



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**  
**INSTITUTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y AUTOMOTRIZ**

**“CONTROL DE VIBRACIÓN EN SISTEMAS ROTOR-  
COJINETE TIPO JEFFCOTT MEDIANTE REDES  
MECÁNICAS BASADAS EN INERSOR”**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

**PRESENTA:**

**BRIAN ALEJANDRO GARCÍA PEÑAFORT**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS**

**HEROICA CIUDAD DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA,  
MÉXICO  
OCTUBRE DE 2024**

# DEDICATORIA

A mi madre y a mi padre, por el apoyo incondicional que me brindaron en los años de mi carrera. A mi hermano por siempre creer en mí y darme consejos para poder avanzar en los diferentes problemas u obstáculos de mi vida.

## **AGRADECIMIENTOS**

Gracias a mis padres por siempre brindarme el apoyo para poder cumplir mis objetivos personales y académicos. Por ser el soporte material y económico para poder concentrarme en los estudios y no abandonar mis metas.

Agradezco profundamente a mi tutor de tesis, el Dr. José Gabriel Mendoza Larios, por su apoyo, dedicación y paciencia, sin sus enseñanzas y correcciones no hubiese podido lograr llegar a esta instancia tan anhelada.

## RESUMEN

En esta tesis se presenta el diseño teórico de tres absorbedores de vibración basados en inersor para controlar la vibración de sistemas rotor cojinete tipo Jeffcott de un grado de libertad. Estos absorbedores resultan de la integración de un absorbedor de vibración dinámico con una red mecánica basada en inersor. A esta integración se les conoce en la literatura como absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor (IDVAs). Para este trabajo de investigación se utilizaron los dispositivos IDVA-C3, IDVA-C4 e IDVA-C6, que de acuerdo con la literatura estos dispositivos producen un mayor rendimiento de supresión de vibración. Para el diseño de estos dispositivos se utilizaron dos técnicas de optimización: la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio de rendimiento  $H_{\infty}$ . Derivado de la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida, se obtuvieron ecuaciones analíticas simplificadas para los parámetros óptimos de diseño de los tres dispositivos absorbedores de vibración. Mientras que, de la aplicación del criterio de rendimiento  $H_{\infty}$  se obtuvieron soluciones numéricas para los parámetros óptimos de diseño de los dispositivos de absorción de vibración. De la comparación numérica y gráfica de los resultados obtenidos a partir de la implementación de las dos técnicas de optimización, se concluyó que las ecuaciones simplificadas para el diseño teórico de los IDVAs derivadas de la técnica de los puntos fijos extendida, son válidas para el diseño de estos dispositivos. Adicionalmente, se observó que el IDVA-C3 proporciona el mayor rendimiento de supresión de vibración en comparación con el IDVA-C4 e IDVA-C6 y por supuesto es mejor que el DVA clásico.

# ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1 .....	1
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>1.1 Planteamiento del problema</b> .....	3
<b>1.2 Justificación</b> .....	5
<b>1.3 Hipótesis</b> .....	6
<b>1.4 Objetivos</b> .....	6
<b>1.5 Metas</b> .....	7
<b>1.6 Limitantes</b> .....	7
<b>1.7 Metodología</b> .....	8
CAPÍTULO 2 .....	10
<b>ESTADO DEL ARTE</b> .....	10
<b>2.1 Tipos de control de vibración en rotores</b> .....	10
<b>2.2 Absorbedor dinámico de vibración (antecedentes)</b> .....	13
<b>2.3 Rotor Jeffcott</b> .....	15
<b>2.4 Inersor</b> .....	16
<b>2.5 Redes mecánicas con inersor</b> .....	17
<b>2.6 Aplicaciones del inersor en el campo automotriz</b> .....	18
CAPÍTULO 3 .....	20
<b>MARCO TEÓRICO</b> .....	20
<b>3.1 Dinámica de rotores</b> .....	20
<b>3.2 Absorbedor dinámico de vibración</b> .....	22
<b>3.3 Teorema <math>\pi</math> de Buckingham</b> .....	24
<b>3.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange</b> .....	25
<b>3.5 Teorema de Vieta</b> .....	26
<b>3.6 Optimización</b> .....	27
<b>3.7 Técnica de los puntos fijos</b> .....	28
<b>3.8 Optimización <math>H_\infty</math></b> .....	29
CAPÍTULO 4 .....	31
<b>MODELO MATEMÁTICO Y FRF</b> .....	31
<b>4.1 Modelo matemático del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con las redes mecánicas basadas en inersor</b> .....	31

CAPÍTULO 5 .....	37
<b>OPTIMIZACIÓN DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE CON LAS REDES MECÁNICAS</b> .....	37
<b>5.1 Técnica de los puntos fijos extendida .....</b>	37
<b>5.2 Índice de rendimiento <math>\mathcal{H}_\infty</math> .....</b>	49
<b>5.3 Resultados .....</b>	53
CAPÍTULO 6 .....	55
<b>CONCLUSIONES.....</b>	55
<b>6.1 Trabajos futuros .....</b>	56
APÉNDICE A .....	57
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	61

# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1. VISTA SUPERIOR DEL ROTOR CON UN SISTEMA DE ABSORCIÓN DINÁMICO BASADO EN INERSOR. ....	4
FIGURA 2.1. VISTA SUPERIOR DEL ROTOR CON; A) EL PRIMER TIPO DE SISTEMA DE ABSORCIÓN DINÁMICA DVA TRADICIONAL, B) SEGUNDO TIPO DE SISTEMA DE ABSORCIÓN DINÁMICA DVA NO-TRADICIONAL (NDVA) [4]. ....	11
FIGURA 2.2. ESQUEMA EXPERIMENTAL DEL ROTOR CON CHUMACERA MÓVIL [3]. ....	12
FIGURA 2.3. ABSORBEDORES DINÁMICOS DE VIBRACIÓN: (A) ABSORBEDOR DINÁMICO DE VIBRACIÓN TRADICIONAL (TDVA) (B) ABSORBEDOR DINÁMICO DE VIBRACIÓN BASADO EN INERSOR (IDVA) [35]. ....	14
FIGURA 2.4. ROTOR-COJINETE TIPO JEFFCOTT [22]. ....	16
FIGURA 2.5. SÍMBOLO DEL INERSOR. ....	17
FIGURA 2.6. REDES MECÁNICAS BASADAS EN INERSOR [35]. ....	18
FIGURA 2.7. KIMI RAIKKONEN EN EL GRAN PREMIO DE ESPAÑA 2005 CONDUCIENDO EL MCLAREN MP4-20 QUE LO CONDUJO A LA VICTORIA CON AYUDA DEL INERSOR [36]. ..	19
FIGURA 3.1. ESQUEMA DEL ROTOR JEFFCOTT CLÁSICO [29]. ....	20
FIGURA 3.2. DVA NO AMORTIGUADO [30]. ....	23
FIGURA 3.3. DVA AMORTIGUADO [30]. ....	23
FIGURA 3.4. MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN. ....	28
FIGURA 3.5. GRÁFICA DE UN DVA DONDE SE PUEDE APRECIAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTADOS DEL SISTEMA CUANDO EL AMORTIGUAMIENTO ES CERO E INFINITO [25]. ....	29
FIGURA 4.1. ESQUEMA DEL MODELO DE ROTOR TIPO JEFFCOTT CON EL DISPOSITIVO ABSORBEDOR IDVA-C3. ....	32
FIGURA 4.2. ESQUEMA DE MODELO ROTOR JEFFCOTT IMPLEMENTANDO EL ARREGLO IDVA-C4. ....	33
FIGURA 4.3. ESQUEMA DE MODELO ROTOR JEFFCOTT IMPLEMENTANDO EL ARREGLO IDVA-C6. ....	34
FIGURA 5.1. GRÁFICA DE $H(\Omega)$ CON LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS. ....	43
FIGURA 5.2. GRÁFICA DE $H(\Omega)$ CON LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS DE LA RED MECÁNICA C4. ..	44
FIGURA 5.3. GRÁFICA DE $H(\Omega)$ CON LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS DE LA RED MECÁNICA C6. ..	45
FIGURA 5.4. GRÁFICA DE $H(\Omega)$ CON LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS INCLUYENDO LA RELACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO ÓPTIMO. ....	47
FIGURA 5.5. COMPARACIÓN DE LAS CURVAS FRF, UTILIZANDO LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS ( $\mu_{\acute{o}pt} = 0.2, q_{\acute{o}pt} = 1, \eta_{\acute{o}pt} = 1.054092553$ ) Y PRINCIPALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO ÓPTIMO $\zeta_{\acute{o}pt} = 0.1799547747$ , PARA UN VALOR DE RELACIÓN DE MASAS DE $\beta = 0.1$ . ....	47

FIGURA 5.6. COMPARACIÓN DE LAS CURVAS FRF, UTILIZANDO LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS  
 $(\mu_{\acute{o}pt} = 0.1818181818, q_{\acute{o}pt} = 1.036523114, \eta_{\acute{o}pt} = 0.9198662110)$  Y  
PRINCIPALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO ÓPTIMO  $\zeta_{\acute{o}pt} = 0.04339046731$ , PARA UN  
VALOR DE RELACIÓN DE MASAS DE  $\beta = 0.1$ ..... 48

FIGURA 5.7. COMPARACIÓN DE LAS CURVAS FRF, UTILIZANDO LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS  
 $(\mu_{\acute{o}pt} = 0.1487603306, q_{\acute{o}pt} = 0.9534625893, \eta_{\acute{o}pt} = 1.222222222)$  Y  
PRINCIPALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO OPTIMO  $\zeta_{\acute{o}pt} = 0.04913290911$ , PARA UN  
VALOR DE RELACIÓN DE MASAS DE  $\beta = 0.1$ ..... 48

FIGURA 5.8. COMPARACIÓN DE LAS CURVAS FRF OPTIMAS DEL IDVA-C3, NORMA  $H(\Omega)_{\infty}$  VS  
PUNTOS FIJOS (EFPT), CONSIDERANDO LA CONDICIÓN INICIAL  $\beta = 0.1$ , LOS  
PARÁMETROS ÓPTIMOS PARA LA TÉCNICA DE PUNTOS FIJOS SON  $\mu_{\acute{o}pt} = 0.2, q_{\acute{o}pt} =$   
 $1, \eta_{\acute{o}pt} = 1.054092553, \zeta_{\acute{o}pt} = 0.1799547747$  Y PARA  $H(\Omega)_{\infty}$  SON  $\eta_{\acute{o}pt}, IDVA -$   
 $C3 = 1.050847, \mu_{\acute{o}pt}, IDVA - C3 = 0.240460, q_{\acute{o}pt}, IDVA - C3 = 0.980756,$   
 $r_{\acute{o}pt}, IDVA - C3 = 0.956980, \zeta_{\acute{o}pt}, IDVA - C3 = 0.172338.$  ..... 51

FIGURA 5.9. COMPARACIÓN DE CURVAS FRF ÓPTIMAS E ÍNDICE DE BANDA DE SUPRESIÓN DE  
VIBRACIONES DE IDVA-C3, IDVA-C4, IDVA-C6 Y EL DVA CLÁSICO CON RESPECTO A  
UNA ESTRUCTURA SIN CONTROL..... 51

## TABLA DE NOMENCLATURA

LETRA/SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
$L$	Lagrangiano
$T$	Energía Cinética
$U$	Energía Potencial
DVA	Absorbedor dinámico de vibración
IDVA	Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor
ISDVA	Absorbedor dinámico de vibración en serie basado en inersor
NDVA	Absorbedor de vibración dinámico no tradicional
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersor
$M$	Masa correspondiente al Disco
$m$	Masa
$\mu$	Relación de masas
$q$	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas
$\zeta$	Factor de amortiguamiento
$\Omega$	Relación de frecuencia forzada
$m_u d \omega^2$	Excitación Inercial
$x_2, x_1, x$	Desplazamientos
$m_x, m_y$	Masa secundaria
$k_{1x}, k_{2x}$	Rigidez
$K_x, K_y$	Rigidez correspondiente a la masa principal (Disco)
$c_x, c_y$	Amortiguamiento
$b_x, b_y$	Inertancia

# CAPÍTULO 1

## **INTRODUCCIÓN**

La rotodinámica trata sobre el estudio del comportamiento de la maquinaria que opera de forma rotatoria a grandes velocidades. Combina elementos tanto de vibraciones como de dinámica estructural. Las máquinas rotativas son muy populares en aplicaciones de ingeniería, se pueden ver aplicaciones desde tornos, turbinas, motores eléctricos, generadores de energía, etc. El estudio de la dinámica de estos sistemas atrae la atención para el desarrollo y perfeccionamiento de modelos matemáticos, con la finalidad de predecir el comportamiento de los sistemas rotativos, mejorar la eficiencia y rendimiento de la máquina rotativa.

Una fuente común de la vibración en los sistemas rotodinámicos es el desequilibrio de masas que a la vez genera desbalance. Esto ocurre cuando el eje principal del momento de inercia del componente giratorio no coincide con el eje de rotación. Dichos rotores se someten periódicamente a oscilaciones que provocan vibraciones que generan fuerzas indeseables que se transmiten directamente a los elementos mecánicos, así como, soportes y cojinetes del rotor. En la práctica, un rotor no se puede equilibrar perfectamente, independientemente del método que se utilice, y el mejor estado de equilibrio alcanzable al comienzo de la vida útil de un rotor tiende a deteriorarse con el uso. Por otra parte, el fenómeno de la resonancia que ocurre cuando la frecuencia de excitación se iguala con una frecuencia natural del rotor, genera que los efectos del desbalance sean catastróficos para el sistema, por lo que es necesario proponer métodos y/o dispositivos para atenuar este tipo de vibraciones.

A lo largo de los últimos años se han propuesto diferentes tipos de control de vibraciones con los cuales utilizando distintos métodos han beneficiado la eficiencia de los

rotores. En la literatura se pueden encontrar métodos de control tanto activos como pasivos, como, por ejemplo: el control activo utilizando una suspensión electromecánica, también el control de vibraciones mediante un absorbedor dinámico pasivo.

De Igual forma la utilización de chumaceras móviles para la atenuación de vibraciones en sistemas rotatorios y el uso de chumaceras hidrodinámicas entre otros, con el objetivo de obtener una mejor respuesta vibratoria.

El modelo del rotor tipo Jeffcott se ha estudiado ampliamente y a pesar de que su configuración sea simple, se aplica en problemas prácticos de rotores y el fenómeno de vibraciones asociado a él se observa muy frecuentemente en aplicaciones de ingeniería. Este tipo de rotor puede demostrar un comportamiento dinámico complejo que puede ayudar a comprender mejor las necesidades en el campo de control de vibración, como, por ejemplo, la presencia de una velocidad crítica y el efecto del amortiguamiento en la respuesta del sistema.

El rotor tipo Jeffcott consiste en un eje de longitud  $l$ , girando a una velocidad angular  $\omega$  con un disco de masa  $m$  y momento polar de inercia  $J$  montado a la mitad del claro entre los soportes o chumaceras. En el contexto de las máquinas rotatorias, particularmente en el modelo del rotor Jeffcott, uno de los parámetros más importantes y difíciles de estimar es la llamada excentricidad, definida como la distancia radial entre el centro geométrico de rotación y el centro de masa del disco. De este parámetro, de la masa y la velocidad del sistema depende la fuerza centrífuga de perturbación endógena, ocasionada por el desbalance, que representa una de las principales causas de vibraciones en el sistema. En tal sentido se ha reportado en la literatura el uso de técnicas de identificación y de estimación de parámetros para dar solución al problema de incertidumbre en los modelos de máquinas rotatorias.

La vibración anormal del sistema de rotor puede afectar el estado de funcionamiento de la maquinaria giratoria y puede provocar accidentes catastróficos.

## 1.1 Planteamiento del problema

La principal fuente de generación de vibración en las máquinas rotatorias es causada por el desbalance, esto provoca vibraciones que generan fuerzas indeseables que se transmiten a los elementos mecánicos del rotor. Específicamente hablando de vibraciones mecánicas, es un campo ampliamente estudiado y el objetivo principal ha sido el de mitigar vibraciones y buscar un sistema rotodinámico más eficiente.

La invención del inersor se ha popularizado y se ha vuelto parte primordial en el diseño de sistemas de control pasivo de vibraciones de sistemas mecánicos. La absorción de vibraciones es una de las aplicaciones potenciales del inersor, se ha estudiado el problema de diseñar redes basadas en inersores para mitigar vibraciones a una frecuencia específica. A partir de entonces se han propuesto diversas configuraciones de redes mecánicas IDVA's para la absorción de vibración en aquellas frecuencias.

En la literatura se puede encontrar una variedad de esquemas de control de vibraciones para los sistemas rotodinámicos. Yinlong Hu, Michael Z.Q. Chen [1], proponen IDVA's remplazando el amortiguador en el TDVA (tradicional amortiguador dinámico de vibraciones) con algunas redes mecánicas basadas en inersor. Los resultados obtenidos indican que al agregar un inersor junto con un resorte al TDVA obtienen una mejora de más del 20% y el 10% para los rendimientos de  $H_{\infty}$  y  $H_2$ . Además, para el rendimiento  $H_{\infty}$ , la banda de frecuencia efectiva se puede ampliar aún más utilizando un inersor. Lo que sugiere dos cosas: La primera es que los sistemas de vibración basados en inersor reducen significativamente las vibraciones y la segunda es que al utilizar el método de optimización  $H_{\infty}$  se alcanza el objetivo de minimizar la amplitud de vibración resonante del sistema dinámico.

