



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**División de Estudios de Posgrado**

**Maestría en Modelación Matemática**

**Series de potencias de parámetros espectrales para  
problemas de Sturm-Liouville**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**Maestro en Modelación Matemática**

**PRESENTA:**

**Israel Arturo Cordero Martinez**

**DIRECTOR:**

**Dr. Salvador Sánchez Perales**

*HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA*

*SEPTIEMBRE DE 2024*



# Dedicatoria

*A mis padres: Esther Martínez Cruz y Arturo  
Cordero Costilla.*

*A mis hermanos, así como al resto de mi familia.*

*A mis amigos: Carrada, Canseco, Jaz, Ernesto,  
Rubí, Iris, Meri, Luis, Aldo, Brando, Frida y Paola.*



# Agradecimientos

*A mis padres, Esther Martínez Cruz y Arturo Cordero Costilla, y al resto de mi familia, por el apoyo y cariño que me han brindado a lo largo de esta vida.*

*A la Universidad Tecnológica de la Mixteca por permitir y llevar a cabo mi formación profesional, así como el desarrollo de este trabajo de tesis.*

*A mi director de tesis, el Dr. Salvador Sánchez Perales por su paciencia, tiempo y confianza, así como compartir sus conocimientos y por permitirme realizar este trabajo de tesis bajo su dirección.*

*A mis revisores, Dr. Tomás Perez Becerra, Dr. Octavio Alberto Agustín Aquino, Dr. José Margarito Hernández Morales y al Dr. Sergio Palafox Delgado, por el tiempo dedicado a las revisiones pertenecientes a este trabajo de tesis.*

*Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico que me brindó durante mi estancia en la maestría.*



---

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Resultados de Análisis Matemático . . . . .	1
1.2. Algunos resultados de la integral de Lebesgue . . . . .	3
1.3. Propiedades de la integral de Kurzweil-Henstock . . . . .	8
1.4. Espacios de Sobolev y de KH-Sobolev . . . . .	12
<b>2. Problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville</b>	<b>19</b>
2.1. Caracterización a un sistema de ecuaciones integrales . . . . .	19
2.2. Problemas de valores iniciales . . . . .	23
<b>3. Método SPPS</b>	<b>33</b>
3.1. Operador diferencial . . . . .	33
3.2. Funciones $\tilde{X}^{(n)}$ y $X^{(n)}$ . . . . .	35
3.3. Series de potencias de valores espectrales con coeficientes: $X^{(n)}$ y $\tilde{X}^{(n)}$ . . . . .	42
3.4. Teorema principal . . . . .	49
3.5. Optimización de Recursividad . . . . .	52
3.6. Construcción de la solución homogénea . . . . .	56

<b>4. Implementación numérica</b>	<b>61</b>
4.1. Cuadratura . . . . .	61
4.2. Ejemplos . . . . .	68
<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

---



---

## Introducción

---

La teoría de Sturm-Liouville inicia con una serie de artículos publicados por Sturm y Liouville durante la década de 1830, la cual se centra en el estudio de una ecuación diferencial lineal general de segundo orden, bajo condiciones de contorno, conocida como ecuación de Sturm-Liouville. Esta teoría fue el primer análisis cualitativo realizado para las ecuaciones diferenciales ([11]).

La teoría de Sturm-Liouville ha sido generalizada y expandida en un gran número de direcciones, con aplicaciones en física, ingeniería, entre otras ramas de la ciencia moderna. Por ello, es parte integrante de la preparación profesional de matemáticos, físicos e ingenieros. La mayoría de libros de texto estándar sobre ecuaciones diferenciales y métodos de física matemática tratan las propiedades básicas de los valores y vectores propios de un problema regular de Sturm-Liouville. Éstas se formulan y demuestran para una ecuación en general con coeficientes variables, sin embargo, las soluciones prácticas de estos problemas sólo se estudian en ecuaciones con coeficientes constantes o casos particulares de coeficientes variables. De modo que no se enseña algún método razonablemente práctico para resolver la ecuación cuando se tienen coeficientes variables.

Un método reciente para abordar los problemas antes mencionados se denomina el método de serie de potencias de parámetros espectrales o SPSS por sus siglas en inglés. Este método fue presentado por Kravchenko y Porter en [9]. El método consiste en expresar la solución de una ecuación de Sturm-Liouville como una serie de potencias respecto

a un parámetro espectral, donde los coeficientes están dados en términos de una solución particular de la ecuación homogénea asociada. En [10], el método se empleó para resolver problemas espectrales para ecuaciones de Sturm-Liouville. Este método es una herramienta importante y eficiente para resolver una variedad de problemas que involucren ecuaciones diferenciales ordinarias. En la mayoría de las publicaciones dedicadas al método SPPS se supone que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales son continuos. En [2], Blancarte *et al.* muestran la validez del método SPPS para ecuaciones de Sturm-Liouville con coeficientes Lebesgue integrables.

Existen funciones, en particular las que oscilan altamente y cambian de signo constantemente, que no son Lebesgue integrables, vea por ejemplo [3]. Cuando este tipo de funciones se encuentran como coeficientes de una ecuación de Sturm-Liouville, surge la pregunta si el método SPPS se sigue cumpliendo para este tipo de funciones. Una forma de abordar esta cuestión es mediante la integral de Kurzweil-Henstock, desarrollada en los años sesenta por J. Kurzweil y R. Henstock, esta es más general que la integral de Lebesgue y se ha observado que es adecuada para integrar funciones altamente oscilantes. El estudio de las ecuaciones diferenciales empleando esta integral se ha desarrollado ampliamente, vea [3, 4, 7, 12, 15, 21].

En este trabajo se estudia el método SPPS para ecuaciones de Sturm-Liouville con coeficientes Kurzweil-Henstock integrables. Primeramente se contruye un espacio solución adecuado  $\mathcal{A}$  para la ecuación de Sturm-Liouville  $(\rho y)' + Qy = f$ , considerando aquí la derivada débil, y se garantiza la existencia y unicidad de la solución de problemas de valores iniciales para esta ecuación, con el supuesto de que  $\frac{1}{\rho}$  sea Lebesgue integrable y  $Q, f$  sean Kurzweil-Henstock integrables. Se muestra también que la dimensión del espacio solución  $\mathcal{A}_*$  de la ecuación homogénea asociada es igual a dos. Los hallazgos de esta investigación se encuentran en [16]. Posteriormente se usan estos resultados para mostrar que si  $q, r$  son Kurzweil-Henstock integrables,  $\frac{1}{\rho}$  es Lebesgue integrable y  $y_0$  es una solución de la ecuación homogénea  $(\rho y)' + qy = 0$  a.e. on  $[a, b]$ , tal que no se anula

---

sobre todo el intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}^{(2k)} \lambda^k \quad \text{y} \quad y_0 \sum_{k=0}^{\infty} X^{(2k+1)} \lambda^k$$

forman una base para el espacio solución de

$$(\rho y)' + qy = \lambda ry;$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h^{(0)} &\equiv 1, & \tilde{X}_h^{(2n)}(x) &= \int_{x_0}^x \tilde{X}_h^{(2n-2)}(t) q(t) [P_h(t) - P_h(x)] dt; \\ X_h^{(1)} &= P_h, & X_h^{(2n+1)}(x) &= \int_{x_0}^x X_h^{(2n-1)}(t) q(t) [P_h(t) - P_h(x)] dt \end{aligned}$$

y  $P_h = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho}$ . Por lo tanto, toda solución de la ecuación de Sturm-Liouville se puede escribir como combinación lineal de las series de potencias de parámetros espectrales ya mencionadas. Los resultados obtenidos de esta parte se encuentran en [6]. Quedando así el método SPPS en un contexto más general. El resultado principal de Blancarte *et al.* en [2, Teorema 7] queda como un caso particular de los resultados presentados en este trabajo.

La estructura de este trabajo de tesis consta de cuatro capítulos:

- 1. Preliminares.** En este capítulo se presentan las definiciones y resultados de las funciones absolutamente continuas y absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido así como sus relaciones con las funciones Lebesgue integrables y Kurzweil-Henstock integrables a través de los teoremas fundamentales del cálculo, de los espacios de Sobolev y KH-Sobolev así como de las derivadas débiles.
- 2. Problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville.** En este capítulo se muestra la existencia y unicidad de problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville, considerando la derivada débil.
- 3. Método SPPS.** Este es el capítulo principal de esta tesis, en él, se describe el método SPPS para cuando los coeficientes son Kurzweil-Henstock integrables. Se muestra la validez del método para este tipo de funciones.

**4. Implementación Numérica.** En este capítulo se presenta la implementación numérica del método SPPS, así como algunos ejemplos que ilustran cómo se aplica el método SPPS para resolver problemas espectrales de la ecuación de Sturm-Liouville.

---

# Capítulo 1

---

## Preliminares

---

El objetivo de este capítulo es proporcionar algunas definiciones y resultados conocidos sobre funciones Lebesgue integrables, funciones Kurzweil-Henstock integrables, funciones absolutamente continuas y funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido; así como sus relaciones a través de los teoremas fundamentales del cálculo correspondientes. Asimismo, se introduce el espacio de Sobolev y el espacio de KH-Sobolev, así como el concepto de derivada débil.

### 1.1. Resultados de Análisis Matemático

Los resultados de esta sección son usuales de un curso de análisis matemático, aunque por lo general se enuncian sobre funciones de valores reales, la demostración de su versión compleja no representa una dificultad adicional.

**Definición 1.1.1** (Continuidad uniforme). [8, Definición 7.7] Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones con valores en  $\mathbb{C}$  sobre  $[a, b]$ . Se dice que la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a una función  $f$  sobre  $[a, b]$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un natural  $N_\varepsilon$  tal que para todo  $n \geq N_\varepsilon$  y para todo  $x \in [a, b]$  se cumple que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La notación usual para indicar que una sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a una función  $f$  es  $f_n \xrightarrow{u} f$ . El criterio M de Weierstrass nos brinda un criterio para determinar cuando una serie de funciones converge uniformemente.

**Teorema 1.1.2** (Criterio M de Weierstrass). [8, Teorema 7.10] Sean  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones con valores en  $\mathbb{C}$  sobre  $[a, b]$  y  $\{M_n\}$  una sucesión de números no negativos tales que para todo  $x \in [a, b]$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n.$$

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente a alguna función  $f$  sobre  $[a, b]$ .

Se sabe muy bien que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua. Esto lo establecemos a continuación.

**Teorema 1.1.3.** [8, Teorema 7.12] Sean  $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , funciones tales que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  es una función continua. Si  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es continua.

El resultado siguiente nos permite determinar cuándo se cumple que  $f'_n \xrightarrow{u} f'$ .

**Teorema 1.1.4.** [8, Teorema 7.17] Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de valores en  $\mathbb{C}$  definidas sobre  $[a, b]$  y derivables sobre  $[a, b]$ . Si existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $\{f_n(x_0)\}$  converge y existe una función  $g$  tal que  $f'_n \xrightarrow{u} g$  sobre  $[a, b]$ , entonces existe una función  $f$  tal que  $f_n \xrightarrow{u} f$  sobre  $[a, b]$  y para cada  $x \in [a, b]$ ,  $f'(x)$  existe y  $f'(x) = g(x)$ .

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la Definición 1.1.1.

**Teorema 1.1.5.** [14, Teorema 7.9] Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de valores en  $\mathbb{C}$ , definidas sobre  $[a, b]$  y suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Si definimos

$$M_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

entonces  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $M_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## 1.2. Algunos resultados de la integral de Lebesgue

En esta sección se proporcionan algunos resultados en relación a la integral de Lebesgue útiles para el desarrollo principal de este trabajo, como el concepto de función absolutamente continua y su relación con el teorema fundamental del cálculo.

Empecemos recordando el concepto **casi donde quiera** (c.d.q.) sobre un conjunto  $E$  o **casi en todo punto** (c.t.p.) de  $E$ .

**Definición 1.2.1.** Consideremos  $m$  la medida de Lebesgue. Sean  $E$  un subconjunto Lebesgue medible de  $\mathbb{R}$  y  $P$  una proposición abierta definida sobre  $E$ . Se dice que  $P$  se cumple **casi donde quiera** (abreviamos c.d.q.) sobre  $E$ , si existe un conjunto Lebesgue medible  $B \subset E$  con  $m(B) = 0$ , tal que  $P(x)$  se cumple para todo  $x \in E \setminus B$ .

La integral de Lebesgue se define solamente para funciones medibles, recordemos este concepto:

**Definición 1.2.2.** Sea  $E$  un subconjunto Lebesgue medible de  $\mathbb{R}$ . Se dice que una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible (o Lebesgue medible), si para cada abierto  $U$  de  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $f^{-1}(U)$  es Lebesgue medible en  $E$ .

Observe que, para funciones de valores reales,  $f$  es medible si, y sólo si, para cada intervalo abierto  $(c, d)$ ,  $f^{-1}((c, d))$  es Lebesgue medible en  $E$ . Nuestro interés en esta tesis es trabajar con funciones definidas sobre intervalos cerrados y con valores en  $\mathbb{C}$ . Para tales funciones,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , se puede formular una definición análoga a la presentada en la Definición 1.2.2. Sin embargo, también es posible caracterizar la medibilidad de una función  $f$ , afirmando que  $f$  es medible si, y sólo si, la parte real y la parte imaginaria de  $f$  son funciones de valores reales medibles.

**Proposición 1.2.3.** 1) Sean  $f, g$  son funciones tales que  $f = g$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Si  $f$  es medible, entonces  $g$  es medible.

2) Si  $f$  es continua c.d.q. sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es medible y acotada sobre  $[a, b]$ .

---

**Definición 1.2.4.** Una función  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  se llama simple si es medible y toma un número finito de valores.

Usualmente una función simple se expresa como

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i},$$

donde  $\alpha_i \neq \alpha_j$  y  $E_i \cap E_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n E_i$ , y  $E_i \neq \emptyset$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

A continuación damos la definición de la integral de Lebesgue de una función.

**Definición 1.2.5.** 1) Si  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$  es una función simple, medible y no negativa sobre  $[a, b]$ , entonces la integral de Lebesgue de  $f$  se define como

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(E_i).$$

2) Si  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  es una función medible, entonces la integral de Lebesgue de  $f$  sobre  $[a, b]$  se define como

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi : \varphi \text{ es simple, medible y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}. \quad (1.2.1)$$

3) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible y  $\int_a^b |f| < \infty$ , entonces la integral de Lebesgue de  $f$  se define como

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-,$$

donde  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$  y  $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ .

4) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función medible y  $\int_a^b |f| < \infty$ , entonces la integral de Lebesgue de  $f$  se define como

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$



Denotemos por  $L^1([a, b])$  al espacio<sup>1</sup> de las funciones que son Lebesgue integrables sobre  $[a, b]$ , es decir,

$$L^1([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_a^b |f| < \infty \right\}. \quad (1.2.2)$$

Se sabe muy bien que la integral de Lebesgue es absoluta, esto es:

**Proposición 1.2.6.** Si  $f \in L^1([a, b])$ , entonces  $|f| \in L^1([a, b])$  y se cumple que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Esta propiedad de la integral de Lebesgue es muy interesante, pues con ella obtenemos desigualdades importantes como la desigualdad de Hölder.

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial. Un multiplicador de una función  $f \in \mathcal{V}$  es una función  $g$  tal que  $fg \in \mathcal{V}$ . Los multiplicadores de las funciones que son Lebesgue integrables son las funciones medibles acotadas, como lo indica el siguiente teorema.

**Proposición 1.2.7.** [8, Corolario 6.11] Si  $f \in L^1([a, b])$  y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es medible y acotada c.d.q. sobre  $[a, b]$ , entonces  $fg \in L^1([a, b])$ .

Enunciamos a continuación uno de los teoremas más esenciales de la teoría de Lebesgue, el Teorema de la convergencia dominada.

**Proposición 1.2.8** (Teorema de la convergencia dominada). [8, Teorema 3.5] Sean  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $L^1([a, b])$ ,  $g \in L^1([a, b])$  y suponga que  $\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  casi donde quiera sobre  $[a, b]$ . Si  $|f_n| \leq g$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f \in L^1([a, b])$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Además,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

---

<sup>1</sup>Todos los espacios de funciones que se definan en esta tesis son al menos espacios vectoriales sobre el campo  $\mathbb{C}$ .

A fin de establecer el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue se enuncia el siguiente concepto.

**Definición 1.2.9.** [1, Definición 14.4] Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **absolutamente continua** sobre  $[a, b]$ , si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda colección finita  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$  de subintervalos de  $[a, b]$ , que no se traslapan entre sí, se cumple que

$$\text{si } \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta, \quad \text{entonces } \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Se denota al espacio de funciones absolutamente continuas sobre el intervalo  $[a, b]$  por  $AC([a, b])$ . Una propiedad importante de este espacio, es su cerradura bajo la multiplicación de funciones. Esto se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.10.** [1, Teorema 14.5] Si  $F, G \in AC([a, b])$  entonces  $FG \in AC([a, b])$ .

En la siguiente proposición se establece una condición para que  $1/F$  sea absolutamente continua a partir de que  $F$  lo es. El resultado es conocido, sin embargo, al revisar la literatura no se encontró su demostración, por ende hacemos la demostración.

**Proposición 1.2.11.** Si  $F \in AC([a, b])$  y existe  $\alpha > 0$  tal que  $|F(x)| \geq \alpha$ , para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $\frac{1}{F} \in AC([a, b])$ .

*Demostración.* Sean  $F \in AC([a, b])$  y  $\varepsilon > 0$ . De la Definición 1.2.9, se sigue que existe  $\delta > 0$  tal que para toda colección finita  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$  de subintervalos de  $[a, b]$ , que no se traslapan entre sí, se cumple que

$$\text{si } \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta, \quad \text{entonces } \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \alpha^2 \varepsilon. \quad (1.2.3)$$

Puesto que  $|F(x)| \geq \alpha$  para toda  $x \in [a, b]$ , se sigue que

$$\frac{1}{|F(x)|} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \text{para toda } x \in [a, b]. \quad (1.2.4)$$

Sea  $\{[a_k, b_k]\}_{i=1}^n$  una colección finita arbitraria de subintervalos de  $[a, b]$ , que no se traslapan entre sí, tal que  $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ . Luego,

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{F}(b_k) - \frac{1}{F}(a_k) \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{F(a_k) - F(b_k)}{F(a_k)F(b_k)} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{|F(b_k) - F(a_k)|}{|F(a_k)||F(b_k)|}.$$

Debido a la ecuación (1.2.4), se tiene que

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{F}(b_k) - \frac{1}{F}(a_k) \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)|.$$

Además, por la ecuación (1.2.3), se sigue que

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{F}(b_k) - \frac{1}{F}(a_k) \right| < \frac{1}{\alpha^2} (\alpha^2 \varepsilon) = \varepsilon.$$

■

Los teoremas fundamentales del cálculo se extienden de manera elegante y completa en el marco de la teoría de la integral de Lebesgue. Estos teoremas establecen un puente entre la derivación y la integración en el contexto de Lebesgue, revelando una conexión significativa con las funciones absolutamente continuas. A continuación, establecen los dos teoremas fundamentales del cálculo para la integral de Lebesgue.

**Teorema 1.2.12** (Primer teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue).

[8, Teorema 4.12] Sea  $x_0 \in [a, b]$ . Si  $f \in L^1([a, b])$ , entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $F(x) = \int_{x_0}^x f$ , satisface que  $F \in AC([a, b])$  y  $F' = f$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Más aún, si  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $F'(x) = f(x)$ .

**Teorema 1.2.13** (Segundo teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue).

Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Luego,  $F \in AC([a, b])$  si y sólo si  $F'$  está definida c.d.q. sobre  $[a, b]$ ,  $F' \in L^1([a, b])$  y  $F(d) - F(c) = \int_c^d F'$  para cualesquiera  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

**Definición 1.2.14.** [8, Definición 4.1] Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Se define la **variación** de  $f$  sobre  $[a, b]$  como

$$V_{[a,b]}f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : P = \{x_i\}_{i=1}^n \text{ es una partición de } [a, b] \right\}.$$

**Definición 1.2.15.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es de **variación acotada**, si

$$V_{[a,b]}f < \infty.$$

Se denota al espacio de funciones de variación acotada sobre el intervalo  $[a, b]$  por  $BV([a, b])$ . El siguiente resultado establece una cota para la variación de las posibles integrales indefinidas sobre el intervalo  $[p, q]$  de una función Lebesgue integrable.

**Teorema 1.2.16.** [1, Teorema 7.5] Sean  $f \in L^1([a, b])$  y  $[p, q] \subseteq [a, b]$ . Si se definen las funciones  $F_1, F_2$ , mediante  $F_1(t) := \int_p^t f$  y  $F_2(t) := \int_t^q f$ , entonces  $F_1, F_2 \in BV([p, q])$  y

$$V_{[p,q]}F_i \leq \int_p^q |f|, \quad \text{para } i \in \{1, 2\}.$$

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.2.16, es que toda función absolutamente continua es de variación acotada, como se enuncia en la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.17.** [8, Teorema 4.3] Si  $F \in AC([a, b])$ , entonces  $F \in BV([a, b])$ .

