UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

LÍMITES INVERSOS Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

RAYMUNDO VELASCO VASQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CENOBIO YESCAS APARICIO

CODIRECTOR:

DR. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.

AGOSTO DE 2024.

A mi madre, fue por ti que todo comenzó.
A mi padre, por ti llegué hasta este momento.

Agradecimientos

La redacción de esta sección es sin duda la más emotiva, ya que son muchas las personas que han contribuido en mi formación personal y académica, con las que estoy enormemente agradecido:

A los profesores que me dieron clases, por su orientación y motivación a lo largo de la carrera. Su pasión y experiencia fue vital en mi formación académica.

A mis compañeros de clase, en especial a aquellos que se volvieron amigos, con quienes tuve la dicha de convivir y aprender día a día. Su amistad hizo más ameno el transcurso de la carrera.

A mi director y codirector de tesis, por su tiempo empleado en la realización de este proyecto, por sus correcciones y paciencia a lo largo del trabajo. Su guía fue fundamental para el desarrollo y culminación de la tesis.

A mi familia, por creer en mí y mostrarme su apoyo incondicional. En especial a mis hermanos, por ser mis mejores amigos y cómplices. Por supuesto, a mis padres Jacobo y Josefina, su apoyo y sacrificio es la base mis éxitos.

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **5**
1.1. Nociones básicas de teoría de conjuntos 5
1.2. Conceptos básicos de topología general 7

2. Un repaso de la topología producto y los conjuntos dirigidos **25**
2.1. Órdenes parciales y conjuntos dirigidos 25
2.2. Topología producto y sus propiedades 31

3. Límites inversos **43**
3.1. Definición y ejemplos 43
3.2. Límite inverso como subconjunto cerrado del producto 49
3.3. Teoremas de preservación: axiomas de separabilidad y numerabilidad; compacidad y metrizabilidad 55
3.4. Propiedades que indican cuando un espacio es homeomorfo a un límite inverso 57

4. Límites inversos con los naturales como conjunto de índices **63**
4.1. Sucesiones inversas 63
4.2. Resultados clásicos de límites inversos de sucesiones inversas 64
4.3. Límites inversos para familias de continuos 76

5. Aplicaciones de los límites inversos **79**
5.1. Nociones de economía y su interpretación con límites inversos 79
5.1.1. Desarrollo del modelo 79
5.1.2. Generación de la sucesión inversa y límite inverso 83
5.1.3. Límites inversos conocidos 84
5.2. El solenoide 89
5.2.1. Definición del solenoide 89
5.2.2. El solenoide diádico y su construcción geométrica 91

5.2.3. Dos propiedades interesantes de los solenoides diádicos como consecuencia de su definición como un límite inverso. 98
5.2.4. El solenoide y su actualidad 102

Conclusiones **103**

Bibliografía **104**

Límites inversos y algunas de sus aplicaciones

Raymundo Velasco Vasquez

26 de agosto de 2024

Introducción

Dentro de las múltiples áreas que abarcan las matemáticas, el conocimiento de diversas técnicas y herramientas subyace en la comprensión de resultados a su alrededor. En topología general, a estas herramientas se les denomina «operaciones topológicas», las cuales tienen como propósito analizar el comportamiento de alguna propiedad topológica sobre algún espacio dado; dentro de estas operaciones podemos encontrar la denominada «límites inversos».

En el año de 1929 P. Alexandroff, en el artículo [Ale28], da el primer indicio de lo que posteriormente S. Lefschetz definiría como límite inverso en el artículo [Lef31]. De esta forma desde su aparición, los límites inversos pasaron a ser objeto de estudio por la comunidad matemática; los estudios abarcaron nociones usuales topológicas (compacidad, ser Hausdorff, continuidad, entre otras) bajo esta operación. Adecuando la noción de límite inverso, especialistas obtuvieron resultados exitosos en áreas donde lo topológico no es una parte fundamental; algunas de estas áreas son el álgebra (vea [Ber15]) o el análisis (vea [CK13]). La conveniencia de esta operación topológica sigue estando bastante presente en la actualidad, se continúan estudiando diversas propiedades (recientes o no tan recientes), ya sea para mostrar su preservación (invarianza) o bien en la generación de algún contraejemplo.

En una búsqueda rápida en los repositorios de artículos matemáticos, se encuentran trabajos muy recientes que utilizan la técnica de los límites inversos, como por ejemplo en la subrama que los expertos denominan análisis funcional abstracto, dicha técnica ha sido utilizados para estudiar y resolver problemas sobre los espacios de Valdivia (vea [KM06]) o los espacios semi-Eberlein (vea [CRS21]), en sistemas algebraicos se tienen trabajos actuales que emplean los límites inversos como se ve en [Kho24] y también en teoría de continuos para el estudio de la propiedad tipo árbol, como lo hacen en [VP23], por mencionar alguna. Todo eso da razón, entre otras cosas, para que los límites inversos sean un buen tema para poder desarrollar esta tesis.

De lo anterior, el objetivo de esta tesis es realizar un manuscrito que contenga y exponga detalladamente los fundamentos básicos de la teoría de límites inversos, así como

el de recopilar resultados clásicos que consideramos son representativos en esta área. Particularmente, hemos redactado un escrito que un estudiante de licenciatura con un curso básico de topología general puede comprender. El texto, en su mayoría resulta autocontenido sin la necesidad de buscar material auxiliar para su lectura, claro, a menos que el lector desee profundizar en algunos temas que no forman parte medular de la tesis. Por tal motivo, la tesis está estructurada de la siguiente manera.

El primer capítulo está enfocado en dar a conocer los conceptos básicos alrededor de la teoría de conjuntos y topología general, así como la notación y el lenguaje que usamos en el desarrollo de la tesis. Dentro de estos hechos mencionamos propiedades topológicas y teoremas que son de gran ayuda para el tema principal de la tesis. Dichos resultados, en su mayoría, los tomamos de libros como [Eng89] y [Wil04]. Este capítulo puede ser obviado por alguien que haya tomado un curso básico de topología de licenciatura.

En el segundo capítulo de la tesis, nos enfocamos en dar un repaso al tema de órdenes parciales y conjuntos dirigidos para incluir conceptos que usualmente no son estudiados en un primer curso de topología general. También, presentamos el producto de espacios topológicos como un espacio topológico, mostrando conceptos y ejemplos de éste de manera gráfica para una mejor comprensión. Este capítulo tiene como objetivo familiarizar y ubicar al lector en el contexto adecuado donde trabajamos el tema medular de la tesis.

En el tercer capítulo introducimos el concepto de límite inverso, así como ejemplos a su alrededor. Visualizamos el límite inverso como subespacio del producto y nos enfocamos en demostrar cuáles propiedades topológicas conserva el límite inverso como herencia de los productos topológicos y los resultados que podemos generar a partir de éstas. Los resultados indicados están basados en libros especializados en el tema como [Chi96] y artículos como [Sto79].

El cuarto capítulo está enfocado en exponer resultados clásicos de los límites inversos, teniendo como conjunto dirigido al de los naturales. Este capítulo está basado en resultados obtenidos de [IM12], de donde también nos inspiramos para construir un sistema inverso cuyo límite inverso sea la curva del topólogo. Esto sienta las bases para trabajar y poder leer el quinto capítulo.

Finalmente, la intención del quinto capítulo es dar a conocer la importancia a través de sus aplicaciones del límite inverso en áreas ajenas a la topología general. La primera sección está fuertemente inspirada en el artículo [KSY07], en donde, primeramente, repasamos conceptos básicos alrededor de la economía para después relacionarlos con los límites inversos a través de un problema planteado. Culminamos el capítulo mostrando un ejemplo del límite inverso, cuya motivación fue el artículo [CMR15], veremos la construcción geométrica de éste y lo relacionaremos con los límites inversos. Es importante

enfatizar, que para este capítulo, no profundizamos en las nociones de teoría de economía o la teoría de sistemas dinámicos discretos, sino que priorizamos hacer visible cómo es que se usan los límites inversos.

Al final, hemos añadido un apartado de conclusiones y algunos comentarios finales acerca del trabajo de tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Nociones básicas de teoría de conjuntos

Uno de los requisitos más importantes para entender el área de topología general es la teoría de conjuntos, dado que esta nos proporciona las herramientas y técnicas necesarias para trabajar con colecciones de objetos de manera lógica y sencilla. Por tal motivo decidimos añadir esta sección, en donde describimos de manera breve algunos conceptos básicos de esta teoría, así como la notación que usamos a lo largo de la tesis. La teoría de conjuntos es por sí misma un área muy vasta e interesante para absortarse, sin embargo, para fines prácticos de la tesis, hemos decidido no profundizar en estos temas. Si el lector es gustoso de la lectura de teoría de conjuntos y requiere hacer un estudio más profundo de los temas que aquí mencionemos, recomendamos consultar el libro [Her03], en donde se aborda de manera detallada y excelente la teoría de conjuntos.

Dados dos conjuntos A y B, si A es un *subconjunto* de B lo denotamos por $A \subseteq B$. Si estos son iguales tendremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ y usamos la notación $A = B$. Para la *intersección* y la *unión* de A y B la notación es la estándar, esto es, $A \cap B$ y $A \cup B$, respectivamente. Finalmente para la *diferencia* de A y B, es decir, el conjunto de elementos que están en A y no en B, ocupamos la notación $A \backslash B$. Dada una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos, la intersección y unión de los conjuntos de $\mathcal{A}$ los denotamos por $\bigcap \mathcal{A}$ y $\bigcup \mathcal{A}$, respectivamente.

Cuando usamos ciertos conjuntos específicos tenemos las siguientes notaciones. Para el *conjunto vacío* usamos la notación $\varnothing$. Al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto arbitrario A lo llamamos *conjunto potencia* de A y es denotado por 2^A. Denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, $\mathbb{N}$ al conjunto de los enteros positivos (llamados números *naturales*) y a $\mathbb{C}$ como el conjunto de los números complejos.

Para tener una base sólida en teoría de conjuntos es necesario contar con nociones sobre cardinalidad. Dado que este tema se presta a ambigüedades en las matemáticas, nosotros entendemos como la *cardinalidad* de un conjunto A al «número de elementos en A» y lo denotamos por $|A|$. Si $|A| = |\mathbb{N}|$ decimos que A es *numerable*.

Las funciones son esenciales para la teoría de conjuntos. Estas relacionan dos conjuntos arbitrarios A y B, en donde a cada elemento de A se le asocia un único elemento de B. Las ocupamos regularmente a lo largo de varias demostraciones, por lo que al momento de hacer mención de una de éstas usamos la notación $f : A \to B$, donde A y B se conocen como el *dominio* y *contradominio* de f, respectivamente. En algunas ocasiones, también las mencionamos como f que va de A a B.

Dada una función $f : A \to B$ y dos subconjuntos $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, definimos y denotamos la *imagen* de C bajo f y la *preimagen* de D bajo f, respectivamente, como

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\},$$
$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Decimos que una función f es *inyectiva* si para cualquier par de elementos a y b en el dominio de f tales que $a \neq b$ se cumple que $f(a) \neq f(b)$. Decimos que f es *sobreyectiva* si para cualquier elemento b en el contradominio de f existe un elemento a en el dominio de f tal que $f(a) = b$. Si f es inyectiva y sobreyectiva la llamamos *biyectiva*.

Dada una función $f : A \to B$ y un subconjunto $C \subseteq A$, denotamos y definimos la función f *restringida a* C como $f|_C : C \to B$ tal que $f|_C(x) = f(x)$, para todo $x \in C$.

Cuando tenemos dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la *composición* de f y g se denota y define como la función $g \circ f : A \to C$ dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, para todo $a \in A$. Esta composición se puede representar mediante el diagrama 1.1.

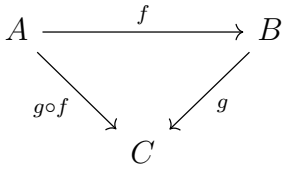


Diagrama 1.1: Composición de funciones.

Dentro del análisis de distintos teoremas nos veremos en la necesidad de usar frecuentemente la PIF, por lo que la definimos aquí.

Definición 1.1.1. Decimos que una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad de intersección finita* (PIF) si para cada subfamilia finita y no vacía de $\mathcal{F}$, la intersección de sus elementos es no vacía.

1.2 Conceptos básicos de topología general

Ya que el tema principal de la tesis se aborda en el contexto y dentro del área de topología general, es necesario añadir esta sección, de conceptos básicos de topología general. Aquí se abarcan conceptos fundamentales y resultados clásicos dentro de la topología general. Todos estos pueden ser encontrados en libros de topología, aunque los que recomendamos son [Eng89] y [Wil04]. Consideramos que estos temas forman parte de dos cursos básicos de topología general para licenciatura. Lo usual es que el lector que tomó un curso básico de topología general de licenciatura se le hagan familiares los temas que aquí exponemos, por lo que quizás pueda realizar una lectura rápida y dirigirse al siguiente capítulo de la tesis. Gran parte de las demostraciones de estas propiedades topológicas que exponemos se encuentran en los libros antes mencionados, pero incluimos algunas con el objetivo de que el lector entienda el por qué de algunos resultados y se relacione con estos conceptos y con los temas de las secciones y capítulos posteriores.

Definición 1.2.1. Dado un conjunto no vacío X y una familia τ de subconjuntos de X, decimos que τ es una *topología* sobre X cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\varnothing \in \tau$ y $X \in \tau$;

b) si $U \in \tau$ y $V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$;

c) si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Si τ es una topología sobre X, entonces decimos que el par (X, τ) es un *espacio topológico*.

Cuando no existe confusión, el adjetivo se lo asociamos a X, es decir, si decimos «X espacio topológico» implícitamente estamos pensando que hay una topología τ sobre X. También, asociamos un nombre particular a los elementos de la topología τ como vemos a continuación:

Definición 1.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $U \in \tau$, decimos que U es un *subconjunto abierto* de X en la topología τ o simplemente que U es un *abierto* de X.

El concepto de topología se puede comprender de manera más sencilla mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.3. Para un conjunto no vacío X, no es difícil verificar que los siguientes conjuntos son topologías sobre X:

i) La *topología trivial* es $\tau_{\text{ind}} = \{X, \varnothing\}$, en la literatura también la solemos encontrar como la *topología indiscreta*.

ii) La *topología discreta* es $\tau_{\text{dis}} = 2^X$.

iii) La *topología cofinita* es $\tau_{\text{cof}} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$.

Usualmente, antes de estudiar espacios topológicos se conocen los espacios métricos, estos suelen ser de gran ayuda para familiarizarnos con conceptos topológicos. Recordemos su definición y veamos que también pueden generar un espacio topológico.

Definición 1.2.4. Un *espacio métrico* es un par ordenado (M, ρ) que consiste de un conjunto M y una función $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisface que para todo $x, y, z \in M$:

a) $\rho(x, y) \geq 0$,

b) $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,

c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

d) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

La función ρ se llama *métrica* de M.

Mediante el siguiente ejemplo vemos cómo asociar un espacio topológico a un espacio métrico.

Ejemplo 1.2.5. Sea (M, ρ) un espacio métrico. Se puede demostrar que la colección de conjuntos abiertos (entendidos en el contexto de espacios métricos) en M definidos por la métrica ρ forman una topología en M, la cual se llama *topología métrica* τ_ρ o la *topología generada por la métrica* ρ.
En el ejemplo 1.1.6 de [DC05] se demuestra de manera detalla que efectivamente, ésta es una topología.

Observación 1.2.6. Para $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$), a la topología generada por la métrica Euclideana le llamamos *la topología usual de* $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$).

Cuando se tiene un espacio topológico X, es natural preguntarse si cualquier subconjunto tiene asociado, de manera natural, una estructura del mismo tipo, es decir, si es un espacio topológico.

Definición 1.2.7. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, la colección

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

es una topología para A y se llama *topología de subespacio o heredada* para A.

Es necesario mencionar que las propiedades que tenga X no necesariamente las heredarán sus subconjuntos, pero las que sí, son de suma importancia para temas posteriores y por lo tanto demostramos las de mayor relevancia.

Para aligerar el manejo de los conjuntos abiertos de una topología se suele trabajar únicamente con los abiertos que forman esencialmente la topología.

Definición 1.2.8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subfamilia $\mathcal{B}$ de τ *es una base para* τ si para cada $x \in X$ y para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Si $\mathcal{B}$ es una base para τ, a sus elementos les denominamos *conjuntos básicos de la topología* τ.

Observación 1.2.9. Dentro de la sección 1.1 de [Eng89] se menciona que una subfamilia $\mathcal{B}$ de τ es una base para τ si y solo si todo abierto no vacío de X es la unión de alguna subfamilia de $\mathcal{B}$. Por lo que usamos una u otra definición dependiendo de la facilidad para trabajar con una en lugar de otra.

Para un mejor entendimiento de las bases tengamos en cuenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.10. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, la colección de intervalos abiertos (a, b) con $a < b$ forman una base para la topología usual en $\mathbb{R}$. Siguiendo la idea, esto se puede generalizar para $\mathbb{R}^n$.
En general, si X es un espacio métrico, la colección de bolas abiertas de X forman una base para la topología de X inducida por su métrica respectiva.

Para cualquier conjunto no vacío X, es evidente que una familia de subconjuntos de X no siempre será una base de alguna topología. El siguiente resultado, obtenido del teorema 5.3 de [Wil04], nos muestra cómo «generar» una base a partir de ciertas condiciones dadas.

Teorema 1.2.11. Si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X tal que:

a) $X = \bigcup \mathcal{B}$;

b) para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

entonces existe una topología τ sobre X tal que $\mathcal{B}$ es una base para τ.

Gracias al teorema 1.2.11 tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.12. Sean X es un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{B}$ es *base para alguna topología sobre* X, si se cumplen las condiciones *a*) y *b*) del teorema 1.2.11. A la topología garantizada por el teorema 1.2.11 le llamamos *la topología generada por la base* $\mathcal{B}$.

En topología hay nociones globales y locales definidas en algún espacio topológico. Las globales nos permiten hablar de manera general sobre el comportamiento del espacio total, y las nociones locales, nos permiten restringir el estudio a lo que pasa alrededor de un punto específico del espacio. Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.2.13. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto N de X que contiene a x es una *vecindad de* x si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subseteq N$. A la familia de vecindades de x la denotamos por $\mathcal{N}(x)$. Dada $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$, decimos que $\mathcal{B}$ es *una base local para* x (*o una base para* $\mathcal{N}(x)$) si para cada $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq N$.

Más adelante vemos que múltiples conceptos y resultados alrededor de la topología suelen estar relacionados con los conjuntos abiertos. Varios de tales conceptos están dados en términos de conjuntos básicos o vecindades, en lugar de abiertos; su empleo dependerá de la «facilidad» que se tenga de trabajar con un conjunto en lugar de otro. Por otro lado, en ocasiones trabajar con los elementos de una topología no resulta sencillo, una manera alterna de hacerlo es recurrir a los complementos de los elementos de una topología.

Definición 1.2.14. Sean X un espacio topológico y $F \subseteq X$. Decimos que F es un *subconjunto cerrado* de X con respecto a τ si $X \backslash F$ es un subconjunto abierto de X.

Siguiendo la esencia de la topología de subespacio tengamos en cuenta lo siguiente.

Proposición 1.2.15. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Cualquier subconjunto cerrado de A es de la forma $F \cap A$, donde F es un subconjunto cerrado de X.

Un concepto que es ampliamente usado en el área de topología es la clausura, una manera de definirla es la siguiente.

Definición 1.2.16. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. La *clausura* (o *cerradura*) de E es el conjunto

$$\overline{E} = \{x \in X \mid U \cap E \neq \varnothing, \text{ para cada } U \in \mathcal{N}(x)\}.$$

Además, si $\overline{E} = X$, entonces decimos que E es *denso* en X.

Teniendo en cuenta los conceptos de clausura y subespacio, podemos presentar el siguiente ejemplo. Su importancia en el área de topología radica en su uso como ejemplo de distintas propiedades topológicas.

Ejemplo 1.2.17. La *curva del topólogo* (vea el diagrama 1.2) se define como la clausura en $\mathbb{R}^2$ del conjunto $\{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\}$, por lo que consiste del siguiente conjunto:

$$\{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}.$$

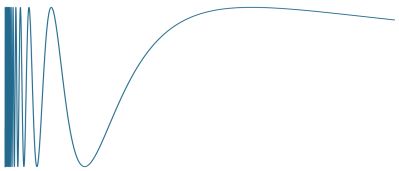


Diagrama 1.2: Curva del topólogo.

También consideramos prudente introducir el siguiente ejemplo, que es de gran importancia para el capítulo de aplicaciones de límites inversos.

Ejemplo 1.2.18. La *doble curva del topólogo* (vea el diagrama 1.3) se define como la clausura en $\mathbb{R}^2$ del siguiente conjunto:

$$\left\{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\right\} \cup \{(x + 2, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{|x|})) \mid x \in [-1, 0)\}.$$

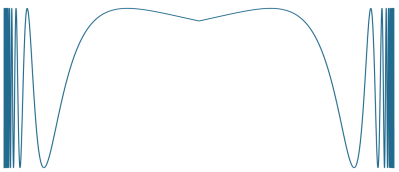


Diagrama 1.3: Doble curva del topólogo.

Toca ahora introducir los conceptos relacionados con continuidad en espacios topológicos.

Definición 1.2.19. Sean X y Y dos espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ y $x \in X$. Tenemos que f es continua en x si y solo si para cualquier subconjunto abierto V de Y con $f(x) \in V$, existe un subconjunto abierto U de X con $x \in U$ tal que $f(U) \subseteq V$.

Como mencionamos anteriormente, en ocasiones, hablamos de nociones locales o globales. En este sentido, con la continuidad también se puede describir de una forma global.

Definición 1.2.20. Sean X y Y dos espacios topológicos y una función $f : X \to Y$. Decimos que f es *continua* en X si para todo subconjunto abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto en X.

De este modo que f sea continua en X coincide con que f sea continua en todo $x \in X$.

Observación 1.2.21. Tanto la definición 1.2.19, como la definición 1.2.20 son establecidas a partir de subconjuntos abiertos; sin embargo, estos conceptos los podemos encontrar en términos de subconjuntos abiertos básicos o vecindades. El uso de uno u otro concepto es indistinto y depende únicamente de la «facilidad» con la que se pueda demostrar algún resultado. Por ejemplo, veremos en la sección de la topología producto, que los subconjuntos básicos resultan más sencillos de trabajar.

El siguiente teorema nos ayuda a demostrar de manera más sencilla la continuidad de funciones específicas. Dicho resultado lo podemos encontrar en la sección 1.4 de [Eng89].

Teorema 1.2.22. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Se cumple que las funciones $|f| : X \to \mathbb{R}$, $f + g : X \to \mathbb{R}$ y $\text{mín}\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ son continuas.

Observación 1.2.23. El teorema 1.2.22 se puede extender para una cantidad finita de funciones continuas.

Además de la continuidad, las funciones poseen otras propiedades. Algunas de éstas son de gran utilidad en secciones posteriores.

Definición 1.2.24. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es una función *abierta (cerrada)* si para cada subconjunto abierto (cerrado) A de X, $f(A)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de Y.

Cuando se trabaja con espacios topológicos específicos, algunos suelen ser «relativamente» complicados para manipular, por lo que es necesario trasladarnos a espacios más conocidos o menos complicados. Las siguientes definiciones son de gran ayuda en estos casos, pues nos permiten trabajar en espacios más conocidos con la seguridad de que las propiedades de un espacio las comparte el otro.

Definición 1.2.25. Sean X, Y dos espacios topológicos y $h : X \to Y$ una función. Decimos que h es un *homeomorfismo* de X a Y si h es continua, biyectiva y h^{-1} es continua. De esta manera decimos que X es *homeomorfo* a Y si existe un homeomorfismo de X a Y y lo representamos como $X \cong Y$.

Los siguientes ejemplos sobre espacios homeomorfos fueron tomados de [DC05].

Ejemplo 1.2.26.

i) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual (vea el ejemplo 1.2.10). Si $a < b$ y $c < d$, entonces la función $h(x) = c + \frac{(d-c)(x-a)}{b-a}$ hace que $[a, b] \cong [c, d]$ y $(a, b) \cong (c, d)$.

ii) Con la topología usual, $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto (a, b).

iii) Tomando a $\mathbb{S}^1$ como el círculo unitario, un ejemplo de una función que no es homeomorfismo es la función $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $exp(t) = e^{2\pi it}$ (con las topologías usuales), puesto que no es inyectiva.

iv) Sean X un conjunto con más de un punto, $X_1 = X$ con la topología discreta y $X_2 = X$ con la topología indiscreta. La función $f : X_1 \to X_2$ dada por $f(x) = x$, para cada $x \in X_1$, es es continua y biyectiva pero su inversa no es continua. Por lo que f no es homeomorfismo.

Ya que introducimos los homeomorfismos, podemos incluir las siguientes definiciones.

Definición 1.2.27. Sea X un espacio topológico.

i) Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ de X es una *propiedad topológica de* X si cualquier espacio homeomorfo a X cumple $\mathcal{P}$.

ii) Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ de X es *hereditaria*, si todos sus subespacios cumplen $\mathcal{P}$.

Como mencionamos anteriormente, dos espacios homeomorfos comparten las mismas propiedades topológicas. Bajo este concepto, incluso es posible relacionar más de dos espacios.

Teorema 1.2.28. La relación $\cong$ es de *equivalencia*. Es decir, dados X, Y y Z espacios topológicos,

a) $X \cong X$;

b) si $X \cong Y$, entonces $Y \cong X$; y

c) si $X \cong Y$ y $Y \cong Z$, entonces $X \cong Z$.

Teniendo en cuenta el ejemplo 1.2.18 de la doble curva del topólogo podemos construir el siguiente.

Ejemplo 1.2.29. El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es homeomorfo al conjunto

$$\{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(x+2, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{|x|})) \mid x \in [-1,0)\}.$$

Para la construcción del homeomorfismo dividimos el conjunto en dos partes.
Primero podemos aplicar un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $[-1,0)$. Después definir la función $h_1 : [-1,0) \to \{(x+2, \operatorname{sen}(\frac{1}{|x|})) \mid x \in [-1,0)\}$ dada por

$$h_1(y) = (y+2, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{|y|})),$$

para todo $y \in [-1,0)$. No es difícil probar que h_1 es un homeomorfismo. De esta manera $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es homeomorfo a $\{(x+2, \operatorname{sen}(\frac{1}{|x|})) \mid x \in [-1,0)\}$.
Similarmente, para la otra parte aplicar un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $(0,1]$. Definir la función $h_2 : (0,1] \to \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\}$, dada por

$$h_2(y) = (y, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{y})),$$

para todo $y \in (0,1]$. De manera sencilla se demuestra que h_2 es un homeomorfismo.
Para una mejor comprensión del homeomorfismo podemos apoyarnos del diagrama 1.4.

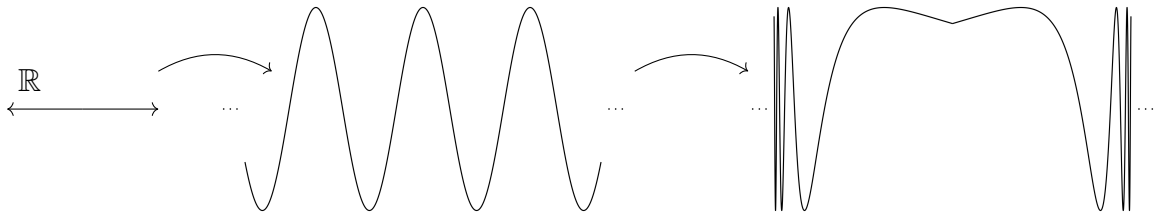


Diagrama 1.4: Homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(x+2, \operatorname{sen}(\frac{1}{|x|})) \mid x \in [-1,0)\}$.

En topología, un espacio puede satisfacer distintas propiedades, muchas de ellas involucran a sus elementos y el cómo separarlos por medio de conjuntos abiertos. Este tipo de propiedades se les denomina *axiomas de separación (separabilidad)* y son las siguientes.

Definición 1.2.30. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es:

1) T_0, si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $|U \cap \{x_1, x_2\}| = 1$.

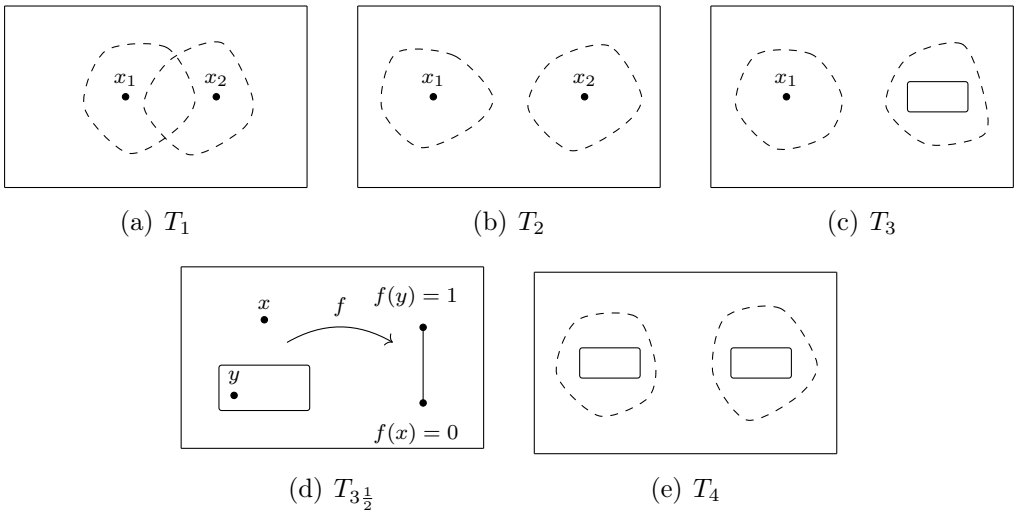
2) T_1, si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$. Observemos que también existe un subconjunto abierto V de X tal que $x_2 \in V$ y $x_1 \notin V$ (vea el diagrama 1.5(a)).

3) T_2 (*o espacio de Hausdorff*), si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen dos subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ (vea el diagrama 1.5(b)).

4) T_3 (*o espacio regular*), si X es T_1 y si cumple que para todo $x \in X$ y para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen dos subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $x \in U_1$, $F \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ (vea el diagrama 1.5(c)).

5) $T_{3\frac{1}{2}}$ (*completamente regular o espacio de Tychonoff*), si X es T_1 y para cada $x \in X$ y para cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para cada $y \in F$ (vea el diagrama 1.5(d)).

6) T_4 (*o espacio normal*), si X es T_1 y para cada par de subconjuntos cerrados F y G de X con $F \cap G = \varnothing$, existen dos subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $F \subseteq U_1$, $G \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ (vea el diagrama 1.5(e)).



(a) T_1 (b) T_2 (c) T_3

(d) $T_{3\frac{1}{2}}$ (e) T_4

Diagrama 1.5: Representación de los axiomas de separabilidad.

Ejemplo 1.2.31. Los espacios métricos son ejemplos de espacios topológicos que cumplen todos los axiomas de separación indicados en la definición 1.2.30.
Además, no es difícil verificar que se cumple el siguiente diagrama de implicaciones:

$$T_4 \to T_{3\frac{1}{2}} \to T_3 \to T_2 \to T_1 \to T_0.$$

Sin embargo, los recíprocos de las implicaciones del diagrama no necesariamente son ciertos, es relativamente fácil construir ejemplos para ver que T_0 no implica T_1 y para otras implicaciones como T_1 no implica T_2 o T_3 no implica T_4 hay una vasta gama de ejemplos en la literatura, algunos de los cuales se encuentran en [Eng89].

Ahora, veamos que ser T_i es posible heredarlo a todo subespacio.

Teorema 1.2.32. Sea X un espacio topológico. Dado $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, si X es T_i, entonces cualquier subespacio de X es T_i.

Demostración. Sea $A \subseteq X$.

1) Supongamos que X es T_0. Sean $x, y \in A$, con $x \neq y$. Tenemos que $x, y \in X$, por lo que existe un subconjunto abierto U de X tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Ya que $\{x, y\} \subseteq A$ y $(U \cap A) \cap \{x, y\} \subseteq U \cap \{x, y\}$, se sigue que $|(U \cap A) \cap \{x, y\}| = 1$, así A es T_0.

2) Supongamos que X es T_1. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$. Tenemos que $x, y \in X$, por lo que existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$. En consecuencia $x \in U \cap A$ y $y \notin U \cap A$. Así A es T_1.

3) Supongamos que X es T_2. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$. Tenemos que $x, y \in X$, por lo que existen dos subconjuntos abiertos U y V de X, tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. En consecuencia $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \varnothing$, además de que $x \in U \cap A$ y $y \in V \cap A$. Por lo tanto,, A es T_2.

4) Supongamos que X es T_3. Sean $x \in A$ y F un subconjunto cerrado de A tales que $x \notin F$. Dado que F es un subconjunto cerrado de A, existe un subconjunto cerrado G de X tal que $F = G \cap A$. Como $x \notin G \cap A$, tenemos que $x \notin G$ o $x \notin A$, pero $x \in A$, por lo que $x \notin G$. Ya que X es T_3 existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $G \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$. Ahora, tenemos que $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \varnothing$ y que $x \in U \cap A$ y $F \subseteq V \cap A$. Por lo tanto, x es T_3.

5) Supongamos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Tenemos que A es T_1, sean $x \in A$ y F un subconjunto cerrado de A tales que $x \notin F$. De manera similar al inciso 4) existe un subconjunto cerrado G de X tal que $F = G \cap A$, por lo que $x \notin G$. Por lo que existe $f : X \to [0, 1]$ continua en X tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para todo $y \in G$. Notemos que la función $g = f|_A$ es continua en A y se cumple $g(x) = 0$ y $g(y) = 1$, para todo $y \in F$. Por lo tanto, A es $T_{3\frac{1}{2}}$. □

Teorema 1.2.33. Sea X un espacio topológico. Si X es T_4, entonces cualquier subespacio cerrado de X es T_4.

