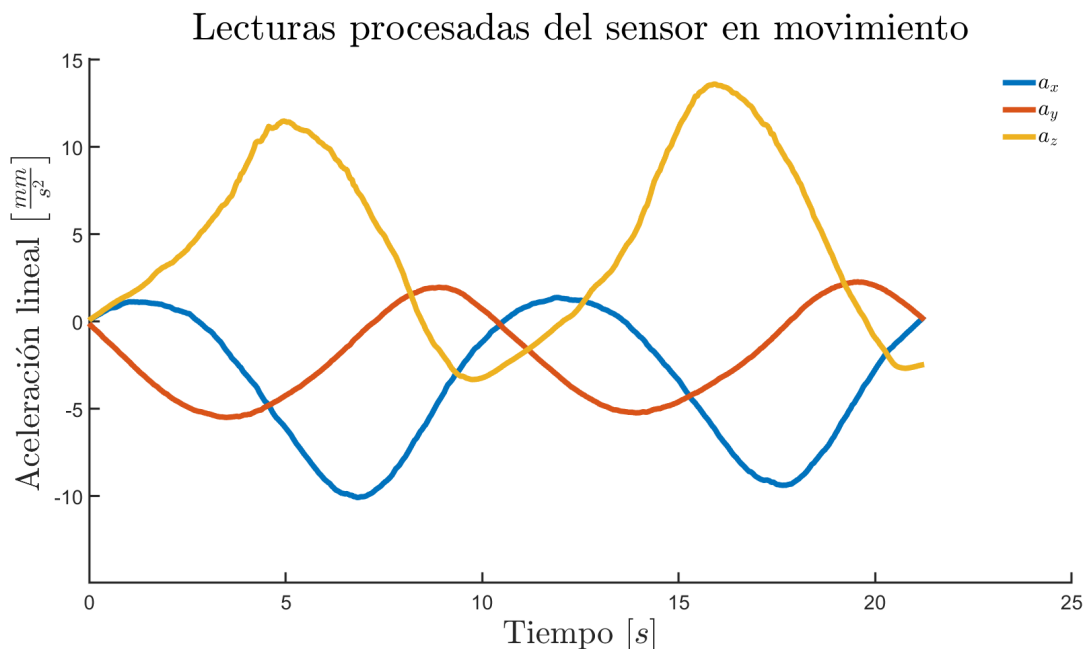


Figura 5.7: Procesado de las aceleraciones lineales obtenidas con el sensor.

Nótese que a pesar de que las gráficas en la Figura 5.7 se encuentran con magnitudes consistentes, estas aún presentan variaciones y deformaciones, principalmente en el movimiento sobre el eje  $z$ . Debido a esto y con el fin de obtener una buena comparación, las señales ya procesadas se ajustarán a una curva restablecida con ayuda del comando *fit* de MATLAB.

### 5.3. Comunicación entre MATLAB y Arduino

Con el objetivo de comparar los datos experimentales y los arrojados por el análisis cinemático mediante la teoría de tornillos, debe establecerse la comunicación entre MATLAB y ARDUINO. Dicha comunicación se desarrolló a través de un puerto serial, se estableció el número de puerto, la velocidad de transmisión y finalmente se leyeron y enviaron los datos de ARDUINO a MATLAB mediante los comandos *Serial.read()* y *Serial.print()*, respectivamente, mientras que para el caso de la lectura y escritura de los datos de MATLAB a ARDUINO se desarrollaron con las funciones *readline()* y *writeline()*.

Como se nota, la comunicación establecida es la comunicación clásica que existe en ARDUINO. El código y la explicación de la comunicación realizada en este proyecto se encuentran en el Apéndice B con más detalle.

### 5.4. Interfaz

Debido a la sencillez de la comunicación establecida con ARDUINO, el usuario puede generar conflictos en la comunicación al enviar una trama de datos no válida o con algún

terminador no contemplado. Con el fin de evitar este tipo de problemas se realizó una interfaz gráfica que también permite realizar la comunicación con ADAMS VIEW. De tal forma que se establece una cosimulación entre los tres *softwares* y todos los resultados se compilan en un solo entorno para ser fácilmente comparados. Con esta interfaz, el usuario ingresa las coordenadas del estado deseado para la plataforma móvil, se calculan las trayectorias de todas las cadenas cinemáticas, se envían al microcontrolador para comenzar a mover el manipulador paralelo y se obtienen los resultados experimentales. A su vez, las trayectorias de los actuadores son enviadas al modelo tridimensional construido en ADAMS VIEW para simular el movimiento y también obtener el análisis multicuerpo.

La aplicación encargada de establecer todas las comunicaciones con las demás, fue *AppDesigner*, un entorno propio de MATLAB que permite el desarrollo de interfaces gráficas y facilita la interacción con el usuario al hacer uso de excepciones dentro del código.

### 5.4.1. Diseño

Considerando el número de actividades que conlleva la comparación de los diferentes resultados, se desarrolló una interfaz sencilla e intuitiva, como se muestra en la Figura 5.8.

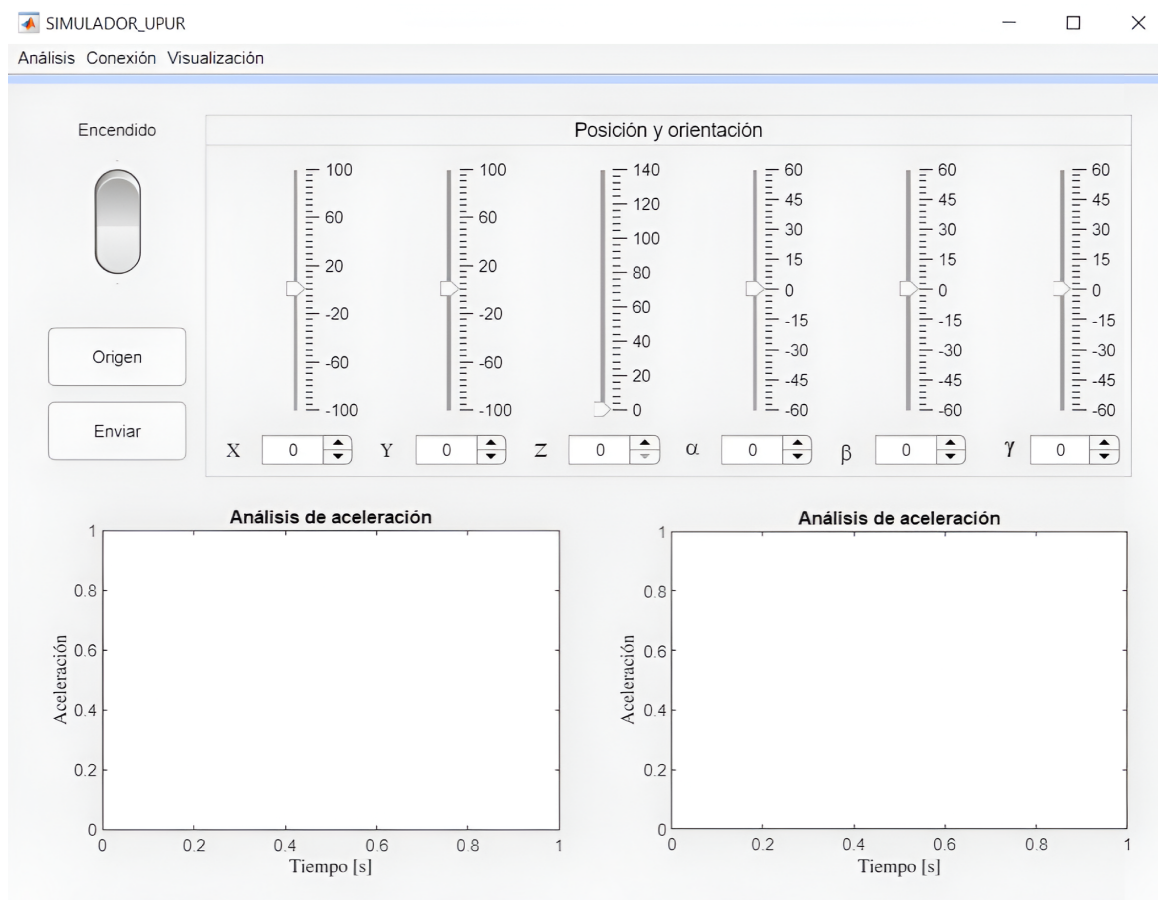


Figura 5.8: Interfaz gráfica

Obsérvese cómo en la Figura 5.8 se muestran diversos elementos que pueden ser clasificados en cuatro secciones de acuerdo a su funcionalidad. En el siguiente listado se describirán estas secciones, así como cada uno de los elementos que se encuentran en ellas.

- ✓ Barra de menú: Permite cambiar características visuales, el tipo de análisis y el puerto serial dependiendo de la pestaña seleccionada.
  - Análisis: Con esta opción se indica al programa el tipo de análisis a realizar, estos pueden ser el análisis de velocidad o el análisis de aceleración.
  - Conexión: A través de esta pestaña se establece la comunicación entre las diferentes aplicaciones en el puerto serial seleccionado.
  - Visualización: La pestaña permite al usuario mantener o no las gráficas visualizadas, mostrar una cuadrícula en las gráficas e incluso activar o desactivar la visualización de la simulación multicuerpo según sea el caso seleccionado.
- ✓ Posición y orientación: En esta sección se define el estado deseado de la plataforma móvil a través de cualquiera de los dos componentes, ya sea la barra deslizante o el campo numérico.
  - Campo numérico adjunto a dos flechas opuestas: En el campo numérico, el usuario puede ingresar cualquier valor que se encuentre dentro de un rango establecido, este rango dependerá de si la cinemática inversa es posible o no. El usuario también puede hacer uso de las flechas adjuntas al campo numérico, las cuales aumentan o disminuyen en 5 unidades el valor dentro del campo numérico.
  - Barra deslizante: Con ella se selecciona un valor cualquiera de forma rápida, que inmediatamente es mostrado en el campo numérico. Una ventaja de la barra deslizante es que muestra directamente al usuario cuál es el rango en el que el manipulador puede desplazarse en ese grado de libertad, lo que le permitirá tener una mejor noción de los estados deseados que sí pueden ser alcanzados por la plataforma.
- ✓ Botones e interruptor: Con ellos se inicia y controla la cosimulación.
  - Interruptor: Mediante él se inicia la comunicación con las otras dos aplicaciones. Cuando la comunicación se ha establecido, la barra azul superior pasa a un color más intenso y cuando la comunicación se culmina regresa al color inicial.
  - Botón origen: Al presionarlo se lleva a la plataforma móvil a la posición inicial. Cuando este botón es activado, también se retorna a los elementos de posición y orientación a su posición de origen.
  - Botón enviar: Con este botón, el usuario puede iniciar el movimiento del manipulador para llevarlo al estado deseado mientras se obtienen los valores de la unidad de medición inercial y se inicia con el análisis de velocidad y aceleración a través de la teoría de tornillos.
- ✓ Gráficas: Espacio donde se muestran los diferentes resultados recopilados dependiendo del tipo de análisis que se está realizando y del movimiento que se desea visualizar, ya

sean lineal o angular. Además, en este espacio se pueden conocer las coordenadas de un punto específico mediante un clic en el punto cuyas coordenadas son de interés.