Por último, enunciamos uno de los teoremas más fundamentales en la teoría de integración, reformulado en el contexto de la teoría integral de Lebesgue.

**Teorema 1.2.18** (Integración por partes). [1, Teorema 14.16] Si  $f, g \in AC([a, b])$ , entonces  $f'g, fg' \in L^1([a, b])$  y

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

### 1.3. Propiedades de la integral de Kurzweil-Henstock

Empecemos esta sección introduciendo los conceptos de partición etiquetada y de función medidora.

**Definición 1.3.1.** Sea  $[a, b]$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ . Una **partición** de  $[a, b]$ , es una colección finita  $\mathcal{P} = \{[x_i, x_{i+1}]\}_{i=1}^n$  de subintervalos, que no se superponen, tales que  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}]$ . Además, si a cada subintervalo de la partición  $\mathcal{P}$  se le asigna un punto  $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , entonces llamamos a  $t_i$  **etiqueta** de  $[x_i, x_{i+1}]$ . Mientras que al conjunto  $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) : i = 1, 2, \dots, n\}$  se le denomina **partición etiquetada** de  $[a, b]$ .

Dentro de la teoría de Kurzweil-Henstock a las funciones no negativas definidas sobre un intervalo  $[a, b]$  se les llaman funciones medidoras.

**Definición 1.3.2.** Sean  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  una función medidora y  $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) : i = 1, 2, \dots, n\}$  una partición etiquetada de  $[a, b]$ . Se dice que  $\dot{\mathcal{P}}$  es  **$\delta$ -fina**, si satisface que

$$[x_i, x_{i+1}] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Definición 1.3.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se dice que  $f$  es **Kurzweil-Henstock integrable** sobre  $[a, b]$ , si existe  $L \in \mathbb{C}$ , tal que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que si  $\dot{\mathcal{P}}$  es una partición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - L \right| < \varepsilon.$$

Al espacio de funciones que son Kurzweil-Henstock integrables sobre  $[a, b]$  se denota por  $KH([a, b])$ . De manera similar al caso de la integral de Lebesgue, si dos funciones Kurzweil-Henstock son iguales casi donde quiera, entonces sus integrales coinciden, como se detalla en el resultado siguiente.

**Proposición 1.3.4.** [8, Teorema 9.10] Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Si  $f \in KH([a, b])$  y  $g = f$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , entonces  $g \in KH([a, b])$  y

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

La integral de Kurzweil-Henstock es más general que la integral de Lebesgue, como lo indica la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.5.** Si  $f \in L^1([a, b])$  entonces  $f \in KH([a, b])$  y la integral de Lebesgue de  $f$  sobre  $[a, b]$  coincide con la integral de Kurzweil-Henstock de  $f$  sobre  $[a, b]$ .

Los multiplicadores de las funciones que son Kurzweil-Henstock integrables son las funciones de variación acotada, como lo indica la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.6.** [1, Teorema 10.12] Si  $f \in KH([a, b])$  y  $\varphi \in BV([a, b])$ , entonces el producto  $f \cdot \varphi \in KH([a, b])$  y

$$\int_a^b f\varphi = \int_a^b \varphi dF = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi,$$

donde  $F$  es la integral indefinida de  $f$  sobre  $[a, b]$ , es decir,  $F(x) = \int_a^x f$ . Además, la segunda y tercer integral son integrales de Riemann-Stieltjes.

**Definición 1.3.7.** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Se define la **oscilación** de la función  $\varphi$  sobre  $[a, b]$  como

$$\omega(\varphi, [a, b]) = \sup \{ |\varphi(y) - \varphi(x)| : a \leq x < y \leq b \}.$$

A fin de establecer el teorema fundamental del cálculo para la integral de Kurzweil-Henstock se enuncian los siguientes conceptos.

**Definición 1.3.8.** [8, Definición 6.1 (d)] Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **absolutamente continua en el sentido restringido** sobre  $E \subseteq [a, b]$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda colección  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$  de subintervalos de  $[a, b]$ , que no se traslapan entre sí y cuyos extremos están en  $E$ , se cumple que

$$\text{si } \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta, \quad \text{entonces } \sum_{k=1}^n \omega(F, [a_k, b_k]) < \varepsilon.$$

Se denota al espacio de funciones absolutamente continuas en el sentido restringido sobre  $E$  por  $AC_*(E)$ .

**Definición 1.3.9.** [8, Definición 6.1 (e)] Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **absolutamente continua generalizada en el sentido restringido** sobre  $[a, b]$ , si  $F$  es continua en  $[a, b]$  y existe una colección numerable  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos en  $[a, b]$ , con  $[a, b] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ , tales que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $F \in AC_*(E_i)$ .

Se denota al espacio de funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido sobre  $[a, b]$  por  $ACG_*([a, b])$ .

**Teorema 1.3.10.** (Primer teorema fundamental del cálculo para la integral de Kurzweil-Henstock) Sea  $x_0 \in [a, b]$ . Si  $f \in KH([a, b])$ , entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$F(x) = \int_{x_0}^x f,$$

satisface que  $F \in ACG_*([a, b])$  y  $F' = f$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Más aún, si  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $F'(x) = f(x)$ .

**Teorema 1.3.11.** (Segundo teorema fundamental del cálculo para la integral de Kurzweil-Henstock) Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Luego,  $F \in ACG_*([a, b])$  si y sólo si  $F'$  está definida c.d.q. sobre  $[a, b]$ ,  $F' \in KH([a, b])$  y  $F(d) - F(c) = \int_c^d F'$  para cualesquiera  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

La siguiente proposición establece que el espacio de funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido es un espacio más general que el espacio de funciones absolutamente continuas.

**Proposición 1.3.12.** Si  $F \in AC([a, b])$ , entonces  $F \in ACG_*([a, b])$ .

Una propiedad importante del espacio de funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido, es su cierre bajo la multiplicación de funciones, lo cual se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.13.** [15, Proposición 2.5] Si  $F, G \in ACG_*([a, b])$ , entonces  $FG \in ACG_*([a, b])$ .

Una diferencia radical entre la integral de Lebesgue y la integral de Kurzweil-Henstock es que la integral de Lebesgue es una integral absoluta, vea Proposición 1.2.6, sin embargo, la integral de Kurzweil-Henstock no es una integral absoluta, vea [1, Ejemplo 7.2], por ende, desigualdades importantes como la desigualdad de Hölder no se cumplen. Esto hace que en ocasiones el desarrollo de una investigación empleando la integral de Kurzweil-Henstock en lugar de la integral de Lebesgue sea distinta. El siguiente teorema establece una desigualdad que relaciona en algún sentido a la desigualdad de Hölder.

**Teorema 1.3.14.** [19, Lema 24] Si  $f \in KH([a, b])$  y  $g \in BV([a, b])$ , entonces  $fg \in KH([a, b])$  y

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left| \int_a^b f \right| \inf_{[a,b]} |g| + \|f\|_{[a,b]} V_{[a,b]} g,$$

donde  $\|f\|_{[a,b]} = \sup \left| \int_c^d f \right|$ ,  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

La integral de Kurzweil-Henstock también tiene buenos teoremas de convergencia, por ejemplo el siguiente:

**Teorema 1.3.15.** [18, Corolario 3.2] Sean  $g \in KH([a, b])$  y  $(f_n)$  una sucesión en  $BV([a, b])$ . Si existe  $M > 0$  tal que  $V_{[a,b]} f_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y existe una función  $f$  tal que  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  sobre  $[a, b]$ , entonces  $gf \in KH([a, b])$  y

$$\int_a^b gf_n \rightarrow \int_a^b gf.$$

El siguiente resultado establece un teorema de tipo Fubini.

**Teorema 1.3.16.** [5, Teorema 57] Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ , si  $f \in KH([a, b])$  y existe  $M \in L^1([c, d])$  tal que  $V_{[a, b]}g(\cdot, y) \leq M(y)$  para casi todo  $y \in [c, d]$ , entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x)g(x, y)dx dy.$$

## 1.4. Espacios de Sobolev y de KH-Sobolev

En esta sección, se introduce el espacio de Sobolev y espacio de KH-Sobolev, explorando su relación con el concepto de derivada débil, así como propiedades importantes de dicha derivada. Algunos de los siguientes resultados de esta sección, son conocidos, sin embargo, al revisar la literatura únicamente se encontraron las pruebas para los espacios HK-Sobolev (vea [13]), por ello, se consideró adecuado incluir algunas de las demostraciones para el caso del espacio de Sobolev.

Antes de introducir el espacio de Sobolev revisemos los siguientes conceptos. Para una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , el **soporte** de  $f$  está dado mediante la igualdad  $\text{sop} f := \overline{\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}}$ . El espacio de funciones continuamente diferenciables definidas sobre  $[a, b]$  con soporte en  $(a, b)$  se denota por  $C_c^1(a, b)$ .

**Definición 1.4.1.** El **espacio de Sobolev** se define como

$$W^{1,1}([a, b]) = \left\{ u \in L^1([a, b]) : \exists g \in L^1([a, b]) \text{ tal que } \int_a^b u\varphi' = - \int_a^b g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(a, b) \right\}. \quad (1.4.1)$$

Para una función  $u \in W^{1,1}([a, b])$ , la función  $g$  en (1.4.1) se denomina **derivada débil** de  $u$  y se denota por  $\dot{u}$ . Más aún,  $\dot{u} \in L^1([a, b])$ .

**Notación 1.4.2.** En este trabajo  $\dot{u}$  denota la derivada débil y  $u'$  denota la derivada clásica.



Una función absolutamente continua en un intervalo  $[a, b]$  no tiene únicamente derivada en el sentido usual, sino que cumple con ciertas propiedades que la hacen apta para ser tratada dentro del espacio de Sobolev. Para establecer una conexión más precisa tengamos en cuenta el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.3.** Si  $u = v$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $v \in AC([a, b])$ , entonces  $u \in W^{1,1}([a, b])$  y  $\dot{u} = v'$ .

*Demostración.* Sean  $u, v$  funciones, tales que  $v \in AC([a, b])$  y  $u = v$  c.d.q sobre  $[a, b]$ . Así, por el Teorema 1.2.13,  $v'$  existe c.d.q sobre  $[a, b]$ . Luego, multiplicando esta función por  $\varphi \in C_c^1([a, b])$  ( $\varphi \in AC([a, b])$ ) e integrando por partes (Proposición 1.2.18) se sigue que

$$\int_a^b v' \varphi = v \varphi \Big|_a^b - \int_a^b v \varphi' = - \int_a^b v \varphi'.$$

Además, dado que  $u \varphi' = v \varphi'$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , se cumple que

$$\int_a^b u \varphi' = \int_a^b v \varphi'.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b u \varphi' = - \int_a^b v' \varphi. \tag{1.4.2}$$

Siendo  $\varphi \in C_c^1([a, b])$  arbitrario, se tiene que,  $u \in W^{1,1}([a, b])$  y  $\dot{u} = v'$ . ■

**Observación 1.4.4.** Es claro que si  $u \in AC([a, b])$ , entonces por la Proposición 1.4.3,  $u \in W^{1,1}([a, b])$  y  $\dot{u} = u'$ . Es decir,  $u$  tiene derivada débil que coincide con la derivada clásica de  $u$ .

A diferencia del caso para la derivada clásica, con la derivada débil, no recuperamos por medio de la integral la función original sino una función denominada **representante continuo**, como se establece en el siguiente resultado.

**Teorema 1.4.5** (Teorema Fundamental del Cálculo). Si  $u \in W^{1,1}([a, b])$ , entonces existe una función  $\tilde{u} \in C([a, b])$  tal que

$$u = \tilde{u} \quad \text{c.d.q sobre } [a, b],$$

y se cumple que

$$\tilde{u}(d) - \tilde{u}(c) = \int_c^d \dot{u},$$

para todo  $c, d \in [a, b]$ .

**Observación 1.4.6.** Toda función  $u \in W^{1,1}([a, b])$  admite una (y sólo una) representación continua  $\tilde{u}$  sobre  $[a, b]$ . Además, puesto que  $\dot{u} \in L^1$ , se tiene que  $\tilde{u} \in AC([a, b])$ . Más aún, dado que  $u = \tilde{u}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , de la proposición 1.4.3,  $\dot{u} = \tilde{u}'$ .

El siguiente teorema establece como derivar el producto de dos funciones utilizando la derivada débil. Veamos que, de hecho, es análogo al de la derivada clásica.

**Teorema 1.4.7** (Regla del producto para la derivada débil.). Si  $u, v \in W^{1,1}([a, b])$ , entonces  $uv \in W^{1,1}([a, b])$  y

$$(uv)^\cdot = u\dot{v} + \dot{u}v.$$

*Demostración.* Sean  $u, v \in W^{1,1}([a, b])$ , de modo que por la Observación 1.4.6, existen  $\tilde{u}, \tilde{v} \in AC([a, b])$  tales que  $u = \tilde{u}$ ,  $v = \tilde{v}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $\dot{u} = \tilde{u}'$ ,  $\dot{v} = \tilde{v}'$ . Luego, por la Proposición 1.2.10,  $\tilde{u}\tilde{v} \in AC([a, b])$ . De modo que por la Observación 1.4.4, se tiene que  $(\tilde{u}\tilde{v})^\cdot = (\tilde{u}\tilde{v})'$ , es decir,

$$\int_a^b \tilde{u}\tilde{v}\varphi' = - \int_a^b (\tilde{u}\tilde{v})'\varphi,$$

para todo  $\varphi \in C_c^1(a, b)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b uv\varphi' &= \int_a^b \tilde{u}\tilde{v}\varphi' = - \int_a^b (\tilde{u}\tilde{v})'\varphi \\ &= - \int_a^b (\tilde{u}'\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v}')\varphi \\ &= - \int_a^b (\dot{u}v + u\dot{v})\varphi, \end{aligned}$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(a, b)$ . Por lo tanto  $(uv)^\cdot = \dot{u}v + u\dot{v}$ . ■

En el caso de la regla del cociente para la derivada débil, se requiere una condición extra comparada con su análogo clásico, como se detalla a continuación.

---

**Teorema 1.4.8** (Regla del cociente para la derivada débil). Si  $u, v \in W^{1,1}([a, b])$ , y existe  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha \leq |v(x)|$  para toda  $x \in [a, b]$ , entonces  $\frac{u}{v} \in W^{1,1}([a, b])$  y

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2}.$$

*Demostración.* Sean  $u, v \in W^{1,1}([a, b])$  y supongamos que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\alpha \leq |v(x)|, \quad \text{para toda } x \in [a, b]. \quad (1.4.3)$$

Por la observación 1.4.6, existen  $\tilde{u}, \tilde{v} \in AC([a, b])$  tales que  $u = \tilde{u}$ ,  $v = \tilde{v}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $\dot{u} = \tilde{u}'$ ,  $\dot{v} = \tilde{v}'$ . Para realizar la demostración consideremos la siguiente afirmación.

*Afirmación 1.*  $\alpha \leq |\tilde{v}(x)|$  para toda  $x \in [a, b]$ . Por contradicción. Supongamos que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $|\tilde{v}(x_0)| < \alpha$ . Por la continuidad de  $\tilde{v}$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b], \quad |\tilde{v}(x)| < \alpha. \quad (1.4.4)$$

Por otro lado,  $v = \tilde{v}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , es decir, existe  $E \subseteq [a, b]$  con  $m(E) = 0$  tal que para toda  $x \in [a, b] \setminus E$  se cumple la igualdad  $v(x) = \tilde{v}(x)$ . Ahora, si definimos  $E' = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ , se tiene que  $E' \subseteq E$  y puesto que  $m$  es completa, se tiene que  $m(E') = 0$ . Así, para cada  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \setminus E'$  se cumple que  $|v(x)| = |\tilde{v}(x)|$ . Luego, debido a la desigualdad (1.4.3), para cada  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \setminus E'$  se cumple  $\alpha \leq |v(x)| = |\tilde{v}(x)|$ , lo cual contradice (1.4.4).

Ahora, debido a que  $\tilde{v} \in AC([a, b])$ , por la *Afirmación 1* y la Proposición 1.2.11, se tiene que  $\frac{1}{\tilde{v}} \in AC([a, b])$ . Luego, por la Proposición 1.2.10,  $\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \in AC([a, b])$ . Por otro lado, es claro que  $\frac{u}{v} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , de modo que por la Proposición 1.4.3 se tiene que  $\frac{u}{v} \in W^{1,1}([a, b])$  y  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)'$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{u}{v}\right)' \varphi &= - \int_a^b \left(\frac{u}{v}\right) \varphi' \\ &= - \int_a^b \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)' \varphi \\ &= - \int_a^b \left(\frac{\tilde{u}'\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v}'}{\tilde{v}^2}\right) \varphi \end{aligned}$$

$$= - \int_a^b \left( \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2} \right) \varphi,$$

para toda  $\varphi \in C_c^1(a, b)$ . Por lo tanto,  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2}$ . ■

El siguiente resultado nos permite determinar cuando una sucesión de funciones absolutamente continuas converge uniformemente a una función absolutamente continua.

**Proposición 1.4.9.** [2, Proposición 3] Sea  $\{V_n\}$  una sucesión de funciones absolutamente continuas sobre  $[a, b]$ . Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x_0)$  converge en algún punto  $x_0 \in [a, b]$  y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (V_n)'$  converge en norma  $L^1([a, b])$  a una función  $v \in L^1([a, b])$ , entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$  converge uniformemente a  $V \in AC([a, b])$  y  $\dot{V} = v$  c.d.q sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Sea

$$V(x) = \int_{x_0}^x v(t) dt + \alpha,$$

para todo  $x \in [a, b]$ , donde  $\alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \in \mathbb{C}$ . Debido al Teorema 1.2.13, se concluye que  $V \in AC([a, b])$ , más aún, por la Observación 1.4.4,  $\dot{V} = v$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . También, puesto que  $V_n \in AC[a, b]$  y la misma Observación 1.4.4, se tiene que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n \in W^{1,1}$ ,  $\dot{V}_n = V_n'$  y  $\dot{V}_n \in L^1([a, b])$ , de manera que

$$V_n(x) = \int_{x_0}^x \dot{V}_n(t) dt + V_n(x_0),$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Ahora mostremos que  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$  converge uniformemente a  $V$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \left| V(x) - \sum_{n=0}^s V_n(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x v(t) dt + \alpha - \sum_{n=0}^s \left( \int_{x_0}^x \dot{V}_n(t) dt + V_n(x_0) \right) \right| \\ &\leq \left| \alpha - \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^x v(t) dt - \sum_{n=0}^s \left( \int_{x_0}^x \dot{V}_n(t) dt \right) \right| \\ &\leq \left| \alpha - \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^x \left( v(t) - \sum_{n=0}^s \dot{V}_n(t) \right) dt \right| \\ &\leq \left| \alpha - \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \right| + \int_{x_0}^x \left| v(t) - \sum_{n=0}^s \dot{V}_n(t) \right| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \alpha - \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \right| + \int_a^b \left| v(t) - \sum_{n=0}^s \dot{V}_n(t) \right| dt \\ &= \left| \alpha - \sum_{n=0}^s V_n(x_0) \right| + \left\| v - \sum_{n=0}^s \dot{V}_n \right\|_{L^1([a,b])}. \end{aligned}$$

Dada la forma de  $\alpha$  y la hipótesis de que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \dot{V}_n$  converge a la función  $v$  en norma, se tiene que si  $s$  tiende a infinito, entonces

$$\left| V(x) - \sum_{n=0}^s V_n(x) \right| \rightarrow 0,$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Notemos que la convergencia es uniforme. ■

Los espacios de Sobolev se definen empleando la integral de Lebesgue. Sin embargo, es posible realizar una generalización utilizando la integral de Henstock-Kurzweil. Para ello, revisemos primero las siguientes definiciones.

**Definición 1.4.10.** Sea  $C_P^2([a, b])$  el espacio de funciones  $\varphi \in C([a, b])$  para la cual existe una partición  $\{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^n$  de  $[a, b]$  tal que  $\varphi \in C^2((t_{i-1}, t_i))$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ; y  $\varphi^{(k)}(t_0+)$ ,  $\varphi^{(k)}(t_1-)$ ,  $\varphi^{(k)}(t_1+)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^{(k)}(t_{n-1}-)$ ,  $\varphi^{(k)}(t_{n-1}+)$ ,  $\varphi^{(k)}(t_n-)$  existen para todo  $k = 1, 2$ .