Demostración. Supongamos que X es T_4 y tomemos un subespacio cerrado A de X. Para ver que A es T_4 tomemos dos subconjuntos cerrados B y C de A tales que $B \cap C = \varnothing$. Esto quiere decir que existen dos subconjuntos cerrados F y G de X tales que $B = F \cap A$ y $C = G \cap A$. Como F, G y A son subconjuntos cerrados de X, tenemos que B y C también son subconjuntos cerrados de X, por lo que existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que $B \subseteq U$, $C \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por la construcción de B y C tenemos que $B \subseteq U \cap A$ y $C \subseteq V \cap A$, además de que $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \varnothing$. Por lo tanto, A es T_4. □

Dentro de las propiedades topológicas clásicas se encuentran los denominados axiomas de numerabilidad, estos contemplan la noción de base y su cardinalidad.

Definición 1.2.34. Sea X un espacio topológico, decimos que X es:

i) *Primero numerable*, si para cada $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ admite una base numerable.

ii) *Segundo numerable*, si τ admite una base numerable.

Ejemplo 1.2.35. Los espacios métricos son ejemplo de espacios topológicos que son primero numerable. De hecho, el espacio de los números reales también es segundo numerable.

Los axiomas de numerabilidad también se pueden heredar. El siguiente teorema es la formalización de esta afirmación.

Teorema 1.2.36. Sea X un espacio topológico. Si X es primero (segundo) numerable, cualquier subespacio de X también lo es.

Demostración. Las demostraciones para primero y segundo numerable son similares, por lo tanto solo hacemos la demostración para primero numerable.
Supongamos que X es primero numerable y sea $A \subseteq X$. Tomemos $x \in A$, como $x \in X$ existe un base numerable $\mathcal{B}$ para $\mathcal{N}(x)$. Definamos el conjunto $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$. Tenemos que $\mathcal{B}_A$ es numerable. Además, si tomamos $N \in \mathcal{N}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq N$. De esta manera $B \cap A \subseteq N \cap A$. Por lo tanto $\mathcal{B}_A$ es una base numerable para $\mathcal{N}_A(x)$. □

Como se ha visto, la topología busca generalizar diferentes conceptos de las matemáticas. Este es el caso de la compacidad, que lo que busca es generalizar el concepto de conjunto cerrado y acotado. Además, la compacidad no solo es importante en la topología general, puesto que también se ocupa en teoremas de análisis clásico como base para sus pruebas.

Definición 1.2.37. Sea X un espacio topológico. Dados $A \subseteq X$ y una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ de X, decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta de A en X* si $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Decimos que X es un *espacio compacto* si cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X admite una familia finita $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ (también llamada *subcubierta finita*) tal que $X = \bigcup \mathcal{A}$. Para $A \subseteq X$, decimos que A es un subespacio compacto de X, si A es compacto con la topología de subespacio.

Para demostrar que un subespacio es compacto podemos apoyarnos de la siguiente proposición. Este resultado lo podemos encontrar en la proposición 7.3 de [DC05].

Proposición 1.2.38. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Tenemos que A es un subespacio compacto de X si y solo si para toda cubierta abierta de A en X, se cumple que A está contenido en una subcubierta finita.

La siguiente equivalencia nos presenta una forma distinta de corroborar si un espacio es compacto (recuerde la definición 1.1.1).

Teorema 1.2.39. Sea X un espacio topológico. Tenemos que X es compacto si y solo si cada familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto y tomemos una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$. Para cada $i \in I$, consideremos los abiertos $U_i = X \backslash F_i$. Notemos que:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} (X\backslash F_i) = X \backslash \bigcap_{i\in I} F_i = X,$$

así, la familia $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para X. Dado que X es compacto, existe una subcubierta finita $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} (X\backslash F_i) = X \backslash \bigcap_{i=1}^{k} F_i,$$

lo que implica que $\bigcap_{i=1}^{k} F_i = \varnothing$. Esto contradice la propiedad de intersección finita, por lo que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.
$\Leftarrow$] Ahora supongamos que toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Contrario a lo que deseamos demostrar, supongamos que X no es compacto. Luego, existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ para X tal que para toda subfamilia finita $\mathcal{U}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$ se cumple que $X \backslash \bigcup \mathcal{U} \neq \varnothing$. Para cada

$i \in I$, definamos los subconjuntos cerrados $F_i = X \backslash U_i$. Donde, cualquier subfamilia finita $\{F_i\}_{i\in F}$ de $\{F_i\}_{i\in I}$ cumple que

$$\varnothing \neq X \backslash \bigcup_{i\in F} U_i = \bigcap_{i\in F} F_i.$$

Así, $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por hipótesis se tiene que

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing.$$

Sin embargo, dado que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para X, tenemos que

$$\varnothing = X \backslash \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} (X \backslash U_i) = \bigcap_{i\in I} F_i.$$

Lo cual es una contradicción. Por lo que concluimos que X es compacto. □

Cuando un espacio topológico es compacto, es natural preguntarse si los subespacios de X son compactos. La respuesta corta es no, sin embargo, el teorema 1.2.40 nos da las condiciones suficientes para que un subespacio pueda heredar la compacidad.

Teorema 1.2.40. Si X es un espacio topológico compacto, entonces todo subespacio cerrado de X es compacto.

Demostración. Sea F un subespacio cerrado de X. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de F en X. Notemos que $\mathcal{U} \cup (X \backslash F)$ es una cubierta abierta para X, por lo que existe una subcubierta finita para X, digamos $\{U_1, \ldots, U_n, X \backslash F\}$. De esta manera $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es ahora una subcubierta finita para F en X. Por lo tanto, F es compacto en X. □

El siguiente resultado fue tomado del teorema 265 de [IM12]. Lo citamos aquí, puesto que ayuda a aligerar la demostración de algunos teoremas.

Teorema 1.2.41. Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces todo subespacio compacto es cerrado.

Cuando nos encontramos en $\mathbb{R}$, demostrar la compacidad resulta más sencillo. Prueba de ello es el teorema 1.2.42, cuya demostración la podemos encontrar en el ejemplo 17.9 de [Wil04].

Teorema 1.2.42. Considerando $\mathbb{R}$ con la topología usual, tenemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Podemos notar que el teorema 1.2.42 es un caso particular del teorema de Heine-Borel, al ser un teorema bastante conocido se puede consultar en la mayoría de libros de análisis matemático.

Cuando tenemos dos espacios topológicos, si se sabe que uno es compacto, y si hay una función continua y sobreyectiva entre ellos con dominio el espacio compacto, el otro espacio también será compacto. Esto lo establece el siguiente resultado.

Teorema 1.2.43. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración. Supongamos que X es compacto. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para $f(X)$. Como f es continua, por la definición 1.2.20, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X, para todo $U \in \mathcal{U}$. Además, $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} f^{-1}(U)$. Por lo que $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta para X. Por compacidad de X, existe una subcubierta finita para X, digamos $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$. De esta manera, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una cubierta finita para $f(X)$. Por lo tanto, $f(X)$ es compacto. □

Teniendo en cuenta la compacidad, el siguiente teorema nos muestra de qué manera una función es un homeomorfismo bajo ciertas hipótesis. La demostración la podemos encontrar en el teorema 17.14 de [Wil04]. Este resultado será importante para demostraciones posteriores.

Teorema 1.2.44. Sean X y Y dos espacios topológicos tales que X es un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Por otro lado, recordemos que la idea básica de la conexidad es saber si un conjunto está «separado en al menos dos partes». Como suele pasar en la topología, estas ideas se suelen formular mediante una propiedad topológica descrita con subconjuntos abiertos.

Definición 1.2.45. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *disconexo* si existen dos subconjuntos abiertos U y V de X, diferentes del vacío, tales que $U \cap V = \varnothing$ y $X = U \cup V$. Decimos que X es *conexo* si no es disconexo. Para $A \subseteq X$, decimos que A es un subconjunto conexo de X si A es conexo con la topología de subespacio.

Para la conexidad de los subespacios podemos usar la siguiente equivalencia.

Proposición 1.2.46. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Tenemos que A es un subespacio disconexo de X si y solo si existen dos subconjuntos abiertos U y V de X, diferentes del vacío, tales que $U \cap V \cap A = \varnothing$ y $A \subseteq U \cup V$.

Hemos escogido algunos ejemplos de espacios conexos en [DC05]. La finalidad de esto es mostrar la idea intuitiva dentro de esta definición.

Ejemplo 1.2.47.

i) Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$. Notemos que X y $\varnothing$ son los únicos subconjuntos abiertos con intersección vacía cuya unión es X. De esta manera X es conexo.

ii) Todo espacio con la topología indiscreta es conexo.

iii) Todo espacio con más de un elemento con la topología discreta es disconexo.

iv) Se puede demostrar que la curva del topólogo (vea el ejemplo 1.2.17) con la topología usual en $\mathbb{R}^2$ es conexo.

Como sucedió con la compacidad, tenemos un resultado que involucra funciones continuas.

Proposición 1.2.48. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Si M es un subespacio conexo de X, entonces $f(M)$ es un subespacio conexo de Y.

Demostración. Sea M un subespacio conexo de X. Supongamos que $f(M)$ es un subespacio disconexo de Y. Luego, existen dos subconjuntos abiertos V_1 y V_2 de Y diferentes de vacío tales que $V_1 \cap V_2 \cap f(M) = \varnothing$ y $f(M) \subseteq V_1 \cup V_2$. Dado que f es continua tenemos que $f^{-1}(V_1)$ y $f^{-1}(V_2)$ son subconjuntos abiertos de X y diferentes del vacío. No es difícil comprobar que $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap M = \varnothing$ y $M \subseteq f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$, lo cual contradice la hipótesis de que M es conexo. Por lo tanto $f(M)$ es un subespacio conexo en Y. □

Ya que el tema de conexidad suele ser extenso, la siguiente proposición tiene como objetivo mostrar resultados que ocupamos posteriormente en el desarrollo del trabajo de tesis. Dichos resultados fueron tomados del capítulo 6 de [Eng89], en donde se puede consultar su demostración.

Proposición 1.2.49. Sea X un espacio topológico. Se cumple que:

i) Si $\mathcal{A}$ es una familia de subespacios conexos de X tal que $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subespacio conexo de X.

ii) Si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $A \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in A$, entonces X es conexo.

iii) Si X contiene un subespacio denso y conexo, entonces X es conexo.

Como vimos en el ejemplo 1.2.5, dado un espacio métrico (recordemos la definición 1.2.4), se le puede asociar una topología. A partir de este ejemplo podemos definir una nueva propiedad que nos relacione los espacios topológicos y los métricos.

Definición 1.2.50. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es *metrizable* si existe una métrica $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ para X tal que τ coincide con τ_ρ.

El siguiente resultado nos asegura que la metrizabilidad es una propiedad que se puede heredar a subespacios.

Teorema 1.2.51. Sea X un espacio topológico. Si X es metrizable, entonces cualquier subespacio de X también lo es.

Demostración. Tomando $A \subseteq X$ y $\rho|_A$, podemos verificar que τ_A coincide con la topología métrica $\tau_{\rho|_A}$. □

Terminamos esta sección con una definición que empleamos en las aplicaciones de límites inversos.

Definición 1.2.52. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un *continuo* si éste es un espacio conexo, compacto y metrizable.

Para mejorar la comprensión de estos espacios podemos destacar los siguientes continuos. Verificar que efectivamente son continuos no es algo complicado.

Ejemplo 1.2.53. Recordemos que los elementos de $\mathbb{C}$ (con la ayuda de la función exponencial compleja [ZS03]) pueden ser representados de la forma $re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r$.

i) El círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ es un continuo.

ii) El *disco unitario* $\mathbb{D}^1 = \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ y } 0 \leq r \leq 1\}$ es un continuo.

iii) El espacio $\{(z_1, z_2) \mid z_1 \in \mathbb{S}^1, z_2 \in \mathbb{D}^1\}$ (conocido como *el toro sólido*) es un continuo.

iv) La curva del topólogo (vea el ejemplo 1.2.17) es un continuo.

Además de estos ejemplos, los siguientes teoremas nos ayudan con la construcción de continuos más complejos, ya sea mediante funciones continuas o la intersección de continuos anidados.

Apoyándonos de los teoremas 1.2.43, 1.2.48 y una consecuencia del teorema de metrización de Urysohn (vea el corolario 23.2 de [Wil04]) obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.54. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es un continuo y Y es de Hausdorff, entonces $f(X)$ es un continuo.

La demostración del siguiente teorema la podemos encontrar en el teorema 6.1.18 y el corolario 6.1.19 de [Eng89].

Teorema 1.2.55. Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia de continuos. Si $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un continuo.

Capítulo 2

Un repaso de la topología producto y los conjuntos dirigidos

2.1 Órdenes parciales y conjuntos dirigidos

Una de las nociones primordiales para entender la topología producto y los límites inversos son los conjuntos dirigidos. Se sabe que mientras las familias sean finitas, los productos son bastante intuitivos de manejar pero para familias infinitas, trabajarlos podría ser complicado.

Definición 2.1.1. Sea Δ un conjunto diferente del conjunto vacío. Definimos un *orden parcial* como una relación binaria $\leq$ sobre Δ que satisface las siguientes condiciones:

a) (Reflexividad) $\lambda \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \Delta$.

b) (Transitividad) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Delta$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.

c) (Anti-simetría) Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_1$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2$.

Al par $(\Delta, \leq)$ se le suele llamar *conjunto parcialmente ordenado*. Si hay necesidad de especificarlo escribimos $\leq_\Delta$, de lo contrario solo $\leq$ entendiendo a qué conjunto nos referimos.

Ahora que definimos el orden parcial podemos hablar de los conjuntos acotados y del orden total.

Definición 2.1.2. Sean $(\Delta, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $M \subseteq \Delta$.

i) Dado $\lambda' \in \Delta$. Decimos que λ' es *cota superior (inferior)* de M si $\lambda \leq \lambda'$ ($\lambda \geq \lambda'$), para todo $\lambda \in M$. Además, si $\lambda' \in M$, decimos que λ' es un *máximo* (*mínimo*).

ii) Dado $\lambda' \in M$. Decimos que λ' es un *maximal (minimal)* de M, si no existe $\lambda \in M$ tal que $\lambda' \leq \lambda$ ($\lambda' \geq \lambda$) y $\lambda' \neq \lambda$.

iii) Si cada par de elementos $\lambda_1, \lambda_2 \in M$ son comparables, es decir, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ o $\lambda_1 \leq \lambda_2$, decimos que M es totalmente ordenado.

Si bien, los conjuntos parcialmente ordenados presentan propiedades de interés, nos falta añadir una condición más para que su uso sea dentro de los límites inversos.

Definición 2.1.3. Sea Δ un conjunto no vacío. Decimos que Δ es un *conjunto dirigido* si hay una relación binaria $\leq$ en Δ que satisface las condiciones de un orden parcial y además:

d) (Dirección) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta$, entonces existe algún $\lambda_3 \in \Delta$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Algunos ejemplos de conjuntos dirigidos son los siguientes.

Ejemplo 2.1.4.

i) El conjunto de los números naturales con el orden usual de $\mathbb{R}$ es un conjunto dirigido.

ii) Si X es un conjunto no vacío, entonces 2^X es un conjunto dirigido con el orden de la contención de conjuntos ($\subseteq$).

iii) Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $\mathcal{N}(x)$ es un conjunto dirigido con el orden de la contención. Además, si definimos en $\mathcal{N}(x)$: $N_1 \leq N_2$ si y solo si $N_2 \subseteq N_1$, entonces $\mathcal{N}(x)$ es un conjunto dirigido con este orden, llamado *orden de contención inversa*.

A partir de la condición de dirección en un conjunto dirigido obtenemos de manera casi inmediata el siguiente resultado.

Proposición 2.1.5. Si Δ es un conjunto dirigido y F un subconjunto finito de Δ, existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda \leq \lambda'$, para todo $\lambda \in F$.

Demostración. Sean Δ un conjunto dirigido y F un subconjunto finito de Δ. Podemos ver a F como $F = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Tomemos $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, por definición de conjunto dirigido existe $\beta_1 \in \Delta$ tal que $\lambda_1, \lambda_2 \leq \beta_1$. Aplicando nuevamente la definición para λ_3 y β_1, existe $\beta_2 \in \Delta$ tal que $\lambda_3, \beta_1 \leq \beta_2$. Por transitividad del conjunto dirigido, tenemos que $\lambda_1, \lambda_2 \leq \beta_2$. Aplicando esta idea de manera inductiva llegamos a que existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq \lambda'$. □

Teniendo en cuenta los ordenes parciales es prudente incluir un lema bastante famoso (que es equivalente al Axioma de Elección), el cual es de gran ayuda en capítulos posteriores. Para un estudio más profundo del lema de Zorn y el Axioma de Elección el lector puede consultar [HR98]. Recordemos que una *cadena* es un conjunto totalmente ordenado.

Lema 2.1.6. Lema de Zorn. Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior (inferior) contiene al menos un elemento maximal (minimal).

Se sabe que en espacios métricos, la sucesiones juegan un papel muy importante en el estudio de la noción de convergencia y los conceptos asociados a ella, por ejemplo la continuidad. Cuando se tienen espacios topológicos arbitrarios que no necesariamente tienen una estructura similar a los espacios métricos, las sucesiones ya no tienen el poder suficiente para demostrar algunas propiedades relacionadas a convergencia (o el producto topológico). Es en este contexto donde los conjuntos dirigidos ayudan a crear una definición que se desprende de la idea de sucesiones y que permite llevar el estudio de la convergencia a espacios arbitrarios.

Definición 2.1.7. Una *red* en un conjunto X es una función $P : \Delta \to X$, donde Δ es algún conjunto dirigido.

Si P es una red en un conjunto X y $\lambda \in \Delta$, el punto $P(\lambda)$ usualmente se denota por x_λ. Hacemos mención de «la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$» sin hacer mención explícita de la función P y del conjunto dirigido Δ, a menos que sea requerido.

Observación 2.1.8. Cuando se tienen dos conjuntos X y Y y una red $P : \Delta \to X \times Y$, donde Δ es algún conjunto dirigido, a esta red la denotamos por $\{x_\lambda, y_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$.

Otras definiciones importantes alrededor de las redes son las siguientes.

Definición 2.1.9. Sean X un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una red en X.

i) Para cualquier $E \subseteq X$, decimos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ está *residualmente* en E si existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \in \Delta$ con $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $x_\lambda \in E$.

ii) Dado un conjunto dirigido M, una *subred* de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es una composición $P \circ \varphi$, donde $P : \Delta \to X$ es la red que determina a $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ y φ es una función $\varphi : M \to \Delta$ que cumple las siguientes condiciones:

   a) φ es una función creciente,

   b) para cada $\lambda \in \Delta$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$.

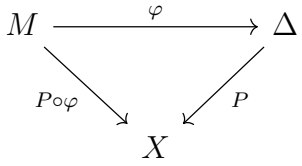


Diagrama 2.1: Representación de una subred.

Para todo $\mu \in M$, el punto $P \circ \varphi(\mu)$ se denota por x_{λ_μ}. De esta forma, decimos que «$\{x_{\lambda_\mu}\}_{\mu \in M}$ es una subred de $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$».

Así, tenemos una noción de convergencia con el mismo espíritu a lo que las sucesiones describen en los espacios métricos.

Definición 2.1.10. Sean Δ un conjunto dirigido y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ una red en un espacio topológico X. Se dice que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ converge a $x \in X$ (indicado por $x_\lambda \to x$), si para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, existe algún $\lambda_0 \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \in \Delta$ con $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $x_\lambda \in U$.

Observación 2.1.11. Aunque la definición 2.1.10 está en términos de vecindades, en la práctica, la condición de convergencia basta verificarla con subconjuntos abiertos o subconjuntos abiertos básicos.

Bajo esta definición es fácil ver que una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ converge a un punto x si está residualmente en todas las vecindades de x.

Algunos ejemplos que engloban los conceptos descritos anteriormente son los que siguen. Estos fueron tomados de [Wil04].

Ejemplo 2.1.12.

i) Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\Delta = \mathcal{N}(x)$ con la relación de contención inversa de conjuntos. Por el inciso *iii*) del ejemplo 2.1.4, tenemos que Δ es un conjunto dirigido. Tomando $x_U \in U$, para cada $U \in \Delta$, obtenemos la red $\{x_U\}_{U \in \Delta}$ en X. Tenemos que $x_U \to x$. En efecto, tomemos $V \in \mathcal{N}(x)$. Para todo $U \geq V$ tenemos que $U \subseteq V$, así $x_U \in V$. Por lo tanto, $x_U \to x$.

ii) Tomando el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como un conjunto dirigido con el orden usual, toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una red. Para determinar si esta red converge o no, utilizamos la definición usual de la convergencia de sucesiones, pues en este caso ambas nociones de convergencia coinciden.

Algunos resultados clásicos alrededor de las sucesiones en $\mathbb{R}$ las podemos generalizar para las redes. A continuación mostramos una selección de estos, los cuales ocupamos para teoremas posteriores en la tesis.

Teorema 2.1.13. Sean X un espacio topológico, E un subconjunto de X y $x \in X$. Tenemos que $x \in \overline{E}$ si y solo si existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ contenida en E tal que $x_\lambda \to x$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $x \in \overline{E}$. Por definición, para toda vecindad U de x se cumple que $U \cap E \neq \varnothing$. Así, para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ tomemos $x_U \in U \cap E$. Tomando a $\mathcal{N}(x)$ como conjunto dirigido (con la relación de contención inversa) obtenemos la red $\{x_U\}_{U\in\mathcal{N}(x)}$ contenida en E y por el ejemplo 2.1.12 inciso i) tenemos que $x_U \to x$.
$\Leftarrow$] Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una red contenida en E que converge a x. Tomemos $U \in \mathcal{N}(x)$. Por definición de convergencia, existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $x_\lambda \in U$, esto quiere decir que $U \cap E \neq \varnothing$ y por lo tanto $x \in \overline{E}$. □

Corolario 2.1.14. Sean X un espacio topológico y $F \subseteq X$. Tenemos que F es un subconjunto cerrado de X si y solo si cualquier red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ contenida en F que sea convergente, converge a un punto de F.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que F es un subconjunto cerrado de X. Tomemos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ contenida en F que sea convergente, digamos que x es el punto de convergencia. Como F es un subconjunto cerrado, tenemos que $\overline{F} = F$. De esta manera, por el teorema 2.1.13 tenemos que $x \in F$.
$\Leftarrow$] Supongamos que cualquier red contenida en F que sea convergente, lo hace a un elemento en F. Hay que demostrar que $F = \overline{F}$ para ver que F es un subconjunto cerrado de X. La primera contención, $F \subseteq \overline{F}$ siempre se tiene. Ahora tomemos $x \in \overline{F}$. Por el teorema 2.1.13 existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ contenida en F tal que $x_\lambda \to x$. Por la suposición, $x \in F$. Así $F = \overline{F}$. □

Teorema 2.1.15. Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Tenemos que f es continua en $x \in X$ si y solo si para cualquier red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ en X tal que $x_\lambda \to x$ en X, se cumple que $f(x_\lambda) \to f(x)$ en Y.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que f es continua en x. Sean $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una red en X tal que $x_\lambda \to x$ y $V \in \mathcal{N}(f(x))$. Como f es continua tenemos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$ y dado que $x_\lambda \to x$, existe λ_0 tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $x_\lambda \in f^{-1}(V)$. Así, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos que $f(x_\lambda) \in V$, lo que quiere decir que $f(x_\lambda) \to f(x)$.
$\Leftarrow$] Supongamos que para cualquier red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ en X tal que $x_\lambda \to x$, se cumple que $f(x_\lambda) \to f(x)$ y que f no es continua. Por la negación de la definición 1.2.19 existe $V \in \mathcal{N}(f(x))$ tal que para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ existe un elemento $x_U \in U$ que cumple que

$f(x_U) \notin V$. Por el inciso *iii*) del ejemplo 2.1.4 tenemos que $\Delta = \mathcal{N}(x)$ es un conjunto dirigido con la relación de contención inversa. De esta manera $\{x_U\}_{U\in\Delta}$ es una red en X. Por el inciso *i*) del ejemplo 2.1.12 tenemos que $x_U \to x$ y por suposición $f(x_U) \to f(x)$. Como $V \in \mathcal{N}(f(x))$, existe $U' \in \Delta$ tal que para todo $U \geq U'$ se tiene que $f(x_U) \in V$. En particular $f(x_{U'}) \in V$, lo cual es una contradicción, puesto que $f(x_{U'}) \notin V$. Se concluye que f es continua en x. □

Para seguir mostrando más resultados es necesario introducir la definición de ultrared. A diferencia de otras, ésta puede no ser tan conocida e intuitiva.

Definición 2.1.16. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ en un conjunto X es una *ultrared* si para cada subconjunto $E \subseteq X$, $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ está residualmente en E o residualmente en $X\backslash E$.

Teorema 2.1.17. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es una ultrared en X, entonces $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ es una ultrared en Y.

Demostración. Sea $A \subseteq Y$. Tenemos que $f^{-1}(A) = X\backslash f^{-1}(Y\backslash A)$, por lo tanto $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ está residualmente en $f^{-1}(A)$ o en $f^{-1}(Y\backslash A)$. Con esto tenemos que $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ está residualmente en A o en $Y\backslash A$. Se concluye que $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ es una ultrared en Y. □

La siguiente proposición fue incluida para facilitar la demostración de teoremas posteriores. Dicha proposición la podemos encontrar en el capítulo 4 de [Wil04].

Proposición 2.1.18.

i) Toda subred de una ultrared es una ultrared.

ii) Toda red tiene una subred que es una ultrared.

Los espacios compactos también pueden ser caracterizados mediante redes. El siguiente teorema prueba esta equivalencia.

Teorema 2.1.19. Sea X un espacio topológico. Tenemos que X es compacto si y solo si toda ultrared $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ en X converge.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto y que existe una ultrared $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ en X que no converge. Así, para todo $x \in X$, existe un subconjunto abierto U_x en X con $x \in U_x$ tal que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ no está residualmente en U_x. Notemos que $\{U_x\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta para X. Por compacidad existe $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, por definición de ultrared para U_{x_i} se tiene que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es residual en U_{x_i} o en su complemento. Notemos que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ no puede ser residual en U_{x_i}, puesto que contradice la no convergencia de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ a x_i. Por lo tanto $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es residual en $X\backslash U_{x_i}$.

Es decir, existe $\lambda_i \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \in \Delta$ con $\lambda \geq \lambda_i$, implica que $x_\lambda \in X \backslash U_{x_i}$
Por la proposición 2.1.5, existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda' \geq \lambda_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $x'_\lambda \in X \backslash U_{x_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De esta manera $x'_\lambda \in \bigcap_i^n (X \backslash U_{x_i})$, es decir, $x'_\lambda \notin \bigcup_i^n U_{x_i} = X$, lo cual contradice el hecho de que $\{U_x\}_{x \in X}$ es una cubierta para X.
$\Leftarrow]$ Supongamos que toda ultrared $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ converge en X y que X no es compacto. Así, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, tal que cualquier colección finita $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$ no cubre a X, esto quiere decir que $X \backslash \bigcup \mathcal{F} \neq \varnothing$.
Sea $\Delta = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \mid \mathcal{F} \text{ es finito}\}$ con la relación de contención de conjuntos. Para cada $\mathcal{F} \in \Delta$, tomemos $x_\mathcal{F} \in X \backslash \bigcup \mathcal{F}$. Luego tenemos una red $\{x_\mathcal{F}\}_{\mathcal{F} \in \Delta}$. Por la proposición 2.1.18, existe una subred que es una ultrared. Sin pérdida de generalidad denotamos a esta ultrared como $\{x_\mathcal{F}\}_{\mathcal{F} \in \Delta}$. Por hipótesis tenemos que $\{x_\mathcal{F}\}_{\mathcal{F} \in \Delta}$ converge, por lo que tomamos $x \in X$ tal que $x_\mathcal{F} \to x$. Como $x \in X$ y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X, existe $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_1$. Por convergencia, existe $\mathcal{F}' \in \Delta$ tal que para todo $\mathcal{F} \geq \mathcal{F}'$ se tiene que $x_\mathcal{F} \in U_1$. Notemos que $\mathcal{F}_1 = \{U_1\} \in \Delta$, así, existe $\mathcal{F}'' \in \Delta$ tal que $\mathcal{F}'' \geq \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}'' \geq \mathcal{F}_1$. Por un lado, como $\mathcal{F}'' \geq \mathcal{F}'$, por convergencia, tenemos que $x_{\mathcal{F}''} \in \bigcup \mathcal{F}_1$. Por otro lado, por la construcción de la red tenemos que $x_{\mathcal{F}''} \notin \bigcup \mathcal{F}''$, lo que implica que $x_{\mathcal{F}''} \notin \bigcup \mathcal{F}_1$, lo cual contradice la convergencia. Por lo tanto X es compacto. □

2.2 Topología producto y sus propiedades

Una de las nociones fundamentales para poder entender la definición de límite inverso (el concepto principal de la tesis) es la topología producto. Para ello recordamos la noción de producto cartesiano arbitrario.

Definición 2.2.1. Sean I un conjunto no vacío y $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. *El producto cartesiano* de los conjuntos X_α es definido y denotado por:

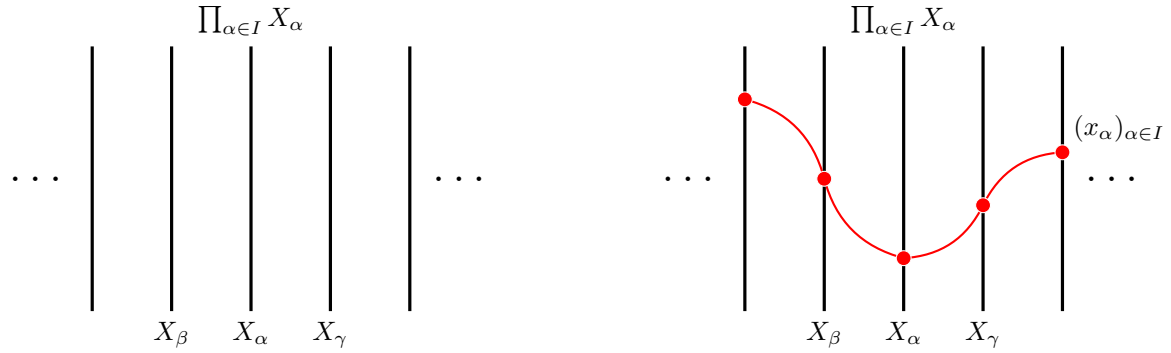
$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x \colon I \to \cup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in I\}.$$

Para cada $\beta \in I$ la función $\pi_\beta \colon \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$, definida por $\pi_\beta(x) = x(\beta)$ es llamada *proyección* de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ a X_β o la *β-ésima proyección* de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

El producto cartesiano resulta más sencillo de comprender si se visualiza como en el diagrama 2.2(a).

En la práctica, si $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, a x se le suele pensar y utilizar como $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, y en consecuencia, la imagen de x bajo la β-ésima proyección como $\pi_\beta(x) = x_\beta$. Tomando en cuenta la figura del producto cartesiano, a un punto en éste se le puede visualizar como en

el diagrama 2.2(b). En caso de que exista X tal que $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in I$, pondremos $(z)_{\alpha\in I}$ a los elementos que cumplan que $\pi_\alpha((z)_{\alpha\in I}) = z$.



(a) Representación del producto cartesiano.

(b) Representación de un elemento en el producto cartesiano.

Diagrama 2.2: Producto cartesiano.

Observación 2.2.2. El producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con la topología de Tychonoff, es homeomorfo al espacio de los números complejos $\mathbb{C}$ (con la topología generada por su métrica usual).

Para clarificar la escritura, si X es un conjunto no vacío (para evitar trivialidades pensamos que X es un conjunto infinito) utilizamos la notación:

- $[X]^{\leq\omega} = \{A \subseteq X \mid A \text{ es numerable}\}$; y
- $[X]^{<\omega} = \{F \subseteq X \mid F \text{ es finito}\}$.

Gracias al Axioma de Elección podemos asegurar que el producto de espacios no vacíos es no vacío (vea dicha afirmación en el teorema 8.5 de [Her03]), por lo que resulta interesante preguntarse si a este espacio se le puede asociar una topología; la respuesta corta es sí. Uno podría pensar que es relativamente fácil encontrar una buena topología que tenga propiedades interesantes, pero no es así. Una de las primeras en ser propuestas como topología es la *topología de la caja* (vea el capítulo 8 de [Wil04]), aunque resultó no ser tan «práctica». En su lugar, la topología que se suele ocupar es la que está definida a través de la siguiente base.

Definición 2.2.3. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. La *topología producto* (o *topología de Tychonoff*) en el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es la topología generada por la base:

$$\left\{ \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid F \in [I]^{<\omega} \text{ y } U_\alpha \in \tau_\alpha, \text{para cada } \alpha \in F \right\}.$$

Se puede verificar fácilmente que dicha familia cumple las condiciones del teorema 1.2.11. Cada básico lo podemos representar en el producto cartesiano como en el diagrama 2.3.

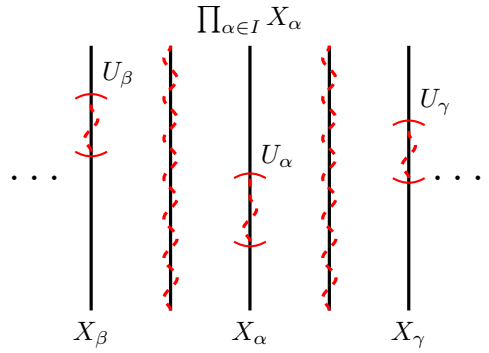


Diagrama 2.3: Representación de un básico en la topología producto.

Observación 2.2.4. Cuando I es finito, la topología producto coincide con la topología de la caja, es decir cada subconjunto abierto en el producto es la unión de productos de la forma $\Pi_{\alpha\in I} U_\alpha$, donde U_α es un abierto en X_α, para cada $\alpha \in I$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de topologías producto para tener una mejor noción de la definición 2.2.3.

Ejemplo 2.2.5.

i) Sea I un conjunto no vacío. Para cada $\alpha \in I$, sea X_α un espacio discreto con más de un punto. Se tiene que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un espacio discreto si y solo si I es finito.

ii) Si $\mathbb{S}^1$ es el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es un cilindro. Además, podemos reescribir al toro como el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

iii) Si $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces la topología producto en $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ coincide con su topología de subespacio en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Una vez definida la topología sobre el producto debemos tener en cuenta las siguientes propiedades acerca de las funciones proyección.