- Lineal: Esta opción permite graficar las velocidades o aceleraciones lineales de la plataforma móvil, ya sea a través de la teoría de tornillos, la simulación tridimensional o con la unidad de medición inercial.
- Angular: Al seleccionar esta opción, se muestran las gráficas con las velocidades o aceleraciones angulares de la plataforma móvil, ya sea a través de la teoría de tornillos, la simulación tridimensional o con la unidad de medición inercial.
- Limpiar: Con esta opción se eliminan las gráficas mostradas, dejando el espacio en blanco para visualizar un nuevo análisis.

### 5.4.2. Mensajes emergentes

En cualquier interfaz, el manejo de excepciones debe considerarse para evitar los errores generados por los datos que ingresa el usuario. El entorno *AppDesigner* realiza estas excepciones a través de mensajes emergentes, ya sea de forma automática o dando la opción de crearlos para que orienten al usuario en el manejo adecuado de la interfaz.

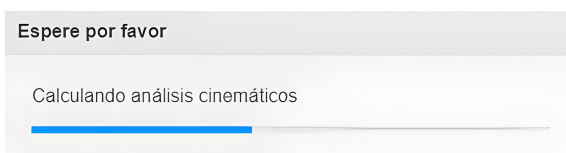
En la Figura 5.9 se muestran tres tipos de mensajes emergentes que se utilizan en la interfaz, los mensajes de error, de progreso y los de advertencia. Los mensajes de error pueden ser generados cuando se está ingresando un valor no numérico o cuando se ingresa un valor numérico por encima del permitido, estos mensajes de error se muestran en las Figuras 5.9a y 5.9b, respectivamente. En cuanto a los mensajes de progreso, estos impiden al usuario utilizar la interfaz mientras se estén haciendo cálculos o simulaciones, el mensaje de la Figura 5.9c emerge al momento de desarrollar los análisis cinemáticos a través de la teoría de tornillos, mientras que el de la Figura 5.9d aparece durante la simulación tridimensional o con la adquisición de valores de la unidad de medición inercial. Por último, la Figura 5.9e muestra los mensajes de advertencia que surgen cuando el estado deseado de la plataforma móvil no se encuentra dentro del espacio de trabajo del manipulador paralelo.



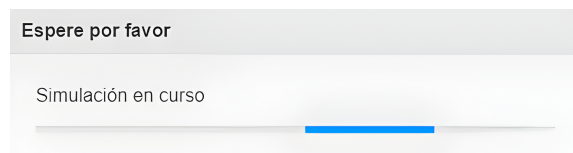
(a) Valor no numérico.



(b) Valor fuera de rango.

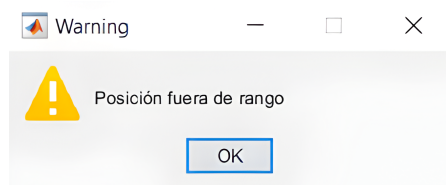


(c) Análisis cinemático.



(d) Simulación en curso.





(e) Estado deseado fuera de rango.

Figura 5.9: Mensajes emergentes dentro de la interfaz.

## 5.5. Reacondicionamiento del manipulador paralelo

Antes de mostrar los resultados, es preciso mencionar el reacondicionamiento que tuvo la plataforma *Gough-Stewart* para que esta volviese a funcionar con normalidad y la validación experimental se llevase a cabo.

En un principio, el manipulador paralelo presentaba problemas para encender, para seguir una trayectoria y por ende para llegar a un estado deseado. Por lo que se hicieron pruebas de *hardware* y *software* con el fin de encontrar las causas de dichos problemas. Durante las primeras pruebas, se encontró un pequeño corto circuito en el cableado que impedía encender el manipulador. Mientras que, durante las pruebas de *software*, se encontró que el manipulador no llegaba al estado deseado que se le indicaba debido a la comunicación que existía entre MATLAB y ARDUINO. En la Figura 5.10a se muestra el estado de la plataforma móvil después de ingresar un estado deseado, cuya única componente fue en el eje  $z$ .



(a) Estado indeseado de la plataforma. (b) Plataforma desensamblada.

Figura 5.10: Problemas en la plataforma.

Como se nota, el estado final de la plataforma móvil no corresponde con el estado deseado que

se ingresó, ya que presenta una inclinación. Cabe recalcar, que de la misma forma en la que el manipulador no llegaba a los estados deseados, este no podía regresar a la posición de origen y debía desensamblarse la plataforma móvil para llevar al manipulador a dicha posición, tal y como se observa en la Figura 5.10b. Este error se debían principalmente a que cada vez que se enviaban las trayectorias de los actuadores al ARDUINO NANO, se enviaban caracteres que no podían ser interpretados y hacían que el manipulador tomara trayectorias erráticas.

Tanto el problema en el cableado como el que existía en la comunicación, se resolvieron de forma sencilla. El primero se solucionó cambiando los cables dañados, mientras que el segundo, requirió de enviar las trayectorias al ARDUINO NANO en variables tipo *String* para asegurar una mejor transferencia de información e identificar los caracteres que causaban problemas. Encontrándose que el carácter salto de línea y el carácter de espacio en blanco eran los responsables de los inconvenientes, por lo que fueron eliminados de los datos enviados.

Con lo anterior, el manipulador fue capaz de llegar a los estados deseados sin problemas. Sin embargo, debido al paso del tiempo y a las trayectorias erráticas que seguía el manipulador, los soportes que unían las juntas universales superiores con el actuador lineal se habían fracturado. En la Figura 5.11a se muestra una de las seis fracturas en los soportes que presenta el manipulador.

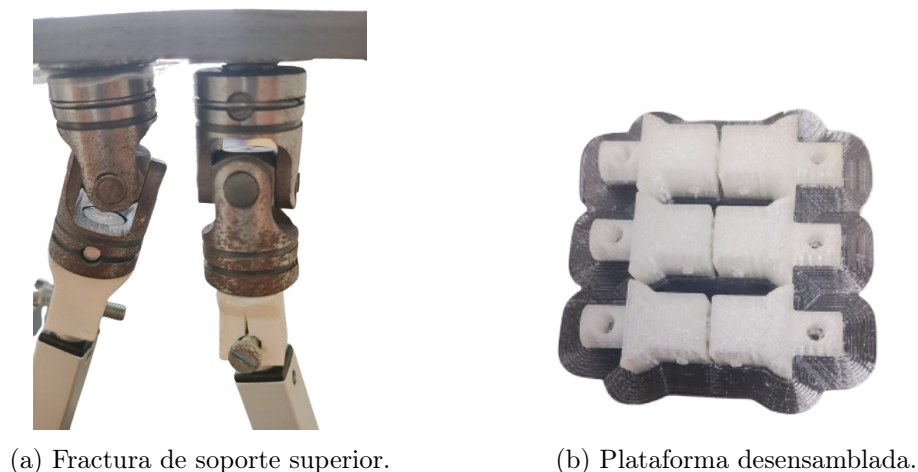


Figura 5.11: Problemas en la plataforma.

Como se observa, la fractura no permitía una unión firme entre ambas juntas y por ende tampoco una buena estabilidad de la plataforma, por lo que se cambiaron todos los soportes dañados por impresiones tridimensionales de un nuevo soporte diseñado mediante SOLID WORKS, como se muestra en la Figura 5.11b. Las impresiones tridimensionales de los soportes se realizaron con un relleno tipo estrella para que las fuerzas que actuaran sobre la pieza tuvieran una distribución uniforme sin la necesidad de utilizar demasiado material. Además, se imprimieron con una densidad, velocidad y orientación que permitieran obtener una pieza robusta capaz de soportar los movimientos del manipulador.

Una vez sustituidos todos los soportes en el manipulador, este quedó completamente reacondicionado y listo para comenzar con las pruebas experimentales.

## 5.6. Resultados

Terminada la interfaz gráfica, resta validar experimentalmente el análisis cinemático desarrollado mediante la teoría de tornillos, para lo cual se propone el siguiente estado deseado:

$$\begin{aligned}x &= 20 \text{ mm} \\y &= 15 \text{ mm} \\z &= 50 \text{ mm} \\ \alpha &= 15^\circ \\ \beta &= 10^\circ \\ \gamma &= 5^\circ\end{aligned}\tag{5.12}$$

A diferencia de la validación mediante la simulación multicuerpo, la validación experimental no puede utilizar las funciones de trayectoria desarrolladas en la Sección 4.1 porque el sensor no sería capaz de capturar la aceleración instantánea que la plataforma presenta durante el inicio del movimiento. Debido a esto, la validación experimental se llevará a cabo con funciones de trayectoria sinusoidales que permitan una aceleración más natural en el manipulador.

Las trayectorias que guiarán a la plataforma móvil al estado deseado serán de la forma mostrada en la ecuación (4.15). Con dicha ecuación ya es posible continuar con la validación experimental. Cabe señalar que tanto la velocidad lineal como la aceleración angular, que deben obtenerse mediante la unidad de medición inercial, en realidad se obtuvieron a través de la integral y derivada de la aceleración lineal y la velocidad angular, respectivamente. Dichos movimientos se obtuvieron de esa manera porque la unidad de medición inercial no es capaz de medir esos movimientos de forma directa, de modo que se buscó una manera de obtenerlos para completar la validación experimental de los análisis cinemáticos desarrollados con la teoría de tornillos.