**Definición 1.4.11.** Se define el espacio de funciones prueba como

$$V = \{\varphi \in C_P^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}.$$

**Definición 1.4.12.** El espacio KH-Sobolev,  $W_{KH}$ , se define por

$$W_{KH} = \left\{ u \in KH([a, b]) : \exists g \in KH([a, b]), \int_a^b u \varphi' = - \int_a^b g \varphi, \forall \varphi \in V \right\}. \quad (1.4.5)$$

Para  $u \in W_{KH}$  definimos la derivada débil de  $u$ , denotada por  $\dot{u}$ , como  $\dot{u} = g$ , donde  $g$  es la función dada en la Definición 1.4.12. La derivada débil es única c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

Los siguientes resultados presentan las versiones análogas del espacio KH-Sobolev en comparación con el espacio de Sobolev, así como su relación con las funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido. Las demostraciones se omiten (vea [13]).

**Proposición 1.4.13.** [13, Proposición 3.5] Si  $u = v$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $v \in ACG_*([a, b])$ , entonces  $u \in W_{KH}([a, b])$  y  $\dot{u} = v'$ .

**Observación 1.4.14.** Si  $u \in ACG_*([a, b])$ , entonces  $u \in W_{HK}([a, b])$  y  $u$  tiene derivada débil que coincide con la derivada clásica.

**Teorema 1.4.15** (Teorema Fundamental del Cálculo). [13, Teorema 3.6] Si  $u \in W_{KH}([a, b])$ , entonces existe una función  $\tilde{u} \in C([a, b])$  tal que

$$u = \tilde{u} \text{ c.d.q. sobre } [a, b]$$

y se cumple que

$$\tilde{u}(c) - \tilde{u}(d) = \int_c^d \dot{u},$$

para todo  $c, d \in [a, b]$ .

**Observación 1.4.16.** Toda función  $u \in W_{KH}([a, b])$  admite una (y sólo una) representación continua  $\tilde{u}$  sobre  $[a, b]$ . Además, puesto que  $\dot{u} \in KH([a, b])$ , se tiene que  $\tilde{u} \in ACG_*([a, b])$ . Más aún, dado que  $u = \tilde{u}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , de la Proposición 1.4.13,  $\dot{u} = \tilde{u}'$ .

**Teorema 1.4.17** (Regla del producto para la derivada débil). [13, Corolario 3.7] Si  $u, v \in W_{KH}([a, b])$ , entonces  $uv \in W_{KH}([a, b])$  y

$$(uv)' = u\dot{v} + \dot{u}v.$$

## Capítulo 2

---

# Problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville

---

En este capítulo se muestra la existencia y unicidad de la solución de problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville  $(\rho y)' + Qy = f$ , cuando los coeficientes  $Q, f$  son Kurzweil-Henstock integrables y  $\frac{1}{\rho}$  es Lebesgue integrable. Los resultados dados por S. Sánchez-Perales en [17] quedan como un caso particular de los presentados en este capítulo.

## 2.1. Caracterización a un sistema de ecuaciones integrales

Empecemos definiendo un espacio adecuado para la solución de la ecuación de Sturm-Liouville.

**Definición 2.1.1.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es localmente continua en  $x \in [a, b]$ , si existe  $\delta_x > 0$  tal que  $f$  es continua sobre  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ .

**Definición 2.1.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es localmente de clase  $C^1$  en  $x \in [a, b]$ , si existe  $\delta_x > 0$  tal que  $f$  es continuamente diferenciable sobre  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ .

**Definición 2.1.3.** Dos funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  son localmente iguales en  $x \in [a, b]$ , si existe  $\delta_x > 0$  tal que  $f(t) = g(t)$  para todo  $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ .

Dada una función  $\rho$ , denotamos por  $E_\rho$ , al conjunto de puntos  $x \in [a, b]$  tales que  $\frac{1}{\rho}$  es localmente continua en  $x$ , y por  $C_\rho^1$ , al espacio de funciones que son localmente de clase  $C^1$  en todo punto de  $E_\rho$ . La función  $\rho$  puede tener ceros, de manera que  $1/\rho$  puede tener un comportamiento asintótico y puede haber puntos donde esté indefinida.

**Definición 2.1.4.** Se define el siguiente espacio

$$\mathcal{A} = \left\{ y \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1 : \rho \dot{y} = g \text{ c.d.q. sobre } [a, b] \right. \\ \left. \text{para alguna } g \in ACG_*([a, b]) \right\}. \quad (2.1.1)$$

**Observación 2.1.5.** Sea  $y \in \mathcal{A}$ . Luego:

- (a)  $y'$  existe c.d.q. sobre  $[a, b]$ , en especial en todo punto de  $E_\rho$ . Además,  $\dot{y} = y'$ . Esto debido a que  $y \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1$  y a la Observación 1.4.4;
- (b)  $(\rho \dot{y})' = g'$ . Esto debido a que existe  $g \in ACG_*([a, b])$  tal que  $\rho \dot{y} = g$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y a la Proposición 1.4.13. Además, por el Teorema 1.3.10 y la Proposición 1.3.4, se tiene que  $(\rho \dot{y})' \in KH([a, b])$ .

**Lema 2.1.6.** Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si  $f, Q \in KH([a, b])$ ,  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$  y  $x_0 \in E_\rho$ , entonces los siguientes problemas son equivalentes:

- 1) Existe solución única  $y \in \mathcal{A}$  para el problema de valores iniciales

$$(\rho \dot{y})' + Qy = f \text{ c.d.q. sobre } [a, b]; \quad (2.1.2) \\ y(x_0) = \alpha, \quad \dot{y}(x_0) = \beta.$$

- 2) Existen  $y \in AC([a, b])$  y  $z \in L([a, b])$  tales que satisfacen el siguiente sistema integral

$$y = \int_{x_0}^{(\cdot)} z + \alpha \quad (2.1.3)$$


---



sobre  $[a, b]$ , y

$$\rho z = - \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] + \beta \rho(x_0) \quad (2.1.4)$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$  y localmente en todo punto de  $E_\rho$ . Estas funciones son únicas en el siguiente sentido. Si  $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in AC([a, b]) \times L^1([a, b])$  es otra solución del sistema integral (2.1.3)-(2.1.4), entonces  $y(x) = \tilde{y}(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ ,  $z(x) = \tilde{z}(x)$  para todo  $x \in E_\rho$  y  $z = \tilde{z}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \mathcal{A}$  una solución del problema (2.1.2), entonces  $y \in AC([a, b])$ . Más aún, debido al Teorema 1.2.13,  $y'$  existe c.d.q. sobre  $[a, b]$ , en el sentido clásico,  $y' \in L([a, b])$  y

$$y(x) = \int_{x_0}^x y' + y(x_0), \quad (2.1.5)$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Además, por la Observación 2.1.5,  $\dot{y} = y'$ . De manera que si tomamos  $z = \dot{y}$ , entonces  $z \in L([a, b])$  y puesto que  $y(x_0) = \alpha$  se sigue que

$$y(x) = \int_{x_0}^x z + \alpha.$$

De modo que la igualdad (2.1.3) se satisface. Por otro lado, puesto que  $y \in \mathcal{A}$ , se tiene de la Observación 2.1.5 (b) que existe alguna  $g \in ACG_*([a, b])$  que cumple  $g' = (\rho \dot{y})'$ , pero  $(\rho \dot{y})' = -(Qy - f)$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Así, por el Teorema 1.3.11, para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g' = - \int_{x_0}^x [Qy - f]. \quad (2.1.6)$$

Sumado a esto, si  $x^* \in E_\rho$ , entonces  $\frac{1}{\rho}$  es localmente continua en  $x^*$ . Además, dado que  $y \in C_\rho^1$ , se sigue que  $y$  es de clase  $C^1$  en  $x^*$ , de manera que existe  $\delta_{x^*} > 0$  tal que  $\dot{y}$  y  $\frac{1}{\rho}$  son continuas en  $(x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b]$ . Así, la igualdad  $\rho \dot{y} = g$  se transforma en

$$\rho(x) \dot{y}(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in (x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b].$$

Sustituyendo  $g(x)$  en la ecuación (2.1.6), se tiene que para cada  $x^* \in E_\rho$ ,

$$\rho(x) z(x) = - \int_{x_0}^x [Qy - f] + g(x_0), \quad \text{para todo } x \in (x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b]. \quad (2.1.7)$$

Dado que  $x_0 \in E_\rho$  y  $z(x_0) = \dot{y}(x_0) = \beta$ , si tomamos  $x = x_0$ , se sigue de la ecuación (2.1.7) que

$$\rho(x_0)\beta = g(x_0). \quad (2.1.8)$$

Sustituyendo  $g(x_0)$  de la ecuación (2.1.8) en la igualdad (2.1.7), y dado que  $x^*$  es un punto arbitrario de  $E_\rho$ , entonces se cumple

$$\rho z = - \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] + \rho(x_0)\beta, \quad (2.1.9)$$

localmente en todo punto de  $E_\rho$ . Además, por la ecuación (2.1.6), es claro que la ecuación (2.1.9) se cumple c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

Por el contrario, sea  $(y, z) \in AC([a, b]) \times L^1([a, b])$  una solución del sistema (2.1.3)-(2.1.4). Debido a la ecuación (2.1.3) y al Teorema 1.2.12,  $\dot{y} = z$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Por lo tanto, de la ecuación (2.1.4) se sigue que

$$\rho \dot{y} = - \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] + \beta \rho(x_0) \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b]. \quad (2.1.10)$$

Por otra parte, dado que  $y \in AC([a, b]) \subseteq BV([a, b])$  y  $Q \in KH([a, b])$ , por el Teorema 1.3.6,  $Qy \in KH([a, b])$ . Además,  $f \in KH([a, b])$  y  $KH([a, b])$  es un espacio vectorial. De modo que,  $(Qy - f) \in KH([a, b])$ . Así, por el Teorema 1.3.10,

$$- \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] + \beta \rho(x_0) \in ACG_*([a, b]). \quad (2.1.11)$$

Por tanto, de la ecuación (2.1.10) y la Proposición 1.4.13,

$$(\rho \dot{y})' = - \left[ \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] \right]'$$

En adición, por el Teorema 1.3.10,

$$- \left[ \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] \right]' = -Qy + f \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b].$$

Por lo tanto,  $(\rho \dot{y})' + Qy = f$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Además, de la ecuación (2.1.3) es claro que  $y(x_0) = \alpha$ . Por otro lado, si  $x \in E_\rho$  entonces la igualdad (2.1.4) se cumple localmente en  $x$  y  $\frac{1}{\rho}$  es localmente continua en  $x$ . De modo que,  $\rho$  es localmente continua en  $x$  y dado

---

que el lado derecho de la ecuación (2.1.4) es, de hecho, una función continua. Luego,  $z$  es localmente continua en  $x$ , lo que implica debido a (2.1.3) que  $y$  es localmente de clase  $C^1$  en  $x$  y  $y' = z$  localmente en  $x$ . Dada la arbitrariedad de  $x \in E_\rho$ , obtenemos que  $y \in C_\rho^1$ . Debido a lo anterior, localmente en  $x_0 \in E_\rho$ , se tiene que  $y' = \dot{y} = z$ . Así, de la ecuación (2.1.4) se tiene que

$$\dot{y} = \frac{1}{\rho} \left( - \int_{x_0}^{(\cdot)} [Qy - f] + \beta\rho(x_0) \right),$$

se cumple localmente en  $x_0$ . Luego,  $\dot{y}(x_0) = \beta$ . Finalmente, de las ecuaciones (2.1.10) y (2.1.11),  $y \in \mathcal{A}$ .

La unicidad, por su parte, es discutida en el Teorema 2.2.1, que se presenta a continuación. ■

## 2.2. Problemas de valores iniciales

**Teorema 2.2.1.** Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si  $f, Q \in KH([a, b])$ ,  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$  y  $x_0 \in E_\rho$ , entonces existe solución única  $y \in \mathcal{A}$  del problema de valores iniciales

$$(\rho\dot{y})' + Qy = f \text{ c.d.q sobre } [a, b];$$

$$y(x_0) = \alpha, \quad \dot{y}(x_0) = \beta.$$

*Demostración.* Mostraremos que existe solución única al sistema integral (2.1.3)-(2.1.4). Dado que  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$ , podemos tomar un subconjunto  $B \subseteq [a, b]$ , con  $m(B) = 0$ , de manera que para  $x \in [a, b] \setminus B$ ,  $\frac{1}{|\rho(x)|} < \infty$ . Definamos  $(y_n)$  sobre  $[a, b]$  y  $(z_n)$  sobre  $[a, b] \setminus B$  mediante

$$y_0(x) = \alpha, \quad z_0(x) = \frac{\beta}{\rho(x)}; \tag{2.2.1}$$

$$y_n(x) = \alpha + \int_{x_0}^x z_{n-1}; \tag{2.2.2}$$

$$z_n(x) = -\frac{1}{\rho(x)} \int_{x_0}^x Qy_{n-1} + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \beta\rho(x_0) + \int_{x_0}^x f \right]. \tag{2.2.3}$$

De manera similar, dado  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$  y  $f, Q \in KH([a, b])$ , se sigue que  $z_n \in L^1([a, b])$  y  $y_{n+1} \in AC([a, b])$ , para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Observe que para  $s \in [a, b]$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$y_n(s) - y_{n+1}(s) = \int_{x_0}^s [z_{n-1} - z_n]. \quad (2.2.4)$$

Luego, por la Proposición 1.2.16,

$$V_I[y_n - y_{n+1}] = \int_I |z_n - z_{n-1}| \quad \text{para todo intervalo cerrado } I \subseteq [a, b]. \quad (2.2.5)$$

Por otro lado, por la Proposición 1.2.17,  $y_n \in BV([a, b])$ . Así, por el Teorema 1.3.14,

$$\begin{aligned} \left| \int_I Q[y_n - y_{n+1}] \right| &\leq \left| \int_I Q \right| \inf_I |y_n - y_{n+1}| + \|Q\|_{[a,b]} V_I[y_n - y_{n+1}] \\ &= \|Q\|_{[a,b]} \int_I |z_n - z_{n-1}|, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

para todo intervalo cerrado  $I \subseteq [a, b]$ , con  $x_0 \in I$ . Por otro lado, es claro que para todo  $s \in [a, b] \setminus B$  y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$z_{n+2}(s) - z_{n+1}(s) = \frac{1}{\rho(s)} \int_{x_0}^s Q[y_n - y_{n+1}]. \quad (2.2.7)$$

Sea  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$P(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{|\rho(s)|} ds.$$

Luego,

$$P'(x) = \frac{1}{|\rho(x)|}, \quad \text{para casi todo } x \in (a, b).$$

*Afirmación 1.* Para toda  $x \in [a, b]$  con  $x < x_0$ ,

$$\int_x^{x_0} |z_n(s) - z_{n-1}(s)| ds \leq \begin{cases} M_1 \frac{[-P(x)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}, & \text{si } n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}; \\ M_2 \frac{[-P(x)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}, & \text{si } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

donde  $M_1 = \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]}$  y  $M_2 = \|Q(y_0 - y_1)\|_{[a,b]}$ . Mostremos únicamente que la *Afirmación 1* se cumple para los casos donde  $n$  es impar, mediante inducción sobre  $k$ .

Caso base: De la ecuación (2.2.7), tenemos que para todo  $x \in [a, b]$  con  $x < x_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^{x_0} |z_3(s) - z_2(s)| ds &= \int_x^{x_0} \frac{1}{|\rho(s)|} \left| \int_s^{x_0} Q(y_1 - y_2) \right| ds \\ &\leq \int_x^{x_0} \frac{1}{|\rho(s)|} \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} ds \\ &= \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} [-P(x)] \\ &= M_1[-P(x)]. \end{aligned}$$

Para la hipótesis de inducción, supongamos que para cada  $x \in [a, b]$  con  $x < x_0$ , se cumple que

$$\int_x^{x_0} |z_{2k+1}(s) - z_{2k}(s)| ds \leq \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} \frac{[-P(x)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}. \quad (2.2.9)$$

Sea  $x \in [a, b]$  con  $x < x_0$ . De las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_x^{x_0} |z_{2(k+1)+1}(s) - z_{2(k+1)}(s)| ds &= \int_x^{x_0} \frac{1}{|\rho(s)|} \left| \int_s^{x_0} Q[y_{2k+1} - y_{2k+2}] \right| ds \\ &\leq \|Q\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \frac{1}{|\rho(s)|} \left[ \int_s^{x_0} |z_{2k+1} - z_{2k}| \right] ds. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Ahora, debido a la ecuación (2.2.9), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_x^{x_0} |z_{2(k+1)+1}(s) - z_{2(k+1)}(s)| ds &= \|Q\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \frac{1}{|\rho(s)|} \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} \frac{[-P(s)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1} ds \\ &= \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} P'(s) \frac{[-P(s)]^k}{k!} ds \|Q\|_{[a,b]}^k \\ &= \|Q(y_1 - y_2)\|_{[a,b]} \frac{[-P(x)]^{k+1}}{(k+1)!} \|Q\|_{[a,b]}^k. \end{aligned}$$

Por inducción, se sigue que la ecuación (2.2.8) se cumple. De manera similar, se muestra que  $x \in [a, b]$  con  $x_0 \leq x$ ,

$$\int_{x_0}^x |z_n(s) - z_{n-1}(s)| ds \leq \begin{cases} M_1 \frac{[P(x)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}, & \text{si } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}; \\ M_2 \frac{[P(x)]^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}, & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Ahora, definamos  $l_k = y_{2k+1} - y_{2k}$ ,  $h_k = y_{2k} - y_{2k-1}$ ,  $u_k = z_{2k+1} - z_{2k}$  y  $v_k = z_{2k} - z_{2k-1}$ .

Luego, debido a las ecuaciones (2.2.4), (2.2.8) y (2.2.11), se sigue que para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$|l_k(x)| = |y_{2k+1}(x) - y_{2k}(x)| = \left| \int_{x_0}^x [z_{2k}(s) - z_{2k-1}(s)] ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{x_0}^x |z_{2k}(s) - z_{2k-1}(s)| ds \right| \\
&\leq M_2 \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a,b]}^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|h_k(x)| = |y_{2k}(x) - y_{2k-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [z_{2k-1}(s) - z_{2k-2}(s)] ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x |z_{2(k-1)+1}(s) - z_{2(k-1)}(s)| ds \right| \\
&\leq M_1 \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a,b]}^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-2} \text{ para todo } k \geq 2. \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Tambi3n, para cada  $x \in [a, b] \setminus B$ ,

$$\begin{aligned}
|u_k(x)| = |z_{2k+1}(x) - z_{2k}(x)| &= \frac{1}{|\rho(x)|} \left| \int_{x_0}^x [Q(y_{2k-1} - y_{2k})] ds \right| \\
&\leq \frac{\|Q\|_{[a,b]}}{|\rho(x)|} \left| \int_{x_0}^x |z_{2k-1}(s) - z_{2k-2}(s)| ds \right| \\
&\leq \frac{M_1}{|\rho(x)|} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a,b]}^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1} \text{ para todo } k \geq 1, \quad (2.2.14)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|v_k(x)| = |z_{2k}(x) - z_{2k-1}(x)| &= \frac{1}{|\rho(x)|} \left| \int_{x_0}^x [Q(y_{2k-2} - y_{2k-1})] ds \right| \\
&\leq \frac{\|Q\|_{[a,b]}}{|\rho(x)|} \left| \int_{x_0}^x |z_{2k-2}(s) - z_{2k-3}(s)| ds \right| \\
&\leq \frac{M_2}{|\rho(x)|} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a,b]}^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1} \text{ para todo } k \geq 1. \quad (2.2.15)
\end{aligned}$$

Ahora, observe que

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = \begin{cases} y_0 + \sum_{k=0}^s l_k + \sum_{k=1}^s h_k, & \text{si } n = 2s + 1; \\ y_0 + \sum_{k=0}^s l_k + \sum_{k=1}^s h_k, & \text{si } n = 2s, \end{cases} \quad (2.2.16)$$

y

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \begin{cases} z_0 + \sum_{k=0}^s u_k + \sum_{k=1}^s v_k, & \text{si } n = 2s + 1; \\ z_0 + \sum_{k=0}^s u_k + \sum_{k=1}^s v_k, & \text{si } n = 2s. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Dado que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|^k}{k!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-1} < \infty,$$

se sigue de las ecuaciones (2.2.12)-(2.2.15) y el criterio M de Weierstrass 1.1.2 que

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

convergen uniformemente en  $[a, b]$ . Mientras que

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

convergen puntualmente sobre  $[a, b] \setminus B$ . Así, debido a la ecuaciones (2.2.16) y (2.2.17),  $(y_n)$  converge uniformemente sobre  $[a, b]$  a una función  $y$  y  $(z_n)$  converge puntualmente sobre  $[a, b] \setminus B$  a una función  $z$ . Por otro lado, de igual manera, por la ecuación (2.2.17), (2.2.14), y (2.2.15), tenemos que

$$|z_n| \leq \frac{1}{|\rho|} \left[ \Lambda + (M_1 + M_2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a,b]}^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^{k-2} \right] \text{ c.d.q. sobre } [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguna  $\Lambda > 0$ . Esto y el Teorema de la Convergencia Dominada 1.2.8 implican que  $z \in L^1([a, b])$ . Más aún, para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \alpha + \int_{x_0}^x z_{n-1}(s) ds \right] = \alpha + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n-1}(s) ds \\ &= \alpha + \int_{x_0}^x z(s) ds. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Ahora mostremos que para toda  $x \in [a, b]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x Q y_{n-1} = \int_{x_0}^x Q y. \quad (2.2.19)$$