Observación 2.2.6. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Dados dos subconjuntos abiertos básicos en el producto, $\bigcap_{\alpha\in F_1} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y $\bigcap_{\alpha\in F_2} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, para cualquier $\beta \in I$ tenemos lo siguiente:

$$\pi_\beta\left(\bigcap_{\alpha\in F_1} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \bigcap_{\alpha\in F_2} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right) = \begin{cases} X_\beta & \text{si} \quad \beta \notin F_1 \cup F_2, \\ U_\beta & \text{si} \quad \beta \in F_1 \setminus F_2, \\ V_\beta & \text{si} \quad \beta \in F_2 \setminus F_1, \\ U_\beta \cap V_\beta & \text{si} \quad \beta \in F_1 \cap F_2. \end{cases}$$

Dado que las funciones proyección son muy importantes en los productos, enunciamos y demostramos sus principales propiedades.

Proposición 2.2.7. Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Para todo $\beta \in I$, tenemos que la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$ es continua, sobreyectiva y abierta.

Demostración. Sea $\beta \in I$. Primero veamos que π_β es continua. Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y un subconjunto abierto U_β de X_β con $\pi_\beta(x) = x_\beta \in U_\beta$. Tenemos que $x \in \pi_\beta^{-1}(x_\beta) \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$. Por definición, $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un básico en el producto. Por lo tanto π_β es continua.
Para la sobreyectividad consideremos $x_\beta \in X_\beta$. Para cada $i \in I \setminus \{\beta\}$, tomemos $x_i \in X_i$ arbitrario. Con ello, el punto $x = (x_i)_{i\in I}$ es tal que $\pi_\beta(x) = x_\beta$. De esta manera, π_β es sobreyectiva.
Ahora, veamos que π_β es abierta. Dado que cada subconjunto abierto del producto es la unión de subconjuntos abiertos básicos del producto, basta con tomar un subconjunto abierto básico $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ en el producto y ver que $\pi_\beta(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ es un subconjunto abierto de X_β. Si $\beta \in F$ tenemos que $\pi_\beta(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = U_\beta$, el cual es un subconjunto abierto de X_β. Si $\beta \notin F$, tenemos que $\pi_\beta(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = X_\beta$, éste también es un subconjunto abierto. Por lo tanto, π_β es una función abierta. □

Conforme vamos avanzando con las propiedades topológicas nos damos cuenta que necesitamos de herramientas más «poderosas» para las demostraciones. Las proposiciones 2.2.8, 2.2.9 el teorema 2.2.10 pretenden ser estas herramientas que nos ayuden a demostrar diversas propiedades alrededor del producto de espacios.

Proposición 2.2.8. Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Para todo $\beta \in I$, tenemos que X_β es homeomorfo a algún subespacio del producto.

Demostración. Sea $\beta \in I$. Tomemos $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. No es difícil ver que la función $h : \prod_{\alpha\in I\setminus\{\beta\}}\{x_\alpha\} \times X_\beta \to X_\beta$ definida por $h(y) = \pi_\beta(y)$, para todo $y \in \prod_{\alpha\in I\setminus\{\beta\}}\{x_\alpha\}$, es un homeomorfismo. □

El resultado de la proposición 2.2.9 lo podemos encontrar en el teorema 8.8 de [Wil04]. El diagrama 2.4 nos da una idea más clara de la continuidad a través de la composición de funciones.

Proposición 2.2.9. Sean X un espacio topológico, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos y una función $f : X \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Tenemos que f es una función continua si y solo si $\pi_\beta \circ f$ es continua, para todo $\beta \in I$.

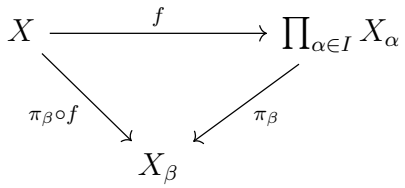


Diagrama 2.4: Composición de funciones π_β y f.

Teorema 2.2.10. Sean $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una red en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Tenemos que $x_\lambda \to x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ si y solo si para todo $\beta \in I$, se cumple que $\pi_\beta(x_\lambda) \to \pi_\beta(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que existe $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $x_\lambda \to x$. Sea $\beta \in I$, por la proposición 2.2.7 tenemos que π_β es continua. Además, por el teorema 2.1.15 se sigue que $\pi_\beta(x_\lambda) \to \pi_\beta(x)$.
$\Leftarrow$] Supongamos que existe $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que para todo $\beta \in I$, $\pi_\beta(x_\lambda) \to \pi_\beta(x)$. Sea $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ un subconjunto abierto básico de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Tomemos $\beta \in F$, como $\pi_\beta(x) \in U_\beta$, existe $\lambda_\beta \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\beta$ se tiene que $\pi_\beta(x_\lambda) \in U_\beta$. Por lo tanto, $x_\lambda \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, para todo $\lambda \geq \lambda_\beta$. Dado que F es finito, por la proposición 2.1.5 existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda' \geq \lambda_\beta$, para todo $\beta \in F$. De esta manera, $x_\lambda \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, para todo $\lambda \geq \lambda'$. De donde, $x_\lambda \to x$. □

Anteriormente, al definir ciertas propiedades topológicas, la pregunta que surgía era si esta se heredaba. Estando ahora en el contexto de productos topológicos nos surge una duda similar, cuáles son las condiciones necesarias para que un producto de espacios topológicos con cierta propiedad la conserve. Los siguientes teoremas responden esta inquietud con las propiedades que ya hemos estudiado.

Teorema 2.2.11. Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Dado $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, tenemos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_i si y solo si X_β es T_i, para cada $\beta \in I$.

Demostración. Dado $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, primero supongamos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_i y tomemos $\beta \in I$. Por la proposición 2.2.8 existe $A \subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que A es homeomorfo a X_β. Como $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_i, por el teorema 1.2.32 tenemos que A es T_i. Dado que T_i es una propiedad topológica, el espacio X_β también es T_i. Resta probar el recíproco. Para esta parte lo hacemos por separado.

1) Supongamos que cada espacio es T_0. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, tales que $x \neq y$, es decir, existe $\alpha \in I$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Al ser X_α un espacio T_0, existe un subconjunto abierto U_α de X_α tal que $|U_\alpha \cap \{x_\alpha, y_\alpha\}| = 1$, en consecuencia $|\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \{x, y\}| = 1$. Por lo tanto, el producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_0.

2) Supongamos que cada espacio topológico es T_1. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tales que $x \neq y$. Por lo tanto, existe $\alpha \in I$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Como X_α es T_1, existe un subconjunto abierto U_α de X_α tal que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $y_\alpha \notin U_\alpha$, por lo que $x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y $y \notin \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Así, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_1.

3) Supongamos que cada espacio topológico es T_2. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, tales que $x \neq y$, así existe $\alpha \in I$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Dado que X_α es T_2, existen dos subconjuntos abiertos U_α y V_α de X_α tales que $x_\alpha \in U_\alpha$, $y_\alpha \in V_\alpha$ y $U_\alpha \cap V_\alpha = \varnothing$, por lo que $x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, $y \in \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ y $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \varnothing$. Así, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_2.

4) Supongamos que cada espacio topológico es T_3. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y C un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tales que $x \notin C$. Como $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)\backslash C$ es un subconjunto abierto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $x \in (\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)\backslash C$, existe un subconjunto abierto básico $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq (\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)\backslash C$.
Para cada $\alpha \in F$, $X_\alpha\backslash U_\alpha$ es un subconjunto cerrado de X_α tal que $x_\alpha \notin X_\alpha\backslash U_\alpha$; por definición de T_3, existen dos subconjuntos abiertos V_α y W_α de X_α tales que $x_\alpha \in V_\alpha$, $X_\alpha\backslash U_\alpha \subseteq W_\alpha$ y $V_\alpha \cap W_\alpha = \varnothing$. Por lo que $x \in \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, $(\prod_{\beta\in I} X_\beta)\backslash\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ y $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) = \varnothing$.
Primero observemos que $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ y $\bigcup_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ son subconjuntos abiertos del producto. Luego, es inmediato que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} C &\subseteq (\prod_{\beta\in I} X_\beta)\backslash \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \\ &= \bigcup_{\alpha\in F} ((\prod_{\beta\in I} X_\beta)\backslash\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) \\ &\subseteq \bigcup_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha). \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos $C \subseteq \bigcup_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Y por ser, para cada $\alpha \in F$, V_α y W_α conjuntos disjuntos, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ y $\bigcup_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ son disjuntos. Como x y C son arbitrarios podemos concluir que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es T_3.

5) Supongamos que cada espacio topológico es $T_{3\frac{1}{2}}$. Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y G un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $x \notin G$. Como $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)\backslash G$ es un subconjunto abierto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, existe un subconjunto abierto básico $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq (\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)\backslash G$.
Por definición de $T_{3\frac{1}{2}}$, para cada $\alpha \in F$, existe una función $f_\alpha : X_\alpha \to [0,1]$ continua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ y $f_\alpha(y_\alpha) = 1$, para todo $y_\alpha \in X_\alpha\backslash U_\alpha$.
Para todo $\alpha \in F$, sea $g_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. Se sigue que g_α es continua por ser una composición de funciones continuas.
Definamos la función $f : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to [0,1]$ como $f(z) = \text{mín}\{g_\alpha(z) \mid \alpha \in F\}$, para cada $z \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Por el teorema 1.2.22 tenemos que f es continua.
Ahora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{mín}\{(f_\alpha \circ \pi_\alpha)(x) \mid \alpha \in F\} \\ &= \text{mín}\{f_\alpha(x_\alpha) \mid \alpha \in F\} \\ &= \text{mín}\{0 \mid \alpha \in F\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in G$. Dado que $y \notin \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, tenemos que $y_\alpha \notin U_\alpha$, para todo $\alpha \in F$. Así, $f_\alpha(y_\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in F$, y:

$$\begin{aligned} f(y) &= \text{mín}\{(f_\alpha \circ \pi_\alpha)(y) \mid \alpha \in F\} \\ &= \text{mín}\{f_\alpha(y_\alpha) \mid \alpha \in F\} \\ &= \text{mín}\{1 \mid \alpha \in F\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como y es arbitrario, tenemos que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para todo $y \in G$. Por lo tanto, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. □

Para el caso de los axiomas de numerabilidad tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.12. Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios topológicos no vacíos. Tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es primero (segundo) numerable si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es primero (segundo) numerable.

Demostración. Nos centramos en demostrar que el teorema se cumple para el axioma de primero numerabilidad, puesto que la demostración para el caso de segundo numerabilidad

es similar.
$\Rightarrow$] Supongamos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es primero numerable. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \in X_n$. Por la sobreyectividad de π_n, existe $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tal que $\pi_n(x) = x_n$. Por hipótesis existe una base local numerable $\mathcal{B}$ para x. Teniendo en cuenta esto, proponemos el conjunto $\mathcal{B}_n = \{\pi_n(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ para ser una base local numerable de x_n; veamos que efectivamente lo es.
Sea $N \in \mathcal{N}(x_n)$, por definición existe un subconjunto abierto U de X_n tal que $x_n \in U \subseteq N$. Se sigue que,

$$x \in \pi_n^{-1}(U) \subseteq \pi_n^{-1}(N),$$

por lo que $\pi_n^{-1}(N) \in \mathcal{N}(x)$. En consecuencia, por ser $\mathcal{B}$ base local de x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \pi_n^{-1}(N)$; con ello,

$$x_n \in \pi_n(B) \subseteq N,$$

esto quiere decir que $\mathcal{B}_n$ es una base local para x_n y por lo tanto X_n es primero numerable.
$\Leftarrow$] Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es primero numerable, veamos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ también lo es. Sean $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $N \in \mathcal{N}(x)$. Luego existe un subconjunto abierto básico $\bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n)$ de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tal que $x \in \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq N$.
Para construir la base local numerable para x, observemos que para cada $n \in F$ tenemos que $x_n \in U_n \subseteq \pi_n(N)$. Como X_n es primero numerable, existe una base local numerable $\mathcal{B}_n$ para x_n. Así, para cada $n \in F$, existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $x_n \in B_n \subseteq U_n$. Luego obtenemos

$$x \in \pi_n^{-1}(B_n) \subseteq \pi_n^{-1}(U_n),$$

como esto se cumple para todo $n \in F$ tenemos que,

$$x \in \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(B_n) \subseteq \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq N.$$

De esta manera el siguiente conjunto es numerable:

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(B_n) \mid F \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \text{ y } B_n \in \mathcal{B}_n, \text{ para cada } n \in F\},$$

y resulta una base local numerable para x. Así $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es primero numerable. □

Debemos aclarar que el recíproco del teorema 2.2.12 solo se asegura cuando la familia de espacios es numerable, pues de esta forma podemos garantizar que la base del producto también lo sea. De lo contrario podemos encontrar múltiples ejemplos donde no se cumpla esto, es decir, cualquier base del producto tendrá cardinalidad mayor a la de $\mathbb{N}$.

Toca ahora exponer de uno de los resultados más importantes de la topología general.

Teorema 2.2.13 (Teorema de Tychonoff)**.** Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Tenemos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un espacio compacto si y solo si X_α es un espacio compacto, para cada $\alpha \in I$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es compacto. Dado que para toda $\alpha \in I$, π_α es continua y sobreyectiva, por el teorema 1.2.43 tenemos que X_α es compacto.
$\Leftarrow$] Supongamos que X_α es compacto, para todo $\alpha \in I$. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una ultrared en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Por el teorema 2.1.17, para cada $\alpha \in I$, tenemos que $\{\pi_\alpha(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ es una ultrared en X_α. Dado que X_α es compacto, por el teorema 2.1.19, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(x_\lambda) \to x_\alpha$.
Veamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ converge a $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Sea $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ un subconjunto abierto básico de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Para cada $\alpha \in F$ tenemos que $x_\alpha = \pi_\alpha(x) \in U_\alpha$. Luego, existe $\lambda_\alpha \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\alpha$, tenemos que $\pi_\alpha(x_\lambda) \in U_\alpha$. Como esto se cumple para todo $\alpha \in F$, por la proposición 2.1.5 existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda' \geq \lambda_\alpha$, para todo $\alpha \in F$. Ahora, tomando $\lambda \geq \lambda'$, se cumple que $\pi_\alpha(x_\lambda) \in U_\alpha$, por lo que $x_\lambda \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Finalmente, $x_\lambda \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, lo que quiere decir que $x_\lambda \to x$. Así, toda ultrared converge y por el teorema 2.1.19 el producto es compacto. □

Para el caso de conexidad tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.2.14. Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una familia finita de espacios topológicos, con n un número natural mayor a 1. Si X_i es un espacio conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i$ es un espacio conexo.

Demostración. Demostremos el lema por inducción.
Caso base. Para dos espacios conexos X_1 y X_2. Tomemos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$. Es claro que $A_{X_1} = X_1 \times \{y_1\}$ y $A_{X_2} = \{x_2\} \times X_2$ son homeomorfos a X_1 y X_2, respectivamente, por lo que A_{X_1} y A_{X_2} son conexos. Como $A_{X_1} \cap A_{X_2} = \{(x_2, y_1)\}$, por el inciso i) de la proposición 1.2.49, tenemos que $A_{X_1} \cup A_{X_2}$ es conexo. Además, dado que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A_{X_1} \cup A_{X_2}$, por el inciso ii) de la proposición 1.2.49, el espacio $X_1 \times X_2$ es conexo.
Caso inductivo. Sea $n > 2$ y supongamos que el producto finito de n espacios conexos es conexo. Probemos que el producto de $n + 1$ espacios conexos es conexo. Observemos que $\prod_{i\in\{1,\ldots,n+1\}} X_n = (\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_n) \times X_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, $\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_n$ es conexo. Aplicando el caso base tenemos que $(\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_n) \times X_{n+1}$ es conexo.
Por lo tanto, el producto finito de espacios conexos es conexo. □

Teorema 2.2.15. Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Tenemos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un espacio conexo si y solo si X_α es un espacio conexo, para cada $\alpha \in I$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es conexo. Dado que para cada $\alpha \in I$ la función proyección π_α es continua y sobreyectiva, por la proposición 1.2.48 cada X_α es conexo.
$\Leftarrow$] Para la suficiencia dividimos la demostración cuando I es un conjunto finito y cuando

es un conjunto infinito.
Cuando I es un conjunto finito, el resultado se sigue del lema 2.2.14.
Ahora, cuando I es un conjunto infinito, dados $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $F \in [I]^{<\omega}$, definimos el conjunto $C_F = \prod_{\alpha\in F} A_\alpha$, donde

$$A_\alpha = \begin{cases} \{x_\alpha\} & \text{si} \quad \alpha \notin F, \\ X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in F, \end{cases}$$

para cada $\alpha \in F$. Por la proposición 2.2.8, C_F es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$. Por el lema 2.2.14 tenemos que $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$ es un espacio conexo y por lo tanto C_F también es un espacio conexo. Dado que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{F\in[I]^{<\omega}} C_F$, por el inciso i) de la proposición 1.2.49 tenemos que $C = \bigcup_{F\in[I]^{<\omega}} C_F$ es conexo.
Resta probar que C es un subespacio denso del producto, es decir, que $\overline{C} = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. La primera contención ya la tenemos. Tomamos $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $N \in \mathcal{N}(y)$. Por definición existe un subconjunto abierto básico $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ del producto tal que $y \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq N$. Para demostrar que $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap C \neq \varnothing$ tengamos en cuenta el elemento $(z_\alpha)_{\alpha\in I}$, donde,

$$z_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si} \quad \alpha \notin F \\ y_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in F, \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. De esta manera, es fácil ver que $(z_\alpha)_\alpha \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap C$. Por lo tanto, $x \in \overline{C}$. Así, $\overline{C} = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Dado que C es denso y conexo, por el inciso iii) de la proposición 1.2.49, tenemos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es conexo. □

La relación de productos topológicos y metrizabilidad es la siguiente.

Teorema 2.2.16. Sea $\{(X_n, \tau_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios topológicos. Tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es metrizable si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es metrizable.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es metrizable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por la proposición 2.2.8 , se tiene que X_n es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, por lo tanto X_n es metrizable.
$\Leftarrow$] Para todo $n \in \mathbb{N}$, supongamos que X_n es metrizable, es decir, existe una métrica $\rho_n : X_n \times X_n \to \mathbb{R}$ tal que τ_n coincide con τ_{ρ_n}. Es fácil ver que la función $d_n : X_n \times X_n \to \mathbb{R}$ dada por $d_n(x_n, y_n) = \text{mín}\{1, \rho(x_n, y_n)\}$, para toda $(x_n, y_n) \in X_n \times X_n$, es una métrica. Ahora, definamos la función $\rho : (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n) \times (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n},$$

para todo $x, y \in (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n) \times (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n)$. La convergencia de la serie que define a ρ se sigue de que cada d_n es acotada por 1 y del Criterio M de Weierstrass (vea el teorema 11.5

de [Apo96]). Además, utilizando que d_n es métrica, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos comprobar fácilmente que ρ es una métrica sobre el producto.
Queda ver que τ_ρ es equivalente a la topología producto.
$\subseteq$] Veamos que la topología producto está contenida en τ_ρ. Tomemos un subconjunto abierto U en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. Por demostrar que existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U$. Como $x \in U$, existe un subconjunto abierto básico $\bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n)$ de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tal que $x \in \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq U$. Sea $n \in F$, tenemos que $x_n \in U_n$, por lo que existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $B_{\rho_n}(x_n,\varepsilon_n) \subseteq U_n$. Tomemos $e_n < 1$ tal que $e_n < \varepsilon_n$. De esta manera, $B_{\rho_n}(x_n,e_n) \subseteq B_{\rho_n}(x_n,\varepsilon_n) \subseteq U_n$.
Veamos que $B_{d_n}(x_n,e_n) \subseteq B_{\rho_n}(x_n,e_n)$, para ello tomemos $y_n \in B_{d_n}(x_n,e_n)$. Dado que $\min\{1,\rho_n(x_n,y_n)\} = d_n(x_n,y_n) < e_n$ y $e_n < 1$, se sigue que $\rho_n(x_n,y_n) < e_n$. Por lo que $B_{d_n}(x_n,e_n) \subseteq B_{\rho_n}(x_n,e_n)$. Así, por ser $B_{\rho_n}(x_n,e_n) \subseteq U_n$, tenemos que $B_{d_n}(x_n,e_n) \subseteq U_n$.
Definimos $\varepsilon = \min\{\frac{e_n}{2^n} \mid n \in F\}$. Para ver que $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n)$, tomamos $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_\rho(x,\varepsilon)$. Esto es, $\rho(x,y) < \varepsilon$. Sea $n \in F$. Se cumple que:

$$\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} = \rho(x,y) < \varepsilon \leq \frac{e_n}{2^n}.$$

Por lo que $d_n(x_n,y_n) < e_n$, es decir, $y_n \in B_{d_n}(x_n,e_n) \subseteq U_n$. Por lo tanto, $y \in \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n)$ y de esta manera, $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq U$.
$\supseteq$] Ahora tomamos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $\varepsilon > 0$. Por demostrar que existe un subconjunto abierto U de la topología producto tal que $U \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$. Tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para $n \in \{1,\ldots,N\}$, sea $B_n = B_{d_n}(x_n, \frac{\varepsilon}{2N})$. Tenemos que $\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(B_n)$ es un subconjunto abierto básico de la topología producto y que $x \in \bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(B_n)$. Ahora vamos a demostrar que $\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(B_n) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$. Para esto tomamos $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(B_n)$. Para cada $n \in \{1,\ldots,N\}$, tenemos que $y_n \in B_n$. Es decir, $d_n(x_n,y_n) < \frac{\varepsilon}{2N}$. En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} d_n(x_n,y_n) < \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

También tenemos que,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que $\rho(x,y) < \varepsilon$, en consecuencia, $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$. De esta manera, $\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(B_n) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$.
Así, la topología producto y τ_ρ son iguales. Por lo tanto, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es metrizable. □

Y finalmente para el caso de los continuos tenemos el siguiente enunciado respecto a sus productos.

Teorema 2.2.17. Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios topológicos. Tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un continuo si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un continuo.

Demostración. Usando los teoremas 2.2.13, 2.2.15 y 2.2.16 se obtiene de manera inmediata el resultado. □

Capítulo 3

Límites inversos

3.1 Definición y ejemplos

Ahora es momento de introducir el concepto medular del proyecto de tesis, para ello definimos primero lo que es un sistema inverso y después lo que entendemos como su límite.

Definición 3.1.1. Un *sistema inverso (o espectro inverso)* es una tercia conformada por un conjunto dirigido Δ, una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ y una familia de funciones continuas $\{p_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha \mid \alpha, \beta \in \Delta \text{ y } \alpha \leq \beta\}$ que cumplen lo siguiente:

a) p_α^α es la función identidad en X_α, para cada $\alpha \in \Delta$; y

b) $p_\alpha^\beta \circ p_\beta^\gamma = p_\alpha^\gamma$ siempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ (vea el diagrama 3.1).

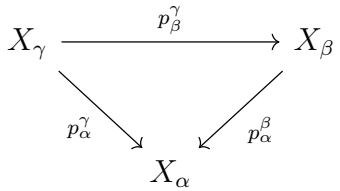


Diagrama 3.1: Composición de funciones enlace.

Usualmente un sistema inverso se denota por $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y a las funciones p_α^β se les llama funciones *enlace o de ligadura*.

Ya que el concepto de sistema inverso parece no ser tan intuitivo incluimos los siguientes ejemplos con el objetivo de familiarizarnos con esta definición. El primero nos

muestra que con cualquier espacio topológico podemos crear un sistema inverso. A pesar de que este podría señalarse de «trivial», es bastante ocupado cuando se suele hablar de las aplicaciones de los sistemas inversos.

Ejemplo 3.1.2. Dados un espacio topológico X y un conjunto dirigido arbitrario Δ, para todo $\alpha \in \Delta$ definimos $X_\alpha = X$. Así, tenemos la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ indexada por Δ. Para las funciones enlace, dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$ ponemos p_α^β como la función identidad. Es fácil ver que estas cumplen las condiciones para ser enlace. De esta manera $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un sistema inverso.

Los siguientes ejemplos son más elaborados, sin embargo los exponemos lo suficientemente desarrollados para ver que se cumplen las condiciones necesarias para ser un sistema inverso. Estos fueron tomados de la sección 1.2 de [Chi96].

Ejemplo 3.1.3. Consideremos una familia de espacios topológicos $\{Z_i \mid i \in I\}$, donde I es un conjunto no vacío. Para generar nuestro sistema inverso primero definamos $\Delta = [I]^{<\omega}$ con la relación de contención de conjuntos. Por el inciso *ii*) del ejemplo 2.1.4 tenemos que Δ es un conjunto dirigido. Ahora, para cada $\alpha \in \Delta$, definamos los espacios $X_\alpha = \prod_{i\in\alpha} Z_i$. Finalmente, dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$, definamos las funciones $p_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ como $p_\alpha^\beta((x_i)_{i\in\beta}) = (x_i)_{i\in\alpha}$, para todo $(x_i)_{i\in\beta} \in X_\beta$. Veamos que estas funciones son enlace.
Primero tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ y demostremos que p_α^β es continua. Tomemos un subconjunto abierto básico $U = \bigcap_{i\in F}(\pi_i^\alpha)^{-1}(U_i)$ en X_α, donde $F \leq \alpha \leq \beta$. Notemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(p_\alpha^\beta)^{-1}(U) &= \{(z_i)_{i\in\beta} \in X_\beta \mid p_\alpha^\beta((z_i)_{i\in\beta}) \in U\}\\ &= \{(z_i)_{i\in\beta} \in X_\beta \mid (z_i)_{i\in\alpha} \in U\}\\ &= \{(z_i)_{i\in\beta} \in X_\beta \mid z_i \in U_i, \text{para todo } i \in F\}\\ &= \bigcap_{i\in F}(\pi_i^\beta)^{-1}(U_i),\end{aligned}$$

por lo que $(p_\alpha^\beta)^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto básico en X_β. De esta manera p_α^β es una función continua.
Veamos que se cumplen las condiciones *a*) y *b*) de la definición 3.1.1.

a) Tomemos $\alpha \in \Delta$ y $(z_i)_{i\in\alpha} \in X_\alpha$. Se cumple que $p_\alpha^\alpha((z_i)_{i\in\alpha}) = (z_i)_{i\in\alpha}$, por lo que p_α^α es la función identidad.

b) Ahora tomemos $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $(x_i)_{i\in\gamma} \in X_\gamma$. Se cumple que $p_\alpha^\beta(p_\beta^\gamma((x_i)_{i\in\gamma})) = p_\alpha^\beta((x_i)_{i\in\beta}) = (x_i)_{i\in\alpha} = p_\alpha^\gamma((x_i)_{i\in\gamma})$ (vea el diagrama 3.2).

De esta manera estas funciones son enlace. Por lo tanto, $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un sistema inverso.

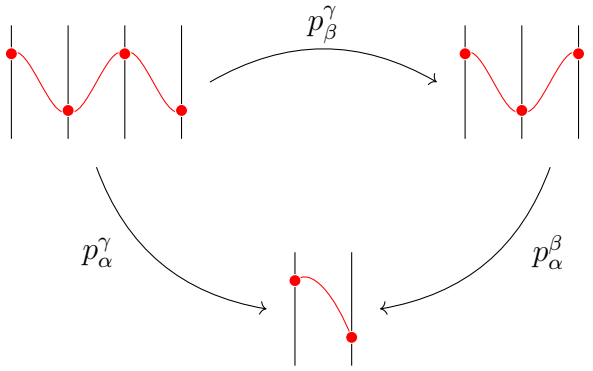


Diagrama 3.2: Representación de $p^{\beta}_{\alpha} \circ p^{\gamma}_{\beta} = p^{\gamma}_{\alpha}$.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos un espacio topológico infinito X y una familia Δ de subconjuntos de X tales que si $A, B \in \Delta$, existe $C \in \Delta$ con $C \subseteq A \cap B$. De forma similar al inciso *iii*) del ejemplo 2.1.4 tenemos que Δ es un conjunto dirigido con el orden de contención inversa. Ahora, para cada $A \in \Delta$, definamos el espacio $X_A = A$, de esta manera ya tenemos nuestra familia de espacios topológicos. Para las funciones enlace tomemos $A, B \in \Delta$ con $A \leq B$, definamos $p^B_A : X_B \to X_A$ tal que $p^B_A(x) = x$, para todo $x \in B$. Como p^B_A es la función identidad se puede corroborar fácilmente que esta cumple las condiciones para ser una función enlace. De esta manera tenemos el sistema inverso $\langle X_A, p^B_A, \Delta \rangle$.

Aunque la noción de límite inverso aparece por primera vez en [Ale28] en el año de 1929, la definición que aquí enunciamos es la que en la actualidad se considera en la literatura y es dada formalmente por S. Lefschetz en 1931 en su artículo [Lef31].

Definición 3.1.5. El *límite inverso* de un sistema inverso $\langle X_\alpha, p^\beta_\alpha, \Delta \rangle$ se define y denota por:

$$\varprojlim \langle X_\alpha, p^\beta_\alpha, \Delta \rangle = \left\{ x \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha \mid p^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha \right\}.$$

Notación 3.1.6. Dado $\alpha \in \Delta$, denotamos por p_α a la α-ésima proyección restringida a $\varprojlim \langle X_\alpha, p^\beta_\alpha, \Delta \rangle$, esto es, $p_\alpha = \pi_\alpha|_{\varprojlim \langle X_\alpha, p^\beta_\alpha, \Delta \rangle}$.

Anteriormente vimos que se puede construir un sistema inverso a partir de cualquier espacio topológico, ahora vemos lo que sucede con su límite inverso.

Ejemplo 3.1.7. Sean X un espacio topológico y Δ un conjunto dirigido. Consideremos el sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ del ejemplo 3.1.2 y veamos que su límite inverso es homeomorfo a X. Veamos cómo se comportan los elementos del límite inverso. Para esto tomemos $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Fijemos un $\alpha \in \Delta$ y comparémoslo con un $\beta \in \Delta$ arbitrario. Por ser Δ un conjunto dirigido, existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\alpha, \beta \leq \gamma$. Por un lado, por definición de límite inverso, $p_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\beta$ y $p_\alpha^\gamma(x_\gamma) = x_\alpha$; por otro lado, por la definición de las funciones enlace, $p_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\gamma$ y $p_\alpha^\gamma(x_\gamma) = x_\gamma$. En consecuencia $x_\alpha = x_\beta$. Como β lo tomamos arbitrario, existe $x \in X$ tal que $x_\alpha = x$, para todo $\alpha \in \Delta$, es decir, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} = (x)_{\alpha\in\Delta}$.
Para construir el homeomorfismo definamos la función $h : \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \to X$ dada por $h((x)_{\alpha\in\Delta}) = x$. Por la forma que tiene cada elemento del límite inverso, es fácil ver que h es un homeomorfismo.

De igual manera los siguientes ejemplos fueron tomados de la sección 1.2 de [Chi96]. Estos nos muestran distintas formas de visualizar los límites inversos a través de los homeomorfismos. Además, son de gran ayuda para resultados posteriores.

Ejemplo 3.1.8. Consideremos una familia de espacios topológicos $\{Z_i \mid i \in I\}$, donde I es un conjunto no vacío. Si $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es el sistema inverso dado en el ejemplo 3.1.3, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es homeomorfo a $\prod_{i\in I} Z_i$. Para verificarlo primero notemos que para todo $i \in I$, $\alpha_i = \{i\} \in \Delta$; ahora definamos la función $h : \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \to \prod_{i\in I} Z_i$ como

$$h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}) = (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i\in I},$$

para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Hay que demostrar que h es un homeomorfismo.
Primero veamos que es inyectiva, tomemos $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}, (y_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tales que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \neq (y_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Esto quiere decir que existe $\beta \in \Delta$ tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Por la construcción de X_β, existe $j \in \beta$ tal que $\pi_j(x_\beta) \neq \pi_j(y_\beta)$. En consecuencia $(\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i\in I} \neq (\pi_i(y_{\alpha_i}))_{i\in I}$ y por la definición de h se sigue que $h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}) \neq h((y_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$.
Ahora veamos que h es sobreyectiva, para esto tomemos $(z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Z_i$. Para cada $\alpha \in \Delta$ definamos el elemento $x_\alpha = (z_i)_{i\in\alpha} \in X_\alpha$. Tomando $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_\alpha^\beta(x_\beta) &= p_\alpha^\beta((z_i)_{i\in\beta}) \\ &= (z_i)_{i\in\alpha} \\ &= x_\alpha, \end{aligned}$$

de esta manera $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y $h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}) = (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i\in I} = (z_i)_{i\in I}$. Lo que verifica que h es sobreyectiva.
Veamos que h es continua, para ello utilizamos la caracterización de continuidad dada por el teorema 2.1.15. Tomemos una red $\{(x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta}\}_{\lambda\in A}$ en $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, donde A es un conjunto dirigido arbitrario tal que $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta} \to (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, para algún $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

Debemos verificar que $h((x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta}) \to h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$, esto es $(\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda))_{i\in I} \to (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i\in I}$. Por la convergencia de $\{(x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta}\}_{\lambda\in A}$ y por el teorema 2.2.10, tenemos que para todo $i \in I$, $x_{\alpha_i}^\lambda \to x_{\alpha_i}$, es decir, $\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda) \to \pi_i(x_{\alpha_i})$. Como esto se cumple para todo $i \in I$, tenemos que $(\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda))_{i\in I} \to (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i\in I}$. Por lo tanto, h es continua.
Resta verificar que h^{-1} es continua, nuevamente utilizamos el teorema 2.1.15. Para esto tomemos una red $\{(z_i^\lambda)_{i\in I}\}_{\lambda\in A}$ en $\prod_{i\in I} Z_i$ tal que $(z_i^\lambda)_{i\in I} \to (z_i)_{i\in I}$ para algún $(z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Z_i$. Ya que h es biyectiva, para todo $\lambda \in A$, existe un único $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tal que $h^{-1}((z_i^\lambda)_{i\in I}) = (x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta}$. De igual forma para $(z_i)_{i\in I}$, existe un único $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tal que $h^{-1}((z_i)_{i\in I}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Como $(z_i^\lambda) \to z_i$, para cada $i \in I$, por el teorema 2.2.10 $(z_i^\lambda)_{i\in\alpha} = x_\alpha^\lambda \to (z_i)_{i\in\alpha} = x_\alpha$, para cada $\alpha \in \Delta$. Ocupando nuevamente el teorema 2.2.10, tenemos que $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha\in\Delta} \to (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Por lo que h^{-1} es continua.
Así, queda verificado que h es un homeomorfismo y de esta forma se comprueba que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es homeomorfo a $\prod_{i\in I} Z_i$.