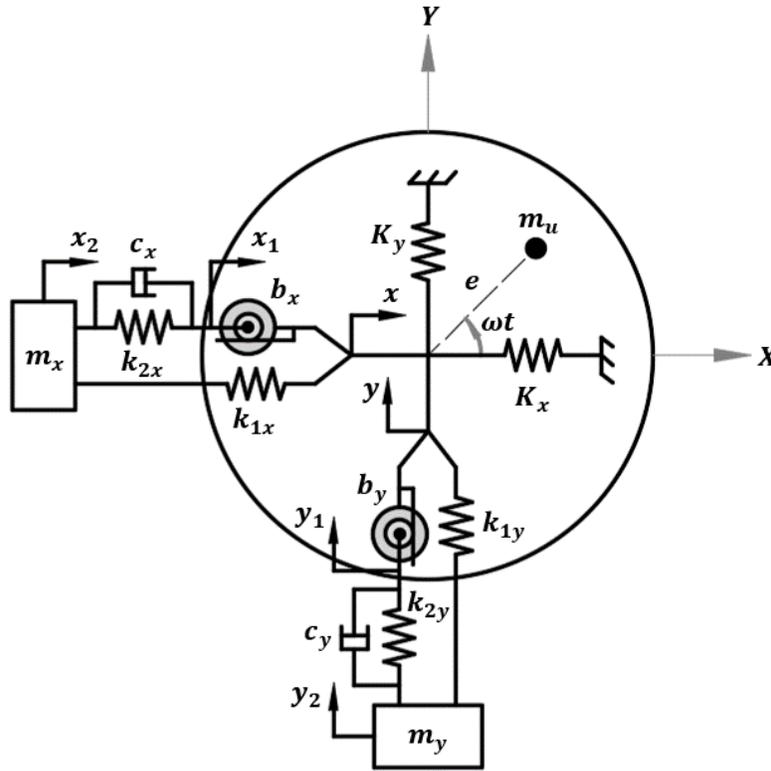


Figura 1.1. Vista Superior del rotor con un sistema de absorción dinámico basado en inersor.

El método de diseño óptimo estándar de  $H_\infty$  se basa en la teoría del punto fijo, que fue bien documentada para la optimización del amortiguador dinámico de vibraciones (DVA) del sistema de un solo grado de libertad por Den Hartog [2]. Por consiguiente, el principal objetivo de la optimización  $H_\infty$  es mejorar la respuesta de estado estable del sistema primario. Razón por la cual en este trabajo de tesis se aborda la estructura de rotor tipo Jeffcott que se observa en la Figura 1.1 donde se realizarán todas las actividades marcadas en la sección de objetivos y metas.

El modelo propuesto en la Figura 1.1 es una configuración de un sistema de rotor tipo Jeffcott clásico. Para determinar el comportamiento dinámico del inersor, se propone una fuerza de excitación externa tipo armónica. Para el diseño óptimo del dispositivo se implementarán los siguientes criterios de optimización: la técnica de puntos fijos extendida y la técnica  $H_\infty$ . Posteriormente, se compararán los resultados obtenidos entre las diferentes redes mecánicas.

## 1.2 Justificación

El fenómeno de la resonancia que ocurre cuando la frecuencia de excitación se iguala con una frecuencia natural del rotor, genera que los efectos del desbalance sean catastróficos para el sistema. El rotor no se puede equilibrar perfectamente, independientemente de la metodología de balanceo que se utilice (coeficientes de influencia, balanceo modal, etc). Además, por lo regular los métodos de balanceo de rotores requieren de varias corridas para lograr el balanceo del sistema. Asimismo, el sistema rotodinámico tiende a deteriorarse con el uso, provocando vibraciones indeseables y fuerzas que se transmiten a sus diferentes partes mecánicas.

Adicionalmente, las vibraciones están dentro de las principales causas de fallas en máquinas y estructuras tales como: desgaste, pérdida de función e incluso fracturas. Por ello, se han empleado diferentes sistemas que ayuden a controlar las amplitudes de vibración, implementando el sistema de amortiguamiento, el cual tiene como objetivo absorber y disipar la energía vibratoria, evitando que alcancen un estado crítico.

El control de las amplitudes de vibración en los sistemas oscilantes puede lograrse agregando al sistema original, llamado sistema principal, una masa secundaria o auxiliar unida mediante resortes y amortiguadores viscosos. Si el sistema principal sufre una perturbación o excitación por fuerza o por desplazamiento, el sistema secundario correctamente sintonizado generará un equilibrio dinámico de fuerzas y en consecuencia se logrará una reducción de la vibración del sistema principal. En el caso del sistema rotor-cojinete, esto permite que el sistema pueda trabajar cerca o en resonancia, a bajos niveles de vibración o que el rotor pueda pasar por la resonancia de forma segura hasta alcanzar su velocidad nominal de operación.

Por otro lado, la integración de las redes mecánicas basadas en inersor han incrementado el rendimiento dinámico del DVA clásico. Es por ello que, en este trabajo de tesis se implementará un sistema de absorción de vibraciones basado en las redes mecánicas con inersor, para el control pasivo de vibraciones en los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott. Cabe mencionar que el diseño óptimo de la configuración propuesta no se ha estudiado anteriormente.

Por otro lado, los conocimientos adquiridos en el desarrollo de esta tesis se pueden extrapolar para el análisis y control pasivo de vibraciones en las suspensiones automotrices. Este trabajo puede ayudar a implementar nuevos sistemas de absorción de vibración en vehículos, principalmente hablando en el sistema de suspensión.

## **1.3 Hipótesis**

El acoplamiento de las redes mecánicas basadas en inersor al sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott correctamente sintonizadas, incrementará los porcentajes de reducción y ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general:**

Diseñar de forma teórica absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor para controlar la vibración de sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott de dos grados de libertad.

### **1.4.2 Objetivos particulares:**

- Obtener el modelo matemático del rotor tipo Jeffcott con los absorbedores de vibración.
- Aplicar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el objetivo de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo de los absorbedores dinámicos propuestos.
- Obtener numéricamente soluciones óptimas para el criterio de rendimiento  $H_{\infty}$  con el objetivo de minimizar las amplitudes de vibración del rotor tipo Jeffcott sujeto a vibración armónica.
- Obtener los incrementos en el porcentaje de reducción de vibración y el incremento del ancho de banda de los dispositivos analizados en comparación con el DVA clásico.
- Escribir la tesis con base en los resultados obtenidos.

## 1.5 Metas

- Desarrollo del modelo matemático del sistema rotor-cojinete con el sistema de absorbedor de vibración mediante la aplicación del formulismo Euler-Lagrange.
- Implementar tres redes mecánicas basadas en inersor: IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6.
- Desarrollo de ecuaciones algebraicas para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño, que minimizan las amplitudes de vibración del sistema rotor-cojinete, mediante la implementación de la técnica de optimización de los puntos fijos extendida.
- Obtener de forma numérica los valores de los parámetros necesarios para el diseño de los absorbedores de vibración de alto rendimiento basados en inersor, mediante la implementación de la técnica de optimización  $H_{\infty}$ .
- Realizar las comparaciones entre las técnicas de optimización de forma gráfica.

## 1.6 Limitantes

- Los análisis se realizarán tomando como base el modelo matemático del rotor tipo Jeffcott.
- Se diseñarán los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor solo de forma teórica.
- Los análisis se limitarán solo a tres dispositivos de absorción de vibración: IDVA-C3, IDVA-C4 y el IDVA-C6.

## 1.7 Metodología

Se implementará la siguiente metodología, que se basa en el método de investigación tecnológica presentado por Canales et al [3]. Que consta de las siguientes fases:

1. **Documentación.** En este apartado se contempla la búsqueda de información de un tema específico, recolección y clasificación de datos. Todo esto en conjunto servirá para la elaboración del estado del arte y el marco teórico de la investigación a realizar.
2. **Determinación del problema.** Se puntualiza sobre que se va a realizar la investigación, de manera concreta. En este caso se propone el diseño de absorbedores de vibración basados en inersor para el control pasivo de la vibración de los sistemas rotor-cojinete tipo Jeffcott.
3. **Creación de la hipótesis.** En esta etapa se señala lo que se quiere demostrar, desempeña un papel fundamental en el proceso de la investigación ya que sirve de puente, de intermediación entre la teoría y los hechos empíricos en la búsqueda de nuevos conocimientos objetivos que permitan enriquecer o ajustar datos.

Para esta investigación la hipótesis es la siguiente:

*El acoplamiento de las redes mecánicas basadas en inersor al sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott correctamente sintonizadas, incrementará los porcentajes de reducción y ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.*

4. **Definición del método.** Se utilizarán las ecuaciones de equilibrio de Newton y la mecánica Lagrangiana para el desarrollo del modelo matemático que rige el comportamiento dinámico del rotor con los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor. Obteniendo las funciones de respuesta en frecuencia del sistema con los IDVAs, se formularán dos problemas de optimización, los cuales se abordarán a partir de las técnicas de optimización: puntos fijos extendida y  $H_{\infty}$ .
5. **Resolución, validación y verificación.** Se dará solución a los problemas de optimización formulados a partir de la técnica de los puntos fijos extendida y del índice de rendimiento  $H_{\infty}$ . La validación de los resultados obtenidos se realizará

mediante la comparación numérica y gráfica de los valores arrojados por las dos técnicas de optimización.

- 6. Análisis de resultados y conclusiones.** Obteniendo los resultados analíticos se comparan las diferentes redes mecánicas con las detalladas en la literatura. Se evalúa si se cumplieron los objetivos y metas propuestos
- 7. Redacción del informe final.** En esta última etapa se realiza la redacción de todo el proceso de investigación, así como los resultados obtenidos. Se debe cumplir con los objetivos de tal forma que sea coherente y entendible para el lector.

# CAPÍTULO 2

## **ESTADO DEL ARTE**

### **2.1 Tipos de control de vibración en rotores**

En la actualidad existen diferentes métodos para el control de vibraciones, una gran cantidad de autores han escrito diferentes artículos en los cuales proponen diferentes tipos de control, tanto activo como pasivo.

Heidari [4], plantea el control de vibraciones del rotor Jeffcot mediante un absorbedor dinámico pasivo, desarrollado por actuadores magnéticos. Para examinar este nuevo método, se aplican dos tipos diferentes de sistemas de absorbedores dinámicos pasivos para controlar las vibraciones desequilibradas del rotor Jeffcott. En el primer tipo de sistema absorbente mostrado en la Figura 2.1, el amortiguador está ubicado entre la masa del absorbedor y el disco y en el segundo tipo, está ubicado entre la masa del absorbedor y la tierra física.

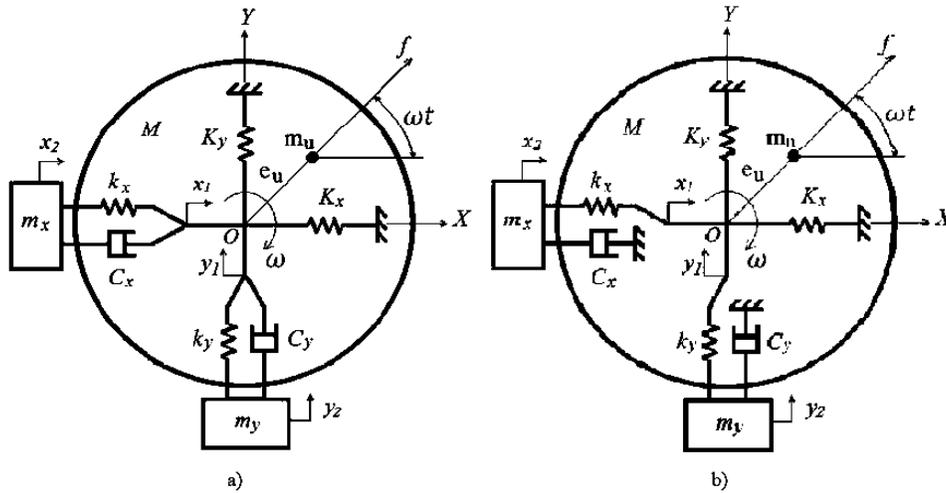


Figura 2.1. Vista superior del rotor con; a) El primer tipo de sistema de absorción dinámica DVA tradicional, b) Segundo tipo de sistema de absorción dinámica DVA no-tradicional (NDVA) [4].

Por otra parte, Tehrani et al. [5], plantean la mitigación de oscilaciones no lineales de un sistema de rotor Jeffcott con un amortiguador optimizado y un disipador de energía no lineal. La implementación de un amortiguador de masa sintonizada (TMD) y un disipador de energía no lineal se sugieren como solución para evitar que se produzca contacto entre el disco y el estator. La masa y la posición angular de los absorbedores determinan su eficiencia para resistir la fuerza de excentricidad producida por el disco, su rigidez y coeficientes de amortiguamiento determinan el desplazamiento de alcance del absorbedor. Posteriormente, para determinar la confiabilidad del desempeño de cada absorbedor, se estudia el comportamiento del sistema para diferentes valores de sus parámetros, tales como velocidad de rotación, rigidez, juego y excentricidad en presencia de cada absorbedor.

Colín Ocampo et al. [6], proponen la atenuación de vibración de un sistema rotatorio utilizando una chumacera móvil. Presentan un análisis teórico-experimental del comportamiento vibratorio de un sistema rotatorio, la chumacera móvil tiene como objetivo modificar la longitud efectiva del sistema y como consecuencia se cambia la rigidez del rotor. El control de rigidez dinámica se basa en un análisis de la respuesta en frecuencia, control de velocidad y el uso de rampas de excitación de tipo lineal con el objetivo de evadir las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia mientras el sistema

rotatorio pasa a través de una velocidad crítica. Para la parte experimental vista en la Figura 2.2 se diseñó un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott con una chumacera móvil, para lo cual se implementó una metodología de control semi-activo que involucra secuencias de diferentes trayectorias de la chumacera móvil. Los resultados obtenidos en las pruebas, muestran que la metodología de control de vibraciones en un rotor mediante esta chumacera, permite evadir las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia mientras el sistema rotatorio pasa a través de alguna velocidad crítica.

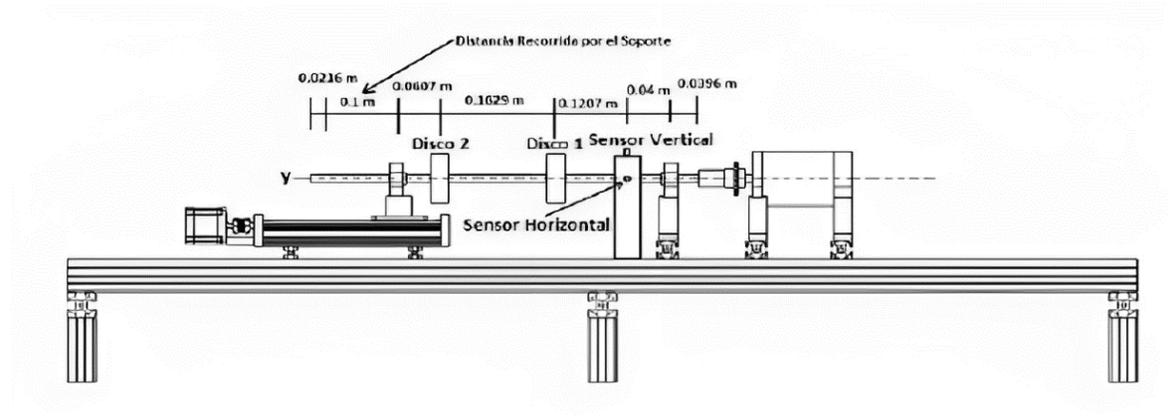


Figura 2.2. Esquema experimental del rotor con chumacera móvil [3].

Ramírez et al. [7] proponen un modelo de elemento finito (FEM) para obtener la respuesta vibratoria de un rotor utilizando el rotor cojinete tipo Jeffcott clásico. Simultáneamente, en la investigación añadieron al mismo tiempo las aproximaciones analíticas para el comportamiento de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para chumaceras hidrodinámicas cortas. Además, realizaron el análisis de la respuesta vibratoria y armónica de la estructura. Como conclusión obtuvieron que la adición de los efectos de la chumacera genera cambios en la respuesta vibratoria al añadir también otros elementos de rigidez y amortiguamiento, lo que facilitó la operación en estado estacionario. Desde el análisis modal y armónico, la operación del mismo a la velocidad propuesta es también estable.

Mendoza-Larios et al. [8] proponen una metodología para balancear varios modos de vibración a la vez de un sistema de rotor-cojinete mediante lo que se denomina discos de balanceo activo. Determinan la magnitud del desbalance y su posición angular en el rotor, por lo que proponen un identificador en línea basado en la técnica de identificación

algebraica. Desarrollaron un modelo matemático en elemento finito para un sistema rotatorio de múltiples grados de libertad, donde se consideró un elemento viga con cuatro grados libertad por nodo, en este modelo se consideraron los efectos de la inercia rotatoria, momentos giroscopios, deformaciones por cortante y amortiguamiento interno y externo, así como la implementación al sistema rotor-cojinete de los discos de balanceo activo.