Sea  $x \in [a, b]$ . Asumamos, sin pérdida de generalidad, que  $x_0 < x$ . Luego,  $(y_n)$  es uniformemente de variación acotada sobre  $[x_0, x]$ . En efecto, debido a la ecuaciones (2.2.5) y (2.2.16), se tiene que

$$\begin{aligned} V_{[x_0, x]} y_n &= V_{[x_0, x]} \left[ y_0 + \sum_{k=1}^n [y_k - y_{k-1}] \right] \\ &\leq V_{[x_0, x]} y_0 + \sum_{k=1}^2 V_{[x_0, x]} [y_k - y_{k-1}] + \sum_{k=3}^n V_{[x_0, x]} [y_{k-1} - y_k] \\ &\leq V_{[x_0, x]} y_0 + \sum_{k=1}^2 V_{[x_0, x]} [y_k - y_{k-1}] + \sum_{k=3}^n \int_{x_0}^x |z_{k-1} - z_{k-2}|. \end{aligned}$$

Pero debido a la ecuación (2.2.11),

$$\sum_{k=3}^n \int_{x_0}^x |z_{k-1} - z_{k-2}| \leq (M_1 + M_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a, b]}^k}{k!} \|Q\|_{[a, b]}^{k-1}.$$

Si definimos

$$M = V_{[x_0, x]} y_0 + \sum_{k=1}^2 V_{[x_0, x]} [y_k - y_{k-1}] + (M_1 + M_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L^1[a, b]}^k}{k!} \|Q\|_{[a, b]}^{k-1},$$

obtenemos que

$$V_{[x_0, x]} y_n \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, debido a la convergencia de  $(y_n)$  a  $y$ , así como al Teorema 1.3.15, la igualdad (2.2.19) se cumple. En consecuencia, para todo  $x \in [a, b] \setminus B$ ,

$$\begin{aligned} z(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\rho(x)} \int_{x_0}^x Q y_{n-1} + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \beta \rho(x_0) + \int_{x_0}^x f \right] \right] \\ &= -\frac{1}{\rho(x)} \int_{x_0}^x Q y + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \beta \rho(x_0) + \int_{x_0}^x f \right]. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Si  $x^* \in E_\rho$ , entonces existe  $\delta_{x^*} > 0$  tal que  $\frac{1}{\rho}$  es continua sobre  $(x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b]$ . Esto implica que  $(x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b] \subseteq [a, b] \setminus B$ . Por tanto, debido a la ecuación (2.2.20) para cada  $x \in (x^* - \delta_{x^*}, x^* + \delta_{x^*}) \cap [a, b]$ ,

$$z(x) = -\frac{1}{\rho(x)} \int_{x_0}^x Q y + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \beta \rho(x_0) + \int_{x_0}^x f \right]. \quad (2.2.21)$$



En consecuencia,

$$z = -\frac{1}{\rho} \int_{x_0}^{(\cdot)} Qy + \frac{1}{\rho} \left[ \beta\rho(x_0) + \int_{x_0}^{(\cdot)} f \right] \quad (2.2.22)$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$  y localmente en cada punto de  $E_\rho$ .

Ahora debemos mostrar que esta solución es única. Asumamos que  $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in AC([a, b]) \times L^1([a, b])$  es otra solución del sistema integral (2.1.3)-(2.1.4). Así,

$$\tilde{y}(x) = \alpha + \int_{x_0}^x \tilde{z}, \quad (2.2.23)$$

para cada  $x \in [a, b]$ . Además,

$$\tilde{z} = -\frac{1}{\rho} \int_{x_0}^{(\cdot)} Q\tilde{y} + \frac{1}{\rho} \left[ \beta\rho(x_0) + \int_{x_0}^{(\cdot)} f \right], \quad (2.2.24)$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$  y localmente en todo punto de  $E_\rho$ . De las ecuaciones (2.2.2), (2.2.3), (2.2.23) y (2.2.24) se puede mostrar de manera similar a la anterior que

$$|z_{2k}(s) - \tilde{z}(s)| \leq \frac{1}{|\rho(s)|} \|Q\|_{[a,b]} \left| \int_{x_0}^s |z_{2k-2} - \tilde{z}| \right|,$$

para casi todo  $s \in [a, b]$  y para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Lo cual implica que

$$|z_{2k}(s) - \tilde{z}(s)| \leq \begin{cases} P'(s) \frac{[P(s)]^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^k \|\tilde{z} - z_0\|_{L^1[a,b]}, & \text{si } x_0 \leq s; \\ P'(s) \frac{[-P(s)]^{k-1}}{(k-1)!} \|Q\|_{[a,b]}^k \|\tilde{z} - z_0\|_{L^1[a,b]}, & \text{si } s < x_0, \end{cases} \quad (2.2.25)$$

para casi todo  $s \in [a, b]$ . En consecuencia, para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$|y_{2k+1}(x) - \tilde{y}(x)| \leq \|Q\|_{[a,b]}^k \|\tilde{z} - z_0\|_{L^1[a,b]} \frac{\|\frac{1}{\rho}\|_{L^1[a,b]}^k}{k!} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Así,  $y_{2k+1}(x) \rightarrow \tilde{y}(x)$ , pero  $y_{2k+1}(x) \rightarrow y(x)$ . Por lo tanto,  $\tilde{y}(x) = y(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Más aún, las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.24) implican que  $\tilde{z} = z$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Adicionalmente, dado que las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.24) se cumplen localmente en cada punto de  $E_\rho$ , se sigue que  $z(x) = \tilde{z}(x)$  para todo punto  $x \in E_\rho$ . ■

Con esto, demostramos que el sistema integral (2.1.3)-(2.1.4) tiene solución única y dado que este sistema es equivalente al problema de valores iniciales (2.1.2), entonces este último también tiene solución única. Ahora tomemos en cuenta la ecuación la siguiente ecuación homogénea

$$(\rho\dot{y})' + Qy = 0 \text{ c.d.q sobre } [a, b].$$

Por lo que su espacio solución es el siguiente

$$\mathcal{A}_* = \{y \in \mathcal{A} : (\rho\dot{y})' + Qy = 0 \text{ c.d.q. sobre } [a, b]\}.$$

El siguiente corolario nos habla sobre la dimensión de este espacio.

**Corolario 2.2.2.** Si  $Q \in KH([a, b])$ ,  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$  y  $E_\rho \neq \emptyset$ , entonces  $\dim \mathcal{A}_* = 2$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in E_\rho$ . Entonces por el Teorema 2.2.1, existen funciones  $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$  únicas tales que

$$\begin{aligned} (\rho\dot{y}_1)' + Qy_1 &= 0 \text{ c.d.q. sobre } [a, b], & (\rho\dot{y}_2)' + Qy_2 &= 0 \text{ c.d.q. sobre } [a, b], \\ y_1(x_0) &= 1, \quad \dot{y}_1(x_0) = 0; & y_2(x_0) &= 0, \quad \dot{y}_2(x_0) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $y_1, y_2 \in \mathcal{A}_*$ . Además  $W(y_1, y_2)(x_0) = 1$ , lo que implica que  $y_1, y_2$  son linealmente independientes. Mostremos ahora que  $\{y_1, y_2\}$  generan a  $\mathcal{A}_*$ . Sea  $y \in \mathcal{A}_*$ , entonces  $y \in \mathcal{A}$  y  $(\rho\dot{y})' + Qy = 0$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Puesto que  $y \in C_\rho^1$  y  $x_0 \in E_\rho$ , se tiene que  $y$  es localmente de clase  $C^1$  en  $x_0$ , de modo que,  $\dot{y}(x_0)$  está bien definido. Puesto que  $\mathcal{A}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , si tomamos  $y_0 = y(x_0)y_1 + \dot{y}(x_0)y_2 - y$ , entonces  $y_0 \in \mathcal{A}$ ,  $(\rho\dot{y}_0)' + Qy_0 = 0$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Más aún,

$$y_0(x_0) = y(x_0)y_1(x_0) + \dot{y}(x_0)y_2(x_0) - y(x_0) = y(x_0) - y(x_0) = 0$$

y

$$\dot{y}_0(x_0) = y(x_0)\dot{y}_1(x_0) + \dot{y}(x_0)\dot{y}_2(x_0) - \dot{y}(x_0) = \dot{y}(x_0) - \dot{y}(x_0) = 0.$$

Por lo tanto,  $y_0 \in \mathcal{A}$  es solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} (\rho\dot{y})' + Qy &= 0 \text{ a.e. on } [a, b], \\ y(x_0) &= 0, \quad \dot{y}(x_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

---

Asimismo, la función cero también es solución para el problema de valores iniciales (2.2.26). Pero el Teorema 2.2.1 garantiza la unicidad de la solución del problema (2.2.26), entonces  $y_0 = 0$ . En consecuencia,  $y = y(x_0)y_1 + \dot{y}(x_0)y_2$ . ■

---



## Capítulo 3

---

### Método SPPS

---

En este capítulo se muestra la convergencia del método SPPS para la ecuación de Sturm-Liouville  $(\rho y)' + qy = \lambda ry$ , cuando los coeficientes  $q, r$  son Kurzweil-Henstock integrables y  $\frac{1}{\rho}$  es Lebesgue integrable. Los resultados mostrados por H. Blancarte en [2] quedan como un caso particular cuando  $q, r \in L^1([a, b]) (\subseteq KH([a, b]))$ .

En este capítulo  $\rho, q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones tales que  $q, r \in KH([a, b])$ ,  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$  y  $E_\rho \neq \emptyset$ .

### 3.1. Operador diferencial

Se dice que  $y \in \mathcal{A}$  es una solución de la ecuación de Sturm-Liouville si se satisface que:

$$(\rho y)' + qy = \lambda ry \tag{3.1.1}$$

c.d.q sobre  $[a, b]$ .

Ahora, definamos el siguiente operador diferencial  $L : \mathcal{A} \rightarrow KH([a, b])$  por medio de

$$L[y] = (\rho y)' + qy.$$

Comprobemos que este operador está bien definido. Tomemos  $y \in \mathcal{A}$ , luego por la observación 2.1.5 se tiene que  $(\rho\dot{y}) \in KH([a, b])$ . Por otro lado, dado que  $y \in AC([a, b])$ , por la Proposición 1.2.17,  $y \in BV([a, b])$ . Además, como  $q \in KH([a, b])$ , a partir de la Proposición 1.3.6, se tiene que  $qy \in KH([a, b])$ . De esta forma,  $L[y] = (\rho\dot{y}) + qy \in KH([a, b])$ .

El resultado siguiente nos permite reescribir el operador diferencial  $L$  en términos de una solución particular de la ecuación homogénea asociada a (3.1.1), la cual no se anula sobre el intervalo  $[a, b]$ .

**Lema 3.1.1.** Si  $y_0 \in \mathcal{A}$  es una solución de la ecuación homogénea

$$L[y_0] = 0 \text{ c.d.q. sobre } [a, b],$$

tal que  $y_0(x) \neq 0$ , para cualquier  $x \in [a, b]$ , entonces para toda  $y \in \mathcal{A}$ ,

$$L[y] = \frac{1}{y_0} \left[ \rho y_0^2 \left( \frac{y}{y_0} \right)' \right] \text{ c.d.q. sobre } [a, b].$$

*Demostración.* Sea  $y, y_0 \in \mathcal{A}$ , con  $y_0$  una solución de la ecuación homogénea tal que  $y_0(x) \neq 0$ , para toda  $x \in [a, b]$ . Luego, por la Observación 2.1.5,  $y, y_0, \rho\dot{y}, \rho\dot{y}_0$  son derivables en el sentido débil sobre  $[a, b]$ . Notesé que dado que  $y_0$  es continua y no se anula sobre  $[a, b]$ , existe  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha \leq |y_0(x)|$  para toda  $x \in [a, b]$ . Así por el Teorema 1.4.8,  $\frac{y}{y_0} \in W^{1,1}([a, b])$  y

$$\left( \frac{y}{y_0} \right)'(x) = \frac{\dot{y}(x)y_0(x) - y(x)\dot{y}_0(x)}{y_0^2(x)},$$

para toda  $x \in [a, b]$ . Por otro lado, se cumple que  $L[y_0] = 0$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Así, existe un conjunto  $B \subseteq [a, b]$  de medida nula, tal que, para cada  $x \in [a, b] \setminus B$ ,  $L[y_0](x) = 0$ . Sea  $x \in [a, b] \setminus B$ , luego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y_0(x)} \left[ \rho(x)y_0^2(x) \left( \frac{y}{y_0} \right)'(x) \right] \\ &= \frac{1}{y_0(x)} \left[ \rho(x)y_0^2(x) \left( \frac{\dot{y}(x)y_0(x) - y(x)\dot{y}_0(x)}{y_0^2(x)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{y_0(x)} \left[ \rho(x)\dot{y}(x)y_0(x) - \rho(x)y(x)\dot{y}_0(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ (\rho \dot{y})(x) y_0(x) - (\rho \dot{y}_0)(x) y(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ (\rho \dot{y})'(x) y_0(x) + (\rho \dot{y})(x) \dot{y}_0(x) - (\rho \dot{y}_0)'(x) y(x) - (\rho \dot{y}_0)(x) \dot{y}(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ (\rho \dot{y})'(x) y_0(x) + \rho(x) \dot{y}(x) \dot{y}_0(x) - (\rho \dot{y}_0)'(x) y(x) - \rho(x) \dot{y}(x) \dot{y}_0(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ (\rho \dot{y})'(x) y_0(x) - (\rho \dot{y}_0)'(x) y(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ (\rho \dot{y})'(x) y_0(x) + q(x) y(x) y_0(x) - (\rho \dot{y}_0)'(x) y(x) - q(x) y(x) y_0(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ \left( (\rho \dot{y})'(x) + q(x) y(x) \right) y_0(x) - \left( (\rho \dot{y}_0)'(x) - q(x) y_0(x) \right) y(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ L[y](x) y_0(x) - L[y_0](x) y(x) \right] \\
&= \frac{1}{y_0(x)} \left[ L[y](x) y_0(x) - 0 \cdot y(x) \right] \\
&= L[y](x).
\end{aligned}$$

■

### 3.2. Funciones $\tilde{X}^{(n)}$ y $X^{(n)}$

A continuación se presentan dos sucesiones de funciones,  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$ , las cuales se construyen de manera recursiva y desempeñan un papel importante en la construcción de la representación de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville como serie de potencias de parámetro espectral, pues están relacionadas con los coeficientes de la serie de potencias.

**Definición 3.2.1.** Sea  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para toda  $x \in [a, b]$ . Se define la función  $Q$  por medio de

$$Q(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{|\rho(s) y_0^2(s)|}. \quad (3.2.1)$$

Además, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se definen  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  como

$$\tilde{X}^{(0)} \equiv 1, \quad X^{(0)} \equiv 1, \quad (3.2.2)$$

$$\tilde{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s)r(s)y_0^2(s)ds, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s)\frac{ds}{\rho(s)y_0^2(s)}, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

y

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s)\frac{ds}{\rho(s)y_0^2(s)}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s)r(s)y_0^2(s)ds, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Mostremos que la función  $Q$  dada en (3.2.1) está bien definida. Dado que  $y_0 \in AC[a, b]$  por la Proposición 1.2.10,  $y_0^2 \in AC([a, b])$ . Además, puesto que  $y_0^2(x) \neq 0$  para toda  $x \in [a, b]$ , existe  $\alpha > 0$  tal que,  $|y_0^2(x)| \geq \alpha$  para cada  $x \in [a, b]$ . Debido a ello y por la Proposición 1.2.11,  $\frac{1}{y_0^2} \in AC([a, b])$ . Por tanto,  $\frac{1}{y_0^2} \in C([a, b])$ . Así, por la Proposición 1.2.3,  $\frac{1}{y_0^2}$  es medible y acotada. Mientras que, por hipótesis,  $\frac{1}{\rho} \in L([a, b])$ , así por la Proposición 1.2.7,

$$\frac{1}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b]). \quad (3.2.5)$$

En consecuencia, la integral dada en (3.2.1) existe y por tanto,  $Q$  está bien definida. Asimismo, se cumple que

$$ry_0^2 \in KH([a, b]). \quad (3.2.6)$$

En efecto, puesto que  $y_0^2 \in AC([a, b])$ , por la Proposición 1.2.17,  $y_0^2 \in BV([a, b])$ . Por otra parte, por hipótesis  $r \in KH([a, b])$ , de modo que por la Proposición 1.3.6, el producto  $ry_0^2 \in KH([a, b])$ .

Verifiquemos ahora que  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  están bien definidas. Para el caso  $n = 0$ , es trivial, pues por definición  $\tilde{X}^{(0)} = 1$ . Mientras que para el caso  $n = 1$ , se tiene que para cada  $x \in [a, b]$

$$\tilde{X}^{(1)}(x) = \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(0)}(s)r(s)y_0^2(s)ds.$$

Por la ecuación (3.2.6), el integrando que define a  $\tilde{X}^{(1)}$ ,  $\tilde{X}^{(0)}ry_0^2 = 1 \cdot ry_0^2 \in KH([a, b])$ . Por tanto, la función  $\tilde{X}^{(1)}$  está bien definida sobre  $[a, b]$ . Además, por el Teorema 1.3.10,  $\tilde{X}^{(1)} \in ACG_*([a, b])$ . Ahora, para el caso  $n = 2$ ,  $\tilde{X}^{(2)}$  se define mediante

$$\tilde{X}^{(2)}(x) = \int_{x_0}^x \frac{\tilde{X}^{(1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)}ds.$$



Analizando el integrando, dado que  $\tilde{X}^{(1)} \in ACG_*([a, b])$ ,  $\tilde{X}^{(1)} \in C([a, b])$ . Luego, por la Proposición 1.2.3,  $\tilde{X}^{(1)}$  es medible y acotada. Mientras que de la ecuación (3.2.5),  $\frac{1}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b])$ . Así, por la Proposición 1.2.7,  $\frac{\tilde{X}^{(1)}}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b])$ . Por tanto,  $\tilde{X}^{(2)}$  está bien definida sobre  $[a, b]$ . Más aún, por el Teorema 1.2.13,  $\tilde{X}^{(2)} \in AC([a, b])$ . Continuando con este proceso obtenemos por inducción que para  $n \geq 3$ , las funciones  $\tilde{X}^{(n)}$  están bien definidas y se cumple que

$$\tilde{X}^{(2n)} \in AC([a, b]) \quad \text{y} \quad \tilde{X}^{(2n+1)} \in ACG_*([a, b]). \quad (3.2.7)$$

De manera similar se demuestra que las funciones  $X^{(n)}$  están bien definidas y que

$$X^{(2n)} \in ACG_*([a, b]) \quad \text{y} \quad X^{(2n+1)} \in AC([a, b]). \quad (3.2.8)$$

Con el siguiente resultado mostremos que las funciones  $\tilde{X}^{(2n)}$ ,  $\tilde{X}^{(2n+1)}$ ,  $X^{(2n)}$  y  $X^{(2n+1)}$  están acotadas puntualmente.

**Teorema 3.2.2.** Sean  $x_0 \in [a, b]$  y  $y_0 \in \mathcal{A}$ , donde  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $Q$ ,  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , son las funciones definidas en (3.2.1)-(3.2.4), entonces para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\tilde{X}^{(2n)}, X^{(2n+1)} \in AC([a, b])$  y  $\tilde{X}^{(2n+1)}, X^{(2n)} \in ACG_*([a, b])$ . Además, se cumplen las siguientes estimaciones

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(\operatorname{sgn}(x-x_0)Q(x))^n}{n!}, \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{n+1} \frac{(\operatorname{sgn}(x-x_0)Q(x))^n}{n!}, \quad (3.2.9)$$

$$\left| X^{(2n)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(\operatorname{sgn}(x-x_0)Q(x))^n}{n!} \quad \text{y} \quad \left| X^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(\operatorname{sgn}(x-x_0)Q(x))^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3.2.10)$$

para todo  $x \in [a, b]$ .