### 5.6.1. Velocidad

En la Figura 5.12 se muestra la secuencia que se siguió para obtener los datos experimentales. Todo comienza con la interfaz gráfica, en ella se ingresa el estado deseado de la plataforma móvil, se obtienen las trayectorias de los actuadores lineales con ayuda de la ecuación (4.20) y con la función de cinemática inversa. Posteriormente, a través de la comunicación con ARDUINO, se envían las trayectorias al ARDUINO NANO, el cual mediante el micromaestro las transforma en una señal PWM y las envía a los servomotores del manipulador paralelo para comenzar a mover. Una vez el manipulador paralelo se encuentre en movimiento, la unidad de medición inercial obtiene la información cinemática de la plataforma móvil y la envía al ARDUINO NANO, que a su vez la envía a MATLAB. El proceso mostrado en

la Figura 5.12 se repite cada vez que se obtiene una nueva posición de todos los actuadores y culmina hasta alcanzar el estado deseado.

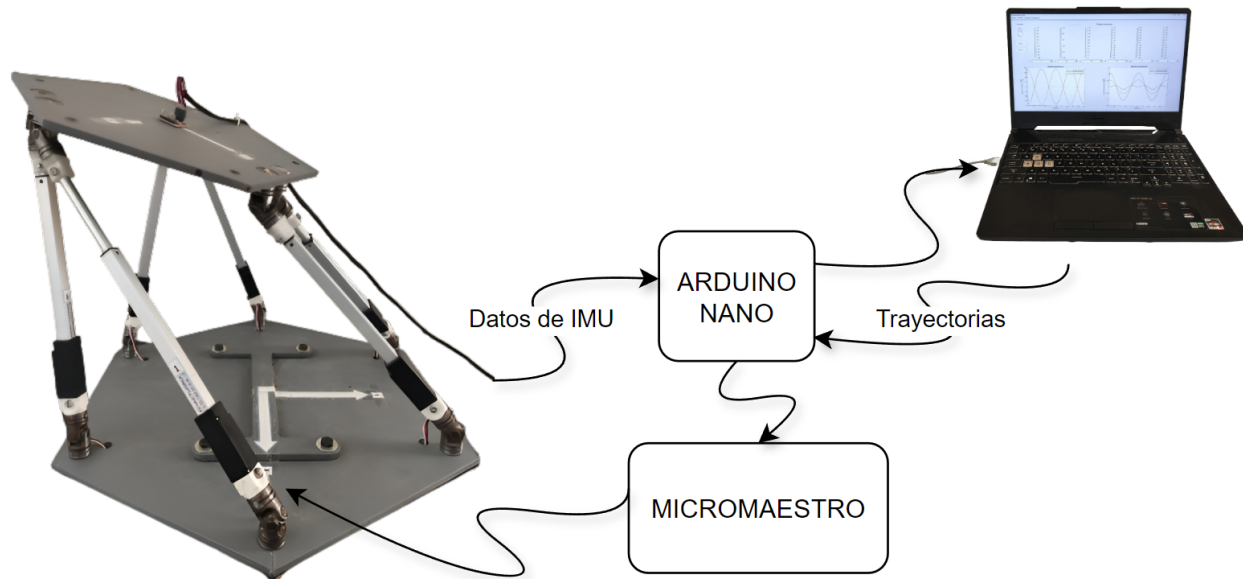


Figura 5.12: Secuencia para obtener datos experimentales.

Contemplando la secuencia de la Figura 5.12 y la ecuación (4.20) se obtuvieron los siguientes resultados. Estos se dividieron nuevamente en velocidad angular y velocidad lineal para una mejor visibilidad de las discrepancias existentes con los resultados del análisis cinemático obtenido mediante la teoría de tornillos programado en el Apéndice A.

En la Figura 5.13 se muestra la comparación que existe entre la velocidad angular obtenida mediante el análisis cinemático con la teoría de tornillos, gráficas representadas con líneas continuas, y las velocidades angulares capturadas por la unidad de medición inercial, gráficas compuestas de puntos. Al igual que en las figuras resultantes de la validación mediante el análisis de simulación multicuerpo, la línea continua color azul y la línea de puntos color amarillo representan el movimiento en el eje  $x$ , la línea continua color rojo y la línea de puntos color azul representan el movimiento en  $y$ , mientras que el movimiento en el eje  $z$  es representado por la línea continua de color amarillo y la línea de puntos color rojo.

Obsérvese cómo en el eje  $x$ ,  $y$  y  $z$  las amplitudes de las velocidades angulares obtenidas con la teoría de tornillos son de  $0,063 \frac{rad}{s}$ ,  $0,046 \frac{rad}{s}$  y  $0,017 \frac{rad}{s}$ , respectivamente. Por su parte, la amplitud de las velocidades angulares que se obtuvieron de forma experimental son las siguientes:  $0,053 \frac{rad}{s}$  para el eje  $x$ ,  $0,044 \frac{rad}{s}$  para el eje  $y$  y de  $0,013 \frac{rad}{s}$  para el eje  $z$ . Como se nota, las gráficas compuestas por puntos no logran alcanzar las amplitudes de la velocidad angular representadas mediante líneas continuas. Sin embargo, las diferencias que presentan ambos resultados son mínimas, lo que expresa una buena aproximación de la velocidad angular por parte de la unidad de medición inercial.

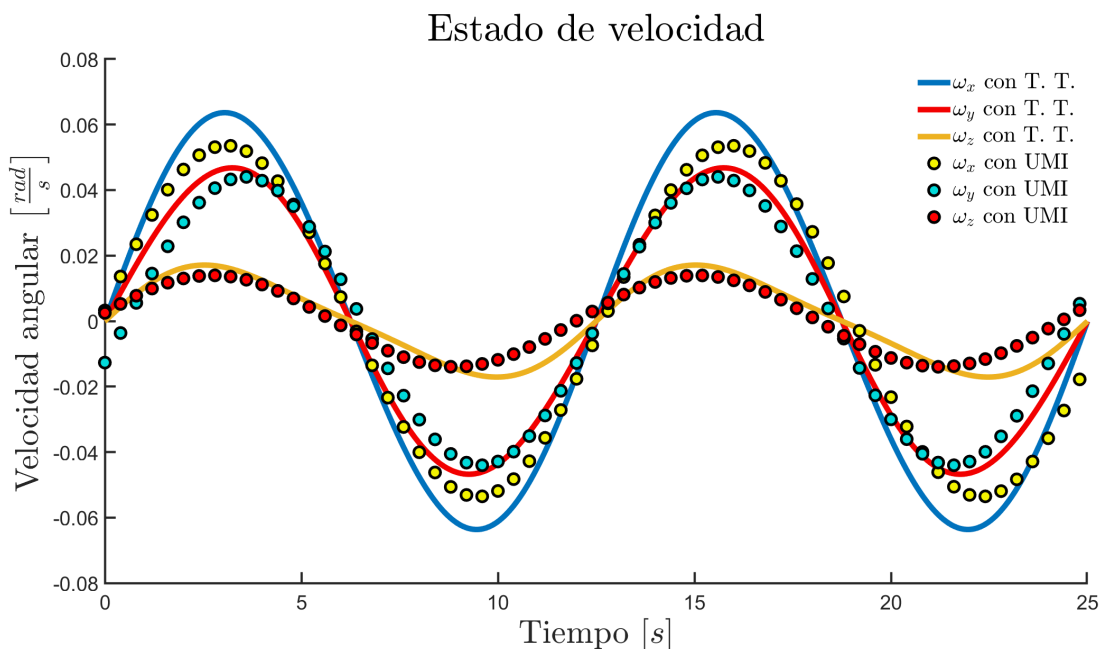


Figura 5.13: Comparación de velocidad angular.

La Figura 5.14 muestra la velocidad lineal medida por la unidad de medición inercial, donde la distinción de los movimientos que ocurren en cada eje se encuentran separados a través de *subplots*, el primero representa los movimientos en el eje  $x$ , el segundo los movimientos en el eje  $y$  y el último los movimientos en el eje  $z$ . El motivo de esta división es observar de mejor manera los desfases que ocurren y las diferencias que se presenta en la magnitud de las velocidades lineales obtenidas con la teoría de tornillos y con la validación experimental.

Obsérvese cómo las gráficas de los resultados obtenidos con la unidad de medición inercial se encuentran desplazadas tanto vertical como horizontalmente respecto a las obtenidas mediante la teoría de tornillos, lo que se debe principalmente al procesamiento de la señal. Dichos desplazamientos impiden una buena comparación de los resultados, motivo por el cual la fase y el desplazamiento vertical fueron corregidos. Los resultados se muestran en la Figura 5.14, donde se observa que las amplitudes de ambos resultados ya se encuentran más cercanas. En el eje  $x$ , la velocidad lineal obtenida con la teoría de tornillos presenta una amplitud de  $5,13 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ , mientras que, a través de la validación experimental tiene una amplitud de  $3,89 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ , en el eje  $y$  se tienen una amplitud de  $3,97 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  obtenida mediante la teoría de tornillos y de  $2,28 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  en la velocidad lineal medida experimentalmente. Por último, en el eje  $z$  se presenta una amplitud de  $12,56 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  para el caso de la velocidad lineal obtenida mediante la teoría de tornillos y de  $11,62 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  a través de la validación experimental. Como se observa a pesar de la corrección en los desplazamientos, aún existen diversas discrepancias entre las gráficas, lo que es razonable si se toma en cuenta que la velocidad lineal obtenida de la unidad de medición inercial se obtuvo de forma indirecta mediante la integral de la aceleración lineal captada por el sensor. De tal manera que, al integrar la aceleración lineal, también se integra al error presente en la aceleración a la velocidad lineal.