El control de la vibración del rotor Jeffcott desequilibrado mediante el uso de actuadores magnéticos con dos soportes de rotor fue investigado por Jang et al. [9]. Das et al. [10] presentaron el sistema de rotor Jeffcott flexible controlado, que fue excitado por el movimiento de la base. En ese sistema, el actuador de control era magnético y estaba ubicado en el centro del eje. Song et al. [11] controlaron las vibraciones del rotor Jeffcott mediante cojinetes magnéticos con un nuevo método. En su método, el estator de cojinete magnético se consideró como la masa absorbente y se conectó al chasis del sistema mediante un resorte y un amortiguador. Chatteraj et al. [12] encontraron que el soporte podría generar un gran cambio en la amplitud de vibración del rotor vertical Jeffcott, cuando el rotor funcionaba cerca de la condición resonante. Lu et al. [13] investigaron el comportamiento bifurcacional de un sistema de rotor flexible de varios tramos bajo fuerzas desequilibradas debido al cambio de velocidad. Pavlovskaja y Karpenko [14] discutieron el comportamiento no lineal del rotor Jeffcott y encontraron que su estabilidad variaba con el cambio de la precarga. Darpe [15] presentó la matriz de flexibilidad del rotor Jeffcott con fisura inclinada y extrajo las características de respuesta de desequilibrio.

## **2.2 Absorbedor dinámico de vibración (antecedentes)**

En las últimas décadas, la investigación en el campo del control de vibraciones ha resultado en innumerables artículos relacionados con la aparición de dispositivos mecánicos denominados absorbedores dinámicos de vibración (DVA's por sus siglas en inglés) o también conocidos como amortiguadores de masas sintonizadas (TMD's por sus siglas en inglés), pero muy pocos se han implementado para el control de vibraciones de sistemas rotor-cojinete.

Los problemas de vibraciones asociados a los sistemas rotor-cojinete se deben principalmente al desbalance. Por tanto, se han desarrollado diversas metodologías cuya finalidad es la de corregir el desbalance en el sistema rotor-cojinete, mediante la adición o sustracción de una masa física en el sistema. También, se han implementado diversos dispositivos para el control de vibraciones en los sistemas rotor-cojinete tales como: chumaceras móviles, chumaceras magnetorreológicas, discos de balanceo activo, absorbedores dinámicos de vibración, entre otros.

En la literatura se entiende como “absorbedor de vibraciones” a un dispositivo pasivo adherido a la estructura que se desea controlar la vibración. Este consta de una masa, un resorte y un amortiguador, como se observa en la Figura 2.3. Por lo tanto, el término pasivo se utiliza para destacar que los parámetros de sintonización no varían con las condiciones externas de excitación, es decir, sus valores permanecen constantes.

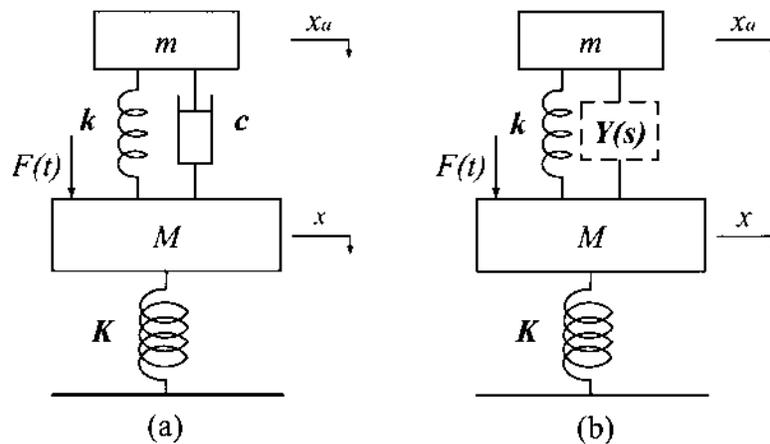


Figura 2.3. Absorbedores dinámicos de vibración: (a) Absorbedor dinámico de vibración tradicional (TDVA) (b) Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor (IDVA) [35].

El primer tipo de absorbedor consistió en un sistema masa-resorte, el cual fue aplicado por primera vez en 1909 por Frahm [16], solo se empleó un resorte, y fue útil solo en una banda estrecha de frecuencia. También propuso reducir el movimiento de balanceo de los barcos, así como las vibraciones de los cascos.

En 1928, Ormondroyd y Den Hartog [17], calcularon soluciones analíticas para el buen desempeño del DVA, descubrieron que hay dos puntos fijos en los que la respuesta de frecuencia del sistema original es independiente del coeficiente de amortiguación. Los

llamaron puntos fijos y calcularon la frecuencia natural óptima del sistema equiparando el valor de la respuesta de frecuencia del sistema en los dos puntos.

Ren [18] presentó un nuevo sistema de absorbedor en el que el amortiguador se coloca entre la masa absorbente y la tierra mecánica. En este nuevo enfoque, calculó los valores óptimos de los parámetros del sistema de absorción utilizando la técnica de los puntos fijos.

Liu K. y Liu J. [19] utilizaron los sistemas de absorción introducidos por Ren [20] para controlar las vibraciones de un sistema masa-resorte-amortiguador y calcularon los valores óptimos de los parámetros del sistema absorbedor en esta condición.

Harik et al. [20] controlaron las vibraciones del sistema masa-resorte-amortiguador utilizando un sistema de absorción pasivo. En este sistema, la masa del absorbedor se ubicó entre la masa del sistema original y la tierra mecánica, y los parámetros del sistema absorbedor se determinaron de tal manera que la amplitud máxima de vibración del sistema original tuviera el valor más bajo.

## **2.3 Rotor Jeffcott**

En la Figura 2.4 se muestra el rotor tipo Jeffcott de masa única, este sistema fue abordado por primera vez por Jeffcott en 1919. El estudio de la dinámica del rotor Jeffcott es el punto de partida para los fundamentos de la dinámica flexible de los rodamientos del rotor. Con este modelo, ahora era posible explicar cómo un rotor podía pasar por arriba de su velocidad crítica. El rotor Jeffcott es un disco único montado simétricamente sobre un eje elástico uniforme. En el análisis del rotor Jeffcott original, no se consideraron los cojinetes de película flexible o fluida. La respuesta de desequilibrio del rotor Jeffcott se ha descrito mediante dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para describir el movimiento dinámico del sistema.

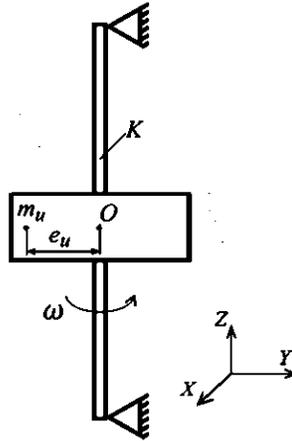


Figura 2.4. Rotor-cojinete tipo Jeffcott [22].

Hasta la fecha, la mayoría de las contribuciones sobre el rotor Jeffcott se basan en el modelo determinista, que se establece por el modelo de elementos finitos. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas, los sistemas de rotor de gran tamaño, como maquinarias rotativas, difícilmente se pueden modelar con precisión debido a la complejidad e incertidumbre de la estructura y el entorno, por lo que es una tarea desafiante para predecir su comportamiento dinámico

## 2.4 Inersor

Smith en 2002 [21], propuso el inersor (Figura 2.5), un dispositivo mecánico de dos terminales que tiene la propiedad de que la fuerza aplicada en sus dos terminales es proporcional a la aceleración relativa entre ellos y la constante de proporcionalidad se llama inercia la cual tiene unidades de kilogramo. Este dispositivo se ha aplicado con éxito primeramente en los sistemas de suspensión de los coches de carreras de Fórmula Uno, y ahora, las aplicaciones del inersor se extendieron a diversos sistemas mecánicos, como las suspensiones de vehículos y los sistemas de supresión de vibraciones, en diferentes áreas de la ingeniería. Recientemente, se ha demostrado teóricamente la reducción de las frecuencias naturales de los sistemas de vibración mediante el uso del inersor.

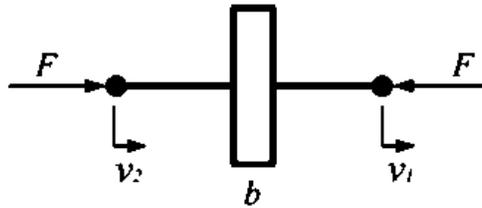


Figura 2.5. Símbolo del inersor.

La absorción de vibraciones es una de las aplicaciones potenciales del inersor. En [22], se estudió el problema de diseñar redes mecánicas basadas en inersor para controlar vibraciones en un rango de frecuencias específico. A partir de entonces, se ha propuesto la supresión de la vibración en una frecuencia de banda ancha mediante el uso de inersores. En [23], una configuración basada en inersor se empleó entre pisos adyacentes para suprimir la vibración de un edificio de varios pisos. En [24], soluciones óptimas para varios aisladores basados en inersor se derivaron algebraicamente sobre la base de un sistema de aislamiento de vibraciones "uniaxial". En [25], se propuso una nueva configuración que incorpora un inersor y se aplicó a sistemas mecánicos en cascada (en forma de cadena). En [26], se investigó la dinámica de un absorbedor de masa sintonizado con un amortiguador viscoso adicional y un inersor unido al péndulo.

## 2.5 Redes mecánicas con inersor

Una red mecánica es un arreglo de dispositivos mecánicos que trabajan en conjunto para proporcionar un amortiguamiento equivalente. Estas pueden estar formadas por resortes, amortiguadores e inersores dispuestos en serie o en paralelo. En la Figura 2.6 se presentan seis configuraciones de redes mecánicas basadas en inersor. Estas configuraciones se clasifican como:

- C1: Arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.
- C2: Arreglo en serie de un inersor y un amortiguador.
- C3: Arreglo en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador.
- C4: Arreglo en serie de un inersor con un arreglo en paralelo de un resorte y un amortiguador.

- C5: Arreglo en serie de un amortiguador con un arreglo en paralelo de un resorte y un inersor.
- C6: Arreglo en serie de un resorte con un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.

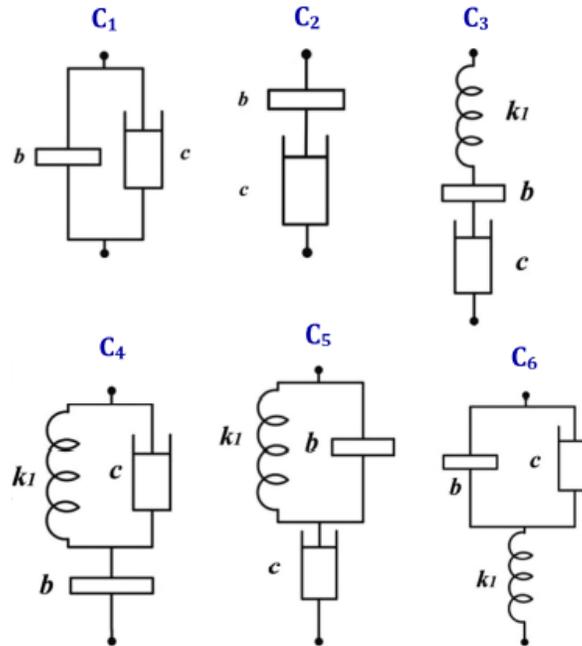


Figura 2.6. Redes mecánicas basadas en inersor [35].

## 2.6 Aplicaciones del inersor en el campo automotriz.

Una aplicación muy popular del inersor en los sistemas automotrices se realizó en el año 2008 con la implementación de un nuevo componente de suspensión mecánica, llamado “J-damper” en la Fórmula 1, como se muestra en la Figura 2.7. Sus orígenes fueron académicos y resultó ser la mejor implementación de trabajos académicos en circuitos mecánicos y eléctricos de la Universidad de Cambridge.



Figura 2.7. Kimi Raikkonen en el Gran Premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo condujo a la victoria con ayuda del inersor [36].

Por otra parte, Yang L. et al. [27] proponen un diseño óptimo de suspensiones automotrices utilizando un absorbedor de vibración, considerando un modelo lineal de un cuarto de automóvil excitado por un perfil de carrera aleatorio. Se derivan y validan tres funciones objetivo analíticas las cuales son, la comodidad, agarre a la carretera y espacio de trabajo. La rigidez del resorte de suspensión, el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez adicional del resorte se consideran como variables de diseño. Y a pesar de la simplicidad del modelo, se proporciona cierta comprensión sobre las ventajas y desventajas de la adopción de un resorte adicional en serie con el amortiguador en las suspensiones de automóviles.

X. Q. Sun. et al. [28] investigan la influencia de las no linealidades del inersor de husillo de bolas en el rendimiento de aislamiento de vibraciones del sistema de suspensión del vehículo. Eso se logra mediante la construcción de un modelo de mecánica no lineal del inersor de husillo de bolas con fricción en el ensamble del husillo de bolas y el efecto elástico del husillo. Se demuestra a partir del resultado que el rendimiento de aislamiento de vibración en el del sistema de suspensión del vehículo está ligeramente influenciado al considerar las no linealidades del inersor.

# CAPÍTULO 3

## MARCO TEÓRICO

### 3.1 Dinámica de rotores

En 1919 Jeffcott presentó un modelo de rotor incluyendo amortiguamiento consistente en un disco centrado sobre un eje flexible de sección circular y soportado por dos cojinetes en sus extremos. Desde ese momento en el mundo anglosajón a ese tipo de modelo simplificado se le conoce como rotor de Jeffcott [29], ver Figura 3.1.

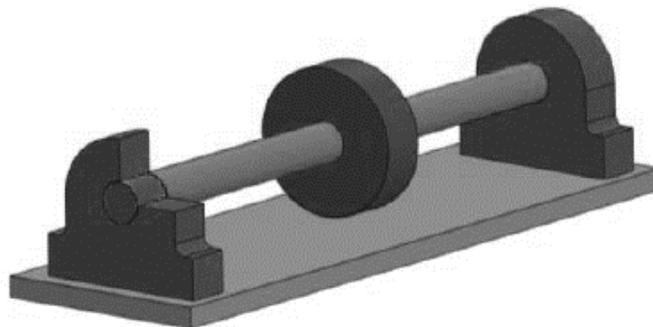


Figura 3.1. Esquema del rotor Jeffcott clásico [29].

El comportamiento dinámico de este modelo simplificado de rotor es similar al de un sistema vibratorio de masas y resortes, pero existen algunas diferencias. En el análisis hay que diferenciar entre la velocidad de rotación  $\Omega$  y la velocidad  $\omega$  con la que el rotor recorre una órbita al deformarse a flexión. Si el rotor está girando de forma estable a una

velocidad  $\Omega$ , y se le aplica un impacto tangente en el sentido de giro, se deformará a flexión orbitando a una frecuencia  $\omega$  en el mismo sentido (Forward Whirling FW), pero si el impacto se aplica en sentido opuesto al de rotación, seguirá una órbita en sentido opuesto al giro (Backward Whirling BW). Las frecuencias de estas órbitas son las frecuencias naturales del rotor.

Cuando la velocidad de rotación coincide con una de estas frecuencias naturales se le denomina velocidad crítica. Si existe simetría axial los modos BW no pueden ser excitados por las fuerzas de desequilibrio con lo que las órbitas que se observarán serán FW. Si el disco no está centrado axialmente los efectos giroscópicos incrementan las frecuencias FW reduciendo las BW.

En 1924 Campbell [29] representó en el eje vertical de una gráfica la frecuencia de la órbita y en el eje horizontal la frecuencia de giro del rotor. La intersección de la línea síncrona con las curvas correspondientes a las frecuencias naturales FW y BW proporcionan las correspondientes velocidades críticas.

En la práctica rara vez se aprecian los modos BW, los modos FW generan tensiones constantes en el material, mientras que los BW generan tensiones alternantes con frecuencia al doble del valor de la frecuencia de rotación, esto ocasiona que aparezca un amortiguamiento estructural que además será más alto cuanto mayor sea la velocidad, este amortiguamiento puede suprimir los picos BW en la respuesta del eje debido al desbalance.

Al introducirse la rigidez en los apoyos se modifican las velocidades críticas del rotor. En un eje soportado por dos cojinetes, si la rigidez de los apoyos es reducida las dos primeras velocidades críticas corresponden a movimientos de cuerpo rígido, uno cilíndrico y el otro cónico. Al subir la rigidez de los apoyos esos modos se transforman en modos flexibles. Las precargas introducen términos adicionales de rigidez, modificando las ecuaciones de movimiento y así pues las velocidades críticas, esto se puede apreciar en rotores con elevadas cargas de empuje. El efecto del par medio es reducido, pero una componente pulsante en el par transmitido puede generar inestabilidad lateral del rotor.

El amortiguamiento interno del rotor y los coeficientes de rigidez cruzados de los cojinetes y sellos son las fuentes principales de inestabilidad. Las fuerzas asociadas a esos

términos cruzados inyectan potencia al rotor y si esta potencia excede la extraída por las fuerzas de amortiguamiento directas, el rotor se vuelve inestable. Hay rotores que funcionan con Oil whirl (remolino de aceite en el cojinete) sin demasiados problemas si se mantiene la amplitud de la oscilación dentro del cojinete por debajo del 50% de la holgura del cojinete [29].

## **3.2 Absorbedor dinámico de vibración**

El absorbedor de vibración se utiliza comúnmente en maquinaria que opera a velocidad constante, debido a que este dispositivo se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo sólo dentro de una banda angosta de frecuencias.

Algunas aplicaciones comunes del absorbedor de vibración comprenden herramientas reciprocantes como lijadoras, sierras y compactadoras, así como grandes motores de combustión interna los cuales funcionan a velocidad constante (para un consumo mínimo de combustible). En estos sistemas, el absorbedor de vibración ayuda a balancear las fuerzas reciprocantes. Sin un absorbedor de vibración, las fuerzas reciprocantes desbalanceadas podrían hacer que el dispositivo fuera imposible de mantener o controlar

En el diseño de los absorbedores dinámicos de vibraciones deben considerarse las propiedades particulares de cada sistema primario, de acuerdo a esto el sistema secundario puede ser un:

### **1. Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado.**

Los absorbedores de vibración no amortiguados se aplican a sistemas primarios de amortiguamiento propio bajo o nulo donde la fuerza sobre el sistema primario tiene una frecuencia de excitación dentro de un rango limitado bien conocido. El absorbedor de vibración se utiliza comúnmente en máquinas que operan a velocidad constante, porque el absorbedor de vibraciones se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo dentro de una banda angosta de frecuencias, ver Figura 3.2.