*Demostración.* Sólo demostremos que para cada  $x \in [a, x_0]$  se cumple que

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(-Q(x))^n}{n!} \quad \text{y} \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{n+1} \frac{(-Q(x))^n}{n!}. \quad (3.2.11)$$

Antes de continuar con la demostración tengamos en cuenta la siguiente igualdad debido al Teorema 1.2.13,

$$Q' = \frac{1}{|\rho y_0^2|}, \quad (3.2.12)$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

*Afirmación 1.* Para cada  $x \in [a, x_0]$  y  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds. \quad (3.2.13)$$

Debido a que  $\tilde{X}^{(2n)} \in AC([a, b])$ , por la Proposición 1.2.17,  $\tilde{X}^{(2n)} \in BV([a, b])$ . Mientras que por la ecuación (3.2.6),  $ry_0^2 \in KH([a, b])$ . Por tanto, es posible aplicar el Teorema 1.3.14. Así, para cada  $x \in [a, x_0]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(2n)}(s)r(s)y_0^2(s)ds \right| = \left| \int_x^{x_0} \tilde{X}^{(2n)}(s)r(s)y_0^2(s)ds \right| \\ &\leq \left| \int_x^{x_0} r(s)y_0^2(s)ds \right| \inf_{t \in [x, x_0]} \left| \tilde{X}^{(2n)}(t) \right| + \|ry_0^2\|_{[x, x_0]} V_{[x, x_0]} \tilde{X}^{(2n)} \\ &= \|ry_0^2\|_{[x, x_0]} V_{[x, x_0]} \tilde{X}^{(2n)}. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que  $\inf_{t \in [x, x_0]} \left| \tilde{X}^{(2n)}(t) \right| = \inf_{t \in [x, x_0]} \left| \int_{x_0}^t \frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds \right| = 0$ .

Por otro lado, dado que  $\tilde{X}^{(2n-1)} \in ACG_*([a, b])$ , por la Proposición 1.2.3,  $\tilde{X}^{(2n-1)}$  es medible y acotada. En adición, debido a la ecuación (3.2.5) y a la Proposición 1.2.7,  $\frac{\tilde{X}^{(2n-1)}}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b])$ . Además, puesto que  $\tilde{X}^{(2n)}(x) = \int_x^{x_0} -\frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds$ , por el Teorema 1.2.16, se tiene la siguiente estimación:

$$V_{[x, x_0]} \tilde{X}^{(2n)} \leq \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| &\leq \|ry_0^2\|_{[x, x_0]} \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds \\ &\leq \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2n-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds. \end{aligned}$$

La demostración de (3.2.11) se realizará por inducción: Caso  $n = 1$ . Para todo  $x \in [a, x_0)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}^{(1)}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x r(s)y_0^2(s)ds \right| = \left| \int_x^{x_0} r(s)y_0^2(s)ds \right| \\ &\leq \sup_{[c,d] \subseteq [a,b]} \left| \int_c^d r(s)y_0^2(s)ds \right| = \|ry_0^2\|_{[a,b]}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Por otra parte, debido a que  $\frac{\tilde{X}^{(1)}}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b])$  y a la ecuación (3.2.14), se tiene que para cada  $x \in [a, x_0)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}^{(2)}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{\tilde{X}^{(1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds \right| = \left| \int_x^{x_0} \frac{\tilde{X}^{(1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds \right| \leq \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds \\ &\leq \int_x^{x_0} \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}}{|\rho(s)y_0^2(s)|} ds = \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \frac{ds}{|\rho(s)y_0(s)|} \\ &= \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} Q'(s)ds = \|ry_0^2\|_{[a,b]}(-Q(x)). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Luego, para cada  $x \in [a, x_0)$ , debido a la *Afirmación 1* y la ecuación (3.2.14), se sigue que:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{X}^{(3)}(x) \right| &\leq \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}}{|\rho(s)y_0^2(s)|} ds \\ &= \|ry_0^2\|_{[a,b]}^2 \int_x^{x_0} \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|} \\ &= \|ry_0^2\|_{[a,b]}^2 \int_x^{x_0} Q'(s)ds = \|ry_0^2\|_{[a,b]}^2(-Q(x)). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

De (3.2.15) y (3.2.16) obtenemos que (3.2.11) se cumple para  $n = 1$ . Ahora, por hipótesis de inducción, tomemos por válido (3.2.11) para el natural  $n = k$  y mostremos que también se cumple para  $n = k + 1$ . De la validez del caso  $n = k$ , se tiene que para todo  $x \in [a, x_0)$ ,

$$\left| \tilde{X}^{(2k)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^k \frac{(-Q(x))^k}{k!} \quad \text{y} \quad \left| \tilde{X}^{(2k+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} \frac{(-Q(x))^k}{k!}. \quad (3.2.17)$$

Primero estimemos a  $\left| \tilde{X}^{(2k+2)} \right|$  sobre  $[a, x_0)$ . En efecto, debido a que  $\frac{\tilde{X}^{(2k+1)}}{\rho y_0^2} \in L^1([a, b])$ , se tiene que

$$\left| \tilde{X}^{(2k+2)}(x) \right| = \left| \int_{x_0}^x \frac{\tilde{X}^{(2k+1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds \right| = \left| \int_x^{x_0} \frac{\tilde{X}^{(2k+1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} ds \right| \leq \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2k+1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds.$$

Además, por la ecuaciones (3.2.12) y (3.2.17), se sigue que

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{X}^{(2k+2)}(x) \right| &\leq \int_x^{x_0} \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} \left(-Q(s)\right)^k}{k! |\rho(s)y_0^2(s)|} = (-1)^k \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1}}{k!} \int_x^{x_0} \left(Q(s)\right)^k Q'(s) ds \\
&= (-1)^k \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} (-1) \left(Q(x)\right)^{(k+1)}}{k! (k+1)} = \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} (-1)^{k+1} \frac{\left(Q(x)\right)^{(k+1)}}{(k+1)!} \\
&= \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} \frac{\left(-Q(x)\right)^{(k+1)}}{(k+1)!}, \tag{3.2.18}
\end{aligned}$$

para todo  $x \in [a, x_0)$ . Por otra parte, de la *Afirmación 1* y de la ecuación (3.2.17), se sigue que

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{X}^{(2k+3)}(x) \right| &\leq \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \left| \frac{\tilde{X}^{(2k+1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| ds = \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \left| \tilde{X}^{(2k+1)}(s) \right| \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|} \\
&= \|ry_0^2\|_{[a,b]} \int_x^{x_0} \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+1} \frac{\left(-Q(x)\right)^k}{k! |\rho(s)y_0^2(s)|} ds \\
&= (-1)^k \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+2}}{k!} \int_x^{x_0} \left(Q(x)\right)^k Q'(s) ds = (-1)^k \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+2} (-1) \left(Q(x)\right)^{k+1}}{k! (k+1)} \\
&= \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{k+2} (-1)^{k+1} \left(Q(x)\right)^{k+1}}{k! (k+1)} = \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{(k+1)+1} \frac{\left(-Q(x)\right)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{3.2.19}
\end{aligned}$$

para todo  $x \in [a, x_0)$ . De las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.19) vemos que se cumple (3.2.11) cuando  $n = k + 1$ . Esto completa el proceso de inducción y así se concluye (3.2.11). ■

Ahora que hemos demostrado que las funciones  $\tilde{X}^{(2n)}$ ,  $\tilde{X}^{(2n+1)}$ ,  $X^{(2n)}$  y  $X^{(2n+1)}$  están acotadas puntualmente, demostremos que, de hecho, están acotadas uniformemente.

**Corolario 3.2.3.** Sean  $x_0 \in [a, b]$  y  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Luego, las funciones  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  definidas en (3.2.3) y (3.2.4) cumplen las siguientes desigualdades para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{C_1^n C_2^n}{n!}, \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{C_1^{n+1} C_2^n}{n!}, \tag{3.2.20}$$

$$\left| X^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{C_1^n C_2^n}{n!} \quad \text{y} \quad \left| X^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{C_1^n C_2^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.2.21}$$

donde  $C_1 = \|ry_0^2\|_{[a,b]}$  y  $C_2 = \left\| \frac{1}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]}$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x < x_0$ , es decir,  $x \in [a, x_0)$ .

De la definición de  $Q$  (Definición 3.2.1), se tiene que

$$-Q(x) = - \int_{x_0}^x \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|} = \int_x^{x_0} \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|}. \quad (3.2.22)$$

Ahora, notemos que como  $\frac{1}{|\rho y_0^2|}$  es una función no negativa sobre  $[a, b]$  y  $x \in [a, x_0)$ , se tiene  $-Q(x) > 0$ . Asimismo,

$$-Q(x) = \int_x^{x_0} \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|} \leq \int_a^b \frac{ds}{|\rho(s)y_0^2(s)|} = \left\| \frac{1}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]} = C_2.$$

Luego,

$$0 < -Q(x) \leq C_2.$$

Así,

$$0 < [-Q(x)]^k \leq C_2^k, \quad (3.2.23)$$

para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por otra parte, puesto que  $x \in [a, x_0)$ , del Teorema 3.2.2 se cumple que

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(-Q(x))^n}{n!}, \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^{n+1} \frac{(-Q(x))^n}{n!}, \quad (3.2.24)$$

y

$$\left| X^{(2n)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(-Q(x))^n}{n!} \quad \text{y} \quad \left| X^{(2n+1)}(x) \right| \leq \|ry_0^2\|_{[a,b]}^n \frac{(-Q(x))^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (3.2.25)$$

De las ecuaciones (3.2.23)-(3.2.25), se sigue que

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^n (-Q(x))^n}{n!} \leq \frac{C_1^n C_2^n}{n!} \quad (3.2.26)$$

$$\left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^{n+1} (-Q(x))^n}{n!} \leq \frac{C_1^{n+1} C_2^n}{n!} \quad (3.2.27)$$

$$\left| X^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^n (-Q(x))^n}{n!} \leq \frac{C_1^n C_2^n}{n!} \quad (3.2.28)$$

y

$$\left| X^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{\|ry_0^2\|_{[a,b]}^n (-Q(x))^{n+1}}{n!} \leq \frac{C_1^n C_2^{n+1}}{n!}. \quad (3.2.29)$$

Para el caso cuando  $x \geq x_0$  se deduce de manera análoga. Se concluye (3.2.20) y (3.2.21).

■

### 3.3. Series de potencias de valores espectrales con coeficientes: $X^{(n)}$ y $\tilde{X}^{(n)}$

Como se ya mencionó, las funciones  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$ , están relacionadas con los coeficientes de las series de potencias de valores espectrales. Esto se observa claramente en el siguiente resultado, donde se define y se muestra la convergencia uniforme de las series espectrales sobre el intervalo  $[a, b]$ .

**Proposición 3.3.1.** Sea  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  son las funciones descritas en la Definición 3.2.1, entonces existen funciones  $u, v, w, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  a las cuales, las series

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)}, \quad (3.3.1)$$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} \quad \text{y} \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k)}, \quad (3.3.2)$$

convergen uniformemente sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Es suficiente con demostrar (3.3.1). Sean  $x \in [a, b]$  un punto arbitrario,  $u_n(x) = \lambda^n \tilde{X}^{(2n)}(x)$  y  $v_m(x) = \lambda^{m+1} \tilde{X}^{(2m+1)}(x)$  para cada  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Analicemos los módulos de  $u_n(x)$  y  $v_m(x)$ :

$$|u_n(x)| = \left| \lambda^n \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq |\lambda|^n \left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right|,$$

$$|v_m(x)| = \left| \lambda^{m+1} \tilde{X}^{(2m+1)}(x) \right| \leq |\lambda|^{m+1} \left| \tilde{X}^{(2m+1)}(x) \right|.$$

A partir de las ecuaciones anteriores y aplicando el Corolario 3.2.3, se sigue que para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$|u_n(x)| \leq |\lambda|^n \frac{C_1^n C_2^n}{n!} \leq |\lambda|^n \frac{(C_1 C_2)^n}{n!} = \frac{(|\lambda| C_1 C_2)^n}{n!} = \frac{C^n}{n!}, \quad (3.3.3)$$

$$|v_m(x)| \leq |\lambda|^{m+1} \frac{C_1^{m+1} C_2^m}{m!} = |\lambda| C_1 \frac{(|\lambda| C_1 C_2)^m}{m!}$$

$$\leq |\lambda| C_1 \frac{(|\lambda| C_1 C_2)^m}{m!} = |\lambda| C_1 \frac{C^m}{m!}, \quad (3.3.4)$$

donde  $C = |\lambda|C_1C_2$ . Además se cumple que  $C_1, C_2, |\lambda|, C < \infty$ . Observe que las últimas expresiones de las ecuaciones (3.3.3) y (3.3.4) son los coeficientes de la expansión en serie de las funciones  $\exp(C)$  y  $|\lambda|C_1 \cdot \exp(C)$ , que son finitas. Luego, por el criterio M de Weierstrass (Teorema 1.1.2), las series  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)}$  convergen uniformemente a las funciones  $u$  y  $v$  sobre  $[a, b]$ . ■

Una vez demostrado que existen funciones  $u, v, w$  y  $z$  a las cuales las series espectrales convergen uniformemente, mostremos ahora que las funciones  $u, v, w$  y  $z$  son, de hecho, funciones continuas.

**Proposición 3.3.2.** Las funciones  $u, v, w$  y  $z$  definidas en la Proposición 3.3.1 son funciones continuas sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Demostremos que se cumple para  $u$  y  $v$ . Sean

$$U_n = \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \quad \text{y} \quad V_m = \sum_{k=0}^m \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)},$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Debido a la Proposición 3.3.1, dichas sucesiones convergen uniformemente a  $u$  y  $v$  sobre  $[a, b]$ , respectivamente. Por otro lado, dado que  $\lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \in AC([a, b])$ ,  $\lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)} \in ACG_*([a, b])$ , se tiene que  $\lambda^k \tilde{X}^{(2k)}, \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)} \in C([a, b])$  para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Además, dado que las sumas parciales son finitas, se tiene que las funciones  $U_n, V_m$  son continuas sobre  $[a, b]$ . Así, por el Teorema 1.1.3,  $u, v$  son continuas sobre  $[a, b]$ . ■

El siguiente resultado trata sobre las derivadas débiles de las funciones  $u$  y  $w$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Más aún, se garantiza su existencia en cada punto de  $E_\rho$ .

**Teorema 3.3.3.** Sea  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $u$  y  $w$ , son las funciones descritas en la Proposición 3.3.1, entonces se cumple lo siguiente:

$$\dot{u} = \frac{v}{\rho y_0^2} \quad \text{y} \quad \dot{w} = \frac{z}{\rho y_0^2}$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $u, w \in AC([a, b])$ . Además, las igualdades

$$\dot{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left[ \tilde{X}^{(2k)} \right]' = \frac{v}{\rho y_0^2} \quad \text{y} \quad \dot{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left[ X^{(2k+1)} \right]' = \frac{z}{\rho y_0^2} \quad (3.3.5)$$

se cumplen localmente en todo punto de  $E_\rho$  y  $u, w \in C_\rho^1$ .

*Demostración.* Observemos primero que  $(\lambda^k \tilde{X}^{(2k)})$  es una sucesión de funciones absolutamente continuas, tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(x)$  converge uniformemente a  $u$  sobre  $[a, b]$  (vea la Proposición 3.3.1). Mostremos, ahora, que  $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^k \tilde{X}^{(2k)})^\cdot$  converge a  $\frac{v}{\rho y_0^2}$  en la norma de  $L^1([a, b])$ . De la forma de  $\tilde{X}^{(2k)}$  dada en la Definición 3.2.1, se tiene que  $(\tilde{X}^{(2k)})^\cdot = \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}}{\rho y_0^2}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Así,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^N (\lambda^k \tilde{X}^{(2k)})^\cdot - \frac{v}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]} &= \left\| \sum_{k=0}^N \lambda^k (\tilde{X}^{(2k)})^\cdot - \frac{v}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^N \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}}{\rho y_0^2} - \frac{v}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]} \\ &= \int_a^b \left| \sum_{k=1}^N \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}}{\rho y_0^2} - \frac{v}{\rho y_0^2} \right| \\ &= \int_a^b \left| \frac{1}{\rho y_0^2} \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^N \lambda^k \tilde{X}^{(2k-1)} - v \right|. \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.3.2,  $v$  es continua y así

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \frac{1}{\rho y_0^2} \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^N \lambda^k \tilde{X}^{(2k-1)} - v \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{\rho y_0^2} \right| \sup_{[a,b]} \left| \sum_{k=1}^N \lambda^k \tilde{X}^{(2k-1)} - v \right| \\ &= \sup_{[a,b]} \left| \sum_{k'=0}^{N-1} \lambda^{k'+1} \tilde{X}^{(2k'+1)} - v \right| \int_a^b \left| \frac{1}{\rho y_0^2} \right| \\ &= \sup_{[a,b]} \left| \sum_{k'=0}^{N-1} \lambda^{k'+1} \tilde{X}^{(2k'+1)} - v \right| \cdot \left\| \frac{1}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.3.1, se tiene que  $\sum_{k=0}^N \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)} \xrightarrow{u} v$  sobre  $[a, b]$ , de modo que si hacemos que  $N \rightarrow \infty$ , por la Teorema 1.1.5 se cumple que:

$$\left\| \sum_{k=0}^N (\lambda^k \tilde{X}^{(2k)})^\cdot - \frac{v}{\rho y_0^2} \right\|_{L^1[a,b]} \rightarrow 0.$$



Luego, por la Proposición 1.4.9, se tiene que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tilde{X}^{(2n)}$  converge uniformemente a una función  $F \in AC([a, b])$  y  $\dot{F} = \frac{v}{\rho y_0^2}$ . Sin embargo, ya se mencionó que  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tilde{X}^{(2n)}$  converge uniformemente a la función  $u$ , por lo tanto  $u = F$ , de modo que  $u \in AC([a, b])$  y  $\dot{u} = \frac{v}{\rho y_0^2}$ .

Ahora, mostremos que la igualdad descrita en la ecuación (3.3.5) se cumple localmente en todo punto de  $E_\rho$ . La Observación 1.4.4 nos muestra que no existe distinción entre la derivada débil y la derivada clásica para funciones absolutamente continuas. Por ello, en lo sucesivo de esta demostración, aunque se use la notación de derivada débil, se está utilizando la derivada clásica. Sea  $x \in E_\rho$ , luego  $\frac{1}{\rho}$  es localmente continua en  $x$ , es decir, existe  $\delta_x > 0$  tal que  $\frac{1}{\rho}$  es continua sobre  $[x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ . Además,  $\tilde{X}^{(2k-1)}$ ,  $\frac{1}{y_0^2} \in C([a, b])$  y  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b]) \cap C([x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b])$ . Luego, por el Teorema 1.2.12,

$$[\tilde{X}^{(2k)}] \dot{\phantom{X}}(s) = \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)}, \quad \text{para todo } s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]. \quad (3.3.6)$$

Ahora, sea  $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}$ . Luego, por la ecuación (3.3.6), para todo  $s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ ,  $\dot{U}_n(s) = \sum_{k=1}^n \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)}$ . Por otro lado, por la Proposición 3.3.1,  $U_n \xrightarrow{u} u$  sobre  $[x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ . Mostremos que  $\dot{U}_n \xrightarrow{u} \frac{v}{\rho y_0^2}$  sobre  $[x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ . Observe que

$$\begin{aligned} \left| \dot{U}_n(s) - \frac{v(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} - \frac{v(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k-1)}(s) - v(s) \right| \\ &\leq \max_{s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]} \left| \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \right| \cdot \left| \sum_{k'=0}^{n-1} \lambda^{(k'+1)} \tilde{X}^{(2k'+1)}(s) - v(s) \right| \xrightarrow{u} 0, \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así, se tiene que

$$\frac{v(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k [\tilde{X}^{(2k)}] \dot{\phantom{X}}(s),$$

uniformemente para todo  $s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ . Además, por el Teorema 1.1.4, se tiene que

$$\dot{u} = \frac{v(s)}{\rho(s)y_0^2(s)}, \quad (3.3.7)$$

todo  $s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ . Por lo tanto

$$\dot{u} = \frac{v(s)}{\rho(s)y_0^2(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k [\tilde{X}^{(2k)}]'(s),$$

para todo  $s \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap [a, b]$ , es decir, las dos primeras igualdades en la ecuación (3.3.5) se cumplen localmente en  $x \in E_\rho$ . Por último, observe que debido a la ecuación (3.3.7) se tiene que  $u$  de clase  $C^1$  localmente en  $x$ . ■

A continuación, se mostrará que las funciones  $v, z \in ACG_*([a, b])$ , así como la existencia de sus derivadas débiles c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

**Teorema 3.3.4.** Sean  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $v$  y  $z$ , son las funciones descritas en la Proposición 3.3.1, entonces se cumple lo siguiente:

$$\dot{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k+1)} [\tilde{X}^{(2k+1)}]' = \lambda r y_0^2 u \quad \text{y} \quad \dot{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k [X^{(2k)}]' = \lambda r y_0^2 w$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Además, las funciones  $V, Z \in ACG_*([a, b])$  dadas mediante

$$V(x) = \int_{x_0}^x \lambda r y_0^2 u \quad \text{y} \quad Z(x) = \int_{x_0}^x \lambda r y_0^2 w.$$

Más aún,  $v = V$  y  $z - 1 = Z$ .