Al igual que el ejemplo 3.1.8, consideramos que el siguiente ejemplo da una idea clara del límite inverso y nos beneficia para futuros planteamientos.

Ejemplo 3.1.9. Consideremos un espacio topológico infinito X y una familia de subconjuntos Δ de X tales que si $A, B \in \Delta$, existe $C \in \Delta$ con $C \subseteq A \cap B$. Si $\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ es el sistema inverso del ejemplo 3.1.4, entonces $\varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ es homeomorfo a $\bigcap \Delta$.
Primero veamos cómo son los elementos en el $\varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$, para ello tomemos $(x_A)_{A\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ y $A, B \in \Delta$. Por ser Δ un conjunto dirigido, existe $C \in \Delta$ tal que $A, B \leq C$. Por definición de límite inverso $p_A^C(x_C) = x_A$ y $p_B^C(x_C) = x_B$. Por otro lado, por definición de función enlace tenemos que $p_A^C(x_C) = x_C$ y $p_B^C(x_C) = x_C$. En consecuencia $x_A = x_B$. Dado que A y B los tomamos arbitrarios, existe $x \in \bigcap \Delta$ tal que $(x_A)_{A\in\Delta} = (x)_{A\in\Delta}$.
Tomando en cuenta lo anterior, definamos la función $h : \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle \to \bigcap \Delta$, como

$$h((x)_{A\in\Delta}) = x,$$

para cada $x \in \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$. Veamos que h es un homeomorfismo.
Para la inyectividad tomemos $(x)_{A\in\Delta}, (y)_{A\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ tales que $(x)_{A\in\Delta} \neq (y)_{A\in\Delta}$. De esta manera $x \neq y$, por lo que $h((x)_{A\in\Delta}) \neq h((y)_{A\in\Delta})$. Para la sobreyectividad tomemos $x \in \bigcap \Delta$, tenemos que $(x)_{A\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ y $h((x)_{A\in\Delta}) = x$, por lo que h es sobreyectiva.
Ahora mostramos que h es continua. Sea $\{(x^\lambda)_{A\in\Delta}\}_{\lambda\in\mathcal{A}}$ una red en $\varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ (donde $\mathcal{A}$ es un conjunto dirigido) tal que $(x^\lambda)_{A\in\Delta} \to (x)_{A\in\Delta}$, para algún $(x)_{A\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$. Veamos que $h((x^\lambda)_{A\in\Delta}) \to h((x)_{A\in\Delta})$, es decir, $x^\lambda \to x$. La convergencia se obtiene de manera inmediata por el teorema 2.2.10, por lo que podemos concluir que h es continua. De manera similar podemos ver que h^{-1} es continua, para esto notemos que $h^{-1}(x) =$

$(x)_{A\in\Delta}$. Tomemos una red $\{x^\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{A}}$ en $\bigcap\Delta$ tal que $x^\lambda \to x$, para algún $x \in \bigcap\Delta$. Por el teorema 2.2.10 tenemos que $(x^\lambda)_{A\in\Delta} \to (x)_{A\in\Delta}$, es decir, $h^{-1}(x^\lambda) \to h^{-1}(x)$. Por lo tanto h^{-1} es continua.
Así, tenemos que h es un homeomorfismo y por lo tanto $\varprojlim\langle X_A, p_A^B, \Delta\rangle$ es homeomorfo a $\bigcap\Delta$. Cada punto en el límite inverso se puede visualizar como el diagrama 3.3.

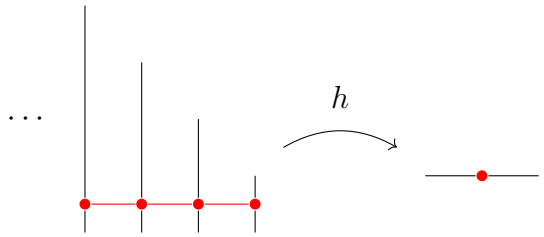


Diagrama 3.3: Representación de un punto en el límite inverso.

El siguiente lema es de gran ayuda al momento de trabajar con límites inversos, pues nos muestra una forma distinta de construirlos. Esta manera puede resultar más «fácil» de utilizar en los teoremas posteriores, dependiendo de las circunstancias.

Lema 3.1.10. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso. Si para cada $\beta \in \Delta$, definimos $A_\beta = \{x \in \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \mid p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha, \text{ para } \alpha \leq \beta\}$, entonces $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

Demostración. Demostramos la igualdad por contención de conjuntos. Para esto, primero tomemos $x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ y $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$. Como $x \in A_\beta$, tenemos que $p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$. Así, $x \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subseteq \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.
Ahora tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Para ver que x está en la intersección tomemos $\beta \in \Delta$. Al estar x en el límite inverso, tenemos que $p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$, para todo $\alpha \leq \beta$. De donde, $x \in A_\beta$. Así, $x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$, por lo que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$. □

Culminamos esta sección con un resultado que involucra las funciones enlace. La utilización de este teorema es fundamental para definir conceptos posteriores.

Teorema 3.1.11. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso. Se cumple que $p_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$, para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$.

Demostración. Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Se cumple que

$$\begin{aligned}(p_\alpha^\beta \circ p_\beta)(x) &= p_\alpha^\beta(p_\beta(x)) \\ &= p_\alpha^\beta(x_\beta) \\ &= x_\alpha \\ &= p_\alpha(x).\end{aligned}$$

De esta manera se cumple que $p_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$. □

3.2 Límite inverso como subconjunto cerrado del producto

Entendemos que un límite inverso $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, es decir, hereda la topología del producto topológico. El siguiente resultado nos muestra una base para el límite inverso, cuyos conjuntos básicos pueden resultar más útiles para demostraciones posteriores. Dicho resultado fue tomado de la proposición 1.2.1 de [Chi96].

Teorema 3.2.1. Dado un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, tenemos que la familia:

$$\left\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in \Delta \text{ y } U_\alpha \text{ es un abierto en } X_\alpha\right\}$$

forma una base para la topología del subespacio $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

Demostración. Sean $G = \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \cap \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ un subconjunto abierto básico de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y $x \in G$.
Por el teorema 2.1.5, existe $\beta \in \Delta$ tal que $\beta \geq \alpha$, para todo $\alpha \in F$. Por la continuidad de las funciones enlace, $U_\beta = \bigcap_{\alpha\in F}(p_\alpha^\beta)^{-1}(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de X_β, además de que $x_\beta \in U_\beta$. Dado $\alpha \in F$, por el teorema 3.1.11 tenemos que $p_\beta^{-1} \circ (p_\alpha^\beta)^{-1} = p_\alpha^{-1}$ y por definición de p_α, se cumple que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Con ello, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} p_\beta^{-1}(U_\beta) &= \bigcap_{\alpha\in F} p_\beta^{-1}\left((p_\alpha^\beta)^{-1}(U_\alpha)\right) \\ &= \bigcap_{\alpha\in F} p_\alpha^{-1}\left(U_\alpha\right) \\ &= \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \cap \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $p_\beta^{-1}(U_\beta) = \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \cap \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y además $x \in p_\beta^{-1}(U_\beta)$. De este modo dicha familia es una base. □

La importancia de los subconjuntos cerrados en los límites inversos es grande, puesto que teoremas de «mayor peso» los ocupan dentro de sus hipótesis. De esta manera es importante saber cuándo un límite inverso es cerrado. El siguiente teorema nos muestra condiciones suficientes para que esto se dé.

Teorema 3.2.2. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso. Si para cada $\alpha \in \Delta$, X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio cerrado de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$.

Demostración. Veamos que $(\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha)\backslash\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es abierto. Dado que cada espacio X_α es de Hausdorff, por el teorema 2.2.11 tenemos que $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ es de Hausdorff.
Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in (\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha)\backslash\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, esto quiere decir que existen $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\beta > \alpha$ y $x'_\alpha = p_\alpha^\beta(x_\beta) \neq x_\alpha$. Como X_α es de Hausdorff existen dos subconjuntos abiertos U_α y U'_α de X_α tales que $x_\alpha \in U_\alpha$, $x'_\alpha \in U'_\alpha$ y $U_\alpha \cap U'_\alpha = \varnothing$. Dado que p_α^β es una función continua, $V_\beta = (p_\alpha^\beta)^{-1}(U'_\alpha)$ es un subconjunto abierto de X_β tal que $x_\beta \in V_\beta$. Notemos que $W = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ es un subconjunto abierto de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ que contiene a x.
Supongamos que $W \cap \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \neq \varnothing$ y tomemos $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in W \cap \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Por un lado, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ se cumple que $p_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$. Por otro lado, como $y \in W$, se sigue que $y \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y $y \in \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$, esto quiere decir que $y_\alpha \in U_\alpha$ y $y_\beta \in V_\beta$. Por lo tanto $p_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha \in U'_\alpha$. De esta manera $y_\alpha \in U_\alpha \cap U'_\alpha$, lo cuál es una contradicción, puesto que $U_\alpha \cap U'_\alpha = \varnothing$. Concluimos que $W \cap \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varnothing$.
Con esto tenemos que $W \subseteq (\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha)\backslash\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, es decir, $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha\backslash\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subconjunto abierto del producto. Por lo que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$. □

Cuando los espacios de un sistema inverso no son de Hausdorff no podemos asegurar que el límite inverso sea cerrado. Esto lo podemos observar mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.3. Sean Δ un conjunto dirigido no numerable y $X_\alpha = \mathbb{N}$ bajo la topología indiscreta, para cada $\alpha \in \Delta$. Si $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ es la función identidad, para cada $\alpha \leq \beta$, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subconjunto no vacío de $\Pi_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ que no es cerrado. Por el ejemplo 3.1.7, $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \{(x)_{\alpha\in\Delta} \mid x \in \mathbb{N}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{N}$. Así, dado que la topología producto de $\Pi_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ coincide con la topología indiscreta, $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ no es un subespacio cerrado.

En la práctica, dado un sistema inverso arbitrario, su límite inverso puede resultar vacío. Un ejemplo de esto lo podemos encontrar en el artículo [Sto79], aunque en esta referencia no se realiza la explicación detallada del mismo. Por la relevancia que consideramos que posee este ejemplo, lo incluimos detalladamente en la tesis, adecuándolo a nuestra notación.

Ejemplo 3.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \mathbb{N}$ con la topología cofinita τ_{cof} (vea el inciso *iii*) del ejemplo 1.2.3), y para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ definamos la función $p_n^m : X_m \to X_n$ dada por $p_n^m(k) = k + (m - n)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es un sistema inverso cuyo límite inverso es vacío.
Primero hay que demostrar que $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es un sistema inverso. Tomemos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ y veamos que p_n^m es continua. Sea A un subconjunto abierto de X_n, notemos que $(p_n^m)^{-1}(A) = \{a - (m - n) \mid a \in A\}$. Por lo tanto $p_n^m(A)^{-1} \in \tau_{\text{cof}}$, es decir, la preimagen de

A es subconjunto abierto de X_m. Por la definición 1.2.20, tenemos que p_n^m es una función continua.
Ahora veamos que se cumplen las condiciones para las funciones enlace.

a) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X_n$. Tenemos que $p_n^n(x) = x + (n - n) = x$ por lo que p_n^n es la función identidad.

b) Dados $m, n, l \in \mathbb{N}$ tales que $l \leq n \leq m$ y $x \in X_m$, se cumple que $p_l^n \circ p_n^m(x) = p_l^n(p_n^m(x)) = p_l^n(x + (m - n)) = x + (m - n) + (n - l) = x + (m - l) = p_l^m(x)$.

Así, p_n^m es una función enlace y con ello $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es un sistema inverso.
Ahora veamos que $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle = \varnothing$. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle \neq \varnothing$ y tomemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por definición de límite inverso tenemos que $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. También, por definición de la función enlace $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1} + 1$. De esta manera $x_{n+1} = x_n - 1$, y podemos reescribir a x como $(x_1, x_1 - 1, x_1 - 2, x_1 - 3, \dots)$. Dado que $x_1 \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_{x_1} = x_1 - x_1 = 0$. Luego, $x_{x_1} \notin \mathbb{N} = X_{x_1}$ y esto es una contradicción. En conclusión, $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle = \varnothing$.

La siguiente proposición, tomada de los ejercicios de la sección de límites inversos de [Eng89], es un ejemplo en donde el límite inverso es vacío. Más aún, nos da una forma para construir límites inversos vacíos.

Proposición 3.2.5. Sean I un conjunto arbitrario no numerable y $\Delta = [I]^{<\omega}$ con el orden $\leq$ definido por la contención de conjuntos. Consideremos la familia de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ donde $X_\alpha = \{f : \alpha \to \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$ con la topología discreta para $\alpha \in \Delta$. Dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$, consideremos las funciones $p_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ tales que $p_\alpha^\beta(f) = f|_\alpha$. Se cumple lo siguiente:

i) La terna $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un sistema inverso.

ii) Las funciones p_α^β son sobreyectivas.

iii) $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varnothing$.

Demostración.

i) Es claro que las funciones p_α^β son continuas. Ahora veamos que cumplen los incisos *a*) y *b*) de la definición 3.1.1.

a) Para cada $\alpha \in \Delta$ y $f \in X_\alpha$, tenemos que $p_\alpha^\alpha(f) = f|_\alpha = f$, por lo que p_α^α es la función identidad.

b) Ahora, si $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $f \in X_\gamma$, entonces $(p_\alpha^\beta \circ p_\beta^\gamma)(f) = p_\alpha^\beta(f|_\beta) = f|_\alpha = p_\alpha^\gamma(f)$.

Por lo tanto, tenemos que las funciones son enlace. Como Δ es un conjunto dirigido, tenemos el sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

ii) Ahora demostremos que las funciones enlace son sobreyectivas. Tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$. Para ver que p_α^β es sobreyectiva tomemos $g \in X_\alpha$. Hay que probar que existe $f \in X_\beta$ tal que $p_\alpha^\beta(f) = f|_\alpha = g$. Tengamos en cuenta que $\alpha \subseteq \beta$ y como ambos son finitos tenemos que $\beta\backslash\alpha \in \Delta$; también se cumple que $g(\alpha)$ está acotado superiormente en $\mathbb{N}$. Definamos la función $f : X_\beta \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in \beta\backslash\alpha, \\ n_x & \text{si} \quad \beta\backslash\alpha. \end{cases}$$

Donde cada n_x es un único número para x en $\mathbb{N}$ tal que éste es mayor al supremo de $g(\alpha)$. De esta manera $f : \beta \to \mathbb{N}$ es inyectiva y se cumple que $f|_\alpha = g$, lo que quiere decir que p_α^β también es sobreyectiva.

iii) Demostremos que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varnothing$. Supongamos que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \neq \varnothing$, por lo que podemos tomar $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Para llegar a una contradicción construimos una función $h : I \to \mathbb{N}$ tal que $h(x) = f_{\{x\}}(x)$ para todo $x \in I$. Veamos que h es inyectiva, tomemos $x, y \in I$ con $x \neq y$. Tenemos que $h(x) = f_{\{x\}}(x) = f_{\{x,y\}}(x)$ y $h(y) = f_{\{x\}}(y) = f_{\{x,y\}}(y)$. Dado que $f_{\{x,y\}}$ es inyectiva se cumple que $h(x) \neq h(y)$, así h es inyectiva. Esto quiere decir que hemos encontrado una función inyectiva de I a $\mathbb{N}$. Lo que significa que la cardinalidad de I es menor o igual a la cardinalidad de $\mathbb{N}$, pero I es no numerable, por lo que se tiene una contradicción. Por lo tanto, tenemos que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varnothing$. □

Cuando se tiene que el límite inverso es vacío, las aplicaciones que se le pueden dar son de «poco interés». Por lo que surge la pregunta de qué condiciones se necesitan para asegurar que éste sea distinto de vacío. Los teoremas 3.2.8 y 3.2.9 fueron tomados del artículo [Sto79] e incluidos aquí con la intención de contestar esta pregunta.

Antes de presentar estas condiciones necesitamos de la siguiente definición.

Definición 3.2.6. Dado un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, decimos que $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un *subsistema* de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ si está indexado por el mismo conjunto Δ, cada Y_α es un subconjunto de X_α y $g_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta\big|_{Y_\alpha}$. Si cada Y_α es cerrado decimos que $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es *subsistema cerrado*.

Observación 3.2.7. Notemos que, por definición, todo sistema inverso es un subsistema inverso de sí mismo.

Teorema 3.2.8. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso donde cada X_α es compacto y cada p_α^β es una función cerrada. Tenemos que existe un subsistema cerrado $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ que cumple las siguientes condiciones:

a) Y_α es compacto y no vacío, para todo $\alpha \in \Delta$,

b) g_α^β es cerrada y sobreyectiva, para todo $\alpha \leq \beta$; y

c) $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

Demostración. Consideremos la familia $\mathscr{C}$ de todos los subsistemas cerrados $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tales que $Y_\alpha \neq \varnothing$ y $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Notemos que $\mathscr{C}$ es una familia no vacía, pues el mismo $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un elemento de $\mathscr{C}$. Procedamos a definir una relación de orden $\leq$ sobre $\mathscr{C}$. Para ello, dados $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle, \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathscr{C}$ decimos que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle \leq \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ si y solo si $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$; no es difícil verificar que dicho orden es un orden parcial.
Ahora veamos que se cumplen las hipótesis para poder aplicar el lema de Zorn (lema 2.1.6) en $\mathscr{C}$. Para esto tomemos una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathscr{C}$ y demostremos que $\mathcal{C}$ tiene una cota inferior en $\mathscr{C}$. Para cada $\alpha \in \Delta$ definimos el conjunto $L_\alpha = \bigcap\{Y_\alpha \mid \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathcal{C}\}$. Notemos que L_α es cerrado en X_α, puesto que es una intersección de conjuntos cerrados. Veamos que L_α es un conjunto no vacío; ya que $\mathcal{C}$ es una cadena, toda intersección finita de los Y_α es no vacía y como X_α es compacto, por el teorema 1.2.39, tenemos que $L_\alpha \neq \varnothing$. Ahora, dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ es fácil corroborar que $p_\alpha^\beta(L_\beta) \subseteq L_\alpha$, por lo tanto podemos definir la función $l_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta\big|_{L_\beta}$. Así, tenemos que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Para demostrar que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ se encuentra en $\mathscr{C}$ resta probar que $\varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Es fácil ver que $\varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle \subseteq \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Para la otra contención tomemos $x \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Por la definición de $\mathscr{C}$ tenemos que $x \in \varprojlim\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, para todo $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathcal{C}$. En consecuencia, $x_\alpha \in \bigcap\{Y_\alpha \mid \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathcal{C}\} = L_\alpha$, para cada $\alpha \in \Delta$. Ahora tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$. Luego, tenemos que $l_\alpha^\beta(x_\beta) = p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$ para todo $x_\beta \in L_\beta$. Por lo tanto $x \in \varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y se cumple la igualdad. Así $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathscr{C}$ y claramente es cota inferior de $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn existe un elemento minimal $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathscr{C}$.
Notemos que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ cumple con los incisos *a*), *c*) y parcialmente con *b*), por lo que queda ver que las funciones enlace del elemento minimal son sobreyectivas. Para esto hay que demostrar que $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, para todos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\beta \geq \alpha$.
Antes veamos que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathscr{C}$, donde $Z_\alpha = \bigcap\{l_\alpha^\beta(L_\beta) \mid \beta \geq \alpha\}$, para todo $\alpha \in \Delta$ y $h_\alpha^\beta = l_\alpha^\beta\big|_{Z_\beta}$, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$. Tenemos que Z_α es un subconjunto cerrado de Y_α, puesto que $l_\alpha^\beta(L_\beta)$ también lo es y además la intersección infinita de subconjuntos cerrados es un subconjunto cerrado. Sigue verificar que cada $Z_\alpha \neq \varnothing$. Para esto probamos primero que $\{l_\alpha^\beta(L_\beta) \mid \beta \geq \alpha\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Tomamos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Delta$ arbitrarios con $\beta_i \geq \alpha$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la proposición 2.1.5

tenemos que existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$; tomemos $y_\gamma \in L_\gamma$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, tenemos que $l_\alpha^\gamma(y_\gamma) \in l_\alpha^\gamma(L_\gamma) = l_\alpha^{\beta_i}(l_{\beta_i}^\gamma(L_\gamma)) \subseteq l_\alpha^{\beta_i}(Y_{\beta_i})$, y de esta manera $l_\alpha^\gamma(y_\gamma) \in \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} l_\alpha^{\beta_i}(L_{\beta_i})$. Gracias a este resultado se cumple la propiedad de intersección finita y como L_α es compacto, por el teorema 1.2.39 tenemos que la intersección es diferente del vacío, es decir $Z_\alpha \neq \varnothing$. Ya que $Z_\alpha \subseteq L_\alpha \subseteq X_\alpha$, X_α es compacto y Z_α es cerrado por el teorema 1.2.40 tenemos que Z_α es compacto. Ahora, dado $\beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$, vamos a probar que $l_\alpha^\beta(Z_\beta) \subseteq Z_\alpha$. Esto lo hacemos por medio de las siguientes contenciones:

$$\begin{aligned} l_\alpha^\beta(Z_\beta) &= l_\alpha^\beta(\bigcap\{l_\beta^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \beta\}) \\ &\subseteq \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \beta\} \\ &\subseteq \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \alpha\} \\ &= Z_\alpha, \end{aligned}$$

por lo que se cumple la contención. De esta manera, $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ donde cada $Z_\alpha \neq \varnothing$. Hay que ver que el límite inverso de este sistema coincide con $\varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Tenemos que $\varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle \subseteq \varprojlim\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$; para la otra contención, tomamos $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Dado $\alpha \in \Delta$ se cumple que $l_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$, para todo $\beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$. Por lo tanto, $y_\alpha \in \bigcap\{l_\alpha^\beta(L_\alpha) \mid \beta \geq \alpha\} = Z_\alpha$, y así $h_\alpha^\beta(y_\beta) = g_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$. En conclusión, $y \in \varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, por lo que $\varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Por lo tanto, $\varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle \in \mathscr{C}$.
Dado que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un elemento minimal de $\mathscr{C}$ y además, $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle \geq \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, tenemos que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Por lo tanto, $Z_\alpha = L_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$.
Ya que la finalidad de estos resultados es demostrar que $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, tomamos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$. Ya tenemos que $l_\alpha^\beta(L_\beta) \subseteq L_\alpha$. Por otro lado, $L_\alpha = \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \alpha\} \subseteq l_\alpha^\beta(L_\beta)$. Así, $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, lo que quiere decir que l es sobreyectiva. De esta manera mostramos la existencia de un subsistema inverso que cumple con las propiedades *a*), *b*) y *c*). □

Gracias al teorema anterior, podemos reducir de manera significativa la demostración del siguiente resultado, el cual responde la pregunta que nos planteamos sobre los límites inversos no vacíos.

Teorema 3.2.9. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso, donde X_α es compacto y de Hausdorff, para cada $\alpha \in \Delta$. Si cada función enlace es cerrada, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \neq \varnothing$.

Demostración. Por el teorema 3.2.8, tenemos que existe un subsistema cerrado $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, donde cada Y_α es compacto y g_α^β es cerrada y sobreyectiva, tal que

$$\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle.$$

Para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_\alpha^\beta = \{(z_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha \mid h_\alpha^\beta(z_\beta) = z_\alpha\}.$$

Veamos que cada A_α^β es no vacío. Para esto tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ y $z_\alpha \in Z_\alpha$. Dado que h_α^β es sobreyectiva, existe $z_\beta \in Z_\beta$ tal que $h_\alpha^\beta(z_\beta) = z_\alpha$. De esta manera existe $z \in \prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha$ tal que $\pi_\beta(z) = z_\beta$ y $\pi_\alpha(z) = z_\alpha$. Por lo que tenemos que $z \in A_\alpha^\beta$, y en consecuencia $A_\alpha^\beta \neq \varnothing$.

Ahora veamos que la familia $\{A_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Para esto tomemos $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \in \Delta$ arbitrarios con $\alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n$ y veamos que $\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_{\alpha_i}^{\beta_i} \neq \varnothing$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $z_{\alpha_i} \in Z_{\alpha_i}$, la función $h_{\alpha_i}^{\beta_i}$ es sobreyectiva, por lo tanto existe $z_{\beta_i} \in Z_{\beta_i}$ tal que $h_{\alpha_i}^{\beta_i}(z_{\beta_i}) = z_{\alpha_i}$. De esta manera existe $z \in \prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha$ tal que $\pi_{\beta_i}(z) = z_{\beta_i}$ y $\pi_{\alpha_i}(z) = z_{\alpha_i}$. Así tenemos que $z \in \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_{\alpha_i}^{\beta_i}$ y se sigue que $\{A_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta\}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Demostremos que cada A_α^β es un subconjunto cerrado. Tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha \backslash A_\alpha^\beta$, así $h_\alpha^\beta(x_\beta) \neq x_\alpha$. Pongamos los elementos como $x'_\alpha = h_\alpha^\beta(x_\beta)$. Dado que $Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ y X_α es de Hausdorff por el inciso 3) del teorema 1.2.32, tenemos que Z_α es de Hausdorff. Por lo que existen dos subconjuntos abiertos U y U' de Z_α, tales que $x'_\alpha \in U'$, $x_\alpha \in U$ y $U \cap U' = \varnothing$. Por la continuidad de h, tenemos que $x_\beta \in V = (h_\alpha^\beta)^{-1}(U')$. Se sigue que $x \in W = \pi_\beta^{-1}(V) \cap \pi_\alpha^{-1}(U)$, donde W es un subconjunto abierto básico del producto. Hay que demostrar que $W \cap A_\alpha^\beta = \varnothing$. Supongamos que $W \cap A_\alpha^\beta \neq \varnothing$ y tomemos $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in W \cap A_\alpha^\beta$. Por un lado, $y \in A_\alpha^\beta$, es decir, $h_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$. Por otro lado, como $y \in W$, tenemos que $y_\alpha \in U$ y $y_\beta \in V$. Esto implica que $h_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha \in U'$, de aquí tenemos una contradicción, puesto que $U \cap U' = \varnothing$. Por lo tanto, $W \cap A_\alpha^\beta = \varnothing$ y $W \subseteq (\prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha)\backslash A_\alpha^\beta$. Se concluye que $(\prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha)\backslash A_\alpha^\beta$ es abierto, es decir, A_α^β es cerrado.

Como cada Z_α es compacto, por el teorema de Tychonoff (vea el teorema 2.2.13) tenemos que $\prod_{\alpha\in\Delta} Z_\alpha$ es compacto. También, como cada A_α^β es cerrado, por el teorema 1.2.39 tenemos que $\bigcap_{\alpha\leq\beta} A_\alpha^\beta \neq \varnothing$. Ahora, por el lema 3.1.10 $\bigcap_{\alpha\leq\beta} A_\alpha^\beta = \varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Por lo tanto, $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle = \varprojlim\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta\rangle \neq \varnothing$. □

3.3 Teoremas de preservación: axiomas de separabilidad y numerabilidad; compacidad y metrizabilidad

Como vimos en el capítulo 1, dentro de las propiedades clásicas de la topología se encuentran los axiomas de separabilidad y numerabilidad. Dado que el límite inverso es

un subespacio del producto, los siguientes corolarios se obtienen de manera inmediata.

Proposición 3.3.1. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso e $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Si X_α es T_i, para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es T_i.

Demostración. Se obtiene inmediatamente de los teoremas 2.2.11 y 1.2.32. □

Proposición 3.3.2. Sea $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ un sistema inverso. Si X_n es primero (segundo) numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es primero (segundo) numerable.

Demostración. Se obtiene inmediatamente de los teoremas 2.2.12 y 1.2.36. □

Toca ahora enunciar dos de los teoremas más importantes sobre la estabilidad de los límites inversos con la compacidad y la metrizabilidad. Estos resultados son importantes para el estudio de límites inversos en la teoría de continuos. Sobre la compacidad, el siguiente teorema es de los resultados fuertes de la teoría de límites inversos y una demostración la podemos consultar en el capítulo 4 de [Sto79]. Es necesario mencionar que el resultado se obtiene principalmente del teorema de Tychonoff (vea el teorema 2.2.13).

Teorema 3.3.3. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso. Si X_α es un espacio compacto y Hausdorff, para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un espacio compacto.

Demostración. Dado que para todo $\alpha \in \Delta$, X_α es compacto, por el teorema 2.2.13 tenemos que $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ es compacto. También tenemos que como cada X_α es un espacio de Hausdorff, por el teorema 3.2.2, $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio cerrado del producto. Finalmente, por estas dos conclusiones y por el teorema 1.2.40, tenemos que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es compacto. □

Respecto a la metrizabilidad, podemos asegurar que la propiedad se cumple en los límites inversos solo cuando el conjunto dirigido es numerable, por lo que la demostración se hace tomando el conjunto de los número naturales $\mathbb{N}$.

Teorema 3.3.4. Sea $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ un sistema inverso. Si X_n es un espacio metrizable, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es un espacio metrizable.

Demostración. Dado que cada X_n es metrizable, por el teorema 2.2.16, tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es metrizable y dado que $\varprojlim\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N}\rangle$ es un subconjunto del producto, por el teorema 1.2.51, también es metrizable. □

3.4 Propiedades que indican cuando un espacio es homeomorfo a un límite inverso

Teniendo en cuenta los resultados de secciones anteriores consideramos que tenemos herramientas suficientes para demostrar aún más propiedades de los límites inversos que son de cierta forma menos intuitivas. Apoyándonos de libros como [Eng89], [Chi96] y [Wil04], hemos recolectado en esta sección algunos resultados que consideramos hacen uso de las herramientas mostradas con anterioridad. De igual manera, los resultados se adaptaron con la notación que hemos estado empleando.

Proposición 3.4.1. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso, donde X_α es un espacio de Hausdorff, para cada $\alpha \in \Delta$. Si A es un subespacio de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, entonces $\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subsistema, donde $A_\alpha = p_\alpha(A)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y $g_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta|_{\overline{A_\beta}}$ para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$ tal que $\overline{A} = \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, g_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.

Demostración. Dado que cada X_α es un espacio de Hausdorff, por el inciso 3) del teorema 1.2.32, cada $\overline{A_\alpha}$ es un espacio de Hausdorff; a partir de esto, por el teorema 3.2.2 tenemos que $\varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio cerrado en $\prod_{\alpha\in\Delta} \overline{A_\alpha}$. Al ser $\prod_{\alpha\in\Delta} \overline{A_\alpha}$ un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, tenemos que $\varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ también lo es en $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$. Toca demostrar la igualdad.
$\subseteq$] Para esta contención, como $\varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio cerrado del producto, basta con demostrar que $A \subseteq \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Dado $x \in A$, se cumple que $p_\alpha(x) = x_\alpha \in p_\alpha(A) = A_\alpha \subseteq \overline{A_\alpha}$, para todo $\alpha \in \Delta$. Además, como A es un subespacio de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$, se cumple que $g_\alpha^\beta(x_\beta) = p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$. Así $x \in \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y por lo tanto, $A \subseteq \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Luego tenemos que $\overline{A} \subseteq \overline{\varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle}$ y como el límite inverso es un subespacio cerrado tenemos que $\overline{A} \subseteq \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.
$\supseteq$] Tomemos $x \in \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. De esta forma, para cada $\alpha \in \Delta$, tenemos que $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$; además de que $x \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Ahora tomemos un subconjunto abierto básico $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tal que $x \in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Veamos que $A \cap p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \varnothing$. Como $x \in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, tenemos que $x_\alpha \in U_\alpha$ y dado que $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$, entonces $A_\alpha \cap U_\alpha \neq \varnothing$. De donde, $A \cap p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \varnothing$, esto es $x \in \overline{A}$. En consecuencia, $\varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \subseteq \overline{A}$.
De las contenciones anteriores se obtiene la igualdad $\overline{A} = \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. □

A partir del resultado anterior podemos concluir de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 3.4.2. Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso, donde X_α es un espacio de Hausdorff, para cada $\alpha \in \Delta$. Si A un subespacio cerrado de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, entonces A es el límite inverso del subsistema $\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, donde $A_\alpha = p_\alpha(A)$ para $\alpha \in \Delta$ y $g_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta|_{\overline{A_\beta}}$ para $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$.

Antes de incluir el siguiente resultado necesitamos hacer mención de las propiedades topológicas multiplicativas.

Definición 3.4.3. Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es (*finitamente*) *multiplicativa* si para toda familia (finita) $\{X_\alpha \mid \alpha \in F\}$ de espacios topológicos con la propiedad $\mathcal{P}$, el producto $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$ también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Teorema 3.4.4. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una propiedad hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados y finitamente multiplicativa. Tenemos que X es homeomorfo al límite inverso de un sistema inverso de espacios de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$ si y solo si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es homeomorfo al límite inverso de un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, donde cada X_α es un espacio de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$. Dado que para todo $\alpha \in \Delta$, el espacio X_α es de Hausdorff, por el teorema 3.2.2 tenemos que $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un subespacio cerrado de $\prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ y por lo tanto X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$.
$\Leftarrow$] Supongamos que X es homeomorfo a un subespacio cerrado A de un producto $\prod_{i\in I} Z_i$ donde, cada Z_i es un espacio de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$. Por el ejemplo 3.1.8 podemos construir un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ cuyo límite inverso es homeomorfo a $\prod_{i\in I} Z_i$. Luego, por la definición 1.2.25, existe un homeomorfismo $h : \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \to \prod_{i\in I} Z_i$. Dado que cada X_α es un producto finito de espacios de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$, por hipótesis, tenemos que X_α también tiene la propiedad $\mathcal{P}$. También por el teorema 2.2.11 cada X_α es un espacio de Hausdorff y como h es continua, se sigue que $h^{-1}(A)$ es un subespacio cerrado de $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Ahora, por el corolario 3.4.2 tenemos que $h^{-1}(A) = \varprojlim\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, y como cada $\overline{A_\alpha}$ es un subespacio cerrado de X_α se sigue que $\overline{A_\alpha}$ hereda la propiedad $\mathcal{P}$. De igual manera, por el teorema 1.2.32, cada $\overline{A_\alpha}$ es un subespacio de Hausdorff. Como $h^{-1}(A)$ es homeomorfo a A, $h^{-1}(A)$ es homeomorfo a X. Finalmente podemos concluir que existe un sistema inverso $\langle \overline{A_\alpha}, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$, donde cada A_α es un espacio de Hausdorff con la propiedad $\mathcal{P}$ cuyo límite inverso es homeomorfo a X. □

Culminamos esta sección presentando una solución de un ejercicio propuesto en la sección de límites inversos de [Wil04]. Como se ha mencionado, en la resolución adapta-

mos los resultados a nuestra notación y los hemos colocado como proposiciones con sus respectivas demostraciones.