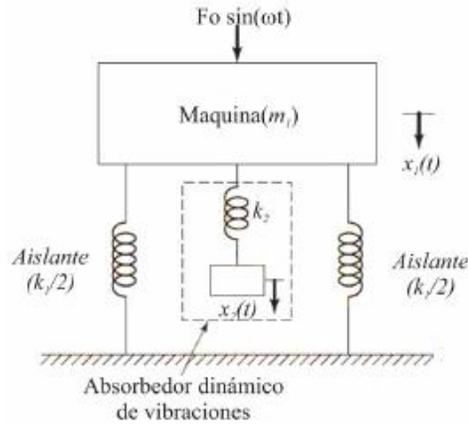


Figura 3.2. DVA no amortiguado [30]

## 2. Absorbedor de vibración dinámico amortiguado.

El absorbedor de vibración dinámico anterior elimina el pico de resonancia original en la curva de respuesta del sistema, pero introduce dos nuevos picos de resonancia. De este modo, el sistema experimenta grandes amplitudes cuando pasa a través del primer pico durante los procesos de arranque y detención del sistema. La amplitud de la frecuencia se puede reducir agregando un absorbedor de vibración amortiguado, ver Figura 3.3.

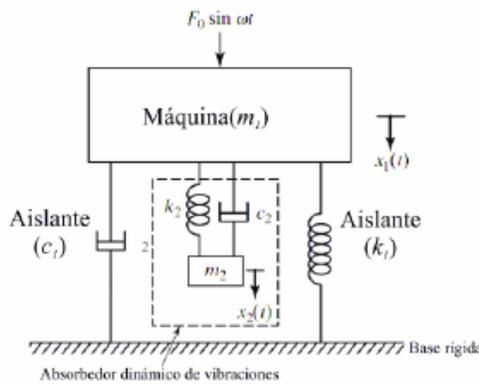


Figura 3.3. DVA amortiguado [30].

Una máquina o sistema puede experimentar vibración excesiva si en ella actúa una fuerza cuya frecuencia de excitación casi coincide con una frecuencia natural de la máquina o sistema. En tales casos, la vibración de la máquina o sistema se puede reducir por medio de un neutralizador de vibración o absorbedor de vibración dinámico, el cual es simplemente otro sistema de resorte-masa. El absorbedor de vibración dinámico se diseña

de modo que las frecuencias naturales del sistema resultante se alejen de la frecuencia de excitación. Además, para el proceso de diseño del DVA se considera que el sistema primario es de un grado de libertad.

### 3.3 Teorema $\pi$ de Buckingham

El teorema  $\pi$  de Buckingham [31] establece que en un problema físico en que se tengan “n” variables que incluyan “x” dimensiones distintas; las variables se pueden agrupar en “n-x” grupos adimensionales independientes.

Siendo  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  las variables que intervienen en el problema, se debe tener una función que las relacione:  $f = (V_1, V_2, \dots, V_n) = 0$ ; si  $(G_1, G_2, \dots, G_{n-x})$ , representan los grupos adimensionales en función de las variables  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ ; el teorema de Buckingham también establece que existe una función de la forma:  $g(G_1, G_2, \dots, G_{n-x}) = 0$ .

El método para determinar, los grupos adimensionales  $G_i, i = 1, \dots, n - x$ ; consiste en la selección de “x” de las “n” variables, con diferentes dimensiones, de manera que contengan entre todas las “x” dimensiones, y emplearlas como variables repetitivas, formando cada uno de los “n-x” grupos adimensionales a partir de la siguiente expresión genérica:

$$G_i = V_j, \prod_{j=x-n+1}^{j=n} V_j^{a_{ij}} \quad i = 1, \dots, x - n \quad (3.1)$$

A los grupos adimensionales, se les suele denominar parámetros adimensionales  $\Pi$  de Buckingham, al ser su expresión un producto adimensional (símbolo de producto =  $\Pi$ ).

Los exponentes “a” se determinan por la condición de que cada grupo resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables por ellas mismas y los exponentes de M, L, T, se igualan a cero (adimensionalidad del parámetro).

### 3.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange

La deducción de las ecuaciones de Euler Lagrange parte de la consideración del estado instantáneo del sistema y del concepto de desplazamiento virtual sobre el estado instantáneo, es decir, desde un principio diferencial.

Las ecuaciones de Lagrange son una formulación de la Mecánica equivalente a la de las ecuaciones de Newton. En primer lugar, tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Por otro lado, permiten describir la dinámica ignorando las fuerzas de vínculo, que en general son desconocidas y que muchas veces no interesa conocer. Además, son derivables de un principio variacional, tal como lo demostró Hamilton en la década de 1830. Con el correr de los años resultó que el principio de Hamilton encontraría generalizaciones más allá de la Mecánica Clásica, en la Teoría de Campos y finalmente en la Mecánica Cuántica.

Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las de Newton para la dinámica de una partícula. La generalización a muchas partículas es trivial. Sea una partícula en 3D, sujeta a fuerzas conservativas. La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{w}^2) \quad (3.2)$$

Y la energía potencial se calcula a partir de:

$$U = U(r) = U(x, y, w) \quad (3.3)$$

El Lagrangiano (o función lagrangiana, o lagrangiana) se define como:

$$L = T - U = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{w}) \quad (3.4)$$

Se toman sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \text{ la fuerza en dirección } x, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x, \text{ el momento lineal en dirección } x \end{aligned} \quad (3.5)$$

Y lo mismo en las otras direcciones. Derivando esta última con respecto al tiempo, y usando la Segunda Ley de Newton  $F_x = \dot{p}_x$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{p}_x = F_x = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3.6)$$

O sea:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad y: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad w: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} = \frac{\partial L}{\partial w}$

El argumento es del todo reversible, así que estas ecuaciones de Lagrange (en coordenadas cartesianas por ahora) son equivalentes a las de Newton.

### 3.5 Teorema de Vieta

Las fórmulas de Vieta relacionan las raíces de un polinomio con los coeficientes de éste. Específicamente, si el polinomio es de grado  $n$ , sus coeficientes son los polinomios simétricos elementales de sus raíces. El resolver las ecuaciones involucra obtener todas sus raíces (complejas o reales), de forma exacta o aproximada [33].

Si se tiene un polinomio cuadrático, y si las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente,  $x^2 + ax + b = 0$ , son  $p$  y  $q$ , entonces se puede factorizar como:

$$x^2 + ax + b = (x - p)(x - q) \quad (3.7)$$

por definición de raíz. (Para simplificar la notación se ha elegido un coeficiente 1 para la variable  $x^2$ , debido que para utilizar el teorema de Vieta se requiere que el polinomio sea mónico [33]).

Ahora se expande el lado derecho y se obtiene:

$$x^2 + ax + b = x^2 - (p + q)x + pq \quad (3.8)$$

Se tiene a la vista las fórmulas de Vieta para  $n = 2$ :  $a = -(p + q)$  y  $b = pq$ . En otras palabras, el producto de las raíces es el término independiente  $b$  y su suma es el opuesto del coeficiente de la variable  $x$ .

Un conjunto similar de relaciones se puede encontrar para polinomios mónicos cúbicos ( $n = 3$ ) expandiendo el lado derecho de la identidad  $x^3 + ax^2 + bx + c = (x -$

$p)(x - q)(x - r)$ . Lo que resulta en las fórmulas de Vieta para  $n = 3$ :  $a = -(p + q + r)$ ,  $b = pq + qr + rp$  y  $c = -pqr$ .

## 3.6 Optimización

La teoría de optimización está constituida por un conjunto de resultados y métodos analíticos enfocados en encontrar e identificar al mejor candidato de entre una colección de alternativas. Se clasifican en:

- Lineales
- No lineales

Este método se puede aplicar si antecede a un problema matemático para determinar soluciones óptimas que cumplan con ciertas características específicas de los modelos matemáticos.

El planteamiento abstracto general para resolver problemas donde exista el empleo del término “optimizar” incluirá la Minimización o Maximización el cual está compuesto de los siguientes elementos.

- Variables de decisión: El primer elemento clave en la formulación de problemas de optimización es la selección de variables independientes que sean adecuadas para caracterizar los posibles diseños candidatos y las condiciones de funcionamiento del sistema.
- Restricciones: Se establecen mediante ecuaciones o inecuaciones las relaciones existentes entre las variables de decisión. Estas relaciones son debidas entre otras razones, a limitaciones en el sistema, llamadas restricciones del sistema.
- Función objetivo: También llamado índice de rendimiento o criterio de elección. Este es el elemento utilizado para decidir los valores adecuados de las variables de decisión que resuelven el problema de optimización. La función objetivo permite determinar los mejores valores para las variables de decisión.

Teorema: Si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer, a ese punto se le conoce como máximo. Por el contrario, si una función es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender, a este punto se le define como mínimo, ver Figura 3.4.

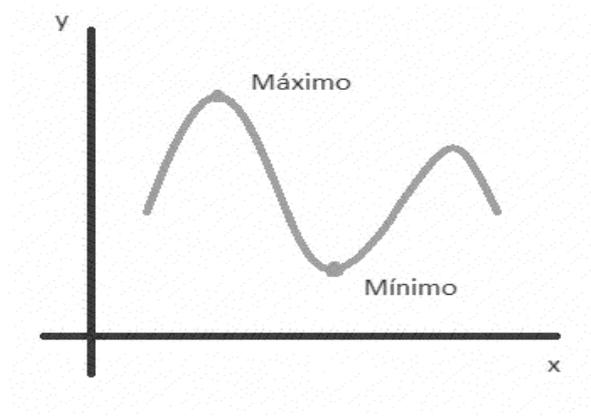


Figura 3.4. Máximo y Mínimo de una función.

Para el problema de optimización es necesario conocer las primeras y segundas derivadas de la función de objetivo.

### 3.7 Técnica de los puntos fijos

La teoría de los puntos fijos, fue bien documentada para la optimización del absorbedor dinámico de vibraciones (DVA) para un sistema de un solo grado de libertad por Den Hartog [2]. Consiste en minimizar la amplitud máxima de la respuesta adimensional (normalizada) de un sistema mecánico.

La teoría de los puntos fijos se basa principalmente en dos condiciones de operación de los sistemas con DVA:

- Cuando el amortiguamiento es nulo en el sistema, es decir, es igual a cero.
- Cuando el valor de amortiguamiento tiende a infinito.

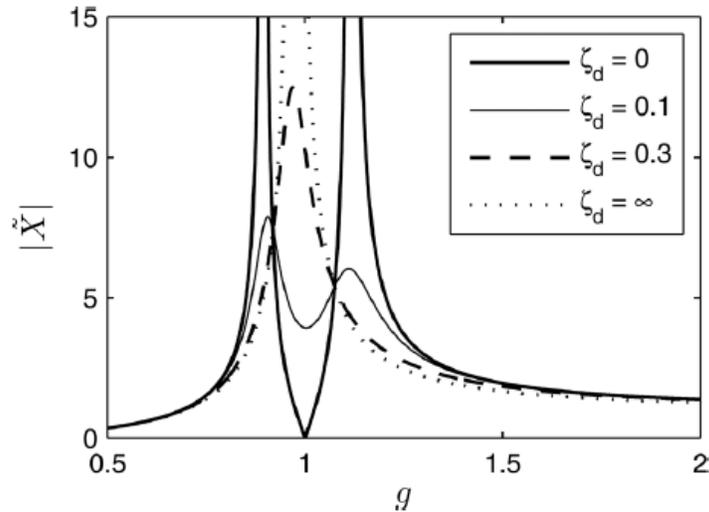


Figura 3.5. Gráfica de un DVA donde se puede apreciar el comportamiento de los estados del sistema cuando el amortiguamiento es cero e infinito [25].

Estas dos condiciones conducen a los llamados “puntos invariantes” o “puntos fijos” respecto a la relación de amortiguamiento del sistema y se determina mediante la respuesta en estado estable.

En la Figura 3.5 se muestra el comportamiento cuando la relación de amortiguamiento toma otros valores arbitrarios incluyendo las dos condiciones de operación límite del DVA. El objetivo principal de la técnica de puntos fijos es encontrar la respuesta óptima entre varios puntos, el estándar  $H_\infty$  óptimo se basa en esta teoría.

### 3.8 Optimización $H_\infty$

La optimización  $H_\infty$  tiene como objetivo minimizar la amplitud de vibración en las frecuencias de resonancia de un sistema dinámico. Mejora la respuesta de estado estable del sistema primario conocida como la norma  $\|H_\infty\|$ .

La técnica  $H_\infty$  es de las más conocidas en la teoría de la minimización de la respuesta vibratoria en el control pasivo de vibraciones mediante DVA's. La interpretación cuando se minimiza la norma  $\|H_\infty\|$  es crear un equilibrio dinámico entre las frecuencias de resonancia del sistema.

$$\min \left( \max_{P_{opt}} |H_{IDVA}(\Omega)| \right) = \max(|H_{IDVA}(P_{opt}, \beta, \Omega)|)$$

$P_{opt}$  son los parámetros a optimizar del sistema y se restringe a que sean soluciones reales y positivas  $\{P_{opt} \geq 0\}$  de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial |H_{IDVA}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0$$

La interpretación física de las dos restricciones de la ecuación anterior, son: el intervalo físico admisible para analizar la relación de frecuencias  $\Omega$  y las limitaciones físicas de diseño para construir el dispositivo.

La idea básica para comprender esta técnica de optimización *min – máx*, radica en que en la técnica de los puntos fijos de Den Hartog se emplean los puntos fijos para minimizar de forma aproximada la norma  $||H_{\infty}||$  y en la técnica de optimización de  $H_{\infty}$  se emplean las frecuencias de resonancia para minimizar de forma exacta la norma  $||H_{\infty}||$ . Para resolver el problema de optimización de forma numérica, que se formuló en las ecuaciones anteriores, se puede utilizar el método de Nishihara, este posee una alta precisión en la resolución numérica.

# CAPÍTULO 4

## **MODELO MATEMÁTICO Y FRF**

En el siguiente capítulo se desarrollaron los modelos matemáticos descritos en el marco teórico. A continuación, se realiza el cálculo de las funciones de respuesta en frecuencia adimensional (FRF) de la estructura primaria.

### **4.1 Modelo matemático del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott con las redes mecánicas basadas en inersor**

El modelo propuesto en la Figura 4.1 es una configuración de un sistema de rotor Jeffcott clásico. Para determinar el comportamiento dinámico del rotor tipo Jeffcott, se somete a una excitación inercial de tipo armónica. Se propusieron tres arreglos de IDVA's (IDVA-C3, IDVA-C4 y IDVA-C6). Cada IDVA está compuesto por un amortiguador, un resorte y un inersor, con coeficientes de amortiguamiento, rigidez e inercia,  $c$ ,  $k_n$  y  $b$  ( $n = 1,2$ ) respectivamente, los cuales están conectados a la masa principal  $M$  (Disco) y a la masa secundaria  $m$  (Absorbedor).

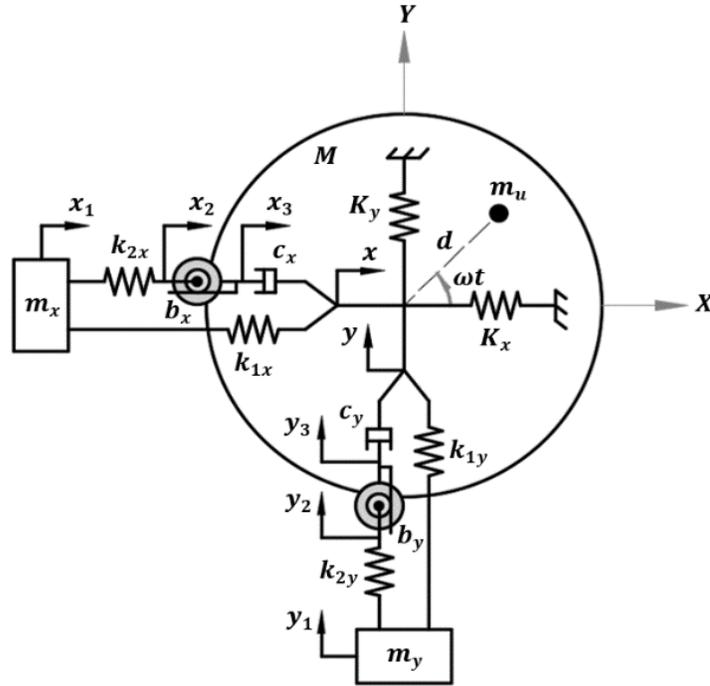


Figura 4.1. Esquema del modelo de Rotor tipo Jeffcott con el dispositivo absorbedor IDVA-C3.