*Demostración.* Primero observe que para todo  $x \in [a, b]$  se cumple que

$$\begin{aligned} |v(x) - V(x)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k+1)}(x) - \int_{x_0}^x \lambda r(s) y_0^2(s) u(s) \right| \\ &= |\lambda| \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda^k \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(2k)}(s) r(s) y_0^2(s) - \int_{x_0}^x r(s) y_0^2(s) u(s) \right| \\ &= |\lambda| \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r(s) y_0^2(s) \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(s) - \int_{x_0}^x r(s) y_0^2(s) u(s) \right|. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Las observaciones 1.4.4 y 1.4.14 nos muestran que no existe distinción entre la derivada débil y la derivada clásica para funciones  $AC([a, b])$  y  $ACG_*([a, b])$ . Por esta razón,

en el resto de esta demostración, aunque se emplee la notación de derivada débil, se estará utilizando la derivada clásica. Sea  $(U_n)$  una sucesión de funciones absolutamente

continuas, donde  $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}$  y sea  $x \in [a, x_0)$ . Luego, por el Teorema 1.2.13,

$\dot{U}_n = \sum_{k=1}^n \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}}{\rho y_0^2}$  c.d.q. sobre  $[a, b]$  y  $\dot{U}_n \in L^1([a, b])$ . Además, por la Proposición 1.2.17  $U_n \in BV([a, b])$ . Así, por el Teorema 1.2.16, las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.23), se tiene que

$$\begin{aligned}
V_{[x, x_0]} U_n &\leq \int_x^{x_0} |\dot{U}_n(s)| ds = \int_x^{x_0} \left| \sum_{k=1}^n \lambda^k \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}(s)}{\rho(s) y_0^2(s)} \right| ds \\
&\leq \int_x^{x_0} \sum_{k=1}^n |\lambda^k| \left| \frac{\tilde{X}^{(2k-1)}(s)}{\rho(s) y_0^2(s)} \right| ds \\
&\leq \int_x^{x_0} \sum_{k=1}^n |\lambda^k| \frac{1}{|\rho(s) y_0^2(s)|} \frac{\|r y_0^2\|_{[a, b]}^k (-Q(s))^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
&= \sum_{k=1}^n |\lambda|^k (-1)^{k-1} \frac{\|r y_0^2\|_{[a, b]}^k}{(k-1)!} \int_x^{x_0} (Q(s))^{k-1} \dot{Q}(s) ds \\
&= \sum_{k=1}^n |\lambda|^k (-1)^{k-1} \frac{\|r y_0^2\|_{[a, b]}^k}{(k-1)!} (-1) \frac{(Q(x))^k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^n |\lambda|^k \|r y_0^2\|_{[a, b]}^k \frac{(-Q(x))^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^k \|r y_0^2\|_{[a, b]}^k \frac{C_2^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| C_1 C_2)^k}{k!} = \exp(C) < \infty,
\end{aligned}$$

donde  $C = |\lambda| C_1 C_2$ . De modo que, si definimos  $M = \exp(C)$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $V_{[x, x_0]} U_n \leq M$ . Además, de la Proposición 3.3.1, se tiene que  $U_n \xrightarrow{u} u$  sobre  $[a, b]$ . Así, por el Teorema 1.3.15, se sigue que  $r y_0^2 u \in KH([a, b])$  y que

$$\int_x^{x_0} r(s) y_0^2(s) \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(s) \rightarrow \int_x^{x_0} r(s) y_0^2(s) u(s),$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x_0} r(s) y_0^2(s) \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(s) - \int_x^{x_0} r(s) y_0^2(s) u(s) = 0. \quad (3.3.9)$$

Así, por las ecuaciones (3.3.8) y (3.3.9) se tiene que

$$\left|v(x) - V(x)\right| = 0.$$

Por lo tanto,  $v(x) = V(x)$ . De manera análoga se muestra la igualdad anterior para  $x \geq x_0$ . Luego,  $v = V$  sobre  $[a, b]$ , de modo que  $v \in ACG_*([a, b])$ . Más aún, por el Teorema 1.3.11,

$$\dot{v} = \lambda r y_0^2 u \quad (3.3.10)$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$ .

Ahora, sea  $V_k = \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k+1)}$ , de manera que  $\dot{V}_k = \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k)} r y_0^2$  c.d.q. sobre  $[a, b]$ , es decir, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe un conjunto  $E_k$  de medida nula tal que para todo  $x \in [a, b] \setminus E_k$ , se cumple que

$$\dot{V}_k(x) = \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k)}(x) r(x) y_0^2(x). \quad (3.3.11)$$

Ahora, definamos  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ , luego  $m(E) = 0$ . De modo que para todo  $x \in [a, b] \setminus E$  y todo  $k \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\dot{V}_k(x) = \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k)}(x) r(x) y_0^2(x). \quad (3.3.12)$$

Sea  $x \in [a, b] \setminus E$ , luego

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \dot{V}_k(x) - \lambda r(x) y_0^2(x) u(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \lambda^{(k+1)} \tilde{X}^{(2k)}(x) r(x) y_0^2(x) - \lambda r(x) y_0^2(x) u(x) \right| \\ &= \left| \lambda \right| \cdot \left| r(x) y_0^2(x) \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^n \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(x) - u(x) \right| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

puesto que  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \xrightarrow{u} u$  sobre  $[a, b]$ . Por lo tanto se tiene que

$$\lambda r y_0^2 u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k+1)} \left[ \tilde{X}^{(2k+1)} \right]$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$ . Luego, debido a la ecuación (3.3.10) se concluye que

$$\dot{v} = \lambda r y_0^2 u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k+1)} \left[ \tilde{X}^{(2k+1)} \right]$$

c.d.q. sobre  $[a, b]$ . De manera similar se realiza la demostración para la función  $z$ . ■

### 3.4. Teorema principal

El siguiente resultado, es el resultado principal de este trabajo de tesis, en él, se escriben las dos soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville (3.1.1), se muestra que en efecto son soluciones, así como que son linealmente independientes entre sí, por lo que forman una base para el espacio solución de la ecuación (3.1.1). Además se escribe la solución general como una combinación lineal de las soluciones.

**Teorema 3.4.1.** Sea  $x_0 \in E_\rho$ . Si  $y_0 \in \mathcal{A}$  es una solución de la ecuación homogénea

$$(\rho y)' + qy = 0 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b], \quad (3.4.1)$$

con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces la solución general de la ecuación

$$(\rho y)' + qy = \lambda r y \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b] \quad (3.4.2)$$

tiene la siguiente forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (3.4.3)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias, mientras que

$$y_1 = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} = y_0 u \quad \text{y} \quad y_2 = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} = y_0 w. \quad (3.4.4)$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A}_*$  el conjunto solución de la ecuación (3.4.2). Observe que  $\mathcal{A}_*$  es un espacio vectorial, pues

$$\mathcal{A}_* = \left\{ y \in \mathcal{A} : (\rho y)' + (q - \lambda r)y = 0 \right\}.$$

Además, puesto que  $x_0 \in E_\rho$ ,  $q - \lambda r \in KH([a, b])$  y  $\frac{1}{\rho} \in L([a, b])$ , del Corolario 2.2.2, se tiene que  $\dim(\mathcal{A}_*) = 2$ .

Dado que  $y_0 \in \mathcal{A}$ , se cumple que  $y_0 \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1$  y que existe  $g_0 \in ACG_*([a, b])$  tal que

$$\rho \dot{y}_0 = g_0 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b]. \quad (3.4.5)$$

Por el Teorema 3.3.3,  $u \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1$ . Luego,  $y_0 u \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1$ , pues  $AC([a, b])$  y  $C_\rho^1$  son cerrados bajo el producto de funciones. Por lo tanto  $y_1 = y_0 u \in AC([a, b]) \cap C_\rho^1$ . Al mismo tiempo, dado que la igualdad (3.4.5) y el Teorema 3.3.3 se cumplen c.d.q. sobre  $[a, b]$ , entonces existe un conjunto  $E$  de medida nula tal que para todo  $x \in [a, b] \setminus E$  se cumple que

$$\dot{u}(x) = \frac{v(x)}{\rho(x)y_0^2(x)} \quad \text{y} \quad \rho(x)\dot{y}_0(x) = g_0(x).$$

Sea  $x \in [a, b] \setminus E$ , luego

$$\begin{aligned} \rho(x)\dot{y}_1(x) &= \rho(x)\left(y_0 u\right)'(x) = \rho(x)\left[\dot{y}_0(x)u(x) + \dot{u}(x)y_0(x)\right] \\ &= \rho(x)\left[\dot{y}_0(x)u(x) + \frac{v(x)}{\rho(x)y_0^2(x)}y_0(x)\right] \\ &= \left(\rho(x)\dot{y}_0(x)\right)u(x) + \frac{v(x)}{y_0(x)} \\ &= g_0(x)u(x) + \frac{v(x)}{y_0(x)}. \end{aligned}$$

Observe que dado que  $u, \frac{1}{y_0} \in AC([a, b])$ , por la Proposición 1.3.12,  $u, \frac{1}{y_0} \in ACG_*([a, b])$ .

Por otra parte, por el Teorema 3.3.4,  $v \in ACG_*([a, b])$ . De manera que,  $g_0, u, v, \frac{1}{y_0} \in ACG_*([a, b])$ . Luego, por la Proposición 1.3.13,  $g_0 u + \frac{v}{y_0} \in ACG_*([a, b])$ . Definamos  $g_1 = g_0 u + \frac{v}{y_0}$ . Por tanto, existe  $g_1 \in ACG_*([a, b])$ , tal que

$$\rho\dot{y}_1 = g_1 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b].$$

En consecuencia,  $y_1 \in \mathcal{A}$ . De manera análoga se muestra que  $y_2 \in \mathcal{A}$ .

Ahora, mostremos que  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación (3.4.2). Dado que  $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$  y  $y_0$  es una solución de la ecuación homogénea (3.4.1), que no se anula sobre  $[a, b]$ , es posible aplicar el Lema 3.1.1, de modo que

$$L[y_1] = \frac{1}{y_0} \left[ \rho y_0^2 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)' \right]' = \frac{1}{y_0} \left[ \rho y_0^2 \left( \frac{y_0 u}{y_0} \right)' \right]' \quad (3.4.6)$$

$$= \frac{1}{y_0} \left[ \rho y_0^2 \dot{u} \right]' = \frac{1}{y_0} \left[ \rho y_0^2 \frac{v}{\rho y_0^2} \right]' = \frac{1}{y_0} [v]'. \quad (3.4.7)$$

$$= \frac{1}{y_0} [\lambda r y_0^2 u] = \lambda r y_0 u = \lambda r y_1, \quad (3.4.8)$$

c.d.q sobre  $[a, b]$ . Por lo tanto,  $y_1$  es solución de la ecuación (3.4.2). De manera similar se muestra que  $y_2$  también es solución de la ecuación (3.4.2). En consecuencia,  $y_1, y_2 \in \mathcal{A}_*$ . Ahora mostremos que  $y_1$  y  $y_2$  son linealmente independientes. Para ello, utilizaremos el hecho de que si existe un punto sobre  $[a, b]$ , en donde el Wronskiano generalizado de  $y_1, y_2$  dado mediante

$$\rho W(y_1, y_2)(x) = \rho(x) \left( y_1(x) \dot{y}_2(x) - y_2(x) \dot{y}_1(x) \right), \quad (3.4.9)$$

es distinto de cero, entonces  $y_1$  y  $y_2$  son linealmente independientes sobre  $[a, b]$ . En efecto, es claro a partir de las definiciones de las funciones  $\tilde{X}^{(n)}, X^{(n)}, u, v, w$  y  $z$ , dadas en las ecuaciones (3.2.1), (3.3.1) y (3.3.2), que

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(x_0) = 1, \quad v(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \tilde{X}^{(2k+1)}(x_0) = 0, \quad (3.4.10)$$

$$w(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad z(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}(x_0) = 1. \quad (3.4.11)$$

De modo que

$$y_1(x_0) = y_0(x_0)u(x_0) = y_0(x_0) \quad \text{y} \quad y_2(x_0) = y_0(x_0)w(x_0) = 0. \quad (3.4.12)$$

Además, puesto que  $x_0 \in E_\rho$ , por el Teorema 3.3.3, se cumple que

$$\dot{w}(x_0) = \frac{z(x_0)}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(x_0) &= \left( \dot{y}_0(x_0)w(x_0) + \dot{w}(x_0)y_0(x_0) \right) \\ &= \left( \dot{y}_0(x_0) \cdot 0 + \dot{w}(x_0)y_0(x_0) \right) \\ &= \frac{z(x_0)}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)} y_0(x_0) \\ &= \frac{z(x_0)}{\rho(x_0)y_0(x_0)} \\ &= \frac{1}{\rho(x_0)y_0(x_0)}. \end{aligned}$$

Por tanto, el Wronskiano generalizado (3.4.9) en  $x_0$  es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \rho W(y_1, y_2)(x_0) &= \rho(x_0) \left( y_1(x_0) \dot{y}_2(x_0) - y_2(x_0) \dot{y}_1(x_0) \right) \\
 &= \rho(x_0) \left( y_0(x_0) \dot{y}_2(x_0) - 0 \cdot \dot{y}_1(x_0) \right) \\
 &= \rho(x_0) y_0(x_0) (\dot{y}_2(x_0)) \\
 &= \rho(x_0) y_0(x_0) \left( \frac{1}{\rho(x_0) y_0(x_0)} \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Así,  $y_1$  y  $y_2$  son linealmente independientes y como  $\dim \mathcal{A}_* = 2$ , se tiene que  $\{y_1, y_2\}$  es una base de  $\mathcal{A}_*$ . ■

### 3.5. Optimización de Recursividad

Como se estableció en el Teorema 3.4.1, la solución de la ecuación de Sturm-Liouville (3.1.1) se expresa únicamente en términos de las funciones  $\tilde{X}^{(2n)}$  y  $X^{(2n+1)}$ . Sin embargo, para calcular estas funciones, como establecen las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4), son necesarias las funciones  $\tilde{X}^{(2n-1)}$  y  $X^{(2n)}$ . Por ende, el siguiente resultado es importante, pues nos proporciona una manera de evitar el cálculo de las funciones  $\tilde{X}^{(2n+1)}$  y  $X^{(2n)}$ , lo que hace más eficiente numéricamente al método SPPS.

**Proposición 3.5.1.** Sean  $x_0 \in [a, b]$  y  $y_0 \in \mathcal{A}$  con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $\tilde{X}^{(2k)}$  y  $X^{(2k+1)}$ , son las funciones definidas en (3.2.3) y (3.2.4), entonces para todo  $k \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\tilde{X}^{(2k)}(x) = \int_{x_0}^x [P(x) - P(t)] y_0^2(t) r(t) \tilde{X}^{(2k-2)}(t) dt \quad (3.5.1)$$

y

$$X^{(2k+1)}(x) = \int_{x_0}^x [P(x) - P(t)] y_0^2(t) r(t) \tilde{X}^{(2k-1)}(t) dt, \quad (3.5.2)$$

donde  $P(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho y_0^2}$ .



*Demostración.* Sea  $x \in [a, b]$  y asumamos sin pérdida de generalidad que  $x_0 \leq x$ . Observemos que a partir de la ecuación (3.2.3), la función  $\tilde{X}^{(2k)}$  se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{(2k)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \tilde{X}^{(2k-1)}(s) ds \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \int_{x_0}^s r(t)y_0^2(t) \tilde{X}^{(2k-2)}(t) dt ds.\end{aligned}\quad (3.5.3)$$

Definamos las siguientes funciones

$$g(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}, & \text{si } x_0 \leq t \leq s \leq x; \\ 0, & \text{si } x \geq t > s \geq x_0, \end{cases}\quad (3.5.4)$$

y

$$f(t) = y_0^2(t)r(t)\tilde{X}^{(2k-2)}(t).\quad (3.5.5)$$

Debido a las ecuaciones (3.2.6),(3.2.7) y al Teorema 1.3.6, se sigue que  $f \in KH([a, b])$ .

Sean  $s \in [x_0, x]$  fijo y  $\{t_i\}_{i=1}^n$  una partición arbitraria del intervalo  $[x_0, x]$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ .

Luego, tenemos dos casos:

**Caso 1.** Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t_i \neq s$ . Se cumple que existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$x_{j-1} < s < x_j.$$

Luego, para todo  $i \leq j - 1$ ,

$$g(t_i, s) = \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}.\quad (3.5.6)$$

Mientras que para todo  $i \geq j$ ,

$$g(t_i, s) = 0.\quad (3.5.7)$$

De modo que para todo  $i \neq j$ ,

$$|g(t_i, s) - g(t_{i-1}, s)| = 0.\quad (3.5.8)$$

Por otro lado,

$$|g(t_j, s) - g(t_{j-1}, s)| = \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i, s) - g(t_{i-1}, s)| = \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}.\quad (3.5.9)$$

**Caso 2.** Existe  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $t_j = s$ . De modo que:

- (a) se cumple (3.5.6), para todo  $i \leq j$ ;
- (b) se cumple (3.5.7), para todo  $i > j$ .

Luego, la ecuación 3.5.8 se cumple para  $i \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{j + 1\}$ . Así

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i, s) - g(t_{i-1}, s)| = \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}. \quad (3.5.10)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{[x_0, x]}g(\cdot, s) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |g(t_i, s) - g(t_{i-1}, s)| : P = \{t_i\}_{i=0}^n \text{ partición de } [x_0, x] \right\} \\ &= M(s), \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

donde  $M(s) = \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)}$ . Note que  $M \in L^1([a, b])$ . Así, por el Teorema 1.3.16,

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t)g(t, s)dt ds = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t)g(t, s)ds dt. \quad (3.5.12)$$

Analicemos el término izquierdo de la ecuación (3.5.12):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t)g(t, s)dt ds &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s f(t) \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} dt ds + \int_{x_0}^x \int_s^x f(t) \cdot 0 dt ds \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \int_{x_0}^s f(t) dt ds \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} \int_{x_0}^s y_0^2(t)r(t)\tilde{X}^{(2k-2)}(t) dt ds \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

De la ecuaciones (3.5.3) y (3.5.13) se tiene que

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t)g(t, s)dt ds = \tilde{X}^{(2k)}(x). \quad (3.5.14)$$

Mientras que del término a la derecha de la ecuación 3.5.12 se tiene que

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t)g(t, s)ds dt = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t f(t) \cdot 0 ds dt + \int_{x_0}^x \int_t^x f(t) \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^x f(t) \int_t^x \frac{ds}{\rho(s)y_0^2(s)} dt \\
&= \int_{x_0}^x f(t)[P(x) - P(t)] dt \\
&= \int_{x_0}^x [P(x) - P(t)]y_0^2(t)r(t)\tilde{X}^{(2k-2)}(t)dt. \tag{3.5.15}
\end{aligned}$$

Así, de las ecuaciones (3.5.12),(3.5.14) y (3.5.15) se concluye (3.5.1). De manera similar se demuestra el caso  $x < x_0$  y la igualdad dada en (3.5.2). ■

El Lema 3.5.1 nos permite reescribir el Teorema 3.4.1 de una manera más independiente, como se muestra a continuación.

**Corolario 3.5.2.** Sea  $x_0 \in E_\rho$ . Si  $y_0 \in \mathcal{A}$  es una solución de la ecuación homogénea

$$(\rho y)' + qy = 0 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b], \tag{3.5.16}$$

con  $y_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces la solución general de la ecuación

$$(\rho y)' + qy = \lambda ry \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b] \tag{3.5.17}$$

tiene la siguiente forma:

$$y = c_1 y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} + c_2 y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}, \tag{3.5.18}$$

con  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias y

$$\tilde{X}^{(0)}(x) \equiv 1, \quad X^{(1)} = P, \tag{3.5.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^{(2k)}(x) &= \int_{x_0}^x [P(x) - P(t)]y_0^2(t)r(t)\tilde{X}^{(2k-2)}(t)dt, \\
X^{(2k+1)}(x) &= \int_{x_0}^x [P(x) - P(t)]y_0^2(t)r(t)X^{(2k-1)}(t)dt,
\end{aligned}$$

donde  $P(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)y_0^2(s)} ds$ .

### 3.6. Construcción de la solución homogénea

Todos los resultados de este capítulo han estado en términos de una solución particular de la ecuación homogénea asociada a la ecuación de Sturm-Liouville. Sin embargo, no se ha mencionado algo acerca de como construir dicha solución, por ello el siguiente Teorema nos muestra como hacerlo.

**Teorema 3.6.1.** Sea  $x_0 \in E_\rho$ . Luego, la solución general de la ecuación

$$(\rho y)' + qy = 0 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b], \quad (3.6.1)$$

tiene la siguiente forma:

$$y_h = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_h^{(2k)} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} X_h^{(2k+1)}, \quad (3.6.2)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias, mientras que

$$\tilde{X}_h^{(0)}(x) \equiv 1, \quad X_h^{(1)} = P_h, \quad (3.6.3)$$

$$\tilde{X}_h^{(2k)}(x) = \int_{x_0}^x [P_h(t) - P_h(x)]q(t)\tilde{X}_h^{(2k-2)}(t)dt, \quad (3.6.4)$$

$$X_h^{(2k+1)}(x) = \int_{x_0}^x [P_h(t) - P_h(x)]q(t)X_h^{(2k-1)}(t)dt, \quad (3.6.5)$$

con  $P_h(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(s)} ds$ .

