Universidad Tecnológica de la Mixteca

Lógicas Paracompletas Trivaluadas

Tesis para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Daniela Hernández Grijalva

Director de Tesis:

Dr. Jesús Alejandro Hernández Tello

Codirectora de Tesis:

Dra. Verónica Borja Macías

Huajuapan de León, Oaxaca. Noviembre de 2020.

A mis padres,
Enediel Hernández Martínez
y Marena Grijalva Gutiérrez;
mi principal fuente de apoyo.

A mis hermanos, Marlon y
Michel; mi principal fuente
de inspiración.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi familia. Gracias a mi papá por su cariño y palabras de aliento que me ayudan a dar lo mejor de mí. A mi mamá, gracias por su amor incondicional, sus cuidados y consejos que me acompañan donde quiera que vaya. A mis hermanos, gracias por alegrar mi vida y por estar presente en cada paso que doy. A mi abuela materna, Victoria Gutierrez le agradezco sus mimos y amor que endulzan mi corazón. A mis abuelos paternos, Lorenzo Hernández y Ernestina Martínez gracias por ser un ejemplo de fortaleza.

Quiero agradecer a mis directores de tesis; al Dr. Jesús Alejandro Hernández Tello y a la Dra. Verónica Borja Macías por brindarme la oportunidad de conocer el mundo de la lógica a través de sus conocimientos, por su entrega, paciencia, comprensión y por impulsarme a crecer en las exposiciones.

A mis sinodales; Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, Dr. Eduardo Sánchez Soto y M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno les doy las gracias por brindar su tiempo para la revisión de esta tesis y por sus valiosos aportes que la enriquecen. Particularmente, al Dr. Tenorio, gracias por su amistad y apoyo durante la licenciatura.

Aprovecho también para agradecer a mis amigos de siempre, Bianca Citlalli Bello Ramírez, María José Beltrán Ramírez y Ulises Martínez Hernández por estar al pendiente de mí y darme su apoyo siempre que lo necesito. Asimismo, agradezco a mis amigos dentro de la universidad; Jasmín Martínez Espinosa, Juan Daniel Rios, Roberto García, Héctor Noé Flores Meza, Daniela Isis Flores Silva e Iván Vega por hacer de mi estadía un recuerdo memorable.

Finalmente, agradezco al Apoyo a la Reincorporación de Exbecarios PROMEP, por el apoyo económico otorgado por la Subsecretaría de Educación Superior, mediante el proyecto titulado: “Paraconsistencia y paracompletitud en lógicas multivaluadas”, con folio UTMIX-EXB-050.

Daniela Hernández Grijalva

Índice general

Introducción

Hablar de lógica es asociar dicha palabra con el razonar de la vida cotidiana, motivo por el cual generalmente a la lógica se le conoce como el estudio del razonamiento. Pero realmente hablar de lógica es mucho más y nos invita a remontarnos a la antigüedad, específicamente nos lleva a hablar del *Trivium* y el *Quadrivium*. Estos dos vocablos hacen referencia a las llamadas “siete artes liberales” que se estudiaban en la antigüedad y en las primeras universidades europeas a principios de la Edad Media. Este nombre se debe a que su propósito era dotar al hombre de virtudes intelectuales y hacerlo libre mediante el conocimiento.

El *Trivium* cuyo significado es tres vías o caminos, comprendía las materias: gramática, retórica y lógica. Estas disciplinas equipaban a los estudiantes con las herramientas necesarias para poder aprender por sí mismos y seguir con los estudios del *Quadrivium* cuyo significado es cuatro vías o caminos y se encargaba de estudiar: aritmética, geometría, astronomía y música. Mencionamos todo esto precisamente para evidenciar la relevancia de la lógica como una disciplina básica y a su vez hacer notar la importancia de realizar actividades relacionadas con la misma.

Continuando con un poco de historia de la lógica pero ahora incluyendo su vinculación con las matemáticas, revisemos algunas de sus etapas y tal como lo hace el autor de [41] podemos considerar las siguientes cuatro: la *lógica simbólica*, que se encargó de formalizar el lenguaje natural utilizado por el hombre a través de un lenguaje simbólico; la *lógica algebraica*, que estuvo dominada por las aportaciones de George Boole con el álgebra booleana y el desarrollo de los diagramas de Venn por Lewis Carroll; la *lógica matemática*, que se dedica al estudio de la inferencia mediante sistemas formales, dando aportaciones de lógicos sumamente importantes como David Hilbert, Kurt Gödel y Bertrand Russell; y finalmente la *lógica en la computación*, que surge de la aplicación de la lógica matemática en las ciencias de la computación.

Si bien en un principio la lógica (matemática) quería ser el fundamento de toda la matemática, conforme las pruebas matemáticas se hicieron más sofisticadas aparecieron problemas como las paradojas, entre ellas la famosa paradoja de Russell. Entre otras problemáticas surguieron dos resultados conocidos como los *teoremas de incompletitud de Gödel* que cambiaron el destino de la lógica. Por estas razones actualmente la lógica se desarrolla como una rama de las matemáticas y de la filosofía, siendo la ciencia que se encarga de estudiar los principios de la demostración, las inferencias válidas, las falacias, las paradojas y la noción de verdad.

Una vez que se desarrollaba en las matemáticas, la lógica clásica toma un rol central. No es sino hasta por el siglo XX que aparecieron las lógicas multivaluadas gracias a Jan Łukasiewicz, dando lugar a otro tipo de lógicas conocidas como *no clásicas*. Por todas las razones anteriores, y seguramente más que pudieramos mencionar, parece ser suficiente justificación para el desarrollo del presente trabajo.

El corazón de un sistema multivaluado es su conjunto de valores de verdad $\mathcal{V}$, donde algunos valores son especiales y se identifican como designados. Los números 0, 1 y 2 son parte de la semántica de las lógicas estudiadas en este documento, es decir $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$ y fueron elegidos sólo por simplicidad y conveniencia. Los conectivos que usamos son los usuales ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\to$) y vale la pena destacar que a cada uno le pedimos distintas propiedades. Por ejemplo el ser extensión conservativa de sus versiones en lógica clásica proposicional y la no molecularidad es algo que se le impone a los cuatro conectivos mientras que la simetría sólo es algo para la conjunción $\wedge$ y la disyunción $\vee$.

Al trabajar con varias lógicas es común utilizar subíndices junto a los conectivos o con los símbolos $\vdash$ y $\models$ para especificar a qué lógica corresponden, por ejemplo $\wedge_{L3A}$ indica que el conectivo $\wedge$ corresponde a la lógica $L3A$. Sin embargo, en este trabajo de tesis dado que esperamos que la lógica en la que se trabaja se entienda desde el contexto descartamos dichos subíndices en la mayoría de los casos.

Con este trabajo de tesis buscamos contrastar los conceptos de *paraconsistencia genuina* y *paracompletitud genuina* mediante la dualidad; en inglés los autores de [23] usan la palabra"dualizing" para describir la parte dual-matemática entre dos conectivos por medio de una involución. Por simplicidad traducimos dicha palabra como "dualización", este término no es usual en matemáticas y aquí lo usamos justamente para referirmos a esta parte dual-matemática, es necesario aclarar esto para avisar al lector la idea del sentido de dicha palabra. El concepto de dualidad es muy importante en matemáticas ya que permite estudiar propiedades desde diferentes ópticas facilitando o permitiendo el descubrimiento o apreciación de nuevas propiedades de un sistema a partir de las propiedades del sistema dual.

Nuestro objetivo principal se divide en dos, primero definir dos lógicas en términos de los cuatro conectivos usuales que sean extensiones de las lógicas paracompletas genuinas trivaludas $L3A^D$ y $L3B^D$ dejando previamente un análisis semántico de estas. En segundo lugar contrastar la parte semántica con la sintáctica proporcionando para cada lógica un sistema axiomático tipo Hilbert que satisfaga los teoremas de robustez y completitud. Sin más preámbulos pasemos a describir concretamente el contenido de la tesis, el cuál se organiza del siguiente modo.

En el Capítulo 1 nos encargamos de mostrar las bases necesarias para una adecuada comprensión del resto del trabajo, incluyendo conceptos básicos y haciendo las convenciones de simbología que consideramos pertinentes. Asimismo, resaltamos los dos enfoques en los cuáles es posible definir lógica unificándolos mediante la Definición 1.10. También dentro de los conceptos dados podemos encontrar las características que le pedimos a nuestros conectivos a lo largo de todo el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 abordamos el concepto de *lógicas no clásicas* y para llegar a éste primero explicamos detalladamente los *tres principios aristotélicos* que fundamentan la lógica clásica. Luego pasamos a hablar de las dos lógicas no clásicas claves en este estudio, las cuales son las *lógicas paraconsistentes* y las *lógicas paracompletas*, dando un breve panorama de lo que cada una representa y mostramos sus definiciones.

Dedicamos el Capítulo 3 a estudiar un concepto más restrictivo de paraconsistencia conocido como *paraconsistencia genuina*, explicando los motivos por los cuáles surge. Después analizamos en el ámbito trivaluado el comportamiento de los conectivos que generan las lógicas paraconsistentes genuinas llegando a definir las lógicas $L3A$ y $L3B$ en términos de negación, conjunción y disyunción. Más adelante, agregamos una implicación adecuada para extender las dos lógicas anteriores dando paso a $L3A_G$ y $L3B_G$, respectivamente. Terminamos el capítulo mostrando las axiomáticas de $L3A_G$ y $L3B_G$ con un bosquejo de los detalles necesarios para demostrar que las lógicas son robustas y completas respecto a los sistemas axiomáticos dados. De manera general este capítulo resume el trabajo realizado por Hernández-Tello en [24].

El Capítulo 4 contiene básicamente el estudio en [23], es decir, nos dedicamos a analizar la noción de *lógicas paracompletas genuinas*. De manera análoga a como procedimos en el capítulo anterior analizamos cómo se comportan los conectivos que generan este tipo de lógicas pero además agregamos una perspectiva dual entre las paracompletas genuinas y las paraconsistentes genuinas, llegando a las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D$ y $L3B^D$ duales a $L3A$ y $L3B$, respectivamente. Luego estudiamos las posibles implicaciones adecuadas con las que podemos ampliar el lenguaje y extender así a $L3A^D$ y $L3B^D$. Hasta este punto, como mencionamos al principio del párrafo, lo descrito anteriormente se encuentra en [23]. El primer aporte que realiza esta tesis es la selección de una implicación para extender a $L3A^D$ y $L3B^D$. Dicho conectivo de implicación satisface la propiedad de ser neoclásica y no molecular, obteniendo así las respectivas lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$.

Finalizamos con el Capítulo 5 el cuál plasma el objetivo y aporte central de esta tesis, mostrando sendas axiomáticas para el par de lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$. Lo que toma más espacio en el contenido del Capítulo 5 es la recolección de una serie de resultados encadenados que nos ayudan a demostrar el teorema de completitud respecto a las teorías axiomáticas en cada lógica. Dentro de los resultados podemos destacar la introducción de conectivos unarios que permiten utilizar transformaciones que reflejan los valores de verdad. Además para cada lógica estos conectivos modelan el comportamiento de los conectivos: negación, disyunción, conjunción e implicación; conduciéndonos a la aplicación de la técnica de Kalmár, pieza clave en el logro de las demostraciones que los sistemas axiomáticos propuestos son robustos y completos.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Lenguaje

La importancia de tener claro cuáles son los objetos de estudio en todo tipo de investigación es vital para la buena comprensión del tema a desarrollar. Por tal razón comenzamos por hablar de aquellos conceptos fundamentales para el desarrollo de este trabajo de tesis. Además presentamos las convenciones y simbología pertinentes para el entendimiento del mismo. Sin más preámbulos comenzamos con la definición del elemento más básico para poder hablar de lógica.

Definición 1.1 ([24]). *Un* **lenguaje proposicional** $\mathcal{L}$ *es una pareja* $\langle \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \rangle$ *donde* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *es el alfabeto y* $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ *es la sintaxis. Los elementos* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *y* $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ *son tales que:*

- $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *está formado por:*
  - *un conjunto de letras proposicionales* P*;*
  - *un conjunto de conectivos* C[1]*;*
  - *un conjunto de símbolos auxiliares* $A = \{(,), \mathbf{,}\}$.
- *La sintaxis es el conjunto de reglas que nos permite definir el concepto de* **fórmula bien formada**. *El conjunto de las fórmulas bien formadas de* $\mathcal{L}$*, denotado por* $FORM(\mathcal{L})$*, está constituido por sucesiones de símbolos de* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *bajo las premisas siguientes:*
  1. *Los elementos de* P *son fórmulas bien formadas, se denominan fórmulas atómicas y se denotan por* $ATOM(\mathcal{L})$.

[1] Llamamos a los elementos de C conectivos primitivos y cualquier otro conectivo que se exprese en términos de estos lo denominamos conectivo abreviado.

2. *Si* $*$ *es un conectivo de aridad* n *de* C *y* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *son fórmulas bien formadas, entonces* $*(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *también es una fórmula bien formada.*

3. *Únicamente las sucesiones de símbolos producidas por la aplicación de los pasos* 1 *y* 2 *se consideran fórmulas bien formadas.*

Notemos que el concepto de fórmula bien formada en la Definición 1.1 se construye de manera recursiva, además a lo largo del documento para referirnos a ella usamos simplemente la palabra **fórmula**. También denotamos las fórmulas por letras griegas minúsculas φ, ψ, σ, etc., sin hacer distinción si son o no fórmulas atómicas. Para especificar que se trata de fórmulas atómicas o proposicionales usamos letras latinas minúsculas p, q, r, s, etc. Los subconjuntos de $FORM(\mathcal{L})$ son denominados **teorías** y son denotados por letras griegas mayúsculas Γ, Δ, Θ, etc. Ocupamos subíndices en cualquiera de los casos anteriores siempre que sea conveniente.

Los conectivos que ocupamos en la tesis son de aridad cero, uno y dos. La notación para este tipo de conectivos la presentamos a continuación. Sean $* \in C$ y $\varphi, \psi \in FORM(\mathcal{L})$.

Si $*$ es binario, entonces $*(\varphi, \psi) = \varphi * \psi$.

Si $*$ es unario, entonces $*(\varphi) = *\varphi$.

Si $*$ es ceroario, entonces $*() = *$.

Los conectivos ceroarios que empleamos son $\top$ y $\bot$ conocidos por *top* y *bottom*, respectivamente; en algunos lenguajes es posible introducirlos como la abreviación de alguna fórmula del lenguaje. Sin importar si son abreviaciones o no, su interpretación corresponde a valores de verdad constantes, *verdad* para $\top$ y *falso* para $\bot$. Es preciso señalar que usamos las notaciones usuales para los conectivos: negación, conjunción, disyunción, implicación y bicondicional (o doble implicación) como: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, respectivamente a menos que se indique lo contrario.

Nota. Debido a que los conjuntos P y A han quedado fijos y la parte sintáctica es invariable en cualquier lenguaje, entonces a menos que se diga lo contrario, para definir lenguajes proposicionales de aquí en adelante basta definir el conjunto de conectivos C.

Ejemplo 1.1 (Lenguajes y fórmulas)**.** La Tabla 1.1 muestra cuatro lenguajes distintos y algunas fórmulas en ellos.

Lenguaje	Fórmulas
$\mathcal{L}_1$ con $C = \{\top, \vee\}$	$\varphi_1 = (p \vee q) \vee r$ $\varphi_2 = \top$
$\mathcal{L}_2$ con $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$	$\varphi_3 = \neg(p \wedge q)$ $\varphi_4 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)$
$\mathcal{L}_3$ con $C = \{\top, \bot, \to\}$	$\varphi_5 = (p \to \top)$ $\varphi_6 = \top \to \bot$
$\mathcal{L}_4$ con $C = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \bot\}$	$\varphi_7 = (\neg q \to \neg p) \vee (\neg(r \wedge \neg t))$ $\varphi_8 = (p \wedge \bot) \to (q \vee \neg p)$

Tabla 1.1: Ejemplificando fórmulas y lenguajes

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$
φ_1	✓	✗	✗	✓
φ_2	✓	✗	✓	✗
φ_3	✗	✓	✗	✓
φ_4	✗	✓	✗	✓
φ_5	✗	✗	✓	✗
φ_6	✗	✗	✓	✗
φ_7	✗	✗	✗	✓
φ_8	✗	✗	✗	✓

Con estos ejemplos podemos notar que mientras más conectivos tengamos en el lenguaje es posible expresar más fórmulas. En este caso el lenguaje tiene mayor poder de expresión. En la tabla de la izquierda se muestran con ✓ las fórmulas que son válidas en el respectivo lenguaje y en caso de no ser válidas con ✗. Notemos que el lenguaje $\mathcal{L}_4$ es el que permite construir más fórmulas, por ejemplo de las ocho fórmulas dadas acepta cinco.

Otro concepto importante que es de mucha ayuda para definir lógica es el de sustitución, ya que nos permite manipular las fórmulas bien formadas del lenguaje.

Definición 1.2 ([40])**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Una* ***sustitución de átomos*** *σ, es el conjunto $\sigma = \{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n\}$, donde $p_i \in ATOM(\mathcal{L})$, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ y $\beta_i \in FORM(\mathcal{L})$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La sustitución σ aplicada a:*

- *una fórmula φ, denotada por $\sigma(\varphi)$ o por $\varphi[p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n]$, es la fórmula que se obtiene al reemplazar cada ocurrencia de p_i en φ por la fórmula β_i para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de manera simultánea.*
- *un conjunto de fórmulas Γ es el conjunto $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\varphi) | \varphi \in \Gamma\}$.*

- *la pareja* (Γ, φ) *es* $\sigma(\Gamma, \varphi) = (\sigma(\Gamma), \sigma(\varphi))$.

Ejemplo 1.2 (Sustitución de átomos)**.** Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional donde $C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. A la fórmula $\varphi = (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3) \wedge \neg(p_2 \vee \neg p_1)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ le aplicamos las sustituciones de átomos $\sigma = \{p_1/p_4 \rightarrow p_5,\ p_2/\neg p_6,\ p_3/p_7 \wedge p_8\}$ y $\sigma' = \{p_1/\neg p_2 \vee p_4,\ p_2/p_3 \rightarrow p_1,\ p_3/\neg p_3\}$, para obtener:

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi) &= \Big(\neg(p_4 \rightarrow p_5) \rightarrow \neg(p_7 \wedge p_8)\Big) \ \wedge \ \neg\Big(\neg p_6 \vee \neg(p_4 \rightarrow p_5)\Big), \\ \sigma'(\varphi) &= \Big(\neg(\neg p_2 \vee p_4) \rightarrow \neg(\neg p_3)\Big) \ \wedge \ \neg\Big((p_3 \rightarrow p_1) \vee \neg(\neg p_2 \vee p_4)\Big). \end{aligned}$$

Antes de introducir más conceptos necesarios para el trabajo de tesis, vamos a hablar de los dos enfoques desde los que se pueden estudiar lógicas. Estos son: *teoría de modelos* y *teoría de prueba*. Sobre estos enfoques vamos a seguir dando definiciones pertinentes y además ambos serán utilizados para conseguir el objetivo central de la tesis.

1.2. Teoría de prueba

La *teoría de prueba*, llamada también *teoría de la demostración*, como su nombre lo indica estudia las demostraciones o pruebas, como objetos puramente matemáticos, mediante técnicas que posibilitan su estudio. Es necesario mencionar que los enfoques *teoría de prueba* y *teoría de modelos* son dos de las cuatro áreas en las que actualmente se divide la lógica matemática [5]. Así este enfoque, en contraste con el de *teoría de modelos*, se encarga de derivar o construir una demostración de alguna fórmula φ a partir de un cierto conjunto de fórmulas Γ denominadas hipótesis, basándose únicamente en la estructura de las fórmulas sin tomar en cuenta su significado. En otras palabras, una **demostración** de φ no es más que una sucesión de fórmulas $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ tales que ψ_i o es una hipótesis (i.e. $\psi_i \in \Gamma$), o es un axioma o se obtiene de la aplicación de alguna regla de inferencia a elementos previos y $\psi_n = \varphi$.

Sabemos que la lógica es considerada la ciencia de la argumentación, pero comúnmente los argumentos pueden no ser muy convincentes, aquí es donde entra en acción la *teoría de prueba*, para formalizar dichos argumentos. Para concretar esta tarea, los lógicos usan distintos tipos de relaciones entre teorías y fórmulas que permiten establecer la derivación de una conclusión a partir de suponer un conjunto de afirmaciones. Es posible, por ejemplo, usar Cálculo tipo Hilbert [14, 30], Cálculo de Secuentes [21, 42], Deducción natural [31, 42] entre otros. Un tipo particular de relación es la llamada *relación de consecuencia tarskiana.*

La *relación de consecuencia tarskiana* fue presentada por el matemático, filósofo y lógico Alfred Tarski y se puede considerar como un caso particular de las relaciones de consecuencia múltiple, ver Definición 1.9. Esta relación también se conoce como *relación de conclusión única* [38]; nombre bastante adecuado, pues en este tipo de relación se deriva una y sólo una afirmación.

Una interpretación común que se le puede dar a las relaciones de consecuencia tarskiana es que una pareja (Γ, φ) está en la relación cuando la fórmula φ sea *consecuencia lógica* de la teoría Γ. Esto es, si dadas las fórmulas en Γ hallamos una demostración de φ, entonces diremos que φ es consecuencia lógica de Γ.

Definición 1.3 ([17])**.** *Una* **relación de consecuencia tarskiana**[2] $\vdash$ *entre teorías y fórmulas para un lenguaje proposicional* $\mathcal{L}$ *es una relación binaria que satisface para cada teoría* $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$ *las siguientes propiedades:*

(Reflexividad) *si* $\varphi \in \Gamma$*, entonces* $\Gamma \vdash \varphi$*;*

(Monotonicidad) *si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \subseteq \Delta$*, entonces* $\Delta \vdash \varphi$*;*

(Transitividad)[3] *si* $\Delta \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \psi$ *para cada* $\psi \in \Delta$*, entonces* $\Gamma \vdash \varphi$*.*

Dada una teoría $\Sigma \cup \{\xi\}$ *, los símbolos* $\Sigma \vdash \xi$ *se leen como* Σ *deduce a* ξ*.*

Definición 1.4 ([4])**.** *Sean* $\mathcal{L}$ *un lenguaje proposicional y* $\vdash$ *una relación de consecuencia tarskiana para* $\mathcal{L}$*. Se dice que* $\vdash$ *es:*

- **estructural***, si para cada sustitución* σ *y cada teoría* $\Gamma \cup \{\varphi\}$*, si* $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$*;*
- **no trivial***, si existe alguna teoría no vacía* Γ *tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$*;*
- **finitaria***, si para cada teoría* Γ *y cada fórmula* φ *tales que* $\Gamma \vdash \varphi$*, existe una teoría finita* Δ *tal que* $\Delta \subseteq \Gamma$ *y* $\Delta \vdash \varphi$*.*

[2]Debemos tener en consideración que en [4] los autores utilizan otra definición de transitividad, esta es: si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta, \varphi \vdash \psi$ entonces $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ pero se puede probar que estas formas son equivalentes. Aquí $\Delta, \varphi \vdash \psi$ representa $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ representa $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

[3]La propiedad de transitividad también es conocida como **corte para conjuntos** o simplemente **corte**.

Es importante tener en cuenta que a partir de este enfoque es posible definir lógicas tal y como se muestra en la Definición 4.2 del artículo [4]. De hecho es posible formalizar los conceptos de *reglas de inferencia*, *axiomas* y *axiomática* como lo hace el autor de [24]. Sin embargo, omitimos esto pues no se pretende abrumar al lector con más de una definición de lógica sino más bien se busca dejar en él, conocimiento de que existen diversas formas de definir lógica de acuerdo al enfoque que queramos darle.

1.3. Teoría de modelos

La *teoría de modelos* o *semántica*, emplea las interpretaciones del lenguaje para que de acuerdo al significado de sus símbolos se verifique la veracidad de sus fórmulas. Dado un lenguaje proposicional, una semántica tiene como objetivo caracterizar los conectivos de éste. Existen distintos tipos de semánticas; aquí usamos únicamente las *semánticas inducidas por matrices*, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.5 ([4]). *Una* **matriz multivaluada** *para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una terna $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$, donde:*

- *$\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío, llamado conjunto de valores de verdad, denominado dominio.*
- *$\mathcal{D}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{V}$ no vacío, conocido como conjunto de valores designados.*
- *$\mathcal{O}$ asocia una función n-aria $\widehat{\diamond} : \mathcal{V}^n \to \mathcal{V}$ a cada conectivo n-ario $\diamond$ de $\mathcal{L}$, denominada* ***interpretación del conectivo*** *$\diamond$, donde $\mathcal{V}^n = \underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{n veces}$.*

Durante todo el desarrollo de la tesis sólo trabajamos con matrices *bivaluadas* y *trivaluadas*, es decir, matrices cuya cardinalidad de $\mathcal{V}$ es dos y tres, respectivamente. En ocasiones ponemos simplemente *matriz* en lugar de *matriz multivaluada*. Además, al complemento de $\mathcal{D}$ respecto de $\mathcal{V}$ lo denotamos por $\overline{\mathcal{D}}$ y es conocido como el *conjunto de valores no designados*, esto es $\overline{\mathcal{D}} = \{x \in \mathcal{V} \mid x \notin \mathcal{D}\}$. Notemos que en el conjunto $\mathcal{O}$ existe una función n-aria para cada conectivo de aridad n, entonces podemos pensar los conectivos como funciones de aridad n, que de hecho eso son.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con $C = \{\neg, \wedge\}$. Consideremos para este lenguaje la matriz $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$, donde los elementos son:

$\mathcal{V} = \{0, 1\}$, como conjunto de valores de verdad,

$\mathcal{D} = \{1\}$, como conjunto de valores designados, y

$\mathcal{O} = \{\{(0,1),(1,0)\}, \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}\}$, como conjunto de funciones,

con esto tenemos una forma de definir lógica clásica proposicional. En este caso las dos funciones en $\mathcal{O}$, representan la función unaria negación $\neg = \{(0,1),(1,0)\}$ y la función binaria conjunción $\wedge = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$. Esto es,

	$\neg$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Nota 1.1. De ahora en adelante para definir al conjunto $\mathcal{O}$ de la Definición 1.5 únicamente usamos los conectivos simbólicamente i.e. $\mathcal{O} = \{\neg, \vee, \wedge, \ldots\}$ y explicamos como están dados explícitamente por medio de tablas.

Definición 1.6 ([20])**.** *Dada una matriz $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ para el lenguaje $\mathcal{L}$, una función $v : ATOM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$ que manda átomos a elementos del conjunto de valores de verdad se llama* **valuación** *sobre $\mathcal{M}$.*

Ejemplo 1.4 (Valuación)**.** Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con $P = \{p, q, r\}$ y $C = \{\neg, \vee\}$ y $\mathcal{M}$ una matriz para $\mathcal{L}$ con $\mathcal{V} = \{0, 1\}$. Una valuación sobre $\mathcal{M}$ es $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$.

Notemos que la definición de valuación está dada para los átomos del lenguaje, y dado que el valor de los conectivos depende del valor que toman sus componentes, es posible extender la definición para fórmulas. Para esto, basta decir qué valores toman los átomos que intervienen en la fórmula dada y después calcular los respectivos valores de los conectivos según esté dado en $\mathcal{O}$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.5. (Valuación para una fórmula) Sean $\mathcal{M}$ la matriz del Ejemplo 1.3 y $\varphi = p \wedge \neg q$ una fórmula de $\mathcal{L}$. Entonces una valuación para φ es $v(p) = v(q) = 1$, así $v(\varphi) = v(p \wedge \neg q) = v(p) \wedge \neg v(q) = 1 \wedge \neg 1 = 1 \wedge 0 = 0$.

Dado que para definir una valuación de una fórmula únicamente son relevantes los átomos que aparecen en ella, siempre es posible saber el número total de valuaciones distintas que posee dicha fórmula, esto es, si n es el total de átomos (distintos) en una fórmula φ entonces el número de valuaciones de φ es $|\mathcal{V}|^n$, donde $|\mathcal{V}|$ es la cardinalidad de $\mathcal{V}$.

Para la fórmula $\varphi = p \wedge \neg q$ del Ejemplo 1.5, se tienen un total de $2^2 = 4$ valuaciones distintas, estas son: $v_1(p) = v_1(q) = 0$; $v_2(p) = 0$, $v_2(q) = 1$; $v_3(p) = 1$, $v_2(q) = 0$ y $v_4(p) = v_4(q) = 1$. Resumiendo en una tabla tenemos:

	p	q
v_1	0	0
v_2	0	1
v_3	1	0
v_4	1	1

Posibles valuaciones para $\varphi = p \wedge \neg q$

Definición 1.7 ([4]). *Dada una matriz $\mathcal{M}$, una valuación v sobre $\mathcal{M}$ es un* **modelo** *de la fórmula φ, denotado por $v \models_{\mathcal{M}} \varphi$, si $v(\varphi) \in \mathcal{D}$. Un modelo de un conjunto de fórmulas es un modelo para cada uno de sus elementos.*

Un tipo de fórmulas de especial interés son las *tautologías*, se trata de fórmulas que sin importar el valor que se les asigne a los átomos que las componen su valor es siempre designado. Formalmente tenemos el concepto de *tautología*.

Definición 1.8. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz. Una fórmula φ es una* **tautología** *en $\mathcal{M}$, denotado por $\models_{\mathcal{M}} \varphi$ si cada valuación es un modelo de φ.*

Ejemplo 1.6 (Modelo). Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con $C = \{\neg, \vee, \to\}$ y $\mathcal{M}$ una matriz para $\mathcal{L}$ con $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ y el conjunto $\mathcal{O}$ de acuerdo a la Tabla 1.2.

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\to$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

Tabla 1.2

Para la fórmula $\varphi = p \to \neg(q \vee r)$ se tiene que la valuación $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$ es un modelo de φ. En efecto, $v(\varphi) = v(p) \to \neg\big(v(q) \vee v(r)\big) = 1 \to \neg(0 \vee 0) = 1 \to \neg 0 = 1 \to 2 = 1 \in \mathcal{D}$.

Ejemplo 1.7 (Tautología)**.** Para la matriz del ejemplo anterior consideremos la fórmula $\psi = p \to \neg p$. Tenemos que ψ es una tautología. Primero notemos que ψ tiene exactamente tres valuaciones distintas debido a que sólo tiene un átomo. La siguiente tabla muestra que cada una de las valuaciones es un modelo de ψ.

p	$\neg p$	$p \to \neg p$
0	2	2
1	1	1
2	0	2

Al igual que ocurre con la teoría de prueba, en teoría de modelos es posible dar una definición de lógica. Esta definición se basa en la de *relación de consecuencia tarskiana inducida por una matriz* $\mathcal{M}$. Como hemos mencionado no daremos tales definiciones pero en la siguiente sección damos un concepto de lógica que integra la teoría de prueba con la teoría de modelos.

En [38] los autores explican una relación binaria entre teorías, basada en los modelos de los elementos de las teorías. Nos referimos al concepto conocido como *relación de consecuencia múltiple* que permite, a partir de un conjunto de premisas, deducir más de una conclusión.

Definición 1.9 ([38])**.** *Una* **relación de consecuencia múltiple** $\vdash$ *es una relación binaria entre teorías, tal que* $\Gamma \vdash \Delta$ *significa que cualquier modelo para cada* $\varphi \in \Gamma$ *es también un modelo para algún* $\psi \in \Delta$.

Los símbolos $\Gamma \vdash \Delta$, cuando el lenguaje $\mathcal{L}$ tiene conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, y los conjuntos Γ y Δ son $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ se interpretan como $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \vdash \delta_1 \vee \delta_2 \vee \cdots \vee \delta_m$. En este caso simplemente escribimos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$. Notemos que esto subsume los conceptos presentados en relaciones de consecuencia tarskiana.

1.4. Lógica

La *lógica* es el principal concepto de estudio de este trabajo de tesis, sin una definición clara de este término no tendría sentido continuar. Como hemos visto anteriormente, existen dos enfoques, a saber, teoría de prueba y teoría de modelos. En ambos es posible definir lógica en sus términos y condiciones, sin embargo para unificar la teoría de modelos y la teoría de prueba presentamos la siguiente definición apoyándonos del concepto de sustitución (ver Definición 1.2).

Definición 1.10 ([8]). *Dado un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, una **lógica L** es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ tal que:*

1. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo* Modus Ponens *es decir, si* $\varphi \in \mathbf{L}$ *y* $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$*, entonces* $\psi \in \mathbf{L}$.
2. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo* sustitución *es decir, si* $\varphi \in \mathbf{L}$*, entonces para cualquier sustitución* σ *se tiene que* $\sigma(\varphi) \in \mathbf{L}$.

Ejemplo 1.8 (Lógicas).

- Sea $\mathcal{L}_1$ un lenguaje con $C_1 = \{\neg, \to\}$ tales como los conocemos clásicamente y supongamos que abreviamos a los conectivos $\wedge$,$\vee$ y $\leftrightarrow$ como $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \to \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Se tiene que si $\mathbf{L_1}$ es el conjunto de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_1$ que son tautologías respecto a la matriz $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \{1\}, \mathcal{O} \rangle$ según la Tabla 1.3, entonces $\mathbf{L_1}$ es una lógica. Más aún es la lógica clásica proposicional.

	$\neg$
0	1
1	0

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tabla 1.3: Una forma de definir lógica clásica proposicional

- Sea $\mathcal{L}_2$ un lenguaje con $C_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ y matriz $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$. La lógica $\mathbf{L_2} = \{\varphi \in \mathcal{L}_2 \mid \varphi$ es una tautología respecto de $\mathcal{M}\}$ define la lógica $G3$ cuyos conectivos están dados por:

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$G3$

Una pregunta que podemos hacernos es: ¿existe relación alguna entre las lógicas? Para tal fin proporcionamos la siguiente definición.

Definición 1.11 ([24])**.** *Dados dos lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ con conjuntos de conectivos C_1 y C_2, respectivamente tales que $C_1 \subseteq C_2$. Sean $\mathbf{L_1}$ en $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{L_2}$ en $\mathcal{L}_2$ dos lógicas. Decimos que $\mathbf{L_2}$ es una* **extensión** *de $\mathbf{L_1}$ si $\mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L_2}$. Denotamos al conjunto de todas las extensiones de una lógica $\mathbf{L}$ con $Ext(\mathbf{L})$.*

1.5. Conectivos

Una cuestión con gran importancia en lógica son los conectivos con los que cuenta el lenguaje. Los conectivos no sólo nos sirven para formar fórmulas sino que también caracterizan a la lógica, pues mucho depende de qué tipo de conectivos se tengan para poder saber si se cumple o no algún resultado. Estamos acostumbrados a emplear los conectivos usuales negación $\neg$, conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$ e implicación $\to$ al menos como los conocemos en lógica clásica proposicional, pero ¿qué es lo que convierte a un conectivo en una negación, conjunción, disyunción o implicación? En este apartado justamente damos definiciones que nos permiten decidir cuándo un conectivo es de cierto tipo.

La siguiente definición nos dice precisamente cuándo podemos llamar a un conectivo conjunción, disyunción o implicación.

Definición 1.12 ([4])**.** *Sea **L** una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}$ con los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$ y $\to$. Entonces:*

- *El conectivo $\wedge$ es una* **conjunción** *para* $\mathbf{L}$ *cuando: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$.*

- *El conectivo $\vee$ es una* **disyunción** *para* $\mathbf{L}$ *cuando: $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ y $\Gamma, \psi \vdash \sigma$.*

- *El conectivo* $\to$ *es una* **implicación** *para* **L** *cuando:* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Nota 1.2. Cuando se satisface el punto número tres de la Definición 1.12, decimos que $\to$ satisface el *teorema de la deducción* [4].