Para describir el comportamiento dinámico del sistema, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas no-conservativos en su forma generalizada. Así, las ecuaciones que rigen al sistema rotodinámico de la Figura 4.1 son:

$$\begin{cases} Ms^2X + cs(X - X_3) + KX + k_1(X - X_1) = F_0 = m_u d\omega^2 \\ ms^2X_1 + k_1(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) = 0 \\ bs^2(X_2 - X_3) + k_2(X_2 - X_1) = 0 \\ bs^2(X_3 - X_2) + cs(X_3 - X) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

En la ecuación (4.1)  $X$  y  $X_1$  son los desplazamientos de la estructura primaria y la masa del absorbedor,  $F_0$  es la excitación inercial, que se configura como  $F_0 = m_u d\omega^2$  y  $\omega$  es la frecuencia de excitación del sistema. Entonces, el modelo matemático para el IDVA-C3, puede obtenerse a partir de las ecuaciones anteriores. Además, en este trabajo, también se analiza el comportamiento dinámico para el IDVA-C4 (ver Figura 4.2) e IDVA-C6 que se muestra en la Figura 4.3. Por lo tanto, los modelos matemáticos tanto para el IDVA-C4 y el IDVA-C6 se obtienen de forma similar al presentado anteriormente.

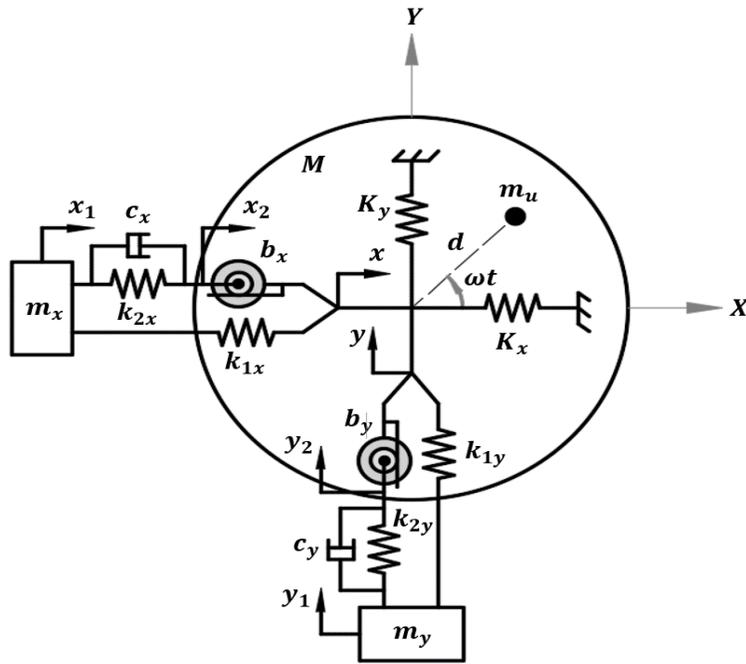


Figura 4.2. Esquema de modelo Rotor Jeffcott implementando el arreglo IDVA-C4.

A diferencia del IDVA-C3, en el cual se visualiza en serie al resorte, el amortiguador y el inersor, en esta red mecánica se encuentra el amortiguador en paralelo con el resorte y estos en conjunto, en serie con el inersor. Para el IDVA-C4 las ecuaciones que rigen su comportamiento son las siguientes:

$$\begin{cases} Ms^2X + bs^2(X - X_1) + KX + k_1(X - X_2) = m_u d \omega^2 \\ ms^2X_2 + k_1(X_2 - X) + k_2(X_2 - X_1) + cs(X_2 - X_1) = 0 \\ bs^2(X_1 - X) + k_2(X_1 - X_2) + cs(X_1 - X_2) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

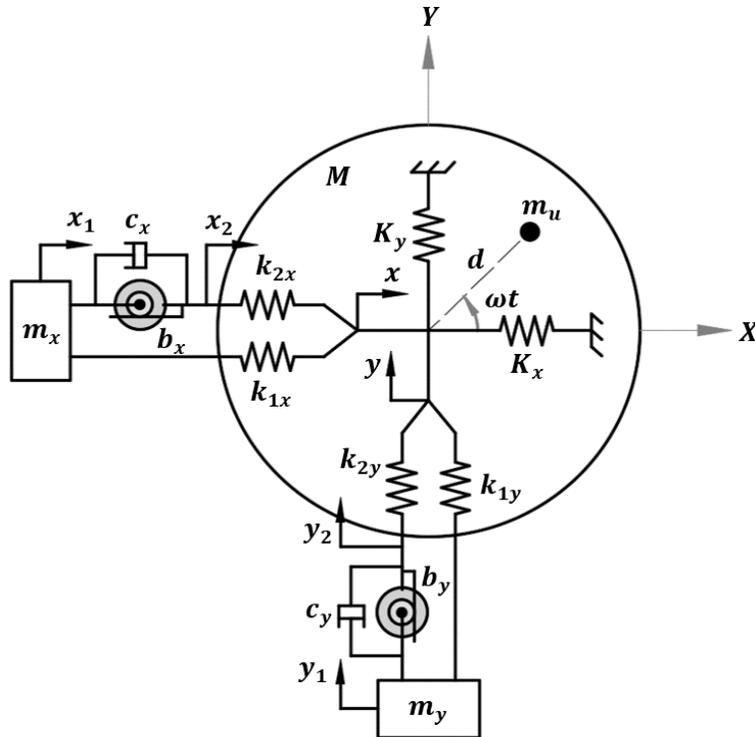


Figura 4.3. Esquema de modelo Rotor Jeffcott implementando el arreglo IDVA-C6.

Entonces, las ecuaciones de movimiento para el IDVA-C6, pueden escribirse como:

$$\begin{cases} Ms^2X + KX + k_2(X - X_1) + k_1(X - X_2) = m_u d \omega^2 \\ ms^2X_2 + bs^2(X_2 - X_1) + k_1(X_2 - X) + cs(X_2 - X_1) = 0 \\ bs^2(X_1 - X_2) + k_2(X_1 - X) + cs(X_1 - X_2) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Adicionalmente, como la excitación es de tipo armónica, el sistema representado por las ecuaciones de (4.1) a (4.3), al considerar una solución de tipo armónica, con  $C \cong 0$  y después de un desarrollo matemático, se definen las variables A, B, C, D y P para reescribir la ecuación en la forma compleja:

$$|H(\eta, q, \mu, \Omega)| = \frac{(A+B)P}{C+D} \quad (4.4)$$

Para analizar la respuesta en frecuencia adimensional del sistema primario, resulta ventajoso seleccionar las siguientes variables adimensionales:

$$\mu = \frac{m}{M}, q = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \zeta = \frac{c}{2m\omega_2}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \beta = \frac{m}{M}$$

Se definen parámetros adimensionales utilizando el *Teorema II de Buckingham*,  $\mu$ ,  $q$ ,  $\zeta$  y  $\Omega$ , estos representan la relación de masa, la relación de frecuencias naturales no amortiguadas, el factor de amortiguamiento y la relación de frecuencia forzada, respectivamente. El diseño del IDVA quedará especificado a partir de los valores obtenidos de estos parámetros.

Estos parámetros se aplican con la finalidad de que la respuesta en frecuencia del sistema  $|H(\eta, q, \mu, \Omega, \beta)|$  sea adimensional. En primer lugar, para el IDVA-C3 mostrado en la Figura 4.1, se sustituyen los parámetros adimensionales en el conjunto de variables A, B, C, D y P, se obtiene:

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4 \eta^2}$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\mu \Omega (\Omega^2 - q^2)}{\zeta q^3}$$

$$C = -\frac{1}{q^4 \eta^2} (-\Omega^4 \beta \eta^2 \mu q^2 - \Omega^4 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^2 \beta \eta^2 q^4 - \Omega^4 \eta^2 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^4 - \Omega^4 \beta q^2 + \Omega^2 \eta^2 \mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2 \eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{\mu \Omega (-\Omega^2 \beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)}{\zeta q^3}$$

$$P = \Omega^2$$

Se observa que la ecuación (4.4) está en su forma compleja por lo tanto utilizando el Teorema de Pitágoras y sustituyendo las variables A, B, C, D Y P, la magnitud y FRF adimensional del sistema es:

$$|H(\eta, q, \mu, \Omega, \beta)| = P \left( \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

Del mismo modo las ecuaciones (4.2) y (4.3), pueden representarse de forma adimensional. Los resultados para el IDVA-C4 son los siguientes:

$$|H(\eta, q, \mu, \Omega, \beta)| = P \left( \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4 \eta^2}$$

$$B = -\frac{2\zeta\Omega(\Omega^2\mu + \Omega^2 - q^2)}{q^3\mu\eta^2}$$

$$C = -\frac{1}{q^4\eta^2} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^4\beta\eta^2 q^4 - \Omega^4\eta^2 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^4 - \Omega^4\beta q^2 - \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2)$$

$$D = \frac{2\zeta\Omega(\Omega^4\beta\mu + \Omega^4\mu - \Omega^2\beta q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2\mu - \Omega^2 + q^2)}{q^3\mu\eta^2}$$

$$P = \Omega^2$$

Por último, para el IDVA-C6, se obtiene:

$$|H(\eta, q, \mu, \Omega)| = P \left( \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \frac{-\Omega^2 \eta^2 \mu q^2 - \Omega^2 \eta^2 q^2 + \eta^2 q^4 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2}{q^4 \eta^2}$$

$$B = -\frac{2\zeta\Omega(-\eta^2\mu q^2 + \Omega^2 - q^2)}{q^3\mu\eta^2}$$

$$C = -\frac{1}{q^4\eta^2} (-\Omega^4\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^4\eta^2\mu q^2 + \Omega^2\beta\eta^2 q^4 - \Omega^4\eta^2 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^4 - \Omega^4\beta q^2 + \Omega^2\eta^2\mu q^2 + \Omega^6 - \Omega^4 q^2 + \Omega^2\eta^2 q^2 - \eta^2 q^4 - \Omega^4 + \Omega^2 q^2)$$

$$D = \frac{2\zeta\Omega(-\Omega^2\beta\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\eta^2\mu q^2 - \Omega^2\beta q^2 + \eta^2\mu q^2 + \Omega^4 - \Omega^2 q^2 - \Omega^2 + q^2)}{q^3\mu\eta^2}$$

$$P = \Omega^2$$

Para determinar los valores de estos parámetros que minimizan las máximas amplitudes de vibración del sistema, se implementa la técnica de los puntos fijos, a partir de un desarrollo matemático.

# CAPÍTULO 5

## OPTIMIZACIÓN DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE CON LAS REDES MECÁNICAS

### 5.1 Técnica de los puntos fijos extendida

La técnica de los puntos fijos es una metodología que ayuda a calibrar las amplitudes de vibración generadas por la excitación del sistema mecánico. Basadas principalmente en dos condiciones del DVA; cuando el amortiguamiento del sistema toma los valores  $\zeta \rightarrow 0$  y  $\zeta \rightarrow \infty$ . Lo que conduce a encontrar los llamados puntos fijos o invariantes, que son independientes del factor de amortiguamiento.

Para la implementación de esta técnica, se considera la FRF del sistema, representada en la ecuación (5.1). Si se evalúa la FRF del sistema en las dos condiciones descritas cuando  $\zeta \rightarrow 0$  y  $\zeta \rightarrow \infty$ , se obtienen dos ecuaciones. En el caso del IDVA-C3 son:

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow 0} = \left[ \frac{A^2 \Omega^4}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} |H(\eta, q, \mu, \Omega)|_{\zeta \rightarrow 0} = & \Omega^2 [(\Omega^4 - (1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 + \eta^2q^4)^2 / (\Omega^6 + \\ & (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + (q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + \\ & (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 - \eta^2q^4)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow \infty} = \left[ \frac{B^2 \Omega^4}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

$$|H(\eta, q, \mu, \Omega)|_{\zeta \rightarrow \infty} = \Omega^2 [(-\Omega^2 + q^2)^2 / (-\Omega^4 + (1 + (\beta + 1)q^2)\Omega^2 - q^2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

De la igualación de las ecuaciones (5.1) y (5.2) se obtiene la siguiente expresión y para eliminar el exponente de segundo grado de ambos miembros se agrega un +/- enfrente del segundo miembro:

$$[(\Omega^4 - (1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 + \eta^2q^4)\Omega^2 / (\Omega^6 + (-1 + ((-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1)q^2)\Omega^4 + (q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 - \eta^2q^4)] = \pm [\Omega^2(-\Omega^2 + q^2) / (-\Omega^4 + (1 + (\beta + 1)q^2)\Omega^2 - q^2)] \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) cuando se considera el signo positivo arroja un resultado trivial:

$$-\Omega^6\beta\eta^2\mu q^2 = 0 \quad (5.4)$$

Lo que describe que la amplitud del sistema es independiente al amortiguamiento, ya que el sistema se mueve tan despacio que no se da la oportunidad para la creación de una fuerza de amortiguamiento.

Si se considera el signo negativo en la ecuación (5.3), entonces se obtiene:

$$-a\Omega^8 + b\Omega^6 + c\Omega^4 + d\Omega^2 - c = 0 \quad (5.5)$$

Con:

$$a = 2$$

$$b = \beta\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2q^2 + 2\beta q^2 + 4q^2 + 2$$

$$c = -2\beta\eta^2\mu q^4 - 2\beta\eta^2q^4 - 2\eta^2\mu q^4 - 4\eta^2q^4 - 2\beta q^4 - 2\eta^2\mu q^2 - 2\eta^2q^2 - 2q^4 - 4q^2$$

$$d = 2\beta\eta^2q^6 + 2\eta^2q^6 - 2\eta^2\mu q^4 + 4\eta^2q^4 + 2q^4$$

$$c = 2\eta^2q^6$$

Con la finalidad de reducir el grado de la ecuación (5.5) se realiza el cambio de variable  $\lambda = \Omega^2$ . También, el polinomio de la ecuación (5.5) se divide entre (-2) para convertirlo en un polinomio mónico y realizando un tratamiento algebraico resulta en:

$$a\lambda^4 - \frac{1}{2}b\lambda^3 - \frac{1}{2}c\lambda^2 - \frac{1}{2}d\lambda + cte = 0 \quad (5.6)$$

Con:

$$a = 1$$

$$b = \beta\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2\mu q^2 + 2\eta^2 q^2 + 2\beta q^2 + 4q^2 + 2$$

$$c = -2\beta\eta^2\mu q^4 - 2\beta\eta^2 q^4 - 2\eta^2\mu q^4 - 4\eta^2 q^4 - 2\beta q^4 - 2\eta^2\mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 2q^4 - 4q^2$$

$$d = 2\beta\eta^2 q^6 + 2\eta^2 q^6 - 2\eta^2\mu q^4 + 4\eta^2 q^4 + 2q^4$$

$$cte = \eta^2 q^6$$

Por otra parte, se puede obtener una ecuación equivalente a la Ecuación (5.6) expresada en función de la magnitud  $|H(\eta, q, \mu, \Omega)|$ , la cual está marcada como ecuación (5.2). Realizando un tratamiento algebraico adecuado, resulta en:

$$h = |H(\mu, q, \zeta, \Omega)|^2$$

$$h = \frac{\Omega^4(-\Omega^2 + q^2)^2}{(-\Omega^4 + (1 + (\beta + 1)q^2)\Omega^2 - q^2)^2} \quad (5.7)$$

La expresión anterior se expresa en forma de ecuación y se realiza el mismo cambio de variable hecho en la ecuación (5.6) para reducir el exponente. Por último, se convierte el polinomio en un polinomio mónico y realizando un tratamiento matemático adecuado, se obtiene la siguiente ecuación.

$$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 - d\lambda + cte = 0 \quad (5.8)$$

Con:

$$a = 1$$

$$b = \frac{((-2 - 2(\beta + 1)q^2)h + 2q^2)}{(h - 1)}$$

$$c = \frac{((2q^2 + (1 + (\beta + 1)q^2)^2)h - q^4)}{(h - 1)}$$

$$d = \frac{2q^2(1 + (\beta + 1)q^2)h}{(h - 1)}$$

$$cte = \frac{hq^4}{h - 1}$$

Para obtener las expresiones simplificadas de los parámetros para el diseño del IDVA, se emplea el *Teorema de Vieta*. Por consiguiente, las raíces de las ecuaciones (5.6) y (5.8) deben ser iguales, por lo tanto, utilizando este teorema se igualan las sumas y los productos de las raíces entre las dos ecuaciones, las cuales están en función de los coeficientes del polinomio de cada ecuación. Dichas ecuaciones se pueden expresar a partir de:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 &= \sum_{i=1}^4 \Omega_{\zeta \rightarrow \infty, i}^2 \\ \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 &= \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \\ \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 \Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2 &= \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \\ \prod_{i=1}^4 \Omega_i^2 &= \prod_{i=1}^4 \Omega_i^2 \end{aligned} \right\} \text{Conjunto de ecuaciones "Teorema de Vieta"}$$

Después de igualar las sumas de las raíces reales de las ecuaciones cuárticas (coeficiente  $\lambda^3$ ), se obtiene lo siguiente:

$$-1 + \frac{1}{2}((- \beta \mu - 2\mu - 2)\eta^2 - 2\beta - 4)q^2 = \frac{(-2 + (-2\beta - 2)q^2)h + 2q^2}{h - 1}$$

De la misma forma al sustituir los productos de las raíces reales de las ecuaciones cuárticas (términos independientes de  $\lambda$ ) se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta^2 q^6 = \frac{hq^4}{h-1}$$