*Demostración.* La idea básica de la demostración consiste en aplicar el Corolario 3.5.2 renombrando los coeficientes. Conscientes de ello, se reescribe la ecuación (3.6.1) de la siguiente forma

$$(\rho y)' + q_1 y = \lambda r_1 y, \quad (3.6.6)$$

donde  $q_1 = 0$ ,  $r_1 = -q$  y  $\lambda = 1$ . De modo que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (3.6.6) es,

$$(\rho y)' = 0. \quad (3.6.7)$$

Una solución de esta ecuación es  $y \equiv 1$ . Así, al aplicar el Corolario 3.5.2, se concluye (3.6.2)-(3.6.5). ■

**Observación 3.6.2.** Observe que las funciones  $\tilde{X}_h^{(2k)}$  y  $X_h^{(2k+1)}$ , dadas en (3.6.4)-(3.6.5) son las funciones  $\tilde{X}^{(2k)}$  y  $X^{(2k+1)}$ , respectivamente, definidas en (3.2.3)-(3.2.4), cuando se tiene el caso particular de que  $y_0 = 1$ ,  $r = -q$  y  $\lambda = 1$ . De modo que todos los resultados relacionados con las funciones  $\tilde{X}^{(2k)}$  y  $X^{(2k+1)}$  son válidos también para las funciones  $\tilde{X}_h^{(2k)}$  y  $X_h^{(2k+1)}$ .

El Teorema 3.6.1, nos muestra que existe una solución de la ecuación homogénea y la forma de la solución general. No obstante, esto no nos dice como construir una solución particular tal que no se anule sobre el intervalo  $[a, b]$ . La siguiente observación nos mostrará como realizarlo.

**Observación 3.6.3.** Sean  $x_0 \in E_\rho$  y

$$\eta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_h^{(2k)} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} X_h^{(2k+1)}.$$

Una solución particular  $y_0$  de la ecuación (3.6.1) que no se anula sobre todo el intervalo  $[a, b]$  tiene la siguiente forma

$$y_0 = \eta_1 + i\eta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_h^{(2k)} + i \sum_{k=0}^{\infty} X_h^{(2k+1)}. \quad (3.6.8)$$

En efecto, note que  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{A}$ , pues por el Teorema 3.6.1, son solución de la ecuación (3.6.1). Luego, existen  $g_1, g_2 \in ACG_*([a, b])$  tales que

$$\rho \dot{\eta}_1 = g_1 \quad \text{y} \quad \rho \dot{\eta}_2 = g_2 \quad \text{c.d.q. sobre } [a, b]. \quad (3.6.9)$$

Estas igualdades se cumplen para todo punto de  $E_\rho$  y dado que  $x_0 \in E_\rho$ ,

$$\rho(x_0) \dot{\eta}_1(x_0) = g_1(x_0) \quad \text{y} \quad \rho(x_0) \dot{\eta}_2(x_0) = g_2(x_0). \quad (3.6.10)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h^{(0)} &\equiv 1, & X_h^{(1)} &= P_h, \\ \tilde{X}_h^{(2k-1)}(x) &= \int_{x_0}^x (-q(t)) \tilde{X}_h^{(2k-2)}(t) dt, & X_h^{(2k)}(x) &= \int_{x_0}^x (-q(t)) X_h^{(2k-1)}(t) dt, \\ \tilde{X}_h^{(2k)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(t)} \tilde{X}_h^{(2k-1)}(t) dt & \text{y} & X_h^{(2k+1)}(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(t)} X_h^{(2k)}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Además,  $\frac{1}{\rho} \tilde{X}_h^{(2k-1)}$  es continua en  $x_0$ . Así, por el Teorema 1.2.12,

$$\left[ \tilde{X}_h^{(2k)} \right]' (x_0) = \frac{1}{\rho(x_0)} \tilde{X}_h^{(2k-1)}(x_0) = \frac{1}{\rho(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} (-q(t)) \tilde{X}_h^{(2k-2)}(t) dt = 0, \quad (3.6.12)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De manera similar,

$$\left[ X_h^{(2k+1)} \right]' (x_0) = \frac{1}{\rho(x_0)} X_h^{(2k)}(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{\rho(x_0)}, & \text{si } k = 0; \\ \frac{1}{\rho(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} (-q(t)) X_h^{(2k-1)}(t) dt = 0, & \text{si } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.6.13)$$

Así, por las igualdades dadas en (3.3.5),

$$\dot{\eta}_1(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ X_h^{(2k+1)} \right]' (x_0) = 0, \quad (3.6.14)$$

$$\dot{\eta}_2(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ X_h^{(2k+1)} \right]' (x_0) = \frac{1}{\rho(x_0)}. \quad (3.6.15)$$

También cabe señalar que  $\eta_1(x_0) = 1$ ,  $\eta_2(x_0) = 0$ . De manera que,

$$\begin{aligned} [\eta_1(x_0)g_2(x_0) - \eta_2(x_0)g_1(x_0)] &= [1 \cdot g_2(x_0) + 0 \cdot g_1(x_0)] \\ &= \rho(x_0)\dot{\eta}_2(x_0) \\ &= \rho(x_0)\frac{1}{\rho(x_0)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, debido a que  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $\eta_1, \eta_2 \in AC([a, b])$ . De modo que por la Proposición 1.3.12,  $\eta_1, \eta_2 \in ACG_*([a, b])$ . Además,  $ACG_*([a, b])$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , cerrado bajo el producto por funciones. Luego,  $\eta_1 g_2 - \eta_2 g_1 \in ACG_*([a, b])$ . Ahora, sea  $x \in [a, b]$ , luego

$$\begin{aligned} &\eta_1(x)g_2(x) - \eta_2(x)g_1(x) - 1 \\ &= \eta_1(x)g_2(x) - \eta_2(x)g_1(x) - [\eta_1(x_0)g_2(x_0) - \eta_2(x_0)g_1(x_0)] \\ &= \int_{x_0}^x [\eta_1 g_2 - \eta_2 g_1]' = \int_{x_0}^x [\eta_1 g_2 - \eta_2 g_1] \\ &= \int_{x_0}^x [\eta_1(\rho \dot{\eta}_2) - \eta_2(\rho \dot{\eta}_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^x [\dot{\eta}_1(\rho\dot{\eta}_2) + \eta_1(\rho\dot{\eta}_2)' - \dot{\eta}_2(\rho\dot{\eta}_1) - \eta_2(\rho\dot{\eta}_1)'] \\
&= \int_{x_0}^x [\eta_1(\rho\dot{\eta}_2)' - \eta_2(\rho\dot{\eta}_1)'] \\
&= \int_{x_0}^x [\eta_1(\rho\dot{\eta}_2)' - \eta_2(\rho\dot{\eta}_1)'] + \eta_1 q \eta_2 - \eta_2 q \eta_1 \\
&= \int_{x_0}^x [\eta_1[(\rho\dot{\eta}_2)' + q\eta_2] - \eta_2[(\rho\dot{\eta}_1)' + q\eta_1]] \\
&= \int_{x_0}^x [\eta_1[0] - \eta_2[0]] = \int_{x_0}^x 0 = 0, \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \quad (3.6.16)
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo  $x \in [a, b]$ ,

$$\eta_1(x)g_2(x) - \eta_2(x)g_1(x) = 1. \quad (3.6.17)$$

En consecuencia, para todo  $x \in [a, b]$ ,  $\eta_1(x) \neq 0$  o  $\eta_2(x) \neq 0$ , es decir,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  no se anulan en un mismo punto. De modo que, si tomamos

$$\begin{aligned}
y_0 &= \eta_1 + i\eta_2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_h^{(2k)} + i \sum_{k=0}^{\infty} X_h^{(2k+1)},
\end{aligned}$$

entonces  $y_0$  no se anula sobre  $[a, b]$ .





## Capítulo 4

---

### Implementación numérica

---

La representación de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville (vea ecuación 3.5.18) en forma de series de potencias de parámetros espectrales nos permite resolver problemas espectrales de manera simple. En este capítulo, se presentan algunos aspectos relacionados con la implementación numérica del método SPPS, así como algunos ejemplos para ilustrar como se aplica el método para hallar los eigenvalores de problemas espectrales.

#### 4.1. Cuadratura

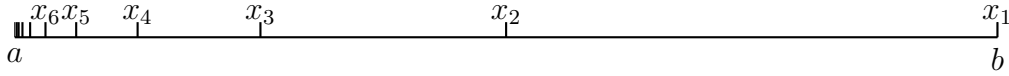
Yang *et al.*, en [20], describen un método para aproximar integrales de Kurzweil-Henstock. El método se basa en realizar particiones no uniformes, que es el concepto central detrás de la integral de Kurzweil-Henstock. Asimismo, el método se describe para funciones que cerca de alguna singularidad en alguno de los extremos del intervalo  $[a, b]$  oscilan bastante. De ahí, que el primer paso consiste en construir una sucesión que se acerque a la singularidad en el extremo donde esta ocurra, pero que solo en el límite alcance el punto. Por ejemplo, en el caso de que la singularidad se encuentre en  $x = a$ , entonces podemos tomar la siguiente sucesión

$$x_i = a + (b - a)N^{-(i-1)}, \quad (4.1.1)$$

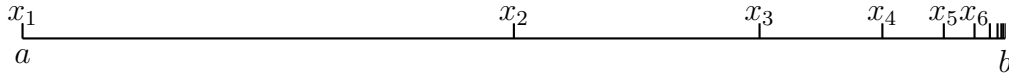
con  $i \in \{1, 2, \dots, t+1\}$  y  $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . En el caso de que la singularidad se encuentre en  $x = b$ , podemos tomar la siguiente sucesión

$$x_i = a + (b - a) (1 - N^{-(i-1)}), \quad (4.1.2)$$

con  $i \in \{1, 2, \dots, t+1\}$  y  $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .



(a) Sucesión de  $b$  a  $a$  con  $N = 2$  y  $t = 5$ .



(b) Sucesión de  $a$  a  $b$  con  $N = 2$  y  $t = 5$ .

Figura 4.1. Sucesiones para evitar las singularidad en los extremos.

En la Figura 4.1 podemos ver ejemplos de como son las sucesiones de los casos en los que la singularidad se encuentra en uno de los extremos. Sin embargo, pueden existir más casos, como que la singularidad no este localizada en uno de los extremos, sino sobre el intervalo  $(a, b)$  o el caso de que haya más de una singularidad. No obstante, se puede utilizar más de una sucesión para obtener resultados similares evitando las singularidades. Ahora, sin pérdida de generalidad, continuaremos con la descripción del método para el caso de una singularidad en  $x = a$ .

Posteriormente, se definen los coeficientes  $a_{n,k}^{(i)}$  para cada unos de los subintervalos  $[x_{i+1}, x_i]$  mediante

$$a_{n,k}^{(i)} = \frac{2(x_i - x_{i+1})j}{n(n+1)}, \quad \text{para } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.1.3)$$

Asimismo, para cada subintervalo  $[x_{i+1}, x_i]$ , se toma una partición no uniforme, de modo que se definen los nodos  $u_{n,k}^{(i)}$  por medio de

$$u_{n,0}^{(i)} = x_{i+1}, \quad u_{n,k}^{(i)} = x_{i+1} + \sum_{j=1}^k a_{n,j}^{(i)}. \quad (4.1.4)$$

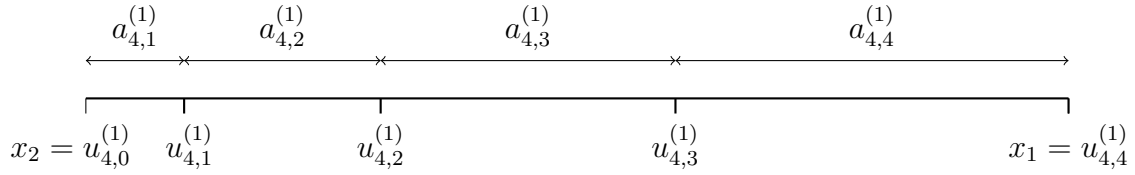


Figura 4.2. Nodos  $u_{n,k}^{(i)}$  del subintervalo  $[x_2, x_1]$ , con  $i = 1$  y  $n = 4$ .

En la Figura 4.2, se muestra un ejemplo de las ubicaciones de los nodos dentro de un subintervalo, determinadas por la suma acumulada de los coeficientes  $a_{n,k}^{(i)}$ . Al aplicar este proceso a cada subintervalo  $[x_{i+1}, x_i]$ , a través de la ecuación (4.1.4), se obtiene la siguiente partición:

$$\begin{aligned}
 a < x_{t+1} = u_{n,0}^{(t)} < u_{n,1}^{(t)} < u_{n,2}^{(t)} < \dots < u_{n,n}^{(t)} = x_t = u_{n,0}^{(t-1)} < u_{n,1}^{(t-1)} < u_{n,2}^{(t-1)} \\
 < \dots < u_{n,n}^{(t-1)} = x_{t-1} < \dots < x_2 = u_{n,0}^{(1)} < u_{n,1}^{(1)} < u_{n,2}^{(1)} < \dots < u_{n,n}^{(1)} = x_1 = b. \quad (4.1.5)
 \end{aligned}$$

Una vez dada la partición de la ecuación (4.1.5), se aproxima el valor de la integral de una función  $f$  sobre el intervalo  $[x_{i+1}, x_i]$  mediante la siguiente cuadratura

$$\int_{x_{i+1}}^{x_i} f \approx Q_n^2(f, [x_{i+1}, x_i]) = \sum_{j=1}^n \frac{a_{n,j}^{(i)}}{2} \left( f(u_{n,j}^{(i)}) + f(u_{n,j-1}^{(i)}) \right). \quad (4.1.6)$$

De modo que el valor de la integral sobre todo el intervalo  $[a, b]$  se obtiene por medio de

$$\int_a^b f \approx \int_{x_t}^{x_{t+1}} f + \int_{x_{t-1}}^{x_t} f + \dots + \int_{x_3}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_1} f, \quad (4.1.7)$$

lo cual nos permite, mediante la suma acumulada conocer el valor de la integral en cada punto de la sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^{t+1}$ . Hasta este punto, todo lo mencionado previamente ha sido descrito por Yang *et al.* en [20]. A continuación, se presentan algunas modificaciones realizadas para adaptar este método de integración numérica al método SPSS.

El Teorema 3.4.1 explica como construir la representación de solución a la ecuación de Sturm-Liouville como una serie de potencias de parámetros espectrales. Particularmente, de las ecuaciones (3.4.3) y (3.4.4), es claro que se necesitan las funciones  $\tilde{X}^{(2s)}$  y  $X^{(2s+1)}$ , las cuales están dadas de forma recursiva, como se aprecia en las ecuaciones (3.2.3)-(3.2.4). Dependiendo de la forma de las funciones  $\rho, q, r$  y  $y_0$ , podríamos tener expresiones



$[x_{i+1}, x_i]$ , se tiene que la cuadratura (4.1.6) se transforma en:

$$\int_{x_{i+1}}^{u_{n,k}^{(i)}} f \approx \sum_{j=1}^k \frac{a_{n,j}^{(i)}}{2} \left( f(u_{n,j}^{(i)}) + f(u_{n,j-1}^{(i)}) \right). \quad (4.1.8)$$

De manera que la integral acumulada hasta dicho  $u_{n,k}^{(i)}$  es:

$$\int_{x_{t+1}}^{u_{n,k}^{(i)}} f \approx \int_{x_{t+1}}^{x_i} f + \int_{x_{t+1}}^{u_{n,k}^{(i)}} f \quad (4.1.9)$$

$$= \sum_{\ell=i-1}^t \sum_{j=1}^n \frac{a_{n,j}^{(\ell)}}{2} \left( f(u_{n,j}^{(\ell)}) + f(u_{n,j-1}^{(\ell)}) \right) + \sum_{j=1}^k \frac{a_{n,j}^{(i)}}{2} \left( f(u_{n,j}^{(i)}) + f(u_{n,j-1}^{(i)}) \right). \quad (4.1.10)$$

Note que la modificación de la cuadratura (4.1.6), dada en la ecuación (4.1.8), no presenta discrepancias. Más aún, ahora nos es posible realizar iteraciones. Para comprender la aplicación de la cuadratura, supongamos que se tiene que  $t = 4$ ,  $n = 3$ ,  $i = 3$ ,  $k = 2$  y  $N = 5$ . Empleando las ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4), obtenemos una partición similar a la descrita en la ecuación (4.1.5). A continuación, determinaremos el valor de la integral en el nodo  $u_{3,2}^{(3)}$  y realizaremos el cálculo de todos los valores de la integral hasta ese punto. Denotaremos por  $F(u_{n,k}^{(i)})$  al valor de la integral acumulada hasta dicho nodo:

$$F(u_{3,0}^{(4)}) = 0 = F(x_5),$$

$$F(u_{3,1}^{(4)}) = \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right),$$

$$F(u_{3,2}^{(4)}) = \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(4)}) + f(u_{3,1}^{(4)}) \right),$$

$$F(u_{3,3}^{(4)}) = \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(4)}) + f(u_{3,1}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,3}^{(4)}) + f(u_{3,2}^{(4)}) \right),$$

$$F(u_{3,0}^{(3)}) = F(u_{3,3}^{(4)}) = F(x_4),$$

$$F(u_{3,1}^{(3)}) = \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(4)}) + f(u_{3,1}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,3}^{(4)}) + f(u_{3,2}^{(4)}) \right),$$

$$+ \frac{a_{3,1}^{(3)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(3)}) + f(u_{3,0}^{(3)}) \right),$$

$$F(u_{3,2}^{(3)}) = \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(4)}) + f(u_{3,1}^{(4)}) \right) + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,3}^{(4)}) + f(u_{3,2}^{(4)}) \right),$$

$$+ \frac{a_{3,1}^{(3)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(3)}) + f(u_{3,0}^{(3)}) \right) + \frac{a_{3,2}^{(3)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(3)}) + f(u_{3,1}^{(3)}) \right).$$

Observe que los términos se pueden reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 F(u_{3,0}^{(4)}) &= 0, \\
 F(u_{3,1}^{(4)}) &= F(u_{3,0}^{(4)}) + \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(4)}) + f(u_{3,0}^{(4)}) \right), \\
 F(u_{3,2}^{(4)}) &= F(u_{3,1}^{(4)}) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(4)}) + f(u_{3,1}^{(4)}) \right), \\
 F(u_{3,3}^{(4)}) &= F(u_{3,2}^{(4)}) + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( f(u_{3,3}^{(4)}) + f(u_{3,2}^{(4)}) \right), \\
 F(u_{3,0}^{(3)}) &= F(u_{3,3}^{(4)}), \\
 F(u_{3,1}^{(3)}) &= F(u_{3,0}^{(3)}) + \frac{a_{3,1}^{(3)}}{2} \left( f(u_{3,1}^{(3)}) + f(u_{3,0}^{(3)}) \right), \\
 F(u_{3,2}^{(3)}) &= F(u_{3,1}^{(3)}) + \frac{a_{3,2}^{(3)}}{2} \left( f(u_{3,2}^{(3)}) + f(u_{3,1}^{(3)}) \right).
 \end{aligned}$$

Lo cual se puede generalizar mediante

$$F(u_{n,k}^{(i)}) = \begin{cases} F(u_{n,k-1}^{(i)}) + \frac{a_{n,k}^{(i)}}{2} \left( f(u_{n,k}^{(i)}) + f(u_{n,k-1}^{(i)}) \right), & \text{si } k > 0; \\ F(u_{n,n}^{(i+1)}), & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

O visto de otra manera

$$\int_{x_{t+1}}^{u_{n,k}^{(i)}} f = \begin{cases} \int_{x_{t+1}}^{u_{n,j-1}^{(i)}} f + \frac{a_{n,k}^{(i)}}{2} \left( f(u_{n,k}^{(i)}) + f(u_{n,k-1}^{(i)}) \right), & \text{si } k > 0; \\ \int_{x_{t+1}}^{u_{n,n}^{(i+1)}} f = \int_{x_{t+1}}^{x_{i+1}} f, & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

A simple vista, las ecuaciones (4.1.11) y (4.1.12), parecen ser una manifestación de la propiedad de aditividad respecto al intervalo de integración. Si bien es cierto, la verdadera importancia de estas ecuaciones radica en la implementación numérica. Por ejemplo, si se desea conocer la integral sobre todo el intervalo  $[x_t, b]$ , solo es necesario calcular la integral en el primer punto  $u_{n,1}^{(t)}$ , asumiendo que la integral en  $u_{n,0}^{(t)}$  es cero, este dato se guarda y se asocia con el valor de la integral en dicho punto. Posteriormente, se suma el resultado del siguiente término, se guarda la suma y se asocia dicha cantidad con la integral en ese punto. Así sucesivamente hasta terminar la integral en  $b$ . De modo que, al finalizar la implementación del método se habrá calculado la integral sobre todos los nodos  $u_{n,k}^{(i)}$ .