Proposición 3.4.5. Sean X un espacio topológico y $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ un sistema inverso. Tenemos que X es homeomorfo a $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ si y solo si existe una familia de funciones continuas $\{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$, se cumple que $p_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$.

ii) Dado un espacio topológico (Y, η) y dos funciones continuas $g : Y \to X$ y $l : Y \to X$, si $f_\alpha \circ g = f_\alpha \circ l$, para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $g = l$.

iii) Dado (Y, η) un espacio topológico y una familia de funciones continuas $\{h_\alpha : Y \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, que cumple que $p_\alpha^\beta \circ h_\beta = h_\alpha$, existe una función continua $f : Y \to X$ tal que $f_\alpha \circ f = h_\alpha$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es homeomorfo a $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Así, existe un homeomorfismo $h : X \to \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Definamos la función $f_\alpha = p_\alpha \circ h$, para cada $\alpha \in \Delta$. Dado que cada f_α es la composición de dos funciones continuas, ésta también es continua. Ahora, veamos que se cumplen las tres condiciones para la familia $\{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

i) Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$. Utilizando que $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ es un sistema inverso tenemos que

$$\begin{aligned} p_\alpha^\beta \circ f_\beta &= p_\alpha^\beta \circ (p_\beta \circ h) \\ &= (p_\alpha^\beta \circ p_\beta) \circ h \\ &= p_\alpha \circ h \\ &= f_\alpha, \end{aligned}$$

por lo que se cumple la primera condición.

ii) Sean Y un espacio topológico y g y l dos funciones continuas de Y a X tales que $f_\alpha \circ g = f_\alpha \circ l$, para todo $\alpha \in \Delta$. Para demostrar que $g = l$, supongamos que $g \neq l$. Así, existe $y \in Y$ tal que $g(y) \neq l(y)$ y de este modo $(h \circ g)(y) \neq (h \circ l)(y)$. Luego, existe $\beta \in \Delta$ tal que $p_\beta((h \circ g)(y)) \neq p_\beta((h \circ l)(y))$. Se sigue, por definición, que $(f_\beta \circ g)(y) \neq (f_\beta \circ l)(y)$, lo cual es una contradicción, puesto que estamos suponiendo que $f_\alpha \circ g = f_\alpha \circ l$. Por lo tanto $g = l$.

iii) Ahora, sean Y un espacio topológico y $\{h_\alpha : Y \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ una familia de funciones continuas, donde cada función cumple que $p_\alpha^\beta \circ h_\beta = h_\alpha$. Tomemos la función $f : Y \to X$ dada por $f(y) = h^{-1}((h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta})$, para todo $y \in \Delta$. Veamos que ésta cumple con la condición *iii)*. Antes verifiquemos que esta función está bien

definida, es decir, que cada $(h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta}$ es un elemento del límite inverso. Para esto tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$. Tenemos que $p_\alpha^\beta(h_\beta(y)) = p_\alpha^\beta \circ h_\beta(y) = h_\alpha(y)$, por lo que $(h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Además, como f es composición de funciones continuas, f también es una función continua. Por último, tomemos $y \in Y$ y $\beta \in \Delta$. Por hipótesis tenemos que,

$$\begin{aligned}(f_\beta \circ f)(y) &= f_\beta(h^{-1}((h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta})) \\ &= (p_\beta \circ h)(h^{-1}((h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta})) \\ &= p_\beta((h_\alpha(y))_{\alpha\in\Delta})) \\ &= h_\beta(y).\end{aligned}$$

Por lo que f cumple la condición deseada.

$\Leftarrow$] Supongamos que existe una familia de funciones continuas $\{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ que satisface las condiciones *i*), *ii*) y *iii*). Para encontrar un homeomorfismo entre X y $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ construimos una función $f : X \to \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ tal que $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in\Delta}$, para todo $x \in X$. Primero veamos que f está bien definida. Tomemos $x \in X$ y $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \geq \beta$. Teniendo en cuenta la hipótesis *i*) obtenemos que $p_\alpha^\beta(f_\beta(x)) = (p_\alpha^\beta \circ f_\beta)(x) = f_\alpha(x)$. Esto quiere decir que $f(x) \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$.
Notemos que la función $(p_\alpha \circ f) = f_\alpha$ es continua, para todo $\alpha \in \Delta$. Así, por el teorema 2.2.9 tenemos que f es continua.
Ahora demostremos que f es inyectiva. Para esto tomemos $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$, lo que quiere decir que $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$, para todo $\alpha \in \Delta$. Consideremos $g : X \to X$ como la función identidad y $l : X \to X$ como la función constante tal que $l(x) = y$, para todo $x \in X$. Observemos que $g(x) = x$ y $l(x) = y$, por lo que si sustituimos a x y y en la igualdad anterior tenemos que $(f_\alpha \circ g)(x) = (f_\alpha \circ l)(x)$. Como g y l son continuas, por la condición *ii*) se sigue que $g = l$, esto es, $g(x) = l(x)$, lo que nos lleva a que $x = y$. Así f es inyectiva.
Ahora veamos que f es sobreyectiva. Tomemos $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$ y veamos que existe $x \in X$ tal que $f_\alpha(x) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$. Para cada $\alpha \in \Delta$, definamos la función $h_\alpha : X \to X_\alpha$ tal que $h_\alpha(x) = x_\alpha$, para todo $x \in X$. Así, tenemos una familia de funciones continuas $\{h_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Notemos que si $x \in X$ y $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$, entonces $(p_\alpha^\beta \circ h_\beta)(x) = p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$. De donde $(p_\alpha^\beta \circ h_\beta)(x) = h_\alpha(x)$. Como se cumplen las hipótesis de la condición *iii*), existe una función continua $h : X \to X$ tal que $f_\alpha \circ h = h_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$. Ahora, tomando $x \in X$ y $\alpha \in \Delta$, tenemos que $(f_\alpha \circ h)(x) = h_\alpha(x)$. De esta manera existe $h(x) \in X$ tal que $f_\alpha(h(x)) = x_\alpha$, por lo cual f es sobreyectiva.
Solo queda ver que f^{-1} es continua. Notemos que la familia de funciones proyección $\{p_\alpha : \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \to X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ cumple que $p_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$. De donde, por *iii*), existe una función continua $h : \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle \to X$ tal que $f_\alpha \circ h = p_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$. Por otro lado, demostremos que $f^{-1} = h$ (lo haremos viendo que $f \circ h$ y $h \circ f$ son la función

identidad en sus respectivos dominios y contradominios). Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. Notemos que $f(h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta})) = (f_\alpha(h((x_\alpha)_{\alpha\in\Delta})))_{\alpha\in\Delta} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, por lo que $f \circ h$ es la función identidad. Ahora para $x \in X$, tenemos que $h(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(h(f(x))) = f^{-1}((f \circ h)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$, por lo que $h \circ f$ es la función identidad. Por lo tanto, $f^{-1} = h$ y así f^{-1} es continua.
Con todo f es un homeomorfismo. Esto es, X es homeomorfo a $\varprojlim\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta\rangle$. □

Capítulo 4

Límites inversos con los naturales como conjunto de índices

4.1 Sucesiones inversas

Como hemos mencionado en el capítulo 3, la definición formal de límite inverso está basada en la introducida por S. Lefschetz en 1931. Lo que buscamos en esta sección es conocer las características de un límite inverso cuando tenemos a los naturales como conjunto dirigido.

Teniendo en cuenta que los naturales, no solo son un conjunto dirigido, sino un conjunto totalmente ordenado, podemos obtener conclusiones como la siguiente.

Lema 4.1.1. Sea $\langle X_n, f_n^m, \mathbb{N}\rangle$ un sistema inverso. Tenemos que $f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, si y solo si $f_n^m(x_m) = x_n$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle X_n, f_n^m, \mathbb{N}\rangle$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Notemos que $m \geq m-1 \geq \cdots \geq n+1 \geq n$. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_n^m(x_m) &= f_n^{m-1}(f_{m-1}^m(x_m)) \\ &= f_n^{m-1}(x_{m-1}) \\ &\vdots \\ &= f_n^{n+1}(f_{n+1}^{n+2}(x_{n+2})) \\ &= f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \end{aligned}$$

de aquí, $f_n^m(x_m) = x_n$.
$\Leftarrow$] Simplemente ponemos $m = n+1$. □

Considerando el lema 4.1.1, adoptamos el nombre de *sucesión inversa* al referirnos a un sistema inverso indexado con el conjunto de números naturales y reescribimos el sistema inverso como:

$$\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle.$$

El diagrama 4.1 nos brinda una visualización de estas sucesiones.

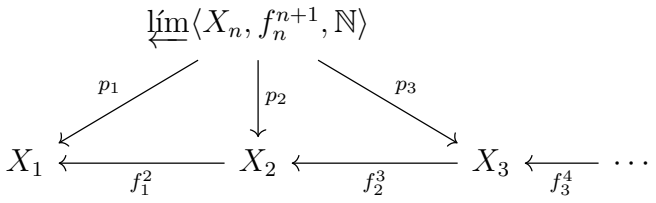


Diagrama 4.1: Sucesión inversa y límite inverso.

Notación 4.1.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua arbitraria. En el desarrollo de los siguientes temas, vemos algunas construcciones de sucesiones inversas $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$, en donde cada espacio topológico X_n es el mismo espacio X y las funciones enlace son composiciones de la función f. Tomando en cuenta el lema 4.1.1, las funciones se simplifican de la siguiente manera

$$f_n^{n+1} = f^{n+1-n} = f.$$

De esta forma la sucesión inversa queda escrita como

$$\langle X, f, \mathbb{N} \rangle.$$

en este caso, el límite inverso también suele expresarse como

$$\varprojlim\langle X, f, \mathbb{N} \rangle.$$

4.2 Resultados clásicos de límites inversos de sucesiones inversas

Dentro de la enorme variedad de propiedades topológicas podemos encontrar los continuos (vea la definición 1.2.52). Dado que los subconjuntos de un espacio conexo, no necesariamente son conexos, es lógico pensar que el límite inverso no siempre lo es; lo mismo pasa con los continuos. Sin embargo, el siguiente teorema garantiza que el límite inverso de continuos es un continuo.

Teorema 4.2.1. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa. Si X_n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo.

Demostración. Supongamos que X_n es un continuo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos el subespacio

$$Z_m = \{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

También definimos el conjunto $\Delta_m = \mathbb{N}\backslash\{1, \ldots, m\}$. A partir de $Z_1 = \{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_1^2(x_2) = x_1\}$, podemos reescribir cada espacio de manera recursiva como

$$Z_m = Z_{m-1} \cap \{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_m^{m+1}(x_{m+1}) = x_m\}, \text{ para } m \geq 2.$$

Ahora tomemos $m \in \mathbb{N}$, primero demostremos que Z_m es un continuo. Para esto definimos la función $f_m : \prod_{n\in\Delta_m} X_n \to Z_m$ dada por

$$f_m((x_n)_{n\in\Delta_m}) = (f_i^{i+1}(x_{i+1}))_{i\in\{1,\ldots,m\}} \times (x_n)_{n\in\Delta_m},$$

para todo $(x_n)_{n\in\Delta_m} \in \prod_{n\in\Delta_m} X_n$. Veamos que f_m es continua utilizando la proposición 2.2.9. Verifiquemos que $\pi_n \circ f_m$ es continua, para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $n \geq m+1$, tenemos que $\pi_n \circ f_m = \pi_m$. Esto es, se cumple el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \prod_{n\in\Delta_m} X_n & \xrightarrow{\quad f_m \quad} & Z_m \\ & {\scriptstyle \pi_n\circ f_m}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_m} & \\ & X_n & \end{array}$$

Ahora, cuando $n < m+1$, como $f_n^m = f_n^{n+1} \circ \ldots \circ f_{m-1}^m$, se cumple que $\pi_n \circ f_m = f_n^m \circ \pi_m$. De donde se satisface el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \prod_{n\in\Delta_m} X_n & \xrightarrow{\quad f_m \quad} & Z_m \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_m} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ X_m & \xrightarrow{\quad f_n^m \quad} & X_n \end{array}$$

Como consecuencia de la continuidad de π_m y f_n^m, $f_n^m \circ \pi_m = \pi_n \circ f_m$ es continua. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $\pi_n \circ f_m$ es continua. Por lo que, por la proposición 2.2.9, la función f_m es continua en $\prod_{n\in\Delta_m} X_n$.
Sigue ver que f_m es sobreyectiva. Para esto tomemos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_m$. Dado $i \in \Delta_m$, notemos que $f_i^{i+1}(z_{i+1}) = z_i$. Además de que $(z_n)_{n\in\Delta_m} \in \prod_{n\in\Delta_m} X_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_m((z_n)_{n\in\Delta_m}) &= (f_i^{i+1}(z_{i+1}))_{i\in\{1,\ldots,m\}} \times (z_n)_{n\in\Delta_m} \\ &= (z_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \times (z_n)_{n\in\Delta_m} \\ &= (z_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Por el teorema 2.2.17 tenemos que $\prod_{n\in\Delta_m} X_n$ es un continuo y dado que f_m es una función continua y sobreyectiva, por el teorema 1.2.54, concluimos que $f_m(\prod_{n\in\Delta_m} X_n) = Z_m$ es un continuo.
Por el lema 3.1.10 tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Además, no es difícil ver que $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \cdots$, donde cada Z_n es un continuo para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por el teorema 1.2.55 concluimos que $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo. □

Hemos visto en el teorema 3.2.9 las condiciones suficientes para que un límite inverso sea no vacío. En el ejercicio 2.5.*A* de [Eng89], se plantea que si $\mathbb{N}$ es el conjunto dirigido, entonces para asegurar que el límite inverso sea no vacío, únicamente debemos condicionar las funciones enlace, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa. Si cada función enlace es sobreyectiva, entonces $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \neq \varnothing$.

Demostración. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}, \rangle$ una sucesión inversa, donde cada función enlace es sobreyectiva. Tomemos $x_1 \in X_1$. Por la sobreyectividad de f_1^2, existe $x_2 \in X_2$ tal que $f_1^2(x_2) = x_1$. De la misma manera, para x_2 existe $x_3 \in X_3$ tal que $f_2^3(x_3) = x_2$. Siguiendo este proceso de manera inductiva, tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Con esto concluimos que $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \neq \varnothing$. □

De forma casi inmediata, en vista del teorema 4.2.2 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.3. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa, donde cada función enlace es sobreyectiva. Se cumple que $\pi_n\left(\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle\right) = X_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cuando trabajamos con el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ se tienen propiedades interesantes con los límites inversos. Para conocer algunos de estos resultados debemos tomar en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 4.2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico.

i) Si X es conexo, un *punto de separación* (*o de corte*) es un elemento $p \in X$ tal que $X\backslash\{p\}$ es no conexo.

ii) Si X es un continuo, X es un *arco* si solo tiene dos puntos de no separación.

Es sencillo demostrar la siguiente equivalencia.

Proposición 4.2.5. Si X es un continuo, entonces X es un arco si y solo si X es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Observación 4.2.6. En ocasiones, encontramos que la definición de arco se expresa como la proposición 4.2.5. En este trabajo de tesis usamos una u otra definición dependiendo de cual se nos facilite demostrar.

Antes de continuar con el tema de arcos para límites inversos, incluimos los siguientes hechos con la finalidad de facilitar las demostraciones de resultados de mayor interés para la tesis. La demostración la podemos encontrar en [IM12].

Teorema 4.2.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es un continuo, entonces X tiene al menos dos puntos de no separación.

Proposición 4.2.8. Dados dos arcos A y B. Si $A \cap B = \{p\}$, para algún p, entonces $A \cup B$ es un arco.

Demostración. Primero tomemos $r \in (0,1)$. Como A y B son arcos, existen $h_1 : A \to [0, r]$ y $h_2 : B \to [r, 1]$ homeomorfismos. Definimos la función $h : A \cup B \to [0, 1]$ como

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si} \quad A \backslash B, \\ r & \text{si} \quad x = p, \\ h_2(x) & \text{si} \quad B \backslash A, \end{cases}$$

para todo $x \in A \cup B$. Basta con notar que h es un homeomorfismo para ver que $A \cup B$ es un arco. □

Teorema 4.2.9. Sea $\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ una sucesión inversa. Si cada f_n^{n+1} es biyectiva, entonces $\varprojlim \langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ es un arco.

Demostración. Dado que $\varprojlim \langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ es un subconjunto de $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$, probemos que la proyección $\pi_1 : \varprojlim \langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle \to [0,1]$ es biyectiva.
Primero demostremos la inyectividad, para esto tomemos $x, y \in \varprojlim \langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ tales que $x \neq y$. Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq y_n$. Luego, como f_{n-1}^n es inyectiva, $f_{n-1}^n(x_n) \neq f_{n-1}^n(y_n)$. Por definición del límite inverso se tiene que $f_{n-1}^n(x_n) = x_{n-1}$ y $f_{n-1}^n(y_n) = y_{n-1}$. De donde, $x_{n-1} \neq y_{n-1}$. Por la inyectividad de f_{n-2}^{n-1}, tenemos que $f_{n-2}^{n-1}(x_{n-1}) \neq f_{n-2}^{n-1}(x_{n-1})$. En consecuencia, $x_{n-2} \neq y_{n-2}$. Siguiendo esta idea de manera inductiva hasta f_1^2, concluimos que $x_1 \neq x_2$, es decir, $\pi_1(x) \neq \pi_1(y)$. Por lo tanto π_1 es inyectiva.
Ahora, probemos que π_1 es sobreyectiva. Para esto, tomemos $x_1 \in [0,1]$. Dado que f_n^{n+1} es sobreyectiva, existe $x_2 \in [0,1]$ tal que $f_1^2(x_2) = x_1$. De igual forma, existe $x_3 \in [0,1]$ tal que $f_2^3(x_3) = x_2$. Siguiendo este proceso de manera inductiva concluimos que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ tal que $\pi_1((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_1$. Así π_1 es sobreyectiva.

Como $[0,1]$ es compacto, por el teorema 3.3.3, tenemos que $\varprojlim\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es compacto. Ahora, como $\varprojlim\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es compacto y $[0,1]$ es de Hausdorff, y además, la proyección π_1 es continua y sobreyectiva, por el teorema 1.2.44, obtenemos que π_1 es un homeomorfismo. Esto quiere decir que $\varprojlim\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un arco. □

Dado que uno de los objetivos de esta sección es asociar un límite inverso a la curva del topólogo, resulta conveniente estudiar límites inversos similares al que queremos construir. El objetivo del siguiente teorema es mostrar un límite inverso más «sencillo» al que se planea exponer más adelante.

Teorema 4.2.10. Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es la función definida de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

entonces $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ es un arco.

Demostración. Dado que el límite inverso es un subespacio de $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ y es además un continuo, por el teorema 4.2.7 solamente debemos demostrar que cualquier punto en $S = \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \backslash \{(0)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es un punto de separación.
Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (0,1)$. Como n puede no ser único, diremos que n es el índice más pequeño que cumple esto, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in (0,1)$, entonces $n \leq m$. En particular, se cumple que $x_n \in [\frac{1}{2}, 1)$, puesto que si $x_n \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $f(x_n) = x_{n-1} \in (\frac{1}{2}, 1)$, con lo cual, n no es el más pequeño tal que $x_n \in (0,1)$.
Veamos primero que x es el único punto en el límite inverso tal que $\pi_n(x) = x_n$. Para esto tomemos $y \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ tal que $\pi_n(y) = x_n$. Dado que $x_n \in [\frac{1}{2}, 1)$, tenemos que $f(x_n) = x_{n-1} = y_{n-1} = 1$. Como $x, y \in S$, se cumple que $x_i = y_i = 1$, para todo $i < n$. Ahora, para todo $i > n$, se cumple que $f((0, \frac{1}{2^{i-n+1}})) = (0, \frac{1}{2^{i-n}})$, por lo que $x_i = y_i = \frac{x_n}{2^{i-n}}$. Así, tenemos que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir, $x = y$. Por lo tanto, x es único.
Por lo demostrado anteriormente se cumple que $\pi_n^{-1}(\{x_n\}) = x$. También tenemos que $[0,1]\backslash\{x_n\}$ es la unión de los intervalos abiertos, $[0, x_n)$ y $(x_n, 1]$. Luego, $\pi_n^{-1}([0,1]\backslash\{x_n\}) = \pi_n^{-1}([0, x_n) \cup (x_n, 1])$. De esta forma,

$$\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \backslash \{x\} \subseteq \pi_n^{-1}([0, x_n)) \cup \pi_n^{-1}((x_n, 1]),$$

y teniendo en cuenta la observación 2.2.6, se sigue que $\pi_n^{-1}([0, x_n)) \cap \pi_n^{-1}((x_n, 1]) = \varnothing$. Por lo tanto, $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \backslash \{x\}$ es disconexo, y en consecuencia x es un punto de separación. Al ser x un punto arbitrario en S, tenemos que S consta únicamente de puntos de separación. Ahora, como $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo, por el teorema 4.2.7 se sigue que los únicos puntos de no separación en el límite inverso son $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(1)_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, por el inciso *ii*) de la definición 4.2.4, concluimos que $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ es un arco. □

El siguiente resultado se encuentra en [IM12]. Lo incluimos porque es de gran ayuda para demostrar el teorema 4.2.12, además de que sirve para relacionar límites inversos con conjuntos específicos a través de homeomorfismos.

Teorema 4.2.11. Sean $\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa y $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subintervalos cerrados de $[0,1]$ tales que $f_n^{n+1}(J_{n+1}) = J_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $K = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \mid x_i \in J_i \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una sucesión inversa $\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ tal que K es homeomorfo a $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$.

Demostración. Notemos que el intervalo cerrado J_n es de la forma $[a_n, b_n]$, donde $0 \leq a_n < b_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos la función $h_n : [0,1] \to J_n$ por $h_n(x) = a_n + x(b_n - a_n)$, para todo $x \in [0,1]$. Por el inciso i) del ejemplo 1.2.26, h_n es un homeomorfismo. Ahora definimos la función $g_n^{n+1} : [0,1] \to [0,1]$ por $g_n^{n+1}(x) = h_n^{-1}(f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)))$, para todo $x \in [0,1]$. Como f_n^{n+1} es una función enlace, g_n^{n+1} también es una función enlace. Así, podemos construir la sucesión inversa $\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$.
Definamos la función $h : \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \to K$ como $h((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (h_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$.
Tomemos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ y veamos que $(h_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ está en K. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(y_n) \in J_n$, se sigue que $f_n^{n+1}(h_{n+1}(y_{n+1})) = h_n(g_n^{n+1}(y_{n+1})) = h_n(y_n)$, y así $(h_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Por lo tanto, $(h_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in K$, lo que quiere decir que h está bien definida.
Ahora, veamos que h es inyectiva. Para esto tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq y_n$. Por ser h_n un homeomorfismo tenemos que $h_n(x_n) \neq h_n(y_n)$. En consecuencia, $(h_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \neq (h_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, h es inyectiva.
Sigue ver que h es sobreyectiva. Tomemos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $y_n \in J_n$, existe $x_n \in [0,1]$ tal que $h_n(x_n) = y_n$, por lo tanto $(h_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. También, tenemos que $g_n^{n+1}(x_{n+1}) = h_n^{-1}(f_n^{n+1}(h_{n+1}(x_{n+1}))) = h_n^{-1}(f_n^{n+1}(y_{n+1})) = h_n^{-1}(y_n) = x_n$. Por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Así, h es sobreyectiva.
Queda probar que h es continua. Para esto tomemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Sea V un subconjunto abierto básico de K con $h(x) \in V$. Como K es un subespacio del límite inverso, por el teorema 3.2.1, V es de la forma $V = p_n^{-1}(U_n) \cap K$. Así, $(p_n \circ h)(x) = h_n(x_n) \in U_n$. En particular, $h_n(x_n) \in J_n \cap U_n$. Como $J_n \cap U_n$ es un subconjunto abierto en J_n y h_n una función continua, tenemos que $h_n^{-1}(J_n \cap U_n)$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$ y $x_n \in h_n^{-1}(J_n \cap U_n)$. Por lo tanto, $x \in p_n^{-1}(h_n^{-1}(J_n \cap U_n))$. Para simplificar la notación, denotemos $U = p_n^{-1}(h_n^{-1}(J_n \cap U_n))$. Resta probar que $h(U) \subseteq V$. Tomemos $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ tal que $h(y) \in h(U)$. Por definición de U, tenemos que $p_n(y) = y_n \in h_n^{-1}(J_n \cap U_n)$. Se sigue que, $h_n(y_n) = (p_n \circ h)(y) \in J_n \cap U_n$. En particular, $(p_n \circ h)(y) \in U_n$, por lo que $h(y) \in p_n^{-1}(U_n)$. Por definición de h, tenemos que $h(y) \in K$. Así, $h(y) \in p_n^{-1}(U_n) \cap K$. Es decir, $h(U) \subseteq V$. De está manera, h es continua en x y como

x fue arbitrario, h es continua.
Dado que $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es compacto y K es un espacio de Hausdorff, por el teorema 1.2.44, concluimos que h es un homeomorfismo, es decir, K es homeomorfo a $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. □

Culminamos esta sección con un resultado que es un ejercicio tomado de [IM12]. La razón de su resolución e inclusión en la tesis es la visualización de este límite inverso y el reto que supone demostrar dicho resultado. Si bien, la demostración la podemos encontrar en el mismo [IM12], en esta referencia se muestran las ideas principales, por lo que nos planteamos desarrollarla a detalle, adaptándola en el proceso a la notación empleada en este trabajo de tesis. Para esto recordemos el ejemplo 1.2.17 de la curva del topólogo.

Teorema 4.2.12. La curva del topólogo es homeomorfa a un límite inverso.

Demostración. Sea S la curva del topólogo. Construiremos un sistema inverso cuyo límite inverso sea homeomorfo a S.
Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que f es continua y sobreyectiva. Tomemos como conjunto dirigido al conjunto de los número naturales $\mathbb{N}$. Los espacios topológicos X_n como el conjunto $[0,1]$ y las funciones enlace f_n^{n+1} como la función f. Con ello tenemos la sucesión inversa $\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$.
Para conocer los elementos del límite inverso definamos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \mid x_i \in [\tfrac{1}{2}, 1], i \in \mathbb{N}\}, \\ A_0 &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \mid x_i \in [0, \tfrac{1}{2^i}], i \in \mathbb{N}\} \text{ y} \\ A_n &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \mid x_1, \ldots, x_n \in [\tfrac{1}{2}, 1], x_{n+i} = \tfrac{x_n}{2^i}, i \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
A continuación demostramos que se cumple la igualdad

$$\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle = A \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n \right).$$

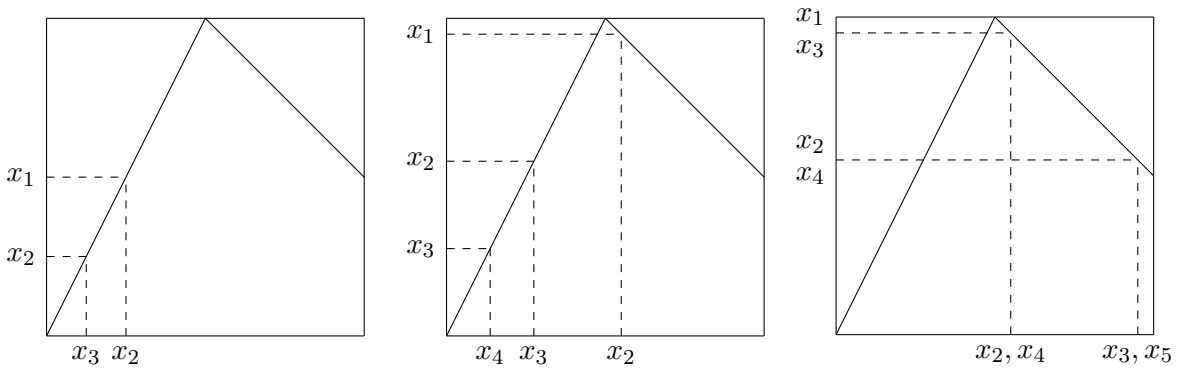
Se tiene de manera inmediata que $A \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \subseteq \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$. Para la otra contención tomemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$. Tenemos los siguientes casos.

- $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$. Como $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i})) = [0, \frac{1}{2^{i+1}})$, tenemos que $x_i \in [0, \frac{1}{2^i})$, para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in A_0$ (vea el diagrama 4.2(a)).

- $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Como $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) = [0, 1]$, tenemos que $x_2 \in [0, \frac{1}{2})$ o $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $x_3 \in [0, \frac{1}{2})$ o $x_3 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Siguiendo este razonamiento tenemos que $x_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in A$ (vea el diagrama 4.2(c)).
  Ahora, como $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) = [0, 1]$ y $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$, podemos suponer que $x_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ hasta un determinado $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $x_{n+1} \in [0, \frac{1}{2})$ o $x_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Cuando $x_{n+1} \in [0, \frac{1}{2})$, como $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i})) = [0, \frac{1}{2^{i+1}})$, tenemos que $x_{n+i} \in [0, \frac{1}{2^i}]$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo que $x \in A_n$ (vea el diagrama 4.2(b)).

De esta manera, en cualquier caso $x \in A \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$, es decir, tenemos la igualdad deseada.

Veamos que se cumple lo siguiente. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe un único $x \in \varprojlim\langle [0, 1], f, \mathbb{N}\rangle$



(a) Elemento de A_0. (b) Elemento de A_2. (c) Elemento de A.

Diagrama 4.2: Elementos del límite inverso.

tal que $A_n \cap A_{n+1} = \{x\}$. Tomemos $x, y \in A_n \cap A_{n+1}$. Por un lado, como $x, y \in A_n$, tenemos que $x_{n+1}, y_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$. Por otro lado, como $x, y \in A_{n+1}$, tenemos que $x_{n+1}, y_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Esto solo sucede si $x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{1}{2}$. Por definición de A_n, tenemos que $x_{n+i} = y_{n+i} = \frac{1}{2^{i+1}}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $x_{n+1} = y_{n+1}$, aplicando f tenemos que $f(x_{n+1}) = f(y_{n+1})$, es decir, $x_n = y_n$. Aplicando nuevamente f, tenemos que $f(x_n) = f(y_n)$, es decir, $x_{n-1} = y_{n-1}$. Usando este razonamiento llegamos a que $f(x_2) = f(y_2)$, es decir, $x_1 = y_1$. Por lo que $x_n = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que quiere decir que $x = y$.

Con la demostración anterior también podemos observar que $\{(\frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)\} = A_n \cap A_{n+1}$, si n es par o 0, y que $\{(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)\} = A_n \cap A_{n+1}$ si n es impar.

Ahora veamos que se cumple lo siguiente. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n+1$ o $m < n-1$, se cumple que $A_n \cap A_m = \varnothing$. Tomemos $x \in A_n \cap A_m$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $m > n$. Como $x \in A_n$, tenemos que $x_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $x_m = \frac{x_n}{2^{m-n}}$. Por lo que $x_m < \frac{1}{2}$. Por otro lado, como $x \in A_m$, tenemos que $x_m \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo que $\frac{1}{2} \geq x_m$, pero esto no es posible. Por lo tanto, $A_n \cap A_m = \varnothing$.

Ahora, demostremos que A, A_0 y A_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, son arcos. Primero veamos que A es un arco. Sea $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subintervalos de $[0,1]$ tales que $J_n = [0, \frac{1}{2}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $f([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$. Ahora definimos la función $g : [0,1] \to [0,1]$ como $g(x) = 1 - x$, para todo $x \in [0,1]$. Por el teorema 4.2.11 tenemos que $\varprojlim\langle [0,1], g, \mathbb{N}\rangle$ es homeomorfo a A, y como g es biyectiva por el teorema 4.2.9 se cumple que $\varprojlim\langle [0,1], g, \mathbb{N}\rangle$ es un arco, por lo que A también lo es. Veamos que tanto $(1, \frac{1}{2}, 1, \dots)$ como $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots)$ son los puntos de no corte. Para esto, tomemos $x \in A\backslash\{(1, \frac{1}{2}, 1, \dots), (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots)\}$ y mostremos que $A\backslash\{x\}$ es disconexo. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (\frac{1}{2}, 1)$. De esta manera $[0, x_n) \cup (x_n, 1] = [0,1]\backslash\{x_n\}$ donde $[0, x_n)$ y $(x_n, 1]$ son subconjuntos abiertos de $[0,1]$. De manera similar al teorema 4.2.10 tenemos que $(\pi_n|_A)^{-1}([0, x_n)) \cup (\pi_n|_A)^{-1}((x_n, 1]) = A\backslash\{x\}$. Por lo que $A\backslash\{x\}$ es disconexo. En consecuencia, x es un punto de corte y así los únicos puntos de no corte de A son $(1, \frac{1}{2}, 1, \dots)$ y $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots)$.