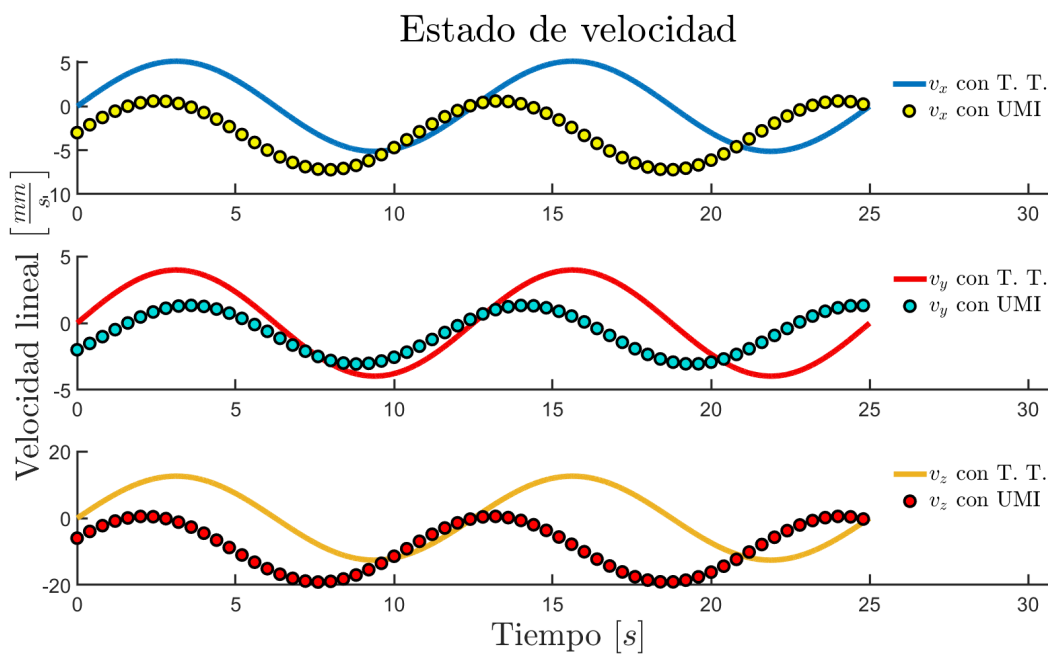


Figura 5.14: Comparación de velocidad lineal.

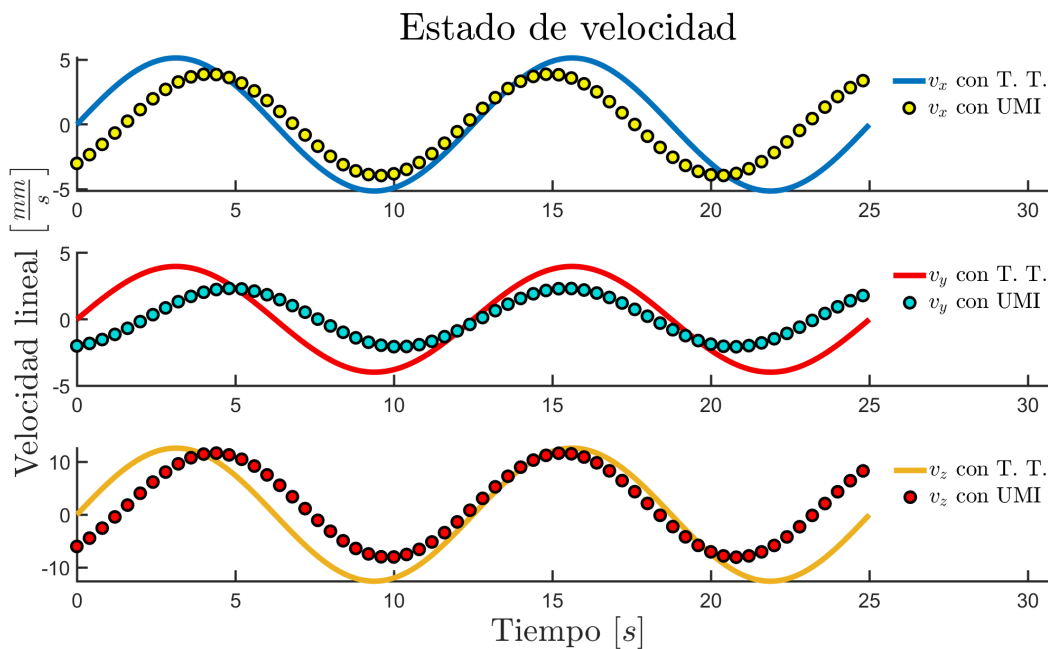


Figura 5.15: Comparación de velocidad lineal con la fase corregida.

### 5.6.2. Aceleración

El estado de aceleración también debe validarse mediante la unidad de medición inercial, para ello se utilizará el estado deseado de la plataforma móvil presente en la ecuación (5.12), además del tipo de línea, el color y la forma en que se separaron los movimientos lineales en

las gráficas anteriores para observar de mejor manera las discrepancias.

En la Figura 5.16 se muestra la comparación entre las aceleraciones angulares obtenidas por la teoría de tornillos y las medidas por la unidad de medición inercial. En ella se observa cómo las mediciones experimentales casi siguen la periodicidad que presentan las gráficas obtenidas mediante la teoría de tornillos, pero las amplitudes se observan distintas, pues la amplitud de las aceleraciones angulares obtenidas mediante la teoría de tornillos son:  $0,033 \frac{rad}{s^2}$ ,  $0,022 \frac{rad}{s^2}$ ,  $0,011 \frac{rad}{s^2}$  en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En cambio, las amplitudes de las aceleraciones angulares obtenidas a través de la validación experimental son de  $0,026 \frac{rad}{s^2}$  para el eje  $x$ , de  $0,022 \frac{rad}{s^2}$  para el eje  $y$  y  $0,007 \frac{rad}{s^2}$  para el eje  $z$ . Estas discrepancias son debidas a que, al igual que la velocidad lineal, la aceleración angular fue obtenida de forma indirecta, es decir, se obtuvo mediante la derivada de las mediciones de velocidad angular obtenidas con el sensor.

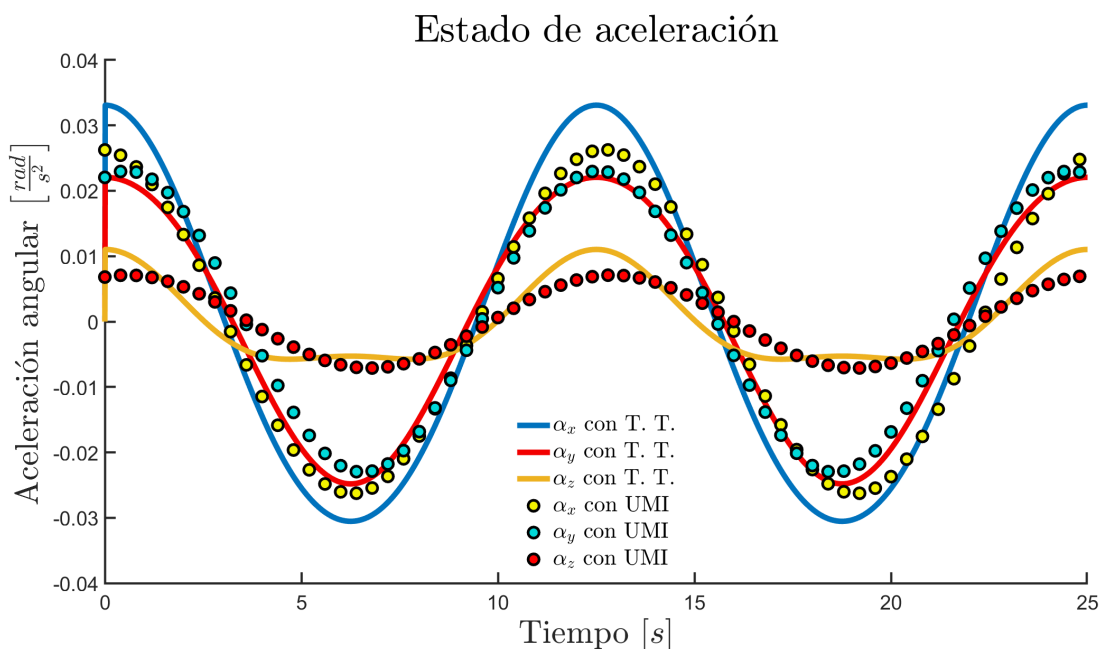


Figura 5.16: Comparación de aceleración angular.

Para finalizar la validación experimental, la comparación entre las aceleraciones lineales obtenidas con la teoría de tornillos y mediante la unidad de medición inercial se muestra en la Figura 5.17. En ella se observan tres *subplots* con gráficas que respetan la convención del tipo y color de línea que se ha manejado a lo largo del proyecto. El primero representa al movimiento en el eje  $x$ , el segundo el movimiento en el eje  $y$  y el último el movimiento en el eje  $z$ . Para el eje  $z$ , la aceleración lineal obtenida con la teoría de tornillos presenta una amplitud de  $6,31 \frac{mm}{s^2}$  y la obtenida a través de la validación experimental tiene una amplitud de  $5,60 \frac{mm}{s^2}$ . En el eje  $y$ , las amplitudes que presenta la velocidad lineal son de  $2 \frac{mm}{s^2}$  para las obtenidas mediante la teoría de tornillos y  $1,39 \frac{mm}{s^2}$  para las medidas de forma experimental. Y finalmente, en el eje  $x$  se tienen las amplitudes de  $2,58 \frac{mm}{s^2}$  y  $2,27 \frac{mm}{s^2}$  para las aceleraciones lineales obtenidas mediante la teoría de tornillos y a través de la validación experimentalmente, respectivamente. Nótese que la mayor discrepancia se encuentran en el eje  $y$ , pero la magnitud de esta es



relativamente pequeña, por lo que se asume que los resultados son similares.