Al resolver las ecuaciones simultáneamente, arrojan una solución para la variable adimensional de ajuste de frecuencias "q", y para la amplitud de vibración de los puntos invariantes "h" correspondiente a los puntos fijos. Esta solución está en función de la relación de masas  $\mu$  y se expresa como:

$$q^2 = \frac{2h+2}{(\beta\mu+2\mu+2)\eta^2(h-1)-2\beta(h+1)} \quad (5.9)$$

$$h = \frac{\eta^2 q^2}{\eta^2 q^2 - 1} \quad (5.10)$$

La ecuación (5.9) solo proporciona una condición necesaria, pero no es suficiente para producir las mismas amplitudes de vibración en frecuencias invariantes del IDVA-C3. Además, al sustituir la suma de las raíces reales de la ecuación cuartica (coeficiente  $\lambda$ ), se obtiene lo siguiente:

$$-\frac{1}{2}(2\beta\eta^2 q^6 + 2\eta^2 q^6 - 2\eta^2 \mu q^4 + 4\eta^2 q^4 + 2q^4) = \frac{2q^2(1 + (\beta + 1)q^2)h}{(h - 1)}$$

Resolviendo para  $h$  se expresa una segunda solución:

$$h = \frac{q^2(\eta^2(\beta+1)q^2+1+(\mu+2)\eta^2)}{-2+\eta^2(\beta+1)q^4+((\mu+2)\eta^2-2\beta-1)q^2} \quad (5.11)$$

Por otra parte, al sustituir la suma de las raíces reales de la ecuación cuartica (coeficiente  $\lambda^2$ ), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(-2\beta\eta^2\mu q^4 - 2\beta\eta^2 q^4 - 2\eta^2\mu q^4 - 4\eta^2 q^4 - 2\beta q^4 - 2\eta^2\mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 2q^4 - 4q^2) \\ = \frac{((2q^2 + (1 + (\beta + 1)q^2)^2)h - q^4)}{(h - 1)} \end{aligned}$$

Y resolviendo para  $h$  se obtiene una tercera solución:

$$h = \frac{q^2\left(\left((\mu+1)\beta+\mu+2\right)\eta^2+\beta\right)q^2+2+(\mu+1)\eta^2}{-1+\left(\left((\mu+1)\beta+\mu+2\right)\eta^2-\beta^2-\beta\right)q^4+\left((\mu+1)\eta^2-2\beta-2\right)q^2} \quad (5.12)$$

Igualando las ecuaciones (5.9) y (5.10) y resolviendo simultáneamente, se obtiene un segundo valor de  $q$ .

$$q^2 = \frac{\eta^2 \mu + 1}{\eta^2 (\beta + 1)} \quad (5.13)$$

Igualando ahora la ecuación (5.11) y (5.12) y resolviendo simultáneamente, se obtiene el tercer y último valor de  $q$ .

$$q^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta \eta^2 (\beta + 2)} \left( \sqrt{((\mu + 1)^2 \beta^2 + (2\mu^2 + 2\mu + 4)\beta + (\mu - 2)^2) \eta^4 + 2\beta((\mu + 3)\beta + \mu + 6) \eta^2 + \beta^2 + (1 + (\mu - 1)\eta^2)\beta + \eta^2(\mu - 2)} \right) \quad (5.14)$$

Se observa que existen tres soluciones para la variable adimensional de ajuste de frecuencias " $q$ ", así como de la amplitud de vibración de los puntos invariantes " $h$ ". Para calcular el valor adecuado de  $\mu$  se sustituyen las ecuaciones (5.13) y (5.10) en la ecuación (5.9) y resolviendo para  $\eta$  se obtiene:

$$\eta^2 = \frac{1}{2} \frac{-3\beta^2 \mu + 3\beta \mu - 2\beta^2 - 2\mu - 2\beta + \sqrt{(\beta + 1)^2 ((\beta - 2)^2 \mu^2 + (12\beta^2 - 8\beta)\mu + 4\beta^2)}}{\mu((\beta^2 - \beta + 2)\mu - 2\beta - 2)} \quad (5.15)$$

Ahora igualando la ecuación (5.13) y (5.14), se obtiene:

$$\eta^2 = \frac{1}{\beta - \mu + 1} \quad (5.16)$$

Por último, igualando estas dos últimas ecuaciones (5.15) y (5.16) se obtiene el parámetro óptimo  $\mu$  que representa la relación de masas para el IDVA-C3.

$$\mu_{\text{ópt}}(\beta) = 2\beta \quad (5.17)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (5.17) en la ecuación (5.16) se obtiene el parámetro óptimo  $\eta$  para el IDVA-C3.

$$\eta_{\text{ópt}}(\beta) = \sqrt{\frac{1}{-\beta + 1}} \quad (5.18)$$

De la misma forma, sustituyendo el valor de  $\mu$  y  $\eta$  en la ecuación (5.13), se obtiene el parámetro óptimo  $q$  para el IDVA-C3.

$$q_{\text{ópt}}(\beta) = \sqrt{1} = 1 \quad (5.19)$$

Al sustituir estos valores obtenidos, en la ecuación (5.10), se obtiene  $h$  que es la aproximación de la norma  $|H(\eta, q, \mu, \Omega, \beta)|_{\infty}$ .

$$h = \frac{1}{\beta}$$

Por lo tanto

$$|H|(\beta) = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \quad (5.20)$$

Graficando las magnitudes antes mencionadas se obtiene lo siguiente. Para  $\beta = 1$  y  $0 < \zeta \leq 0.5$

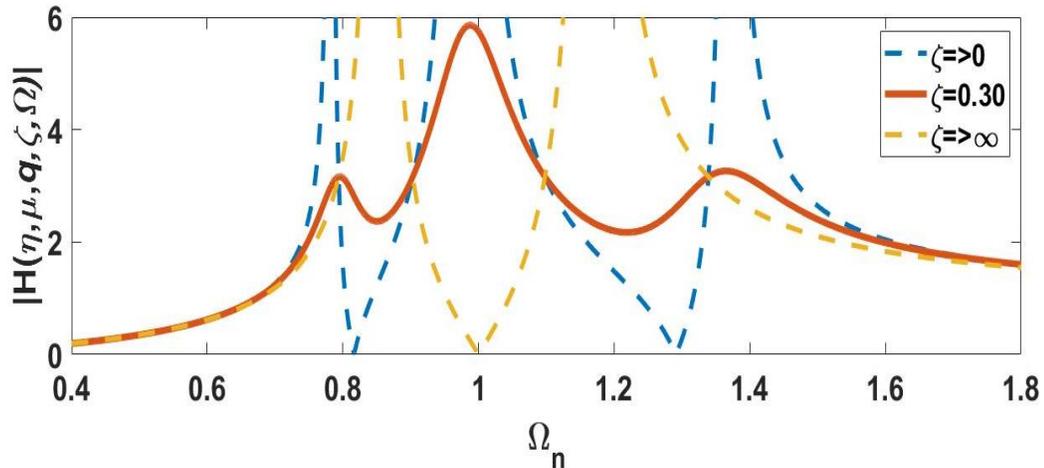


Figura 5.1. Gráfica de  $H(\Omega)$  con los parámetros óptimos.

Para el caso del IDVA-C4, después de sustituir las sumas y los productos de las raíces de los polinomios mónicos en las dos primeras expresiones del conjunto de ecuaciones del *Teorema de Vieta* y resolver simultáneamente las ecuaciones, se obtienen las variables adimensionales óptimas que se expresan como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\text{ópt}}(\beta) &= \frac{2\beta}{\beta + 1} \\ \eta_{\text{ópt}}(\beta) &= \sqrt{\frac{\beta + 1}{1 + 3\beta}} \\ q_{\text{ópt}}(\beta) &= \frac{1+3\beta}{(\beta+1)^2} \\ |H|(\beta) &= \sqrt{\frac{1 + 3\beta}{\beta(\beta^2 + 2\beta + 1)}} \end{aligned} \right\} \forall (0 < \beta < 1)$$

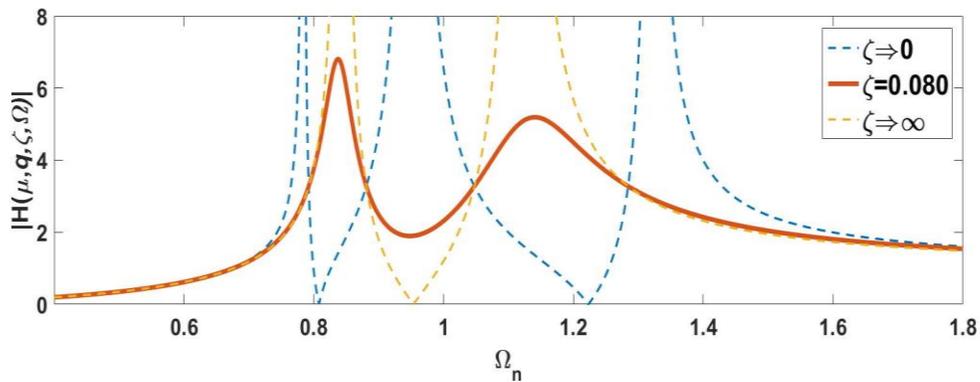


Figura 5.2. Gráfica de  $H(\Omega)$  con los parámetros óptimos de la red mecánica C4.

Del mismo modo, las variables adimensionales óptimas para el IDVA-C6 pueden escribirse como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\text{ópt}}(\beta) &= -\frac{2\beta(\beta-1)}{(\beta+1)^2} \\ \eta_{\text{ópt}}(\beta) &= \frac{-\beta - 1}{\beta - 1} \\ q_{\text{ópt}}(\beta) &= \sqrt{\frac{1}{\beta + 1}} \\ |H|(\beta) &= \sqrt{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \right\} \forall (0 < \beta < 1)$$

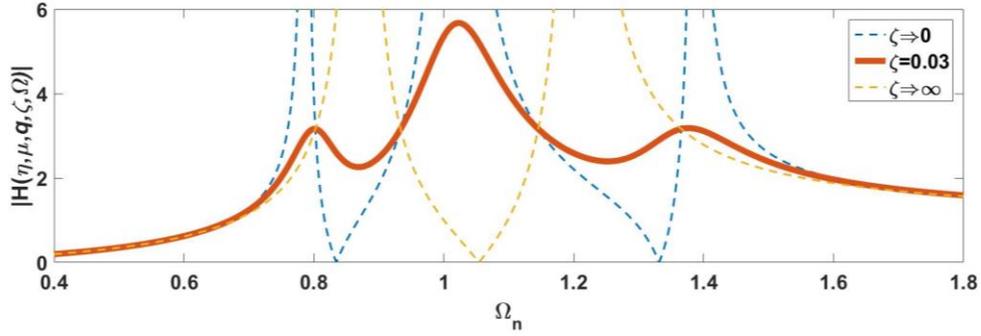


Figura 5.3. Gráfica de  $H(\Omega)$  con los parámetros óptimos de la red mecánica C6.

En la Figura 5.1 se muestra la FRF de la estructura principal del IDVA-C3, puede advertir la existencia de un valor de relación de amortiguamiento óptimo, que hace que la FRF de la estructura primaria se aplane en todo el rango de frecuencias entre los puntos fijos. Este valor se denota como  $\zeta_{opt}$ . Este comportamiento también se puede observar en las Figuras 5.2 y 5.3 para los dispositivos IDVA-C4 e IDVA-C6. Para calcular este valor de factor de amortiguamiento que aplane la FRF en todo el rango de frecuencias de operación, se utiliza la teoría de ajustes de frecuencias de Krenk. Al aplicar esta teoría para obtener el amortiguamiento óptimo del IDVA-C3, se producen tres frecuencias invariantes,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  y  $\Omega_0$  cuando  $\zeta \rightarrow 0$ . Para calcular  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  se resuelve la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la ecuación (5.7), es decir:

$$-\Omega^4 + (1 + (\beta + 1)q^2)\Omega^2 - q^2 = 0 \quad (5.21)$$

Sustituyendo el parámetro óptimo  $q_{opt}$  y resolviendo la ecuación (5.21), se obtiene que:

$$\Omega_{1\zeta \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{\beta^2 + 4\beta} + 2\beta} \quad (5.22)$$

$$\Omega_{2\zeta \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - 2\sqrt{\beta^2 + 4\beta} + 2\beta} \quad (5.23)$$

Por otra parte, la frecuencia invariante  $\Omega_0$  cuando  $\zeta \rightarrow 0$  se obtiene igualando el denominador de la ecuación (5.1) a cero y sustituyendo los parámetros óptimos  $q_{opt}$ ,  $\mu_{opt}$  y  $\eta_{opt}$ , lo que resulta en

$$\Omega_{0\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \quad (5.24)$$

Para obtener analíticamente la relación de amortiguamiento óptimo que aplanar la curva de respuesta de frecuencia de la estructura principal, se deben sustituir las soluciones de  $q_{opt}$ ,  $\mu_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$ ,  $|H|$ ,  $\Omega_{1\zeta \rightarrow \infty}$ ,  $\Omega_{2\zeta \rightarrow \infty}$  y  $\Omega_{0\zeta \rightarrow 0}$ , en la FRF del sistema con IDVA-C3. Esto producirá tres cantidades de amortiguamiento en cada frecuencia invariante ( $\Omega_{1\zeta \rightarrow \infty}$ ,  $\Omega_{2\zeta \rightarrow \infty}$  y  $\Omega_{0\zeta \rightarrow 0}$ ), es decir:

Relación de amortiguamiento para  $\Omega_{1\zeta \rightarrow \infty}$ :

$$\zeta_A = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-(8\beta-18)\beta(\sqrt{\beta^2+4\beta}\beta-\beta^2-2\sqrt{\beta^2+4\beta}+6)}}{4\beta-9} \quad (5.25)$$

Relación de amortiguamiento para  $\Omega_{2\zeta \rightarrow \infty}$ :

$$\zeta_B = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{(4\beta-9)\beta(\sqrt{\beta^2+4\beta}\beta-\beta^2-2\sqrt{\beta^2+4\beta}-6)}}{4\beta-9} \quad (5.26)$$

Relación de amortiguamiento para  $\Omega_{0\zeta \rightarrow 0}$ :

$$\zeta_C = \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + \beta} \quad (5.27)$$

Por lo tanto, la relación de amortiguamiento óptimo para el IDVA-C3 se obtienen calculando el valor RMS de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia invariante, es decir:

$$\zeta_{opt}^2 = \left( \frac{\zeta_A^2 + \zeta_B^2 + \zeta_C^2}{3} \right) \quad (5.28)$$

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{6} \sqrt{3} \sqrt{\frac{\beta(8\beta^2-5\beta-33)}{4\beta-9}} \quad (5.29)$$

En las Figuras 5.4 y 5.5 se muestran las gráficas de la FRF del sistema rotor tipo Jeffcott con el IDVA-C3. En las gráficas se utilizan los valores óptimos para los parámetros del sistema  $\mu_{opt}$ ,  $q_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$  y  $\zeta_{opt}$ . En la Figura 5.5 se observa que solo la gráfica que se realizó considerando el valor del factor de amortiguamiento óptimo, logra aplanar la FRF en todo el rango de operación del sistema.

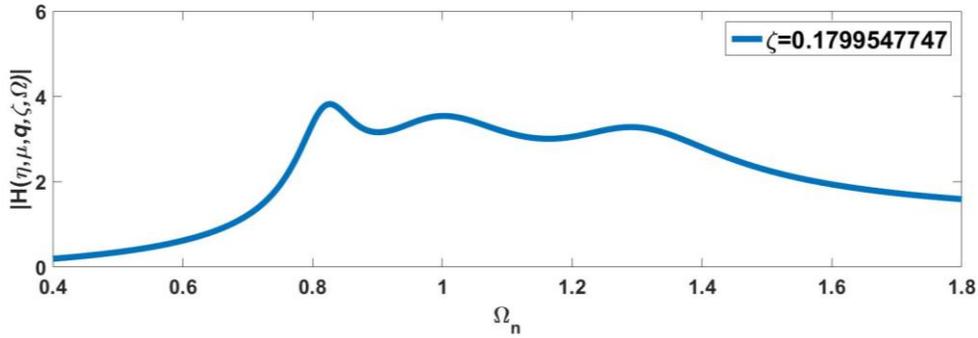


Figura 5.4. Gráfica de  $H(\Omega)$  con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.

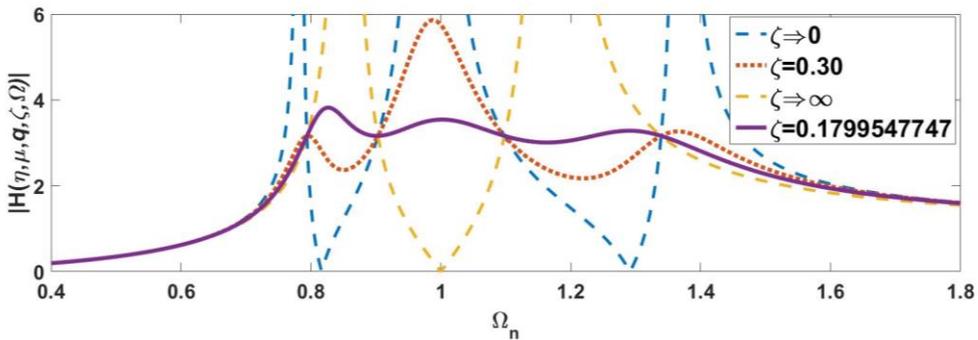


Figura 5.5. Comparación de las curvas FRF, utilizando los parámetros óptimos ( $\mu_{\text{opt}} = 0.2, q_{\text{opt}} = 1, \eta_{\text{opt}} = 1.054092553$ ) y principalmente el amortiguamiento óptimo  $\zeta_{\text{opt}} = 0.1799547747$ , para un valor de relación de masas de  $\beta = 0.1$ .