Demostremos que A_0 es un arco. Para esto consideremos la familia $\{[0, \frac{1}{2^n}]\}_{n\in\mathbb{N}}$, y notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $f([0, \frac{1}{2^{n+1}}]) = f([0, \frac{1}{2^n}])$. Definamos la función $g : [0,1] \to [0,1]$ como $g(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$. Por el teorema 4.2.11 tenemos que A_0 es homeomorfo a $\varprojlim\langle [0,1], g, \mathbb{N}\rangle$ y como g es biyectiva, por el teorema 4.2.9, se sigue que A_0 es un arco. Con un argumento análogo a como se hizo con A se puede demostrar que $(0, 0, 0, \dots)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ son los puntos de no corte de A_0.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y veamos que A_n es un arco. Sea $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subintervalos de $[0,1]$ definida de la forma $J_i = [\frac{1}{2}, 1]$ para $i \leq n$ y $J_i = [\frac{1}{2^{i-n+1}}, \frac{1}{2^{i-n}}]$ para $i > n$. Es fácil ver que $f(J_{i+1}) = J_i$. Por el teorema 4.2.11 A_n es homeomorfo a $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$, donde las funciones enlace son tales que: $g_i^{i+1}(x) = 1 - x$ si $i \geq n$ y $g_i^{i+1}(x) = x$ si $i > n$. Como las funciones enlace son biyectivas, por el teorema 4.2.9, concluimos que A_n es un arco. Observemos que los puntos de no corte de A_n son $w^n, z^n \in A_n$ tales que

$$\pi_i(w^n) = \begin{cases} f^{n-i}(1), & \text{si} \quad i \leq n, \\ f^{i-n}(1), & \text{si} \quad i > n, \end{cases}$$

y

$$\pi_i(z^n) = \begin{cases} f^{n-i}(\frac{1}{2}), & \text{si} \quad i \leq n, \\ f^{i-n}(\frac{1}{2}), & \text{si} \quad i > n. \end{cases}$$

Para comenzar con la construcción del homeomorfismo entre el límite inverso y S, definimos las funciones $\psi : [0, \frac{1}{2}] \to [1, \frac{\pi}{2}]$ como $\psi(x) = (\pi - 2)x + 1$, para cada $x \in [0, \frac{1}{2}]$, y $\varphi : [\frac{1}{2}, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ como $\varphi(x) = 2\pi x - \frac{3\pi}{2}$, para cada $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por el inciso i) del ejemplo 1.2.26 tenemos que ψ y φ son homeomorfismos. Ahora definimos la función

$h : \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle \to S$ por:

$$h(x) = \begin{cases} (0, -\text{sen}(\varphi(\pi_1(x)))), & \text{si} \quad x \in A, \\ \left(\frac{1}{\psi(\pi_1(x))}, \text{sen}(\psi(\pi_1(x)))\right), & \text{si} \quad x \in A_0, \\ \left(\frac{1}{n\pi+\varphi(\pi_1(x))}, -\text{sen}(\varphi(\pi_1(x)))\right), & \text{si} \quad x \in A_n \text{ con } n \text{ impar}, \\ \left(\frac{1}{n\pi-\varphi(\pi_1(x))}, -\text{sen}(\varphi(\pi_1(x)))\right), & \text{si} \quad x \in A_n \text{ con } n \text{ par}. \end{cases}$$

Afirmamos que h es un homeomorfismo.

Para que no haya confusión, consideremos las siguientes notaciones para las proyecciones $\pi_n : \prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1] \to [0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi_1 : [0,1]\times[-1,1] \to [0,1]$ y $\xi_2 : [0,1]\times[-1,1] \to [-1,1]$. Demostremos la continuidad de h con ayuda del teorema 2.2.9, por lo que debemos mostrar que tanto $\xi_1 \circ h$ como $\xi_2 \circ h$ son continuas. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ y $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ tal que $y^m \to x$. Verificamos que $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$ y $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$. Dividimos la demostración en cuatro casos: $x \in A_0$, $x \in A_n$ con n par, $x \in A_n$ con n impar o $x \in A$.

Caso 1. $x \in A_0$. Consideramos las siguientes posibilidades, cuando $x \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ o $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$.

- $x \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$. Puesto que $y_1^m \to x_1$ y $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y_1^m \in [0, \frac{1}{2})$. Dado $m \geq N$, como $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i})) = [0, \frac{1}{2^{i+1}})$, tenemos que $y_i^m < \frac{1}{2^i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir $y^m \in A_0$. De esta manera, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en A_0.
  Dado que $\xi_1 \circ h = \frac{1}{\psi} \circ \pi_1$ y $\xi_2 \circ h = \text{sen} \circ \psi \circ \pi_1$ son funciones continuas, tenemos que $\xi_1 \circ h(y^m) \to \xi_1 \circ h(x)$ y $\xi_2 \circ h(y^m) \to \xi_2 \circ h(x)$.

- $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$. Tenemos que $x \in A_1$ y $x_2 = \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2})$. Como $y_2^m \to x_2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y_2^m \in (0, \frac{1}{2})$. Dado $m \geq N$, como $f((0, \frac{1}{2})) = (0, 1)$, se sigue que $y_1^m \in (0, \frac{1}{2}]$ o $y_1^m \in [\frac{1}{2}, 1)$. También tenemos que $f^{-1}((0, \frac{1}{2^i})) = (0, \frac{1}{2^{i+1}})$, por lo que $y_{i+1}^m < \frac{1}{2^i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De esta manera, $y^m \in A_0 \cup A_1$.
  Tenemos que $(\xi_1 \circ h)(x) = \frac{1}{\psi(\pi_1(x))} = \frac{1}{\pi+\varphi(\pi_1(x))} = \frac{2}{\pi}$. Por lo que, sin pérdida de generalidad tomemos un subconjunto abierto (a, b) de $[0, 1]$, con $a > \frac{2}{3\pi}$ y $b < 1$, tal que $(\xi_1 \circ h)(x) \in (a, b)$. Como $g_1 = \frac{1}{\pi+\varphi} \circ \pi_1$ y $g_0 = \frac{1}{\psi} \circ \pi_1$ son funciones continuas, $g_1^{-1}((a, \frac{2}{\pi}])$ y $g_0^{-1}([\frac{2}{\pi}, b))$ son abiertos en A_1 y A_0, respectivamente. De esta manera existen dos subconjuntos abiertos U y V de $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}\rangle$ tales que $g_1^{-1}((a, \frac{2}{\pi}]) = U \cap A_1$ y $g_0^{-1}([\frac{2}{\pi}, b)) = V \cap A_0$. Como $x \in U \cap V$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq M$, $y^m \in U \cap V$. Tomemos $m \geq \text{máx}\{N, M\}$. De esta manera $y^m \in U \cap V$. Si

$y^m \in A_0$, entonces $y^m \in V \cap A_0$. Por lo tanto $(\xi_1 \circ h)(y^m) = g_0(y^m) \in [\frac{2}{\pi}, b) \subseteq (a, b)$. Lo mismo ocurre cuando $y^m \in A_1$. Así $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$.
También tenemos que $(\xi_2 \circ h)(x) = (\text{sen} \circ \psi)(\pi_1(x)) = (-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(x)) = 1$. Sin pérdida de generalidad tomemos un subconjunto abierto $(a, 1]$ de $[-1, 1]$, con $a > \text{sen}(1)$ tal que $(\xi_2 \circ h)(x) \in (a, 1]$. Como $l_0 = \text{sen} \circ \psi \circ \pi_1$ y $l_1 = -\text{sen} \circ \varphi \circ \pi_1$ son funciones continuas tenemos que $l_0^{-1}((a, 1])$ y $l_1^{-1}((a, 1])$ son subconjuntos abiertos de A_0 y A_1, respectivamente. Por lo tanto existen dos subconjuntos abiertos U y V de $\varprojlim\langle [0, 1], f, \mathbb{N}\rangle$ tales que $l_0^{-1}((a, 1]) = U \cap A_0$ y $l_1^{-1}((a, 1]) = V \cap A_1$. Dado que $x \in U \cap V$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq M$, $y^m \in U \cap V$. Tomemos $m \geq \text{máx}\{N, M\}$. De esta manera, $y^m \in U \cap V$. Si $y^m \in A_0$, entonces $y^m \in U \cap A_0$. Por lo tanto, $(\xi_2 \circ h)(y^m) = l_0(y^m) \in (a, 1]$. Lo mismo pasa si $y^m \in A_1$, por lo que $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$.

Caso 2. $x \in A_n$, con n par. Tomando en cuenta que los puntos de no corte de A_n son w^n y z^n, notamos tres posibilidades: cuando $x = z^n$, $x \notin \{w^n, z^n\}$ o $x = w^n$. La idea de la demostración es similar al caso 1, por lo que algunos pasos están omitidos.

- Si $x = z^n$, entonces $\pi_n(x) = \frac{1}{2}$, por lo que $x \in A_{n+1}$. Con un análisis análogo al caso 1, se puede comprobar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y^m \in A_n \cup A_{n+1}$.
  Para la primera proyección tenemos que $(\xi_1 \circ h)(x) = \frac{1}{n\pi - \varphi(\pi_1(x))} = \frac{1}{(n+1)\pi + \varphi(\pi_1(x))} = \frac{2}{\pi(2n+1)}$. Sin pérdida de generalidad tomemos un subconjunto abierto (a, b) de $[0, 1]$ con $a > \frac{2}{\pi(2(n+1)+1)} = \frac{2}{\pi(2n+3)}$ y $b < \frac{2}{\pi(2(n-1)+1)} = \frac{2}{\pi(2n-1)}$ tal que $(\xi_1 \circ h)(x) \in (a, b)$. Como $g_n = \frac{1}{n\pi - \varphi} \circ \pi_1$ y $g_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi - \varphi} \circ \pi_1$ son funciones continuas tenemos que $g_n^{-1}([\frac{2}{\pi(2n+1)}, b))$ y $g_{n+1}^{-1}((a, \frac{2}{\pi(2n+1)}])$ son subconjuntos abiertos en A_n y A_{n+1}, respectivamente. De esta manera existen dos subconjuntos abiertos U y V de $\varprojlim\langle [0, 1], f, \mathbb{N}\rangle$ tales que $g_n^{-1}([\frac{2}{\pi(2n+1)}, b)) = U \cap A_n$ y $g_{n+1}^{-1}((a, \frac{2}{\pi(2n+1)}]) = V \cap A_{n+1}$. Dado que $x \in U \cap V$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq M$, $y^m \in U \cap V$. Tomemos $m \geq \text{máx}\{N, M\}$. Si $y^m \in A_n$, entonces $(\xi_1 \circ h)(y^m) = g_n(y^m) \in [\frac{\pi}{2}, b) \subseteq (a, b)$. Lo mismo pasa si $y^m \in A_{n+1}$. Por lo tanto, $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$.
  Para la otra proyección, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{y^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A_n \cup A_{n+1}$. Dado que $-\text{sen} \circ \varphi \circ \pi_1$ es una función continua, tenemos que $(-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(y^m)) \to (-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(x))$, es decir, $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$.

- Cuando $x \notin \{w^n, z^n\}$, podemos realizar un análisis análogo al caso 1 para comprobar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y^m \in A_n$. De esta manera, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{y^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está contenida en A_n.
  Dado que $\xi_1 \circ h = \frac{1}{n\pi - \varphi}$ y $\xi_2 \circ h = -\text{sen} \circ \varphi$ son funciones continuas, tenemos que $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$ y $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$.

- Finalmente, si $x = w^n$, entonces $x \in A_{n-1}$. La convergencia de ambas proyecciones se puede comprobar de manera similar al primer caso.

Caso 3. $x \in A_n$, con n impar. Dado que $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$ y $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$, la demostración es similar al caso 2.
Antes de continuar con el caso en el que $x \in A$, notemos que tanto A como A_i, con $i \geq 0$, son subconjuntos cerrados del límite inverso, pues cada espacio es homeomorfo a $[0, 1]$ y este es compacto.
Caso 4. $x \in A$. Primero demostremos el siguiente enunciado. Dado $i \geq 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y^m \notin \bigcup_{j=0}^{i} A_j$. En efecto, supongamos lo contrario, esto es, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $m_N \geq N$ tal que $y^{m_N} \in \bigcup_{j=0}^{i} A_j$. De esta manera $\{y^{m_N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y como $y^m \to x$, se cumple que $y^{m_N} \to x$. Como cada A_j es cerrado, $\bigcup_{j=0}^{i} A_j$ también lo es. Por el corolario 2.1.14 tenemos que $x \in \bigcup_{j=0}^{i} A_j$, pero $\bigcup_{j=0}^{i} A_j \cap A = \varnothing$. Esto es una contradicción, por lo que se cumple nuestro enunciado.
Para la primera proyección tenemos que $(\xi_1 \circ h)(x) = 0$. Sin pérdida de generalidad, tomemos un subconjunto abierto $[0, b)$ de $[0, 1]$, con $b < 1$, tal que $(\xi_1 \circ h)(x) \in [0, b)$. Como $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\pi(2n-1)} < b$, así $(\xi_1 \circ h)(x) \in [0, \frac{2}{\pi(2n-1)})$. Como $n \geq 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, se cumple que $y^m \notin \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Tomemos $m \geq N$, de esta manera $(\xi_1 \circ h)(y^m) < \frac{2}{\pi(2n-1)}$, es decir, $(\xi_1 \circ h)(y^m) \in [0, \frac{2}{\pi(2n-1)}) \subseteq [0, b)$. Así, $(\xi_1 \circ h)(y^m) \to (\xi_1 \circ h)(x)$.
Para la otra proyección, por el enunciado anterior podemos suponer que $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en $\bigcup_{i\geq 1} A_i$. Dado que $y^m \to x$ y como $-\text{sen} \circ \varphi \circ \pi_1$ es una función continua, tenemos que $(-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(y^m)) \to (-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(x))$. Esto es $(\xi_2 \circ h)(y^m) \to (\xi_2 \circ h)(x)$. Se concluye que tanto $\xi_1 \circ h$, como $\xi_2 \circ h$ son continuas. Por lo que h es continua.
Demostremos que h es inyectiva. Para esto tomemos $x, y \in \varprojlim\langle [0, 1], f, \mathbb{N}\rangle$ tales que $x \neq y$. De donde, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \neq y_m$. Basta con probar los siguientes casos para que se cumpla la inyectividad.
Supongamos que $x, y \in A$. De esta manera $x_i, y_i \in [\frac{1}{2}, 1]$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado que $f|_{[\frac{1}{2},1]}$ es inyectiva, tenemos que $x_1 \neq y_1$, es decir, $\pi_1(x) \neq \pi_1(y)$. Como $-\text{sen} \circ \varphi$ es inyectiva, tenemos que $(\xi_2 \circ h)(x) \neq (\xi_2 \circ h)(y)$, así $h(x) \neq h(y)$. Ahora, si $x \in A$ y $y \in A_i$, para $i \geq 0$, tenemos que $(\xi_1 \circ h)(x) = 0$ y que $(\xi_1 \circ h)(y) \neq 0$. Por lo que $(\xi_1 \circ h)(x) \neq (\xi_1 \circ h)(y)$, así $h(x) \neq h(y)$.
Supongamos que $x, y \in A_0$. Como $x_i, y_i \in [0, \frac{1}{2^i}]$ y $f|_{[0,\frac{1}{2^i}]}$ es inyectiva, para $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\pi_1(x) \neq \pi_1(y)$. Dado que $\text{sen} \circ \psi$ es una función inyectiva, $(\xi_2 \circ h)(x) \neq (\xi_2 \circ h)(y)$, y así $h(x) \neq h(y)$. Ahora, si $x \in A_0$ y $y \in A_i$ para $i \geq 1$, tenemos que $\frac{2}{\pi} \leq (\xi_1 \circ h)(x) \leq 1$ y que $\frac{2}{\pi(2i+1)} \leq (\xi_1 \circ h)(y) \leq \frac{2}{\pi(2i-1)}$. Si $i \geq 2$, entonces $\frac{2}{\pi(2i-1)} < \frac{2}{\pi}$, por lo que $(\xi_1 \circ h)(y) < (\xi_1 \circ h)(x)$. Si $i = 1$, entonces $(\xi_1 \circ h)(x)$ y $(\xi_1 \circ h)(y)$ solo coinciden cuando ambos son iguales a $\frac{2}{\pi}$. De este modo $\frac{1}{\psi(\pi_1(x))} = \frac{1}{\pi - \varphi(\pi_1(x))}$, por lo que $\pi_1(x) = \pi_1(y) = \frac{1}{2}$. Sin embargo, estos

elementos son diferentes. Por lo tanto la desigualdad es estricta y $(\xi_1 \circ h)(x) \neq (\xi_1 \circ h)(y)$, es decir, $h(x) \neq h(y)$.
Los dos últimos casos son los siguientes. Supongamos que $x, y \in A_n$, para $n \geq 1$. Como $f|_{[\frac{1}{2},1]}$ y $f|_{[0,\frac{1}{2^i}]}$, para $i \in \mathbb{N}$, son funciones inyectivas, tenemos que $\pi_1(x) \neq \pi_1(y)$. Dado que $-\text{sen} \circ \varphi$ es inyectiva, tenemos que $(\xi_1 \circ h)(x) \neq (\xi_1 \circ h)(y)$, así $h(x) \neq h(y)$. Ahora, si $x \in A_n$ y $y \in A_m$ con $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$. De esta manera $\frac{2}{\pi(2m-1)} \leq \frac{2}{\pi(2n+1)}$. Dado que la desigualdad no es estricta, la igualdad solo se da cuando $m = n - 1$. Si suponemos que $(\xi_1 \circ h)(x) = (\xi_1 \circ h)(y)$, se concluye que $\pi_1(x) = \pi_1(y)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $(\xi_1 \circ h)(x)$ y $(\xi_1 \circ h)(y)$ siempre son distintos. En conclusión, $h(x) \neq h(y)$.
Antes de demostrar la sobreyectividad de h, veamos que se cumple que $\pi_1(A) = [\frac{1}{2}, 1]$. Tenemos que $\pi_1(A) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ por lo que tomamos $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Como $f([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$, existe $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $f(x_2) = x_1$. Haciendo esto de manera inductiva, tenemos que existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\pi_1(x) = x_1$. Es decir, $x_1 \in \pi_1(A)$ y así $\pi_1(A) = [\frac{1}{2}, 1]$. De manera similar se puede demostrar que $\pi_1(A_0) = [0, \frac{1}{2}]$ y $\pi_1(A_i) = [\frac{1}{2}, 1]$, para $i \geq 1$.
Ahora sí, veamos que h es sobreyectiva. Para esto tomemos $(t, r) \in S$.
Si $(t, r) \in \{(0, r) \mid r \in [-1, 1]\}$, tenemos que $(t, r) = (0, r)$, con $r \in [-1, 1]$. Como $\text{sen} \circ \varphi \circ \pi_1$ es una función sobreyectiva, existe $z \in A$ tal que $(\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(z)) = r$. Por lo tanto $h(z) = (0, (\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(z))) = (0, r)$.
Si $(t, r) \in \{(t, \text{sen}(\frac{1}{t})) \mid t \in (0, 1]\}$, tenemos que $(t, r) = (t, \text{sen}(\frac{1}{t}))$, con $t \in (0, 1]$.
Si $t \in [\frac{2}{\pi}, 1]$, por la sobreyectividad de $\frac{1}{\psi} \circ \pi_1$, existe $z \in A_0$ tal que $\frac{1}{\psi(\pi_1(z))} = t$. De esta manera $h(z) = (\frac{1}{\psi(\pi_1(z))}, (\text{sen} \circ \psi)(\pi_1(z))) = (t, \text{sen}(\frac{1}{t}))$.
Si $t \in (0, \frac{2}{\pi}]$, existe m par tal que $\frac{2}{\pi(2m+1)} \leq t \leq \frac{2}{\pi(2m-1)}$. Por la sobreyectividad de $\frac{1}{m\pi-\varphi} \circ \pi_1$, existe $z \in A_m$ tal que $\frac{1}{m\pi-\varphi(\pi_1(z))} = t$. Es fácil ver que $m\pi - \frac{1}{t} = \varphi(\pi_1(z))$. De esta forma, tenemos que $h(z) = (\frac{1}{m\pi-\varphi(\pi_1(z))}, (-\text{sen} \circ \varphi)(\pi_1(z))) = (t, -\text{sen}(m\pi - \frac{1}{t})) = (t, -\text{sen}(\frac{1}{t}))$. En conclusión, h es sobreyectiva.
Se ha demostrado que h es continua y biyectiva. Como el límite inverso es compacto, por el teorema 1.2.44 obtenemos que h es un homeomorfismo. Así, hemos demostrado que la curva del topólogo es homeomorfa a un límite inverso. □

4.3 Límites inversos para familias de continuos

Para culminar el capítulo, en esta sección exponemos resultados que consideramos resaltan la importancia de los continuos dentro de los límites inversos. Los resultados de esta sección son tomados de [Ree67], en donde además podemos encontrar más propiedades alrededor de los continuos.

Para demostrar los teoremas en los que estamos interesados, necesitamos dar a conocer las siguientes definiciones.

Definición 4.3.1. Sea X un continuo.

i) Dado $A \subseteq X$. Decimos que A es un *subcontinuo* de X si es un continuo por sí mismo. Si además $A \neq X$, lo llamamos *subcontinuo propio*.

ii) Decimos que X es *indescomponible* si no puede expresarse como la unión de dos subcontinuos propios.

Teorema 4.3.2. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa. Si X_n es indescomponible, para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada función enlace es sobreyectiva, entonces $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es indescomponible.

Demostración. Supongamos que X_n es indescomponible, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada función enlace es sobreyectiva. Por definición, cada X_n es un continuo, por lo que por el teorema 4.2.1 tenemos que $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo. Demostramos que es indescomponible por contradicción. Supongamos que existen H y K subcontinuos propios de $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ tales que $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle = H \cup K$. Dado que H y K son subcontinuos, por definición son compactos. Aplicando el teorema 1.2.41, H y K son subconjuntos cerrados.
Primero mostramos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_n(H) \neq X_n$. En efecto, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\pi_n(H) = X_n$. Como H es un subcontinuo propio podemos tomar $x \in \varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ tal que $x \notin H$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\pi_n(x) \in X_n = \pi_n(H)$, por lo que existe $y^n \in H$ tal que $\pi_n(y^n) = \pi_n(x)$. Veamos que la sucesión $\{y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Para esto tomemos un subconjunto abierto básico $p_n^{-1}(U_n)$ de $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ con $x \in p_n^{-1}(U_n)$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ y veamos que $y^{n+k} \in p_n^{-1}(U_n)$. Dado que $\pi_n(x) \in U_n$, tenemos que $\pi_{n+k}(x) \in (f_n^{n+k})^{-1}(U_n)$ y como $\pi_{n+k}(x) = \pi_{n+k}(y^{n+k})$, entonces $\pi_{n+k}(y^{n+k}) \in (f_n^{n+k})^{-1}(U_n)$. Aplicando f_n^{n+k}, obtenemos $\pi_n(y^{n+k}) \in U_n$. De esta manera, $y^{n+k} \in p_n^{-1}(U_n)$. Por lo que, para todo $m \geq n$, se cumple que $y^m \in p_n^{-1}(U_n)$, es decir $y^n \to x$. Dado que H es un subconjunto cerrado, por el teorema 2.1.13 concluimos que $x \in H$, lo cual es una contradicción. Por lo que concluimos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_n(H) \neq X_n$.
Similarmente se demuestra que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_m(K) \neq X_m$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \geq n$ y demostremos que $\pi_m(H) \neq X_m$. Supongamos que $\pi_m(H) = X_m$. Dado que π_n y f_n^m son sobreyectivas, tenemos que $\pi_n(H) = X_n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto tenemos que $\pi_m(H) \neq X_m$ y $\pi_m(K) \neq X_m$. Ahora, como π_m es continua, por el teorema 1.2.54, tenemos que $\pi_m(H)$ y $\pi_m(K)$ son subcontinuos

propios de X_m. Dado que las funciones enlace son sobreyectivas, por el corolario 4.2.3 tenemos que $\pi_m\left(\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle\right) = X_m$, por lo tanto se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} X_m &= \pi_m\left(\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle\right) \\ &= \pi_m\left(H \cup K\right) \\ &= \pi_m\left(H\right) \cup \pi_m\left(K\right). \end{aligned}$$

De esta manera, existen dos subconjuntos propios, $\pi_m\left(H\right)$ y $\pi_m\left(K\right)$ tales que $X_m = \pi_m\left(H\right) \cup \pi_m\left(K\right)$, lo cual contradice el inciso $ii)$ de la definición 4.3.1, pues X_m es indescomponible. Por lo tanto, $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es indescomponible. □

Culminamos la sección con el siguiente teorema sobre subcontinuos.

Teorema 4.3.3. Dada una sucesión inversa $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ donde cada X_n es un continuo, si para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq X_n$ es un subcontinuo y $f_n^{n+1}(K_{n+1}) = K_n$, entonces $\varprojlim\langle X_n, l_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un subcontinuo de $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$, donde $l_n^{n+1} = f_n^{n+1}|_{K_{n+1}}$.

Demostración. Sea $\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ una sucesión inversa donde cada X_n es un continuo. Por el teorema 4.2.1 tenemos que $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo.
Dado que cada K_n es un continuo, ocupando nuevamente el teorema 4.2.1 se obtiene que $\varprojlim\langle X_n, l_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un continuo. Por lo tanto, $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es un subcontinuo de $\varprojlim\langle X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. □

Capítulo 5

Aplicaciones de los límites inversos

5.1 Nociones de economía y su interpretación con límites inversos

Como se menciona en la parte introductoria de la tesis, una de las áreas del conocimiento donde se pueden aplicar los límites inversos es en la teoría de economía. A lo largo de esta sección vemos cómo los límites inversos surgen a través de ecuaciones en diferencias que se desprenden de modelos económicos *cash-in-advance*. El modelo económico con el que trabajamos lo hemos tomado de [MR98] (el lector interesado en profundizar en la teoría económica alrededor del modelo cash-in-advance puede consultar [Deb91]). Por otro lado, los resultados que involucran las sucesiones inversas con el modelo indicado fueron tomados de [KSY07] y adaptados a nuestra notación. De igual manera algunos conceptos o procedimientos propios de la teoría de economía se mencionarán brevemente con el fin de centrarnos en las sucesiones inversas, sin embargo estos pueden ser consultados con más detalle en los artículos ya mencionados o en [Ken08].

5.1.1. Desarrollo del modelo

El objetivo que se plantea en los artículos [MR98] y [KSY07] es optimizar el beneficio de obtener bienes y servicios en efectivo frente a obtenerlos a crédito, lo cual se hace a través de la función de utilidad:

$$W(\{c_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}, \{c_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{1,t}, c_{2,t}). \tag{5.1.1}$$

La función 5.1.1 depende de las sucesiones $\{c_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{c_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}$, donde $c_{1,t}$ es el *bien monetario* (*cash good*) y $c_{2,t}$ es el *bien a crédito* (*credit good*) en el tiempo $t \geq 0$. La función U tiene como dominio y codominio a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^+$, respectivamente. El parámetro β

cumple que $0 < \beta < 1$, por lo que $0 < \beta^t < 1$, para todo $t \geq 0$, donde cada β^t es llamado *factor de descuento* en el tiempo t.

Se dice que la pareja de sucesiones $\{c_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}, \{c_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}$ es preferida sobre otra pareja de sucesiones $\{\widetilde{c}_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}, \{\widetilde{c}_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}$, si

$$W(\{c_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}, \{c_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}) > W(\{\widetilde{c}_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}, \{\widetilde{c}_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}).$$

De acuerdo a la teoría (vea [KSY07]), para maximizar la función (5.1.1), el artículo [KSY07] se plantea encontrar sucesiones $\{c_{1,t}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_{2,t}\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{m_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, con $c_{1,t}, c_{2,t}, m_{t+1} \geq 0$, sujetas a las restricciones:

$$p_t c_{1,t} \leq m_t, \tag{5.1.2}$$

$$m_{t+1} \leq p_t y + (m_t - p_t c_{1,t}) + \theta M_t - p_t c_{2,t}, \tag{5.1.3}$$

donde m_t es el efectivo con el que se cuenta, y representa los bienes con los que se dispone y cumple que $c_{1,t} + c_{2,t} = y$, p_t es el precio al que se vende cada bien y θM_t es el efectivo que se recibe por parte del gobierno, con θ como la tasa de crecimiento. Lo anterior para el tiempo $t \geq 0$. En la teoría de economía a la desigualdad 5.1.2 se le suele llamar *restricción cash-in-advance*.

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange para resolver el problema de optimización, se utilizan las siguientes ecuaciones

$$U_1(c_{1,t}, c_{2,t}) = p_t(\lambda_t + \mu_t), \tag{5.1.4}$$

$$U_2(c_{1,t}, c_{2,t}) = p_t \mu_t, \tag{5.1.5}$$

$$\lambda_t = \beta(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1}), \tag{5.1.6}$$

donde $\{\lambda_t, \mu_t\}$ son los multiplicadores de Lagrange para $t \geq 0$.

Haciendo $x_t = \frac{m_t}{p_t}$, $M_t = m_t$, $c_{2,t} = y - c_{1,t}$ y utilizando las condiciones (5.1.4), (5.1.5) y (5.1.6) se puede deducir la ecuación:

$$x_t U_2(c_{1,t}, y - c_{1,t}) = \frac{\beta}{1+\theta} x_{t+1} U_1(c_{1,t+1}, y - c_{1,t+1}), \tag{5.1.7}$$

para el tiempo $t \geq 0$.

Con lo anterior, se obtiene lo siguiente.

Proposición 5.1.1. Considerando la restricción *cash-in-advance*, es decir, la desigualdad 5.1.2, tenemos que:

1. Si se cumple la igualdad en (5.1.2), entonces $c_{1,t} = x_t$.

2. Si no se cumple la igualdad en (5.1.2), entonces $\lambda_t = 0$ y $c_{1,t} = c$, donde c es la única solución para $U_1(c, y - c) = U_2(c, y - c)$.

Utilizando la proposición 5.1.1, tenemos que $c_{1,t} = \text{mín}\{x_t, c\}$, para todo $t \geq 0$. Por lo que podemos reescribir la ecuación (5.1.7) como,

$$B(x_t) = A(x_{t+1}), \tag{5.1.8}$$

donde

$$B(x) = xU_2(\text{mín}\{x, c\}, y - \text{mín}\{x, c\}),$$
$$A(x) = \tfrac{\beta}{1+\theta} xU_1(\text{mín}\{x, c\}, y - \text{mín}\{x, c\}).$$

De acuerdo al análisis realizado en [MR98], la proposición 5.1.2 indica el comportamiento tanto de A como de B. La demostración de la proposición se puede consultar en dicho artículo.

Proposición 5.1.2. Si A y B son las funciones de la ecuación (5.1.8), entonces se cumple que:

a) B es una función creciente e inyectiva, mientras que A no es una función inyectiva.

b) A y B son funciones lineales en $[c, \infty)$ con pendientes positivas, donde la pendiente de $A|_{[c,\infty)}$ es menor que la pendiente de $B|_{[c,\infty)}$.

c) Existe $b < c$ tal que se cumple lo siguiente: Si $b > 0$, entonces A es creciente, con $A(0) = 0$ o $A(0) > 0$, en $[b, c]$. Si $b = 0$, entonces A es decreciente en $[0, c]$.

Para ejemplificar brevemente el comportamiento de las funciones A y B, dos posibles configuraciones de estas funciones las podemos ver en los diagramas 5.1(a) y 5.1(b).

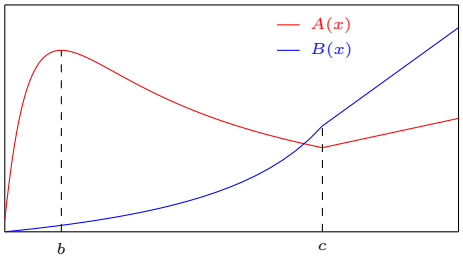
Por la proposición 5.1.2 podemos asegurar que existen $\overline{x}$ y $\underline{x}$ reales positivos tales que para las funciones A y B, se cumple que $B(\underline{x}) = A(c)$ y $B(\overline{x}) = A(\underline{x})$. Cuando $b > 0$, también existen $\overline{x}^b$ y $\underline{x}^b$ reales positivos tales que $B(\underline{x}^b) = A(b)$ y $B(\overline{x}^b) = A(\underline{x}^b)$.

Ahora bien, de la proposición 5.1.2 sabemos que B es inyectiva, es decir, podemos asumir la existencia de B^{-1} y definir

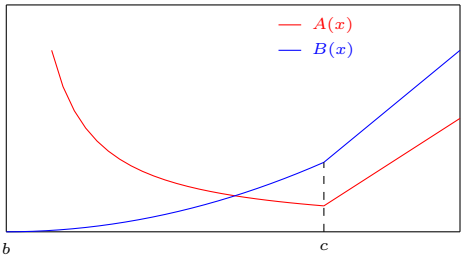
$$f = B^{-1} \circ A. \tag{5.1.9}$$

Esta función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bajo la igualdad 5.1.8 nos da el comportamiento «hacía atrás»:

$$f(x_{t+1}) = x_t. \tag{5.1.10}$$



(a) Primera configuración de A y B.



(b) Segunda configuración de A y B.

Diagrama 5.1: Posibles configuraciones de A y B

Además, en términos de la función f tenemos:

$$\underline{x} = f(c), \quad \overline{x} = f(\underline{x}),$$
$$\overline{x}^b = f(b), \quad \underline{x}^b = f(\overline{x}^b).$$

Recordando que el objetivo es resolver la ecuación $B(x_t) = A(x_{t+1})$, y que la proposición 5.1.2 permite trasladar el análisis a la función f, obtenemos que el objetivo se reduce a resolver la ecuación $x_t = f(x_{t+1})$.

En [MR98] se obtiene la proposición 5.1.3, la cual establece condiciones necesarias para que la ecuación 5.1.10 sea resuelta por medio de límites inversos.
Antes de enunciar la proposición 5.1.3 mencionamos que un conjunto cerrado I, es un *conjunto de atracción* de f, si para cualquier $(x_t)_{t\geq 0} \in \prod_{t\geq 0} \mathbb{R}^+$, que cumple que $x_0 > 0$ y $x_t = f(x_{t+1})$, para todo $t \geq 0$, existe algún $T \in \mathbb{N}$ tal que $x_t \in I$, para todo $t \geq T$.