De acuerdo con los autores de [45] las nociones de conjunción y disyunción en la definición previa son las consideradas usuales en lógica abstracta. La Definición 1.12 no es la única caracterización que se le puede dar a los conectivos, por ejemplo en [22] los autores dan una definición donde establecen ciertas condiciones sobre los conectivos para llamarlos *conectivos clásicos*. Más adelante retomamos únicamente la definición de *implicación clásica* que nos es de ayuda en el Capítulo 3. Un hecho interesante sobre la definición de conectivos clásicos dada en [22] y la de la Definición 1.12 es que son equivalentes en el sentido que un concepto implica el otro y viceversa, la demostración de este hecho se presenta en [24].

Con motivo de seguir caracterizando los conectivos, en seguida presentamos un lema que se deriva de la Definición 1.12.

Lema 1.1 ([4])**.** Sean **L** una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}$ con conectivos $C = \{\wedge, \vee, \to\}$ y $\vdash$ una relación de consecuencia tarskiana para $\mathcal{L}$.

1. El conectivo $\wedge$ es una conjunción para **L** si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones para cada cualesquiera φ, $\psi \in FORM(\mathcal{L})$:

    a) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$

    b) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$

    c) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$

2. Si $\vee$ es una disyunción para **L**, entonces se satisfacen las siguientes tres condiciones para cualesquiera φ, $\psi \in FORM(\mathcal{L})$:

    a) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$

    b) $\psi \vdash \varphi \vee \psi$

    c) $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$

3. Si $\to$ es una implicación para **L**, entonces se satisfacen las siguientes tres condiciones para cualesquiera φ, $\psi \in FORM(\mathcal{L})$:

a) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

b) $\vdash \psi \to \psi$

c) $\psi \vdash \varphi \to \psi$

Demostración: Sean $\varphi, \psi \in FORM(\mathcal{L})$.

1. Supongamos que $\wedge$ es una conjunción. Por reflexividad $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$. Luego por lo supuesto tenemos $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ y $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$, lo que prueba *a*) y *b*). Nuevamente por reflexividad se tiene que $\varphi \vdash \varphi$ y $\psi \vdash \psi$; de donde al aplicar monotonía obtenemos $\varphi, \psi \vdash \varphi$ y $\varphi, \psi \vdash \psi$; de aquí por ser $\wedge$ una conjunción $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$, lo cual prueba *c*).

   Ahora supongamos que se satisfacen los tres incisos de la parte 1 del lema, entonces:

   - Supongamos además que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Utilizando el inciso *a*) y monotonía, $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi$. Notemos que $\Gamma \vdash \sigma$ para cada $\sigma \in \Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$, así por transitividad $\Gamma \vdash \varphi$. De manera similar al aplicar transitividad entre $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \psi$ y $\Gamma \vdash \sigma$ para toda $\sigma \in \Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ se obtiene $\Gamma \vdash \psi$.
   - Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$. Como $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ por *c*) y monotonía, entonces al aplicar transitividad entre $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ y $\Gamma \vdash \sigma$ para cada $\sigma \in \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ se sigue que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$.

   Con los dos puntos anteriores hemos probado que $\wedge$ es una conjunción.

2. Supongamos que $\vee$ una disyunción para **L**, esto es, $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ y $\Gamma, \psi \vdash \sigma$. Por reflexividad $\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi$. Luego, por lo supuesto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ y $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ demostrando *a*) y *b*). Finalmente, para demostrar *c*) basta notar $\varphi \vdash \varphi$ por reflexividad y aplicando la necesidad del supuesto obtenemos que $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$.

3. Resta probar que $\to$ es una implicación para **L**, para esto supongamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

   - Veamos que se satisface el inciso *a*), por reflexividad y monotonía $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi$. Considerando $\Gamma = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$ y aplicando la hipótesis a $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ tenemos $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, es decir, $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.
   - Por reflexividad $\psi \vdash \psi$ y por lo supuesto $\vdash \psi \to \psi$, lo que demuestra *b*).

- Tenemos $\varphi, \psi \vdash \psi$ por reflexividad y monotonía. Aplicando la suficiencia del supuesto a $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, donde $\Gamma = \{\psi\}$ obtenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, esto es $\psi \vdash \varphi \to \psi$. $\square$

Ahora definimos conectivos *neoclásicos*, fácilmente podemos entender el por qué de este nombre si identificamos cada valor designado como "verdad" y cada valor no designado como "falso", es decir los asociamos a los respectivos valores que tenemos en lógica clásica proposicional.

Definición 1.13 ([22]). *Sean $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz y v una valuación sobre $\mathcal{M}$. Entonces:*

(i) $\wedge$ *es una* **conjunción neoclásica***, si se cumple que:*

$$v(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{D} \textit{ sii } v(\varphi) \in \mathcal{D} \textit{ y } v(\psi) \in \mathcal{D}.$$

(ii) $\vee$ *es una* **disyunción neoclásica***, si se cumple que:*

$$v(\varphi \vee \psi) \in \overline{\mathcal{D}} \textit{ sii } v(\varphi) \in \overline{\mathcal{D}} \textit{ y } v(\psi) \in \overline{\mathcal{D}}.$$

(iii) $\to$ *es una* **implicación neoclásica***, si se cumple que:*

$$v(\varphi \to \psi) \in \mathcal{D} \textit{ sii } v(\varphi) \in \overline{\mathcal{D}} \textit{ o } v(\psi) \in \mathcal{D}.$$

Podemos notar que la Definición 1.13 puntualiza el comportamiento que deben tener los valores que toma o no el conectivo en cuestión. Una condición más que necesitamos conocer acerca del conectivo de implicación es la de *implicación clásica* que nos ayuda a encontrar implicaciones adecuadas para extender las lógicas $L3A$ y $L3B$ presentadas en la Sección 3.3 tal como lo proponen los autores en [22].

Definición 1.14 ([22]). *Sea* **L** *una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}$ con un conectivo binario $\to$. Decimos que $\to$ es una* **implicación clásica** *si para cada $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq FORM(\mathcal{L})$:*

i) $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *implican que* $\Gamma \vdash \psi$*;*

ii) $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$*;*

iii) $\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

Ya hemos definido varias condiciones para llamar un conectivo de una forma u otra, pero ahora necesitamos tener alguna definición que nos permita establecer una relación entre dos conectivos, con este fin proporcionamos el concepto *extensión conservativa*.

Definición 1.15 ([10]). *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz. Un conectivo $* : \mathcal{V}^m \to \mathcal{V}$ es una* **extensión conservativa** *de un conectivo $\hat{*} : V_1^m \to V_1$ con $V_1 \subsetneq \mathcal{V}$ si la restricción de $*$ a V_1 coincide con $\hat{*}$. Es decir $*\big|_{V_1} = \hat{*}$.*

Ejemplo 1.9. Sea $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$, donde $\mathcal{O} = \{\neg_1, \to_1\}$ dados por la Tabla 1.4.

	$\neg_1$
0	$\boxed{2}$
1	2
2	$\boxed{0}$

$\to_1$	0	1	2
0	$\boxed{0}$	1	$\boxed{2}$
1	1	1	2
2	$\boxed{2}$	2	$\boxed{0}$

Tabla 1.4

Consideremos $V_1 = \{0,2\} \subsetneq \{0,1,2\}$ y los conectivos $\neg_2$ y $\to_2$ dados por la Tabla 1.5 definidos sobre V_1.

	$\neg_2$
0	2
2	0

$\to_2$	0	2
0	0	2
2	2	0

Tabla 1.5

Se tiene que $\neg_1$ y $\to_1$ son extensiones conservativas de $\neg_2$ y $\to_2$, respectivamente. En la Tabla 1.4 hemos encerrado en una caja los valores que toman los conectivos cuando los restringimos a V_1 que en efecto coinciden con los de la Tabla 1.5.

La característica de *simetría* exclusiva en los conectivos bivaluados es definida enseguida, pues es una de las condiciones que le imponemos a nuestros conectivos conjunción y disyunción en los Capítulos 3 y 4 para conservar el comportamiento de sus versiones en lógica clásica proposicional.

Definición 1.16 ([10]). *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Un conectivo binario $*$ de $\mathcal{L}$ es* **simétrico** *si $v(\varphi * \psi) = v(\psi * \varphi)$ para cualesquiera fórmulas φ, ψ y valuación v.*

Para terminar este apartado damos dos definiciones. En la primera definimos *molecularidad* que tiene que ver con los valores que toma el conectivo respecto de $\mathcal{V}$, en otras palabras necesitamos saber si el rango del conectivo es todo $\mathcal{V}$ o no. En el caso de que el rango sea distinto de $\mathcal{V}$ el conectivo pierde expresividad, ya que no toma todos los valores de verdad.

Definición 1.17 ([24]). *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz multivaluada. Un conectivo $*$ de aridad n es* **molecular** *cuando el conjunto de valores que toma es distinto de $\mathcal{V}$, es decir, $*(\mathcal{V}) \neq \mathcal{V}$.*

Ejemplo 1.10. Retomando los conectivos $\neg_1$ y $\rightarrow_1$ del Ejemplo 1.9 tenemos que $\neg_1$ es molecular pues al ser evaluado se pierde el valor 1 mientras que $\rightarrow_1$ conserva los tres valores de verdad, esto es, $\rightarrow_1$ es no molecular.

Finalmente, retomando la Definición 1.15 que presenta la noción de extensión conservativa entre conectivos, ampliamos dicho concepto para dos lógicas dadas.

Definición 1.18 ([24]). *Sean $\mathbf{L_1}$ una lógica n-valuada con conjunto de valores de verdad $\mathcal{V}_1$ y $\mathbf{L_2}$ una lógica m-valuada con conjunto de valores de verdad $\mathcal{V}_2$, tales que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ y el conjunto de conectivos de $\mathbf{L_1}$ es un subconjunto de los conectivos de $\mathbf{L_2}$. Se dice que $\mathbf{L_2}$ es una* **extensión conservativa** *de $\mathbf{L_1}$ si todos los conectivos en $\mathbf{L_1}$ tienen extensiones conservativas en $\mathbf{L_2}$.*

A lo largo de este capítulo hemos sentado las bases de este trabajo, no sólo planteamos definiciones y ejemplos de los conceptos básicos sino que hablamos de los dos enfoques existentes en los que es posible trabajar: *teoría de prueba* y *teoría de modelos* que más adelante son de vital importancia para atacar el tema central de la tesis. Después dimos una definición de lógica para unificar los dos enfoques anteriores y para finalizar proporcionamos algunas características y condiciones para los conectivos que necesitamos en capítulos posteriores para estudiar las lógicas paraconsistentes genuinas y paracompletas genuinas. Ahora estamos listos para hablar de las lógicas no clásicas, marco al que pertenecen las lógicas que son nuestro objeto de estudio.

Capítulo 2

Lógicas no clásicas

En este capítulo se discuten los principios que rigen la lógica aristotélica y le dan validez a cada uno de los razonamientos que realizamos en lógica clásica. Además presentamos las definiciones de *lógica paraconsistente* y *lógica paracompleta* pertenecientes al marco de las lógicas no clásicas, así como la motivación de estudiar este tipo de lógicas. Aquí un fragmento de la motivación del libro *Introduction to Annotated Logics Foundations for Paracomplete and Paraconsistent Reasoning* [1]:

> Classical logic now holds a dominant position in formal logic, including mathematical, philosophical and computational logic. But, the appearance of logics alternative to classical logic is one of the landmarks in the history of logic over the last century.
> These logics are usually called non-classical logics. One amazing aspect of the development of non-classical logics is recognized in the fact that they can overcome some limitations of classical logic, which should be considered in applications to human knowledge. [1].

2.1. Los tres principios aristotélicos

El vínculo entre las matemáticas, la lógica y la filosofía data de la antigüedad. Algunos filósofos afirmaron que hay exactamente tres principios básicos del pensamiento que son fundamentales para hacer un pensamiento correcto. Se espera que un buen razonamiento se ajuste a los tres principios lógicos, también denominados *leyes del pensamiento*. Estas leyes son una base suficiente para la lógica clásica.

El periodo que va del año 600 a. C. hasta el 300 a. C. en Grecia es protagonizado por Platón, Aristóteles y Euclides, en éste se desarrollan principios formales de las matemáticas. Aristóteles (384 a. C. – 332 a. C.) resuelve el razonamiento deductivo y sistematizado [19]; entre los temas de los cuales escribía se encuentra la lógica.

Aristóteles plantea tres principios que fundamentan lo que se conoce como *lógica aristotélica* y que además sustentan la lógica clásica. En el artículo [15] estos principios son explicados de manera filosófica, debido a que la filosofía se considera como la búsqueda de la comprensión básica a través de la razón. Aquí tomamos como principal referencia dicho artículo para explicarlos aunque también lo hacemos desde el punto de vista de la lógica clásica proposicional. Bajo las condiciones de estar al *mismo tiempo* y en la *misma relación*, Aristóteles propone sus principios y a lo largo de esta sección aceptamos dichas condiciones.

2.1.1. Principio de identidad

Este principio argumenta que "algo no puede ser y no ser al mismo tiempo" y en la misma relación, es decir, si A es, A no puede no ser, esto es $A = A$. En palabras más coloquiales podemos decir que el *Principio de identidad* nos permite afirmar que toda entidad (o cosa) es igual a sí misma. Notemos que este principio no se restringe exclusivamente a las proposiciones sino que nos expresa una verdad para cualquier tipo de entidades.

Ejemplo 2.1. En 1930 a Plutón se le declaró planeta y en 2006 se le quitó esta categoría [44]. Podríamos pensar que en esta situación se contradice el *Principio de identidad*, pero en realidad lo que ocurre es que en 2006 los criterios para asignar el título de planeta cambiaron (i.e. las relaciones son otras). En conclusión el *Principio de identidad* se valida cuando lo aplicamos a Plutón en el año 1930 (respectivamente 2006) con los criterios vigentes ese año, lo que muestra la necesidad de las condiciones iniciales de tiempo y relación.

2.1.2. Principio de no contradicción

El *Principio de no contradicción* nos dice que es "imposible que un atributo pertenezca y no pertenezca al mismo sujeto". Es decir, si $\{A \text{ es } x\}$ entonces $\{A \text{ no es no-}x\}$, donde x y no-x son atributos contrarios. Observemos que el *Principio de no contradicción* al igual que el *Principio de identidad* no están formulados en términos de proposiciones; ambos se plantean sobre los atributos de las entidades (cosas). En términos de proposiciones podemos formular este principio como sigue: si p es una proposición entonces no se da el caso de que p y la negación de p sean simultáneamente verdad. Como es de esperarse en lógica clásica proposicional sabemos que dada una fórmula φ; $\varphi \wedge \neg\varphi$ siempre es falso sin importar el valor de verdad que tome φ.

Ejemplo 2.2.

- ◇ No es posible que un objeto sea un árbol y no sea, a la vez, un árbol.
- ◇ Si consideramos a las palabras 'interesante' y 'aburrido' como contradictorias, entonces algo no puede ser interesante y aburrido, al mismo tiempo y en la misma relación.

2.1.3. Principio del tercero excluso

Este principio también conocido como *Principio del tercero excluido* asegura que "dos proposiciones contradictorias no pueden ser falsas ambas". En otras palabras, para los enunciados $E_1 = \{A \text{ es igual a } x\}$ y $E_2 = \{A \text{ es diferente de } x\}$ se tiene que alguno de ellos debe ser verdad, i.e. no ocurre que E_1 y E_2 sean falsos al mismo tiempo. De manera más general si sobre A se tienen exactamente n juicios, entonces queda excluido el juicio $n + 1$. Como en el caso de la lógica clásica proposicional, sabemos que toda proposición es verdadera o falsa (tenemos únicamente dos juicios, verdad y falsedad) y no existe una tercera posibilidad. Notemos que este es el único de los tres principios que sí está planteado en términos de proposiciones.

Ejemplo 2.3. Las siguientes afirmaciones son siempre verdad en lógica clásica.

- ◇ Está lloviendo o no está lloviendo.
- ◇ Hoy es lunes o no lo es.
- ◇ El gato es un mamífero, o el gato no es un mamífero.

En resumen, los tres principios aristotélicos forman los pilares en los que se sostiene la lógica clásica. Sin embargo en ocasiones no es posible ignorar los problemas que se presentan en el lenguaje natural, tales como ambigüedad, paradojas, inconsistencias, etcétera. Por esa y más razones es necesario el estudio de otros tipos de lógicas con comportamientos distintos al de lógica clásica, es decir, que no se sustenten completamente en los tres principios aristotélicos, lo cual promueve la siguiente definición.

Definición 2.1. *Una lógica* **L** *es una* **lógica no clásica** *si invalida alguno de los tres principios aristotélicos.*

El estudio de las lógicas no clásicas no se da por imposición, con este tipo de lógicas es posible modelar otro tipo de razonamiento más apegado a la complejidad de la mente humana. Además se han encontrado aplicaciones de estas lógicas, por ejemplo en: inteligencia artificial [3, 27], teoría cuántica [18], teoría de control [28, 25], pruebas automatizadas con sistemas de información incompleta [12] y otras como se mencionan en [2]. Las aplicaciones mencionadas son particularmente de las dos lógicas no clásicas estudiadas en esta tesis, a saber, de las lógicas paraconsistentes y las lógicas paracompletas; a continuación platicamos de ellas.

2.2. Lógicas paraconsistentes

Uno de los problemas que se presentan en el lenguaje natural tal y como lo menciona Vardi en [41] es que conduce a paradojas. Pongamos un ejemplo de éstas, la famosa *paradoja del mentiroso*. Consideremos la siguiente frase:

"esta oración es una mentira"

si fuese cierta, entonces debería ser una mentira, tal y como afirma. Pero si fuese mentira, entonces lo que se afirma sería verdad. Una de las motivaciones para estudiar lógicas paraconsistentes es precisamente que posibilitan el estudio de las paradojas [24].

Para dar una motivación más es necesario hablar de los términos: *teoría inconsistente* y *teoría trivial*. Una teoría inconsistente es aquella en la cual existe una fórmula tal que ella y su negación son teoremas. Una teoría se dice trivial si toda fórmula en su lenguaje es un teorema [1]. En las primeras décadas del siglo XX hablar de lógicas paraconsistentes era pensar en lógicas que permiten trabajar con teorías inconsistentes y no triviales, sin embargo actualmente se tiene otra idea de paraconsistencia que más adelante se refleja en la definición que presentamos y manejamos en este trabajo. Hacemos mención a este hecho para comprender un poco la naturaleza que motivó el estudio de la paraconsistencia.

Pioneros como Łukasiewicz y Vasíliev en 1910 fueron los primeros en estudiar la paraconsistencia. Sin embargo fueron Jaskowski en 1948 y da Costa en 1963 quienes presentaron los primeros sistemas paraconsistentes. La definición de paraconsistencia al depender del *Principio de no contradicción* ha tenido distintas formas a lo largo de la historia, esto debido a que existen distintas formulaciones de este principio; en el siguiente capítulo detallamos las dos formulaciones más usuales y mostramos su independencia. Por ahora, únicamente nos interesa proporcionar una definición que ilustre el comportamiento de las lógicas que invalidan el *Principio de no contradicción*. La idea básica es permitir la contradicción.

Béziau en [7] muestra distintas definiciones de lógica paraconsistente. Podemos observar que una opción es definir primero una *negación paraconsistente*. Esto se debe al hecho de que el *Principio de no contradicción* establece que una proposición y su negación no son ambas verdaderas. Es por esto que necesitamos una negación que permita la existencia de una fórmula tal que ella y su negación tomen valores designados simultáneamente. Aquí nosotros no definiremos paraconsistencia en términos de una negación paraconsistente explícitamente, pero es importante tenerlo en cuenta debido a la importancia que tiene este conectivo en la siguiente definición.

Definición 2.2 ([37]). *Sea* $\mathbf{L}$ *una lógica. Decimos que* $\mathbf{L}$ *es una* **lógica paraconsistente** *si no obedece el Principio de no contradicción en la forma ex contradictione quodlibet, esto es,* $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ *para algunas fórmulas* φ *y* ψ*. Equivalentemente, existen* φ *y* ψ *fórmulas de* $\mathbf{L}$ *tales que*

$$\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi.$$

Ejemplo 2.4. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con $C = \{\neg, \wedge\}$ y $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz para $\mathcal{L}$ cuyos conectivos están dados por las siguientes tablas:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	2	1
1	2	2	1
2	1	1	2

Consideremos las fórmulas $\varphi = p$ y $\psi = q$. Para la valuación v tal que $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$, claramente se tiene que $v(\varphi) \in \mathcal{D}, v(\neg\varphi) \in \mathcal{D}$ y $v(q) \notin \mathcal{D}$, por lo que $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$. Por lo tanto, la lógica **L** conformada por las fórmulas de $\mathcal{L}$ que son tautologías bajo $\mathcal{M}$ es paraconsistente.

Para continuar ejemplificando el concepto de paraconsistencia presentamos las siguientes lógicas paraconsistentes conocidas en la literatura ya sea por su relevancia histórica o por servir para calcular modelos estables en answer set programming [16, 35].

Ejemplo 2.5 (Algunas lógicas paraconsistentes)**.**

- La lógica trivaluada de Kleene para $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\rangle$ es paraconsistente.

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

Kleene

- La lógica trivaluada $CG'3$ para $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\rangle$ es paraconsistente.

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$CG'3$

- La lógica PAC para la matriz $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\rangle$ es paraconsistente.

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

PAC

2.3. Lógicas paracompletas

Las lógicas paracompletas tienen estrecha relación con el *Principio del tercero excluso*, de hecho este tipo de lógicas invalidan este principio. De acuerdo con [6] un ejemplo que también tiene cabida en el tema de *paracompletitud* es la paradoja del mentiroso analizada en la sección anterior, en este caso, dicha paradoja nos enseña que existen cierto tipo de oraciones (particularmente, las de un mentiroso) que no se pueden catalogar ni verdaderas ni falsas. Como resultado, los razonamientos con exactamente dos juicios (verdad y falsedad) como en lógica clásica no son válidos en este tipo de lógicas.

Sabemos que en lógica clásica una proposición es verdadera o falsa de forma independiente del conocimiento que se tenga de su valor de verdad. En contraste con esto, las lógicas que rechazan el *Principio del tercero excluso* posibilitan al menos un tercer juicio (valor de verdad) que puede tomar la proposición. Realmente este tipo de lógicas no son complicadas de encontrar y en el Capítulo 4 presentamos un análisis relacionado con la paracompletitud, particularmente en el caso de lógicas con tres valores, las oraciones como la paradoja del mentiroso toman el tercer valor que puede ser interpretado como algo más allá de la verdad o de lo falso [6].

Si bien las lógicas paracompletas no han sido tan estudiadas como las paraconsistentes, la motivación para su estudio radica en sus aplicaciones. Por ejemplo, en la técnica de búsqueda de pruebas automatizadas sobre sistemas con información incompleta (consultar [11] y [12]). Además, en cierto sentido, podemos encontrar analogía entre estas y las lógicas paraconsistentes. Por otra parte, se sabe que al igual que con el *Principio de no contradicción* existen dos formulaciones usuales para el *Principio del tercero excluso*. Estas formulaciones serán estudiadas más adelante, por ahora únicamente daremos una definición general para observar el comportamiento que hemos descrito.

Definición 2.3 ([1]). *Sea* **L** *una lógica.* **L** *es una* **lógica paracompleta** *si viola el Principio del tercero excluso en la forma:* $\vdash \varphi$ *o* $\vdash \neg\varphi$ *para alguna fórmula* φ*. Es decir, existe* φ *fórmula de* **L** *tal que*

$$\nvdash \varphi \quad y \quad \nvdash \neg\varphi.$$

Ejemplo 2.6 (Lógica paracompleta). Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con $C = \{\neg\}$ y matriz $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$. La siguiente tabla muestra el comportamiento de $\neg$:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

Para la fórmula $\varphi = p$ se tiene que $\nvdash \varphi$ y $\nvdash \neg\varphi$. En consecuencia tenemos una lógica paracompleta.

Capítulo 3

Lógicas paraconsistentes genuinas

En el año 2015 un concepto de paraconsistencia más restrictivo es presentado por Jean Yves Béziau y Anna Franceschetto en el artículo *Strong Three-valued Paraconsistent Logics* [10], este concepto es el de lógica paraconsistente fuerte. En el siguiente año, Béziau en el artículo *Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics* [9] renombra dichas lógicas bajo el nombre de lógicas paraconsistentes genuinas.

En este capítulo desarrollamos el análisis que se presenta en los dos artículos anteriormente mencionados. Este análisis se hace para apreciar la naturaleza de los conectivos que definen lógicas paraconsistentes genuinas y que además satisfacen diversas propiedades que les imponemos tal como la de ser no molecular. Así mismo hacemos énfasis en el hecho que este estudio conduce únicamente a la existencia de dos lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas, si se considera únicamente conjunción, disyunción y negación como conectivos del lenguaje.

3.1. Independencia entre las formulaciones del principio de no contradicción

Recordemos que las lógicas paraconsistentes permiten trabajar con teorías inconsistentes no triviales. Para lograr tal fin una opción es rechazar el *Principio de no contradicción*, el cual afirma que un objeto no puede ser y no ser al mismo tiempo. Este principio se traduce en lógica clásica como que una proposición y su negación no pueden ser verdaderas ambas.

Un conflicto que genera el rechazo del *Principio de no contradicción* es que éste cuenta con dos formulaciones distintas e independientes. Unas líneas más adelante mostramos un ejemplo que demuestra la independencia de las dos formulaciones, pero primero hablemos acerca de dichas formas de plantear el *Principio de no contradicción*.

1. *Principio de explosión.*

   Este principio dice que en una teoría que contenga como premisas una afirmación y su negación es posible demostrar cualquier otra afirmación. En este trabajo usamos las letras ***EC*** para referirnos al principio de explosión y en términos de lógicas inducidas por matrices y relaciones de consecuencia tarskiana tenemos:

   $$\boldsymbol{EC} \qquad \Gamma, \varphi, \neg\varphi \models_{\mathcal{M}} \psi$$

   donde Γ es una teoría (conjunto de fórmulas que incluso puede ser vacío) y φ, ψ son cualesquiera fórmulas. Las lógicas en las cuales se valida este principio son llamadas lógicas explosivas, un ejemplo de este tipo de lógicas es la lógica clásica proposicional.

   El principio de explosión nos dice que para cualquier valuación que haga designados a los elementos ubicados del lado izquierdo de $\models_{\mathcal{M}}$ debe también hacer a ψ designado. Además como ψ no necesariamente tiene relación alguna con Γ y φ, fácilmente podríamos tomar una valuación que hiciera no designado a ψ; por eso la única opción para que se valide ***EC*** es que no exista valuación que haga tanto a φ como a $\neg\varphi$ designados, tal como ocurre en lógica clásica proposicional. Ahí radica la importancia de tener una negación que permita que una fórmula y su negación tomen valores designados simultáneamente, para así violar ***EC***.

2. *Negación de una contradicción.*

   Esta forma de plantear el *Principio de no contradicción* va de la mano con el concepto del conectivo de conjunción $\wedge$ que se tiene en lógica clásica proposicional, es decir, una conjunción es verdadera únicamente cuando cada uno de los conyuntos son verdaderos (designados), de donde, no es posible que $\varphi \wedge \neg\varphi$ sea designado.

Por tanto, en lógica clásica proposicional, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ es un teorema (tautología). Este hecho se denota como $\boldsymbol{NC}$ y usando relaciones de consecuencia tarskiana y lógicas inducidas por matrices tiene la forma

$$\boldsymbol{NC} \qquad \Gamma \models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi).$$

Aquí nuevamente nos enfrentamos con el dilema de encontrar una negación que nos permita que φ y $\neg\varphi$ sean designados al mismo tiempo y que además $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ no sea una tautología.

Si bien la definición de paraconsistencia actualmente aceptada es la de lógicas que no satisfacen $\boldsymbol{EC}$ [37] formalizarla no fue una tarea sencilla, pues anteriormente también se tenían definiciones en términos de $\boldsymbol{NC}$ [7]. En un principio esto no sería un problema de no ser por que en [10] se demuestra la independencia entre $\boldsymbol{EC}$ y $\boldsymbol{NC}$.

En seguida mostramos el ejemplo que evidencia la independencia entre las dos formas de plantear el *Principio de no contradicción*.

Ejemplo 3.1. Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz trivaluada con conectivos $\neg$ y $\wedge$ definidos por las siguientes tablas:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

consideramos dos casos de acuerdo al conjunto de valores designados que elijamos, estos son $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ o $\mathcal{D} = \{2\}$. Analicemos lo que sucede en cada caso con $\boldsymbol{EC}$ y $\boldsymbol{NC}$ tomando el caso especial cuando $\Gamma = \emptyset$.

I. Cuando $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, existe una valuación v tal que $v(\varphi) = 1 = v(\neg\varphi)$ y $v(\psi) = 0$, por tanto $\boldsymbol{EC}$ no es válido. Sin embargo $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ es una tautología tal como se observa en la siguiente tabla

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

lo que hace válido $\boldsymbol{NC}$.

II. En el caso $\mathcal{D} = \{2\}$, dado que no existe valuación que haga a φ y $\neg\varphi$ designado simultáneamente, $\boldsymbol{EC}$ es válido por vacuidad. Por otro lado, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ no es tautología, pues si v es una valuación tal que $v(\varphi) = 1$, entonces $v\left(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\right) = 1$ que no es designado y por tanto $\boldsymbol{NC}$ no es válido.

El Ejemplo 3.1 proporciona dos lógicas las cuales sólo validan una de las dos formulaciones del *Principio de no contradicción*, esto muestra que no existe dependencia entre el principio de explosión y la negación de una contradicción lo cual motivó una definición de paraconsistencia más restrictiva, la que se presenta a continuación:

Definición 3.1 ([24]). *Sea $\mathcal{M}$ una matriz con conjunto de valores de verdad finito, la lógica L inducida por $\mathcal{M}$ en la que se satisfagan las condiciones:*

1. $\not\models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ **GP1**

2. $\varphi, \neg\varphi \not\models_{\mathcal{M}} \psi$ **GP2**

para algunas fórmulas del lenguaje φ y ψ se denomina **lógica paraconsistente genuina**.

3.2. Conectivos para las lógicas paraconsistentes genuinas

Ahora que tenemos el concepto de lógica paraconsistente genuina, nos preguntamos cuáles son las características que deben tener los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ para generar este tipo de lógicas. Durante esta sección atacamos este aspecto, es decir, mostramos un análisis de cada uno de los conectivos anteriores pidiéndoles que cumplan distintas propiedades. Cabe añadir que además lo haremos únicamente en el ámbito trivaluado.

3.2.1. Negación paraconsistente genuina

Recordemos que estamos en busca de una negación que permita invalidar $\boldsymbol{EC}$, esto es, que sea posible encontrar una valuación que haga que una fórmula y su

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	k
2	0

Tabla 3.1

negación tomen valores designados simultáneamente. Además queremos que dicha negación sea una extensión conservativa del conectivo negación de la lógica clásica.

En la Tabla 3.1 el valor de k está por determinarse considerando el conjunto de valores designados que se escoja ya sea $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ o $\mathcal{D} = \{2\}$. Notemos que k puede tomar tres valores, estos pueden ser 0, 1 y 2. Desglosemos, estos casos y los respectivos subcasos que generan.

1. Si tomamos $k = 0$, entonces no es posible encontrar una valuación que haga designados de manera simultánea a φ y $\neg\varphi$ sin importar que conjunto de valores designados elijamos, así por vacuidad ***EC*** es válido lo que descarta este caso en automático pues si se valida ***EC*** no es posible generar lógicas paraconsistentes genuinas.

2. Cuando $k = 1$ tenemos dos subcasos que dependen del conjunto de valores designados.

    a) Para $\mathcal{D} = \{2\}$ ninguna valuación hace que φ y $\neg\varphi$ sean designados simultáneamente, nuevamente se vale ***EC*** y no es posible generar lógicas paraconsistentes genuinas.

    b) Para $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ notemos que existe una valuación v que satisface que $v(\varphi) = 1 = v(\neg\varphi)$ y $v(\psi) = 0$, en consecuencia ***EC*** no es válido lo que indica que este caso puede conducir a lógicas paraconsistentes genuinas. Para estar seguros es necesario analizar lo que sucede con la conjunción, pero esto se analiza posteriormente.

3. Finalmente cuando $k = 2$ también tenemos dos subcasos dependiendo del conjunto de valores designados.

    a) Para $\mathcal{D} = \{2\}$, análogamente al caso 2-(a) se satisface ***EC*** y no se pueden generar lógicas paraconsistentes genuinas.

b) Para $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ existe v valuación tal que $v(\varphi) = 1$, $v(\neg\varphi) = 2$ y $v(\psi) = 0$. Así se rechaza $\boldsymbol{EC}$ y existe la posibilidad de generar lógicas paraconsistentes genuinas.

En resumen, tenemos únicamente dos casos que invalidan $\boldsymbol{EC}$, estos son: 2-(b) y 3-(b) que posiblemente nos proporcionarán lógicas paraconsistentes genuinas. Además cabe señalar que en ambas situaciones el conjunto de valores designados es $\mathcal{D} = \{1, 2\}$.

3.2.2. Conjunción paraconsistente genuina

Es necesario analizar el comportamiento de la conjunción para poder decidir bajo que circunstancias rechazamos $\boldsymbol{NC}$. Además, con la ayuda del análisis de la negación paraconsistente genuina el conjunto de valores designados ya está determinado y sólo quedan dos casos. Tengamos en mente que pedimos, al igual que con la negación, que la conjunción sea una extensión conservativa de la conjunción en lógica clásica, pero esta vez agregamos las condiciones de que sea un conectivo simétrico y neoclásico. Bajo estas peticiones la tabla de la conjunción queda parcialmente determinada como en la Tabla 3.2.

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	x	y
2	0	y	2

Tabla 3.2: Tabla parcial de la conjunción

En seguida analizamos como deben de ser los valores de las variables x y y para obtener una conjunción paraconsistente genuina. Este análisis es en base a los dos casos vistos anteriormente donde se invalida $\boldsymbol{EC}$ y por ello indicamos con letras negritas de que caso se trata.

Caso 2-(b)

Tenemos que $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ y la negación está dada por la Tabla 3.3.
Primero analicemos que sucede con el valor x en la Tabla 3.2:

1. Dado que $\wedge$ deber ser neoclásico y 1 es designado el caso $x = 0$ no puede ocurrir.

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	1
2	0

Tabla 3.3: Caso 2-(b) de la negación

2. Cuando $x = 1$ se tiene la siguiente tabla:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

lo que muestra que $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ es siempre designado y por tanto $\boldsymbol{NC}$ se valida. Lo que deja a este caso fuera de nuestro interés.

3. Si $x = 2$ y v es una valuación tal que $v(\varphi) = 1$, entonces $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 0$ lo que invalida $\boldsymbol{NC}$. Resta escoger el valor de y. Como $\wedge$ debe ser neoclásica la opción $y = 0$ se descarta inmediatamente ya que debe ocurrir por un lado que $1 \wedge 2 = 2 \wedge 1 = y$; mientras que por otro, $y \in \mathcal{D} = \{1, 2\}$. Nos quedan dos opciones; $y = 1$ o $y = 2$:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

notemos que cuando $y = 2$ perdemos el valor de verdad 1, en otras palabras, $\wedge$ es molecular y por tal razón descartamos esta opción. En conclusión, la lógica cuyos conectivos están dados por

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

es una lógica paraconsistente genuina.