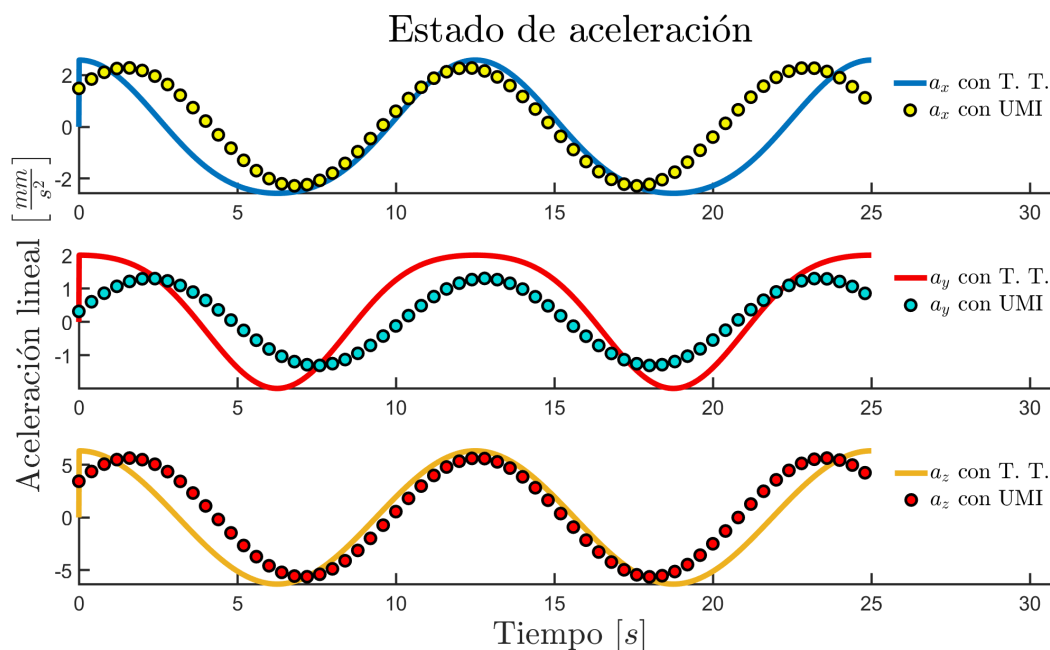


Figura 5.17: Comparación de aceleración lineal.

Al igual que en la validación mediante la simulación multicuerpo, en la validación experimental también es conveniente representar las diferencias entre los resultados a través de alguna gráfica. No obstante, dadas las discrepancias notorias de fase, amplitud y magnitud, el error absoluto se verá influenciado por los factores ya mencionados. De manera que, para observar de mejor forma las discrepancias, el error relativo es la mejor opción. Sin embargo, dadas las características de la señal obtenida con la teoría de tornillos, el error relativo se verá indeterminado en los puntos donde dicha señal tienda a cero, lo que generará gráficas de error prácticamente constantes con puntos atípicos a lo largo del tiempo. Por este motivo, en lugar de obtener el error, se obtuvo la similitud que poseen las gráficas entre sí.

La cuantificación de la similitud entre las gráficas se realizó mediante el coeficiente de correlación. Este coeficiente indica cuánta relación lineal mantienen dos variables. Si el coeficiente de correlación se encuentra próximo al valor uno, entonces se dice que las variables son similares, por el contrario, si el valor es cercano a menos uno, entonces se dice que las variables son inversamente similares. En cuyo caso se tengan dos variables totalmente distintas, entonces el coeficiente de correlación será cercano a cero [43]. Con esto en mente y con ayuda de la función  $corrcoef(X)$  de MATLAB se obtuvieron los coeficientes de correlación mostrados en la Tabla 5.3. Obsérvese que en dicha tabla los movimientos lineales son los que presentan las menores similitudes durante las validaciones, siendo la velocidad lineal la que menos se asemeja al resultado mostrado por la teoría de tornillos. Razón por la que se podría concluir que la validación experimental de los movimientos lineales no presenta exactitud. Esto se debe principalmente a que los sensores utilizados para medir movimientos lineales se ven fácilmente influidos por fenómenos naturales, como la gravedad y el efecto coriolis. Además, las unidades



de medición inercial no pueden medir la velocidad lineal ni aceleración angular de forma directa. Sin embargo, debe considerarse la magnitud de las aceleraciones y velocidades lineales que se están midiendo, pues estas son magnitudes pequeñas que se encuentran en el orden de los milímetros y no pueden ser capturadas con exactitud por la unidad de medición inercial. Por tal motivo, las mediciones experimentales obtenidas pueden considerarse como estimaciones precisas para validar el análisis cinemático desarrollado mediante la teoría de tornillos.

Tabla 5.3: Coeficientes de correlación

Eje	Movimiento		Coeficiente de correlación
	Teoría de tornillos	Unidad de medición inercial	
$x$	Velocidad angular	Velocidad angular	0.99
	Velocidad lineal	Velocidad lineal	0.78
	Aceleración angular	Aceleración angular	0.99
	Aceleración lineal	Aceleración lineal	0.85
$y$	Velocidad angular	Velocidad angular	0.98
	Velocidad lineal	Velocidad lineal	0.73
	Aceleración angular	Aceleración angular	0.99
	Aceleración lineal	Aceleración lineal	0.84
$z$	Velocidad angular	Velocidad angular	0.94
	Velocidad lineal	Velocidad lineal	0.84
	Aceleración angular	Aceleración angular	0.91
	Aceleración lineal	Aceleración lineal	0.91

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajos futuros

### 6.1. Conclusión

Como primer punto, la definición de tornillos juega un rol muy importante. En específico, los tornillos recíprocos, ya que junto a la forma de Klein y la forma simétrica bilineal del álgebra de Lie, son los encargados de eliminar las contribuciones del resto de tornillos en cualquier análisis cinemático. Los tornillos recíprocos para el manipulador paralelo bajo estudio son relativamente sencillos de encontrar debido a la colinealidad que deben tener con las cadenas cinemáticas en todo momento. Sin embargo, no todos los manipuladores presentan esta característica y es preciso siempre considerar lo siguiente:

- ✓ Un solo marco de referencia fijo para todos los puntos y vectores.
- ✓ Un solo polo de referencia para la parte dual de todos los tornillos.
- ✓ Colocar el polo de referencia en el marco fijo.

Con los puntos anteriores la definición de los tornillos se ve simplificada y los análisis se desarrollan de forma metódica. Por otra parte, las operaciones del álgebra de Lie son utilizadas durante todo el desarrollo de los análisis cinemáticos, en el de velocidad las formas simétricas bilineales toman el protagonismo, pues la ecuación (3.8) se ve libre de las contribuciones de las velocidades pasivas gracias a la forma de Klein y a los tornillos recíprocos, mientras que, en el análisis de aceleración el producto de Lie es la operación crucial para obtener el tornillo que completa el estado de aceleración. Así pues, se puede concluir que el álgebra de Lie y una buena definición de tornillos son indispensables en la teoría de tornillos infinitesimales para lograr la sencillez con la que se obtienen los análisis cinemáticos de manipuladores paralelos o seriales.

La validación realizada mediante las simulaciones multicuerpo también ayudó a reafirmar la conclusión anterior, puesto que los errores o las discrepancias que existen entre los resultados se encuentran en magnitudes micrométricas, inclusive estas pequeñas magnitudes se mantienen aún en el análisis de aceleración a pesar de la adición de los tornillos de Lie en la ecuación entrada-salida y todos los cálculos que este conlleva, es decir, contrario a lo que se esperaría, el error de los análisis cinemáticos realizados mediante la teoría de tornillos no

aumenta conforme al orden del análisis que se realice, a pesar de aumentar el número de operaciones numéricas. Sin embargo, esto no exime al análisis directo de posición, pues este depende del método numérico con el que se resuelva.

Por otro lado, con la validación experimental, queda claro que los movimientos lineales son los más complicados de captar por los diferentes factores que influyen en el sensor, tal es el caso de la inestabilidad de la plataforma, las infiltraciones de gravedad o la aceleración de Coriolis, y aunque estos factores se pueden disminuir mediante el procesamiento de la señal, lo cierto es que no se obtienen resultados tan satisfactorios como se esperaría, tal y como se muestra en los resultados obtenidos en este proyecto. No obstante, el filtro implementado logró eliminar el ruido en la señal de mejor forma que filtros más complejos y con menos consumo de memoria en la placa ARDUINO. A pesar de ello, la medición de los movimientos mediante una unidad de medición inercial, concretamente los movimientos lineales, no es la mejor forma de validar los resultados, no solo por los diferentes factores ya mencionados sino también porque las unidades de medición inercial solo pueden medir de forma directa la velocidad angular y la aceleración lineal, por lo que hay que calcular el resto de movimientos de forma indirecta mediante derivadas e integrales que incrementan el error en las mediciones.

En resumen, en este proyecto se demostró que la aplicación de la teoría de tornillos facilita el análisis cinemático de los manipuladores paralelos, al desarrollar ecuaciones compactas de entrada-salida presentes en las ecuaciones (3.8) y (3.20), además de validar los resultados mediante una simulación multicuerpo que presentó discrepancias micrométricas. Las mediciones con la unidad de medición inercial contribuyen de alguna forma en la validación de las velocidades y aceleraciones angulares. Sin embargo, en el resto de movimientos es necesario utilizar otro método de medición, quizás a través de mediciones indirectas o con dispositivos especializados.

## 6.2. Trabajos futuros

A continuación se enlistan diversos trabajos futuros que ayudarían a mejorar este proyecto.

- ✓ Desarrollar el control de velocidad de los actuadores lineales para obtener movimientos más suaves y rápidos.
- ✓ Sustituir las juntas universales y revolutas de la parte superior en el manipulador por juntas esféricas con la intención de mejorar la estabilidad.
- ✓ Desarrollar el análisis cinemático de posición mediante el método geométrico, eliminando el uso de métodos numéricos en la cinemática de posición directa y así ingresar trayectorias de forma directa en los actuadores lineales.
- ✓ Medir de forma indirecta los movimientos lineales o con dispositivos especializados.
- ✓ Desarrollar el análisis dinámico del manipulador con la teoría de tornillos.