Es posible utilizar esta propiedad de esta manera porque la función  $f$  no depende del punto hasta el cual se desea integrar. Veamos que esto no es posible con funciones que sí dependen del punto de integración, para ello necesitamos la expresión de las funciones  $\tilde{X}_h^{(2s)}$  (ecuación (3.6.4)) para  $s = 1$  y recordemos que  $\tilde{X}_h^{(0)} \equiv 1$ ,

$$\tilde{X}_h^{(2)}(x) = \int_{x_0}^x q(t)[P_h(t) - P_h(x)]dt.$$

También supongamos que  $t = 4$ ,  $n = 3$ ,  $i = 4$  y  $k = 3$ , tal que de igual manera se quiere calcular el valor de la integral en el nodo  $u_{3,2}^{(3)}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,0}^{(4)}) &= 0, \\ \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,1}^{(4)}) &= \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,1}^{(4)})] + q(u_{3,0}^{(4)})[P_h(u_{3,0}^{(4)}) - P_h(u_{3,1}^{(4)})] \right), \\ \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,2}^{(4)}) &= \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] + q(u_{3,0}^{(4)})[P_h(u_{3,0}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] \right), \\ &\quad + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,2}^{(4)})[P_h(u_{3,2}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] + q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] \right), \\ \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,3}^{(4)}) &= \frac{a_{3,1}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] + q(u_{3,0}^{(4)})[P_h(u_{3,0}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] \right), \\ &\quad + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,2}^{(4)})[P_h(u_{3,2}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] + q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] \right), \\ &\quad + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,3}^{(4)})[P_h(u_{3,3}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] + q(u_{3,2}^{(4)})[P_h(u_{3,2}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] \right). \end{aligned}$$

Claramente no se cumple la ecuación (4.1.11), pues

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,2}^{(4)}) &\neq \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,1}^{(4)}) + \frac{a_{3,2}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,2}^{(4)})[P_h(u_{3,2}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] + q(u_{3,1}^{(4)})[P_h(u_{3,1}^{(4)}) - P_h(u_{3,2}^{(4)})] \right), \\ \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,3}^{(4)}) &\neq \tilde{X}_h^{(2)}(u_{3,2}^{(4)}) + \frac{a_{3,3}^{(4)}}{2} \left( q(u_{3,3}^{(4)})[P_h(u_{3,3}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] + q(u_{3,2}^{(4)})[P_h(u_{3,2}^{(4)}) - P_h(u_{3,3}^{(4)})] \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para funciones de esta naturaleza, si se desea determinar la integral en un nodo  $u_{n,k}^{(i)}$ , es necesario calcular la integral completa, desde  $x_{t+1}$  hasta el nodo  $u_{n,k}^{(i)}$ , usando la ecuación (4.1.10), en lugar de simplemente sumar términos, como en la ecuación (4.1.11)<sup>1</sup>. Durante la implementación del método SPPS, se utilizaron en conjunto ambas

<sup>1</sup>Observe que la aditividad respecto al intervalo de integración se sigue cumpliendo.

maneras de calcular la integral. Para funciones como  $P_h, P$  se utilizó la manera descrita en la ecuación (4.1.11). Mientras que para funciones como  $\tilde{X}_h^{(2s)}, X_h^{(2s+1)}, \tilde{X}^{(2s)}$  y  $X^{(2s+1)}$  se utilizó directamente la cuadratura (4.1.10).

## 4.2. Ejemplos

En esta sección se mostrarán ejemplos prácticos de problemas espectrales con distintos tipos de condiciones iniciales.

**Ejemplo 4.2.1.** Considere la ecuación  $(\rho y)' + qy = \lambda ry$  c.d.q. sobre  $[0, \pi]$ , donde

$$\rho(x) = -1, \quad q(x) = \frac{2\pi}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \quad \text{y} \quad r(x) = 1$$

con las siguiente condiciones de frontera

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

La función  $q$  es altamente oscilante y  $q \in KH([0, \pi]) \setminus L^1([0, \pi])$ . Este ejemplo claramente muestra que los resultados de esta tesis abarcan un mayor número de casos que los resultados utilizando la integral de Lebesgue mostrados en [2]. Sea

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{A} : y(0) = 0 = y(\pi)\}$$

y definamos  $L : \mathcal{D} \rightarrow KH([0, \pi])$  como  $L(y) = (\rho y)' + qy$ . Encontramos una aproximación del espectro puntual  $\sigma_p(L)$ .

Aplicando el método SPPS, es decir, utilizando el Teorema 3.4.1, para hallar la representación de la solución general de la ecuación  $(\rho y)' + qy = \lambda ry$  como una serie de potencias de parámetro espectral se obtiene que

$$y = c_1 \left[ y_0 \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \tilde{X}^{(2s)} \right] + c_2 \left[ y_0 \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)} \right], \quad (4.2.1)$$

donde  $\tilde{X}^{(2s)}$  y  $X^{(2s+1)}$  están definidas como en las ecuaciones (3.5.2) y (3.5.1) tomando  $x_0 = 0$ . Utilizando la condición de frontera  $y(0) = 0$  en (4.2.1), obtenemos que

$$0 = c_1 y_0(0) + c_2 y_0(0) \cdot 0.$$



Por tanto,  $c_1 = 0$ . Ahora, empleando la condición de frontera  $y(\pi) = 0$ , encontramos que

$$0 = c_2 y_0(\pi) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)}(\pi).$$

Dado que la solución homogénea satisface que  $y_0(\pi) \neq 0$ , se sigue que

$$\Omega(\lambda) := \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)}(\pi) = 0.$$

Los ceros de  $\Omega$  conforman el espectro puntual de  $L$ . Para hallar los ceros de  $\Omega$ , se trunca la serie después de  $m$  términos. De modo que ahora debemos encontrar los ceros de

$$\Omega_m(\lambda) := \sum_{s=0}^m \lambda^s X^{(2s+1)}(\pi).$$

Para determinar el valor de  $X^{(2s+1)}(\pi)$  para  $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ , como establece el Teorema 3.5.2, es necesario conocer los valores de  $y_0$  sobre  $[0, \pi]$ . De modo que, con el fin de construir  $y_0$ , la solución homogénea que se anula sobre todo el intervalo  $[0, \pi]$ , como el Teorema 3.6.1 indica, debemos hallar los valores de  $\tilde{X}_h^{(2s)}$  y  $X_h^{(2s+1)}$  sobre  $[0, \pi]$ . De las ecuaciones (3.6.4) y (3.6.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h^{(2s)}(x) &= \int_{x_0}^x \tilde{X}_h^{(2s-2)}(t)q(t)[P_h(t) - P_h(x)]dt; \\ X_h^{(2s+1)}(x) &= \int_{x_0}^x X_h^{(2s-1)}(t)q(t)[P_h(t) - P_h(x)]dt. \end{aligned}$$

Estas integrales son estrictamente Kurzweil-Henstock, pues  $q \in KH([0, \pi]) \setminus L^1([0, \pi])$ . Por lo tanto, debemos utilizar un método adecuado para estimar las integrales, por ello utilizaremos el método descrito en la Sección 4.1. Puesto que la función  $q$  tiene una singularidad en  $x = 0$  (el extremo izquierdo) y oscila significativamente cerca de este punto, vamos a formar una sucesión que se aproxime a  $x = 0$  sin alcanzarlo. Para ello, utilizamos la ecuación (4.1.1) con  $a = 0, b = \pi$  y  $N = 5$ , así tenemos que

$$x_i = \pi \left( 5^{-(i-1)} \right), \quad \text{donde } i \in \{1, 2, \dots, t+1\}.$$

Posteriormente, utilizando las ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4) se calculan los coeficientes  $a_{n,k}^{(i)}$  así como los nodos  $u_{n,k}^{(i)}$  para cada subintervalo  $[x_{i+1}, x_i]$ . De manera que se tenga una partición no uniforme como la mostrada en la ecuación (4.1.5).

A continuación se utiliza la ecuación (4.1.11) para determinar el valor de  $P_h$  sobre  $[0, \pi]$ . Mientras que se utiliza la cuadratura descrita en la ecuación (4.1.10) para estimar las funciones  $\tilde{X}_h^{(2s)}, X_h^{(2s+1)}$  para  $s \in \{0, 1, \dots, m\}$  en cada nodo  $u_{n,j}^{(i)}$ . Como se menciona en el Teorema 3.6.1, tomamos  $y_0 = \sum_{s=0}^m \lambda^s \tilde{X}_h^{(2s)} + i \sum_{s=0}^m \lambda^s X_h^{(2s+1)}$ . Una vez conocido el valor de  $y_0$  sobre  $[0, \pi]$ , esto nos permite calcular los valores de  $P$  y por consiguiente los valores de  $X^{(2s+1)}$  sobre  $[0, \pi]$ , particularmente para  $s = m$  y  $x = \pi$ . Lo que nos conduce al polinomio característico  $\Omega_m(\lambda)$ , donde las raíces de  $\Omega_m$  deben formar el espectro puntual  $\sigma_p(L)$ .

Los eigenvalores de este ejemplo se muestran en la Tabla 4.2.1, se calcularon utilizando  $t = 30$ ,  $n = 3000$  y  $m = 100$ .

Tabla 4.2.1: Eigenvalores obtenidos para el Ejemplo 4.2.1, con  $t = 30$ ,  $n = 3000$  y  $m = 100$ .

$n$	$\lambda_n$
1	2.361300545482816
2	4.7417217745472335
3	10.825072417633294
4	17.486039265939382
5	25.821116277868896
6	37.210546294478405
7	50.67457532648284
8	65.42292022702168
9	81.93125101877169
10	101.0198225062351

**Ejemplo 4.2.2.** Considere la ecuación  $(\rho y)' + qy = \lambda ry$  c.d.q. sobre  $[-\pi, 0]$ , donde

$$\rho(x) = \sqrt{\pi + x}, \quad q(x) = -\frac{2x + 2\pi + 1}{2\sqrt{\pi + x}} \quad \text{y} \quad r(x) = \csc\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\csc\left(\frac{\pi + x}{2}\right)\right)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$y(-\pi) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Es claro que  $\frac{1}{\rho}, q \in L([-\pi, 0])$ . Además, se tiene que la función  $r \in \text{KH}([-\pi, 0])$ , es altamente oscilante y tiene una singularidad en  $x = -\pi$ . Sea

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{A} : y(-\pi) = 0 = \dot{y}(0)\}$$

y definamos  $L : \mathcal{D} \rightarrow \text{KH}([-\pi, 0])$  as  $L(y) = (\rho\dot{y})' + qy$ . Encontremos una aproximación del espectro puntual  $\sigma_p(L)$ . Del Teorema 3.4.1, se tiene que la solución general de la ecuación  $(\rho\dot{y})' + qy = \lambda ry$  tiene la siguiente forma

$$y = c_1 \left[ y_0 \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \tilde{X}^{(2s)} \right] + c_2 \left[ y_0 \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)} \right] = c_1 y_0 u + c_2 y_0 w, \quad (4.2.2)$$

donde  $\tilde{X}^{(2s)}$  y  $X^{(2s+1)}$  están definidas como en las ecuaciones (3.5.1) y (3.5.2) tomando  $x_0 = 0$ . La elección del punto  $x_0 = 0$  es debido al hecho de que  $0 \in E_\rho$ , mientras que  $-\pi \notin E_\rho$ . Utilizando la condición de frontera  $y(-\pi) = 0$  en (4.2.2), obtenemos que

$$0 = c_1 \left[ y_0(-\pi) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \tilde{X}^{(2s)}(-\pi) \right] + c_2 \left[ y_0(-\pi) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)}(-\pi) \right]. \quad (4.2.3)$$

Observe que de la ecuación (3.4.10) y del Teorema 3.3.5, se tiene que

$$u(x_0) = 1, \quad v(x_0) = 0, \quad w(x_0) = 0, \quad z(x_0) = 1, \\ \dot{u}(x_0) = \frac{v(x_0)}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{w}(x_0) = \frac{z(x_0)}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)} = \frac{1}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)}.$$

Así, al utilizar la condición de frontera  $\dot{y}(x_0) = 0$  en la ecuación (4.2.2), junto con las observaciones anteriores, se sigue que

$$0 = \dot{y}(x_0) = c_1 \left( \dot{y}_0(x_0)u(x_0) + y_0(x_0)\dot{u}(x_0) \right) + c_2 \left( \dot{y}_0(x_0)w(x_0) + y_0(x_0)\dot{w}(x_0) \right) \\ = c_1 \left( \dot{y}_0(x_0) \cdot 1 + y_0(x_0) \cdot 0 \right) + c_2 \left( \dot{y}_0(x_0) \cdot 0 + y_0(x_0) \frac{1}{\rho(x_0)y_0^2(x_0)} \right) \\ = c_1 \dot{y}_0(x_0) + c_2 \frac{1}{\rho(x_0)y_0(x_0)}.$$

Luego,  $c_2 = -\sqrt{\pi}y_0(x_0)\dot{y}_0(x_0)c_1$ . Cuando sustituimos el valor de  $c_2$  en la ecuación (4.2.3), considerando que  $c_1$  y  $y_0(-\pi)$  no deben ser cero, llegamos a la siguiente ecuación

$$\left[ \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \tilde{X}^{(2s)}(-\pi) \right] - \sqrt{\pi}y_0(0)\dot{y}_0(0) \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X^{(2s+1)}(-\pi) \right] = 0.$$

Por tanto, para encontrar el espectro puntual de  $L$  debemos encontrar los ceros de

$$\Omega_m(\lambda) := \sum_{s=0}^m \lambda^s \left[ \tilde{X}^{(2s)}(-\pi) - \sqrt{\pi} y_0(0) \dot{y}_0(0) X^{(2s+1)}(-\pi) \right].$$

Los eigenvalores para este ejemplo se muestran en la Tabla 4.2.2, los cuales fueron calculados usando  $t = 30$ ,  $n = 3000$  y  $m = 100$ .

Tabla 4.2.2: Eigenvalores obtenidos para el Ejemplo 4.2.2, con  $t = 30$ ,  $n = 3000$  y  $m = 100$ .

$n$	$\lambda_n$
1	4.524225992700899
2	28.39425092237783
3	57.41629224255273
4	84.21626647213287
5	160.32418088288506
6	179.02925228986282
7	508.1105242245128
8	520.70477362163
9	523.5330777360434

---

## Conclusiones

---

El objetivo general de este trabajo de tesis fue realizar un estudio del método SPPS utilizando la integral de Kurzweil-Henstock.

En el Capítulo 2 se mostró la existencia y unicidad de la solución de problemas de valores iniciales para la ecuación de Sturm-Liouville  $(\rho y)' + Qy = f$ , cuando  $Q, f \in KH([a, b])$  y  $\frac{1}{\rho} \in L^1([a, b])$ . Esto extiende el trabajo de S. Sánchez-Perales en [17]. Posteriormente, se mostró que la dimensión del espacio solución de la ecuación homogénea asociada es igual a dos, vea Corolario 2.2.2, lo cual permitió la demostración del teorema principal de esta tesis.

En el Capítulo 3 se mostró la convergencia del método SPPS, propuesto por Kravchenko [9] para la ecuación de Sturm-Liouville  $(\rho y)' + qy = \lambda ry$ , con coeficientes Kurzweil-Henstock integrables, por lo que los resultados mostrados por Blancarte *et al.* en [2, Teorema 7] permanecen como un caso particular de los resultados presentados en el Capítulo 3 cuando  $q, r \in L([a, b]) (\subseteq KH([a, b]))$ . En [10] y [2] Kravchenko y Blancarte, respectivamente, describen la manera de proceder con las demostraciones para la convergencia del método. Sin embargo, en varias de partes fue necesario emplear técnicas diferentes y adecuadas para la integral de Kurzweil-Henstock, debido a la integrabilidad no absoluta de ésta.

Por otro lado, para la implementación numérica, se tuvieron que hacer modificaciones al método descrito por Yang *et al.* en [20], debido a la necesidad de realizar integraciones

---

recursivas. Por otro lado, el Teorema 3.5.1 hace al método más eficiente numéricamente, pues nos permite evitar  $k$  iteraciones al momento de calcular el valor de las funciones  $\tilde{X}^{(2k)}$  y  $X^{(2k+1)}$  sobre  $[a, b]$ . De modo que la implementación numérica, realizada en Python, fue razonablemente manejable y ha demostrado ser una herramienta poderosas para resolver problemas de Sturm-Liouville. Esto se muestra claramente en los ejemplos de la Sección 4.2 del Capítulo 4, donde pudimos encontrar el espectro puntual para problemas con funciones Kurzweil-Henstock integrables.

Por lo tanto, la incorporación de la integral de Kurzweil-Henstock en el método SPPS, ha ampliado significativamente el alcance y la aplicabilidad del método, lo que nos permite abordar una variedad más amplia de problemas, incluidos aquellos que contienen funciones altamente oscilantes que no son Lebesgue integrables.

Por último, los hallazgos del Capítulo 2 se encuentran en [16], mientras que los de los Capítulos 3 y 4 en [6]. Ambos casos, se encuentran en proceso de publicación (aceptado y publicado, respectivamente).

---

---

## Bibliografía

---

- [1] R. G. Bartle. *A modern theory of integration*, volume 32 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [2] Herminio Blancarte, Hugo M. Campos, and Kira V. Khmelnytskaya. Spectral parameter power series method for discontinuous coefficients. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(10):2000–2011, 2015.
- [3] Everaldo M. Bonotto, Felipe Federson, and Márcia Federson. The schrödinger equation, path integration and applications. *Proceedings Of The Singapore National Academy Of Science*, 15(01):61–75, March 2021.
- [4] Marcin Borkowski and Daria Bugajewska. Applications of Henstock-Kurzweil integrals on an unbounded interval to differential and integral equations. *Math. Slovaca*, 68(1):77–88, 2018.
- [5] V G Celidze, A G Dzvaršeišvili, and P S Bullen. *The Theory of the Denjoy Integral and Some Applications*. WORLD SCIENTIFIC, 1989.
- [6] Israel A. Cordero-Martínez, Salvador Sánchez-Perales, and Francisco J. Mendoza-Torres. Spectral parameter power series method for Kurzweil–Henstock integrable functions. *AIMS Mathematics*, 9(9):23598–23616, 2024.

- 
- [7] M. Federson, J. Mawhin, and C. Mesquita. Existence of periodic solutions and bifurcation points for generalized ordinary differential equations. *Bull. Sci. Math.*, 169:Paper No. 102991, 31, 2021.
- [8] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [9] Vladislav V. Kravchenko. A representation for solutions of the Sturm–Liouville equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 53(8):775–789, 2008.
- [10] Vladislav V. Kravchenko and R. Michael Porter. Spectral parameter power series for Sturm–Liouville problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(4):459–468, 2010.
- [11] J. Lützen. Sturm and Liouville’s work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm–Liouville theory. *Archive for history of exact sciences*, vol. 29(no. 4):309–376, 1984.
- [12] María Guadalupe Morales, Zuzana Došlá, and Francisco J. Mendoza. Riemann–Liouville derivative over the space of integrable distributions. *Electron. Res. Arch.*, 28(2):567–587, 2020.
- [13] T. Pérez-Becerra, S. Sánchez-Perales, and J.J. Oliveros-Oliveros. The HK-Sobolev space and applications to one-dimensional boundary value problems. *Journal of King Saud University - Science*, 32(6):2790–2796, 2020.
- [14] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1964.
- [15] S. Sánchez-Perales and F. J. Mendoza-Torres. Boundary value problems for the Schrödinger equation involving the Henstock–Kurzweil integral. *Czechoslovak Math. J.*, 70(2):519–537, 2020.
-



- 
- [16] S. Sánchez-Perales, I. A. Cordero-Martínez, T. Pérez-Becerra, and H. Kalita. Sturm-Liouville differential equations with Kurzweil-Henstock integrable functions as coefficients. Por aparecer en *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. 26, 2024.
- [17] Salvador Sánchez-Perales. The initial value problem for the Schrödinger equation involving the Henstock-Kurzweil integral. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 58:297–306, 05 2017.
- [18] E. Talvila. Limits and Henstock integrals of products. *Real Anal. Exchange*, 25(2):907–918, 1999.
- [19] E. Talvila. Henstock-Kurzweil Fourier transforms. *Illinois J. Math.*, 46(4):1207–1226, 2002.
- [20] Wei-Chi Yang and Lee Peng Yee. Numerical integration on some special Henstock-Kurzweil integrals. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 3(3):205–223, 2009.
- [21] G. Ye, M. Zhang, W. Liu, and D. Zhao. Existence and uniqueness of solutions to distributional differential equations involving Henstock-Stieltjes integrals. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 60(2):443–458, 2019.
-