Caso 3-(b)

Tenemos que $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ y la negación está dada por la Tabla 3.4

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	2
2	0

Tabla 3.4: Caso 3-(b) de la negación

y a diferencia del caso anterior, comenzamos primero por analizar los posibles valores para y.

1. Si tomamos $y = 0$, entonces $\wedge$ no sería neoclásico, así este caso queda descartado.

2. Para $y = 1$,

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	2	0	2
1	2	1	2
2	0	0	2

   la tabla anterior muestra que $v\left(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\right)$ siempre es designado lo que valida ***NC*** y por tanto este caso no es de interés.

3. Finalmente, cuando $y = 2$ y v es una valuación tal que $v(\varphi) = 1$ se tiene que $v\left(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\right) = 0$ lo que hace no válido a ***NC*** y nos proporciona una lógica paraconsistente genuina. Pero aún falta determinar el valor de x. La posibilidad $x = 0$ se descarta porque queremos que $\wedge$ sea neoclásico y nos quedamos con dos posibles casos para la conjunción dados por las Tablas 3.5:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

Tabla 3.5: Posibilidades para la conjunción

y al igual que anteriormente elegimos la opción de la izquierda $x = 1$, pues para $x = 2$ la conjunción se vuelve molecular. Por tanto obtenemos una segunda lógica paraconsistente genuina cuyos conectivos están dados por:

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

Ahora que tenemos el comportamiento de los conectivos $\neg$ y $\wedge$ que generan lógicas paraconsistentes genuinas y que además satisfacen ser neoclásicos, simétricos, no moleculares y son extensiones conservativas de sus respectivos conectivos en lógica clásica podemos dar las siguientes definiciones sobre las dos únicas lógicas paraconsistentes genuinas generadas por dichos conectivos.

Definición 3.2. *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz trivaluada, con conectivos* $\neg$ *y* $\wedge$*. La lógica paraconsistente genuina trivaluada* $L1$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$L1$

Definición 3.3. *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz trivaluada, con conectivos* $\neg$ *y* $\wedge$*. La lógica paraconsistente genuina trivaluada* $L2$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$L2$

Es preciso mencionar que para poseer una mayor expresividad en las lógicas $L1$ y $L2$, éstas se extienden agregando conectivos a sus lenguajes, como se muestra en la Sección 3.3.

3.3. Las lógicas $L3A_G$ y $L3B_G$

La finalidad de esta sección es mostrar las dos únicas lógicas paraconsistentes genuinas que extienden respectivamente a las lógicas $L1$ y $L2$ presentadas en la Sección 3.2. Estas extensiones las definimos en la siguiente subsección y corresponden a las lógicas $L3A$ y $L3B$ que tienen a $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ como sus conectivos. Además de estas últimas damos sus respectivas extensiones $L3A_G$ y $L3B_G$ agregando el conectivo de implicación. El estudio de dichas extensiones sirve de ayuda para extender las lógicas duales a $L3A$ y $L3B$. Vale la pena hacer hincapié en que el objetivo central de esta tesis es hacer un estudio sobre las lógicas paracompletas genuinas que resultan de extender a las lógicas duales a $L3A$ y a $L3B$ con un conectivo de implicación adecuado.

3.3.1. Las lógicas $L3A$ y $L3B$

A lo largo de toda la Sección 3.2 se presentó un análisis exhaustivo sobre qué tipo de conectivos $\neg$ y $\wedge$ generan lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas y que además satisfacen las propiedades siguientes:

1. El conectivo unario $\neg$ es una extensión conservativa de la negación en lógica clásica.

2. El conectivo binario $\wedge$ satisface:

    a) Es neoclásico.

    b) Es simétrico.

   c) Es una extensión conservativa del conectivo bivaluado conjunción en lógica clásica.

Es posible realizar un análisis similar para el caso del conectivo disyunción, tal como se muestra en [24], de tal forma que:

3. El conectivo binario, $\vee$, que se obtiene es:

   a) Neoclásico.

   b) Simétrico.

   c) Una extensión conservativa del conectivo bivaluado disyunción en lógica clásica.

Una vez teniendo estos tres conectivos estamos en condiciones de presentar las dos únicas lógicas paraconsistente genuinas que se pueden definir de esta manera.

Definición 3.4. *Sea* $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2\}, \{1,2\}, \mathcal{O}\rangle$ *una matriz multivaluada, con conectivos* $\neg$, $\wedge$ *y* $\vee$. *La lógica paraconsistente genuina trivaluada L3A está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

L3A

Definición 3.5. *Sea* $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2\}, \{1,2\}, \mathcal{O}\rangle$ *una matriz multivaluada, con conectivos* $\neg$, $\wedge$ *y* $\vee$. *La lógica paraconsistente genuina trivaluada L3B está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

L3B

Notemos que la lógica $L3A$ es una extensión de la lógica $L1$ mostrada en la Definición 3.2, mientras que la lógica $L3B$ extiende a la lógica $L2$ presentada en la Definición 3.3.

3.3.2. El conectivo implicación en las lógicas paraconsistentes genuinas

En teoría de prueba una de las reglas de inferencia más común es *Modus Ponens* cuya formulación requiere del conectivo de implicación, y se puede representar como:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi} \qquad \textbf{MP}$$

de aquí que podemos considerar dicho conectivo como básico en toda lógica en que se desee el desarrollo de teoría de prueba. Hasta ahora hemos definido exactamente dos lógicas paraconsistentes genuinas en términos de negación, conjunción y disyunción. Lo que pretendemos con este apartado es puntualizar de manera breve el trabajo que se desglosa en [24] para encontrar un conectivo de implicación adecuado para extender las lógicas $L3A$ y $L3B$.

Al igual que antes le pedimos a la implicación las propiedades de ser *neoclásica* y *extensión conservativa* de su respectivo conectivo bivaluado en lógica clásica proposicional. Es preciso hacer notar que la búsqueda de una implicación apropiada es mucho más compleja que en el caso de los otros conectivos bivaluados que analizamos antes ya que debido a que la condición de *simetría* no es común en este conectivo tenemos más variables que encontrar. En un principio la tabla de la implicación tiene nueve espacios y cada uno de estos puede llenarse con alguno de los tres valores de verdad, lo que nos deja con $3^9 = 19683$ posibles implicaciones.

Las restricciones combinadas de ser una extensión conservativa y neoclásica se muestran en la Tabla 3.6, los cuatro valores de las esquinas quedan fijos por ser extensión conservativa de la implicación en lógica clásica y el resto de valores gracias a la neoclasicidad donde para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\} : i_k$ representa un valor designado y al tratarse de lógicas paraconsistentes genuinas (en específico de $L3A$ y $L3B$) tenemos que el conjunto de valores designados es $\mathcal{D} = \{1, 2\}$.

Notemos que la Tabla 3.6 nos deja un total de $2^4 = 16$ implicaciones ya que cada i_k puede tomar dos valores distintos. A pesar que los requisitos impuestos reducen el número inicial de posibles implicaciones el autor en [24] impone

$\to$	0	1	2
0	2	i_1	2
1	0	i_2	i_3
2	0	i_4	2

Tabla 3.6: Implicación tipo extensión conservativa y neoclásica

condiciones extras acerca de que ciertas fórmulas consideradas importantes sean tautologías, por ejemplo:

$$F_1 := \quad \neg\neg(\varphi \to \varphi)$$

$$F_2 := \quad \neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$$

Además para llevar un mejor control de la reducción de la familia de implicaciones posibles derivadas de la Tabla 3.6 en [24] se realiza un análisis individual para cada extensión de las lógicas $L3A$ y $L3B$.

En $L3A$ si las fórmulas F_1 y F_2 son tautologías, entonces las posibles implicaciones se reducen a únicamente cuatro, las cuales mostramos en la Tabla 3.7.

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I1$

$\to$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I2$

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I3$

$\to$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I4$

Tabla 3.7: Candidatos a implicaciones en $L3A$

En [24] se dan una serie de resultados antes de decidir con qué implicación extender $L3A$, finalmente se elige la implicación $I1$ que corresponde a la implicación de Gödel [39, p. 69] por la cercanía con las lógicas paraconsistentes interesantes como la de da Costa [36] y con las lógicas $G3'$ y $CG'3$ [34]. Es importante que el lector tenga claro estos motivos porque si bien extender $L3A$ con alguna de las otras tres implicaciones restantes, seguramente resulta interesante el vínculo con las lógicas antes mencionadas lo que mueve la elección de dicha implicación, por lo que debemos tener presente que aquí nos interesa únicamente la extensión de $L3A$ con $I1$ pues la lógica resultante (ver Definición 3.6) es dual a una de nuestras lógicas objetivo.

De manera similar pero ahora para $L3B$ al analizar si las fórmulas F_1 y F_2 son tautologías, el número de posibles implicaciones de acuerdo con la Tabla 3.6 no se reduce como ocurre con $L3A$. Esto se explica por el comportamiento de la negación de $L3B$, dejándonos como resultando un total de dieciséis implicaciones para extender $L3B$, dichas implicaciones se observan en la Tabla 3.8.

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

$I1$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	2	2

$I2$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I3$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	2	2

$I4$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	2	2

$I5$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I6$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I7$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

$I8$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	1
2	0	2	2

$I9$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$I10$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	1
2	0	1	2

$I11$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	2
2	0	2	2

$I12$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	1
2	0	2	2

$I13$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$I14$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	1
2	0	1	2

$I15$

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I16$

Tabla 3.8: Candidatos a implicaciones en $L3B$

Al igual que con las posibles extensiones de $L3A$, con las dieciséis implicaciones que pueden extender $L3B$, en [24] antes de elegir una se presentan diversos resultados que se satisfacen o no con dichas extensiones. Luego se selecciona la implicación $I16$ que nuevamente resulta ser de Gödel por ser la que satisface el mayor número de propiedades y es no molecular. La extensión de $L3B$ con la implicación $I16$ la damos de manera formal en la Definición 3.7. Un hecho interesante es que la implicación de Gödel es una implicación clásica (ver Definición 1.14) [22].

Es importante notar que aunque las restantes implicaciones resulten interesantes debemos tener claro que la razón principal por las que no estudiamos las extensiones respectivas que generan se debe a que en esta tesis buscamos aprovechar el estudio realizado en [22] y [24] acerca de las dos extensiones de $L3A$ y $L3B$ con la implicación de Gödel para alcanzar nuestro objetivo principal.

3.3.3. $L3A_G$ y $L3B_G$

Ahora que ya hemos mostrado el proceso resumido de búsqueda y elección de un conectivo de implicación apropiado para extender las lógicas $L3A$ y $L3B$ estamos listos para conocer las dos lógicas paraconsistentes genuinas $L3A_G$ y $L3B_G$ en términos de cuatro conectivos que extienden a $L3A$ y $L3B$, respectivamente. Cabe mencionar que el subíndice corresponde al hecho de que la implicación es de Gödel.

Definición 3.6 ([24])**.** *La lógica obtenida a partir de $L3A$ agregando el conectivo de implicación de la lógica $G3$, ver Ejemplo 1.8, se denota como $L3A_G$ y las tablas de verdad de sus conectivos son:*

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$L3A_G$

Definición 3.7 ([24])**.** *La lógica obtenida a partir de $L3B$ agregando el conectivo de implicación de la lógica $G3$ se denota como $L3B_G$ y las tablas de verdad de sus conectivos son:*

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$L3B_G$

Con estas dos definiciones terminamos esta subsección pero aún nos hace falta profundizar un poco más en las características de las lógicas obtenidas. Hemos mencionado que el conectivo de implicación es esencial para desarrollar teoría de prueba a causa de la regla de inferencia *Modus Ponens* y ahora que ya tenemos dicho conectivo podemos enunciar algunos resultados que lo involucran. A continuación mostramos dos teoremas fundamentales que relacionan los enfoques de teoría de prueba y teoría de modelos para cerrar y completar el estudio de las lógicas $L3A_G$ y $L3B_G$.

3.4. Robustez y completitud en $L3A_G$ y $L3B_G$

Hasta el momento únicamente hemos definido las lógicas paraconsistentes genuinas $L3A_G$ y $L3B_G$ por medio de semánticas multivaluadas inducidas por matrices correspondientes al enfoque de teoría de modelos. En [24] se provee de sistemas axiomáticos tipo Hilbert para las lógicas anteriores pertenecientes al enfoque de teoría de prueba. Lo que pretendemos con esta sección es dar una descripción y un bosquejo de dos de los teoremas más relevantes en la lógica, el teorema de robustez "*soundness*" y el teorema de completitud "*completeness*" que vinculan la teoría de prueba con la teoría de modelos.

Para comprender mejor esta perspectiva de teoría de prueba mostramos las siguientes definiciones:

Definición 3.8 ([13]). *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$. Decimos que una relación $\mathbf{R} \subset \mathcal{P}(FORM(\mathcal{L})) \times \mathcal{P}(FORM(\mathcal{L}))$ es una* **regla de inferencia** *si para cualquier $(\Gamma, \Delta) \in \mathbf{R}$ con Γ y Δ conjuntos finitos y para cualquier sustitución σ se tiene que $(\sigma(\Gamma), \sigma(\Delta)) \in \mathbf{R}$. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ habitualmente la regla $\mathbf{R}$ se denota por:*

$$\frac{\gamma_1 \cdots \gamma_n}{\delta_1 \ldots \delta_m} \ \mathbf{R}.$$

Un ejemplo de regla de inferencia lo hemos mencionado en la Sección 3.3.2 al presentar *Modus Ponens*, podemos interpretar dicha regla como que ψ es consecuencia de tener φ y $\varphi \to \psi$. Otros conceptos importantes a tener en cuenta son *demostración* y *tautología*, dados en la Sección 1.2 y Definición 1.8, respectivamente; ya que ambos están involucrados de una u otra forma en la robustez y la completitud de una lógica.

Definición 3.9 ([13]). *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una* **axiomática** *o un* **sistema de prueba tipo Hilbert** *o simplemente un* **sistema de Hilbert** *es una pareja $\langle\mathcal{A},\mathcal{R}\rangle$ donde $\mathcal{A}$ es una teoría cuyos elementos son denominados esquemas de axioma y $\mathcal{R}$ es un conjunto de reglas de inferencia.*

Dada una axiomática $\mathbb{A} = \langle\mathcal{A},\mathcal{R}\rangle$, si una fórmula φ tiene una demostración en $\mathbb{A}$, decimos que es un **teorema** en $\mathbb{A}$ y lo denotamos por $\vdash \varphi$. Ahora estamos listos para entender a que nos referimos con robustez y completitud. Decimos que una lógica $\mathbf{L}$ es robusta respecto a una axiomática $\mathbb{A}$ si los teoremas de $\mathbb{A}$ son tautologías en $\mathbf{L}$ y recíprocamente si cada tautología de $\mathbf{L}$ es un teorema en $\mathbb{A}$, entonces la lógica $\mathbf{L}$ es completa con respecto a la axiomática $\mathbb{A}$. En seguida presentamos la axiomática propuesta en [24] para $L3A_G$ y $L3B_G$, además de enunciar resultados necesarios para llegar a la demostración de robustez y completitud en cada una de las dos lógicas antes mencionadas. Para llevar todo de manera organizada separamos la explicación del procedimiento seguido en [24] para demostrar lo deseado, comenzando por $L3A_G$.

Sea $\mathbb{L}$ una teoría formal axiomática para la lógica $L3A_G$ formada por los conectivos primitivos: $\neg$, $\to$, $\vee$ y $\wedge$. Las fórmulas se construyen de la manera usual, *Modus Ponens* como la única regla de inferencia y los esquemas de axiomas son [24]:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Pos1}: & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
\textbf{Pos2}: & \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big) \\
\textbf{Pos3}: & (\varphi \wedge \psi) \to \varphi \\
\textbf{Pos4}: & (\varphi \wedge \psi) \to \psi \\
\textbf{Pos5}: & \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big) \\
\textbf{Pos6}: & \varphi \to (\varphi \vee \psi) \\
\textbf{Pos7}: & \psi \to (\varphi \vee \psi) \\
\textbf{Pos8}: & \Big(\varphi \to \sigma\Big) \to \Big((\psi \to \sigma) \to \big((\varphi \vee \psi) \to \sigma\big)\Big) \\
\textbf{Cw1}: & \varphi \vee \neg\varphi \\
\textbf{WE}: & \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \psi) \\
\textbf{L3A1}: & \big((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)\big) \to \neg\neg(\varphi \to \psi) \\
\textbf{L3A2}: & \neg\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L3A3}: \quad (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)\\
&\mathbf{L3A4}: \quad (\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\\
&\mathbf{L3A5}: \quad \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi\\
&\mathbf{L3A6}: \quad (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)\\
&\mathbf{L3A7}: \quad \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}$$

Para demostrar que $L3A_G$ es robusta respecto a $\mathbb{L}$, lo que significa que todo teorema en $\mathbb{L}$ es una tautología en $L3A_G$, basta ver que cada uno de los axiomas de $\mathbb{L}$ es una tautología y que *Modus Ponens* preserva tautologías, esto debido a que un teorema en $\mathbb{L}$ o es una instancia de un esquema de axioma o se obtiene de la aplicación de *Modus Ponens* a fórmulas previas. De acuerdo con las tablas de verdad de los conectivos en $L3A_G$, no es complicado verificar que cada axioma en $\mathbb{L}$ es una tautología; que *Modus Ponens* preserva tautologías tampoco es complejo, para ello se procede por contradicción (para ver los detalles consulte [24, pp. 86-87]), con todo lo anterior tenemos como resultado el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Robustez en $L3A_G$)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es un teorema en $\mathbb{L}$, entonces φ es una tautología en $L3A_G$, i.e. si $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ entonces $\models_{L3A_G} \varphi$.*

Para demostrar completitud debemos ver que cada tautología en $L3A_G$ es un teorema en $\mathbb{L}$ pero esta demostración es más compleja que la del teorema previo. En general los teoremas de completitud no son sencillos de demostrar y a lo largo de la historia han surgido múltiples técnicas sólo para demostrar el teorema de completitud para la lógica proposicional clásica y una gran infinidad de técnicas para el caso de lógicas no clásicas [43]. Existen dos formas de realizar la demostración, de manera directa o de manera indirecta. En muchos casos se emplea una técnica indirecta, la construcción de contramodelos; es decir se supone que una fórmula no tiene prueba y entonces se muestra que no es una tautología, estas técnicas son útiles pero no constructivas. Por otro lado, hacer una demostración de completitud de manera directa consiste en tomar una tautología y construir su prueba formal por lo que al hacerla de este modo, no solo se obtiene el teorema de completitud, sino una técnica general para encontrar la demostración de cualquier teorema de manera sistemática [29].

El Lema de Kalmár para la lógica proposicional clásica [30] permite realizar una demostración directa del teorema de completitud. A grandes rasgos el lema consiste en verificar que existe una transformación particular de fórmulas que identifica los valores de verdad y mostrar que dada una fórmula y una valuación, la fórmula transformada se puede demostrar a partir de suponer la transformación de los átomos de la fórmula original. Después la demostración de completitud consiste en emplear el Lema de Kalmár y luego ver que se pueden ir eliminando las suposiciones hasta lograr demostrar la fórmula transformada sin suposición alguna. A continuación se empleará la misma idea pero generalizando el Lema de Kalmár para una lógica trivaluada. Vale la pena señalar que el análisis y la cantidad de demostraciones que se requieren incrementa debido al aumento de valores de verdad. Para simplificar un poco el trabajo enunciamos primero algunos resultados auxiliares cuya demostración se encuentra en [24].

Teorema 3.2. *Sean Γ, Δ conjuntos de fórmulas, y sean φ, ψ fórmulas arbitrarias. La siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{L}$.*

Monotonía	*si* $\Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.
Teorema de la deducción	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
Corte	*si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Delta, \varphi \vdash \psi$, *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.
Reglas-AND	$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \psi$.
Prueba fuerte por casos	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *y* $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \psi$.

El Lema 3.1 enlista propiedades que se satisfacen en $\mathbb{L}$, para su demostración se ocupan las propiedades del teorema previo y el interés de este resultado se debe a que es necesario para la demostración del Lema 3.2 que a su vez ayuda a demostrar el Lema 3.3. Antes de enunciarlo necesitamos definir dos conectivos más en términos de los conectivos primitivos de $L3A_G$, estos son: $G(\varphi) := \varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$ y $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$ [24]. Para observar el comportamiento de los mismos presentamos sus valuaciones en las Tablas 3.10 y 3.11.

φ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	$G(\varphi)$
0	2	0	0	2
1	2	0	0	0
2	0	2	0	0

Tabla 3.10: Tabla de verdad para $G(\varphi)$

φ	$\neg\varphi$	$N(\varphi)$
0	2	0
1	2	2
2	0	0

Tabla 3.11: Tabla de verdad para $N(\varphi)$

Notemos que estos conectivos en conjunto con la doble negación (observar la tercera columna de la Tabla 3.10) identifican a cada uno de los valores de verdad en el sentido que, $G(\varphi)$ valúa 2 únicamente cuando su argumento (i.e. φ) toma el valor de 0, algo similar sucede con $N(\varphi)$ y la doble negación para los valores 1 y 2, respectivamente.

Lema 3.1. Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, σ y ξ, las siguientes propiedades se satisfacen en $\mathbb{L}$[4].

a) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

b) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \sigma$, entonces $\vdash \varphi \to \sigma$.

c) $\vdash \big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)$.

d) $\vdash (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$.

e) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$.

f) $\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$.

g) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \psi$.

h) $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$.

i) $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$.

j) $\vdash (\varphi \to \psi) \to \big(G(\psi) \to G(\varphi)\big)$.

k) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\sigma \vdash \xi$, entonces $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$.

l) Si $G(\varphi) \vdash \psi$, $N(\varphi) \vdash \psi$ y $\neg\neg\varphi \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$.

m) $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\varphi, \psi \vdash \sigma$.

[4] Debemos tener presente que estamos trabajando en la teoría axiomática $\mathbb{L}$ no obstante por simplicidad omitimos el subíndice $\mathbb{L}$ en $\vdash$.

La razón del Lema 3.2 es reflejar el comportamiento de los cuatro conectivos primitivos en $L3A_G$ en términos de $G(\varphi)$, $N(\varphi)$ y la doble negación.

Lema 3.2. Para cualesquiera fórmulas φ y ψ, las siguientes fórmulas bien formadas son teoremas en $\mathbb{L}$.

N1:	$\vdash G(\varphi) \to \neg\neg(\neg\varphi)$	**C1:**	$\vdash G(\varphi) \to N(\varphi \wedge \psi)$
N2:	$\vdash N(\varphi) \to \neg\neg(\neg\varphi)$	**C2:**	$\vdash \big(N(\varphi) \wedge N(\psi)\big) \to N(\varphi \wedge \psi)$
N3:	$\vdash \neg\neg\varphi \to G(\neg\varphi)$	**C3:**	$\vdash \big(N(\varphi) \wedge \neg\neg\psi\big) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
		C4:	$\vdash \big(\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi\big) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
I1:	$\vdash G(\varphi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$		
I2:	$\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$		
I3:	$\vdash \big(N(\varphi) \wedge N(\psi)\big) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**D1:**	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
I4:	$\vdash \big(\neg\neg\varphi \wedge N(\psi)\big) \to N(\varphi \to \psi)$	**D2:**	$\vdash \big(G(\varphi) \wedge N(\psi)\big) \to N(\varphi \vee \psi)$
I5:	$\vdash \big(N(\varphi) \wedge G(\psi)\big) \to G(\varphi \to \psi)$	**D3:**	$\vdash \big(N(\varphi) \wedge N(\psi)\big) \to N(\varphi \vee \psi)$
I6:	$\vdash \big(\neg\neg\varphi \wedge G(\psi)\big) \to G(\varphi \to \psi)$	**D4:**	$\vdash \big(G(\varphi) \wedge G(\psi)\big) \to G(\varphi \vee \psi)$

Antes de enunciar el Lema 3.3 debemos dar una definición que transforma las fórmulas de acuerdo con una valuación dada.

Definición 3.10 ([24]). *Dada una valuación v de $L3A_G$ y una fórmula φ, se denota la imagen de φ bajo v con φ_v y se define como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} G(\varphi) & si \quad v(\varphi) = 0 \\ N(\varphi) & si \quad v(\varphi) = 1 \\ \neg\neg\varphi & si \quad v(\varphi) = 2 \end{cases}$$

para un conjunto de fórmulas Φ, con Φ_v denotamos al conjunto $\{\varphi_v \mid \varphi \in \Phi\}$.

Ejemplo 3.2. Sea $\varphi = (\neg p \wedge q) \to r$ una fórmula bien formada en $L3A_G$. Para cada una de las valuaciones dadas mostramos el resultado de la definición anterior en la siguiente tabla.

Valuación	Valuación φ	Transformación
$v_1(p) = 1$ $v_1(q) = 1$ $v_1(r) = 0$	$v_1(\varphi) = 0$	$\varphi_{v_1} = G(\varphi) =$ $\big((\neg p \wedge q) \to r\big) \to \Big(\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big) \wedge \neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)\Big)$
$v_2(p) = 0$ $v_2(q) = 2$ $v_2(r) = 1$	$v_2(\varphi) = 1$	$\varphi_{v_2} = N(\varphi) = \big((\neg p \wedge q) \to r\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$
$v_3(p) = 2$ $v_3(q) = 0$ $v_3(r) = 2$	$v_3(\varphi) = 2$	$\varphi_{v_3} = N(\varphi) = \neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$

El lector debe tener en cuenta que por cuestiones ilustrativas únicamente hemos dado tres valuaciones que ejemplifican los tres casos de la Definición 3.10 pero que estas no son las únicas. Para la fórmula en cuestión, al estar compuesta de tres átomos, sabemos que en realidad se tiene un total de $3^3 = 27$ valuaciones.

Ahora que entendemos como funciona la Definición 3.10 estamos en condiciones de enunciar el lema clave para la prueba de completitud.

Lema 3.3. Sean $\varphi \in FORM(L3A_G)$ y v una valuación. Si con $Atoms(\varphi)$ denotamos el conjunto de fórmulas atómicas en φ, entonces se puede demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Lo que nos asegura el Lema 3.3 es que para cualquier fórmula del lenguaje de $L3A_G$ si a cada una de sus letras proposicionales (átomos) le aplicamos la Definición 3.10 y con lo que resulte formamos un conjunto, entonces dicho conjunto demuestra a la transformación de la fórmula en cuestión. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3. Retomando la fórmula y la valuación v_3 del Ejemplo 3.2, es decir, $\varphi = (\neg p \wedge q) \to r$ y $v_3(p) = v_3(r) = 2$ y $v_3(q) = 0$. Tenemos que los átomos de φ son p, q y r, de acuerdo a la valuación dada y aplicando la Definición 3.10 a dichos átomos obtenemos $Atoms(\varphi)_{v_3} = \{\neg\neg p, G(p) = q \to (\neg q \wedge \neg\neg q), \neg\neg r\}$. Además $\varphi_{v_3} = \neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$. Luego, el Lema 3.3 nos asegura que

$$\neg\neg p, \neg q \to (\neg q \wedge \neg\neg q), \neg\neg r \vdash \neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$$

una demostración sencilla de este hecho es la siguiente: por **I2** del Lema 3.2 es válido $\neg\neg r \to \neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$ y aplicando *Modus Ponens* con la hipótesis $\neg\neg r$ concluimos lo deseado, esto es, $\neg\neg\big((\neg p \wedge q) \to r\big)$, corroborando el Lema 3.3. Debemos tener en cuenta que en este caso no es necesario utilizar las otras dos hipótesis, en otros casos puede suceder algo similar respecto a las hipótesis e incluso habrá casos donde sea indispensable el uso de todas.

Finalmente, estamos listos para enunciar el teorema de completitud en $L3A_G$. El lector puede comprobar que la demostración está pensada de forma similar a la prueba del teorema de completitud para la lógica clásica [30]. De hecho la Definición 3.10 y el Lema 3.3 están inspirados en el Lema 1.13 de [30, pp. 34]. La forma de transformar las fórmulas está relacionada con los dos valores de verdad que se tienen en lógica clásica proposicional y aquí la transformación se basa en los tres valores de verdad posibles. Estas similitudes se deben a que ambos lemas utilizan la técnica de Kalmár [26, 33] la cual se debe al matemático y lógico Lászlo Kalmár. Dicha técnica es de suma importancia pues más adelante la ocupamos para el estudio de la teoría axiomática de algunas extensiones de las lógicas duales a $L3A$ y $L3B$.

Teorema 3.3 (Completitud en $L3A_G$)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es una tautología en $L3A_G$, entonces φ es un teorema en $\mathbb{L}$, esto es, si $\models_{L3A_G} \varphi$, entonces $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$.*

Con esto terminamos el análisis de dos teoremas sumamente importantes en lógica para el caso de $L3A_G$. De forma similar en [24] se desarrolla el proceso de prueba de estos teoremas para la lógica paraconsistente genuina $L3B_G$.

Sea $\mathbb{L}_1$, una teoría formal axiomática para $L3B_G$ constituida por los conectivos primitivos: $\neg$, $\to$, $\vee$ y $\wedge$ y dos conectivos definidos en términos de los primitivos G y N definidos como: $G(\varphi) := \varphi \to \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)\big)$ y $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$ [24]. Las fórmulas bien formadas se construyen de la manera usual, la única regla de inferencia es *Modus Ponens* y los esquemas de axioma son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Pos1}: \quad \varphi \to (\psi \to \varphi)\\
&\textbf{Pos2}: \quad \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big)\\
&\textbf{Pos3}: \quad (\varphi \wedge \psi) \to \varphi\\
&\textbf{Pos4}: \quad (\varphi \wedge \psi) \to \psi
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{Pos5}: && \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big)\\
&\textbf{Pos6}: && \varphi \to (\varphi \vee \psi)\\
&\textbf{Pos7}: && \psi \to (\varphi \vee \psi)\\
&\textbf{Pos8}: && (\varphi \to \sigma) \to \Big((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)\Big)\\
&\textbf{Cw1}: && \varphi \vee \neg\varphi\\
&\textbf{Cw2}: && \varphi \to \neg\neg\varphi\\
&\textbf{SWE}: && \neg\neg\varphi \to \big(\neg(\varphi \wedge \varphi) \to \psi\big)\\
&\textbf{L3B1}: && N(\varphi \wedge \psi) \to G(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\\
&\textbf{L3B2}: && \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)\\
&\textbf{L3B3}: && \neg N(\varphi) \to G(N(\varphi))\\
&\textbf{L3B4}: && \big(\neg\varphi \wedge \neg N(\psi)\big) \to \neg(\varphi \wedge \psi)\\
&\textbf{L3B5}: && N(\varphi \to \psi) \to G(N(\varphi))\\
&\textbf{L3B6}: && \big((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi)\big) \to \neg(\varphi \to \psi)\\
&\textbf{L3B7}: && \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi\\
&\textbf{L3B8}: && (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)
\end{aligned}$$

Debido a que la demostración del teorema de robustez sigue exactamente los mismos pasos que explicamos en el párrafo previo al Teorema 3.1 pasamos directamente a enunciarlo.

Teorema 3.4 (Robustez en $L3B_G$)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es un teorema en $\mathbb{L}_1$, entonces φ es una tautología en $L3B_G$, i.e. si $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$ entonces $\models_{L3B_G} \varphi$.*

El Teorema 3.2 se cumple en $\mathbb{L}_1$ y dado que el análisis es completamente similar, es decir, en [24] se presentan tres lemas en cadena análogos a los dados para $L3A_G$ incluyendo una definición de transformación de una fórmula de acuerdo con una valuación dada. En este caso ya no nos detenemos en bosquejar este procedimiento y enunciamos directamente el teorema de completitud en $L3B_G$ para concluir con la sección.

Teorema 3.5 (Completitud en $L3B_G$)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es una tautología en $L3B_G$, entonces φ es un teorema en $\mathbb{L}_1$, esto es, si $\models_{L3B_G} \varphi$, entonces $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$.*

A modo de resumen de este capítulo, recordemos que en esta parte nos dedicamos primero a presentar dos formulaciones del *Principio de no contradicción* y mostramos que son independientes con motivo de definir un concepto más restrictivo de paraconsistencia, este es el de *lógicas paraconsistentes genuinas*. Después discutimos qué tipo de conectivos (negación y conjunción) permiten generar este tipo de lógicas y cumplen con ciertas características, de esta forma definimos dos lógicas paraconsistentes genuinas. Luego, agregamos conectivos de disyunción e implicación apropiados para llegar a las lógicas $L3A_G$ y $L3B_G$ para finalmente concluir el estudio de dichas lógicas con los teoremas de robustez y completitud en cada una de ellas.

Capítulo 4

Lógicas paracompletas genuinas

El concepto de *lógicas paracompletas genuinas* visto desde un enfoque dual al concepto de lógicas paraconsistentes genuinas fue recientemente presentado en el artículo *Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics* $L3A$ *and* $L3B$ [23]. En este capítulo detallamos el análisis y explicamos en qué sentido se considera la dualidad entre paraconsistencia genuina y paracompletitud genuina presentados en dicho artículo. Para lograr esto, desarrollamos un análisis muy similar al realizado en el capítulo anterior con el cual podemos observar la naturaleza de los conectivos que definen lógicas paracompletas genuinas. La importancia de este capítulo radica en el estudio de la dualidad, por un lado, entre las lógicas $L3A$ y $L3A^D$; y por otro lado entre las lógicas $L3B$ y $L3B^D$. Después de construir las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$ estas serán extendidas con un conectivo apropiado de implicación. Uno de los objetivos más ambiciosos de este trabajo es encontrar sendas axiomatizaciones para las extensiones seleccionadas de $L3A^D$ y $L3B^D$.

4.1. Independencia entre las formulaciones del principio del tercero excluso

Como hemos mencionado anteriormente, invalidar el *Principio del tercero excluso* conduce a las lógicas paracompletas. Dicho principio establece que dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas falsas. En términos de lógica clásica proposicional es posible formular este principio como: una proposición y su negación no pueden ser falsas ambas. Al igual que ocurre con el *Principio de no contradicción*, el *Principio del tercero excluso* tiene dos formas comunes de plantearse, estas formulaciones usualmente son vistas como las duales al *principio de explosión* ($\boldsymbol{EC}$) y a la *negación de una contradicción* ($\boldsymbol{NC}$) presentadas en la Sección 3.1. A continuación presentamos estas dos formulaciones.

1. *Principio dual al principio de explosión.* Este principio establece que para cualquier afirmación φ no ocurre que φ y $\neg\varphi$ sean falsas simultáneamente. La forma de $\boldsymbol{EC}$ usando relaciones de consecuencia tarskiana múltiple es:

$$\boldsymbol{EC} \qquad \varphi, \neg\varphi \vdash$$

en este trabajo denotamos la forma dual de $\boldsymbol{EC}$ con $\boldsymbol{EM}$ y con forma dual nos referimos a pasar lo del lado izquierdo de $\vdash$ al lado derecho, tenemos en términos de relaciones de consecuencia tarskiana múltiple:

$$\boldsymbol{EM} \qquad \vdash \varphi, \neg\varphi$$

Si consideramos un lenguaje $\mathcal{L}$ que tiene una disyunción $\vee$ (que corresponde a comas en el lado derecho de $\vdash$), entonces este principio puede ser escrito como

$$\boldsymbol{EM} \qquad \vdash \varphi \vee \neg\varphi.$$

Lo que en teoría de modelos se puede interpretar como que $\varphi \vee \neg\varphi$ sea una tautología, lo cual es cierto en lógica clásica proposicional.