# Referencias

- [1] J.P. Merlet. *Parallel Robots*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2005. ISBN: 9781402041327. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=78DHjrzt9oC>.
- [2] J. Gallardo-Alvarado. *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Springer International Publishing Switzerland., 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-31126-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31126-5).
- [3] R.S. Ball. “The Theory of Screws; a Study in the Dynamics of a Rigid Body”. En: *Nature* 13.337 (1876), págs. 463-464. DOI: [10.1038/013463a0](https://doi.org/10.1038/013463a0).
- [4] K.H. Hunt. “Prismatic Pairs in Spatial Linkages”. En: *Journal of Mechanisms* 2.2 (1967), págs. 213-230. ISSN: 0022-2569. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-2569\(67\)90042-0](https://doi.org/10.1016/0022-2569(67)90042-0).
- [5] K. Sugimoto y J. Duffy. “Application of Linear Algebra to Screw Systems”. En: *Mechanism and Machine Theory* 17.1 (1982), págs. 73-83. ISSN: 0094-114X. DOI: [10.1016/0094-114X\(82\)90025-8](https://doi.org/10.1016/0094-114X(82)90025-8).
- [6] P. Martínez-Zamudio et al. “Cinemática Diferencial de un Manipulador Paralelo Plano 3RRR-(RRR)v con Actuación Virtual Indirecta”. En: *Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo* 5 (2015), págs. 321-331. ISSN: 1665-7381.
- [7] J. M. Rico y J. Duffy. “Forward and Inverse Acceleration Analyses of In-Parallel Manipulators”. En: *Journal of Mechanical Design* 122.3 (mayo de 1998), págs. 299-303. ISSN: 1050-0472. DOI: [10.1115/1.1288360](https://doi.org/10.1115/1.1288360).
- [8] J. M. Rico y J. Duffy. “An Application of Screw Algebra to the Acceleration Analysis of Serial Chains”. En: *Mechanism and Machine Theory* 31.4 (1996), págs. 445-457. ISSN: 0094-114X. DOI: [10.1016/0094-114X\(95\)00089-H](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00089-H).
- [9] J. Cervantes-Sánchez et al. “The Differential Calculus of Screws: Theory, Geometrical Interpretation, and Applications”. En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 223.6 (2009), págs. 1449-1468. DOI: [10.1243/09544062JMES1195](https://doi.org/10.1243/09544062JMES1195).
- [10] J. Gallardo-Alvarado, R. Rodríguez-Castro y C. Aguilar-Nájera. “Análisis Cinemático de un Manipulador Paralelo Plano Mediante la Teoría de Tornillos Infinitesimales”. En: *Científica* 17 (2013), págs. 159-169. ISSN: 1665-0654.

- [11] H. J. Cortes-Ruiz. “Construcción y Análisis Cinemático de un Prototipo de Robot Paralelo UPUR de Seis Grados de Libertad”. Universidad Tecnológica de la Mixteca, mar. de 2019.
- [12] J. Gallardo-Alvarado. “Kinematics of a Hybrid Manipulator by Means of Screw Theory”. En: *Multibody System Dynamics* 14 (2005), págs. 345-366. DOI: [10.1007/s11044-005-4196-x](https://doi.org/10.1007/s11044-005-4196-x).
- [13] J. Gallardo-Alvarado y M. A. García Murillo. “Análisis Cinemático del Manipulador Paralelo 4-PRUR Mediante la Teoría de Tornillos”. En: *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 14.3 (jul. de 2017), págs. 299-306. DOI: [10.1016/j.riai.2017.03.001](https://doi.org/10.1016/j.riai.2017.03.001).
- [14] J. Gallardo-Alvarado, J. H. Tinajero-Campos y Á. Sánchez-Rodríguez. “Cinemática de un Manipulador Configurable por Medio de la Teoría de Tornillos”. En: *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 18.1 (dic. de 2020), págs. 58-67. DOI: [10.4995/riai.2020.12793](https://doi.org/10.4995/riai.2020.12793).
- [15] M. Raghavan. “The Stewart Platform of General Geometry Has 40 Configurations”. En: *Journal of Mechanical Design* 115.2 (jun. de 1993), págs. 277-282. ISSN: 1050-0472. DOI: [10.1115/1.2919188](https://doi.org/10.1115/1.2919188).
- [16] J. Angeles. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. New York, NY: Springer New York, 2003, pág. 512. ISBN: 978-0-387-22458-9. DOI: [10.1007/978-0-387-22458-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-0-387-22458-9_4).
- [17] J. Gallardo-Alvarado y J. M. Rico Martínez. “Recuperando la Pérdida de Movilidad en Manipuladores Seriales por Medio de la Teoría de Tornillos”. En: *Revista Ingeniería* 11 (jul. de 2011), págs. 81-91. DOI: [10.15517/ring.v11i1-2.609](https://doi.org/10.15517/ring.v11i1-2.609).
- [18] J. Gallardo-Alvarado, J. M. Rico-Martínez y M. Caudillo-Ramírez. “Análisis Cinemático Directo de un Manipulador Paralelo Esférico Asimétrico”. En: *Ingeniería. Investigación y Tecnología* (2006). ISSN: 1405-7743.
- [19] Hee-Byoung Choi y Jeha Ryu. “Singularity Analysis of a Four Degree-of-freedom Parallel Manipulator Based on an Expanded  $6 \times 6$  Jacobian Matrix”. En: *Mechanism and Machine Theory* 57 (2012), págs. 51-61. ISSN: 0094-114X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.06.008>.
- [20] J. Gallardo-Alvarado. “Kinematics of a Class of Three-Legged Parallel Manipulators by Means of Screw Theory”. En: *Ingeniería, Investigación y Tecnología* 17.2 (2016), págs. 191-200. DOI: [10.1016/j.riit.2016.06.004](https://doi.org/10.1016/j.riit.2016.06.004).
- [21] Heriberto F. y Carmenza . “Lean Six Sigma en pequeñas y medianas empresas: un enfoque metodológico”. En: *Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería* 22 (2014), págs. 263-277. ISSN: 0718-3291.
- [22] J. J. Cardiel-Ortega, R. Baeza-Serrato y R. A. Lizarraga-Morales. “Development of a system dynamics model based on Six Sigma methodology”. En: *Ingeniería e Investigación* 37 (2017), págs. 80-90. ISSN: 0120-5609.

- [23] J. N. Malpartida-Gutierrez et al. "Estrategia de Mejora de Procesos Six Sigma Aplicado a la Industria Textil". En: *Alpha Centauri* 2.3 (jul. de 2021), págs. 72-90. DOI: [10.47422/ac.v2i3.45](https://doi.org/10.47422/ac.v2i3.45).
- [24] C. Huang, W. Kuo y B. Ravani. "On the Linear Line Complex and Helicoidal Vector Field Associated with Homologous Lines of a Finite Displacement". En: *Mechanism and Machine Theory* 43.2 (2008), págs. 138-146. ISSN: 0094-114X. DOI: [10.1016/j.mechmachtheory.2007.03.005](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.03.005).
- [25] V.R. Kumar y K.J. Waldron. "Force Distribution in Closed Kinematic Chains". En: *IEEE Journal on Robotics and Automation* 4.6 (1988), págs. 657-664. DOI: [10.1109/56.9303](https://doi.org/10.1109/56.9303).
- [26] R. Featherstone. "The Acceleration Vector of a Rigid Body". En: *The International Journal of Robotics Research* 20.11 (2001), págs. 841-846. DOI: [10.1177/02783640122068137](https://doi.org/10.1177/02783640122068137).
- [27] J. Gallardo-Alvarado, H. Orozco-Mendoza y R. Rodríguez-Castro. "Finding the Jerk Properties of Multi-body Systems Using Helicoidal Vector Fields". En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 222.11 (2008), págs. 2217-2229. DOI: [10.1243/09544062JMES1030](https://doi.org/10.1243/09544062JMES1030).
- [28] T. R. Kane y D. A. Levinson. *Dynamics, Theory and Applications*. McGraw Hill, 1985.
- [29] J.M. Rico, J. Gallardo-Alvarado y J. Duffy. "Screw Theory and Higher Order Kinematic Analysis of Open Serial and Closed Chains". En: *Mechanism and Machine Theory* 34.4 (1999), págs. 559-586. ISSN: 0094-114X. DOI: [10.1016/S0094-114X\(98\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00029-9).
- [30] J. Yu et al. "Mobility Analysis of Complex Joints by Means of Screw Theory". En: *Robotica* 27.6 (2009), págs. 915-927. DOI: [10.1017/S0263574709005335](https://doi.org/10.1017/S0263574709005335).
- [31] K. Sugimoto. "Determination of Joint Velocities of Robots by Using Screws". En: *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 106.2 (1984), págs. 222-227. DOI: [10.1115/1.3258583](https://doi.org/10.1115/1.3258583).
- [32] J. Zhao et al. "Geometrical Method to Determine the Reciprocal Screws and Applications to Parallel Manipulators". En: *Robotica* 27.6 (2009), págs. 929-940. DOI: [10.1017/S0263574709005359](https://doi.org/10.1017/S0263574709005359).
- [33] O. J. Woodman. *An Introduction to Inertial Navigation*. Inf. téc. UCAM-CL-TR-696. University of Cambridge, Computer Laboratory, ago. de 2007. DOI: [10.48456/tr-696](https://doi.org/10.48456/tr-696).
- [34] J. W. Judy. "Microelectromechanical Systems (MEMS): Fabrication, Design and Applications". En: *Smart Materials and Structures* 10.6 (nov. de 2001), pág. 1115. DOI: [10.1088/0964-1726/10/6/301](https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/6/301).
- [35] S. W. Smith. *The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 1999.
- [36] J. Gallardo-Alvarado et al. "Dynamics of Parallel Manipulators by Means of Screw Theory". En: *Mechanism and Machine Theory* 38.11 (2003), págs. 1113-1131. ISSN: 0094-114X. DOI: [10.1016/S0094-114X\(03\)00054-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00054-5).
- [37] J. B. Santiago-Prowald. "Calibración de Acelerómetros para la Medida de Microaceleraciones en Aplicaciones Espaciales". No Publicado. Feb. de 2000. DOI: [10.20868/UPM.thesis.368](https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.368).