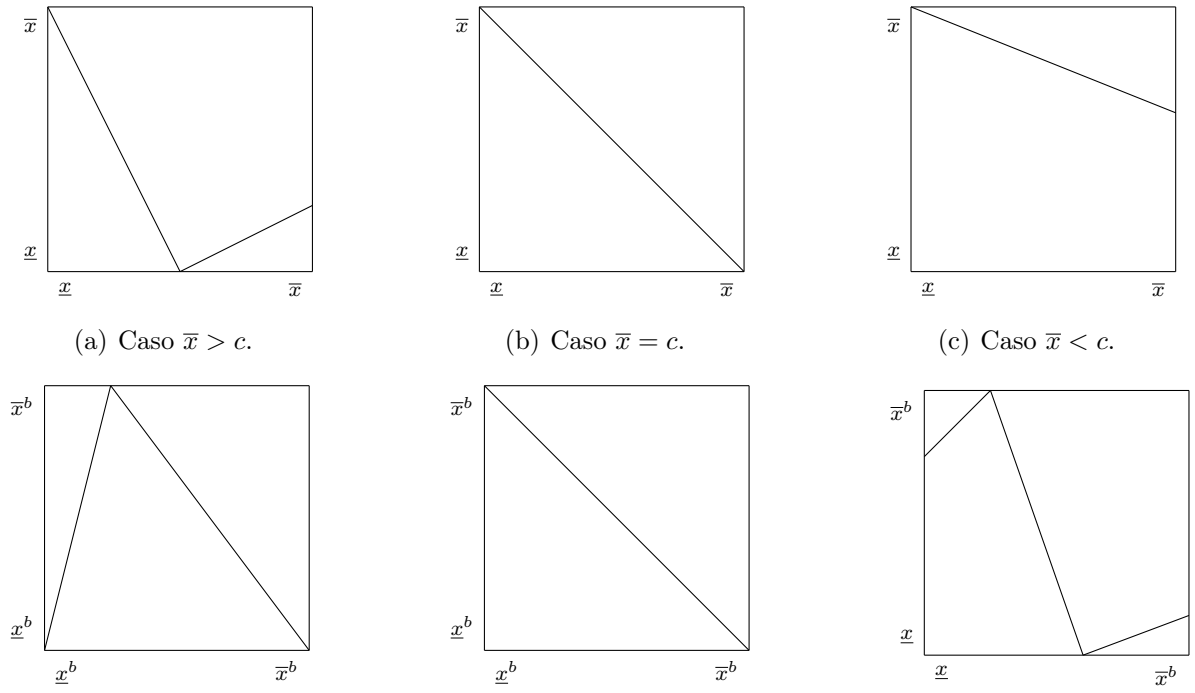
Proposición 5.1.3. Si f es la función definida en la ecuación (5.1.9), se cumple lo siguiente.

a) Si $0 < b \leq \underline{x}$, entonces el conjunto de atracción de f es $I = [\underline{x}, \overline{x}]$.

b) Si $\underline{x} < b$, el conjunto de atracción para f depende tanto de c como $\overline{x}^b$. Si $\overline{x}^b \leq c$, el conjunto de atracción de f es $I = [\underline{x}^b, \overline{x}^b]$. Si $\overline{x}^b > c$, entonces el conjunto de atracción es $I = [\underline{x}, \overline{x}^b]$.

Cuando ocurre el caso *a*), es decir, si $0 < b \leq \underline{x}$ surgen tres casos: $\overline{x} > c$, $\overline{x} = c$ o $\overline{x} < c$. De igual manera para el caso *b*), es decir, si $\underline{x} < b$ tenemos tres casos: $\underline{x} \leq \underline{x}^b < b < \overline{x}^b \leq c$, $\underline{x} < b \leq \underline{x}^b < \overline{x}^b \leq c$ o $\underline{x} < b < c < \underline{x}^b$. Estos casos se pueden representar de manera general como se muestra en el diagrama 5.2.

Debido a que en los casos 5.2(b), 5.2(c) y 5.2(e) la función f es biyectiva, las soluciones de 5.1.10 presentan un «comportamiento simple», es decir, tomando cualquier x en el



(a) Caso $\overline{x} > c$.

(b) Caso $\overline{x} = c$.

(c) Caso $\overline{x} < c$.

(d) Caso $\underline{x} \leq \underline{x}^b < b < \overline{x}^b \leq c$.

(e) Caso $\underline{x} < b \leq \underline{x}^b$.

(f) Caso $\underline{x} < b < c < \underline{x}^b$.

Diagrama 5.2: Casos generales de los conjuntos de atracción

conjunto de atracción, podemos construir una solución para f. Los casos que resultan interesantes son 5.2(a), 5.2(d) y 5.2(f). Por tal motivo el artículo [KSY07] trabaja con el caso 5.2(a), pero se puede hacer un trabajo similar para obtener resultados satisfactorios con 5.2(d). Finalmente, para 5.2(f) basta con verlo como la combinación de estos dos últimos casos. Ya que nosotros también nos enfocamos en el caso 5.2(a) es momento de construir la sucesión inversa.

5.1.2. Generación de la sucesión inversa y límite inverso

A partir de ahora, estamos asumiendo que: $0 < b \leq \underline{x}$, que $I = [\underline{x}, \overline{x}]$ es el conjunto de atracción de f y que $\overline{x} > c$.

Para definir la sucesión inversa consideramos $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ como conjunto dirigido. Cada espacio topológico de la sucesión lo tomamos como $[\underline{x}, \overline{x}]$. Por la continuidad de $f|_{[\underline{x},\overline{x}]}$, podemos definir las funciones enlace como la composición de la función $f|_{[\underline{x},\overline{x}]}$ con ella misma, y, sin que haya confusión denotamos a $f|_{[\underline{x},\overline{x}]}$ simplemente como f. De esta

manera, la sucesión inversa queda como

$$\langle [\underline{x}, \overline{x}], f, \mathbb{N}_+ \rangle \,. \tag{5.1.11}$$

En vista de la sucesión inversa en (5.1.11), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.4. Dada la sucesión inversa (5.1.11), se cumple que

a) $\varprojlim \langle [\underline{x}, \overline{x}], f, \mathbb{N}_+ \rangle$ es un continuo.

b) Todo elemento de $\varprojlim \langle [\underline{x}, \overline{x}], f, \mathbb{N}_+ \rangle$ es solución de la ecuación $A(x_{t+1}) = B(x_t)$ en $[\underline{x}, \overline{x}]$ para todo $t \in \mathbb{N}_+$.

Demostración. Teniendo en cuenta la sucesión inversa dada en (5.1.11), observamos lo siguiente.

a) Como $[\underline{x}, \overline{x}]$ es un continuo, por el teorema 4.2.1, tenemos que $\varprojlim \langle [\underline{x}, \overline{x}], f, \mathbb{N}_+ \rangle$ es un continuo.

b) Tomando $(x_t)_{t \in \mathbb{N}_+} \in \varprojlim \langle [\underline{x}, \overline{x}], f, \mathbb{N}_+ \rangle$, por la definición de la función enlace, para todo $t \in \mathbb{N}_+$ tenemos que $f(x_{t+1}) = x_t$, es decir, $B^{-1}(A(x_{t+1})) = x_t$. Por lo tanto $A(x_{t+1}) = B(x_t)$, para todo $t \in \mathbb{N}_+$. □

5.1.3. Límites inversos conocidos

Bajo ciertas condiciones añadidas a la sucesión inversa (5.1.11), obtenemos que el límite inverso se comporta similar a sucesiones y límites inversos ya estudiados en capítulos anteriores. El teorema 5.1.5 es prueba de ello. Este resultado, así como la idea de la demostración, se tomaron de [KSY07].

Teorema 5.1.5. Sean $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que $0 < e < c < a < b < d < 1$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ una función que cumple las siguientes propiedades:

a) $f([a,b]) = [e,d]$,

b) $f|_{[c,1]} : [c,1] \to [0,1]$ es biyectiva y decreciente,

c) $f|_{[0,c]}$ es creciente y

d) $f(c) = 1$, $f(0) = d = f(a)$, $f(b) = e$ y $f(1) = 0$.

Si $I_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} f^{2n}([0,e])$ e $I_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} f^{2n}([d,1])$ son intervalos cerrados, se cumple que $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle$ es una doble curva del topólogo, o bien, si I_1 e I_2 contienen solo un punto, se cumple que $\varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle$ es un arco.

Demostración. Dividimos el límite inverso en los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
S &= \{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid x_i \in [e,d] \text{ y } x_{i+1} \in [a,b] \text{ para algún } i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\},\\
S_1 &= \{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid \text{para todo } i \in \mathbb{N}, x_i \in [d,1] \text{ si } i \text{ es impar o}\\
&\qquad\qquad x_i \in [0,e] \text{ si } i \text{ es par}\},\\
S_2 &= \{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid \text{para todo } i \in \mathbb{N}, x_i \in [d,1] \text{ si } i \text{ es par o}\\
&\qquad\qquad x_i \in [0,e] \text{ si } i \text{ es impar}\}.
\end{aligned}$$

Primero hay que demostrar que S es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Hacemos esto demostrando que S es la unión de una familia numerable $\{\dots, Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$ de arcos que tienen la propiedad de que $\bigcup_{i=-n}^{n} Z_n$ es un arco, para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

- Consideremos la función $f_0 = f|_{[a,b]}$. Tenemos que $f_0^{-1} : [e,d] \to [a,b]$ es biyectiva. Veamos que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema 4.2.11. Tomemos la familia de subintervalos cerrados $J_0 = [e,d]$ y $J_n = f_0^{-n}([a,b])$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijando $n \in \mathbb{N}_+$, tenemos las siguientes igualdades:

  $$f(J_{n+1}) = f(f_0^{-(n+1)}([a,b])) = f(f^{-(n+1)}([a,b])) = f^{-n}([a,b]) = J_n.$$

  Definiendo el conjunto:

  $$Z_0 = \left\{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid x_i \in J_i \text{ para } i \in \mathbb{N}_+\right\},$$

  por el teorema 4.2.11, tenemos que Z_0 es homeomorfo a $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}_+\rangle$, donde las funciones enlace son de la forma $h_n^{-1} \circ f \circ h_n$. Dado que g_n^{n+1} es una composición de funciones biyectivas, también es biyectiva. Aplicando el teorema 4.2.9, tenemos que $\varprojlim\langle [0,1], g_n^{n+1}, \mathbb{N}_+\rangle$ es un arco, por lo que Z_0 también es un arco. Además, como $x_0 \in [e,d]$ y $x_1 \in [a,b]$, concluimos que $Z_0 \subseteq S$.

- Ahora definamos los conjuntos:

  $$Z_1 = \left\{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid x_1 \in [e,a] \text{ y } x_2 \in [a,b]\right\},$$

  y

  $$Z_{-1} = \left\{x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+\rangle \mid x_1 \in [b,d] \text{ y } x_2 \in [a,b]\right\}.$$

  Como lo hicimos para Z_0, podemos demostrar que Z_1 y Z_{-1} son arcos. Más aún, como $Z_1 \cap Z_0 = \{(d, a, f^{-1}(a), f^{-1}(a), \dots)\}$, $Z_{-1} \cap Z_0 = \{(e, b, f^{-1}(b), f^{-1}(b), \dots)\}$ y $Z_1 \cap Z_{-1} = \varnothing$, tenemos por la proposición 4.2.8 que $Z_{-1} \cup Z_0 \cup Z_1 \subseteq S$ es un arco.

- Continuando con el proceso de forma inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos:

$$Z_{2n} = \left\{ x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+ \rangle \mid x_{2n} \in [b,d] \text{ y } x_{2n+1} \in [a,b] \right\},$$
$$Z_{2n-1} = \left\{ x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+ \rangle \mid x_{2n-1} \in [e,a] \text{ y } x_{2n} \in [a,b] \right\},$$
$$Z_{-2n} = \left\{ x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+ \rangle \mid x_{2n} \in [e,a] \text{ y } x_{2n+1} \in [a,b] \right\},$$
$$Z_{-(2n-1)} = \left\{ x \in \varprojlim\langle [0,1], f, \mathbb{N}_+ \rangle \mid x_{2n-1} \in [b,d] \text{ y } x_{2n} \in [a,b] \right\}.$$

De esta manera, para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que Z_{-m} y Z_m son arcos. Similar al caso anterior tenemos que $\bigcup_{i=-m}^{m} Z_i$ es un arco.
Como Z_0 es un arco, éste es homeomorfo a un intervalo $[a,b]$. Similarmente, como Z_1 y Z_{-1} son arcos, estos son homeomorfos a $[b, b+1]$ y $[a-1, a]$, respectivamente. Luego, Z_2 y Z_{-2} son homeomorfos a $[b+2, b+1]$ y $[a-2, a-1]$. Siguiendo este proceso, de manera inductiva, tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, el arco $\bigcup_{i=-m}^{m} Z_m$ es homeomorfo a $[-m+a, b+m]$. Finalmente, como m lo tomamos de manera arbitraria, obtenemos que $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} Z_i = S$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
Ahora, para S_1 y S_2. Dado que I_1 e I_2 son compactos, por el teorema 1.2.39, tenemos que $I_1 \neq \varnothing$ y $I_2 \neq \varnothing$. Además, cumplen que $f(I_1) = I_2$ y $f(I_2) = I_1$. Demostremos que S_1 es un punto si I_1 lo es o que S_2 es un arco si I_2 lo es.

- Supongamos que I_1 contiene solo un punto y S_1 más de un punto. Tomemos $x = (x_t)_{t\geq 0}, y = (y_t)_{t\geq 0} \in S_1$, tales que $x \neq y$. De esta manera, existe $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x_t \neq y_t$. Por la inyectividad de f, tenemos que $f(x_t) \neq f(y_t)$. Dado que f es función enlace, $x_{t-1} \neq y_{t-1}$. Aplicando esta idea de forma recursiva, obtenemos que $x_0 \neq y_0$. Primero, como $f([d,1]) \subseteq [0,e]$, tenemos que $f(x_1) = x_0, f(y_1) = y_0 \in [0,e]$. Si $t \in \mathbb{N}$, como $x, y \in S_1$, entonces $x_{2t}, y_{2t} \in [0,e]$. Por definición de función enlace, tenemos que:

$$f^{2t}(x_{2t}) = f^{2(t-1))}(x_{2(t-1)}) = f^{2(t-2)}(x_{2(t-2)}) = \cdots = f^{2(t-t)}(x_{2(t-t)}) = x_0.$$

  Así, $f^{2n}(x_{2n}) = x_0$. Similarmente, tenemos que $f^{2n}(y_{2n}) = y_0$. Por lo cual, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_0, y_0 \in f^{2n}([0,e])$. Es decir, $x_0, y_0 \in I_1$, pero esto es una contradicción, puesto que I solo tiene un elemento. De esta manera, S_1 tiene un solo elemento.

- Ahora supongamos que I_1 es un intervalo, digamos $I_1 = [p,q]$. Definimos la función $h : I_1 \to S_1$ como

$$h(x_0) = (x_0, f^{-1}(x_0), f^{-2}(x_0), \dots)$$

  para todo $x_0 \in I_1$. Demostremos que h es un homeomorfismo, y así podamos obtener que S_1 es un arco.

Se tiene que h es inyectiva, pues si $x, y \in I_1$ son tales que $x \neq y$, entonces

$$(x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots) \neq (y, f^{-1}(y), f^{-2}(y), \dots),$$

es decir, $h(x) \neq h(y)$.
Veamos que h es sobreyectiva. Sea $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in S_1$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y dado que f es la función enlace tenemos que $f^{2n}(x_{2n}) = x_0$. Además se tiene que $x_0 \in [0, e]$ y $x_{2n} \in [0, e]$. Por lo que $x_0 \in I_1$. De esta manera, $h(x_0) = (x_0, f^{-1}(x_0), f^{-1}(x_1), \dots)$. Más aún, por la inyectividad de f^{-1}, tenemos que $f^{-m}(x_0) = x_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $h(x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Así, h es sobreyectiva.
Para demostrar la continuidad de h, tomemos un subconjunto abierto $S_1 \cap p_n^{-1}(U_n)$ de S_1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que n es par. Notemos que se cumple que $S_1 \cap p_n^{-1}(U_n) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}_+} \in S_1 \mid x_n \in U_n\}$ y además

$$\begin{aligned} h^{-1}(S_1 \cap p_n^{-1}(U_n)) &= \{x \in I_1 \mid h(x) \in S_1 \cap p_n^{-1}(U_n)\} \\ &= \{x \in I_1 \mid h(x) \in p_n^{-1}(U_n)\} \\ &= \{x \in I_1 \mid f^{-n}(x) \in U_n\} \\ &= \{x \in I_1 \mid x \in f^n(U_n)\} \\ &= I_1 \cap f^n(U_n). \end{aligned}$$

Como $f^n(U_n)$ es un subconjunto abierto de $[0, 1]$, tenemos que $I_1 \cap f^n(U_n)$ es un subconjunto abierto de I_1, concluimos que h es una función continua.
Como I_1 es compacto y S_1 es de Hausdorff, por el teorema 1.2.44, tenemos que h es un homeomorfismo. Por lo tanto, S_1 es un arco.

De manera similar a lo realizado previamente se cumple que S_2 es un punto si I_2 lo es o que S_2 es un arco si I_2 lo es.
Ahora bien, como $\varprojlim\langle [0, 1], f, \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle = S \cup S_1 \cup S_2$, tenemos dos posibilidades.

- Si S_1 y S_2 son ambos un punto, tenemos que estos son homeomorfos a $\{a\}$ y $\{b\}$, respectivamente, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$. Además, como S es homeomorfo a la recta real también lo es a (a, b). Por lo tanto, el límite inverso es homeomorfo a $[a, b]$, lo quiere decir que es un arco. El diagrama 5.3 representa lo que acabamos de mencionar.

Diagrama 5.3: Homeomorfismo entre el límite inverso y un arco.

- Por otra parte, si S_1 y S_2 son arcos, tenemos que estos son homeomorfos a $\{0\} \times [-1,1]$ y $\{2\} \times [-1,1]$, respectivamente. Dado que S es homeomorfo a $\mathbb{R}$, podemos construir un homeomorfismo con $\{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(x+2, \operatorname{sen}(\frac{1}{|x|})) \mid x \in [-1,0)\}$ (ver ejemplo 1.2.29). Así, el límite inverso es homeomorfo a la doble curva del topólogo. Este homeomorfismo se puede apreciar en el diagrama 5.4. □

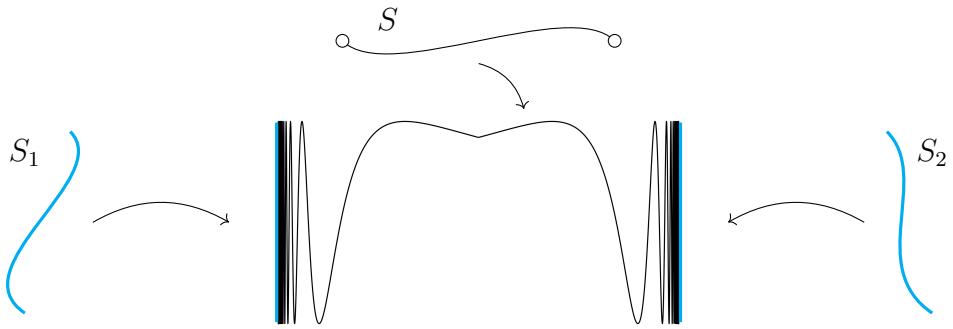


Diagrama 5.4: Homeomorfismo entre el límite inverso y la doble curva del topólogo.

Para una mejor comprensión de lo realizado previamente, tomamos el ejemplo de [KSY07], en cual nos da valores específicos para la proposición 5.1.5, y de esta manera, distinguir que efectivamente obtenemos la doble curva del topólogo.

Ejemplo 5.1.6. Supongamos que $e = 0.4$, $c = 0.5$, $a = 0.6$, $b = 0.7$ y $d = 0.8$. Tomemos una función $g_1 : [0.5, 0.85] \to [0.275, 1]$ tal que g_1 es continuamente diferenciable en $[0.5, 0.85]$, $g_1'(x) < 0$ para $x \in [0.5, 0.85]$, $g_1(0.5) = 1$, $g_1(0.6) = 0.8$, $g_1(0.7) = 0.4$, $g_1(0.85) = 0.275$, y $g_1'(0.85) = -2.5$. También tomemos otra función $g_2 : [0.95, 1] \to [0, 0.025]$ tal que g_2 es continuamente diferenciable en $[0.95, 1]$, $g_2'(x) < 0$ para $x \in [0.95, 1]$, $g_2(0.95) = 0.025$, $g_2(1) = 0$, y $g_2'(0.95) = -2.5$. Definimos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0.4x + 0.8, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 0.5, \\ g_1(x), & \text{si} \quad 0.5 \leq x \leq 0.85, \\ -\frac{5}{2}x + 2.4, & \text{si} \quad 0.85 \leq x \leq 0.95, \\ g_2(x), & \text{si} \quad 0.95 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que la función f resulta continua en $[0,1]$. Ahora veamos que f satisface las hipótesis del teorema 5.1.5.

a) $\subseteq$] Tomemos $x \in f([0.6, 0.7])$. Existe $y \in [0.6, 0.7]$ tal que $x = f(y)$. Por definición de f tenemos que $f(y) = g_1(y)$. Como g_1 es continua, $g_1(0.6) = 0.8$ y $g_1(0.7) = 0.4$ tenemos que $g_1(y) \in [0.4, 0.8]$. Así, $f([0.6, 0.7]) \subseteq [0.4, 0.8]$.
$\supseteq$] Tomemos $x \in [0.4, 0.8]$. Como g es continua en $[0.6, 0.7]$ y $g_1(0.7) = 0.4 <$

$g_1(0.6) = 0.8$, por el teorema del valor intermedio (ver teorema en [Spi94]), existe $y \in [0.6, 0.7]$ tal que $f(y) = x$. Por lo que, $x \in f([0.6, 0.7])$. Es decir, $[0.4, 0.8] \subseteq f([0.6, 0.8])$. Por lo tanto, $[0.4, 0.8] = f([0.6, 0.8])$.

b) Por definición de f, no es difícil ver que $f|_{[0.85,0.95]} : [0.85, 0.95] \to [0.025, 0.275]$ es una función biyectiva y decreciente.
Ahora, para $f|_{[0.5,0.85]} : [0.5, 0.85] \to [0.275, 1]$, como $g_1' < 0$, tenemos que g_1 es estrictamente decreciente. Por esta misma razón g_1 es biyectiva. Así, $f|_{[0.5,0.85]}$ es biyectiva y decreciente.
Similar al caso anterior tenemos que $f|_{[0.95,1]} = g_2$ es biyectiva y decreciente.
De esta manera, $f|_{[0.5,1]} : [0.5, 1] \to [0, 1]$ es biyectiva y decreciente.

c) Como $f|_{[0,0.5]} = g_1$, no es difícil ver que $f|_{[0,0.5]}$ es un función creciente.

d) Es fácil ver que se cumple esta hipótesis.

Dado que $[0.85, 0.91] \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{2n}([0.85, 0.95]) \subseteq I_2 = \bigcap_{n\geq 0} f^{2n}([0.8, 1])$, tenemos que $I_2 = \bigcap_{n\geq 0} f^{2n}([0, 0.4])$ es un intervalo y por lo tanto, I_1 también lo es. De esta manera, por lo demostrado en la proposición 5.1.5, el límite inverso es una doble curva del topólogo.

5.2 El solenoide

Para culminar el capítulo y el trabajo de tesis desarrollamos un ejemplo más de límites inversos. Para definir este concepto no necesitamos de conocimiento extra, excepto por el que se ha visto a lo largo de la tesis. La adición de esta sección está inspirada en el artículo [CMR15].

Los primeros estudios de los solenoides los podemos encontrar en el artículo [Vie27], publicado por L. Vietoris en 1927. Y tres años después D. van Dantzig hizo mención del solenoide diádico en el artículo [Vie27].

5.2.1. Definición del solenoide

El *solenoide* se define como un límite inverso de círculos unitarios, por ello, para construirlo, primero necesitamos establecer una sucesión inversa. Empezamos escogiendo como conjunto dirigido al de los naturales $\mathbb{N}$ y como mencionamos, nuestra familia de espacios topológicos consta solo del círculo unitario $\mathbb{S}^1$. Comenzamos con el siguiente resultado.

Proposición 5.2.1. Si $\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ es una sucesión de números naturales y para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n^{n+1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ como $f_n^{n+1}(z) = z^{m_n}$, para cada $z \in \mathbb{S}^1$, entonces se tiene que $\varprojlim\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \neq \varnothing$.

Demostración. Primero veamos que en efecto podemos definir la sucesión inversa. Para ello, solo se requiere definir las funciones enlace. Dados $n, l \in \mathbb{N}$ con $l \leq n$, definamos las funciones $f_l^n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ como

$$f_l^n(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad n = l, \\ z^{m_{n-1}m_{n-2}\dots m_l} & \text{si} \quad n > l, \end{cases}$$

para $z \in \mathbb{S}^1$. Es fácil ver que estas funciones son continuas. Ahora veamos que se cumplen las condiciones de la definición 3.1.1 para ser funciones enlace.

i) Dado $n \in \mathbb{N}$, por definición f_n^n es la función identidad.

ii) Dados $n, l, p \in \mathbb{N}$ con $n > l > p$, se cumple que

$$(f_p^l \circ f_l^n)(z) = f_p^l(z^{m_{n-1}m_{n-2}\dots m_l}) = z^{m_{n-1}m_{n-2}\dots m_l m_{l-1}m_{l-2}\dots m_p} = f_p^n(z),$$

para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

Por lo tanto se puede construir una sucesión inversa $\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Además, $f_n^{n+1}(z) = z^{m_n}$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$.
Finalmente, dado que $\mathbb{S}^1 \neq \varnothing$ y las funciones enlace son sobreyectivas, por el teorema 4.2.2 tenemos que $\varprojlim\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \neq \varnothing$. □

La sucesión inversa mencionada en la proposición 5.2.1 se puede visualizar gráficamente como en el diagrama 5.5.

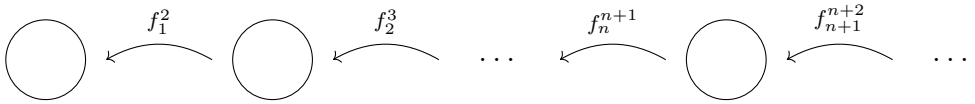


Diagrama 5.5: Representación de la sucesión inversa del solenoide.

Con lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 5.2.2. Si $p = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ es una sucesión de números naturales y para $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es tal que $f_n^{n+1}(z) = z^{m_n}$, para cada $z \in \mathbb{S}^1$, entonces definimos el *solenoide* $\Sigma(p)$ como

$$\Sigma(p) = \varprojlim\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle.$$

Cuando tenemos casos particulares de los solenoides, podemos representar gráficamente el límite inverso. Esto lo podemos ver mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.3. Consideremos la sucesión inversa $\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$. Cuando la sucesión de los números naturales está compuesta solamente por el número 1, es decir $p = \{1, 1, 1, \dots\}$, las funciones enlace son la identidad, por lo que tenemos un caso particular del ejemplo 3.1.7. De esta manera, el límite inverso es $\mathbb{S}^1$.

$$\Sigma(p) = \varprojlim \langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$$

Diagrama 5.6: Solenoide con funciones enlace como identidad.

5.2.2. El solenoide diádico y su construcción geométrica

Notación 5.2.4. Cuando la sucesión de números naturales está compuesta únicamente por el número 2, es decir $p = \{2, 2, 2, \dots\}$, el límite inverso $\varprojlim \langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N} \rangle$ lo denotamos por Σ_2 y lo llamamos *solenoide diádico*.

La importancia del solenoide diádico radica en ser de los primeros estudiados antes de ser generalizados.

La elección del solenoide diádico como tema principal de la presente sección es la construcción geométrica que éste puede representar. Como hemos dicho, en el artículo [Vie27] se hace mención del solenoide diádico, pero no solo eso, sino que se da una explicación analítica de cómo llegar a éste. Recomendamos consultar el artículo [GC09] para apreciar la construcción geométrica del solenoide y poder visualizarlo. De igual manera, nuestra explicación es influenciada por este trabajo.

Por otro lado, para la construcción del solenoide diádico primero hacemos mención de la idea y después su planteamiento formal. Consideremos un toro sólido T_1 en $\mathbb{R}^3$ (ver imagen en diagrama 5.7(a)).

Observación 5.2.5. Los toros sólidos son compactos, metrizables y conexos, por lo tanto son continuos.

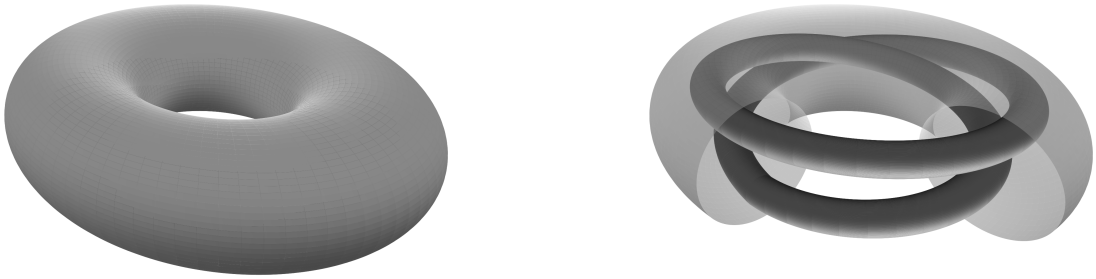
Ahora, consideremos un toro sólido T_2 contenido en T_1, el cual tiene un grosor de a lo más una cuarta parte del grosor de T_1 y da dos vueltas dentro de él (ver imagen en diagrama 5.7(b)). De igual manera, podemos ver que T_2 es un continuo y además $T_2 \subseteq T_1$. De manera análoga a T_2, consideramos un toro sólido T_3 con a lo más un cuarto del grosor de T_2 y que dé dos vueltas dentro de él. Similarmente, podemos apreciar que T_3 está contenido en T_1 y da cuatro vueltas dentro de él, por lo que tenemos que $T_3 \subseteq T_2 \subseteq T_1$.

Siguiendo esta construcción de manera inductiva, tenemos toros sólidos T_n, en donde se cumple que $T_{n+1} \subseteq T_n$. Todos estos toros sólidos están contenidos en T_1.
De esta manera, utilizando teorema 1.2.39 tenemos que el conjunto

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n \tag{5.2.1}$$

es no vacío y del teorema 1.2.40 obtenemos que es un espacio compacto. Vemos más adelante, que el espacio determinado por la intersección en (5.2.1) es homeomorfo al solenoide diádico.

Ahora, dada la idea visual, lo que sigue es construir formalmente el espacio que se obtiene por esta intersección.



(a) Representación del toro sólido.

(b) Incrustación de un toro sólido dentro de otro.

Diagrama 5.7: Imagen del toro sólido bajo F.

La idea visual que describimos se establece en el artículo [Sma67], donde S. Smale propone una construcción del solenoide diádico a través de funciones que incrustan al toro sólido dentro de él. Para un mejor entendimiento de lo que implican estas intersecciones, podemos consultar el diagrama 5.8. Dicho diagrama fue tomado del artículo [KKP14].

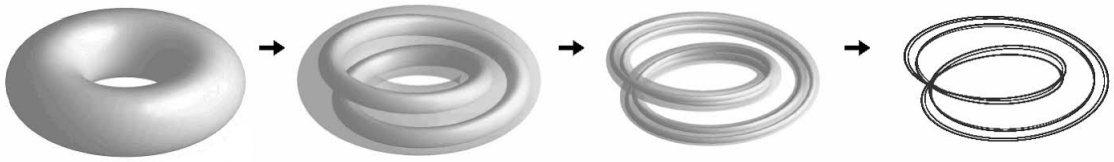


Diagrama 5.8: Construcción del solenoide diádico, imagen tomada del artículo [KKP14].

Nosotros, con esa idea y basándonos de [Dev21] definimos analíticamente el solenoide diádico.

Para llevar a cabo esto recordemos que el *disco unitario* es el espacio

$$\mathbb{D}^1 = \{re^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ y } 0 \leq r \leq 1\}.$$

Tomando en cuenta el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ y el disco unitario $\mathbb{D}^1$, definimos al *toro sólido* como

$$T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1.$$

Ahora, definimos la función $F : T \to T$ como

$$F(z, p) = (z^2, \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{2}z), \tag{5.2.2}$$

donde $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y $p = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}^1$.

Observación 5.2.6. Geométricamente, F describe lo siguiente. Fijando $z^* = e^{i\theta^*} \in \mathbb{S}^1$, el disco $\mathbb{D}(\theta^*)$ es enviado mediante F a otro disco $\mathbb{D}(2\theta^*)$. La imagen de $\mathbb{D}(\theta^*)$ bajo F es un disco de radio $\frac{1}{4}$ con centro $\frac{1}{2}z^*$. El disco $\mathbb{D}(\theta^* + \pi)$ también es enviado a $\mathbb{D}(2\theta^*)$, su imagen bajo F es un disco de radio $\frac{1}{4}$ con centro $-\frac{1}{2}z^*$. Podemos visualizar los diagramas 5.9 y 5.10 para comprender mejor lo descrito.

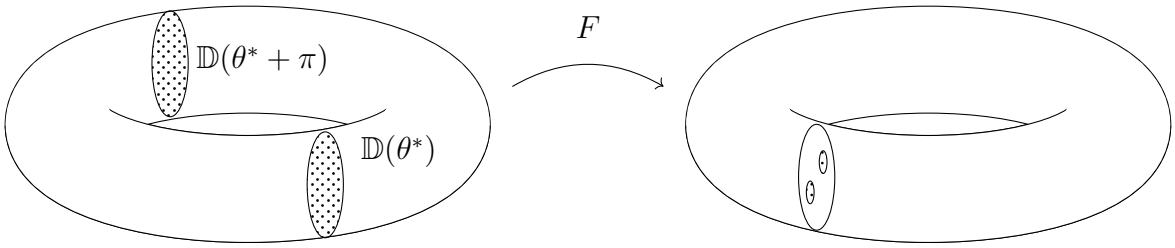


Diagrama 5.9: Aplicación de F en un disco.

Globalmente, aplicar F a T se puede visualizar como el diagrama 5.7. Además, se puede notar que $F^{n+1}(T) \subseteq F^n(T)$, donde F^n es la composición n veces de F consigo misma, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que podemos definir el siguiente espacio.

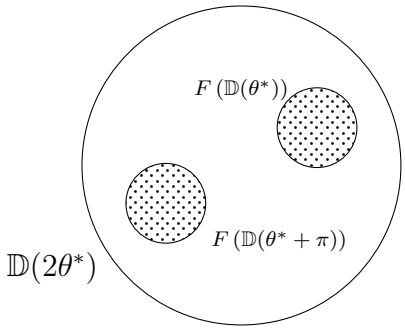


Diagrama 5.10: Corte del toro sólido en el disco $\mathbb{D}(2\theta^*)$.