2. *Principio dual a la negación de una contradicción.* Esta manera de formular el *Principio del tercero excluso* está ligada directamente con el conectivo disyunción $\vee$ que se tiene en lógica clásica proposicional, sabemos que una disyunción toma el valor de falso (no designado) si y sólo si ambos disyuntos son falsos (no designados). De forma similar a la formulación anterior podemos tomar esta formulación como la dual a

$$\boldsymbol{NC} \qquad \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

y como usualmente se acostumbra tomamos a los conectivos $\wedge$ y $\vee$ duales uno del otro. Por lo tanto, en términos de relaciones de consecuencia tarskiana múltiple esta formulación denotada con $\boldsymbol{EM'}$ es:

$$\boldsymbol{EM'} \qquad \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash$$

y si ψ es una fórmula cualquiera entonces podemos reescribir equivalentemente $\boldsymbol{EM'}$ como: $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \psi$, cuya interpretación es: cada modelo para el lado izquierdo de $\vdash$ es un modelo para ψ. Dado que ψ no tiene necesariamente relación con φ, para invalidar $\boldsymbol{EM'}$ basta con encontrar una valuación tal que $v\left(\neg(\varphi \vee \neg\varphi)\right)$ sea designado y $v(\psi)$ no lo sea.

Análogamente al caso de la paraconsistencia, estas dos formulaciones son independientes y enseguida presentamos un ejemplo que demuestra este hecho.

Ejemplo 4.1. Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz trivaluada con conectivos $\neg$ y $\vee$ definidos por las siguientes tablas:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

entonces de acuerdo al conjunto de valores designados que elijamos ($\mathcal{D} = \{1, 2\}$ o bien $\mathcal{D} = \{2\}$) tenemos los siguientes casos.

I. Si $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ de acuerdo con la Tabla 4.1, notemos que $\varphi \vee \neg\varphi$ es una tautología lo que valida $\boldsymbol{EM}$. Sin embargo el valor de la Tabla 4.1 en la cuarta columna de izquierda a derecha posicionado en la tercera fila de arriba hacia abajo es un valor designado lo que hace que no se satisfaga $\boldsymbol{EM'}$.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
0	2	2	0
1	1	1	1
2	0	2	0

Tabla 4.1: Independencia entre $\boldsymbol{EM}$ y $\boldsymbol{EM'}$

II. Si $\mathcal{D} = \{2\}$, entonces $\varphi \vee \neg\varphi$ no es una tautología ya que la tercera columna de la Tabla 4.1 tiene un valor no designado lo que invalida $\boldsymbol{EM}$; mientras que por otra parte se satisface $\boldsymbol{EM'}$ debido a que la cuarta columna de la Tabla 4.1 no posee valores designados.

Con el Ejemplo 4.1 tenemos dos lógicas en las cuales se valida una formulación del *Principio del tercero excluso* y la otra no, esto depende de como sea considerado el conjunto de valores designados, es decir, este ejemplo demuestra que $\boldsymbol{EM}$ y

EM′ son independientes, esto motivó a los autores de [23] a dar la siguiente definición.

Definición 4.1 ([23]). *Una lógica **L** con negación y disyunción se dice que es una* **lógica paracompleta genuina** *(o una lógica paracompleta fuerte) si **EM** ni **EM′** son válidos, esto es: para algunas fórmulas* φ *y* ψ*,*

1. $\nvdash \varphi \vee \neg\varphi$ $\quad$ $\mathbf{GP1}_D$

2. $\neg(\psi \vee \neg\psi) \nvdash$. $\quad$ $\mathbf{GP2}_D$

4.2. Conectivos para las lógicas paracompletas genuinas

Al igual que con la paraconsistencia genuina ahora estamos interesados en determinar cuáles son los conectivos que generan lógicas paracompletas genuinas, es decir que satisfagan $\mathbf{GP1}_D$ y $\mathbf{GP2}_D$ de la Definición 4.1 y que además satisfagan las mismas propiedades que impusimos en la Sección 3.2. A lo largo de esta sección hacemos un análisis detallado para ver cuántas y cuáles lógicas paracompletas genuinas podemos obtener de esta forma. Nuevamente nos centramos en el ámbito de las lógicas de tres valores.

4.2.1. Negación y disyunción paracompleta genuina

La combinación de conectivos $\neg$ y $\vee$ de la lógica del Ejemplo 4.1 no satisface la Definición 4.1, por tanto, no funciona para definir una lógica paracompleta genuina por esa razón necesitamos una combinación diferente. Empezamos por buscar la forma de que se cumpla $\mathbf{GP1}_D$, esto es que $\varphi \vee \neg\varphi$ no sea una tautología. Para lograr esto, a diferencia del análisis hecho en la Sección 3.2 debemos trabajar simultáneamente con negación y disyunción. Además, como pedimos que la negación sea una extensión conservativa de su versión en lógica clásica podemos fijar dos valores en su tabla de verdad, tal como se muestra en la Tabla 4.2, donde k es una variable a determinar y puede tomar los valores 0, 1 o 2. Analicemos cada caso considerando los dos posibles conjuntos de valores designados. Buscamos una disyunción que sea: una extensión conservativa de la disyunción en lógica clásica, neoclásica y simétrica. Con esto en mente tenemos lo siguiente.

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	k
2	0

Tabla 4.2: Posibles negaciones

1. Si $k = 2$, entonces cada fila de la Tabla 4.2 tendríamos que φ o $\neg\varphi$ tienen valores designados. Como la disyunción debe ser neoclásica, entonces $\varphi \vee \neg\varphi$ sería tautología, provocando que no se satisfaga $\mathbf{GP1}_D$, así este caso queda fuera de nuestro interés.

2. Si $k = 0$ tenemos dos subcasos según el conjunto de valores designados que tomemos.

   a) Cuando $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ entonces en cada fila de la Tabla 4.2 φ o $\neg\varphi$ son designados y nuevamente no se satisface $\mathbf{GP1}_D$. Así no es posible generar lógicas paracompletas genuinas.

   b) Cuando $\mathcal{D} = \{2\}$, se tiene que existe una valuación de tal forma que $v(\varphi) = 1 \notin \mathcal{D}$ y $v(\neg\varphi) = 0 \notin \mathcal{D}$. Luego se cumple $\mathbf{GP1}_D$ y existe la posibilidad de generar lógicas paracompletas genuinas.

3. Si $k = 1$ entonces de acuerdo al conjunto de valores designados que tomemos se generan dos subcasos.

   a) Cuando $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ como en el caso 2-(a) tenemos que φ o $\neg\varphi$ son designados y nuevamente no se cumple $\mathbf{GP1}_D$. En consecuencia no es posible generar lógicas paracompletas genuinas en este caso.

   b) Cuando $\mathcal{D} = \{2\}$ existe una valuación v, tal que $v(\varphi) = 1 = v(\neg\varphi)$ que es no designado, validando $\mathbf{GP1}_D$. Por ahora esta opción posiblemente genera lógicas paracompletas genuinas.

En conclusión del análisis anterior, para generar lógicas paracompletas genuinas la única posibilidad para el conjunto de valores designados es $\{2\}$ y k debe estar en $\{0, 1\}$.

Hasta ahora tenemos dos negaciones, las que presentamos en la Tabla 4.3. Analicemos en cada caso que condiciones adicionales debe satisfacer un conectivo de disyunción para que se cumpla $\mathbf{GP2}_D$ y así obtener lógicas paracompletas genuinas. Como buscamos una disyunción que sea una extensión conservativa de la disyunción en lógica clásica, se fijan los cuatro valores de las esquinas en la Tabla 4.4. Además como $\mathcal{D} = \{2\}$, por neoclasicidad $v(1 \vee 2) \in \mathcal{D}$ y $v(2 \vee 1) \in \mathcal{D}$, para cualquier valuación v, lo que fija dos valores más en la Tabla 4.4. Y por simetría sólo debemos determinar dos variables. Por tanto la Tabla 4.4 muestra la tabla de verdad parcial para la disyunción.

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

Tabla 4.3: Negaciones que permiten satisfacer $\mathbf{GP1}_D$

$\vee$	0	1	2
0	0	x	2
1	x	y	2
2	2	2	2

Tabla 4.4: Posibles disyunciones

A continuación realizamos un análisis para determinar las variables x y y que permitan satisfacer $\mathbf{GP2}_D$. Dividimos el análisis en dos partes basadas justamente en los dos casos anteriores, donde la negación permite validar $\mathbf{GP1}_D$, especificamos estos casos con letras negritas.

Caso 2-(b)

En esta situación la tabla de verdad de la negación está dada por la Tabla 4.5 y $\mathcal{D} = \{2\}$.

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	0
2	0

Tabla 4.5: Caso 2-(b) de la negación paracompleta genuina

Es conveniente comenzar a analizar x, lo que arroja los siguientes subcasos:

1. Si $x = 0$, entonces de acuerdo con la Tabla 4.6

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
0	2	2	0
1	0	0	2
2	0	2	0

Tabla 4.6: Tablas de verdad, caso $k = 0$ y $x = 0$

muestra que la Definición 4.1 se satisface, independientemente del valor de y. En efecto, en el apartado anterior hemos visto que $\mathbf{GP1}_D$ se satisface (de hecho por eso se eligió la negación de la Tabla 4.5). Por otra parte, $\mathbf{GP2}_D$ también se valida ya que en la cuarta columna, $v\left(\neg(\varphi \vee \neg\varphi)\right) = 2$ en la segunda fila. Resta escoger el valor de y, dado que queremos que $\vee$ sea neoclásico, $y = 2$ se descarta y nos quedan dos opciones, $y = 0$ o $y = 1$:

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

notemos que si pedimos la propiedad de no ser molecular la única opción es la segunda, que de hecho es la tabla de verdad dual a la tabla del conectivo $\wedge$ de $L3A$. Más adelante mostramos justamente este proceso de dualización. Por ahora, únicamente concluimos que en este caso ($k = 0$, $x = 0$) si se generan lógicas paracompletas genuinas.

2. Si $x = 1$, entonces la siguiente tabla

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
0	2	2	0
1	0	1	0
2	0	2	0

muestra que no existe una valuación tal que $v\left(\neg(\varphi \vee \neg\varphi)\right) \in \mathcal{D}$ (i.e $\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$ no tiene un modelo) lo cual invalida $\mathbf{GP2}_D$ y este caso no es de nuestro interés.

3. Finalmente, notemos que $x = 2$ no es posible, ya que queremos que $\vee$ sea neoclásico, de lo contrario la disyunción de 0 con 1 (y viceversa) sería 2 lo que implicaría que $1 \in \mathcal{D}$ o $0 \in \mathcal{D}$ lo cual es imposible.

Caso 3-(b)

Tenemos $\mathcal{D} = \{2\}$ y la Tabla 4.7 representa el conectivo negación.

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	1
2	0

Tabla 4.7: Caso 3-(b) de la negación paracompleta genuina

En este caso comenzamos primero analizando los posibles valores que puede tomar y porque es más conveniente.

1. Si $y = 0$, entonces la Tabla 4.8

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
0	2	2	0
1	1	0	2
2	0	2	0

Tabla 4.8: Tablas de verdad, caso $k = 1$ y $y = 0$

muestra de manera análoga al caso caso $x = 0$ ($k = 0$) anterior que se valida $\mathbf{GP2}_D$ sin importar el valor de verdad que se elija para x. Notemos que x no puede ser 2 por la condición de neoclasicidad, así nuevamente tenemos dos posibles opciones, $x = 0$ o $x = 1$:

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

Si pedimos que $\vee$ no sea molecular tenemos que la única opción es la segunda, que más adelante mostramos que corresponde al dual de $\wedge$ de la lógica $L3B$. En conclusión, este caso genera lógicas paracompletas genuinas.

2. Si $y = 1$, entonces en la siguiente tabla

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
0	2	2	0
1	1	1	1
2	0	2	0

observamos que para cualquier valuación, $v\left(\neg(\varphi \vee \neg\varphi)\right)$ es siempre no designado y por tanto no se cumple $\mathbf{GP2}_D$. Luego, este caso no genera lógicas paracompletas genuinas.

3. Cuando $y = 2$ el conectivo $\vee$ no es neoclásico, ya que $1 \notin \mathcal{D}$. De donde, esta opción queda descartada.

El lector debe tener en cuenta que no es primordial darle un nombre a las dos lógicas (cuya disyunción es no molecular) obtenidas con el análisis anterior, sin embargo debe tener en mente a las respectivas parejas de conectivos $\neg$ y $\vee$ que generan lógicas paracompletas genuinas con $\vee$ no molecular.

4.2.2. Conjunción paracompleta genuina

Recordemos que la definición de paracompletitud genuina únicamente impone condiciones sobre los conectivos negación y disyunción; así, no contamos con restricción alguna sobre la conjunción. Por tanto, podríamos elegir cualquier conjunción trivaluada para extender las dos lógicas obtenidas en la Sección 4.2.1. Nuevamente si pedimos que $\wedge$ sea extensión conservativa, neoclásica, simétrica y no molecular tenemos una tabla parcial de la conjunción como la Tabla 4.9

$\wedge$	0	1	2
0	0	x	0
1	x	y	z
2	0	z	2

Tabla 4.9: Posibles conjunciones

donde x, y y z son variables. Dado que para tener lógicas paracompletas genuinas el conjunto de valores designados es $\mathcal{D} = \{2\}$ debe ocurrir por neoclasicidad que $x, y, z \in \overline{\mathcal{D}} = \{0, 1\}$. Además no se da el caso $x = y = z = 0$ pues de lo contrario $\wedge$ sería molecular, lo cual no es deseable. Bajo todas estas condiciones, existen siete conjunciones con estas propiedades. Estas son:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	0
2	0	0	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	0
2	0	0	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

De las siete posibilidades para seleccionar una conjunción optamos más adelante por utilizar la función mínimo de dos argumentos (tercera conjunción de la primera fila de las siete anteriores) con la intención de tener una lógica "cercana" a la lógica clásica.

Ahora estamos interesados en observar el comportamiento de los conectivos desde una perspectiva dual al de los conectivos de las lógicas paraconsistentes genuinas $L3A$ y $L3B$. En seguida mostramos un procedimiento que permite visualizar este hecho.

4.3. Las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$

En esta sección definimos formalmente dos lógicas paracompletas genuinas, $L3A^D$ y $L3B^D$ en términos de los conectivos negación, disyunción y conjunción. La justificación de dichas definiciones no sólo radica en que los conectivos seleccionados satisfacen las propiedades habituales que hemos estado manejando a lo largo de toda la tesis, sino que también los mismos son considerados duales a los conectivos de las lógicas paraconsistentes genuinas $L3A$ y $L3B$. Este sentido de dualidad lo explicamos unas líneas mas adelante antes de presentar las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$.

Hasta ahora hemos analizado el comportamiento de los conectivos $\neg$ y $\vee$ que permiten validar tanto $\mathbf{GP1}_D$ como $\mathbf{GP2}_D$. Los conectivos obtenidos en la Sección 4.2.1 satisfacen las siguientes propiedades:

1. El conectivo unario $\neg$ es una extensión conservativa de la negación en lógica clásica.

2. El conectivo binario $\vee$ satisface:

a) Es neoclásico.
b) Es simétrico.
c) Es una extensión conservativa del conectivo bivaluado disyunción en lógica clásica.

los cuales generan cuatro lógicas paracompletas genuinas. Si agregamos la condición de que $\vee$ sea no molecular entonces sólo tenemos dos lógicas paracompletas genuinas. Por otra parte de la Sección 4.2.2 tenemos que para cualesquiera de las siete conjunciones:

3. El conectivo binario $\wedge$ satisface:
   a) Es neoclásico.
   b) Es simétrico.
   c) Es una extensión conservativa del conectivo bivaluado conjunción en lógica clásica.

Un hecho interesante es que podemos obtener las mismas tablas de verdad para la negación, la disyunción y la conjunción de las dos lógicas paracompletas genuinas (cuya disyunción es no molecular) considerando las tablas de verdad de la negación, la conjunción y la disyunción de las lógicas paraconsistentes genuinas $L3A$ y $L3B$ dualizándolas.

Por dualización nos referimos a lo siguiente:

1. Cambiar los valores de verdad, 2 por 0, 0 por 2 y mantener fijo al 1.
2. El conectivo dual de $\neg$ es denotado por él mismo, es decir $\neg^D = \neg$.
3. El conectivo dual de $\wedge$ es $\vee$ (simbólicamente $\wedge^D = \vee$).
4. El conectivo dual de $\vee$ es $\wedge$ (simbólicamente $\vee^D = \wedge$).
5. Reordenar los valores de verdad para mantener el orden 0, 1 y 2.

Este *proceso de dualización* para $L3A$ y $L3B$ se muestra en la Tabla 4.10 y 4.11, respectivamente.

L3A

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	2
2	0

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

φ	$\neg^D\varphi$
2	0
1	0
0	2

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

L3A^D

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	0
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

$\wedge^D$	2	1	0
2	2	2	2
1	2	1	0
0	2	0	0

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

$\vee^D$	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Tabla 4.10: Dualidad entre **L3A** y **L3A**^{D}

L3B

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	1
2	0

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

φ	$\neg^D\varphi$
2	0
1	1
0	2

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

L3B^D

φ	$\neg\varphi$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

$\wedge^D$	2	1	0
2	2	2	2
1	2	0	1
0	2	1	0

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\xrightarrow{\text{dualización}}$

$\vee^D$	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

$\xrightarrow{\text{reordenamiento}}$

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Tabla 4.11: Dualidad entre **L3B** y **L3B**^{D}

Ahora sí, considerando tanto el análisis de los conectivos paracompletos como la dualidad, podemos definir a continuación las dos únicas lógicas paracompletas genuinas en términos de los conectivos $\neg$, $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen las condiciones impuestas al principio de esta sección y que son duales a $L3A$ y $L3B$.

Definición 4.2 ([23]). *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz trivaluada, con conectivos* $\neg$ *y* $\vee$*. La lógica paracompleta genuina trivaluada* $L3A^D$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$L3A^D$

Definición 4.3 ([23]). *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz trivaluada, con conectivos* $\neg$ *y* $\vee$*. La lógica paracompleta genuina trivaluada* $L3B^D$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$L3B^D$

Notemos que la letra D que aparece como superíndice corresponde al hecho de que bajo la dualidad que explicamos antes, las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$ son duales a las lógicas $L3A$ y $L3B$, respectivamente.

4.4. Implicación en las lógicas paracompletas genuinas

Para tener mayor expresión en nuestro lenguaje es posible agregar un conectivo de implicación adecuado para así extender las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$. En esta sección mostramos un análisis de cómo debe ser tal conectivo para que satisfaga las condiciones que a lo largo del trabajo hemos estado pidiendo y puntualizando.

Estamos en busca de implicaciones adecuadas que satisfagan propiedades específicas para extender $L3A^D$ y $L3B^D$ de manera análoga a como se hace en [22] para las lógicas $L3A$ y $L3B$. La Tabla 4.12 muestra la tabla de verdad parcial de la implicación con cuatro valores fijos gracias a la condición de ser una extensión conservativa.

$\to$	0	1	2
0	2	x_1	2
1	x_2	x_3	x_4
2	0	x_5	2

Tabla 4.12: Posibles implicaciones

Analicemos qué sucede con las cinco variables de la Tabla 4.12. Por la naturaleza de las lógicas paracompletas genuinas y el hecho que $\mathcal{D} = \{2\}$, ver Sección 4.2.1, las condiciones en la Definición 1.14 pueden reescribirse como sigue:

Para cualquier valuación v:

Si $v(\varphi) = 2$ y $v(\varphi \to \psi) = 2$, entonces $v(\psi) = 2$; **MP**

$v(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = 2$; **A1**

$v\big((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))\big) = 2.$ **A2**

Supongamos que $\to$ es un conectivo que satisface **MP**, **A1** y **A2**. Notemos que $x_5 \neq 2$ como consecuencia de **MP**, de lo contrario $v(\varphi) = 2$ y $v(\psi) = 1$ implican que $v(\psi) = 2$ lo cual no es posible. Por otra parte supongamos que $v(\varphi) = 2$. Como se satisface **A1**, i.e. $v\left(\varphi \to (\psi \to \varphi)\right) = 2$, por **MP** debemos tener $v(\psi \to \varphi) = 2$, por tanto $x_4 = 2$. Si $x_3 = 1$, entonces $1 \to (1 \to 1) = 1$ lo que contradice **A1**. Por lo tanto, $x_3 \neq 1$. Con esto resulta la siguiente tabla.

$\to$	0	1	2
0	2	x_1	2
1	x_2	0/2	2
2	0	0/1	2

Resta analizar lo que ocurre con x_1 y x_2, pero para esto analicemos las posibilidades acerca de x_5, tenemos que x_5 puede ser 0 o 1.

En el primer caso, si $x_5 = 0$, entonces tenemos lo siguiente:

- Debe ocurrir que $x_2 = 2$, de otra manera **A1** no podría cumplirse cuando $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 2$, en efecto, $2 \overset{\mathbf{A1}}{=} 1 \to (2 \to 1) = 1 \to 0 = x_2$;

- Si $x_1 = 0$, entonces **A2** no se satisface cuando $v(\varphi) = 0$, $v(\psi) = 0$ y $v(\sigma) = 1$, de lo contrario,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathbf{A2}}{=} (0 \to (0 \to 1)) \to ((0 \to 0) \to (0 \to 1)) \\ &= (0 \to 0) \to (2 \to 0) \\ &= 2 \to 0 \\ &= 0; \end{aligned}$$

- Si $x_1 = 1$, entonces **A2** no se cumple para $v(\varphi) = 0$, $v(\psi) = 2$ y $v(\sigma) = 1$, de lo contrario,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathbf{A2}}{=} (0 \to (2 \to 1)) \to ((0 \to 2) \to (0 \to 1)) \\ &= (0 \to 0) \to (2 \to 1) \\ &= 2 \to 0 \\ &= 0; \end{aligned}$$

- Si $x_1 = 2$, $x_3 = 0$, entonces **A2** no se cumple para $v(\varphi) = 1$, $v(\psi) = 0$ y $v(\sigma) = 1$, de lo contrario,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathbf{A2}}{=} (1 \to (0 \to 1)) \to ((1 \to 0) \to (1 \to 1)) \\ &= (1 \to 2) \to (2 \to 0) \\ &= 2 \to 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En el análisis anterior (caso $x_5 = 0$), el primer punto nos asegura que $x_2 = 2$, mientras que los dos puntos siguientes afirman que $x_1 = 2$ y finalmente el último punto descarta una de las dos opciones que puede tomar x_3, de donde $x_3 = 2$. Esto nos deja con una única opción para la implicación, denotada por $\to_0$ dada en la Tabla 4.13. Notemos que esta implicación tiene la característica de ser molecular.

Ahora analicemos qué ocurre en el segundo caso cuando $x_5 = 1$.

- Notemos que $x_3 = 2$, de otra manera **A1** no podría cumplirse cuando $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 2$, en efecto, $2 \overset{\mathbf{A1}}{=} 1 \to (2 \to 1) = 1 \to 1 = x_3$;

- Si $x_1 = 0$, entonces **A2** no se satisface cuando $v(\varphi) = 0$, $v(\psi) = 0$ y $v(\sigma) = 1$, de lo contrario,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathbf{A2}}{=} (0 \to (0 \to 1)) \to ((0 \to 0) \to (0 \to 1)) \\ &= (0 \to 0) \to (2 \to 0) \\ &= 2 \to 0 \\ &= 0; \end{aligned}$$

- Si $x_2 = 1$, entonces **A2** no se cumple para $v(\varphi) = 1$, $v(\psi) = 1$ y $v(\sigma) = 0$, de lo contrario,

$$\begin{aligned} 2 &\overset{\mathbf{A2}}{=} (1 \to (1 \to 0)) \to ((1 \to 1) \to (1 \to 0)) \\ &= (1 \to 1) \to (2 \to 1) \\ &= 2 \to 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

El análisis para $x_5 = 1$ nos asegura con el primer punto que $x_3 = 2$ y con los otros dos puntos restantes se descarta qué valor no puede tomar x_1 y qué valor no puede ser x_2, respectivamente. Esto es, $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 1$ o equivalentemente $x_1 \in \{1, 2\}$ y $x_2 \in \{0, 2\}$ dejándonos con cuatro opciones, estas son $\to_1$, $\to_2$, $\to_3$ y $\to_4$ en la Tabla 4.13. Además dichas implicaciones son no moleculares.

$\to_0$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

$\to_1$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

$\to_2$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\to_3$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\to_4$	0	1	2
0	2	1	2
1	2	2	2
2	0	1	2

Tabla 4.13: Posibles implicaciones para $L3A^D$ y $L3B^D$

En seguida mostramos algunas proposiciones que nos proporcionan características de las implicaciones de la Tabla 4.13. Por construcción sabemos que son extensiones conservativas de la implicación en lógica clásica proposicional, la Proposición 4.1 nos asegura que además los cinco conectivos son implicaciones de acuerdo a la Definición 1.12.

Proposición 4.1. Si extedemos $L3A^D$ y $L3B^D$ con las implicaciones $\to_0$, $\to_1$, $\to_2$, $\to_3$ o $\to_4$, entonces se cumple que:

$$\varphi \models \psi \text{ si y sólo si } \models \varphi \to_i \psi$$

con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Demostración: Probemos la suficiencia, es decir supongamos $\varphi \models \psi$. Notemos que para cualquiera de las cinco implicaciones de la Tabla 4.13 siempre que el antecedente y consecuente son designados la implicación también lo es. Ahora para la necesidad, si suponemos que $\varphi \to_i \psi$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y φ son ambos designados (esto es ambos toman el valor 2), entonces ψ también debe ser designado. □

Las dos proposiciones siguientes indican cuáles implicaciones satisfacen o no la definición de implicación neoclásica (ver Definición 1.13).

Proposición 4.2. Las implicaciones $\to_0$ y $\to_1$ son neoclásicas.

Demostración: De acuerdo con la Definición 1.13 el conectivo $\to$ es una implicación neoclásica si se satisface que $v(\varphi \to \psi) \in \mathcal{D}$ si y sólo si $v(\varphi) \in \overline{\mathcal{D}}$ o $v(\psi) \in \mathcal{D}$; equivalentemente $v(\varphi \to \psi) \in \overline{\mathcal{D}}$ si y sólo si $v(\varphi) \in \mathcal{D}$ y $v(\psi) \in \overline{\mathcal{D}}$. Recordemos además que en las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas tenemos $\mathcal{D} = \{2\}$ y en consecuencia $\overline{\mathcal{D}} = \{0, 1\}$. Sean φ y ψ dos fórmulas y v una valuación. Veamos que $\to_0$ es una implicación neoclásica. De acuerdo a la tabla de verdad de $\to_0$ se tiene que $v(\varphi \to_0 \psi) \in \overline{\mathcal{D}}$ si y sólo si $v(\varphi \to_0 \psi) = 0$ si y sólo si $v(\varphi) = 2$ y $v(\psi) \in \{0, 1\}$.
Utilizando argumentos análogos a los anteriores se demuestra que $\to_1$ también es una implicación neoclásica. □

Proposición 4.3. Las implicaciones $\to_2$, $\to_3$ y $\to_4$ no son neoclásicas.

Demostración: Para demostrar esto basta evidenciar al menos un caso donde falla la definición de implicación neoclásica. Por cada implicación mostramos valores para el antecedente y consecuente de tal forma que se satisface que el antecedente es no designado o el consecuente es designado pero la implicación no es designada.

- Notemos que $\to_2$ no es necoclásica cuando el antecedente toma el valor 0 y el consecuente el valor 1, ya que $v(0 \to_2 1) = 1 \in \overline{\mathcal{D}}$.
- Considerando 1 como antecedente y 0 como consecuente tenemos que $1 \to_3 0 = 0 \in \overline{\mathcal{D}}$, así $\to_3$ no es una implicación neoclásica.
- Finalmente, $\to_4$ no es una implicación neoclásica cuando el antecedente toma el valor 0 y el consecuente el valor 1. $\square$

La siguiente proposición enlista fórmulas que son tautologías en las lógicas $L3A^D_{\to_0}$ y $L3A^D_{\to_1}$.

Proposición 4.4. Si extendemos $L3A^D$ con $\to_0$ o $\to_1$, entonces la lógica que se obtiene tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:

i) $\varphi \to_i (\psi \to_i \varphi)$

ii) $\Big(\varphi \to_i (\psi \to_i \sigma)\Big) \to_i \Big((\varphi \to_i \psi) \to_i (\varphi \to_i \sigma)\Big)$

iii) $(\varphi \wedge \psi) \to_i \varphi$

iv) $(\varphi \wedge \psi) \to_i \psi$

v) $\varphi \to_i \Big(\psi \to_i (\varphi \wedge \psi)\Big)$

vi) $\varphi \to_i (\varphi \vee \psi)$

vii) $\psi \to_i (\varphi \vee \psi)$

viii) $(\varphi \to_i \sigma) \to_i \Big((\psi \to_i \sigma) \to_i ((\varphi \vee \psi) \to_i \sigma)\Big)$

ix) $\Big((\varphi \to_i \psi) \to_i \varphi\Big) \to_i \varphi$

x) $\neg\neg(\varphi \to_i \varphi)$

xi) $\neg\neg\varphi \to_i (\neg\varphi \to_i \psi)$

xii) $(\neg\varphi \to_i \neg\psi) \to_i (\neg\neg\psi \to_i \neg\neg\varphi)$

xiii) $(\neg\neg\psi \to_i \neg\neg\varphi) \to_i (\neg\varphi \to_i \neg\psi)$

xiv) $\Big((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi)\Big) \to_i (\varphi \wedge \neg\varphi)$

xv) $(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow_i \psi$

para $i = 0, 1$.

Demostración: Se sigue de las respectivas tablas de verdad de los conectivos. □

Notemos que en la Proposición 4.4 las fórmulas del i) al viii) son aquellas que definen al fragmento positivo de la lógica intuicionista [32, p. 16], mientras que las fórmulas del i) al ix) definen el fragmento positivo de la lógica clásica [32].

Proposición 4.5. Cualquier extensión de $L3A^D$ con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.13 la siguiente fórmula no es tautología:

$$\neg\neg\varphi \rightarrow_i \varphi$$

con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Demostración: Consideremos la valuación v tal que $v(\varphi) = 1$, y así la fórmula en cuestión no es tautología. □

Una característica relevante en cualquier lógica es que tenga la constante lógica *Falsum*, de hecho cuando hablamos de conectivos ceroarios platicamos del *bottom*, denotado por $\perp$ que siempre designa el valor 0 bajo cualquier valuación y $L3A^D$ lo tiene definido como $\perp := \varphi \wedge \neg\varphi$ para cualquier fórmula φ.

Proposición 4.6. Si extendemos $L3A^D$ con la implicación $\rightarrow_0$, $\rightarrow_1$ o $\rightarrow_3$, entonces para cualquier fórmula φ y cualquier valuación v, el valor de $v(\perp \rightarrow_i \varphi)$ es siempre designado, $i \in \{0, 1, 3\}$.

Demostración: Dado que para cualquier valuación v, se tiene que $v(\perp) = v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$; en consecuencia $v(\perp \rightarrow_i \varphi) = 2 \in \mathcal{D}$, para $i \in \{0, 1, 3\}$. □

Proposición 4.7. Si extendemos $L3B^D$ con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.13, la lógica resultante tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:

i) $\varphi \rightarrow_i (\psi \rightarrow_i \varphi)$

ii) $\neg\neg(\varphi \rightarrow_i \varphi)$

iii) $\neg\neg\varphi \rightarrow_i \varphi$

iv) $\neg\neg(\varphi \to_i \psi) \to_i (\neg\neg\varphi \to_i \neg\neg\psi)$

v) $(\neg\neg\varphi \to_i \neg\neg\psi) \to_i \neg\neg(\varphi \to_i \psi)$

vi) $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to_i (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Demostración: Se sigue directamente de las tablas de verdad de los conectivos.

$\square$

Proposición 4.8. En ninguna de las extensiones de $L3B^D$ con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.13 las fórmulas siguientes son tautologías:

i) $(\varphi \vee \neg\varphi) \to_i \psi$

ii) $\Big((\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg(\varphi \vee \neg\psi)\Big) \to_i (\varphi \vee \neg\varphi)$

para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Demostración: Para la fórmula i) basta considerar la valuación v tal que $v(\varphi) = v(\psi) = 0$, mientras que para la fórmula ii) es suficiente con tomar la valuación v donde $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 0$. $\square$

Consideremos la partícula $\bot := \neg\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi)$, para cualquier fórmula φ.

Proposición 4.9. Si extendemos $L3B^D$ con la implicación $\to_0$, $\to_1$ o $\to_3$, entonces para cualquier fórmula φ, el valor de $\bot \to_i \varphi$ es siempre designado, $i \in \{0, 1, 3\}$.

4.5. Las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$

En esta sección presentamos las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$ que son las extensiones de las lógicas $L3A^D$ y $L3B^D$ mediante la implicación $\to_1$. Dichas lógicas resultan ser paracompletas genuinas trivaluadas con un conectivo de implicación no molecular que satisface propiedades como las presentadas en las Proposiciones 4.1, 4.2, 4.4, 4.6, 4.7 y 4.9. En las Tablas 4.10 y 4.11 hemos mostrado el proceso de dualización de $L3A$ y $L3B$, es decir, hemos visto cuáles son las tablas de verdad duales de los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ que definen a $L3A^D$ y $L3B^D$. Resta decidirnos por alguno de los conectivos de implicación de la Tabla 4.13. Nuestra elección es $\to_1$ por ser necoclásica y no molecular. En seguida mostramos formalmente las definiciones de las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$.

Definición 4.4. *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz con conectivos* $\neg, \vee$, $\wedge$ *y* $\to$*. La lógica paracompleta genuina trivaluada* $L3A^D_{\to_1}$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

$L3A^D_{\to_1}$

Definición 4.5. *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0,1,2\}, \{2\}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz con conectivos* $\neg$, $\vee$, $\wedge$ *y* $\to$*. La lógica paracompleta genuina trivaluada* $L3B^D_{\to_1}$ *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

$L3B^D_{\to_1}$

Nota. La lógica $L3A^D_{\to_1}$ extiende a $L3A^D$. De manera similar, $L3B^D_{\to_1}$ extiende a $L3B^D$.

En este capítulo primero nos dedicamos a presentar dos formulaciones del *Principio del tercero excluso* y mostramos que son independientes con motivo de definir el concepto de *lógicas paracompletas genuinas*. Luego discutimos qué tipo de conectivos (negación y disyunción) permiten generar este tipo de lógicas y cumplen con ciertas características. Después buscamos una conjunción adecuada para tener un conectivo más en el lenguaje. Debido a que la definición de paracompletitud genuina no impone restricciones sobre la conjunción, nos quedamos con siete posibilidades. Antes de elegir una conjunción, presentamos una dualidad entre los conectivos paraconsistentes genuinos y paracompletos genuinos; dando como resultado la definición formal de las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas, $L3A^D$ y $L3B^D$ en términos de negación, disyunción y conjunción. Estas dos lógicas son duales a $L3A$ y $L3B$, respectivamente. Luego, buscamos una implicación apropiada para extender a $L3A^D$ y $L3B^D$. De nuestras cinco implicaciones posibles, antes de declinarnos por una, damos una serie de proposiciones que indican propiedades y fórmulas que se satisfacen o no en dichas implicaciones. Finalmente, elegimos una implicación con base a que es la única que satisface la propiedad de ser neoclásica y no molecular. Este hecho nos condujo a las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$ que extienden, respectivamente a $L3A^D$ y $L3B^D$.