Por otro lado, para el caso del sistema rotor tipo Jeffcott con el IDVA-C4, el factor de amortiguamiento óptimo se obtiene siguiendo la misma metodología que para el caso anterior, lo que resulta en:

$$\zeta_{\text{opt}} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \sqrt{\frac{\beta^3 (13\beta - 5)}{(\beta + 1)(2\beta + 1)(3\beta + 1)^2}} \quad (5.30)$$

Las gráficas del sistema rotor tipo Jeffcott con el IDVA-C4 para diferentes valores de factor de amortiguamiento se muestran en la Figura 5.6. Asimismo, la curva que mejora el rendimiento en cuanto a supresión de vibración es aquella que se gráfica con el valor óptimo del factor de amortiguamiento, el cual es proporcionado por la ecuación simplificada (5.30)

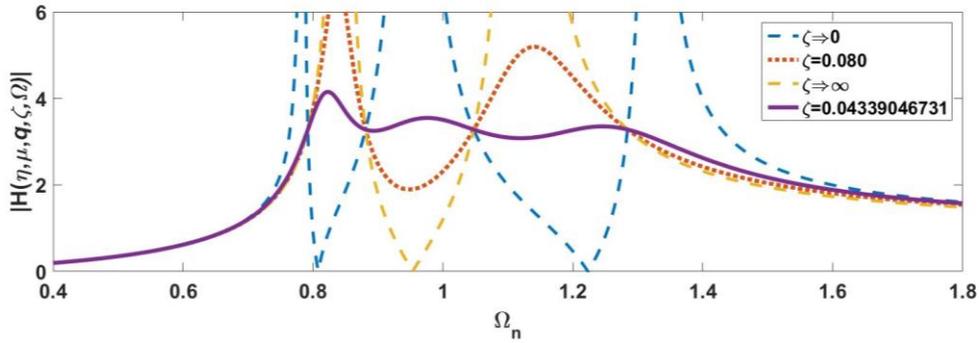


Figura 5.6. Comparación de las curvas FRF, utilizando los parámetros óptimos ( $\mu_{\text{opt}} = 0.1818181818, q_{\text{opt}} = 1.036523114, \eta_{\text{opt}} = 0.9198662110$ ) y principalmente el amortiguamiento óptimo  $\zeta_{\text{opt}} = 0.04339046731$ , para un valor de relación de masas de  $\beta = 0.1$ .

Por último, el amortiguamiento óptimo para el sistema rotor tipo Jeffcott con el IDVA-C6 es:

$$\zeta_{\text{opt}} = \frac{1.88\beta^{\frac{3}{2}}}{(\beta + 1)^2} \quad (5.31)$$

En la Figura 5.7 se muestran las gráficas de la función de respuesta en frecuencia del rotor tipo Jeffcott con el dispositivo IDVA-C6. Las gráficas se construyeron a partir de los parámetros óptimos que minimizan la amplitud de vibración del rotor tipo Jeffcott, y considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Del análisis de la figura se concluye que la gráfica que aplanar la FRF en todo el rango de operación del dispositivo absorbedor, es la que se generó tomando en cuenta el valor óptimo del factor de amortiguamiento  $\zeta$ .

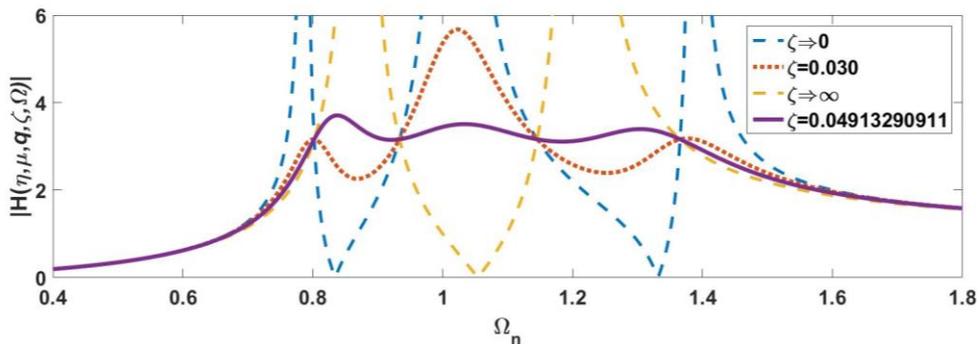


Figura 5.7. Comparación de las curvas FRF, utilizando los parámetros óptimos ( $\mu_{\text{opt}} = 0.1487603306, q_{\text{opt}} = 0.9534625893, \eta_{\text{opt}} = 1.222222222$ ) y principalmente el amortiguamiento óptimo  $\zeta_{\text{opt}} = 0.04913290911$ , para un valor de relación de masas de  $\beta = 0.1$ .

## 5.2 Índice de rendimiento $\mathcal{H}_\infty$

Como último apartado, se utiliza el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  con el objetivo de optimizar los parámetros de diseño de los IDVA mediante la minimización de las máximas amplitudes de vibración de la estructura principal en las frecuencias resonantes. Lo que se conoce comúnmente como la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$ .

Se utiliza el método de Nishihara para resolver el problema de optimización planteado. La idea novedosa de Nishihara fue proponer un artificio matemático para minimizar la FRF de la estructura principal mediante la siguiente función:

$$h = \sqrt{\frac{1}{-r^2+1}} \quad (5.32)$$

Se define la siguiente ecuación:

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} = 0 \quad (5.33)$$

Al combinar la FRF de la estructura primaria definida por la ecuación (4.5) con las ecuaciones (5.32) y (5.33) se obtiene una expresión que garantiza que las amplitudes de vibración en las frecuencias resonantes sean iguales. La expresión para el IDVA-C3 se define con la siguiente ecuación:

$$\Omega^{12} + \Omega^{10}C_1 + \Omega^8C_2 + \Omega^6C_3 + \Omega^4C_4 + \Omega^2C_5 + \Omega C_6 = 0 \quad (5.34)$$

En el Apéndice A se muestran los coeficientes  $C_1, \dots, C_6$  de la ecuación anterior, tanto para el IDVA-C3, IDVA-C4 e IDVA-C6.

De esta forma se minimiza el índice de rendimientos  $\mathcal{H}_\infty$  al minimizar la variable desconocida  $r$ . Posteriormente de la aplicación del *Teorema de Vieta*, la suma y el producto de las raíces de la ecuación (5.34) genera un conjunto de ecuaciones no lineales en términos de los coeficientes  $C_i$  para  $i = 1, \dots, 6$ , de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} f_1 &= (4C_2 - C_1^2)\sqrt{C_6} + 4C_5 = 0 \\ f_2 &= C_1C_5 + 4C_6 + 2C_3\sqrt{C_6} = 0 \\ f_3 &= 4C_6(C_1\sqrt{C_6} + C_4) - C_5^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Este sistema de ecuaciones está en función de los parámetros de diseño del absorbedor y de la variable desconocida  $r$ . Con la finalidad de resolver el sistema de ecuaciones anterior, se agrega una ecuación de restricción, la cual proporciona una condición necesaria para alcanzar una solución óptima a la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$ . La ecuación resultante se obtiene al utilizar la matriz jacobiana de la variación infinitesimal de la variable  $r$  con respecto a los parámetros de diseño del absorbedor. Esta matriz jacobiana se expresa como sigue:

$$N := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & A_1 & C_1 \\ D_2 & A_2 & C_2 \\ D_3 & A_3 & C_3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación de restricción se define por:

$$\text{Determinante } (N) = 0$$

$$A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 = 0 \quad (5.37)$$

$$\text{Determinante } (M) = 0$$

$$A_1 C_2 D_3 - A_1 C_3 D_2 - A_2 C_1 D_3 + A_2 C_3 D_1 + A_3 C_1 D_2 - A_3 C_2 D_1 = 0 \quad (5.38)$$

Así mismo, se puede observar que el proceso de optimización mediante el cálculo de la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$  utilizando el método de Nishihara se reduce a la solución del sistema de ecuaciones no lineales conformado por las ecuaciones (5.35), (5.36) y (5.37). Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los parámetros óptimos.

En la Figura 5.8 se muestra la comparación de los resultados de la FRF de la estructura principal, generadas a partir de la técnica de los puntos fijos y la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$ , considerando los parámetros óptimos  $q_{\text{ópt}}$ ,  $\zeta_{\text{ópt}}$ ,  $\mu_{\text{ópt}}$ .

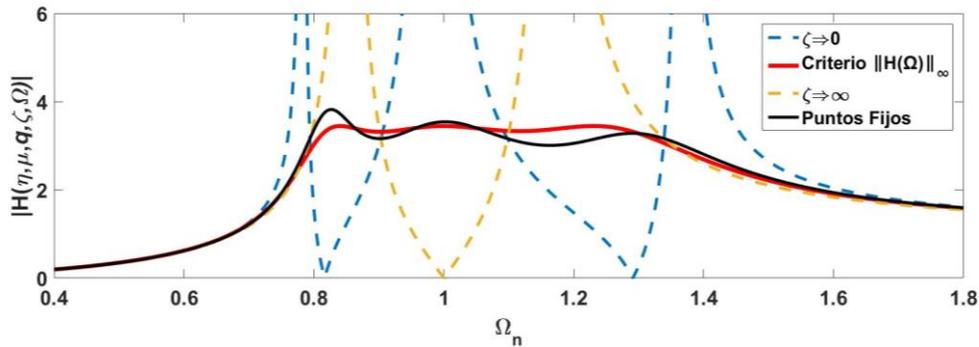


Figura 5.8. Comparación de las curvas FRF óptimas del IDVA-C3, norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$  vs puntos fijos (EFPT), considerando la condición inicial  $\beta = 0.1$ , los parámetros óptimos para la técnica de puntos fijos son  $\mu_{\text{ópt}} = 0.2$ ,  $q_{\text{ópt}} = 1$ ,  $\eta_{\text{ópt}} = 1.054092553$ ,  $\zeta_{\text{ópt}} = 0.1799547747$  y para  $\|H(\Omega)\|_\infty$  son  $\eta_{\text{ópt,IDVA-C3}} = 1.050847$ ,  $\mu_{\text{ópt,IDVA-C3}} = 0.240460$ ,  $q_{\text{ópt,IDVA-C3}} = 0.980756$ ,  $r_{\text{ópt,IDVA-C3}} = 0.956980$ ,  $\zeta_{\text{ópt,IDVA-C3}} = 0.172338$ .

De acuerdo a los resultados obtenidos en la Figura 5.8, la curva de amplitud óptima de vibración (Técnica de los puntos fijos) no es semejante a la curva generada por la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$ , por lo que el índice de rendimiento  $H_\infty$  proporciona una alta precisión en el cálculo de los parámetros óptimos.

En la Tabla 1 se puede observar que  $\|H(\Omega)\|_\infty$  del IDVA-C3 es menor que la del IDVA-C4 e IDVA-C6, lo que significa que IDVA-C3 produce un mejor rendimiento dinámico que los otros IDVA's. Se considera una relación de masas dentro del rango de  $1\% \leq \beta \leq 10\%$  para aplicaciones prácticas del IDVA.

Ahora bien, en la Figura 5.9 es evidente que el rendimiento  $\|H(\Omega)\|_\infty$  de los dispositivos IDVA's son más pequeños que el de DVA clásico, pero en particular el del IDVA-C3. Cuando se compara el rendimiento del IDVA-C3 con el IDVA-C4, con respecto al IDVA-C6 se obtiene una mejora del 1 al 2 %. Además, al comparar el rendimiento dinámico del dispositivo propuesto con respecto al DVA clásico, el IDVA-C3 proporciona una mejora del 27.35%. Además, el IDVA-C4 ofrece un rendimiento del 24.78% en comparación del DVA clásico. De igual manera el IDVA-C6 proporciona una mejora del 26.49%.

Tabla 1. Parámetros óptimos para IDVA's obtenidos usando el criterio  $H_\infty$  y considerando la excitación de la fuerza armónica.

<b>(a) Para el IDVA-C3</b>						
$\beta$	$\mu_{opt}$	$q_{opt}$	$\eta_{opt}$	$\zeta_{opt}$	$r_{opt}$	$\ H(\Omega)\ _\infty$
<b>0.01</b>	0.024131	0.998023	1.004813	0.054887	0.995842	10.938457
<b>0.02</b>	0.017351	0.950596	1.075866	0.072950	0.997248	13.465054
<b>0.03</b>	0.072335	0.994106	1.014610	0.094910	0.987432	6.314432
<b>0.04</b>	0.120461	0.990234	1.024643	0.122331	0.978894	9.620542
<b>0.05</b>	0.120461	0.990234	1.024643	0.122331	0.978894	4.886453
<b>0.10</b>	0.240460	0.980756	1.050847	0.172338	0.956980	3.435350
<b>(b) Para el IDVA-C4</b>						
<b>0.01</b>	0.023659	1.003814	0.986097	0.002512	0.995873	10.996201
<b>0.02</b>	0.022074	1.041611	0.933264	0.001370	0.996996	12.884287
<b>0.03</b>	0.033346	1.049171	0.918349	0.002503	0.995449	10.476917
<b>0.04</b>	0.089876	1.012914	0.950074	0.017487	0.983623	5.540807
<b>0.05</b>	0.110668	1.015324	0.939518	0.023468	0.979560	4.961208
<b>0.10</b>	0.207473	1.023985	0.894158	0.055797	0.959186	3.527647
<b>(c) Para el IDVA-C6</b>						
<b>0.01</b>	0.023188	0.992084	1.024252	0.002587	0.995850	10.950268
<b>0.02</b>	0.044564	0.984366	1.048872	0.007140	0.991686	7.756196
<b>0.03</b>	0.064266	0.976838	1.073871	0.012804	0.987507	6.334307
<b>0.04</b>	0.082417	0.969494	1.099256	0.019250	0.983312	5.484008
<b>0.05</b>	0.078867	1.051304	0.970412	0.008783	0.990513	7.265913
<b>0.10</b>	0.164520	0.928894	1.260246	0.066468	0.957816	3.471051

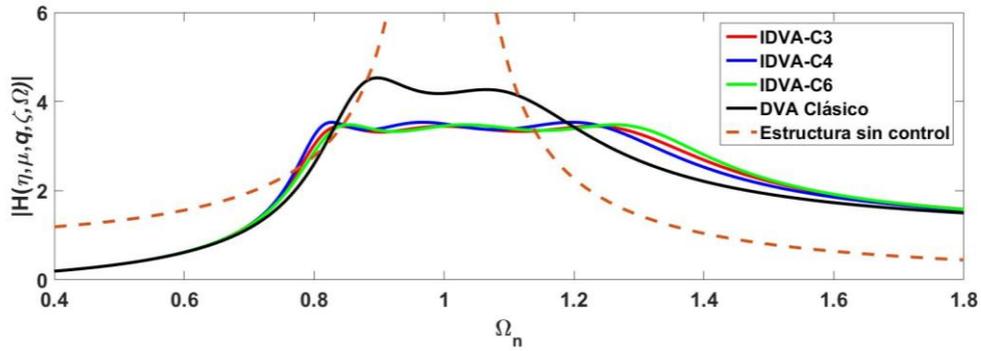


Figura 5.9. Comparación de curvas FRF óptimas e índice de banda de supresión de vibraciones de IDVA-C3, IDVA-C4, IDVA-C6 y el DVA clásico con respecto a una estructura sin control.

### 5.3 Resultados

En este trabajo se propone un novedoso absorbedor de vibraciones dinámicas basado en un inersor (IDVA), que se obtiene analizando adecuadamente las propiedades dinámicas de los DVA's. Para estudiar su comportamiento dinámico se han derivado modelos matemáticos adimensionales. Posterior a esto, las funciones de respuesta en frecuencia adimensional se calculan considerando una fuerza de tipo armónica. Considerando este caso se aplica la técnica de puntos fijos extendida (EFPT) a las funciones FRF adimensionales para ajustar de manera óptima las magnitudes de los puntos invariantes. Asimismo, se calcularon soluciones de forma cerrada las cuales producen magnitudes de sintonización óptimas iguales en las frecuencias invariantes del IDVA. Para apreciar la reducción de vibración tanto para el IDVA-C3 como para el IDVA-C4 e IDVA-C6, se trazaron las curvas de respuesta en frecuencia óptimas considerando la relación de masas  $\beta = 0.1$ . Se demostró que el IDVA-C3 supera tanto al IDVA-C4 como al IDVA-C6 y en consecuencia al DVA clásico.

A pesar de la implementación de la técnica de puntos fijos extendida (EFPT), esta solo produce soluciones analíticas subóptimas y con el fin de evaluar a fondo el rendimiento dinámico de los IDVA's bajo el efecto de la excitación de las fuerzas armónicas, se utilizó el rendimiento  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ . Par aplicaciones prácticas, en el rango de relación de masas  $1\% \leq \beta \leq 10\%$ , se reveló que se obtienen mejoras del 1 al 2%, cuando

se compara el IDVA-C3 con el IDVA-C6. También, al comparar el rendimiento dinámico del dispositivo propuesto con respecto al DVA clásico, el IDVA-C3 proporciona una mejora del 27.35%. Asimismo, el IDVA-C4 ofrece un rendimiento del 24.78% en comparación del DVA clásico. Por lo tanto, el IDVA-C6 proporciona una mejora del 26.49%. Por ende, el IDVA-C3 supera al IDVA-C4 e IDVA-C6 y, en consecuencia, el DVA clásico.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES

El objetivo principal de esta investigación de tesis fue mostrar un diseño óptimo de un absorbedor dinámico de vibración basado en inersor. A partir de un análisis matemático se propone un modelo que rige el comportamiento de la estructura o diseño, empleando el uso del inersor como dispositivo principal. El análisis se efectúa sobre un sistema de rotor-cojinete tipo Jeffcott cuando se ejerce una fuerza de excitación armónica inercial.