- [38] J. B. Santiago-Prowald et al. “Calibration of Accelerometers for the Measurement of Microvibrations”. En: *Journal of Spacecraft and Rockets* 35.5 (1998), págs. 695-702. DOI: [10.2514/2.3387](https://doi.org/10.2514/2.3387).
- [39] C. Verrastro et al. “Control PID con Filtro Dinámico de Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente (dEWMA-PID)”. En: *XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* (2009).
- [40] J. Stuart Hunter. “The Exponentially Weighted Moving Average”. En: *Journal of Quality Technology* 18.4 (1986), págs. 203-210. DOI: [10.1080/00224065.1986.11979014](https://doi.org/10.1080/00224065.1986.11979014).
- [41] M. Tarpø et al. “Tilt Errors of Translational Accelerometers Attached to Dynamic Systems with Tilt Motion Caused by the System Response”. En: *Journal of Sound and Vibration* 498 (2021), pág. 115967. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.115967>.
- [42] M. Pedley. “Tilt Sensing Using a Three-Axis Accelerometer”. En: *Freescale Semiconductor Application Note* (2013), págs. 2012-2013.
- [43] MathWorks. *Linear Correlation*. [https://la.mathworks.com/help/matlab/data\\_analysis/linear-correlation.html](https://la.mathworks.com/help/matlab/data_analysis/linear-correlation.html). Accedido: 2024-08-31.

# Apéndice A

## Programación de los modelos matemáticos

A través del *software* MATLAB se tradujo la función de trayectoria, el análisis de velocidad y el análisis de aceleración a un lenguaje de programación que pueda procesar las operaciones requeridas y arrojar los resultados de forma gráfica. Antes de mostrar los códigos realizados, es importante recordar que el programa de cinemática inversa, necesario para obtener la longitud de los actuadores lineales del manipulador mediante un estado deseado, es el mismo al realizado por Cortés-Ruiz en [11], pero con ciertas modificaciones en sus valores de retorno. Los nuevos valores que retorna el programa de cinemática inversa son: la posición de los puntos  $P_i$ , los puntos  $B_i$  y del vector  $\vec{T}_{C/O}$  que alcanzarán con el estado deseado de la plataforma móvil, todos estos valores son necesarios para el cálculo de los tornillos que describen la cinemática del manipulador cuando sigue una trayectoria.

### A.1. Programación de trayectorias

#### A.1.1. Trayectoria para el estado de la plataforma móvil

Las trayectorias que describan el estado de la plataforma móvil comenzarán desde una posición en reposo, así como de una orientación nula, y llegarán hasta la posición y orientación deseadas en un mismo lapso de tiempo. De esta manera, el manipulador tendrá un movimiento en cada uno de los seis grados de libertad que conjuntamente formarán un único movimiento en la plataforma móvil. Considerado lo anterior, se desarrolló el código mostrado en la Figura A.1, donde a la variable  $f$  se le asignó la función de trayectoria representada en la ecuación (4.1) dentro de un bucle *for* con un total de seis iteraciones, una por cada grado de libertad que describe el estado de la plataforma móvil.

La variable  $f$  se manejó como una variable simbólica, ya que con ayuda de la función *sym2poly* permite interpretar a la asignación de  $f$  como un polinomio evaluable. Con el polinomio evaluable y un vector de tiempo que vaya desde cero hasta el tiempo final seleccionado, la función preestablecida de MATLAB, denominada *polyval*, almacenó en la matriz  $f\_eval$  el conjunto de coordenadas que la plataforma móvil, en cada uno de sus grados de libertad, presentará a



lo largo del lapso de tiempo determinado.

```

%% ***** TRAYECTORIAS DE LA PLATAFORMA MÓVIL *****
for i=1:6
    % FUNCIÓN DE TRAYECTORIA DESARROLLADA
    f = ((-2*(xf(i)-xi))/(tf^3))*(time^3) + ((3*(xf(i)-xi))/(tf^2))*(time^2) + xi;
    vector=sym2poly(f); % CAST DE LA FUNCIÓN ANTERIOR PARA SER EVALUADA
    % EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRAYECTORIA
    f_eval(:,i)=polyval(vector, tiempo);
end

```

Figura A.1: Función de trayectoria de la plataforma móvil en MATLAB.

### A.1.2. Trayectoria de los actuadores lineales

Con la matriz  $f\_eval$  bien definida, la trayectoria que deben seguir los actuadores lineales para llevar a la plataforma móvil a cualquier estado descrito en dicha matriz puede obtenerse a través de la cinemática inversa, como se muestra a continuación.

```

%% ***** ANÁLISIS CINEMÁTICOS *****
for i=1:m+1 % TRAYECTORIA DE LOS ACTUADORES
    [E_act,l_act(i,:),B,P,T] = CI(f_eval(i,1),f_eval(i,2),f_eval(i,3),f_eval(i,4),f_eval(i,5),f_eval(i,6));
end

```

Figura A.2: Trayectoria de los actuadores lineales en MATLAB.

En la Figura A.2 se observa que la función de cinemática inversa fue llamada con las coordenadas de la plataforma móvil en cada uno de sus ejes como argumento, por otro lado, los valores retornados son cinco, dentro de los cuales se encuentran los puntos  $B_i$ ,  $P_i$  y el vector del estado de la plataforma  $T$ , la variable  $E\_act$  que indica si el estado de la plataforma móvil enviada como argumento es alcanzable o no y por último la variable  $l\_act$  que almacena las posiciones de los actuadores necesarias para llegar a la posición introducida como argumento en la función de cinemática inversa. Nótese que la función de cinemática inversa está dentro de un bucle *for* que se encargará de llamar a la función  $m + 1$  veces una por cada lapso de tiempo asignado al vector de tiempo

## A.2. Programación del análisis de velocidad

Antes de programar la ecuación (3.8) y todos los elementos que esta ecuación requiere, hay que considerar lo mencionado en [8], esto es, que el estado de velocidad representa un movimiento infinitesimal del robot. Por lo tanto, no puede programarse como una ecuación que utiliza la trayectoria completa de los actuadores y esperar que devuelva la trayectoria que describa el estado de velocidad resultante, de hecho, el estado de velocidad cambia conforme se modifica la posición de la plataforma móvil y hay que obtener un estado de velocidad por cada posición presente en la matriz  $l\_act$ .

### A.2.1. Programación del análisis de velocidad directo

Debido a que el estado de velocidad debe actualizarse constantemente, la función que describe el estado de velocidad tiene que insertarse dentro de un bucle *for* con  $m + 1$  iteraciones, mismo número de iteraciones en las que se manda a llamar la función de cinemática inversa. Motivo por el cual, en la Figura A.3 se observa a la función encargada de obtener el estado de velocidad, denominada *vel*, dentro del mismo bucle *for* en el que se encuentra la función de cinemática inversa.

```

%% ***** ANÁLISIS CINEMÁTICOS *****
for i=1:m+1
    % TRAYECTORIA DE LOS ACTUADORES
    [E_act,l_act(i,:),B,P,T] = CI(f_eval(i,1),f_eval(i,2),f_eval(i,3),f_eval(i,4),f_eval(i,5),f_eval(i,6));
    % ESTADO DE VELOCIDAD
    [EV(:,i),A,qp(i,:)] = Vel(B,P,T,l_act,i,t1/(m+1));
end

```

Figura A.3: Función para calcular el estado de velocidad en MATLAB.

Obsérvese que la función *vel* retorna tres variables; la variable *EV*, representa el estado de velocidad; la variable *A*, a la matriz resultante de multiplicar la matriz activa por el operador *delta* y la variable *qp*, matriz que almacena las velocidades de los actuadores durante todo el trayecto.

La función *vel* se encarga de obtener los tornillos recíprocos para la matriz activa, razón de los tres primeros argumentos, donde *B* es la matriz de los puntos  $B_i$  y *P* la de los puntos  $P_i$ , mientras que la variable *T* es el vector  $\vec{T}_{C/O}$ . Una vez obtenida la matriz activa, se obtienen las velocidades de los actuadores y para ello se requiere de los tres últimos argumentos, donde la variable *l*, representa las posiciones de los actuadores que son derivadas para obtener las velocidades requeridas, y tanto *n* como *h* son utilizadas para este fin. La variable *n* ayuda a no tener un desborde de memoria ocasionado por la derivada aproximada de las posiciones de los actuadores, mientras que la variable *h* es el tamaño de paso que la derivada aproximada requiere.

Finalmente, la ecuación (3.8) se programó como se muestra en la Figura A.4. Sin embargo, como el producto entre la matriz de tornillos recíprocos *S23r* y el operador de polaridad *Delta* es utilizado en el análisis cinemático de aceleración, este se asigna a la variable *A* y posteriormente se obtiene su matriz inversa mediante la diagonal invertida y se multiplica por el vector columna *qp* que contiene las velocidades de los actuadores, obteniendo así el estado de velocidad de la plataforma móvil. Cabe mencionar, que el operador de diagonal invertida representa una forma de obtener la inversa de la matriz *Tornillos* para la versión de MATLAB utilizada.

```

%% ***** ESTADO DE VELOCIDAD DIRECTO *****

A=(S23r*Delta);
EV=A\qp;

```

Figura A.4: Estado de velocidad directo en MATLAB.

## A.2.2. Programación del análisis de velocidad inverso

Las 36 velocidades, pasivas y generalizadas, presentes en el manipulador bajo análisis deben obtenerse para encontrar el tornillo de Lie requerido en el análisis posterior. En la Figura A.5 se programó la ecuación (3.15) encargada de encontrar todas las velocidades, donde la variable *Tornillo* es la *i*-ésima matriz jacobiana, *EV* el estado de velocidad y *Omegas* la matriz donde se almacenaron las 36 velocidades del manipulador.

Obsérvese que la ecuación programada está dentro de un bucle *for* con seis iteraciones, una para cada una de las seis cadenas cinemáticas de la plataforma *Gough-Stewart*, por lo que cada una de las columnas de la matriz *omegas* contiene todas las velocidades de una sola cadena cinemática, incluyendo la velocidad generalizada que posee el actuador lineal de la cadena cinemática en cuestión.

```

%% ***** ANÁLISIS DE VELOCIDAD INVCERSO *****
for i=1:6
    % VECTOR CON LOS TORNILLOS DE UNA SOLA CADENA CINEMATICA
    Tornillo=[S01(:,i) S12(:,i) S23(:,i) S34(:,i) S45(:,i) S56(:,i)];
    Omegas(:,i)=Tornillo\EV;
end

```

Figura A.5: Cálculo de velocidades pasivas en *MATLAB*.

## A.3. Programación análisis de aceleración

Al igual que el estado de velocidad, el estado de aceleración es un movimiento infinitesimal, por lo que también debe programarse dentro de un bucle *for* con  $m+1$  iteraciones. Razón por la cual la función del análisis de aceleración se encuentra dentro del mismo bucle que la función del estado de velocidad y la función de la trayectoria de los actuadores, justamente como se muestra en la Figura A.6.