Capítulo 5

Axiomatizaciones de las lógicas paracompletas genuinas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$

En lógica, dentro del enfoque de teoría de prueba, un *sistema tipo Hilbert* o *cálculo de Hilbert*[5] es un tipo de sistema de deducción formal atribuido a Frege Gottlob y David Hilbert [42]. Este tipo de sistemas se caracteriza por poseer un gran número de esquemas de axiomas y un pequeño conjunto de reglas de inferencias. Recordemos que en la Sección 3.4 hemos definido formalmente un sistema tipo Hilbert y una regla de inferencia (consultar las Definiciones 3.9 y 3.8, respectivamente).

En este capítulo proveemos de sistemas axiomáticos tipo Hilbert a las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$ que dimos respectivamente en la Definición 4.4 y 4.5, a finales del Capítulo 4. Comenzamos por $L3A^D_{\to_1}$.

Antes de continuar, recordemos que la implicación seleccionada para extender tanto a $L3A^D$ como a $L3B^D$ es $\to_1$ dando lugar a las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$, respectivamente. A partir de aquí y en adelante con el propósito de no abrumar la notación en cada fórmula, en cada resultado o mención que involucre al conectivo $\to_1$ de $L3A^D_{\to_1}$ y de $L3B^D_{\to_1}$ lo denotaremos simplemente por $\to$ sin hacer hincapié en que se trata de la implicación 1 de la Tabla 4.13; de hecho el subíndice únicamente aparece en el nombre de las lógicas y en el nombre de sus respectivas axiomáticas.

[5] También llamado *sistema deductivo estilo Hilbert* o *sistema de Hilbert-Ackermann.*

5.1. Un sistema axiomático para $L3A^D_{\to_1}$

Hasta este punto únicamente hemos definido y estudiado algunas propiedades de $L3A^D_{\to_1}$ dentro del enfoque de teoría de modelos. Ahora llegó el momento de contrastar la parte semántica con la axiomática. En esta sección primero proponemos una teoría formal axiomática, después demostramos ciertas propiedades básicas en ella y finalmente, exponemos una serie de resultados necesarios para probar que la axiomática dada es robusta y completa con respecto a la lógica $L3A^D_{\to_1}$.

5.1.1. La teoría formal axiomática y algunas de sus propiedades

Sea $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$ una teoría formal axiomática para $L3A^D_{\to_1}$ construida por los conectivos primitivos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\to$. Donde $\neg$ es un conectivo unario y $\vee$, $\wedge$ e $\to$ son binarios. Además de los conectivos primitivos y con la intención de simplificar la escritura y facilitar la comprensión, tomamos en consideración los siguientes conectivos unarios $\sim$, G', N' y D' definidos como: $\sim\varphi := \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$; $G'(\varphi) := \neg\varphi$; $N'(\varphi) := \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ y $D'(\varphi) := \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$ o aún más simple $D'(\varphi) := \neg \sim \varphi$. También utilizamos el conectivo binario $\leftrightarrow$ definido como $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Las fórmulas bien formadas se construyen de manera usual, *Modus Ponens* (**MP**) es la única regla de inferencia y los esquemas de axioma son:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Pos1}: && \varphi \to (\psi \to \varphi)\\
&\textbf{Pos2}: && \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big)\\
&\textbf{Pos3}: && (\varphi \wedge \psi) \to \varphi\\
&\textbf{Pos4}: && (\varphi \wedge \psi) \to \psi\\
&\textbf{Pos5}: && \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big)\\
&\textbf{Pos6}: && \varphi \to (\varphi \vee \psi)\\
&\textbf{Pos7}: && \psi \to (\varphi \vee \psi)\\
&\textbf{Pos8}: && \Big(\varphi \to \sigma\Big) \to \Big((\psi \to \sigma) \to \big((\varphi \vee \psi) \to \sigma\big)\Big)\\
&\textbf{Pos9}: && (\varphi \to \psi) \vee \varphi\\
&\textbf{REM}: && \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\textbf{EXP}: &\quad \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)\\
\textbf{ENN}: &\quad \neg\neg\varphi \leftrightarrow \sim \neg\varphi\\
\textbf{ENC}: &\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)\\
\textbf{END}: &\quad \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Big((\sim \varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \psi)\Big)\\
\textbf{ENI}: &\quad \neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}$$

Con $\Lambda \vdash \lambda$ indicamos que existe una deducción de la fórmula λ a partir de la teoría Λ, cuando $\Lambda = \emptyset$ escribimos $\vdash \lambda$ o simplemente λ, lo que significa que podemos demostrar λ sin hipótesis. También escribimos $\Lambda, \varphi \vdash \psi$ para representar $\Lambda \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Presentamos a continuación algunas propiedades generales que se satisfacen en la teoría formal axiomática $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$, de manera análoga como ocurre en las lógicas paraconsistentes genuinas en el Teorema 3.2.

Teorema 5.1. *Sean Γ, Δ teorías y φ, ψ fórmulas bien formadas arbitrarias. Las siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$:*

Monotonía	*si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$.*
Teorema de la deducción	*$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*
Corte	*si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta, \varphi \vdash \psi$, entonces $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.*
Reglas-AND	*$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$.*
Prueba extra-fuerte por casos	*$\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \psi$.*

Antes de comenzar con la demostración del Teorema 5.1 aclaremos que en la Seccción 3.4 no damos la demostración del Teorema 3.2 porque no es relevante ya que la podemos consultar en [24]. En cambio la prueba del Teorema 5.1 sí tiene importancia porque se trata de dar a conocer el funcionamiento de la axiomática propuesta. Cabe mencionar que el Teorema 3.2 también presenta propiedades similares a las del Teorema 5.1 pero para la lógica $L3A_G$. Particularmente, cuenta con la propiedad llamada ***prueba fuerte por casos*** que no es válida en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$, razón por la cual recurrimos a la última propiedad que decidimos llamar ***prueba extra-fuerte por casos***.

Demostración:

Monotonía (Mon). Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$, entonces existe una deducción $\mathscr{D} = d_1, d_2, ..., d_n$ de φ de tal forma que tiene como hipótesis elementos de Γ. Es posible construir una deducción $\mathscr{D}' = d'_1, d'_2, ..., d'_m$ de φ que además de incluir los elementos d_i, $i \in \{1, ..., n\}$ incluye como hipótesis elementos de Δ. De donde $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$.

Teorema de la deducción (TD). Para la suficiencia basta notar que debido a que en $\mathbb{L}_{L3A^{D}_{\rightarrow_1}}$ se tienen los axiomas **Pos1**, **Pos2** y a *Modus Ponens* como la única regla de inferencia es posible realizar una demostración de $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ a partir de $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ de manera idéntica a como se hace en [30].
Resta probar la necesidad. Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ y que se tienen como hipótesis a Γ y φ. Dado que φ forma parte de las hipótesis se sigue que $\vdash \varphi$ y por **Mon**, $\Gamma \vdash \varphi$. Así al aplicar *Modus Ponens* a $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ y $\Gamma \vdash \varphi$ obtenemos $\Gamma \vdash \psi$. Finalmente, por **Mon** concluimos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Corte. Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$, $\Delta, \varphi \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \Delta$ como hipótesis. Existe una deducción $\mathscr{D}(\varphi) = d_1, d_2, ..., d_k$ de φ que tiene como hipótesis elementos de Γ. También existe una deducción de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\mathscr{D} = d'_1, d'_2, ..., \varphi, ..., d'_n$. Luego podemos sustituir a φ por su deducción y obtenemos la deducción $\mathscr{D}' = d'_1, d'_2, ..., d_1, d_2, ..., d_k, ..., d_n$ que es una deducción de ψ que tiene como hipótesis elementos de $\Gamma \cup \Delta$, es decir, $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Reglas-AND (R-AND). Supongamos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Aplicando monotonía a los axiomas **Pos3** y **Pos4** obtenemos $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ y $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$, respectivamente. Por lo supuesto y *Modus Ponens* concluimos que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$. Ahora supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$. Usando **Pos5** y **Mon** tenemos $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \Big(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)\Big)$ y aplicando dos veces *Modus Ponens* adecuadamente con nuestros supuestos obtenemos lo deseado, esto es, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$.

Prueba extra-fuerte por casos (PEFC). Supongamos $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \psi$. Usando **TD** tenemos que $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ y $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \psi$. Luego, aplicando el esquema de axioma **Pos8** y **Mon** tenemos $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Big((\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi)\Big)$ y aplicando *Modus Ponens* con $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$, se sigue que $\Gamma \vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi)$. Nuevamente aplicando *Modus Ponens* a esto último con $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \psi$, se tiene $\Gamma \vdash (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$. Por otra parte

utilizando **Mon** y **REM**, $\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$. En conclusión, $\Gamma \vdash \psi$ por medio de *Modus Ponens*.
Si suponemos que $\Gamma \vdash \psi$, entonces por **Mon** $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \psi$. $\square$

El Lema 5.1 que presentamos a continuación es una lista de propiedades que se satisfacen en la teoría $\mathbb{L}_{L3A^{\mathcal{D}}_{\to_1}}$, de modo particular los incisos t), v), w) y el axioma **Pos9** sugieren que $\sim$ se comporta como la negación clásica, basta con tomar en **Pos9** a ψ como $\varphi \wedge \neg\varphi$ para obtener $\sim \varphi \vee \varphi$ recuperando de algún modo la ley del tercero excluso. Semánticamente podemos ver en la Tabla 5.2 que $\sim$ es una **negación neoclásica** ya que $v(\varphi) \in \mathcal{D}$ si y sólo si $v(\sim \varphi) \notin \mathcal{D}$.

También desde el punto de vista semántico las tablas de verdad de los conectivos G', N' y D', ver Tabla 5.2 muestran que estos conectivos funcionan como identificadores de los valores de verdad en el sentido de valuar 2 únicamente en un caso específico y 0 en caso contrario. De este modo G' identifica al valor 0, N' al valor 1 y D' al valor 2. Con esto en mente se puede tener una lectura intuitiva desde el punto de vista semántico, de la propiedad o) del Lema 5.1 y las fórmulas presentadas en el Lema 5.2.

φ	$\sim \varphi$	$G'(\varphi)$	$N'(\varphi)$	$D'(\varphi)$
0	2	2	0	0
1	2	0	2	0
2	0	0	0	2

Tabla 5.2: Conectivos $\sim$, G', N' y D' de $L3A^{\mathcal{D}}_{\to_1}$

El conectivo binario $\leftrightarrow$ se utiliza en los axiomas **ENN, ENC, END** y **ENI** para indicar que son válidas ambas implicaciones. Más aún, identificamos sólo una de las implicaciones mediante la notación $\underleftarrow{\textbf{ENX}}$ o $\underrightarrow{\textbf{ENX}}$ según sea el caso, donde **X** puede ser **N**, **C**, **D** e **I**. Semánticamente podemos ver que este conectivo es simétrico, extensión conservativa y cumple:

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{D} \text{ si y sólo si } v(\varphi), v(\psi) \in \mathcal{D} \text{ o } v(\varphi), v(\psi) \notin \mathcal{D}$$

es así que se puede utilizar para determinar si dada una pareja de fórmulas se cumple que ambas sean designadas o no designadas o es el caso de que una lo sea y la otra no.

Antes de presentar el Lema 5.1 aclaremos la forma en la que presentamos las demostraciones tanto de dicho lema como la de los posteriores en este capítulo. La estructura es la siguiente:

- En el lado izquierdo mostramos las líneas numeradas que conforman la demostración.
- En el lado derecho indicamos la o las razones por las cuáles se obtiene la fórmula de la izquierda correspondiente a ese renglón. Estas indicaciones las hacemos mediante los nombres de los esquemas de axioma (**Pos1**, **Pos4**, **EXP**, etc.), algunas de las abreviaciones dadas en el Teorema 5.1, la regla de inferencia **MP**, referencias a incisos previos y si usamos o no la forma abreviada de los conectivos $\sim$, G', N' y D'. Además cuando ponemos entre paréntesis uno o dos números, estos hacen referencia a la o las líneas que se toman para la aplicación de la propiedad en cuestión.

Ponemos énfasis en que con $\vdash \phi$ denotamos que la fórmula ϕ es demostrable. En las demostraciones cuando suponemos que ϕ es una hipótesis, escribimos $\vdash \phi$. Esto es consistente con que ϕ es demostrable, de hecho su demostración es ella misma.

Lema 5.1. Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, σ y ξ en la teoría $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

b) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \sigma$, entonces $\vdash \varphi \to \sigma$

c) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \sigma \to \psi$, entonces $\vdash (\varphi \vee \sigma) \to \psi$

d) $\varphi \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

e) Si $\sim \varphi \vdash \psi$ y $\neg \sim \varphi \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$

f) $\sim \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ equivalentemente $\sim \varphi, \neg\neg\varphi \vdash N'(\varphi)$

g) $\vdash \big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)$

h) $\vdash (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

i) $\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$

j) $\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$

k) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$

l) $\neg\varphi, \varphi \vdash \psi$

m) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\sigma \vdash \xi$, entonces $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$

n) $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\varphi, \psi \vdash \sigma$

o) Si $G'(\varphi) \vdash \psi$, $N'(\varphi) \vdash \psi$ y $D'(\varphi) \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$

p) $\vdash \varphi \to \neg \sim \varphi$ equivalentemente $\vdash \varphi \to D'(\varphi)$

q) $\vdash \neg \sim \varphi \to \varphi$ equivalentemente $\vdash D'(\varphi) \to \varphi$

r) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$

s) $\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$

t) $\sim \varphi, \varphi \vdash \psi$

u) $\neg\varphi \vdash \sim \varphi$

v) $\varphi \vdash \sim\sim \varphi$

w) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$

x) $\varphi \vdash \sim \neg\varphi$

y) $\neg \sim \varphi \vdash \sim \neg\varphi$ equivalentemente $D'(\varphi) \vdash \sim \neg\varphi$

z) $N'(\varphi) \vdash \sim \varphi$

aa) $N'(\varphi), \varphi \vdash \psi$

ab) $\neg\neg \sim \varphi \vdash \sim \varphi$ equivalentemente $\neg D'(\varphi) \vdash \sim \varphi$

ac) $\varphi, \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \sigma$

ad) $\psi, \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \sigma$

ae) $\sim \varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$

af) $\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$

ag) $N'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$

ah) $\sim \varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$

ai) $\neg \sim \varphi \vdash \neg\neg\varphi$ equivalentemente $D'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$

aj) $\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$

ak) $\sim \psi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$

Demostración:

a) $\vdash \boldsymbol{\varphi \to \neg\neg\varphi}$.

1.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**EXP**
2.	$\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	**TD(1)**
3.	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**TD(2)**
4.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	Reflexividad
5.	$\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**Mon(4)**
6.	$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**PEFC(3,5)**
7.	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	**TD(6)**

b) Si $\vdash \boldsymbol{\varphi \to \psi}$ **y** $\vdash \boldsymbol{\psi \to \sigma}$, **entonces** $\vdash \boldsymbol{\varphi \to \sigma}$.

1.	$\vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \psi \to \sigma$	Hipótesis
3.	$\varphi \vdash \psi$	**TD(1)**
4.	$\psi \vdash \sigma$	**TD(2)**
5.	$\varphi \vdash \sigma$	**Corte(3,4)**
6.	$\vdash \varphi \to \sigma$	**TD(5)**

c) Si $\vdash \boldsymbol{\varphi \to \psi}$ y $\vdash \boldsymbol{\sigma \to \psi}$, entonces $\vdash \boldsymbol{(\varphi \lor \sigma) \to \psi}$.

1.	$\vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \sigma \to \psi$	Hipótesis
3.	$\vdash (\varphi \to \psi) \to \Big((\sigma \to \psi) \to \big((\varphi \lor \sigma) \to \psi\big)\Big)$	**Pos8**
4.	$\vdash (\sigma \to \psi) \to \big((\varphi \lor \sigma) \to \psi\big)$	**MP(1,3)**
5.	$\vdash (\varphi \lor \sigma) \to \psi$	**MP(2,4)**

d) $\boldsymbol{\varphi \vdash \varphi \land \neg(\varphi \land \neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\varphi \lor \neg\neg\varphi$	**REM**
3.	$\vdash (\neg\varphi \lor \neg\neg\varphi) \to \neg(\varphi \land \neg\varphi)$	$\underleftarrow{\textbf{ENC}}$
4.	$\vdash \neg(\varphi \land \neg\varphi)$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \varphi \to \Big(\neg(\varphi \land \neg\varphi) \to \big(\varphi \land \neg(\varphi \land \neg\varphi)\big)\Big)$	**Pos5**
6.	$\vdash \neg(\varphi \land \neg\varphi) \to \big(\varphi \land \neg(\varphi \land \neg\varphi)\big)$	**MP(1,5)**
7.	$\vdash \varphi \land \neg(\varphi \land \neg\varphi)$	**MP(4,6)**
8.	$\varphi \vdash \varphi \land \neg(\varphi \land \neg\varphi)$	1-7

e) Si $\boldsymbol{\sim\varphi \vdash \psi}$ y $\boldsymbol{\neg\sim\varphi \vdash \psi}$, entonces $\boldsymbol{\vdash \psi}$.

1.	$\neg\sim\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\neg\big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \vdash \psi$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg\big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \rightarrow \psi$	**TD(2)**
4.	$\vdash \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \rightarrow \neg\big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
5.	$\vdash \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \rightarrow \psi$	Lema 5.1-b) (3,4)
6.	$\varphi \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	Lema 5.1-d)
7.	$\vdash \varphi \rightarrow \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	**TD(6)**
8.	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	Lema 5.1-b) (5,7)
9.	$\sim\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
10.	$\vdash \sim\varphi \rightarrow \psi$	**TD(9)**
11.	$\vdash \big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \rightarrow \psi$	Abrev. $\sim$ (10)
12.	$\vdash \Big(\big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \vee \varphi\Big) \rightarrow \psi$	Lema 5.1-c) (8,11)
13.	$\vdash \big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \vee \varphi$	**Pos9**
14.	$\vdash \psi$	**MP(12,13)**

f) $\boldsymbol{\sim\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \sim\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\neg\varphi$	Hipótesis
3.	$\vdash \sim\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	**R-AND (1,2)**
4.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \Big((\sim\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\neg\varphi)\Big)$	**Pos6**
5.	$\vdash \Big((\sim\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\neg\varphi)\Big) \rightarrow \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$\underleftarrow{\textbf{END}}$
6.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	Lema 5.1-b) (4,5)
7.	$\vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	**MP(3,6)**
8.	$\sim\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	1-7

g) $\boldsymbol{\big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)}$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to (\psi \to \sigma)$	Hipótesis
3.	$\vdash \psi$	Hipótesis
4.	$\vdash \psi \to \sigma$	**MP(1,2)**
5.	$\vdash \sigma$	**MP(3,4)**
6.	$\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \sigma$	1-5
7.	$\psi, \varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \varphi \to \sigma$	**TD(6)**
8.	$\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$	**TD(7)**
9.	$\vdash \big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)$	**TD(8)**

h) $\boldsymbol{(\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)}$.

1.	$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	**Pos1**
2.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	**EXP**
3.	$\vdash \big(\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)\big) \to$ $\big(\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)\big)$	Lema 5.1-g)
4.	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi$	Hipótesis
6.	$\vdash \neg\neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	Lema 5.1-b) (4,5)
7.	$\vdash (\neg\psi \lor \neg\neg\psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	Lema 5.1-c) (1,6)
8.	$\vdash \neg\psi \lor \neg\neg\psi$	**REM**
9.	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	**MP(7,8)**
10.	$\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	1-9
11.	$\vdash (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	**TD(10)**

i) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$.

1.		$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	**Pos1**
2.		$\vdash \neg\psi \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	**EXP**
3.		$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Hipótesis
4.		$\vdash \neg\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	Lema 5.1-b) (2,3)
5.		$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	Lema 5.1-c) (1,4)
6.		$\vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	**REM**
7.		$\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi$	**MP(5,6)**
8.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	$\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi$	1-7
9.		$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	**TD(8)**

j) $\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$.

Se sigue del inciso a) previo, tomando φ como $\neg\varphi$.

k) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$.

1.		$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Hipótesis
2.		$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$	**Pos4**
3.		$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \varphi$	**Pos3**
4.		$\vdash \neg\varphi$	**MP(1,2)**
5.		$\vdash \varphi$	**MP(1,3)**
6.		$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**EXP**
7.		$\vdash \neg\varphi \to \psi$	**MP(5,6)**
8.		$\vdash \psi$	**MP(4,7)**
9.	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\vdash \psi$	1-8
10.		$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	**TD(9)**

l) $\neg\varphi, \varphi \vdash \psi$.

1.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
3.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**EXP**
4.	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \psi$	**MP(1,4)**
6.	$\neg\varphi, \varphi \vdash \psi$	1-5

m) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\sigma \vdash \xi$, entonces $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$.

1.	$\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\sigma \vdash \xi$	Hipótesis
3.	$\varphi \wedge \sigma \vdash \varphi$	**Pos3, TD**
4.	$\varphi \wedge \sigma \vdash \sigma$	**Pos4, TD**
5.	$\varphi \wedge \sigma \vdash \psi$	**Corte(1,3)**
6.	$\varphi \wedge \sigma \vdash \xi$	**Corte(2,4)**
7.	$\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$	**R-AND(5,6)**

n) $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\varphi, \psi \vdash \sigma$.

Si $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$, entonces $\varphi, \psi \vdash \sigma$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \psi$	Hipótesis
3.	$\vdash \psi \to (\varphi \wedge \psi)$	**MP(Pos5,1)**
4.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \sigma$	$\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$
6.	$\varphi, \psi \vdash \sigma$	1-5

Si $\varphi, \psi \vdash \sigma$, entonces $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$.

1.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi$	**MP(Pos3,1)**
3.	$\vdash \psi$	**MP(Pos4,1)**
4.	$\vdash \sigma$	$\varphi, \psi \vdash \sigma$
5.	$\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$	1-4

o) Si $\boldsymbol{G'(\varphi) \vdash \psi}$, $\boldsymbol{N'(\varphi) \vdash \psi}$ y $\boldsymbol{D'(\varphi) \vdash \psi}$, entonces $\boldsymbol{\vdash \psi}$.

En otros términos tenemos que la afirmación es:

Si $\boldsymbol{\neg\varphi \vdash \psi}$, $\boldsymbol{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \psi}$ y $\boldsymbol{\neg \sim \varphi \vdash \psi}$, entonces $\boldsymbol{\vdash \psi}$.

1.	$\neg\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\sim \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$	**Mon(1)**
3.	$\sim \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	Lema 5.1-f)
4.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \psi$	Hipótesis
5.	$\sim \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \psi$	**Corte(3,4)**
6.	$\sim \varphi \vdash \psi$	**PEFC(2,5)**
7.	$\neg \sim \varphi \vdash \psi$	Hipótesis
8.	$\vdash \psi$	Lema 5.1-e) (6,7)

p) $\boldsymbol{\vdash \varphi \to \neg \sim \varphi}$.

1.	$\varphi \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	Lema 5.1-d)
2.	$\vdash \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \to \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
3.	$\big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \vdash \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	**TD(2)**
4.	$\varphi \vdash \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	**Corte(1,3)**
5.	$\varphi \vdash \neg \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash \varphi \to \neg \sim \varphi$	**TD(5)**

q) $\vdash \neg \sim \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg\big(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \to \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
4.	$\vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \big(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\big) \to \varphi$	**Pos3**
6.	$\vdash \varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\neg \sim \varphi \vdash \varphi$	1-6
8.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \varphi$	**TD(7)**

r) $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{\varphi} \to \neg\boldsymbol{\varphi}$.

1.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi$	Lema 5.1-a)
2.	$\vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi)$	Lema 5.1-h)
3.	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	**MP(1,2)**

s) $\vdash (\neg\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}) \to (\neg\boldsymbol{\psi} \to \neg\neg\boldsymbol{\varphi})$.

1.	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \psi \to \neg\neg\psi$	Lema 5.1-a)
3.	$\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\psi$	Lema 5.1-b) (1,2)
4.	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	Lema 5.1-i)
5.	$\vdash \neg\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash \neg\psi \to \neg\neg\neg\psi$	Lema 5.1-j)
7.	$\vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$	Lema 5.1-b) (5,6)
8.	$\neg\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$	1-7
9.	$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$	**TD(8)**

t) $\boldsymbol{\sim \varphi, \varphi \vdash \psi}$.

1.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
4.	$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	Lema 5.1-k)
6.	$\vdash \psi$	**MP(4,5)**
7.	$\sim \varphi, \varphi \vdash \psi$	1-6

u) $\boldsymbol{\neg\varphi \vdash \sim \varphi}$.

1.	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 5.1-l)
2.	$\neg\varphi \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	**TD(1)**
3.	$\neg\varphi \vdash \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (2)

v) $\boldsymbol{\varphi \vdash \sim\sim \varphi}$.

1.	$\sim \varphi, \varphi \vdash \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi$	Lema 5.1-t)
2.	$\varphi \vdash \sim \varphi \to (\sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi)$	**TD(1)**
3.	$\varphi \vdash \sim\sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (2)

w) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
3.	$\vdash \sim \psi$	Hipótesis
4.	$\vdash \psi$	**MP(1,2)**
5.	$\vdash \psi \wedge \sim \psi$	**R-AND(3,4)**
6.	$\varphi, \varphi \to \psi, \sim \psi \vdash \psi \wedge \sim \psi$	1-5
7.	$\psi, \sim \psi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 5.1-t)
8.	$\psi \wedge \sim \psi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 5.1-n) (7)
9.	$\varphi, \varphi \to \psi, \sim \psi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**Corte(6,8)**
10.	$\varphi \to \psi, \sim \psi \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	**TD(9)**
11.	$\varphi \to \psi, \sim \psi \vdash \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (10)
12.	$\varphi \to \psi \vdash \sim \psi \to \sim \varphi$	**TD(11)**
13.	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$	**TD(12)**

x) $\varphi \vdash \sim \neg\varphi$.

1.	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	Lema 5.1-l)
2.	$\varphi \vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD(1)**
3.	$\varphi \vdash \sim \neg\varphi$	Abrev. $\sim$ (2)

y) $\neg \sim \varphi \vdash \sim \neg\varphi$.

1.	$\neg \sim \varphi \vdash \varphi$	**TD(**Lema 5.1-q)**)**
2.	$\varphi \vdash \sim \neg\varphi$	Lema 5.1-x)
3.	$\neg \sim \varphi \vdash \sim \neg\varphi$	**Corte(1,2)**

z) $\boldsymbol{N'(\varphi) \vdash \sim \varphi}$.

1.	$\vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	Hipótesis-Abrev. $N'(\varphi)$
2.	$\vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow$ $(\sim \varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \neg\varphi)$	$\underrightarrow{\textbf{END}}$
3.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \neg\varphi)$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \sim \varphi$	**Pos3**
5.	$\sim \neg\varphi, \neg\varphi \vdash \sim \varphi$	Lema 5.1-t)
6.	$\neg\varphi \wedge \sim \neg\varphi \vdash \sim \varphi$	Lema 5.1-n) (5)
7.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \sim \varphi) \rightarrow \sim \varphi$	**TD(6)**
8.	$\vdash \big((\sim \varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \neg\varphi)\big) \rightarrow \sim \varphi$	Lema 5.1-c) (4,7)
9.	$\vdash \sim \varphi$	**MP(3,8)**
10.	$N'(\varphi) \vdash \sim \varphi$	1-9

aa) $\boldsymbol{N'(\varphi), \varphi \vdash \psi}$.

1.	$N'(\varphi) \vdash \sim \varphi$	Lema 5.1-z)
2.	$N'(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$N'(\varphi), \varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**TD(2)**
4.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$	Lema 5.1-k)
5.	$\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi$	**TD(2)**
6.	$N'(\varphi), \varphi \vdash \psi$	**Corte(3,5)**

ab) $\neg\neg\sim\varphi \vdash \sim\varphi$.

1.	$\vdash \neg\neg\sim\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\neg\sim\varphi \to \sim\neg\sim\varphi$	$\underrightarrow{\mathbf{ENN}}$
3.	$\vdash \sim\neg\sim\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \neg\sim\varphi \to (\neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi)$	Abrev. $\sim$ (3)
5.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
6.	$\vdash \varphi \to \neg\sim\varphi$	Lema 5.1-p) (5)
7.	$\vdash \neg\sim\varphi$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi$	**MP(4,7)**
9.	$\vdash (\neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi) \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	Lema 5.1-k)
10.	$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**MP(8,9)**
11.	$\neg\neg\sim\varphi, \varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	1-10
12.	$\neg\neg\sim\varphi \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	**TD(11)**
13.	$\neg\neg\sim\varphi \vdash \sim\varphi$	Abrev. $\sim$ (12)

ac) $\boldsymbol{\varphi, \sim(\varphi \vee \psi) \vdash \sigma}$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	**Pos6**
3.	$\vdash \varphi \vee \psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Hipótesis-Abrev. $\sim(\varphi \vee \psi)$
5.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	**Pos4**
7.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \sigma\big)$	**EXP**
9.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \psi$	**MP(3,8)**
10.	$\vdash \sigma$	**MP(7,9)**
11.	$\varphi, \sim(\varphi \vee \psi) \vdash \sigma$	1-10

ad) $\boldsymbol{\psi, \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \sigma}$.

1.	$\vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$	**Pos7**
3.	$\vdash \varphi \vee \psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Hipótesis-Abrev. $\sim (\varphi \vee \psi)$
5.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	**Pos4**
7.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \sigma\big)$	**EXP**
9.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \psi$	**MP(3,8)**
10.	$\vdash \sigma$	**MP(7,9)**
11.	$\psi, \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \sigma$	1-10

ae) $\boldsymbol{\sim \varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	Hipótesis-Abrev. $\sim \varphi$
2.	$\vdash \psi \to (\psi \wedge \neg\psi)$	Hipótesis-Abrev. $\sim \psi$
3.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
4.	$\vdash (\psi \wedge \neg\psi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
5.	$\vdash \varphi \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (1,3)
6.	$\vdash \psi \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (2,4)
7.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-c) (5,6)
8.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\sim \varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	1-8

af) $\boldsymbol{\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\neg\psi$	Hipótesis
3.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$	$\underrightarrow{\textbf{ENN}}$
4.	$\vdash \neg\neg\psi \to \sim \neg\psi$	$\underrightarrow{\textbf{ENN}}$
5.	$\vdash \sim \neg\varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\vdash \sim \neg\psi$	**MP(2,4)**
7.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Abrev. $\sim$ (5)
8.	$\vdash \neg\psi \to (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	Abrev. $\sim$ (6)
9.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\psi$	**Pos4**
10.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \neg\psi) \to (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	Lema 5.1-b) (8,9)
11.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \sim \psi) \to \neg\varphi$	**Pos3**
12.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \sim \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Lema 5.1-b) (7,11)
13.	$\vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \to$ $\big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
14.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to$ $\big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
15.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \neg\psi) \to$ $\big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (10,13)
16.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \sim \psi) \to$ $\big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (12,14)
17.	$\vdash \big((\sim \varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \psi)\big) \to$ $\big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-c) (15,16)
18.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to$ $\big((\sim \varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim \psi)\big)$	$\underrightarrow{\textbf{END}}$
19.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (17,18)
20.	$\vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (19)
21.	$\vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	$\underleftarrow{\textbf{ENN}}$
22.	$\vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(20,21)**
23.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	1-22

ag) $\boldsymbol{N'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi}$.

1.	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	**Pos7**
2.	$\vdash \big(\neg\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)\big) \to \big(\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi\big)$	Lema 5.1-s)
3.	$\vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash N'(\varphi) \to \neg\neg\varphi$	Abrev. N' (3)
5.	$N'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$	**TD(4)**

ah) $\boldsymbol{\sim \varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	Hipótesis
4.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	**Pos3**
5.	$\vdash \varphi$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**MP(2,5)**
7.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
8.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(6,7)**
9.	$\sim \varphi, \varphi \wedge \psi \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-8
10.	$\sim \varphi \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	**TD(9)**
11.	$\sim \varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (10)

ai) $\boldsymbol{\neg \sim \varphi \vdash \neg\neg\varphi}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \sim \neg\varphi$	Lema 5.1-y)
3.	$\vdash \sim \neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	$\underleftarrow{\mathbf{ENN}}$
4.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \neg\neg\varphi$	Lema 5.1-b) (2,3)
5.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(1,4)**
6.	$\neg \sim \varphi \vdash \neg\neg\varphi$	1-5

aj) $\boldsymbol{\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\neg\psi$	Hipótesis
3.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$	$\underrightarrow{\textbf{ENN}}$
4.	$\vdash \neg\neg\psi \to \sim \neg\psi$	$\underrightarrow{\textbf{ENN}}$
5.	$\vdash \sim \neg\varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\vdash \sim \neg\psi$	**MP(2,4)**
7.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Abrev. $\sim$ (5)
8.	$\vdash \neg\psi \to (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	Abrev. $\sim$ (6)
9.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
10.	$\vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
11.	$\vdash \neg\varphi \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (7,9)
12.	$\vdash \neg\psi \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (8,10)
13.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-c) (11,12)
14.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENC}}$
15.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	Lema 5.1-b) (13,14)
16.	$\vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (15)
17.	$\vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\underleftarrow{\textbf{ENN}}$
18.	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(16,17)**
19.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	1-18

ak) $\boldsymbol{\sim\psi\vdash\sim(\varphi\wedge\psi)}$.

1.	$\vdash\sim\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash\psi\to(\psi\wedge\neg\psi)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash\varphi\wedge\psi$	Hipótesis
4.	$\vdash(\varphi\wedge\psi)\to\psi$	**Pos4**
5.	$\vdash\psi$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash\psi\wedge\neg\psi$	**MP(2,5)**
7.	$\vdash(\psi\wedge\neg\psi)\to\big((\varphi\wedge\psi)\wedge\neg(\varphi\wedge\psi)\big)$	Lema 5.1-k)
8.	$\vdash(\varphi\wedge\psi)\wedge\neg(\varphi\wedge\psi)$	**MP(6,7)**
9.	$\sim\psi,\varphi\wedge\psi\vdash(\varphi\wedge\psi)\wedge\neg(\varphi\wedge\psi)$	1-8
10.	$\sim\psi\vdash(\varphi\wedge\psi)\to\big((\varphi\wedge\psi)\wedge\neg(\varphi\wedge\psi)\big)$	**TD(9)**
11.	$\sim\psi\vdash\sim(\varphi\wedge\psi)$	Abrev. $\sim$ (10)

$\square$

El Lema 5.2 refleja el comportamiento de los cuatros conectivos primitivos en $L3A^D_{\rightarrow_1}$ en términos de G', N' y D'. Para ser más precisos consideremos una fórmula φ y una valuación v. Si cuando $v(\varphi)=0$ le asignamos $G'(\varphi)$ a φ, cuando $v(\varphi)=1$ se le asigna $N'(\varphi)$ y cuando $v(\varphi)=2$ le asignamos $D'(\varphi)$ (ver la Definición 5.1). Entonces con la idea de que la implicación indica que si tenemos el antecedente, entonces se deduce el consecuente, el inciso **N1** nos dice lo siguiente: dado que el antecedente es $G'(\varphi)$, este señala que la fórmula φ toma el valor de 0 y en consecuencia su negación $\neg\varphi$ debe ser 2, lo cual se escribe como $D'(\neg\varphi)$.

Similarmente, **N2** indica que si φ toma el valor 1 que se expresa con el antecedente $N'(\varphi)$, entonces su negación deber valer 0 expresado mediante $G'(\neg\varphi)$ que es el consecuente.