Fue necesario obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la teoría de Euler-Lagrange considerando fuerzas no conservativas. Seguido de la obtención de los parámetros adimensionales, a partir del teorema de  $\Pi$  Buckingham, lo que conduce a la respuesta en frecuencia adimensional del sistema. Se aplicó la técnica de puntos fijos extendida (EFPT) a las funciones FRF adimensionales de los IDVA's para ajustar de forma óptima las magnitudes de los puntos invariantes. Con el fin de evaluar a fondo el rendimiento dinámico de los IDVA's bajo el efecto de la excitación armónica inercial se implementó el índice de rendimiento  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ . El cual se llevó a cabo mediante la resolución de un problema de optimización no lineal multivariable restringido.

Aplicando el EFPT a los IDVA's y en seguida el rendimiento  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ , se observó una mejor respuesta por parte del IDVA-C3 en comparación con los otros arreglos de redes mecánicas y en consecuencia con el DVA Clásico. También, se logró desarrollar

ecuaciones de diseño simplificadas para los IDVAs mediante la aplicación de la técnica de los puntos fijos extendida.

## **6.1 Trabajos futuros**

Para complementar este trabajo de tesis, se proponen los siguientes estudios futuros para mejorar u obtener resultados más amplios.

- Obtener el modelo matemático del IDVA en el rotor tipo Jeffcott considerando otro tipo de fuerzas de excitación, como fuerzas variables.
- Obtener el modelo y desarrollo matemático del IDVA en el rotor tipo Jeffcott considerando otro tipo de redes mecánicas basadas en inersores o en otros dispositivos.
- Corroborar los resultados obtenidos de forma teórica vs los resultados experimentales, para demostrar la efectividad de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis y dar validez a los resultados finales.
- Implementar este sistema en el campo automotriz, sustituyendo retenes, el motor u amortiguadores para comparar la eficiencia en cuanto la absorción de vibraciones. Ya que la vibración en el motor es la principal causa de desgaste en piezas internas reduciendo la vida útil de cada pieza mecánica.

# APÉNDICE A

## MODELO MATEMÁTICO

A partir del método de Nishihara y al combinar la FRF de la estructura primaria, se obtienen las siguientes expresiones que garantizan que las amplitudes de vibración en las frecuencias resonantes sean iguales.

Para el **IDVA-C3**:

$$\Omega^{12} + \Omega^{10}C_1 + \Omega^8C_2 + \Omega^6C_3 + \Omega^4C_4 + \Omega^2C_5 + \Omega C_6 = 0$$

Con:

$$C_1 = \left( \frac{1}{4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4 \right) q^2 - 8\zeta_2^2 - q^2((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4)(-r^2 + 1)$$

$$C_2 = \left( \frac{1}{4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((4(1 + (\beta + 1)\mu)^2\eta^4 + 8(2 + (\beta + 1)\mu)(\beta + 1)\eta^2 + 4(\beta + 1)^2)\zeta_2^2 - 2\mu^2\eta^4(\beta + 1))q^4 + ((16 + (8\beta + 16)\mu)\eta^2 + 8\beta + 16)\zeta_2^2 - 2\mu^2\eta^4 \right) q^2 + 4\zeta_2^2 - 4((1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^4)q^4(-r^2 + 1)$$

$$C_3 = \left( \frac{1}{4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1)} \right) \left( \left( \eta^2(\beta + 1) \left( (-8 + (-8\beta - 8)\mu)\eta^2 - 8\beta - 8 \right) \zeta_2^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1) \right) q^4 + \left( (-8(\mu + 1)(1 + (\beta + 1)\mu)\eta^4 + ((-16\beta - 16)\mu - 16\beta - 32)\eta^2 - 8\beta - 8) \zeta_2^2 + 2\mu^2\eta^4(\beta + 2) \right) q^2 + (-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^4 \right) q^2 - ((-8 + (-8\mu - 8)\eta^2)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^2)\eta^2 q^6(-r^2 + 1) \right)$$

$$C_4 = \left( \frac{1}{4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1)} \right) \left( (4(\eta^4\zeta_2^2(\beta + 1)^2 q^4 - 1/2(((-8\beta - 8)\mu - 4\beta - 8)\eta^2 - 8\beta - 8)\zeta_2^2 + \mu^2\eta^2(\beta + 1))\eta^2 q^2 + (1 + (\mu + 1)^2\eta^4 + (2\mu + 4)\eta^2)\zeta_2^2 - 1/2\mu^2\eta^4) q^4 - 4q^8\eta^4\zeta_2^2(-r^2 + 1) \right)$$

$$C_5 = \frac{-8\eta^2 \left( \eta^2\zeta_2^2(\beta + 1)q^2 + (1 + (\mu + 1)\eta^2)\zeta_2^2 - \frac{1}{8}\mu^2\eta^2 \right) q^6}{4\zeta_2^2 - 4\zeta_2^2(-r^2 + 1)}$$

$$C_6 = \frac{q^8\eta^4}{r^2}$$

Para el **IDVA-C4**:

$$\Omega^{12} + \Omega^{10}C_1 + \Omega^8C_2 + \Omega^6C_3 + \Omega^4C_4 + \Omega^2C_5 + \Omega C_6 = 0$$

Con:

$$C_1 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( \left( -2\eta^2(\beta + 1)\mu^3 + \left( -2\eta^2 + 4 \left( \zeta_2^2\beta + \zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) (\beta + 1) \right) \mu^2 + 8\zeta_2^2(\beta + 1)\mu + 4\zeta_2^2 \right) q^2 - 2\mu^2 + 2q^2(\mu^3\eta^2 + (\eta^2 - 2\zeta_2^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta_2^2 - 2\zeta_2^2)(-r^2 + 1) \right)$$

$$C_2 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((\eta^4(\beta + 1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta + 1)(\eta^2 + \beta + 1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta + 4)\eta^2 + (\beta + 1)^2)\mu^2 - 8\zeta_2^2(\beta + 1)^2\mu - 8\zeta_2^2(\beta + 1))q^4 + (2\eta^2(\beta + 2)\mu^3 + (-8\beta\zeta_2^2 + 4\eta^2 - 8\zeta_2^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta_2^2(\beta + 2)\mu - 8\zeta_2^2)q^2 + \mu^2 - q^4(\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta_2^2 - 8\zeta_2^2)(-r^2 + 1)) \right)$$

$$C_3 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( (-2q^2((\eta^4(\beta + 1)\mu^3 + \eta^2(\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 2\zeta_2^2(\beta + 1))(\beta + 1)q^4 + (\eta^4(\beta + 1)\mu^4 + \eta^2(\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta + 4)\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 8\zeta_2^2(\beta + 1)\mu - 4\zeta_2^2(\beta + 2))q^2 + \mu^3\eta^2 + (\eta^2 - 2\zeta_2^2 + 1)\mu^2 - 4\mu\zeta_2^2 - 2\zeta_2^2) + 2q^6(\mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta_2^2)(-r^2 + 1)) \right)$$

$$C_4 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( (q^4(\mu^2\eta^4(\beta + 1)^2q^4 + (4\eta^4(\beta + 1)\mu^3 + 2\eta^2(\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\mu^2 - 8\zeta_2^2(\beta + 1))q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\zeta_2^2 - 8\zeta_2^2) - q^8\eta^4\mu^2(-r^2 + 1)) \right)$$

$$C_5 = \frac{-2q^6(\mu^2\eta^4(\beta + 1)q^2 + \mu^3\eta^4 + (\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 2\zeta_2^2)}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)}$$

$$C_6 = \frac{q^8\eta^4}{r^2}$$

Para el **IDVA-C6**:

$$\Omega^{12} + \Omega^{10}C_1 + \Omega^8C_2 + \Omega^6C_3 + \Omega^4C_4 + \Omega^2C_5 + \Omega C_6 = 0$$

Con:

$$C_1 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((-2\eta^2(\beta + 1)\mu^3 + (-2\eta^2 - 2\beta - 2)\mu^2 + 4\zeta_2^2)q^2 - 2\mu^2 + 2q^2(\mu^3\eta^2 + (\eta^2 + 1)\mu^2 - 2\zeta_2^2)(-r^2 + 1)) \right)$$

$$C_2 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((\eta^4(\beta + 1)^2\mu^4 + 2\eta^2(\beta + 1)(\eta^2 + \beta + 1)\mu^3 + (\eta^4 + (4\beta + 4)\eta^2 + (\beta + 1)^2)\mu^2 - 8\eta^2\zeta_2^2(\beta + 1)\mu - 8\zeta_2^2(\beta + 1)q^4 + (2\eta^2(\beta + 2)\mu^3 + (4\eta^2 + 2\beta + 4)\mu^2 - 8\zeta_2^2)q^2 + \mu^2 - q^4(\mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\eta^2\zeta_2^2 - 8\zeta_2^2)(-r^2 + 1))) \right)$$

$$C_3 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((-2q^2 \left( (\beta + 1) \left( \eta^4(\beta + 1)\mu^3 - 2\eta^2 \left( \left( \zeta_2^2\beta + \zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \mu^2 - 4\eta^2\zeta_2^2(\beta + 1)\mu - 2\zeta_2^2(\beta + 1) \right) q^4 + (\eta^4(\beta + 1)\mu^4 + (\eta^2(\beta + 2) + 2\beta + 2)\eta^2\mu^3 + (\eta^4 + (2\beta + 4)\eta^2 + \beta + 1)\mu^2 - 4\eta^2\zeta_2^2(\beta + 2)\mu - 4\zeta_2^2(\beta + 2))q^2 + \mu^3\eta^4 + ((-2\zeta_2^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 4\mu\eta^2\zeta_2^2 - 2\zeta_2^2) (-r^2 + 1) \right) \right)$$

$$C_4 = \left( \frac{1}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)} \right) \left( ((q^4 \left( \mu^2\eta^4(\beta + 1)^2q^4 + (4\eta^4(\beta + 1)\mu^3 - 8\eta^2 \left( \left( \zeta_2^2\beta + \zeta_2^2 - \frac{1}{4\beta} - \frac{1}{2} \right) \eta^2 - 16\eta^2\zeta_2^2(\beta + 1)\mu - 8\zeta_2^2(\beta + 1) \right) q^2 + \mu^4\eta^4 + (2\eta^4 + 2\eta^2)\mu^3 + (\eta^4 + 4\eta^2 + 1)\mu^2 - 8\mu\eta^2\zeta_2^2 - 8\zeta_2^2) - q^8\eta^4\mu^2(-r^2 + 1) \right) \right)$$

$$C_5 = \frac{-2q^6(\mu^2\eta^4(\beta + 1)q^2 + \mu^3\eta^4 + ((-2\zeta_2^2 + 1)\eta^4 + \eta^2)\mu^2 - 4\mu\eta^2\zeta_2^2 - 2\zeta_2^2)}{\mu^2 - \mu^2(-r^2 + 1)}$$

$$C_6 = \frac{q^8\eta^4}{r^2}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Z.Q. Chen, M., & Hu, Y. (2015). “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 27.
- [2] Den and Hartog JP. “Mechanical vibrations”. *North Chelmsford, MA: Courier Corporation, 1985*, pp.88–108.
- [3] Marco Canales, William Paucar y Noel Juipa. “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica”. En: *RevIA 7.4 (2020)*, págs. 5-9.
- [4] Hamidreza Heidari, B. M. (2018). “Vibration control of imbalanced Jeffcott rotor by virtual passive dynamic absorber with optimal parameter values”. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 11.
- [5] Tehrani Ghasem G., Dardel Morteza (2017). “Mitigation of nonlinear oscillations of Jeffcott rotor System with an optimized damper and nonlinear energy sink”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*.
- [6] Colín Ocampo Jorge, Valles Aguilar José, Blanco Ortega Andrés y col. (2018).” Atenuación de la Vibración de un Sistema Rotatorio Utilizando una Chumacera Móvil”. *Departamento de Ingeniería Mecánica, CENIDET*.
- [7] Ramírez Vargas Ignacio, Palacios Pineda Manuel L., Corro Hernández Humberto (2013). “Respuesta Vibratoria de un Rotor Apoyado en Chumaceras Hidrodinámicas Cortas”. *Congreso Internacional Anual de la SOMIM*.
- [8] Mendoza Larios J. G., Colín Ocampo J., Blanco Ortega A., Abúndez Pliego A., Gutierrez Wing E. S. “Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico”. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*.
- [9] Jang MJ, Chen CL and Tsao YM. “Sliding mode control for active magnetic bearing system with flexible rotor”. *J Franklin Inst* 2005; 342: 401–419.
- [10] Das AS, Dutt JK and Ray K. “Active vibration control of unbalanced flexible rotor–shaft systems parametrically excited due to base motion”. *Appl Math Model* 2010; 34: 2353–2369.
- [11] Song F-z, Hai-yan S and Bo S. “Control of rotor unbalance vibration with magnetic dynamic absorber”. In: *2007 IEEE international conference on control and automation, Guangzhou, China, 2007*, pp.329–331.

- [12] Chatteraj C, Sengupta SN, Majumder MC. “Dynamics of a vertical Jeffcott rotor”. *Bull Eng Sci* 2008;3(2):1–10.)
- [13] Lu YJ, Zhang YF, Dai R, Liu H, Yu L, Hei D, Wang Y. “Non-linear analysis of a flexible rotor system with multi-span bearing supports”. *Proc Inst Mech Eng* 2008; 222:87–95.
- [14] Karpenko EV, Pavlovskaja EE, Wiercigroch M. “Bifurcation analysis of a preload Jeffcott rotor”. *Chaos Solitons Fractals* 2002; 15:407–16.
- [15] Ashish K D. “Dynamics of a Jeffcott rotor with slant crack”. *J Sound Vib* 2007; 303:1–28.
- [16] Frahm H. “Devices for damping vibrations of bodies”. *U.S. Patent #989958*, 1911.
- [17] Beltran Carbajal, F., Silva Navarro, G., & Arias Montiel, M. (2014). “Control Activo de Vibraciones en un Rotor Tipo Jeffcott con Velocidad Variable Usando una Suspensión Electromecánica”. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 9.
- [18] Yang L., Ramakrishnan K., Mastinu G. y col. “Automotive Suspensions with Additional Spring in Series with Damper: Optimal Design by Analytical Formulae”. *SAE International*, pag. 16.
- [19] X. Q. Sun., L. Chen, S. H. Wang, X. L. Zhang and X. F. Yang. “Performance Investigation of Vehicle Suspension System with Nonlinear Ball-Screw Inerter”. *International Journal of Automotive Technology*, 10.
- [20] Ren MZ. “A variant design of the dynamic vibration absorber”. *J Sound Vib* 2001; 245: 762–770.
- [21] Liu K and Liu J. “The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result”. *J Sound Vib* 2005; 284: 1181–1189.
- [22] Harik RF and Issa JS. “Design of a vibration absorber for harmonically forced damped systems”. *J Vib Control* 2013;
- [23] Smith MC. “Synthesis of mechanical networks: the inerter”. *IEEE Trans Autom Control* 2002; 47 (10): 1648–62.
- [24] Lazar IF, Neild SA, Wagg DJ. “Using an inerter-based device for structural vibration suppression”. *Earthquake Engng Struct Dyn* 2014; 43 (8): 1129–47.
- [25] Hu Y, Chen MZQ, Shu Z, Huang L. “Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution”, *Journal of Sound and Vibration* 2015; 346: 17–36.
- [26] Marian L, Giaralis, A. “Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems”. *Probabilistic Engineering Mechanics* 2014; 38: 156–64.

- [27] Brzeski P, Pavlovskaja E, Kapitaniak T, Perlikowski P. “The application of inerter in tuned mass absorber”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 2015; 70: 20–9.
- [28] T. Argentini, M. Belloli, P. Borghesani (2015). “A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalanced Forcing”. *Journal of Vibration and Acoustic*, 6.
- [29] Jesús Rodríguez Pablo (2017). “Cálculo de la respuesta al desequilibrio de un rotor flexible”, *Universidad Politécnica de Valencia*.
- [30] Rao, S. Singiresu,(2012). “Vibraciones Mecánicas”. *Pearson Educación* 2012.
- [31] Paredes de Azagra Andrés Martínez, Fernández Pando Valentín, San José del Río Jorge. “Generalizaciones al teorema pi de Buckingham con algunas aplicaciones”. *Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias* 2007.
- [32] James Victor Uspensky, JC Maquieira y JP Varela. “Teoría de ecuaciones”. Limusa, 1987.
- [33] Israel Gelfand y Vladimir Retakh. “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”. En: *The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995*. Springer. 1996, págs. 93-100.
- [34] I. Takewaki y col. “Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers”. En: *Structural Control and Health Monitoring* 19.6 (2012), págs. 590-608.
- [35] Bustamante Cornejo, S. (2018). “Detección de daño estructural utilizando modelo extendido de rotor fisurado tipo jeffcott validando con test de laboratorio”. *Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica*, 242.
- [36] H. L., H., R. D., F., & E. J., G. (1980). “Experimental study of the critical speed response, of a jeffcott rotor with acceleration”. *Journal of The Franklin Institute*, 88.
- [37] Yinlong Hu y Michael Z.Q. Chen. “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), págs. 297-307.
- [38] Michael Z.Q. Chen, Christos Papageorgio, Frank S., Fu-Cheng W., Malcolm C.S. “The Missing Mechanical Circuit Element”. En: *IEEE Circuits and Systems Magazine* (2009).