Definición 5.2.7. El *atractor de Smale-Williams* se define como

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^{n-1}(T).$$

La importancia del atractor de Smale-Williams radica en el área de sistemas dinámicos, más aún, como su nombre lo sugiere, a este espacio lo podemos encontrar como ejemplo en el tema de atractores. Más aún, como hemos mencionado, el solenoide diádico y el atractor de Smale-Williams son homeomorfos. Para demostrar esta afirmación, primero necesitamos puntualizar algunas propiedades de la función F.

Proposición 5.2.8. Dada la función $F : T \to T$ definida por la ecuación (5.2.2), se cumple que F es inyectiva y continua.

Demostración. Primero demostremos que F es inyectiva; para esto tomemos $(z,p) \in (w,q) \in T$ tales que $F((z,p)) = F((w,q))$. Por definición de F, tenemos que

$$(z^2, \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{2}z) = (w^2, \tfrac{1}{4}q + \tfrac{1}{2}w).$$

Como $z^2 = w^2$, entonces $z = w$ o $z = -w$. Si $z = -w$, entonces $p - q = 4w$, por lo que $\|p - q\| = 4\|w\| = 4$, pero esto no es posible, ya que al estar p y q en el disco, tenemos que $\|p - q\| \leq 2$; por lo tanto $w = z$. Si sustituimos w en $\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}w$, tenemos que $\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}z$ y por lo tanto $p = q$. De esta manera F es inyectiva.
Para verificar que F es continua, notemos que dado que $(\pi_1 \circ F)((z,p)) = z^2$ y $(\pi_2 \circ F)((z,p)) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}z$, para todo $(z,p) \in T$, son funciones continuas, entonces por la proposición 2.2.9 concluimos efectivamente que F es continua. □

Corolario 5.2.9. La función $F : T \to F(T)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Por la restricción del codominio de F a su imagen, tenemos que es sobreyectiva. Además, por la proposición 5.2.8, F es inyectiva y continua. Dado que T es un espacio compacto y $F(T)$ es un espacio de Hausdorff, por el teorema 1.2.44, concluimos que $F : T \to F(T)$ es un homeomorfismo. □

Para los resultados que presentamos a continuación debemos tener en cuenta la siguiente observación.

Observación 5.2.10. Dados $(z,p) \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $(z_{n+1}, p_{n+1}) \in T$ tal que

$$F^n((z_{n+1}, p_{n+1})) = (z,p).$$

Además, por la inyectividad de F, tenemos que $(z_{n+1}, p_{n+1}) = F^{-n}((z,p))$, donde F^{-n} es la composición n veces de F^{-1} consigo misma.

Ahora, gracias a la observación 5.2.10 y lo demostrado en el corolario 5.2.9, podemos mencionar el siguiente resultado.

Teorema 5.2.11. Dados los espacios Λ y Σ_2, la función $H : \Lambda \to \Sigma_2$, definida por

$$H(x) = (\pi_1(x), (\pi_1 \circ F^{-1})(x), (\pi_1 \circ F^{-2})(x), \dots),$$

donde $x = (z, p) \in \Lambda$, es un homeomorfismo.

Demostración. Primero mostremos que H es inyectiva. Para esto tomemos $x = (z, p), y = (w, q) \in \Lambda$ tales que $H(x) = H(y)$. Es decir, $(\pi_1(x), (\pi_1 \circ F^{-1})(x), (\pi_1 \circ F^{-2})(x), \dots) = (\pi_1(y), (\pi_1 \circ F^{-1})(y), (\pi_1 \circ F^{-2})(y), \dots)$. Para simplificar la notación podemos reescribir estos elementos como $(\pi_1(x), (\pi_1 \circ F^{-1})(x), \pi_1 \circ F^{-2}(x), \dots) = (z, z_2, z_3, \dots)$ y $(\pi_1(y), (\pi \circ F^{-1})(y), (\pi_1 \circ F^{-2})(y), \dots) = (w, w_2, w_3, \dots)$. Dado que $\pi_1(x) = \pi_1(y)$, tenemos que $z = w$. Para demostrar la igualdad entre p y q tomemos en cuenta las siguientes observaciones. Por definición, $F(z_2, p_2) = (z, p)$, es decir

$$(z_2^2, \tfrac{1}{4}p_2 + \tfrac{1}{2}z_2^2) = (z, p).$$

De esta manera, tenemos que $p - \frac{1}{4}p_2 = \frac{1}{2}z_2$. Similarmente, concluimos que $q - \frac{1}{4}q_2 = \frac{1}{2}w_2$. Como $z_2 = w_2$, se cumple que $p - \frac{1}{4}p_2 = q - \frac{1}{4}q_2$. Por lo que:

$$p - q = \tfrac{1}{4}(p_2 - q_2).$$

También, tenemos que $F^2(z_3, p_3) = (z, p)$. De donde:

$$(z_3^4, \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}p_3 + \tfrac{1}{2}z_3) + \tfrac{1}{2}z_3^2) = (z, p).$$

Luego, $2p - \frac{1}{8}p_3 = \frac{1}{4}z_3 + z_3^2$. Similarmente, tenemos que $2q - \frac{1}{8}q_3 = \frac{1}{4}w_3 + w_3^2$. Como $z_3 = w_3$, se cumple que $2p - \frac{1}{8}p_3 = 2q - \frac{1}{8}q_3$. De esta forma:

$$p - q = \tfrac{1}{16}(p_3 - q_3).$$

Continuando el proceso de manera inductiva, llegamos a que:

$$p - q = \tfrac{1}{4^n}(p_{n+1} - q_{n+1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $p, q \in \mathbb{D}^1$, estos también están en $\mathbb{R}^2$. Recordemos que la norma en $\mathbb{R}^2$ es la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la cual está dada por $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. No es difícil ver que aplicando la norma y las propiedades de norma a la ecuación anterior, se sigue que:

$$\|p - q\| = \tfrac{1}{4^n}\|p_{n+1} - q_{n+1}\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $p_{n+1}, q_{n+1} \in \mathbb{D}^1$, entonces $\|p_{n+1} - q_{n+1}\| \leq 2$. Por lo que se cumple la desigualdad:

$$\|p - q\| \leq \tfrac{2}{4^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el límite cuando n tiende a infinito en ambos lados de la desigualdad, tenemos que $\|p - q\| = 0$, es decir, $p = q$. Finalmente, concluimos que $(p, z) = (q, w)$. Por lo que H es inyectiva.
Ahora veamos que H es sobreyectiva. Para esto tomemos un elemento $(z, z_2, z_3, \dots) \in \Sigma_2$. Definimos:

$$p = 8\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i}.$$

Veamos que p está en el disco probando que su norma es menor o igual a 1. Dado que se cumple:

$$\|p\| = \left\| 8\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i} \right\| \leq 8\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{1}{4^i}\|z_i\| = 8\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{1}{4^i} = \tfrac{2}{3},$$

concluimos que $p \in \mathbb{D}^1$. De esta manera, $(z, p) \in T$. Para demostrar que (z, p) está en Λ veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(w_{n+1}, p_{n+1}) \in T$ tal que $F^n((w_{n+1}, p_{n+1})) = (z, p)$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $w_{n+1} = z_{n+1}$. Para los elementos en el disco, primero definimos el elemento $p_2 = 4p - 2z_2$. Demostremos que p_2 está en el disco. Se cumple lo siguiente:

$$\|p_2\| = \left\| 32\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i} - 2z_2 \right\| = \left\| 32\sum_{i=3}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i} + 2z_2 - 2z_2 \right\| \leq 32\sum_{i=3}^{\infty} \tfrac{1}{4^i}\|z_i\| = \tfrac{2}{3},$$

por lo tanto $p_2 \in \mathbb{D}^1$. Ahora veamos que $F((z_2, p_2)) = (z, p)$. Tenemos que $F((z_2, p_2)) = (z_2^2, \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}z_2)$. De donde, por definición de las funciones enlace, $z_2^2 = z$ y por definición de p_2, tenemos que $\frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}z_2 = \frac{1}{4}(4p - 2z_2) + \frac{1}{4}z_2 = p$. De esta manera, $F(z_2, p_2) = (z, p)$. Ahora, definimos $p_3 = 16p - 2z_3 - 8z_2$. Igualmente, notemos, que p_3 está en $\mathbb{D}^1$, pues se cumple lo siguiente:

$$\|p_3\| = \left\| 128\sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i} - 2z_3 - 8z_2 \right\| \leq 128\sum_{i=4}^{\infty} \tfrac{1}{4^i}\|z_i\| = \tfrac{2}{3}.$$

Más aún, verifiquemos que $F^2((z_3, p_3)) = (z, p)$. Para tal afirmación notemos que se cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} F^2((z_3, p_3)) &= F((z_3^2, \tfrac{1}{4}p_3 + \tfrac{1}{2}z_3)) \\ &= (z_3^4, \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}p_3 + \tfrac{1}{2}z_3) + \tfrac{1}{2}z_3^2) \\ &= (z, \tfrac{1}{16}p_3 + \tfrac{1}{8}z_3 + \tfrac{1}{2}z_2) \\ &= (z, \tfrac{1}{16}(16p - 2z_3 - 8z_2) + \tfrac{1}{8}z_3 + \tfrac{1}{2}z_2) \\ &= (z, p). \end{aligned}$$

Aplicando esta idea de manera inductiva, obtenemos lo siguiente. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente elemento:

$$p_{n+1} = 4^n p - 4^n 8 \sum_{i=2}^{n+1} \tfrac{z_i}{4^i}.$$

Demostremos que p_{n+1} se encuentra en el disco. Para esto, notemos que se cumplen las siguientes igualdades

$$\|p_{n+1}\| = \left\| 4^n p - 4^n 8 \sum_{i=2}^{n+1} \tfrac{z_i}{4^i} \right\| = \left\| 4^n (8 \sum_{i=2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i}) - 4^n 8 \sum_{i=2}^{n+1} t \frac{z_i}{4^i} \right\| = \left\| 4^n 8 \sum_{i=n+2}^{\infty} \tfrac{z_i}{4^i} \right\|.$$

De donde, manipulando las desigualdades, tenemos que

$$\|p_{n+1}\| \leq 4^n 8 \sum_{i=n+2}^{\infty} \tfrac{1}{4^i} \|z_i\| \leq 4^n 8 \sum_{i=n+2}^{\infty} \tfrac{1}{4^i} = \tfrac{4^n 8}{4^n 12} = \tfrac{2}{3}.$$

De esta manera, $p_{n+1} \in \mathbb{D}^1$. Ahora demostremos que $F^n((z_{n+1}, p_{n+1})) = (z, p)$. Para esto, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
F^n((z_{n+1}, p_{n+1})) &= F^{n-1}\left(\left(z_{n+1}^2, \tfrac{1}{4} p_{n+1} + \tfrac{1}{2} z_{n+1}\right)\right) \\
&= F^{n-1}\left(\left(z_n, \tfrac{1}{4}\left(4^n p - 4^n 8 \sum_{i=2}^{n+1} \tfrac{z_i}{4^i}\right) + \tfrac{1}{2} z_{n+1}\right)\right) \\
&= F^{n-1}\left(\left(z_n, 4^{n-1} p - 4^{n-1} 8 \sum_{i=2}^{n} \tfrac{z_i}{4^i}\right)\right) \\
&= F^{n-1}((z_n, p_n)) \\
&\vdots \\
&= (z, p).
\end{aligned}$$

Por lo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(z_{n+1}, p_{n+1}) \in T$ tal que $F^n((z_{n+1}, p_{n+1})) = (z, p)$, es decir, $(z_{n+1}, p_{n+1}) = F^{-n}((z, p))$. Por lo tanto, tomando $x = (z, p) \in \Lambda$, se cumple que $H(x) = (\pi_1(x), (\pi_1 \circ F^{-1})(x), (\pi_1 \circ F^{-2})(x), \dots)$. Así, H es sobreyectiva.
Finalmente, veamos que H es continua. Lo haremos aplicando el teorema 2.2.9. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, dado que F es un homeomorfismo, tenemos que F^{-1} es continua. Así, $\pi_1 \circ F^{n-1}$ es una función continua. Por lo tanto H, es un una función continua.
Finalmente, como Λ es un espacio compacto y Σ_2 es un espacio de Hausdorff, por el teorema 1.2.44, concluimos que H es un homeomorfismo. □

Culminamos la subsección con un resultado que muestra que el solenoide diádico no tiene representación única como límite inverso.

Proposición 5.2.12. Considerando la sucesión inversa $\langle F^{n-1}(T), i_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$, donde la función enlace i_n^{n+1} es la inclusión, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\varprojlim\langle F^{n-1}(T), i_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es homeomorfo a Σ_2.

Demostración. No es difícil probar que $\ldots \subseteq F^2(T) \subseteq F(T) \subseteq T$. Por lo que, similarmente a lo realizado en el ejemplo 3.1.9, obtenemos que $\varprojlim\langle F^{n-1}(T), i_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$ es homeomorfo a $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^{n-1}(T)$. Y por el teorema 5.2.11 concluimos que éste es homeomorfo a Σ_2. □

En resumen, podemos concluir que el solenoide diádico tiene al menos tres representaciones:

$$\Lambda, \quad \varprojlim\langle F^{n-1}(T), i_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle \quad \text{y} \quad \Sigma_2$$

con las cuales podemos trabajar dependiendo de las necesidades requeridas.

5.2.3. Dos propiedades interesantes de los solenoides diádicos como consecuencia de su definición como un límite inverso.

El solenoide diádico cuenta con una gran variedad de propiedades topológicas. Algunas de estas las podemos consultar en artículos como [GC09], [Nad92] o [BK18]. En este apartado exponemos dos propiedades en donde se utilizan directamente los límites inversos. En este caso, empleamos el solenoide diádico en su forma $\Sigma_2 = \varprojlim\langle \mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$.

Teorema 5.2.13. El solenoide diádico es un continuo indescomponible.

Demostración. Para facilitar la demostración veamos al círculo unitario como $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Dado que $\mathbb{S}^1$ es un continuo, por el teorema 4.2.1, tenemos que Σ_2 es un continuo. Como cada función enlace es sobreyectiva, por el corolario 4.2.3, tenemos que $\pi_n(\Sigma_2) = \mathbb{S}^1$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, demostremos que Σ_2 es indescomponible. Supongamos que existen A y B subcontinuos propios de Σ_2 tales que $A \cup B = \Sigma_2$. Veamos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.
Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\pi_n(A)$ no está contenido en $\pi_n(B)$ y que $\pi_n(B)$ no está contenido en $\pi_n(A)$. De esta manera existen $e^{i\theta} \in \pi_n(A)\backslash\pi_n(B)$ y $e^{i\phi} \in \pi_n(B)\backslash\pi_n(A)$, donde $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$. Con unos cálculos sencillos, se tiene que $\sqrt{e^{i\theta}}$ tiene los valores $e^{i\frac{\theta}{2}}$ y $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$. Similarmente, $\sqrt{e^{i\phi}}$ tiene los valores $e^{i\frac{\phi}{2}}$ y $e^{i(\frac{\phi}{2}+\pi)}$. Dado que $\pi_{n+1}|_{\Sigma_2}$ es sobreyectiva, tenemos que $\mathbb{S}^1 = \pi_{n+1}(A) \cup \pi_{n+1}(B)$. Por lo tanto

$$e^{i\frac{\theta}{2}} \in \pi_{n+1}(A) \cup \pi_{n+1}(B).$$

Si $e^{i\frac{\theta}{2}} \in \pi_{n+1}(B)$, por el teorema 3.1.11, tenemos que

$$e^{i\theta} = f_n^{n+1}(e^{i\frac{\theta}{2}}) \in f_n^{n+1}(\pi_{n+1}(B)) = \pi_n(B),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $e^{i\frac{\theta}{2}} \in \pi_{n+1}(A)\backslash\pi_{n+1}(B)$. De la misma manera tenemos que $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} \in \pi_{n+1}(A)\backslash\pi_{n+1}(B)$. También podemos probar que $e^{i\frac{\phi}{2}}, e^{i(\frac{\phi}{2}+\pi)} \in \pi_{n+1}(B)\backslash\pi_{n+1}(A)$. Dado que A es conexo, por el teorema 1.2.48 tenemos que $\pi_{n+1}(A)$ es conexo. Como $e^{i\frac{\phi}{2}}$ y $e^{i(\frac{\phi}{2}+\pi)}$ son opuestos (vea el diagrama 5.11), $\pi_{n+1}(A)$ debe contener al menos uno de los dos semicírculos determinados por $e^{i\frac{\theta}{2}}$ y $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$. Dado que $e^{i\frac{\theta}{2}}$ y $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ también son opuestos, implica que $e^{i\frac{\theta}{2}}$ o $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ están en alguno de estos semicírculos. Esto es una contradicción, pues $e^{i\frac{\phi}{2}}, e^{i(\frac{\phi}{2}+\pi)} \notin \pi_{n+1}(A)$. De esta manera, $\pi_n(A) \subseteq \pi_n(B)$ o $\pi_n(B) \subseteq \pi_n(A)$.
Si $\pi_n(A) \subseteq \pi_n(B)$, tenemos que $\pi_i(A) \subseteq \pi_i(B)$ para todo $i < n$. En efecto, para $i > n$, si suponemos que $\pi_i(B) \subseteq \pi_i(A)$ obtenemos que $\pi_n(B) \subseteq \pi_n(A)$, pero estamos suponiendo lo contrario, por lo que $\pi_i(A) \subseteq \pi_i(B)$. Lo mismo sucede si suponemos que $\pi_n(A) \subseteq \pi_n(B)$.
Ahora, en vista de que n es arbitrario, concluimos que $\pi_n(A) \subseteq \pi_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

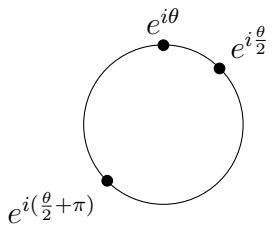


Diagrama 5.11: Raíces cuadradas de $e^{i\theta}$.

o $\pi_n(B) \subseteq \pi_n(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como Σ_2 es de Hausdorff y A es compacto, por el teorema 1.2.41, tenemos que A es cerrado. Similarmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, como A es compacto, por el teorema 1.2.43 tenemos que $\pi_n(A)$ es compacto. Aplicando nuevamente el teorema 1.2.41, $\pi_n(A)$ es cerrado. De la misma forma obtenemos que B es cerrado y $\pi_n(B)$ es compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por el corolario 3.4.2, tenemos que $A = \varprojlim\langle A_n, g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$, donde $A_n = \pi_n(A)$ y $g_n^{n+1} = f_n^{n+1}|_{A_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De forma similar, tenemos que $B = \varprojlim\langle B_n, l_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$, donde $B_n = \pi_n(B)$ y $l_n^{n+1} = f_n^{n+1}|_{B_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\pi_n(A) \subseteq \pi_n(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y mostremos que $A \subseteq B$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A = \varprojlim\langle A_n, g_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x_n \in A_n = \pi_n(A) \subseteq \pi_n(B) = B_n$. Además, tenemos que $l_n^{n+1}(x_{n+1}) = f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. De este modo $x \in \varprojlim\langle B_n, l_n^{n+1}, \mathbb{N}\rangle = B$. Así, $A \subseteq B$ y por lo tanto $\Sigma_2 = A \cup B = B$, lo que quiere decir que B no es un subcontinuo propio, lo cual es una contradicción, puesto que supusimos que sí lo es. Por lo tanto Σ_2, es indescomponible. □

Para culminar la subsección primero recordemos la siguiente definición y su relación con el solenoide diádico.

Definición 5.2.14. El *espacio de Cantor* $\mathcal{C}$ lo definimos como el producto topológico de una cantidad numerable de copias del espacio discreto $\{0,1\}$. Esto es, $\mathcal{C} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, donde $X_n = \{0,1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

En vista de la definición 5.2.14, un punto en el espacio de Cantor es una sucesión numerable e infinita de dígitos con valor 0 o 1.

Para facilitar la demostración del último teorema incluimos el siguiente hecho. Resultado obtenido del teorema 30.3 y corolario 30.4 de [Wil04].

Lema 5.2.15. Dado un espacio topológico (X,τ), tenemos que X es homeomorfo al espacio de Cantor si y sólo si X es compacto, metrizable y además cumple las siguientes condiciones:

i) Los únicos subespacios conexos de X son los conjuntos de un punto.

ii) Todo punto $x \in X$ pertenece a la clausura de $X\backslash\{x\}$.

Culminamos el trabajo de tesis con el siguiente teorema que forma parte del folklore del tema del solenoide diádico. Es preciso notar que en fuentes que hemos consultado, no se realiza una demostración concreta de este hecho, como la que presentamos aquí.

Teorema 5.2.16. Dado $x_1 \in \mathbb{S}^1$, existe un conjunto de Cantor en Σ_2 cuyos elementos tienen como primera coordenada a x_1.

Demostración. Sea $x_1 \in \mathbb{S}^1$ y consideremos el conjunto $K = \{z \in \Sigma_2 \mid \pi_1(z) = x_1\}$. Notemos que, por la existencia de las raíces cuadradas de x_1, K es no vacío. La afirmación recae en que cualquier elemento de $\mathbb{S}^1$ tiene exactamente dos raíces cuadradas. Primero, para x_1 existen x_2 y x_2' tales que $f_1^2(x_2) = x_1 = f_1^2(x_2')$. Para x_2 y x_2' también hay exactamente dos raíces cuadradas, respectivamente. Llevando la idea de forma inductiva, podemos generar los puntos que conforman el conjunto K (construimos un árbol binario de profundidad infinita numerable, vea el diagrama 5.12). Utilizamos el teorema 5.2.15 para mostrar que K es homeomorfo al espacio de Cantor. Primero, dado que Σ_2 es metrizable, por el teorema 1.2.51, K es metrizable. Para ver que es compacto primero veamos que es cerrado. Tomemos un elemento $y \in \Sigma_2\backslash K$. De aquí que $y_1 \neq x_1$, y por ello existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{S}^1$ que no contiene a x_1 pero sí a y_1. Se sigue que $y \in \pi_1^{-1}(U) \cap \Sigma_2 \subseteq \Sigma_2\backslash K$. Por la arbitrariedad de y, $\Sigma_2\backslash K$ es un subconjunto abierto de Σ_2 y por tanto K es un subconjunto cerrado de Σ_2. Luego, K es compacto pues es un cerrado en un compacto de Hausdorff (vea el teorema 1.2.40).
Ahora veamos que se cumplen las condiciones *i*) y *ii*) del lema 5.2.15.

i) Tomemos $H \subseteq K$ tal que $|H| \geq 2$. Luego, existen $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tales que $z \neq w$. Sea $n \in \mathbb{N}$ el más pequeño que cumple que $z_n \neq w_n$. Por ser $\mathbb{S}^1$ Hausdorff, existen dos subconjuntos abiertos U_n y V_n tales que $z_n \in U_n$, $w_n \in V_n$ y $U_n \cap V_n = \varnothing$. Ahora, para cada $1 < i < n$, existen dos subconjuntos abiertos U_i y V_i tales que $z_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ y $U_i \cap V_i = \varnothing$, donde y_i es la otra raíz de $f_{i-1}^i(z_i) = z_i^2$ que no es z_i. Con ello, definimos los subconjuntos abiertos

$$U = \bigcap_{i=2}^{n} \pi_i^{-1}(U_i) \text{ y}$$
$$V = \bigcup_{i=2}^{n} \pi_i^{-1}(V_i).$$

Veamos que $U \cap V = \varnothing$. Primero notemos que

$$\begin{aligned} U \cap V &= (\bigcap_{i=2}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)) \cap (\bigcup_{j=2}^{n} \pi_j^{-1}(V_j)) \\ &= \bigcup_{j=2}^{n} (\pi_j^{-1}(V_j) \cap \bigcap_{i=2}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)). \end{aligned}$$

Cuando i coincide con j, tenemos que $U_i \cap V_j = \varnothing$. Por la observación 2.2.6 tenemos que $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) = \varnothing$. Por lo tanto, $U \cap V = \varnothing$. En consecuencia $U \cap V \cap H = \varnothing$. Ahora veamos que H está contenido en $U \cup V$. Para esto tomemos $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$. Si $a = z$, entonces $a \in U$. Si $a \neq z$, tomemos el $m \in \mathbb{N}$ más pequeño tal que $a_m \neq z_m$. Si $m > n$, entonces a coincide con z en las primeras n coordenadas, por lo que $a \in U$. Si $m \leq n$, entonces $a_m \in V_m$, por lo que $a \in V$. Por lo tanto, hemos visto que en cualquier caso $a \in U \cup V$. En particular, $w \in V$. Así, $H \subseteq U \cup V$.
De esta manera H es disconexo y por lo tanto, los únicos subconjuntos conexos son los que contienen exactamente un elemento.

ii) Tomemos $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ y un subconjunto abierto de Σ_2, digamos $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k)$. Veamos que $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k) \cap (K \backslash \{z\}) \neq \varnothing$. Sea $i = \text{máx}\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Dado que $f_i^{i+1}(z_{i+1}) = z_{i+1}^2 = z_i$, tenemos que z_{i+1} es una raíz cuadrada de z_i. Sea y_{i+1} la otra raíz cuadrada de z_i y y_{i+2} una raíz de y_{i+1}. Definimos y_{i+3} como una raíz de y_{i+2}. Aplicando esta idea de manera inductiva, tenemos una sucesión de puntos $\{y_{i+j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, se cumple que $y_{i+j}^2 = y_{i+j-1}$. Por lo anterior podemos definir un elemento $y \in K$ de tal forma que

$$\pi_n(y) = \begin{cases} z_n & \text{si} \quad n \leq i, \\ y_n & si \quad n > i. \end{cases}$$

Por lo anterior, y es diferente a z y $y \in \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k)$. Así, $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k) \cap K \backslash \{z\} \neq \varnothing$. Por lo que z está en la clausura de $K \backslash \{z\}$.

Así, por teorema 5.2.15, K es homeomorfo al espacio de Cantor. Por lo tanto, x_1 determina un conjunto de Cantor en Σ_2. □

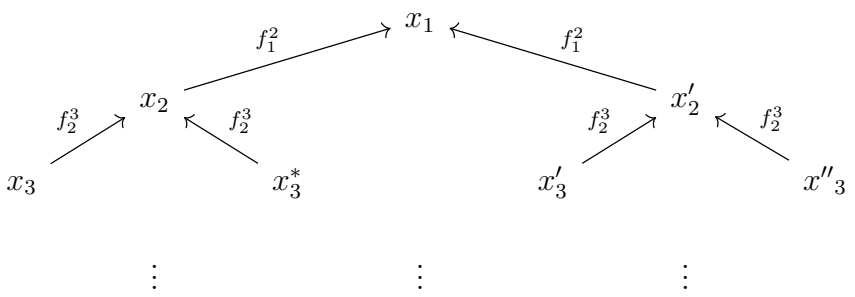


Diagrama 5.12: Idea de la construcción de los puntos que forman una copia del conjunto de Cantor en Σ_2.

5.2.4. El solenoide y su actualidad

Desde que establecimos que el solenoide se le suele llamar el atractor de Smale-Willians ha quedado de manifiesto que el solenoide es tema de estudio en sistemas dinámicos. En la actualidad, el comportamiento del solenoide continúa siendo estudiado, por ejemplo en [BK18], donde se mencionan sus propiedades relacionadas a sistemas dinámicos. En [Dev21] se le destaca como ejemplo de atractor. Más aún, recientemente se ha estudiado la entropía topológica y la dimensión de Hausdorff del solenoide en [BN20].

También es importante mencionar que no solo su repercusión ha sido dentro de la matemática sino que ha sido utilizado como inspiración para las artes plásticas, como lo hace por ejemplo Dina Buric [Bur19], quien incluye la idea de la construcción del solenoide como parte de una galería de arte (vea la imagen en el diagrama 5.13).

Diagrama 5.13: Obra de la autora Dina Buric denominada 2-adic Solenoid. Imagen tomada de la página web [Bur19].

Conclusiones

Esta tesis tuvo como tema de estudio medular los sistemas y límites inversos. Como era de esperarse, el conocimiento de la topología general resultó crucial para el tema principal de nuestro trabajo. En concreto, la topología producto juega un papel importante para entender los límites inversos. Esto se ve expuesto en los resultados presentados en el capítulo 3. Así, la visualización de los límites inversos como subespacio del producto implica el reflejo de algunos resultados clásicos de productos topológicos a los límites inversos.

Puesto que gran parte de la comunidad matemática conoce los límites inversos en su versión con sucesiones inversas, en el capítulo 4, mostramos que tales sucesiones son un caso particular del concepto general de sistemas inversos y que conservan propiedades de interés. De las aportaciones importantes en este capítulo destacamos el teorema 4.2.12, donde se hizo el desarrollo detallado de la construcción de un límite inverso que resulta homeomorfo a la curva del topólogo, que en la gran parte de la literatura existente se omite.

Aunque la obtención de algunos resultados parecen «muy abstractos», considerar al conjunto de los números naturales como conjunto dirigido es trascendental para ligar los límites inversos con otras áreas menos «abstractas» como lo vimos en el capítulo 5 de aplicaciones de los límites inversos, en particular, para la obtención de diagramas para su visualización. Dentro de este último tema, observamos que la definición de sucesión y límite inverso pueden emerger en diversas áreas de la matemática y de esta manera, como hicimos hincapié en la introducción, puede ser utilizada esta herramienta topológica.

En última instancia, hemos comprendido que es posible obtener límites inversos a partir de un solo espacio topológico, así como de familias de espacios topológicos complejos cuya construcción del sistema inverso se traduce en límites con propiedades interesantes. En síntesis, mediante los resultados obtenidos de los límites inversos en el desarrollo de la tesis, hemos visto que podemos emplearlos como una herramienta topológica de gran valor. Con la finalidad de dar visibilidad a nuestro trabajo sobre los límites inversos dentro de la comunidad matemática, en noviembre de 2023 hemos presentado un póster en el primer Congreso Oaxaqueño de Matemáticas y sus Aplicaciones con algunos avances obtenidos.

Bibliografía

[Ale28] P. Alexandroff. Untersuchungen uber gestalt und lage abgeschlossener mengen beliebiger dimension. *Annals of Mathematics*, 30(1/4):101–187, 1928.

[Apo96] T. M. Apostol. *Calculus, Volumen 1: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Reverté, 2^{nd} edition, 1996.

[Ber15] G. M. Bergman. *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, volume 558 of *Universitext.* Springer International Publishing, 2^{nd} edition, 2015.

[BK18] A. Biś y W. Kozłowski. Some remarks on dynamical system of solenoids. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 22(6):1463–1478, 2018.

[BN20] A. Biś y A. Namiecińska. Hausdorff dimension and topological entropies of a solenoid. *Entropy*, 22(5):506, 04 2020.

[Bur19] D. Buric. 2-adic solenoid. Obtenido de `https://gallery.bridgesmathart.org/exhibitions/2019-icerm-illustrating-mathematics/buricd`, 2019. Accedido el 4 de mayo de 2024.

[Chi96] A. Chigogidze. *Inverse Spectra.* North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science, 1996.

[CK13] J. Cheeger y B. Kleiner. Realization of metric spaces as inverse limits, and bilipschitz embedding in l_1. *Geometric and Functional Analysis*, 23(1):96–133, 2013.

[CMR15] G. R. Conner, M. H. Meilstrup, y D. Repovš. The geometry and fundamental groups of solenoid complements. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 24(14):1550069, 2015.

[CRS21] C. Correa, T. Russo, y J. Somaglia. Small semi-Eberlein compacta and inverse limits. *Topology and its Applications*, 302:107835, 2021.

[DC05] F. J. Díaz y J. M. G. Calcines. *Curso de Topología General.* Vision Net, 2005.

[Deb91] J. L. Deborah. Foundations of the cash-in-advance model: A review essay. *Journal of Monetary Economics*, 27(3):487–493, 1991.

[Dev21] R. Devaney. *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems*. Chapman and Hall/CRC, 3^{rd} edition, 2021.

[Eng89] R. Engelking. *General topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1989.

[GC09] J. P. Guerrero y P. P. Covarrubias. El solenoide diadico. *Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana*, 2009.

[Her03] F. H. Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[HR98] P. Howard y J. E. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Comput. American Mathematical Society, 1998.

[IM12] W. T. Ingram y W. S. Mahavier. *Inverse Limits: From Continua to Chaos*. Developments in Mathematics 25. Springer-Verlag New York, 1^{st} edition, 2012.

[Ken08] J. Kennedy. Inverse limits, economics, and backward dynamics. *RACSAM - Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 102:39–73, 2008.

[Kho24] R. T. Khorami. On inverse limit of a projective system of BL-algebras. *Journal of Algebraic Systems*, 12(1):123–133, 2024.

[KKP14] V. P. Kruglov, S. P. Kuznetsov, y A. Pikovsky. Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system. *Regular and Chaotic Dynamics*, 19(4):483–494, 2014.

[KM06] W. Kubiś y H. Michalewski. Small Valdivia compact spaces. *Topology and its Applications*, 153(14):2560–2573, 2006.

[KSY07] J. Kennedy, D. R. Stockman, y J. A. Yorke. Inverse limits and an implicitly defined difference equation from economics. *Topology and its Applications*, 154(13):2533–2552, 2007.

[Lef31] S. Lefschetz. On compact spaces. *Annals of Mathematics*, 32(3):521–538, 1931.

[MR98] R. Michener y B. Ravikumar. Chaotic dynamics in a cash-in-advance economy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22(7):1117–1137, 1998.

[Nad92] S. Nadler. *Continuum theory: an introduction.* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 158. M. Dekker, 1^{st} edition, 1992.

[Ree67] J. H. Reed. Inverse limits of indecomposable continua. *Pacific Journal of Mathematics*, 23(3):597–600, 1967.

[Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.

[Spi94] M. Spivak. *Calculus.* Perish, 3^{rd} edition, 1994.

[Sto79] A. H. Stone. Inverse limits of compact spaces. *General Topology and its Applications*, 10(2):203–211, 1979.

[Vie27] L. Vietoris. Über den höheren zusammenhang kompakter räume und eine klasse von zusammenhangstreuen abbildungen. *Mathematische Annalen*, 97:454–472, 1927.

[VP23] L. J. Villa y I. Puga. Tree-likeness of inverse limits with set-valued bonding functions. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 29(3):2296–4495, 2023.

[Wil04] S. Willard. *General Topology.* Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 2004.

[ZS03] D. G. Zill y P. D. Shanahan. *A first course in complex analysis with applications.* Jones and Bartlett, 1^{st} edition, 2003.