Finalmente, el inciso **N3** representa el hecho que cuando la fórmula toma el valor de verdad 2 su negación debe valer 0. Estas tres situaciones modelan el comportamiento semántico de la negación. De manera similar con los incisos **D1-D6**, **C1-C6** y **I1-I5** se modelan los respectivos comportamientos de la disyunción, conjunción e implicación.

Lema 5.2. En la teoría formal axiomática $\mathbb{L}_{L3A^D_{\rightarrow_1}}$ se han identificado los conectivos $G'(\varphi)$, $N'(\varphi)$ y $D'(\varphi)$ que respectivamente toman el valor de verdad 2 si y sólo si φ toma el valor 0,1 ó 2. Las siguientes fórmulas bien formadas en términos de dichos conectivos son teoremas.

N1:	$G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)$	**D1:**	$\big(G'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$
N2:	$N'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$	**D2:**	$\big(G'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$
N3:	$D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$	**D3:**	$\big(N'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$
		D4:	$\big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$
		D5:	$D'(\varphi) \to D'(\varphi \vee \psi)$
		D6:	$D'(\psi) \to D'(\varphi \vee \psi)$

C1:	$G'(\varphi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$	**I1:**	$G'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$
C2:	$G'(\psi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$	**I2:**	$N'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$
C3:	$\big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$	**I3:**	$D'(\psi) \to D'(\varphi \to \psi)$
C4:	$\big(N'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$	**I4:**	$\big(D'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \to \psi)$
C5:	$\big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$	**I5:**	$\big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)$
C6:	$\big(D'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to D'(\varphi \wedge \psi)$		

En la demostración del Lema 5.2 con el fin de tener una lectura más agradable, algunas de las páginas están en formato apaisado, también en la demostración del Lema 5.5.

Demostración:

N1: $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \neg\varphi \to \neg \sim \neg\varphi$	Lema 5.1-p)
2.	$\vdash G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)$	Abrev. G' y D' (1)

N2: $\vdash \boldsymbol{N'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)}$.

1.	$N'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$	Lema 5.1-ag)
2.	$\vdash N'(\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**TD(1)**
3.	$\vdash N'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$	Abrev. G' (2)

N3: $\vdash \boldsymbol{D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)}$.

1.	$D'(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$	Lema 5.1-ai)
2.	$\vdash D'(\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**TD(1)**
3.	$\vdash D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$	Abrev. G' (2)

D1: $\vdash \boldsymbol{\big(G'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\psi$	Hipótesis
3.	$\vdash \neg\varphi \to \sim\varphi$	**TD(**Lema 5.1-u**)**
4.	$\vdash \sim\varphi$	**MP(1,3)**
5.	$\vdash \sim\varphi \wedge \neg\psi$	**R-AND(2,4)**
6.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \to \big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big)$	**Pos6**
7.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	$\underleftarrow{\textbf{END}}$
9.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(7,8)**
10.	$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	1-9
11.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-n) (10)
12.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	**TD(11)**
13.	$\vdash \big(G'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. G' (12)

D2: $\vdash \boldsymbol{\big(G'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$		Reflexividad
2.	$N'(\psi) \vdash \sim\psi$		Lema 5.1-z)
3.	$\neg\varphi \wedge N'(\psi) \vdash \neg\varphi \wedge \sim\psi$		Lema 5.1-m) (1,2)
4.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \sim\psi) \to$ $\big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big)$		**Pos7**
5.	$\neg\varphi \wedge \sim\psi \vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)$		**TD(4)**
6.	$\neg\varphi \wedge N'(\psi) \vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)$		**Corte(3,5)**
7.	$\vdash \big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big) \to$ $\neg(\varphi \vee \psi)$		$\underleftarrow{\mathbf{END}}$
8.	$(\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$		**TD(7)**
9.	$\neg\varphi \wedge N'(\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$		**Corte(6,8)**
10.	$\vdash \big(\neg\varphi \wedge N'(\psi)\big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$		**TD(9)**
11.	$\vdash \big(G'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$		Abrev. G' (10)

D3: $\vdash \boldsymbol{\big(N'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\neg\psi \vdash \neg\psi$		Reflexividad
2.	$N'(\varphi) \vdash \sim\varphi$		Lema 5.1-z)
3.	$N'(\varphi) \wedge \neg\psi \vdash \sim\varphi \wedge \neg\psi$		Lema 5.1-m) (1,2)
4.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \to$ $\big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big)$		**Pos6**
5.	$\sim\varphi \wedge \neg\psi \vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)$		**TD(4)**
6.	$N'(\varphi) \wedge \neg\psi \vdash (\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)$		**Corte(3,5)**
7.	$\vdash \big((\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi)\big) \to$ $\neg(\varphi \vee \psi)$		$\underleftarrow{\mathbf{END}}$
8.	$(\sim\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \sim\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$		**TD(7)**
9.	$N'(\varphi) \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$		**Corte(6,8)**
10.	$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge \neg\psi\big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$		**TD(9)**
11.	$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$		Abrev. G' (10)

D4: $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
3.	$\vdash N'(\varphi) \to \sim \varphi$	**TD**(Lema 5.1-z))
4.	$\vdash N'(\psi) \to \sim \psi$	**TD**(Lema 5.1-z))
5.	$\vdash N'(\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**TD**(Lema 5.1-ag))
6.	$\vdash N'(\psi) \to \neg\neg\psi$	**TD**(Lema 5.1-ag))
7.	$\vdash \sim \varphi$	**MP(1,3)**
8.	$\vdash \sim \psi$	**MP(2,4)**
9.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(1,5)**
10.	$\vdash \neg\neg\psi$	**MP(2,6)**
11.	$\vdash \sim \varphi \wedge \sim \psi$	**R-AND(7,8)**
12.	$\sim \varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-ae)
13.	$\sim \varphi \wedge \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-n) (12)
14.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \sim \psi) \to \sim (\varphi \vee \psi)$	**TD(13)**
15.	$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(9,10)**
16.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-af)
17.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-n) (16)
18.	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	**TD(17)**
19.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(11,14)**
20.	$\vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(15,18)**
21.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)$	**R-AND(19,20)**
22.	$\sim (\varphi \vee \psi), \neg\neg(\varphi \vee \psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-f)
23.	$\sim (\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-n) (22)
24.	$\vdash \big(\sim (\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$	**TD(23)**
25.	$\vdash N'(\varphi \vee \psi)$	**MP(21,24)**
26.	$N'(\varphi), N'(\psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$	1-25
27.	$N'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$	Lema 5.1-n) (26)
28.	$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$	**TD(27)**

D5: $\vdash \boldsymbol{D'(\varphi) \rightarrow D'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \rightarrow \sim (\varphi \vee \psi)$	**TD(**Lema 5.1-ab)**)**
3.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
5.	$\vdash \varphi \rightarrow \big(\sim (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \sim (\varphi \vee \psi))\big)$	**Pos5**
6.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi) \rightarrow \big(\varphi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)\big)$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \varphi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(3,6)**
8.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi), \varphi \vdash \varphi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)$	1-7
9.	$\varphi, \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 5.1-ac)
10.	$\varphi \wedge \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 5.1-n) (9)
11.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi), \varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	**Corte(8,10)**
12.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$	**TD(11)**
13.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (12)
14.	$\sim \varphi \vdash \neg\neg \sim \varphi$	**TD(**Lema 5.1-a)**)**
15.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \vdash \neg\neg \sim \varphi$	**Corte(13,14)**
16.	$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\neg \sim \varphi$	**TD(15)**
17.	$\vdash \big(\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\neg \sim \varphi\big) \rightarrow$	
	$\big(\neg \sim \varphi \rightarrow \neg \sim (\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-h)
18.	$\vdash \neg \sim \varphi \rightarrow \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(16,17)**
19.	$\vdash D'(\varphi) \rightarrow D'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. D' (18)

D6: $\vdash \boldsymbol{D'(\psi) \to D'(\varphi \vee \psi)}$.

1.		$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi)$	Hipótesis
2.		$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \to \sim (\varphi \vee \psi)$	**TD(**Lema 5.1-ab)**)**
3.		$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(1,2)**
4.		$\vdash \psi$	Hipótesis
5.		$\vdash \psi \to \big(\sim (\varphi \vee \psi) \to (\psi \wedge \sim (\varphi \vee \psi))\big)$	**Pos5**
6.		$\vdash \sim (\varphi \vee \psi) \to \big(\psi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)\big)$	**MP(4,5)**
7.		$\vdash \psi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(3,6)**
8.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi), \psi$	$\vdash \psi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)$	1-7
9.	$\psi, \sim (\varphi \vee \psi)$	$\vdash \psi \wedge \neg\psi$	Lema 5.1-ad)
10.	$\psi \wedge \sim (\varphi \vee \psi)$	$\vdash \psi \wedge \neg\psi$	Lema 5.1-n) (9)
11.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi), \psi$	$\vdash \psi \wedge \neg\psi$	**Corte(8,10)**
12.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi)$	$\vdash \psi \to (\psi \wedge \neg\psi)$	**TD(11)**
13.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi)$	$\vdash \sim \psi$	Abrev. $\sim$ (12)
14.	$\sim \psi$	$\vdash \neg\neg \sim \psi$	**TD(**Lema 5.1-a)**)**
15.	$\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi)$	$\vdash \neg\neg \sim \psi$	**Corte(13,14)**
16.		$\vdash \neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \to \neg\neg \sim \psi$	**TD(15)**
17.		$\vdash \big(\neg\neg \sim (\varphi \vee \psi) \to \neg\neg \sim \psi\big) \to$ $\big(\neg \sim \psi \to \neg \sim (\varphi \vee \psi)\big)$	Lema 5.1-h)
18.		$\vdash \neg \sim \psi \to \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	**MP(16,17)**
19.		$\vdash D'(\psi) \to D'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. D' (18)

C1: $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to G'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Pos6**
3.	$\vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENC}}$
5.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-5
7.	$\vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD(6)**
8.	$\vdash G'(\varphi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. G' (7)

C2: $\vdash \boldsymbol{G'(\psi) \to G'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Pos7**
3.	$\vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENC}}$
5.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-5
7.	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD(6)**
8.	$\vdash G'(\psi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. G' (7)

C3: $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.		$\vdash N'(\varphi) \to \sim \varphi$	**TD(**Lema 5.1-z)**)**
2.		$\vdash \sim \varphi \to \sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD(**Lema 5.1-ah)**)**
3.		$\vdash N'(\varphi) \to \sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-b) (1,2)
4.		$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
5.		$\vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,4)**
6.		$\vdash N'(\varphi) \to \neg\neg\varphi$	**TD(**Lema 5.1-ag)**)**
7.		$\vdash N'(\psi) \to \neg\neg\psi$	**TD(**Lema 5.1-ag)**)**
8.		$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(4,6)**
9.		$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
10.		$\vdash \neg\neg\psi$	**MP(7,9)**
11.		$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(8,10)**
12.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi$	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-aj)
13.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (12)
14.		$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD(13)**
15.		$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(11,14)**
16.		$\vdash \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**R-AND(5,15)**
17.	$\sim (\varphi \wedge \psi), \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-f)
18.	$\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (17)
19.		$\vdash \big(\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big) \to$ $N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(18)**
20.		$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	**MP(16,19)**
21.	$N'(\varphi), N'(\psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	1-20
22.	$N'(\varphi) \wedge N'(\psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (21)
23.		$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(22)**

C4: $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi) \wedge D'(\psi)}\big) \rightarrow \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.		$\vdash N'(\varphi) \rightarrow\, \sim \varphi$	**TD(**Lema 5.1-z)**)**
2.		$\vdash\, \sim \varphi \rightarrow\, \sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD(**Lema 5.1-ah)**)**
3.		$\vdash N'(\varphi) \rightarrow\, \sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-b) (1,2)
4.		$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
5.		$\vdash\, \sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,4)**
6.		$\vdash N'(\varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	**TD(**Lema 5.1-ag)**)**
7.		$\vdash D'(\psi) \rightarrow \neg\neg\psi$	**TD(**Lema 5.1-ai)**)**
8.		$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(4,6)**
9.		$\vdash D'(\psi)$	Hipótesis
10.		$\vdash \neg\neg\psi$	**MP(7,9)**
11.		$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(8,10)**
12.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi$	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-aj)
13.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (12)
14.		$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD(13)**
15.		$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(11,14)**
16.		$\vdash\, \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**R-AND(5,15)**
17.	$\sim (\varphi \wedge \psi), \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-f)
18.	$\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (17)
19.		$\vdash \big(\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big) \rightarrow$	
		$N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(18)**
20.		$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	**MP(16,19)**
21.	$N'(\varphi), D'(\psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	1-20
22.	$N'(\varphi) \wedge D'(\psi)$	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (21)
23.		$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(22)**

C5: $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi) \wedge N'(\psi)}\big) \rightarrow \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash N'(\psi) \rightarrow \sim \psi$	**TD(**Lema 5.1-z)**)**
2.	$\vdash \sim \psi \rightarrow \sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD(**Lema 5.1-ak)**)**
3.	$\vdash N'(\psi) \rightarrow \sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-b) (1,2)
4.	$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
5.	$\vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash N'(\psi) \rightarrow \neg\neg\psi$	**TD(**Lema 5.1-ag)**)**
7.	$\vdash D'(\varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	**TD(**Lema 5.1-ai)**)**
8.	$\vdash \neg\neg\psi$	**MP(4,6)**
9.	$\vdash D'(\varphi)$	Hipótesis
10.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(7,9)**
11.	$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(8,10)**
12.	$\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-aj)
13.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (12)
14.	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD(13)**
15.	$\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(11,14)**
16.	$\vdash \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	**R-AND(5,15)**
17.	$\sim (\varphi \wedge \psi), \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-f)
18.	$\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (17)
19.	$\vdash \big(\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(18)**
20.	$\vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	**MP(16,19)**
21.	$D'(\varphi), N'(\psi) \vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	1-20
22.	$D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash N'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (21)
23.	$\vdash \big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(22)**

C6: $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{D'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{D'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash D'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash D'(\psi)$	Hipótesis
3.	$\vdash D'(\varphi) \to \varphi$	Lema 5.1-q)
4.	$\vdash D'(\psi) \to \psi$	Lema 5.1-q)
5.	$\vdash \varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\vdash \psi$	**MP(2,4)**
7.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	**R-AND(5,6)**
8.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \Big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)\Big)$	**TD(**Lema 5.1-d)**)**
9.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \Big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)\Big) \to \neg\Big((\varphi \wedge \psi) \to \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)\Big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
11.	$\vdash \neg\Big((\varphi \wedge \psi) \to \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)\big)\Big)$	**MP(9,10)**
12.	$\vdash \neg \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (11)
13.	$\vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. D' (12)
14.	$D'(\varphi), D'(\psi) \vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	1-13
15.	$D'(\varphi) \wedge D'(\psi) \vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.1-n) (14)
16.	$\vdash (D'(\varphi) \wedge D'(\psi)) \to D'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(15)**

I1: $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
3.	$\vdash \neg\varphi \wedge \varphi$	**R-AND(1,2)**
4.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \varphi) \to \psi$	Lema 5.1-k)
5.	$\vdash \psi$	**MP(3,4)**
6.	$\neg\varphi, \varphi \vdash \psi$	1-5
7.	$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$	**TD(6)**
8.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	Lema 5.1-d)
9.	$\neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	**Corte(7,8)**
10.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big) \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	$\mathbf{TD}(\underleftarrow{\mathbf{ENI}})$
11.	$\neg\varphi \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	**Corte(9,10)**
12.	$\neg\varphi \vdash \neg \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (11)
13.	$\vdash \neg\varphi \to \neg \sim (\varphi \to \psi)$	**TD(12)**
14.	$\vdash G'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. G' y D' (13)

I2: $\boldsymbol{\vdash N'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$N'(\varphi), \varphi \vdash \psi$	Lema 5.1-aa)
2.	$N'(\varphi) \vdash \varphi \to \psi$	**TD(1)**
3.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	Lema 5.1-d)
4.	$N'(\varphi) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	**Corte(2,3)**
5.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big) \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	**TD(**$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$**)**
6.	$N'(\varphi) \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	**Corte(4,5)**
7.	$N'(\varphi) \vdash \neg \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (6)
8.	$\vdash N'(\varphi) \to \neg \sim (\varphi \to \psi)$	**TD(7)**
9.	$\vdash N'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (9)

I3: $\vdash \boldsymbol{D'(\psi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\neg \sim \psi \vdash \psi$	**TD(**Lema 5.1-q)**)**
2.	$\neg \sim \psi, \varphi \vdash \psi$	**Mon(1)**
3.	$\neg \sim \psi \vdash \varphi \to \psi$	**TD(2)**
4.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	Lema 5.1-d)
5.	$\neg \sim \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	**Corte(3,4)**
6.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg\big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big) \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	**TD($\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$)**
7.	$\neg \sim \psi \vdash \neg\Big((\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)\Big)$	**Corte(5,6)**
8.	$\neg \sim \psi \vdash \neg \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\vdash \neg \sim \psi \to \neg \sim (\varphi \to \psi)$	**TD(8)**
10.	$\vdash D'(\psi) \to D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (9)

I4: $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi) \wedge G'(\psi)}\big) \rightarrow \boldsymbol{G'(\varphi \rightarrow \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi \wedge \neg\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash (\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg \sim \varphi$	**Pos3**
3.	$\vdash \neg \sim \varphi \rightarrow \varphi$	Lema 5.1-q)
4.	$\vdash (\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \varphi$	Lema 5.1-b) (2,3)
5.	$\vdash \varphi$	**MP(1,4)**
6.	$\vdash (\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$	**Pos4**
7.	$\vdash \neg\psi$	**MP(1,6)**
8.	$\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi \vdash \varphi$	1-5
9.	$\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg\psi$	1-7
10.	$\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \wedge \neg\psi$	**R-AND(8,9)**
11.	$\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	**TD($\overleftarrow{\textbf{ENI}}$)**
12.	$\neg \sim \varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	**Corte(10,11)**
13.	$\vdash \big(D'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \rightarrow G'(\varphi \rightarrow \psi)$	Abrev. D', G' (12) y **TD(12)**

I5: $\vdash \boldsymbol{\big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \big(\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)\big) \to \neg \sim \varphi$	**Pos3**
3.	$\vdash \neg \sim \varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
5.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \varphi$	Lema 5.1-q)
6.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \psi$	Lema 5.1-b) (4,5)
7.	$\vdash \psi$	**MP(3,6)**
8.	$\vdash \big(\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)\big) \to (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)$	**Pos4**
9.	$\vdash (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \to \sim \psi$	**Pos3**
10.	$\vdash \big(\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)\big) \to \sim \psi$	Lema 5.1-b) (8,9)
11.	$\vdash \sim \psi$	**MP(1,10)**
12.	$\vdash \psi \wedge \sim \psi$	**R-AND(7,11)**
13.	$\psi, \sim \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)$	Lema 5.1-t)
14.	$\psi \wedge \sim \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)$	Lema 5.1-n) (13)
15.	$\vdash (\psi \wedge \sim \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	**TD(14)**
16.	$\vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)$	**MP(12,15)**
17.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi), \varphi \to \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)$	1-16
18.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)\big)$	**TD(15)**

19.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (18)
20.	$\vdash \big(\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)\big) \to (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)$	**Pos4**
21.	$\vdash \sim \psi \wedge \neg\neg\psi$	**MP(1,20)**
22.	$\vdash (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg\psi$	**Pos4**
23.	$\vdash \neg\neg\psi$	**MP(21,22)**
24.	$\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
25.	$\vdash \neg(\varphi \to \psi)$	Hipótesis
26.	$\vdash \varphi \wedge \neg\psi$	**MP(24,25)**
27.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\psi$	**Pos4**
28.	$\vdash \neg\psi$	**MP(26,27)**
29.	$\vdash \neg\psi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(23,28)**
30.	$\vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \to \big(\neg(\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)\big)$	Lema 5.1-k)
31.	$\vdash \neg(\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**MP(29,30)**
32.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi), \neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)$	1-31
33.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \big(\neg(\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)\big)$	**TD(32)**
34.	$\neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (33)
35.	$\sim \neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**TD**($\underleftarrow{\textbf{ENN}}$**)**
36.	$\sim \neg\varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**Corte(34,35)**

37.	$\sim \neg\varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \sim (\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**R-AND(19,36)**
38.	$N'(\psi) \vdash \sim \psi$	Lema 5.1-z)
39.	$N'(\psi) \vdash \neg\neg\psi$	Lema 5.1-ag)
40.	$N'(\psi) \vdash \sim \psi \wedge \neg\neg\psi$	**R-AND(38,39)**
41.	$\neg \sim \varphi \vdash \neg \sim \varphi$	Reflexividad
42.	$\neg \sim \varphi \wedge N'(\psi) \vdash \neg \sim \varphi \wedge (\sim \psi \wedge \neg\neg\psi)$	Lema 5.1-m) (40,41)
43.	$\neg \sim \varphi \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**Corte(37,42)**
44.	$\sim (\varphi \to \psi), \neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash N'(\varphi \to \psi)$	Lema 5.1-f)
45.	$\sim (\varphi \to \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash N'(\varphi \to \psi)$	Lema 5.1-n) (44)
46.	$\neg \sim \varphi \wedge N'(\psi) \vdash N'(\varphi \to \psi)$	**Corte (43,45)**
47.	$\vdash \big(\neg \sim \varphi \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)$	**TD(46)**
48.	$\vdash \big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (47)

$\square$

Con el fin de acercarnos más a la demostración de completitud presentamos la Definición 5.1 que nos permite transformar fórmulas de $L3A^{D}_{\to_1}$ con ayuda de los conectivos G', N' y D'. De hecho se puede decir que estamos de alguna manera familiarizados con este tipo de transformaciones pues ésta se comporta muy similar a la de la Definición 3.10 que mencionamos en la lógica paraconsistente genuina $L3A_G$. Esta transformación generaliza la transformación empleada en la demostración de Kalmár para la lógica clásica ya que aquí se identifican tres valores de verdad.

Definición 5.1. *Dada una valuación v y φ una fórmula de $L3A^{D}_{\to_1}$ se denota la transformación de φ bajo v con φ_v y se define como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} G'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 0, \\ N'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 1, \\ D'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 2. \end{cases}$$

Para un conjunto Ψ de fórmulas, con Ψ_v denotamos al conjunto $\Psi_v = \{\varphi_v | \varphi \in \Psi\}$.

Utilizamos la definición anterior en el Lema 5.3 que básicamente nos asegura que dada una fórmula, se cumple que sus átomos transformados demuestran la fórmula transformada. Este lema es una generalización del Lema de Kalmár [30], que empleando la transformación de la Definición 5.1 puede ser aplicado a la lógica $L3A^{D}_{\to_1}$.

Lema 5.3. Sean φ una fórmula y v una valuación en $L3A^{D}_{\to_1}$. Si $Atoms(\varphi)$ denota el conjunto de fórmulas atómicas en φ, entonces se puede demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Demostración: La prueba es por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ y por complejidad nos referimos a los conectivos que intervienen en la misma. Dado que en $L3A^{D}_{\to_1}$ se tienen cuatro conectivos primitivos sobre estos se divide la demostración en casos.

Caso Base: φ es una fórmula atómica, digamos $\varphi = p$.
En este caso tenemos que $Atoms(\varphi)_v = \{\varphi_v\} = \{p_v\}$, así el lema se reduce a demostar que $\varphi_v \vdash \varphi_v$. Dado que en $\mathbb{L}_{L3A^{D}_{\to_1}}$ tenemos los axiomas **Pos1**, **Pos2**,

Modus Ponens como la única regla de inferencia y **TD** es posible demostrar $\varphi_v \vdash \varphi_v$ (ver [30]). Por tanto, $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Ahora supongamos que el lema se cumple para cualquier fórmula ψ de $L3A^D_{\rightarrow_1}$ con complejidad menor que la de φ.

Caso 1: $\varphi = \neg\psi$, donde la complejidad de ψ es menor que la de φ.
Por hipótesis inductiva, $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$. Notemos que $Atoms(\varphi) = Atoms(\psi)$, así $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ (1). Dependiendo cual sea el valor que tome ψ bajo la valuación tenemos los siguientes tres subcasos.

Subcaso 1a: $v(\psi) = 0$. Entonces $v(\varphi) = 2$, $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\neg\psi)$ y $\psi_v = G'(\psi)$. Por **N1** y **TD** tenemos que $G'(\psi) \vdash D'(\neg\psi)$, esto es, $\psi_v \vdash \varphi_v$. Luego al aplicar **Corte** a (1) y a lo anterior concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 1b: $v(\psi) = 1$. En esta situación, $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\neg\psi)$ y $\psi_v = N'(\psi)$. Por un lado $N'(\psi) \vdash G'(\neg\psi)$ por **N2** y **TD** o bien $\psi_v \vdash \varphi_v$. Aplicando **Corte** con (1) se sigue que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 1c: $v(\psi) = 2$. Luego, $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\neg\psi)$ y $\psi_v = D'(\psi)$. Usando **N3** y **TD** tenemos que $D'(\psi) \vdash G'(\neg\psi)$, es decir $\psi_v \vdash \varphi_v$. En consecuencia $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ al aplicar **Corte**.

Caso 2: $\varphi = \psi \vee \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ. Tenemos que $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\sigma)_v \vdash \sigma_v$ por hipótesis de inducción. Observemos que $Atoms(\varphi) = Atoms(\psi) \cup Atoms(\sigma)$, más aún la igualdad se preserva bajo la transformación de la Definición 5.1, esto es $Atoms(\varphi)_v = Atoms(\psi)_v \cup Atoms(\sigma)_v$. Luego por **Mon** se cumple que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$. También es posible aplicar **R-AND** a lo anterior y obtener $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ que nos es de ayuda más adelante. De acuerdo a los valores que toman los disyuntos tenemos las siguientes posibilidades.

Subcaso 2a: $v(\psi) \in \overline{\mathcal{D}}$ y $v(\sigma) \in \overline{\mathcal{D}}$. Debido a que la disyunción es neoclásica ocurre que $v(\varphi) \in \overline{\mathcal{D}}$. De aquí se desglosan cuatro posibles escenarios que enseguida abordamos.

Si $v(\psi) = v(\sigma) = 0$, entonces $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\psi \vee \sigma)$, $\psi_v = G'(\psi)$ y $\sigma_v = G'(\sigma)$. Usando **TD** y **D1**, $G'(\psi) \wedge G'(\sigma) \vdash G'(\psi \vee \sigma)$ o bien $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. Como $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ si usamos **Corte** podemos derivar $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Cuando $v(\psi) = 0$ y $v(\sigma) = 1$ se tiene que $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\psi \vee \sigma)$, $\psi_v = G'(\psi)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Por **D2** y **TD**, $G'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash G'(\psi \vee \sigma)$, i.e. $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$, después de aplicar **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Cuando $v(\psi) = 1$ y $v(\sigma) = 0$ procedemos de manera similar que en el escenario anterior pero aquí aplicamos **D3** en lugar de **D2** y obtenemos de igual forma que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = v(\sigma) = 1$, entonces $v(\varphi) = 1$, $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\psi \vee \sigma)$, $\psi_v = N'(\psi)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Tenemos que $N'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash N'(\psi \vee \sigma)$ por **D4** y **TD**, es decir $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. Luego en consecuencia de aplicar **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$, obtenemos $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 2b: $v(\psi) = 2$ o $v(\sigma) = 2$. En este caso, $v(\varphi) = 2$ y así $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\psi \vee \sigma)$. Además $\psi_v = D'(\psi)$ o $\sigma_v = D'(\sigma)$. Si $\psi_v = D'(\psi)$, entonces por **D5** y **TD** $D'(\psi) \vdash D'(\psi \vee \sigma)$. Como también se cumple que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ podemos aplicar adecuadamente **Corte** a esta información y obtener que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

De forma análoga si $\sigma_v = D'(\sigma)$, entonces $D'(\sigma) \vdash D'(\psi \vee \sigma)$ $(\sigma_v \vdash \varphi_v)$ por **D6** y **TD**. Nuevamente como antes usando **Corte** entre $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ y $\sigma_v \vdash \varphi_v$ concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Caso 3: $\varphi = \psi \wedge \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ. De manera análoga al caso de la disyunción tenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$, $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ y $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$. Tenemos tres posibilidades que dependen del valor que tomen los conyuntos.

Subcaso 3a: $v(\psi) = 0$ o $v(\sigma) = 0$. De acuerdo con la tabla de la conjunción siempre que uno de los conyuntos sea cero entonces la conjunción también lo es, así $v(\varphi) = 0$ y $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\psi \wedge \sigma)$.

Si $v(\psi) = 0$, entonces $\psi_v = G'(\psi)$. Por **C1** y **TD** $G'(\psi) \vdash G'(\psi \wedge \sigma)$ equivalentemente $\psi_v \vdash \varphi_v$. Dado que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ usando **Corte** se sigue que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\sigma) = 0$, entonces $\sigma_v = G'(\sigma)$. Luego por **C2** y **TD** $G'(\sigma) \vdash G'(\psi \wedge \sigma)$ o bien $\sigma_v \vdash \varphi_v$. Como $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ aplicamos **Corte** con lo anterior y concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 3b: $v(\psi) = 1$ o $v(\sigma) = 1$. Este caso realmente abarca tres opciones sobre los conyuntos.

Cuando $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ tenemos que $v(\varphi) = 1$, así $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\psi \wedge \sigma)$, $\psi_v = N'(\psi)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Por un lado $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ y por otro se cumple que $N'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash N'(\psi \wedge \sigma)$ (**TD(C3)**). Así aplicando **Corte** obtenemos $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = 1$ y $v(\sigma) = 2$, entonces $v(\varphi) = 1$, $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\psi \wedge \sigma)$, $\psi_v = N'(\psi)$ y $\sigma_v = D'(\sigma)$. Luego por **C4** y **TD** $N'(\psi) \wedge D'(\sigma) \vdash N'(\psi \to \sigma)$. De donde al aplicar **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ se tiene que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = 2$ y $v(\sigma) = 1$, entonces procedemos similarmente como en el párrafo anterior con la diferencia de usar **C5** en lugar de **C4**. Por tanto, $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$

Subcaso 3c: $v(\psi) = v(\sigma) = 2$. Por la neoclasicidad de la conjunción se tiene lo siguiente $v(\varphi) = 2$, $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\psi \wedge \sigma)$, $\psi_v = D'(\psi)$ y $\sigma_v = D'(\sigma)$. Por **C6** y **TD**, $D'(\psi) \wedge D'(\sigma) \vdash D'(\psi \wedge \sigma)$, es decir $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. En conclusión después de usar **Corte** entre $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ y $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$ tenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Caso 4: $\varphi = \psi \to \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ. Al igual que en los dos casos anteriores gracias a la hipótesis inductiva se cumple que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$. De acuerdo a los valores que toman tanto el antecedente como el consecuente bajo v se tienen las siguientes posibilidades.

Subcaso 4a: $v(\psi) \in \overline{\mathcal{D}}$. En esta situación sin importar el valor que tome σ tenemos que $v(\varphi) \in \mathcal{D}$, i.e. $v(\varphi) = 2$, de donde $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\psi \to \sigma)$. Ahora si consideremos los posibles valores de ψ.

Si $v(\psi) = 0$, entonces $\psi_v = G'(\psi)$. Debido a **I1** y **TD**, $G'(\psi) \vdash D'(\psi \to \sigma)$, esto es, $\psi_v \vdash \varphi_v$. Aplicando **Corte** a esto último con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ obtenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = 1$, entonces $\psi_v = N'(\psi)$. Luego por **I2** y **TD** se sigue que $N'(\psi) \vdash D'(\psi \to \sigma)$ y por **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ obtenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 4b: $v(\sigma) \in \mathcal{D}$. Aquí independientemente del valor que tome ψ, se tiene que $v(\varphi) \in \mathcal{D}$. De donde $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\psi \to \sigma)$ y $\sigma_v = D'(\sigma)$. Por **I3** y **TD**,

$D'(\sigma) \vdash D'(\psi \to \sigma)$ o bien $\sigma_v \vdash \varphi_v$; con esto y $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ es posible utilizar **Corte**, así concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 4c: $v(\psi) \in \mathcal{D}$ y $v(\sigma) \in \overline{\mathcal{D}}$. Así $\psi_v = D'(\psi)$ y $v(\varphi) \in \overline{D}$, más aún $v(\varphi) = v(\sigma)$ por ese motivo tenemos dos opciones de acuerdo al valor no designado que tome σ.

Si $v(\sigma) = 0$, entonces $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\psi \to \sigma)$ y $\sigma_v = G'(\sigma)$. Por un lado, dado que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\sigma)_v \vdash \sigma_v$ usando **R-AND** como en casos anteriores obtenemos $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$. Por otra parte $D'(\psi) \wedge G'(\sigma) \vdash G'(\psi \to \sigma)$ (**TD(I4)**), o equivalentemente $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. Finalmente $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ que resulta de la propiedad de **Corte** entre $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ y $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\sigma) = 1$, entonces $v(\varphi) = 1$, $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\psi \to \sigma)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Al igual que antes por una parte tenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ y por otra $D'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash N'(\psi \to \sigma)$ (**TD(I5)**). Por tanto, $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Por lo tanto en cada uno de los cuatro casos se verifica que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ para cualquier fórmula φ y valuación v de $L3A^D_{\to_1}$. □

5.1.2. Robustez y completitud de $L3A^D_{\to_1}$ respecto a $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$

Primero comenzamos por demostar que los teoremas en la axiomática $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$ son tautologías en $L3A^D_{\to_1}$, es decir verificar la robustez en esta lógica.

Teorema 5.2 (Robustez). *Sea φ una fórmula. Si φ es un teorema en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$, entonces φ es una tautología en $L3A^D_{\to_1}$, i.e. si $\vdash \varphi$, entonces $\models \varphi$.*

Demostración: Recordemos que un teorema es una sucesión finita de fórmulas tal que cada fórmula es un esquema de axioma o el resultado de aplicar **MP** a fórmulas anteriores. Así para demostrar que todo teorema es tautología basta probar que los esquemas de axioma son tautologías y *Modus Ponens* preserva tautologías. Para lo primero es suficiente notar las tablas de verdad de los conectivos en $L3A^D_{\to_1}$. Así, cada esquema de axioma de $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$ es una tautología.
Resta verificar que *Modus Ponens* preserva tautologías. Sean ψ y σ fórmulas en $L3A^D_{\to_1}$ tales que ψ y $\psi \to \sigma$ son tautologías. Procedemos por contradicción, para lo cual supongamos que existe una valuación v tal que $v(\sigma) \in \overline{\mathcal{D}} = \{0, 1\}$. Dado que ψ es tautología se tiene que $v(\psi) = 2$. De esto y de acuerdo con la tabla de verdad de la implicación se sigue que $v(\psi \to \sigma) \in \overline{\mathcal{D}}$ lo que contradice la hipótesis

de que $\psi \to \sigma$ es una tautología. Dicha contradicción viene de suponer que para alguna valuación, σ toma el valor 0 o 1. Por lo tanto, σ es una tautología. $\square$

Con todo el material presentado en la Sección 5.1 estamos listos para garantizar que las tautologías en $L3A^D_{\to_1}$ son teoremas en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$. Debe notarse la cadena que formamos con el objetivo de llegar a la completitud, con esto nos referimos a que el Lema 5.1 nos ayuda a probar el Lema 5.2 que a su vez es escencial para demostrar el Lema 5.3, el cual es medular en prueba del Teorema 5.3 que presentamos enseguida.