Los argumentos de la función *acel* son muy similares a los argumentos presentados en la función *vel*, pero con algunas excepciones. Los tres primeros argumentos y los últimos dos, son los mismos que se utilizan en la función *vel* para obtener la matriz activa y la derivada aproximada de las trayectorias de los actuadores, respectivamente. Mientras que las variables *qp*, *EV* y *A* son las variables retornadas por la función *vel*.

```

%% ***** ANÁLISIS CINEMÁTICOS *****
for i=1:m+1
    % TRAYECTORIA DE LOS ACTUADORES
    [E_act,l_act(i,:),B,P,T] = CI(f_eval(i,1),f_eval(i,2),f_eval(i,3),f_eval(i,4),f_eval(i,5),f_eval(i,6));
    % ESTADO DE VELOCIDAD
    [EV(:,i),A,qp(i,:)] = Vel(B,P,T,l_act,i,t1/(m+1));
    % ESTADO DE ACELERACIÓN
    EA(:,i) = Acel(B,P,T,qp,EV(:,i),A,i,t1/(m+1));
end

```

Figura A.6: Función para calcular el estado de aceleración en *MATLAB*.

Las variables retornadas por la función del análisis anterior son necesarias para calcular el tornillo de Lie, ya que este requiere de las velocidades de los pares cinemáticos, como se muestra en la ecuación (3.17).

```
%% ***** ESTADO DE VELOCIDAD DIRECTO *****
EA=A\u{qpp}+C ;
```

Figura A.7: Estado de aceleración en MATLAB.

Al igual que en análisis anterior, el operador de diagonal invertida de la Figura A.7 representa la forma de obtener la inversa de la matriz que lo precede, en este caso la matriz  $A$ . No obstante, en este análisis, la inversa de la matriz  $A$  se multiplica por la combinación de dos vectores columna en lugar de uno solo. El primero de estos vectores columna es el representado por la variable  $qpp$ , que representa la aceleración de los actuadores lineales requerida para llevar a la plataforma móvil a su estado deseado. En cuanto al segundo vector, es obtenido mediante la diagonal resultante de multiplicar la matriz  $A$  por la matriz que almacena al tornillo de Lie, y es comúnmente conocido como el vector columna de aceleración complementaria.

Una vez efectuadas todas las operaciones se obtienen los valores del estado de aceleración y al igual que en el análisis anterior, se almacenan en un vector columna, que en este caso se representa con la variable  $EA$ .



# Apéndice B

## Programación en Arduino

A continuación se describe el código implementado en ARDUINO para establecer la comunicación con MATLAB.

En la Figura B.1 se muestra los valores de inicialización tanto de la comunicación serial, la comunicación *I2C* y los valores o rangos bajo los que debe operar el acelerómetro y el giroscopio. Nótese que el rango del acelerómetro se encuentra en el rango más amplio debido a que no debe detectar las vibraciones del manipulador. En contraste, el rango del giroscopio se encuentra en uno de los rangos más bajos porque las infiltraciones de gravedad no influyen en las lecturas que toma dicho giroscopio. Además, durante el bucle *setup* también se aprovecha para calibrar la unidad de medición inercial mediante la función preestablecida en la propia biblioteca del sensor.

```
void setup() {
  // Inicialización de comunicación serial
  Serial.begin(115200);
  // Inicialización de comunicación serial con el micromaestro
  maestroSerial.begin(115200);
  // Inicialización de comunicación I2C
  Wire.begin();
  // Limpieza de buffer
  v = Serial.read();
  // Verificación de inicialización de la IMU
  if (!imu.begin()) {
    Serial.println("Error al inicializar el sensor");
  }
  // Calibración de la IMU
  imu.calibrate();
  imu.settings.gyro.enabled = true;
  imu.settings.accel.scale = 16;
  imu.settings.gyro.scale = 245;
}
```

Figura B.1: Parámetros de inicialización en la comunicación.

Por otro lado, el bucle infinito se muestra en el resto de figuras. En la Figura B.2 se actualizan

todas las mediciones del sensor y se almacenan dentro de las variables locales, donde las mediciones obtenidas con el acelerómetro se cambian a las unidades de medición de milímetros por segundo al cuadrado y las unidades de medición obtenidas por el giroscopio se cambiaron a radianes por segundo. En cuanto a la Figura B.3, en ella se muestra como se manda a llamar la función del filtro denominada *LecturaFiltro*, esta función pide como argumentos la lectura del filtro, el valor filtrado anterior y por último, la constante lambda necesaria para el filtro. En la figura también se muestra la función *angulos* que se encarga de calcular los ángulos de inclinación y orientación a través de las lecturas del acelerómetro y magnetómetro proporcionadas como argumentos. Dichos argumentos se encuentran ordenados de acuerdo a los ejes de acción, primero se encuentran las mediciones del eje *x*, luego las mediciones del eje *y* y terminan con las mediciones del eje *z*. En las mediciones del magnetómetro, el orden también se cumple a pesar de tener las mediciones del eje *x* y *y* intercambiadas, lo que se debe a la posición en la que se encuentran los sensores del magnetómetro con respecto al marco de referencia fijo.

```
void loop() {
  // Actualización de lecturas de la IMU
  imu.readAccel();
  imu.readGyro();
  imu.readMag();
  // Asignación de la lectura en cada eje
  // Unidades de mm/s^2
  float ax = imu.calcAccel(imu.ax)*9810;
  float ay = imu.calcAccel(imu.ay)*9810;
  float az = imu.calcAccel(imu.az)*9810;
  // Unidades en rad/s
  float gx = imu.calcGyro(imu.gx)*PI/180;
  float gy = imu.calcGyro(imu.gy)*PI/180;
  float gz = imu.calcGyro(imu.gz)*PI/180;
  float mx = imu.calcMag(imu.mx);
  float my = imu.calcMag(imu.my);
  float mz = imu.calcMag(imu.mz);
```

Figura B.2: Actualización de lecturas de la unidad de medición inercial.

```
// Aplicación de filtro
AXF=LecturaFiltro(ax,AXF,lambda_x);
AYF=LecturaFiltro(ay,AYF,lambda_y);
AZF=LecturaFiltro(az,AZF,lambda_z);
GXF=LecturaFiltro(gx,GXF,lambda_xw);
GYF=LecturaFiltro(gy,GYF,lambda_yw);
GZF=LecturaFiltro(gz,GZF,lambda_zw);
MXF=LecturaFiltro(mx,MXF,lambda_x);
MYF=LecturaFiltro(my,MYF,lambda_y);
MZF=LecturaFiltro(mz,MZF,lambda_z);
angulos(AXF,AYF,AZF,-MYF,-MXF,MZF);
```

Figura B.3: Función del filtro de media móvil ponderada exponencialmente.

Con las lecturas de la unidad de medición inercial filtradas, resta enviar los datos filtrados al entorno de MATLAB para trabajar con ellos. Dado que los datos solo cambian significativamente cuando el manipulador se encuentra en movimiento, entonces el envío de los datos se realiza cada que ARDUINO recibe una nueva posición para los actuadores. Por lo que antes de mostrar como se envía la información a MATLAB se revisará como se reciben las posiciones de los actuadores.

En la Figura B.4 se muestra como a través de la función *Serial.available* se verifica constantemente la llegada de información de MATLAB, en caso de encontrar información la castea de una variable *string* a una variable *float*, la almacena en la variable *vector* y finalmente la envía a los actuadores mediante la función *maestro.setTarget* para que lleguen a la posición correspondiente. Obsérvese como las posiciones de los actuadores se envían una a una y no dentro del bucle *for*, el motivo es que de no enviarse las instrucciones una a una, el actuador presenta un movimiento paulatino.

```
// Verificación del buffer
if (Serial.available() > 0) {
// Extracción de la posición de los actuadores
for (int i = 0; i < 6; i++) {
    str = Serial.readStringUntil(32);
    data = str.toFloat();
    vector[i] = data;
}
v=Serial.readStringUntil(13);
// Envío de posiciones al micromaestro
maestro.setTarget(0, vector[0]*28 + 4000);
maestro.setTarget(1, vector[1]*28 + 4000);
maestro.setTarget(2, vector[2]*28 + 4000);
maestro.setTarget(3, vector[3]*28 + 4000);
maestro.setTarget(4, vector[4]*28 + 4000);
maestro.setTarget(5, vector[5]*28 + 4000);
```

Figura B.4: Establecimiento de la comunicación.

Una vez enviadas las posiciones a los actuadores, se prepara la información con el formato para ser leído con MATLAB, es decir, colocar todos los valores en una cadena separados por una coma, ya que esto permite utilizar la función *readline()* para leer todos los datos.

Finalmente, los datos filtrados se envían por el puerto serial con el formato ya establecido y se culmina la comunicación en espera de nueva información de parte de MATLAB. En la Figura B.5 se muestra el código que ejemplifica lo descrito anteriormente.

Por último, la Figura B.6 muestra la función de filtro programada en ARDUINO. Obsérvese como la función requiere de tres argumentos, donde el argumento *M* hace referencia al valor medido actual, el argumento *v\_anterior* es el valor que contienen las variables globales en ese momento y el argumento *lambda* es, como su nombre lo dice, la constante de ponderación  $\lambda$ . En cuanto a la salida, la función retorna un valor flotante que se termina almacenando en las variables globales mostradas en la Figura B.3 y gracias a las propiedades del filtro



empleado dichas variables solo utilizan un espacio en memoria, pues todo el historial de los datos es añadido al valor filtrado.

```
// Estructuración de información
str2=var1;
str2.concat(' ');
str2.concat(var2);
str2.concat(' ');
|
|
|
|
|
str2.concat(var13);
// Envío de información
Serial.println(str2);
}
}
```

Figura B.5: Envío de información a MATLAB.

```
// Función del filtro
float LecturaFiltro(float M, float v_anterior, float lambda){
    float V_nuevo = lambda * (M) +(1-lambda)*v_anterior;
    return V_nuevo;
}
```

Figura B.6: Función del filtro de media móvil ponderada exponencialmente.