Teorema 5.3 (Completitud)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es una tautología en $L3A^D_{\to_1}$, entonces φ es un teorema en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$. Esto es, si $\models \varphi$, entonces $\vdash \varphi$.*

Demostración: Supongamos que φ es una tautología en $L3A^D_{\to_1}$. Sea Φ el conjunto de fórmulas atómicas de φ. Por lo supuesto tenemos que $v(\varphi) = 2$ para toda valuación, así $\varphi_v = D'(\varphi)$ y por el Lema 5.3 se cumple que $\Phi_v \vdash D'(\varphi)$. Luego usando el inciso q) del Lema 5.1 y **MP**, $\Phi_v \vdash \varphi$.
Ahora sea p un átomo de Φ y pongamos $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$. Como $\Phi_v \vdash \varphi$ se cumple que $\Gamma_v, p_v \vdash \varphi$ para cualquier valuación v. Dado que tenemos tres valores de verdad, entonces debe satisfacerse que $\Gamma_v, G'(p) \vdash \varphi$, $\Gamma_v, N'(p) \vdash \varphi$ y $\Gamma_v, D'(p) \vdash \varphi$. Por el inciso o) del Lema 5.1 obtenemos que $\Gamma_v \vdash \varphi$. Si al proceso anterior lo consideramos un *paso*, entonces después de $|\Phi|$ *pasos* hemos eliminado cada átomo de Φ y en consecuencia obtenemos $\vdash \varphi$. $\square$

Con los dos teoremas previos hemos cumplido unos de nuestros objetivos, dotar a la lógica paracompleta genuina $L3A^D_{\to_1}$ de una axiomática que le permite ser robusta y completa; así con estos resultados damos por terminado el trabajo con relación a dicha lógica.

5.2. Un sistema axiomático para $L3B^D_{\to_1}$

Con un procedimiento análogo al realizado en la Sección 5.1, aquí presentamos un sistema axiomático tipo Hilbert para la lógica $L3B^D_{\to_1}$. Siguiendo el mismo orden que usamos con $L3A^D_{\to_1}$ primero definimos una teoría formal axiomática para luego pasar a analizar algunas de sus propiedades que serán de ayuda para finalmente demostrar que dicha axiomática es robusta y completa respecto a la lógica $L3B^D_{\to_1}$.

5.2.1. La teoría formal axiomática y algunas de sus propiedades

Sea $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$ una teoría formal axiomática para $L3B^D_{\to_1}$ construida por los conectivos primitivos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\to$. Donde $\neg$ es un conectivo unario y $\vee$, $\wedge$ e $\to$ son binarios. Además de los conectivos primitivos consideramos los siguientes conectivos unarios $\bot_\varphi$, $\sim$, G', N' y D' definidos como: $\bot_\varphi := \neg\varphi\wedge(\varphi\vee\varphi)$, $\sim\varphi := \varphi\to\bot_\varphi$; $G'(\varphi) := \neg\sim\neg\varphi$; $N'(\varphi) := \sim\varphi\wedge\sim\neg\varphi$ y $D'(\varphi) := \neg\sim\varphi$. Utilizamos también el conectivo binario $\leftrightarrow$ definido como $\varphi\leftrightarrow\psi := (\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$. Las fórmulas bien formadas se construyen de manera usual, *Modus Ponens* (**MP**) es la única regla de inferencia y los esquemas de axioma son:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Pos1}: & \varphi\to(\psi\to\varphi)\\
\textbf{Pos2}: & \Big(\varphi\to(\psi\to\sigma)\Big)\to\Big((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\sigma)\Big)\\
\textbf{Pos3}: & (\varphi\wedge\psi)\to\varphi\\
\textbf{Pos4}: & (\varphi\wedge\psi)\to\psi\\
\textbf{Pos5}: & \varphi\to\Big(\psi\to(\varphi\wedge\psi)\Big)\\
\textbf{Pos6}: & \varphi\to(\varphi\vee\psi)\\
\textbf{Pos7}: & \psi\to(\varphi\vee\psi)\\
\textbf{Pos8}: & \Big(\varphi\to\sigma\Big)\to\Big((\psi\to\sigma)\to\big((\varphi\vee\psi)\to\sigma\big)\Big)\\
\textbf{Pos9}: & (\varphi\to\psi)\vee\varphi\\
\textbf{EXP}: & \varphi\to(\neg\varphi\to\psi)\\
\textbf{ENN}': & \neg\neg\varphi\leftrightarrow\ \varphi\\
\textbf{ENC}: & \neg(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi)\\
\textbf{END}': & \neg(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow\Big(\big((\varphi\vee\neg\varphi)\vee(\psi\vee\neg\psi)\big)\to(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\Big)\\
\textbf{ENI}: & \neg(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\varphi\wedge\neg\psi)
\end{array}
$$

A continuación presentamos algunas propiedades generales que se satisfacen en la teoría formal axiomática $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$.

Teorema 5.4. *Sean Γ, Δ teorías y φ, ψ fórmulas bien formadas arbitrarias. Las siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$:*

Monotonía	*si* $\Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$.
Teorema de la deducción	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
Corte	*si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Delta, \varphi \vdash \psi$, *entonces* $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.
Reglas-AND	$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \psi$.

Demostración: La demostración de estas cuatro propiedades es idéntica a las respectivas del Teorema 5.1. □

Antes de continuar enunciando los resultados necesarios para la demostración del *Teorema de completitud* analicemos semánticamente el comportamiento de nuestros conectivos unarios. La Tabla 5.4 nos dice que el conectivo $\perp_\varphi$ es una especie de partícula *bottom* ya que este valua siempre cero sin importar el valor de verdad que tome φ. Por otra parte, los conectivos $\sim$, G', N' y D' tienen un comportamiento similar a sus conectivos análogos en $L3A^D_{\to_1}$, es decir, $\sim$ es una negación del tipo neoclásica debido a que φ toma un valor designado si y sólo si $\sim \varphi$ toma un valor no designado. Finalmente, los tres restantes son los conectivos identificadores de los valores de verdad, valuando 2 únicamente en un caso especial y 0 en otro. Así G' identifica al 0, N' al 1 y D' al 2.

φ	$\perp_\varphi$	$\sim \varphi$	$G'(\varphi)$	$N'(\varphi)$	$D'(\varphi)$
0	0	2	2	0	0
1	0	2	0	2	0
2	0	0	0	0	2

Tabla 5.4: Conectivos $\perp_\varphi$, $\sim$, G', N' y D' de $L3B^D_{\to_1}$

De igual forma que en $\mathbb{L}_{L3A^D_{\to_1}}$ utilizamos en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$ el conectivo binario $\leftrightarrow$, este tiene lugar en los axiomas **ENN′**, **ENC**, **END′** y **ENI** e indica que ambas implicaciones son válidas y para referirnos a sólo una de las dos implicaciones ocupamos la notación $\underleftarrow{\mathbf{ENX}}$ o $\underrightarrow{\mathbf{ENX}}$ según corresponda, donde **X** puede ser **N′**, **C**, **D′** o **I**.

Con los comentarios previos en mente podemos continuar enunciando algunas propiedades que son válidas en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$ aunque en este momento es preciso recordar que la forma en que hemos presentado las demostraciones, es a base de dos columnas: la de la izquierda muestra las fórmulas numeradas que conforman la demostración mientras que la columna derecha da la justificación del porque la fórmula de la izquierda es válida. Ahora podemos pasar a los resultados que nos conducen a la completitud; la Proposición 5.1 nos enlista ocho propiedades básicas, es importante observar las últimas tres ya que las mismas junto con sus demostraciones posteriores nos revelan algo más acerca del conectivo $\perp_\varphi$.

Proposición 5.1. Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, σ y ξ en $L3B^D_{\rightarrow_1}$ se cumple lo siguiente:

i) $\varphi, \psi \vdash \sigma$ si y sólo si $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$

ii) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \sigma$, entonces $\vdash \varphi \to \sigma$

iii) $\vdash \big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big)$

iv) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\sigma \vdash \xi$, entonces $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$

v) Si $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ y $\Gamma \vdash \sigma \to \psi$, entonces $\Gamma \vdash (\varphi \vee \sigma) \to \psi$

vi) $\perp_\varphi \vdash \psi$

vii) $\sim \varphi \vdash \varphi \to \perp$

viii) $\varphi \to\perp \vdash \sim \varphi$

Demostración: Las demostraciones de los incisos **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)** son idénticas a las respectivas pruebas de los incisos n), b), g) y m) del Lema 5.1.

v) Si $\boldsymbol{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$ y $\boldsymbol{\Gamma \vdash \sigma \to \psi}$, entonces $\boldsymbol{\Gamma \vdash (\varphi \vee \sigma) \to \psi}$

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
2.	$\Gamma \vdash \sigma \to \psi$	Hipótesis
3.	$\vdash (\varphi \to \psi) \to \Big((\sigma \to \psi) \to \big((\varphi \vee \sigma) \to \psi\big)\Big)$	**Pos8**
4.	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to \Big((\sigma \to \psi) \to \big((\varphi \vee \sigma) \to \psi\big)\Big)$	**Mon(3)**
5.	$\Gamma \vdash (\sigma \to \psi) \to \big((\varphi \vee \sigma) \to \psi\big)$	**MP(1,4)**
6.	$\Gamma \vdash (\varphi \vee \sigma) \to \psi$	**MP(2,5)**

vi) $\boldsymbol{\bot_\varphi \vdash \psi}$

1.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \vee \varphi$	Hipótesis
3.	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \Big((\varphi \to \varphi) \to \big((\varphi \vee \varphi) \to \varphi\big)\Big)$	**Pos8**
4.	$\vdash \varphi \to \varphi$	[30]
5.	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \big((\varphi \vee \varphi) \to \varphi\big)$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash (\varphi \vee \varphi) \to \varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \varphi$	**MP(2,6)**
8.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**EXP**
9.	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \psi$	**MP(1,9)**
11.	$\neg\varphi, \varphi \vee \varphi \vdash \psi$	1-10
12.	$\neg\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi) \vdash \psi$	Proposición 5.1-i) (11)
13.	$\bot_\varphi \vdash \psi$	Abrev. $\bot_\varphi$ (12)

Particularmente se tiene que $\bot_\varphi \vdash \bot_\psi$ y de esta manera se puede observar que no es relevante el subíndice en $\bot_\varphi$ y por tanto ahora podemos simplemente escribir $\bot$.

vii) $\boldsymbol{\sim \varphi \vdash \varphi \to \bot}$

1.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to \bot$	Abrev. $\sim$
3.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
4.	$\vdash \bot$	**MP(2,3)**
5.	$\sim \varphi, \varphi \vdash \bot$	1-4
6.	$\sim \varphi \vdash \varphi \to \bot$	**TD(5)**

viii) $\varphi \to\perp\ \vdash\ \sim\varphi$

1.	$\vdash \varphi \to\perp$	Hipótesis
2.	$\varphi \vdash \perp$	**TD(1)**
3.	$\perp \vdash \perp_{\varphi}$	Proposición 5.1-vi)
4.	$\varphi \vdash \perp_{\varphi}$	**Corte(2,3)**
5.	$\vdash \varphi \to\perp_{\varphi}$	**TD(4)**
6.	$\varphi \to\perp\ \vdash \varphi \to\perp_{\varphi}$	1-5
7.	$\varphi \to\perp\ \vdash\ \sim\varphi$	Abrev. $\sim$ (6)

$\square$

El Lema 5.4 nos proporciona siete propiedades más que en conjunto con las de las Proposición 5.1 son de gran ayuda para la prueba del Lema 5.5. Notemos que el inciso d) del Lema 5.4 al que también llamamos *prueba débil por casos* mezcla la negación primitiva $\neg$ con la neoclásica $\sim$ de tal forma que es posible reducir el conjunto de hipótesis para demostrar cierta fórmula siempre y cuándo sepamos que es posible probar dicha fórmula dos veces con una hipótesis extra que involucra ambas negaciones. Por otro lado el inciso e) es sumamente importante pues nos ofrece la posibilidad de saber cuándo una fórmula es teorema.

Lema 5.4. Para cualesquiera fórmulas φ y ψ, en la teoría $\mathbb{L}_{L3B^{D}_{\to_1}}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\varphi \vdash \neg\perp$

b) $\varphi \vdash \varphi \wedge \neg\perp$

c) $\vdash\ \sim\varphi \vee \neg \sim\varphi$

d) Si $\Gamma, \sim\varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg\sim\varphi \vdash \psi$, entonces $\Gamma \vdash \psi$ (**Prueba débil por casos**)

e) Si $G'(\varphi) \vdash \psi$, $N'(\varphi) \vdash \psi$ y $D'(\varphi) \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$

f) $\neg\sim\neg\varphi \vdash\ \sim\varphi$ equivalentemente $G'(\varphi) \vdash\ \sim\varphi$

g) $\vdash \neg\sim\varphi \to\ \sim\neg\varphi$

Demostración:

a) $\boldsymbol{\varphi \vdash \neg \bot}$.

1.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	$\underleftarrow{\mathbf{ENN'}}$
3.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \vee \neg(\varphi \vee \varphi))$	**Pos6**
5.	$\vdash \neg\neg\varphi \vee \neg(\varphi \vee \varphi)$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash \big(\neg\neg\varphi \vee \neg(\varphi \vee \varphi)\big) \rightarrow \neg\big(\neg\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi)\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENC}}$
7.	$\vdash \neg\big(\neg\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi)\big)$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \neg \bot$	Abrev. $\bot$ (7)
9.	$\varphi \vdash \neg \bot$	1-8

b) $\boldsymbol{\varphi \vdash \varphi \wedge \neg \bot}$.

1.	$\varphi \vdash \varphi$	Reflexividad
2.	$\varphi \vdash \neg \bot$	Lema 5.4-a)
3.	$\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \neg \bot$	Proposición 5.1-iv) (1,2)
4.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
5.	$\vdash \varphi \rightarrow \big(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \varphi)\big)$	**Pos5**
6.	$\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \varphi)$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \varphi \wedge \varphi$	**MP(4,6)**
8.	$\varphi \vdash \varphi \wedge \varphi$	4-7
9.	$\varphi \vdash \varphi \wedge \neg \bot$	**Corte(3,8)**

c) $\vdash \boldsymbol{\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi}$.

1.	$\vdash \varphi \to \varphi \wedge \neg \perp$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
2.	$\vdash (\varphi \wedge \neg \perp) \to \neg(\varphi \to \perp)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
3.	$\vdash \varphi \to \neg(\varphi \to \perp)$	Proposición 5.1-ii) (1,2)
4.	$\vdash \varphi \to \neg \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (3)
5.	$\vdash \neg \sim \varphi \to (\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi)$	**Pos7**
6.	$\vdash \varphi \to (\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi)$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.	$\vdash \sim \varphi \to (\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi)$	**Pos6**
8.	$\vdash (\sim \varphi \vee \varphi) \to (\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi)$	Proposición 5.1-v) (6,7)
9.	$\vdash (\varphi \to \perp) \vee \varphi$	**Pos9**
10.	$\vdash \sim \varphi \vee \varphi$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\vdash \sim \varphi \vee \neg \sim \varphi$	**MP(8,10)**

d) Si $\boldsymbol{\Gamma, \sim \varphi \vdash \psi}$ y $\boldsymbol{\Gamma, \neg \sim \varphi \vdash \psi}$, entonces $\boldsymbol{\Gamma \vdash \psi}$.

1.	$\Gamma, \sim \varphi \vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\Gamma, \neg \sim \varphi \vdash \psi$	Hipótesis
3.	$\Gamma \vdash \sim \varphi \to \psi$	**TD(1)**
4.	$\Gamma \vdash \neg \sim \varphi \to \psi$	**TD(2)**
5.	$\Gamma \vdash (\sim \varphi \vee \neg \sim \varphi) \to \psi$	Proposición 5.1-v) (3,4)
6.	$\vdash \sim \varphi \vee \neg \sim \varphi$	Lema 5.4-c)
7.	$\Gamma \vdash \sim \varphi \vee \neg \sim \varphi$	**Mon(6)**
8.	$\Gamma \vdash \psi$	**MP(5,7)**

e) Si $G'(\varphi) \vdash \psi$, $N'(\varphi) \vdash \psi$ y $D'(\varphi) \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$.

En otros términos la afirmación es:

Si $\neg \sim \neg\varphi \vdash \psi$, $\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi \vdash \psi$ y $\neg \sim \varphi \vdash \psi$, entonces $\vdash \psi$.

1.	$\neg \sim \neg\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
2.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi \vdash \psi$	Hipótesis
3.	$\neg \sim \varphi \vdash \psi$	Hipótesis
4.	$\sim \varphi, \neg \sim \neg\varphi \vdash \psi$	**Mon(1)**
5.	$\sim \varphi, \sim \neg\varphi \vdash \psi$	Proposición 5.1-i) (2)
6.	$\sim \varphi \vdash \psi$	Lema 5.4-d) (4,5)
7.	$\vdash \psi$	Lema 5.4-d (3,6)

f) $\neg \sim \neg\varphi \vdash \sim \varphi$

1.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg(\neg\varphi \to \perp)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg(\neg\varphi \to \perp) \to (\neg\varphi \wedge \neg \perp)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
4.	$\vdash \neg\varphi \wedge \neg \perp$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg \perp) \to \neg\varphi$	**Pos3**
6.	$\vdash \neg\varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
8.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \perp)$	**EXP**
9.	$\vdash \neg\varphi \to \perp$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \perp$	**MP(6,9)**
11.	$\neg \sim \neg\varphi, \varphi \vdash \perp$	1-10
12.	$\neg \sim \neg\varphi \vdash \varphi \to \perp$	**TD(11)**
13.	$\neg \sim \neg\varphi \vdash \sim \varphi$	Abrev. $\sim$ (12)

g) $\vdash \neg \sim \varphi \to \sim \neg\varphi$

1.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg(\varphi \to\perp)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg(\varphi \to\perp) \to (\varphi \wedge \neg \perp)$	$\underrightarrow{\mathbf{ENI}}$
4.	$\vdash \varphi \wedge \neg \perp$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash (\varphi \wedge \neg \perp) \to \varphi$	**Pos3**
6.	$\vdash \varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \neg\varphi$	Hipótesis
8.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to\perp)$	**EXP**
9.	$\vdash \neg\varphi \to\perp$	**MP(6,8)**
10.	$\vdash \perp$	**MP(7,9)**
11.	$\neg \sim \varphi, \neg\varphi \vdash \perp$	1-10
12.	$\neg \sim \varphi \vdash \neg\varphi \to\perp$	**TD(11)**
13.	$\neg \sim \varphi \vdash \sim \neg\varphi$	Abrev. $\sim$ (12)
14.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \sim \neg\varphi$	**TD(13)**

□

El siguiente lema juega un papel similar al del Lema 5.2 modelando el comportamiento de los cuatro conectivos primitivos en términos de G', N' y D'.

Lema 5.5. En la teoría formal axiomática $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$ se han identificado los conectivos $G'(\varphi)$, $N'(\varphi)$ y $D'(\varphi)$ que respectivamente toman el valor de verdad 2 si y sólo si φ toma el valor 0,1 ó 2. Las siguientes fórmulas bien formadas en términos de dichos conectivos son teoremas.

N1': $G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)$

N2': $N'(\varphi) \to N'(\neg\varphi)$

N3': $D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$

D1': $\big(G'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$

D2': $\big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$

D3': $\big(G'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$

D4': $\big(N'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$

D5': $D'(\varphi) \to D'(\varphi \vee \psi)$

D6': $D'(\psi) \to D'(\varphi \vee \psi)$

C1': $G'(\varphi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$

C2': $G'(\psi) \to G'(\varphi \wedge \psi)$

C3': $\big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$

C4': $\big(N'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$

C5': $\big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$

C6': $\big(D'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to D'(\varphi \wedge \psi)$

I1': $G'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$

I2': $N'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)$

I3': $D'(\psi) \to D'(\varphi \to \psi)$

I4': $\big(D'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \to \psi)$

I5': $\big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)$

Demostración:

N1': $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi \to \neg \sim \neg\varphi$	[30]
2.	$\vdash G'(\varphi) \to D'(\neg\varphi)$	Abrev. G' y D' (1)

N2': $\vdash \boldsymbol{N'(\varphi) \to N'(\neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	$\underrightarrow{\mathbf{ENN'}}$
4.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \perp$	Proposición 5.1-ii) (2,3)
5.	$\vdash \sim \neg\neg\varphi$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\sim \varphi \vdash \sim \neg\neg\varphi$	1-5
7.	$\sim \neg\varphi \vdash \sim \neg\varphi$	Reflexividad
8.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi \vdash \sim \neg\varphi \wedge \sim \neg\neg\varphi$	Proposición 5.1-iv) (6,7)
9.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi) \to (\sim \neg\varphi \wedge \sim \neg\neg\varphi)$	**TD(8)**
10.	$\vdash N'(\varphi) \to N'(\neg\varphi)$	Abrev. N' (9)

N3': $\vdash \boldsymbol{D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg(\varphi \to \bot)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg(\varphi \to \bot) \to (\varphi \wedge \neg \bot)$	$\underrightarrow{\mathbf{ENI}}$
4.	$\vdash \varphi \wedge \neg \bot$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash (\varphi \wedge \neg \bot) \to \varphi$	**Pos3**
6.	$\vdash \varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	$\underleftarrow{\mathbf{ENN'}}$
8.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(6,7)**
9.	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg \bot)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
10.	$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg \bot$	**MP(8,9)**
11.	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg \bot) \to \neg(\neg\neg\varphi \to \bot)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
12.	$\vdash \neg(\neg\neg\varphi \to \bot)$	**MP(10,11)**
13.	$\vdash \neg \sim \neg\neg\varphi$	Abrev. $\sim$ (12)
14.	$\neg \sim \varphi \vdash \neg \sim \neg\neg\varphi$	1-13
15.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \neg \sim \neg\neg\varphi$	**TD(14)**
16.	$\vdash D'(\varphi) \to G'(\neg\varphi)$	Abrev D' y G' (15)

Nota 5.1. Los pasos del 1 al 6 de la prueba de **N3'** constituyen una demostración de $\neg \sim \varphi \vdash \varphi$ o de forma equivalentemente $D'(\varphi) \vdash \varphi$.

Nota 5.2. Las líneas 1-6 de la demostración de **D1'** sirven como prueba de que $\neg \sim \neg\varphi \vdash \neg\varphi$, esto es $G'(\varphi) \vdash \neg\varphi$. Conviene tener en mente esta propiedad ya que puede ser usada posteriormente.

D1': $\vdash \big(\boldsymbol{G'(\varphi) \wedge G'(\psi)}\big) \boldsymbol{\to G'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg(\neg\varphi \to\bot)$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \neg(\neg\varphi \to\bot) \to (\neg\varphi \wedge \neg \bot)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
4.	$\vdash \neg\varphi \wedge \neg \bot$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg \bot) \to \neg\varphi$	**Pos3**
6.	$\vdash \neg\varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\vdash \neg \sim \neg\psi$	Hipótesis
8.	$\vdash \neg(\neg\psi \to\bot)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\vdash \neg(\neg\psi \to\bot) \to (\neg\psi \wedge \neg \bot)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
10.	$\vdash \neg\psi \wedge \neg \bot$	**MP(8,9)**
11.	$\vdash (\neg\psi \wedge \neg \bot) \to \neg\psi$	**Pos3**
12.	$\vdash \neg\psi$	**MP(10,11)**
13.	$\vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$	**R-AND(6,12)**
14.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \Big(\big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\Big)$	**Pos1**
15.	$\vdash \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	**MP(13,14)**
16.	$\vdash \Big(\big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\Big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	$\underleftarrow{\textbf{END}'}$
17.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(15,16)**
18.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \bot\big)$	**TD**(Lema 5.4-b))

19.		$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp$	**MP(17,18)**
20.		$\vdash \big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big) \to \neg\big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
21.		$\vdash \neg\big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	**MP(19,20)**
22.		$\vdash \neg \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (21)
23.	$\neg \sim \neg\varphi, \neg \sim \neg\psi$	$\vdash \neg \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	1-22
24.	$G'(\varphi) \wedge G'(\psi)$	$\vdash G'(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (23) y Abrev. G' (23)
25.		$\vdash \big(G'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$	**TD(24)**

D2': $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{G'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash \sim \neg\varphi$	Hipótesis
4.	$\vdash \neg\varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (3)
5.	$\vdash \sim \psi$	Hipótesis
6.	$\vdash \psi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (5)
7.	$\vdash \sim \neg\psi$	Hipótesis
8.	$\vdash \neg\psi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \perp$	Proposición 5.1-v) (2,4)
10.	$\vdash (\psi \vee \neg\psi) \to \perp$	Proposición 5.1-v) (6,8)
11.	$\vdash \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to \perp$	Proposición 5.1-v) (9,10)
12.	$\vdash \perp \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	**TD(**Proposición 5.1-vi)**)**
13.	$\vdash \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	Proposición 5.1-ii) (11,12)
14.	$\vdash \Big(\big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\Big) \to \neg(\varphi \vee \psi)$	$\underleftarrow{\mathbf{END'}}$
15.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	**MP(13,14)**
16.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
17.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp$	**MP(15,16)**
18.	$\vdash \big(\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big) \to \neg\big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$

19.		$\vdash \neg\big(\neg(\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	**MP(17,18)**
20.		$\vdash \neg \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (19)
21.		$\vdash G'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. G' (20)
22.	$\sim \varphi, \sim \neg\varphi, \sim \psi, \sim \neg\psi$	$\vdash G'(\varphi \vee \psi)$	1-21
23.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi, \sim \psi \wedge \sim \neg\psi$	$\vdash G'(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (22)
24.	$N'(\varphi) \wedge N'(\psi)$	$\vdash G'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. N' (24) y Proposición 5.1-i) (23)
25.		$\vdash \big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to G'(\varphi \vee \psi)$	**TD(24)**

D3': $\vdash \big(\boldsymbol{G'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \vee \psi)}$.

D3' - i)

1.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi \to \sim \varphi$	**TD(**Lema 5.4-f)**)**
3.	$\vdash \sim \varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (3)
5.	$\vdash \sim \psi$	Hipótesis
6.	$\vdash \psi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (5)
7.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \perp$	Proposición 5.1-v) (4,6)
8.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\neg \sim \neg\varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	1-8
10.	$\neg \sim \neg\varphi, \sim \psi, \sim \neg\psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	**Mon(9)**
11.	$G'(\varphi), \sim \psi \wedge \sim \neg\psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. G' y Proposición 5.1-i)
12.	$G'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. N' (11)
13.	$G'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i)

D3'- ii)

1.		$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Hipótesis
2.		$\vdash \neg \sim \neg\varphi \to \neg\varphi$	**TD(**Nota 5.2**)**
3.		$\vdash \neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.		$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	**Pos7**
5.		$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big)$	**Pos6**
6.		$\vdash \neg\varphi \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big)$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.		$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)$	**MP(3,6)**
8.		$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	Hipótesis
9.		$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \Big(\big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\Big)$	$\underrightarrow{\mathbf{END}'}$
10.		$\vdash \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	**MP(8,9)**
11.		$\vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$	**MP(7,10)**
12.		$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\psi$	**Pos4**
13.		$\vdash \neg\psi \to \perp$	Hipótesis
14.		$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \perp$	Proposición 5.1-ii) (12,13)
15.		$\vdash \perp$	**MP(11,14)**
16.	$\neg \sim \neg\varphi, \neg(\varphi \vee \psi), \neg\psi \to \perp$	$\vdash \perp$	1-15
17.	$G'(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi), \sim \neg\psi$	$\vdash \perp$	Abrev. G' y $\sim$ (16)
18.	$G'(\varphi), \sim \neg\psi$	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \perp$	**TD(17)**

19.	$G'(\varphi), \sim \psi, \sim \neg\psi \vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	**Mon(18)** y Abrev. $\sim$ (18)
20.	$G'(\varphi), \sim \psi \wedge \sim \neg\psi \vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (19)
21.	$G'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Abrev. N' (20)
22.	$G'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (21)

De **D3'-i)** y **D3'-ii)** se sigue que $G'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi) \wedge \sim \neg(\varphi \vee \psi)$ usando **R-AND** con las conclusiones de ambos incisos. Equivalentemente tenemos $G'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$ y con **TD** $\vdash \big(G'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \vee \psi)$.

D4': $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi) \wedge G'(\psi)}\big) \rightarrow \boldsymbol{N'(\varphi \vee \psi)}$.

D4' - i)

1.	$\vdash \neg \sim \neg\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\psi \rightarrow \sim \psi$	**TD(**Lema 5.4-f)**)**
3.	$\vdash \sim \psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \psi \rightarrow \perp$	Abrev. $\sim$ (3)
5.	$\vdash \sim \varphi$	Hipótesis
6.	$\vdash \varphi \rightarrow \perp$	Abrev. $\sim$ (5)
7.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp$	Proposición 5.1-v) (4,6)
8.	$\vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\sim \varphi, \neg \sim \neg\psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	1-8
10.	$\sim \varphi, \sim \neg\varphi, \neg \sim \neg\psi \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	**Mon(9)**
11.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi, G'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (10) y Abrev. G' (10)
12.	$N'(\varphi), G'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. N' (11)
13.	$N'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \sim (\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (12)

D4'- ii)

1.	$\vdash \neg \sim \neg\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\psi \to \ \neg\psi$	**TD**(Nota 5.2**)**
3.	$\vdash \neg\psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \neg\psi \to (\psi \vee \neg\psi)$	**Pos7**
5.	$\vdash (\psi \vee \neg\psi) \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big)$	**Pos7**
6.	$\vdash \neg\psi \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big)$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.	$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)$	**MP(3,6)**
8.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	Hipótesis
9.	$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \Big(\big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\Big)$	$\underrightarrow{\mathbf{END}'}$
10.	$\vdash \big((\varphi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\psi)\big) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	**MP(8,9)**
11.	$\vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$	**MP(7,10)**
12.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\varphi$	**Pos3**
13.	$\neg\varphi \to \perp$	Hipótesis
14.	$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \perp$	Proposición 5.1-ii) (12,13)
15.	$\vdash \perp$	**MP(11,14)**
16.	$\neg \sim \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \to \perp \vdash \perp$	1-15
17.	$G'(\psi), \neg(\varphi \vee \psi), \sim \neg\varphi \vdash \perp$	Abrev. G' y $\sim$ (16)
18.	$\sim \neg\varphi, G'(\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \perp$	**TD(17)**

19.	$\sim\varphi, \sim\neg\varphi, G'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \vee \psi)$	**Mon(18)** y Abrev. $\sim$ (18)
20.	$\sim\varphi \wedge \sim\neg\varphi, G'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (19)
21.	$N'(\varphi), G'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \vee \psi)$	Abrev. N' (20)
22.	$N'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \vee \psi)$	Proposición 5.1-i) (21)

Similarmete como en **D3'**, de **D4'-i)** y **D4'-ii)** se sigue que $N'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \sim(\varphi \vee \psi) \wedge \sim \neg(\varphi \vee \psi)$ usando **R-AND** con las conclusiones de ambos incisos. Equivalentemente tenemos $N'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash N'(\varphi \vee \psi)$ y con **TD** $\vdash \big(N'(\varphi) \wedge G'(\psi)\big) \to N'(\varphi \vee \psi)$.

D5': $\vdash \boldsymbol{D'(\varphi) \to D'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \varphi$	**TD(**Nota 5.1)
3.	$\vdash \varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	**Pos6**
5.	$\vdash \varphi \vee \psi$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \to \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
7.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big) \to \neg\big((\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
9.	$\vdash \neg\big((\varphi \vee \psi) \to \perp\big)$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\neg \sim \varphi \vdash \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	1-10
12.	$D'(\varphi) \vdash D'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. D' (11)
13.	$\vdash D'(\varphi) \to D'(\varphi \vee \psi)$	**TD(12)**

D6': $\vdash \boldsymbol{D'(\psi) \rightarrow D'(\varphi \vee \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \psi \rightarrow \psi$	**TD(**Nota 5.1)
3.	$\vdash \psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	**Pos7**
5.	$\vdash \varphi \vee \psi$	**MP(3,4)**
6.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
7.	$\vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg \perp\big) \rightarrow \neg\big((\varphi \vee \psi) \rightarrow\perp\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
9.	$\vdash \neg\big((\varphi \vee \psi) \rightarrow\perp\big)$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\neg \sim \psi \vdash \neg \sim (\varphi \vee \psi)$	1-10
12.	$D'(\psi) \vdash D'(\varphi \vee \psi)$	Abrev. D' (11)
13.	$\vdash D'(\psi) \rightarrow D'(\varphi \vee \psi)$	**TD(12)**

C1': $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to G'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi \to \neg\varphi$	**TD**(Nota 5.2)
3.	$\vdash \neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Pos6**
5.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	$\underleftarrow{\textbf{ENC}}$
6.	$\vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,6)**
8.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD**(Lema 5.4-b))
9.	$\vdash \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big) \to \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \to\perp\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
10.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \to\perp\big)$	Proposición 5.1-ii) (8,9)
11.	$\vdash \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \to\perp\big)$	**MP(7,10)**
12.	$\vdash \neg \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (11)
13.	$\neg \sim \neg\varphi \vdash \neg \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-12
14.	$G'(\varphi) \vdash G'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev.G'(13)
15.	$\vdash G'(\varphi) \to \big(G'(\varphi \wedge \psi)\big)$	**TD(14)**

C2': $\vdash \boldsymbol{G'(\psi) \rightarrow G'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash \neg \sim \neg\psi$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\psi \rightarrow \neg\psi$	**TD(**Nota 5.2**)**
3.	$\vdash \neg\psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**Pos7**
5.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENC}}$
6.	$\vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(3,6)**
8.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
9.	$\vdash \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big) \rightarrow \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
10.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp\big)$	Proposición 5.1-ii) (8,9)
11.	$\vdash \neg\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp\big)$	**MP(7,10)**
12.	$\vdash \neg \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (11)
13.	$\neg \sim \neg\psi \vdash \neg \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-12
14.	$G'(\psi) \vdash G'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev.G' (13)
15.	$\vdash G'(\psi) \rightarrow \big(G'(\varphi \wedge \psi)\big)$	**TD(14)**

C3': $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

C3' - i)

1.	$\vdash \varphi \to\perp$	Hipótesis
2.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	Hipótesis
3.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	**Pos3**
4.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to\perp$	Proposición 5.1-ii) (1,3)
5.	$\vdash \perp$	**MP(2,4)**
6.	$\varphi \to\perp, \varphi \wedge \psi \vdash \perp$	1-5
7.	$\varphi \to\perp \vdash (\varphi \wedge \psi) \to\perp$	**TD(6)**
8.	$\sim \varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (7)
9.	$\sim \varphi, \sim \neg\varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**Mon(8)**
10.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (9)
11.	$N'(\varphi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. N' (10)
12.	$N'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**Mon(11)**
13.	$N'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (12)

C3' - ii)

1.	$\vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg\psi \rightarrow \perp$	Hipótesis
3.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \perp$	Proposición 5.1-v) (1,2)
4.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENC}}$
5.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	Proposición 5.1-ii) (3,4)
6.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	Hipótesis
7.	$\vdash \perp$	**MP(5,6)**
8.	$\neg\varphi \rightarrow \perp, \neg\psi \rightarrow \perp, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	1-7
9.	$\neg\varphi \rightarrow \perp, \neg\psi \rightarrow \perp \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	**TD(8)**
10.	$\sim \neg\varphi, \sim \neg\psi \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\sim \varphi, \sim \neg\varphi, \sim \psi, \sim \neg\psi \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	**Mon(10)**
12.	$\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi, \sim \psi \wedge \sim \neg\psi \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (11)
13.	$N'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. N' (12)
14.	$N'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (13)

Con las conclusiones de **C3'-i)** y **C3'-ii)** usando **R-AND** se sigue que $N'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$. Después con **TD** y la abreviatura de N' se obtiene $\vdash \big(N'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \wedge \psi)$.

C4': $\vdash \big(\boldsymbol{N'(\varphi)} \wedge \boldsymbol{D'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

C4' - i)

1.	$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi$	Abrev. N' (1)
3.	$\vdash (\sim \varphi \wedge \sim \neg\varphi) \to \sim \varphi$	**Pos3**
4.	$\vdash \sim \varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	Hipótesis
7.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	**Pos3**
8.	$\vdash \varphi$	**MP(6,7)**
9.	$\vdash \perp$	**MP(5,8)**
10.	$N'(\varphi), \varphi \wedge \psi \vdash \perp$	1-9
11.	$N'(\varphi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \perp$	**TD(10)**
12.	$N'(\varphi), D'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**Mon(11)** y Abrev. $\sim$ (11)
13.	$N'(\varphi) \wedge D'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (12)

C4' - ii)

1.	$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim\varphi \wedge \sim\neg\varphi$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \sim\neg\varphi) \rightarrow \sim\neg\varphi$	**Pos4**
4.	$\vdash \sim\neg\varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \neg\varphi \rightarrow\bot$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash D'(\psi)$	Hipótesis
7.	$\vdash \neg\sim\psi$	Abrev. D' (6)
8.	$\vdash \neg\sim\psi \rightarrow \sim\neg\psi$	Lema 5.4-g)
9.	$\vdash \sim\neg\psi$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \neg\psi \rightarrow\bot$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow\bot$	Proposición 5.1-v) (5,10)
12.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENC}}$
13.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow\bot$	Proposición 5.1-ii) (11,12)
14.	$N'(\varphi), D'(\psi) \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow\bot$	1-13
15.	$N'(\varphi) \wedge D'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (14) y Abrev. $\sim$ (14)

Al aplicar **R-AND** a las conclusiones de **C4'-i)** y **C4'-ii)** se tiene que $N'(\varphi) \wedge D'(\psi) \vdash \sim(\varphi \wedge \psi) \wedge \sim\neg(\varphi \wedge \psi)$. Luego con **TD** y la abreviatura de N' se obtiene $\vdash \big(N'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \rightarrow N'(\varphi \wedge \psi)$.

C5': $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi) \wedge N'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{N'(\varphi \wedge \psi)}$.

C5' - i)

1.	$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim \psi \wedge \sim \neg\psi$	Abrev. N'
3.	$\vdash (\sim \psi \wedge \sim \neg\psi) \to \sim \psi$	**Pos3**
4.	$\vdash \sim \psi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \psi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$	**Pos4**
7.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \perp$	Proposición 5.1-ii) (5,6)
8.	$N'(\psi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \perp$	1-7
9.	$N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (8)
10.	$D'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	**Mon(9)**
11.	$D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (12)

C5' - ii)

1.	$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim \psi \wedge \sim \neg\psi$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash (\sim \psi \wedge \sim \neg\psi) \to \sim \neg\psi$	**Pos4**
4.	$\vdash \sim \neg\psi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \neg\psi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash D'(\varphi)$	Hipótesis
7.	$\vdash \neg \sim \varphi$	Abrev. D' (6)
8.	$\vdash \neg \sim \varphi \to \sim \neg\varphi$	Lema 5.4-g)
9.	$\vdash \sim \neg\varphi$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \neg\varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \perp$	Proposición 5.1-v) (5,10)
12.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENC}}$
13.	$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \perp$	Proposición 5.1-ii) (11,12)
14.	$D'(\varphi), N'(\psi) \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \perp$	1-13
15.	$D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) y Abrev. $\sim$ (14)

Aplicamos **R-AND** a las conclusiones de **C5'-i)** y **C5'-ii)** para obtener $D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \sim \neg(\varphi \wedge \psi)$. En consecuencia de **TD** y la abreviatura de N' concluimos $\vdash \big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \wedge \psi)$.

C6': $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi) \wedge D'(\psi)}\big) \to \boldsymbol{D'(\varphi \wedge \psi)}$.

1.	$\vdash D'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash D(\varphi) \to \varphi$	**TD(**Nota 5.1**)**
3.	$\vdash D'(\psi)$	**Pos3**
4.	$\vdash D'(\psi) \to \psi$	**TD(**Nota 5.1**)**
5.	$\vdash \varphi$	**MP(1,2)**
6.	$\vdash \psi$	**MP(3,4)**
7.	$\vdash \varphi \to \big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\big)$	**Pos5**
8.	$\vdash \psi \to (\varphi \wedge \psi)$	**MP(5,7)**
9.	$\vdash \varphi \wedge \psi$	**MP(6,8)**
10.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big)$	**TD(**Lema 5.4-b)**)**
11.	$\vdash \big((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp\big) \to \neg\big((\varphi \wedge \psi) \to \perp\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
12.	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\big((\varphi \wedge \psi) \to \perp\big)$	Proposición 5.1-ii) (10,11)
13.	$\vdash \neg\big((\varphi \wedge \psi) \to \perp\big)$	**MP(9,12)**
14.	$\vdash \neg \sim (\varphi \wedge \psi)$	Abrev. $\sim$ (13)
15.	$\vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	Abrev. D' (14)
16.	$D'(\varphi), D'(\psi) \vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	1-15
17.	$D'(\varphi) \wedge D'(\psi) \vdash D'(\varphi \wedge \psi)$	Proposición 5.1-i) (16)
18.	$\vdash \big(D'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to D'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(17)**

I1': $\vdash \boldsymbol{G'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\vdash G'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi$	Abrev. G' (1)
3.	$\vdash \neg \sim \neg\varphi \to \neg\varphi$	**TD(**Nota 5.2**)**
4.	$\vdash \neg\varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
6.	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**EXP**
7.	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	**MP(5,6)**
8.	$\vdash \psi$	**MP(4,7)**
9.	$G'(\varphi), \varphi \vdash \psi$	1-8
10.	$G'(\varphi) \vdash \varphi \to \psi$	**TD(9)**
11.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge \neg \perp$	Lema 5.4-b)
12.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg \perp \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	**TD(**$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$**)**
13.	$\varphi \to \psi \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	**Corte(11,12)**
14.	$\varphi \to \psi \vdash \neg \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (13)
15.	$\varphi \to \psi \vdash D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (14)
16.	$G'(\varphi) \vdash D'(\varphi \to \psi)$	**Corte(10,15)**
17.	$\vdash G'(\varphi) \to D'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(16)**

I2': $\vdash \boldsymbol{N'(\varphi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\vdash N'(\varphi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim\varphi \wedge \sim\neg\varphi$	Abrev. N'
3.	$\vdash (\sim\varphi \wedge \sim\neg\varphi) \to \sim\varphi$	**Pos3**
4.	$\vdash \sim\varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \varphi \to \perp$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash \varphi$	Hipótesis
7.	$\vdash \perp$	**MP(5,6)**
8.	$N'(\varphi), \varphi \vdash \perp$	1-7
9.	$\perp \vdash \psi$	Proposición 5.1-vi)
10.	$N'(\varphi), \varphi \vdash \psi$	**Corte(8,9)**
11.	$N'(\varphi) \vdash \varphi \to \psi$	**TD(10)**
12.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\perp$	Lema 5.4-b)
13.	$N'(\varphi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\perp$	**Corte(11,12)**
14.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg\perp \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to \perp\big)$	$\underleftarrow{\mathbf{ENI}}$
15.	$N'(\varphi) \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to \perp\big)$	**Corte(13,14)**
16.	$N'(\varphi) \vdash \neg\sim(\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (15)
17.	$N'(\varphi) \vdash D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (16)
18.	$\vdash N'(\varphi) \to D'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(17)**

I3': $\vdash \boldsymbol{D'(\psi) \to D'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$\vdash D'(\psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash D'(\psi) \to \psi$	**TD(Nota 5.1)**
3.	$\vdash \psi$	**MP(1,2)**
4.	$\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	**Pos1**
5.	$\vdash \varphi \to \psi$	**MP(3,4)**
6.	$D'(\psi) \vdash \varphi \to \psi$	1-5
7.	$\varphi \to \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp$	Lema 5.4-b)
8.	$D'(\psi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp$	**Corte(6,7)**
9.	$(\varphi \to \psi) \wedge \neg \perp \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
10.	$D'(\psi) \vdash \neg\big((\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	**Corte(13,14)**
11.	$D'(\psi) \vdash \neg \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (10)
12.	$D'(\psi) \vdash D'(\varphi \to \psi)$	Abrev. D' (11)
13.	$\vdash D'(\psi) \to D'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(12)**

I4': $\vdash \boldsymbol{\big(D'(\varphi) \wedge G'(\varphi)\big) \to G'(\varphi \to \psi)}$.

1.	$D'(\varphi) \vdash \varphi$	Nota 5.1
2.	$G'(\psi) \vdash \neg\psi$	Nota 5.2
3.	$D'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \varphi \wedge \neg\psi$	Proposición 5.1-iv) (1,2)
4.	$\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$	**TD($\underleftarrow{\textbf{ENI}}$)**
5.	$D'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \neg(\varphi \to \psi)$	**Corte(3,4)**
6.	$\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \perp$	Lema 5.4-b)
7.	$\neg(\varphi \to \psi) \wedge \neg \perp \vdash \neg\big(\neg(\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	$\underleftarrow{\textbf{ENI}}$
8.	$\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\big(\neg(\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	**Corte(6,7)**
9.	$D'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \neg\big(\neg(\varphi \to \psi) \to\perp\big)$	**Corte(5,8)**
10.	$D'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash \neg \sim \neg(\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (9)
11.	$D'(\varphi) \wedge G'(\psi) \vdash G'(\varphi \to \psi)$	Abrev. G' (10)
12.	$\vdash \big(D'(\varphi) \wedge D'(\psi)\big) \to G'(\varphi \wedge \psi)$	**TD(11)**

I5’: $\vdash \big(\boldsymbol{D'(\varphi) \wedge N'(\psi)}\big) \boldsymbol{\to N'(\varphi \to \psi)}$.

I5’ - i)

1.		$\vdash D'(\varphi)$	Hipótesis
2.		$\vdash \sim \neg\varphi$	Abrev. D' (1)
3.		$\vdash \neg(\varphi \to\perp)$	Abrev. $\sim$ (2)
4.		$\vdash \neg(\varphi \to\perp) \to (\varphi \wedge \neg \perp)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
5.		$\vdash (\varphi \wedge \neg \perp) \to \varphi$	**Pos3**
6.		$\vdash \neg(\varphi \to\perp) \to \varphi$	Proposición 5.1-ii) (4,5)
7.		$\vdash \varphi$	**MP(3,6)**
8.		$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
9.		$\vdash \sim \psi \wedge \sim \neg\psi$	Abrev. N' (9)
10.		$\vdash (\sim \psi \wedge \sim \neg\psi) \to \sim \psi$	**Pos3**
11.		$\vdash \sim \psi$	**MP(9,10)**
12.		$\vdash \psi \to\perp$	Abrev. $\sim$ (11)
13.		$\vdash \varphi \to \psi$	Hipótesis
14.		$\vdash \psi$	**MP(7,13)**
15.		$\vdash \perp$	**MP(12,14)**
16.	$D'(\varphi), N'(\psi), \varphi \to \psi$	$\vdash \perp$	1-15
17.	$D'(\varphi), N'(\psi)$	$\vdash (\varphi \to \psi) \to\perp$	**TD(16)**
18.	$D'(\varphi), N'(\psi)$	$\vdash \sim (\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (17)
19.	$D'(\varphi) \wedge N'(\psi)$	$\vdash \sim (\varphi \to \psi)$	Proposición 5.1-i) (18)

I5' - ii)

1.	$\vdash N'(\psi)$	Hipótesis
2.	$\vdash \sim\psi \wedge \sim\neg\psi$	Abrev. $\sim$ (1)
3.	$\vdash (\sim\psi \wedge \sim\neg\psi) \to \sim\neg\psi$	**Pos4**
4.	$\vdash \sim\neg\psi$	**MP(2,3)**
5.	$\vdash \neg\psi \to \bot$	Abrev. $\sim$ (4)
6.	$\vdash \neg(\varphi \to \psi)$	Hipótesis
7.	$\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)$	$\underrightarrow{\textbf{ENI}}$
8.	$\vdash \varphi \wedge \neg\psi$	**MP(6,7)**
9.	$\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\psi$	**Pos4**
10.	$\vdash \neg\psi$	**MP(8,9)**
11.	$\vdash \bot$	**MP(5,10)**
12.	$N'(\psi), \neg(\varphi \to \psi) \vdash \bot$	1-11
13.	$N'(\psi) \vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \bot$	**TD(12)**
14.	$N'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \to \psi)$	Abrev. $\sim$ (13)
15.	$D'(\varphi), N'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \to \psi)$	**Mon(14)**
16.	$D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim\neg(\varphi \to \psi)$	Proposición 5.1-i) (15)

De **I5'-i)** e **I5'-ii)** se sigue que $D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash \sim(\varphi \to \psi) \wedge \sim\neg(\varphi \to \psi)$, esto es $D'(\varphi) \wedge N'(\psi) \vdash N'(\varphi \to \psi)$ y así por **TD** $\vdash \big(D'(\varphi) \wedge N'(\psi)\big) \to N'(\varphi \to \psi)$. $\square$

En forma similar al caso de $L3A^D_{\to_1}$ para demostrar que cada tautología en $L3B^D_{\to_1}$ es un teorema en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$, necesitamos definir la siguiente transformación de una fórmula de acuerdo a una valuación dada. Dado que en $L3B^D_{\to_1}$ tenemos tres valores de verdad la transformación de la Definición 5.2 generaliza la transformación empleada en la demostración del Lema de Kalmár para la lógica clásica.

Definición 5.2. *Dada una valuación v y φ una fórmula de $L3B^D_{\to_1}$ se denota la transformación de φ bajo v con φ_v y se define como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} G'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 0, \\ N'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 1, \\ D'(\varphi) & si\ v(\varphi) = 2. \end{cases}$$

Para un conjunto Ψ de fórmulas, con Ψ_v denotamos al conjunto $\Psi_v = \{\varphi_v | \varphi \in \Psi\}$.

El Lema 5.6 utiliza la Definición 5.2 para asegurar que los átomos transformados de una fórmula demuestran a la fórmula transformada en cuestión. Además es una generalización del Lema de Kalmár [30] aplicado a $L3B^D_{\to_1}$ que es posible gracias a la transformación antes dada.

Lema 5.6. Sean φ una fórmula y v una valuación en $L3B^D_{\to_1}$. Si $Atoms(\varphi)$ denota el conjunto de fórmulas atómicas en φ, entonces se puede demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Demostración: La demostración es por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ. Además dado que es análoga a la del Lema 5.3 algunos pasos y casos serán omitidos.

Caso Base: Si $\varphi = p$, donde p es una fórmula atómica, entonces $Atoms(\varphi)_v = \{\varphi_v\} = \{p_v\}$. Dado que $\varphi_v \vdash \varphi_v$ se cumple concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Supongamos que para cualquier fórmula ψ de $L3A^D_{\to_1}$ con complejidad menor que la de φ el lema se satisface.

Caso 1: $\varphi = \neg\psi$, donde la complejidad de ψ es menor que la de φ.
Por hipótesis inductiva, $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$. Sabemos que $Atoms(\varphi) = Atoms(\psi)$, así $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$. Dependiendo de la valuación tenemos tres subcasos.

Subcaso 1a: $v(\psi) = 0$. Entonces $v(\varphi) = 2$, $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\neg\psi)$ y $\psi_v = G'(\psi)$. Por **N1'** y **TD** tenemos que $G'(\psi) \vdash D'(\neg\psi)$, esto es, $\psi_v \vdash \varphi_v$. Luego al aplicar **Corte** a lo anterior y a $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 1b: $v(\psi) = 1$. Luego, $v(\varphi) = 1$, $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\neg\psi)$ y $\psi_v = N'(\psi)$. Por un lado $N'(\psi) \vdash N'(\neg\psi)$ por **N2'** y **TD**. Aplicando **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ se sigue que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 1c: $v(\psi) = 2$. En esta situación, $v(\varphi) = 0$, $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\neg\psi)$ y $\psi_v = D'(\psi)$. Usando **N3'** y **TD** tenemos que $D'(\psi) \vdash G'(\neg\psi)$, es decir $\psi_v \vdash \varphi_v$. En consecuencia al aplicar **Corte** como en los casos previos, obtenemos $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Caso 2: $\varphi = \psi \vee \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ. Por hipótesis de inducción $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\sigma)_v \vdash \sigma_v$. Además como $Atoms(\varphi)_v = Atoms(\psi)_v \cup Atoms(\sigma)_v$ por **Mon** se tiene que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ y $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$. Luego al aplicar **R-AND** a lo anterior, obtenemos $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$. De acuerdo a los valores que toman los disyuntos bajo la valuación tenemos los siguientes escenarios.

Subcaso 2a: $v(\psi) \in \overline{\mathcal{D}}$ y $v(\sigma) \in \overline{\mathcal{D}}$. Por la neoclasicidad de la disyunción $v(\varphi) \in \overline{\mathcal{D}}$. Así tenemos las siguientes posibilidades.

Si $v(\psi) = v(\sigma)$, entonces $v(\varphi) = 0$ y $\varphi_v = G'(\varphi) = G'(\psi \vee \sigma)$. Cuando $v(\sigma) = 0$, se sigue que $\psi_v = G'(\psi)$ y $\sigma_v = G'(\sigma)$. Usando **TD** y **D1'**, $G'(\psi) \wedge G'(\sigma) \vdash G'(\psi \vee \sigma)$ o bien $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. Dado que $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ si usamos **Corte** concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$. Ahora si $v(\sigma) = 1$, entonces $\psi_v = N'(\psi)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Como $N'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash G'(\psi \vee \sigma)$ por **D2'** y **TD**, después de usar **Corte** obtenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = 0$ y $v(\sigma) = 1$ entonces $v(\varphi) = 1$, $\varphi_v = N'(\varphi) = N'(\psi \vee \sigma)$, $\psi_v = G'(\psi)$ y $\sigma_v = N'(\sigma)$. Por **D3'** y **TD**, $G'(\psi) \wedge N'(\sigma) \vdash N'(\psi \vee \sigma)$, i.e. $\psi_v \wedge \sigma_v \vdash \varphi_v$. Luego de aplicar **Corte** con $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v \wedge \sigma_v$ concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Si $v(\psi) = 1$ y $v(\sigma) = 0$, entonces procedemos como anteriormente con la diferencia de que aquí aplicamos **D4'** en lugar de **D3'** para concluir que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Subcaso 2b: $v(\psi) \in \mathcal{D}$ o $v(\sigma) \in \mathcal{D}$. En este caso, $v(\varphi) = 2$ y así $\varphi_v = D'(\varphi) = D'(\psi \vee \sigma)$. Si $v(\psi) = 2$, entonces $\psi_v = D'(\psi)$ por **D5'** y **TD** $D'(\psi) \vdash D'(\psi \vee \sigma)$. Como $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ aplicando **Corte** a esta información obtenemos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$. De forma análoga si $v(\sigma) = 2$, entonces $\sigma_v = D'(\sigma)$ y $D'(\sigma) \vdash D'(\psi \vee \sigma)$ por **D6'** y **TD** o equivalentemente $\sigma_v \vdash \varphi_v$. Nuevamente como antes usando **Corte** entre $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ y $\sigma_v \vdash \varphi_v$ concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Caso 3: $\varphi = \psi \wedge \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ.

Debido a que el conectivo conjunción de $L3B^D_{\to_1}$ es el mismo que la conjunción en $L3A^D_{\to_1}$ se tiene que los incisos **C1'** al **C6'** son idénticos a los incisos **C1** al **C6**, respectivamente. Así la demostración de este caso es prácticamente igual a la del caso 3 de la prueba del Lema 5.3 por lo que la omitimos y simplemente concluimos que en esta situación $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Caso 4: $\varphi = \psi \to \sigma$, donde las complejidades de ψ y σ son menores que la de φ. Al igual que en el caso anterior, el conectivo de implicación de $L3B^D_{\to_1}$ es el mismo que la implicación en $L3A^D_{\to_1}$, por esta razón decidimos suprimir la prueba ya que el lector puede regresar a la demostración del Lema 5.3 y revisarlo. Por lo tanto, solamente concluimos en este caso que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.

Finalmente, después de revisar cada uno de los cuatro casos se satisface que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ para cualquier fórmula φ y valuación v de $L3B^D_{\to_1}$. □

5.2.2. Robustez y completitud de $L3B^D_{\to_1}$ respecto a $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$

Hemos llegado a los dos teoremas objetivo que deseamos se satisfagan respecto a la teoría $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$, primero comencemos por ver que $L3B^D_{\to_1}$ es robusta.

Teorema 5.5 (Robustez)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es un teorema en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$, entonces φ es una tautología en $L3B^D_{\to_1}$, i.e. si $\vdash \varphi$, entonces $\models \varphi$.*

Demostración: La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 5.2. □

Veamos ahora que la lógica $L3B^D_{\to_1}$ es completa respecto a la axiomática $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$.

Teorema 5.6 (Completitud)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es una tautología en $L3B^D_{\to_1}$, entonces φ es un teorema en $\mathbb{L}_{L3B^D_{\to_1}}$. Esto es, si $\models \varphi$, entonces $\vdash \varphi$.*

Demostración: Supongamos que φ es una tautología en $L3B^D_{\to_1}$, cuyo conjunto de fórmulas atómicas es Φ. Por ser tautología se satisface que $v(\varphi) = 2$ para toda valuación, así $\varphi_v = D'(\varphi)$ y por el Lema 5.3 se cumple que $\Phi_v \vdash D'(\varphi)$. Luego usando la Nota 5.1 y **MP**, $\Phi_v \vdash \varphi$.

Consideremos p un átomo cualquiera de Φ y pongamos $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$. Como $\Phi_v \vdash \varphi$ se cumple que $\Gamma_v, p_v \vdash \varphi$ para cualquier valuación v. Por tanto, se cumple que $\Gamma_v, G'(p) \vdash \varphi$, $\Gamma_v, N'(p) \vdash \varphi$ y $\Gamma_v, D'(p) \vdash \varphi$. Por el inciso e) del Lema 5.4 obtenemos que $\Gamma_v \vdash \varphi$. Eliminando hipótesis con el procedimiento anterior, después de un número finito de pasos concluimos que $\vdash \varphi$. $\square$

Con estos resultados cerramos la sección cubriendo nuestro objetivo de mostrar una axiomática para la lógica paracompleta genuina $L3B^D_{\to_1}$ que le permite ser robusta y completa. Además también concluimos este capítulo dedicado precisamente a la axiomatización de las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$.

Conclusiones

Dentro del marco de las lógicas no clásicas, las *lógicas paracompletas* son conocidas por invalidar el *Principio del tercero excluso*. Este trabajo analiza la paracompletitud desde un punto de vista dual al concepto de paraconsistencia. Las lógicas paraconsistentes de manera general violan el *Principio de no contradicción*, el cual tiene dos formulaciones ampliamente reconocidas por la comunidad científica. Debido a esto y a un enfoque dual, también tenemos dos formulaciones del *Principio del tercero excluso*.

Sin embargo, surge un inconveniente que resulta debido a que dichas formulaciones son independientes en el sentido que el cumplimiento de una no implica el de la otra y vicerversa. Por tal problema, Hernández-Tello et al. en [23] proponen estudiar un concepto de paracompletitud más restrictivo de tal forma que se restringen ambas formulaciones. A este tipo de lógicas las nombran *lógicas paracompletas genuinas*.

La noción de lógicas paracompletas genuinas únicamente involucra los conectivos negación y disyunción en el lenguaje, así en [23] se muestra un análisis del comportamiento que deben tener estos dos conectivos para generar este tipo de lógicas en el ámbito trivaluado y teniendo en consideración que se satisfagan ciertas propiedades como el ser *neoclásico* y la *extensión conservativa*. Más aún, en el mismo artículo se proporcionan posibles conectivos de conjunción e implicación adecuados que compaginan con este tipo de lógicas; para ser exactos, son siete posibilidades para la conjunción y cinco para la implicación. Además, se presentan dos lógicas paracompletas genuinas, $L3A^D$ y $L3B^D$ mediante matrices trivaluadas. En este trabajo presentamos detalladamente el análisis descrito anteriormente y a las lógicas mencionadas que se encuentran en términos de tres conectivos: negación, disyunción y conjunción.

Un hecho importante acerca de estas las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D$ y $L3B^D$ es mediante el *proceso de dualización*. Este proceso consiste en hacer ciertos cambios a las tablas de verdad de los conectivos de las lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas $L3A$ y $L3B$; considerando duales a los conectivos $\wedge$ y $\vee$ mutuamente, llegamos a las mismas tablas de verdad de los conectivos que definen a $L3A^D$ y $L3B^D$, respectivamente. Justamente por esta razón aparecen los superíndices D en el nombre de estas lógicas, esto es, se considera que $L3A^D$ es dual a $L3A$ y $L3B^D$ es dual a $L3B$.

Entre los aportes que genera esta tesis se encuentra la selección de una implicación dentro del conjunto de las cinco posibles implicaciones que mencionamos anteriormente para extender tanto a $L3A^D$ como a $L3B^D$. La implicación seleccionada satisface diversas propiedades entre las que sobresalen la neoclasicidad y la no molecularidad, dando lugar a las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$.

El mayor aporte de este trabajo es el de dotar de sendas axiomatizaciones tipo Hilbert a las lógicas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$, de tal forma que la lógica es robusta y completa respecto a la axiomática proporcionada. Para llegar a la completitud dedicamos gran parte del Capítulo 5 a exponer para cada teoría una serie de resultados necesarios incluyendo una generalización del Lema de Kalmár.

Podemos resaltar que cada axiomática a parte de los cuatro conectivos primitivos que definen a $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$ cuenta con conectivos unarios tales como: $\sim$ que es una negación neoclásica, G', N' y D' que son conectivos identificadores de los valores de verdad, valuando 2 únicamente en un caso determinado y 0 en otro. Cabe hacer énfasis en que aunque $\sim$, G', N' y D' tengan distintas abreviaciones en cada lógica, estos operan del mismo modo descrito anteriormente. Los conectivos identificadores no sólo hacen la notación más digerible sino también nos modelan el comportamiento semántico de cada uno de los conectivos primitivos, propiedades importantes para la demostración de la generalización del Lema de Kalmár.

La técnica de Kalmár consiste en establecer un lema que defina una correspondencia entre el lado sintáctico y el lado semántico de una lógica proposicional [29]. Básicamente, se construye una transformación, empleando fórmulas identificadoras de cada valor de verdad asignado a las variables proposicionales y fórmulas por una valuación particular y luego el lema proporciona una forma de demostrar, a partir de los átomos transformados de una fórmula, la fórmula transformada. Esta última parte podría interpretarse como la demostración de que cada entrada de cada tabla de verdad de cada conectivo de la lógica se puede derivar en la axiomática propuesta. La parte artesanal del trabajo aquí plasmado consiste en determinar, previo a la aplicación de la técnica de Kalmár, cuáles son los axiomas necesarios que junto con la regla de *Modus Ponens* permiten obtener un teorema de completitud para la lógica en cuestión. En esta tesis primero se revisó detalladamente la técnica de Kalmár aplicada en algunas lógicas paraconsistentes trivaluadas en el Capítulo 3 y luego se aplicó para obtener axiomatizaciones completas para las lógicas paracompletas genuinas trivaluadas $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$.

Lo que ganamos con este estudio es tener dos lógicas paracompletas genuinas que podemos utilizar posteriormente “donde se les encuentre aplicación”, mediante las dos partes que contrastamos en esta tesis, por supuesto nos referimos a la parte semántica y a la axiomática. Por un lado, la semántica de $L3A^D_{\to_1}$ y $L3B^D_{\to_1}$ la encontramos en la definición a través de matrices trivaluadas y en algunas propiedades de sus conectivos. Mientras que por otro lado, contamos con una axiomática en la cual no solo demostramos algunas propiedades generales y relevantes sino que como ya lo hemos mencionado un punto muy importante es que bajo estas teorías nuestras dos lógicas resultan ser robustas y completas.

Nota. El estilo de bibliografía que ocupamos es el aceptado por **Association of Computing Machinery "ACM"** razón por lo que aparecen resaltados distintos campos, de acuerdo a si se trata de: un artículo, un libro, una revista digital, entre otros. Para mayor información puede consultar `https://dal.ca.libguides.com/c.php?g=257109&p=1717772`.

Bibliografía

[1] ABE, J. M., AKAMA, S., Y NAKAMATSU, K. *Introduction to annotated logics: foundations for paracomplete and paraconsistent reasoning*, vol. 88. Springer, 2015.

[2] ABE, J. M., NAKAMATSU, K., Y DA SILVA FILHO, J. I. Three decades of paraconsistent annotated logics: a review paper on some applications. *Procedia Computer Science 159* (2019), 1175–1181.

[3] ARIELI, O., Y AVRON, A. The value of the four values. *Artif. Intell. 102*, 1 (1998).

[4] ARIELI, O., Y AVRON, A. Three-valued paraconsistent propositional logics. *New directions in paraconsistent logic*. Springer, 2015, pp. 91–129.

[5] BARWISE, J. *Handbook of mathematical logic*. Elsevier, 1982.

[6] BEALL JC., GLANZBERG, M., Y RIPLEY, D. Liar paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed., winter 2019 ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.

[7] BÉZIAU, J.-Y. What is paraconsistent logic. *Frontiers of paraconsistent logic* (2000), 95–111.

[8] BÉZIAU, J.-Y. Constructive negation and paraconsistency. *Studia Logica* (2012).

[9] BÉZIAU, J.-Y. Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics. *Towards Paraconsistent Engineering*. Springer International Publishing, 2016, pp. 35–47.

[10] BÉZIAU, J.-Y., Y FRANCESCHETTO, A. Strong three-valued paraconsistent logics. *New directions in paraconsistent logic*. Springer, 2015, pp. 131–145.

[11] Bolotov, A., Kozhemiachenko, D., y Shangin, V. Paracomplete logic kl: natural deduction, its automation, complexity and applications. *Journal of Applied Logics-IfCoLog Journal of Logics and their Applications 5*, 1 (2018), 221–261.

[12] Bolotov, A., y Shangin, V. Tackling incomplete system specifications using natural deduction in the paracomplete setting. In *2014 IEEE 38th Annual Computer Software and Applications Conference* (2014), IEEE, pp. 91–96.

[13] Borja Macías, V. *Extensiones de la Lógica Intuicionista, extensiones de la Lógica de da Costa y su relación.* Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Julio 2017.

[14] Buss, S. R. *Handbook of proof theory.* Elsevier, 1998.

[15] Bustamante Zamudio, G. Los tres principios de la lógica aristotélica: ¿son del mundo o del hablar? *Folios* (2008), 24 – 30.

[16] Carnielli, W. A., Coniglio, M., y D'ottaviano, I. M. L. *Paraconsistency: The logical way to the inconsistent.* CRC Press, 2002.

[17] Carnielli, W. A., y Coniglio, M. E. *Paraconsistent logic: Consistency, contradiction and negation.* Springer, 2016.

[18] da Costa, N. C. A., y Krause, D. Remarks on the applications of paraconsistent logic to physics, December 2003.

[19] Domenech, J. Breve Historia de la Lógica. `https://euclides.org/articulos/breve-historia-de-la-logica/`, 2005. Accedido 06-04-2020.

[20] Gabbay, D. M., y Woods, J. *The many valued and nonmonotonic turn in logic.* Elsevier, 2007.

[21] Gallier, J. H. *Logic for computer science: foundations of automatic theorem proving.* Courier Dover Publications, 2015.

[22] Hernández-Tello, A., Arrazola Ramírez, J., y Osorio Galindo, M. The pursuit of an implication for the logics L3A and L3B. *Logica Universalis 11*, 4 (2017), 507–524.

[23] Hernández-Tello, A., Borja Macías, V., y Coniglio, M. E. Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics L3A and L3B. In *Proceedings of the Twelfth Latin American Workshop on Logic/Languages, Algorithms and New Methods of Reasoning Puebla, Mexico, November 15, 2019.* (2020), M. J. O. Galindo, J. R. Marcial-Romero, C. Z. Cortés, y P. P. Parra, Eds., vol. 2585 of *CEUR Workshop Proceedings*, CEUR-WS.org, pp. 37–48.

[24] Hernández Tello, J. A. *Lógicas Paraconsistentes Genuinas.* Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Julio 2018.

[25] Jamshidi, M., Vadiee, N., y Ross, T. *Fuzzy logic and control: software and hardware applications*, vol. 2. Pearson Education, 1993.

[26] Kalmár, L. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls. *Acta scientiarum mathematicarum (Szeged)* (1935), 222–243.

[27] Lambert-Torres, G., Abe, J. M., da Silva Filho, J., y Martins, H. *Advances in Technological Applications of Logical and Intelligent Systems.* IOS Press, ISBN, 2009.

[28] Lee, C.-C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. i. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics 20*, 2 (1990), 404–418.

[29] Ludușan, A., et al. On the effectiveness of Kalmár's completeness proof for propositional calculus. *Logos Architekton. Journal of Logic and Philosophy of Science 3*, 01 (2009), 221–245.

[30] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, 5th ed. Chapman & Hall/CRC, 2009.

[31] Negri, S., Von Plato, J., y Ranta, A. *Structural proof theory.* Cambridge University Press, 2008.

[32] Odintsov, S. *Constructive negations and paraconsistency*, vol. 26. Springer Science & Business Media, 2008.

[33] Olvera Badillo, A. Revisiting Kalmár completeness metaproof. In *Proceedings of the Twelfth Latin American Workshop on Logic/Languages, Algorithms and New Methods of Reasoning Puebla, Mexico, November 4-5, 2010.*

(2010), M. J. O. Galindo, C. Z. Cortés, I. Olmos, J. L. Carballido, J. Arrazola, y C. Medina, Eds., vol. 677 of *CEUR Workshop Proceedings*, CEUR-WS.org, pp. 99–106.

[34] Osorio Galindo, M., Borja Macías, V., y Arrazola Ramírez, J. R. E. Revisiting da Costa logic. *Journal of Applied Logic 16* (2016), 111–127.

[35] Pérez-Gaspar, M., Hernández-Tello, A., Arrazola Ramírez, J., y Osorio Galindo, M. An axiomatic approach to CG' 3 logic. *Logic Journal of the IGPL* (2020).

[36] Priest, G. Dualising intuitionictic negation. *Principia: an international journal of epistemology 13*, 2 (2009), 165–184.

[37] Priest, G., Tanaka, K., y Weber, Z. Paraconsistent logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed., summer 2018 ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[38] Shoesmith, D. J., y Smiley, T. J. *Multiple-conclusion logic.* CUP Archive, 1978.

[39] Smith, N. J. *Vagueness and degrees of truth.* Oxford University Press, 2008.

[40] van Dalen, D. *Logic and structure (2. ed.).* Universitext. Springer, 1989.

[41] Vardi, M. Y. A Brief History of Logic. `http://liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/logica/LogicHistory.pdf`, 2003.

[42] von Plato, J. The Development of Proof Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed., winter 2018 ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[43] Wasilewska, A. *Hilbert Proof Systems Completeness of Classical Predicate Logic.* Springer International Publishing, Cham, 2018, pp. 401–440.

[44] Wikipedia. Plutón (planeta enano) — wikipedia, la enciclopedia libre, 2020. [Internet; descargado 25-agosto-2020].

[45] Wójcicki, R., Nauk, P. A., y i Socjologii, I. F. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum Wroclaw, 1984.