Universidad Tecnológica de la Mixteca

Instituto de Ingeniería Industrial y Mecánica Automotriz.

Diseño de un amortiguador regenerativo electromecánico basado en el aislador de vibración de alto rendimiento TID

Tesis

Para obtener el título de:

INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ

Presenta:

Edwin José Morales Guzmán

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Huajuapan de león, Oaxaca, México, Junio, 2024

Dedicatoria

A mi querida madre, Hayde Marisol Guzmán Torres cuyo amor y guía son la luz que ilumina mi camino. Tu sacrificio y apoyo incondicional han sido el pilar de mi fortaleza y perseverancia.

A mi familia, que ha sido mi refugio y mi alegría. Cada uno de ustedes ha contribuido a mi crecimiento personal y académico, brindándome el apoyo necesario para alcanzar mis metas.

A todos los profesores, mentores y compañeros que han sido parte de este viaje académico. Gracias por compartir su sabiduría, por desafiarme a ser mejor y por creer en mi potencial.

Este logro es tan suyo como mío, y les dedico este triunfo con todo mi corazón.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a mi guía de tesis, el Dr. Eduardo Barredo Hernandez, cuya experiencia y conocimiento han sido fundamentales en la culminación de este proyecto. Su paciencia y dedicación no solo me guiaron académicamente, sino que también me inspiraron a buscar la excelencia en mi trabajo.

Al Dr. José Gabriel Mendoza Larios, mi director de tesis, le extiendo mi gratitud por su liderazgo y consejo sabio. Su visión y dirección han sido cruciales para dar forma a mi investigación y para alcanzar los objetivos propuestos.

A la Universidad, que ha sido mi segundo hogar durante estos años de estudio. Gracias por proporcionar las herramientas, los recursos y el ambiente propicio para mi desarrollo y aprendizaje.

A los sinodales, les agradezco su tiempo, su rigurosa evaluación y sus valiosas sugerencias que enriquecieron enormemente mi trabajo.

Cada uno de ustedes ha dejado una huella imborrable en mi vida y en este logro académico. Gracias de corazón.

Abstract

The significant increase in the world's population in recent years has led to a greater demand for energy in the transportation sector, severely congesting cities with internal combustion engine vehicles. Consequently, levels of pollutant emissions and fossil fuel consumption have reached worrying levels for the environment. For these reasons, regenerative shock absorbers (RSA) emerged to harness the kinetic energy typically dissipated in viscous fluid dampers and convert it into electrical energy. By harnessing such energy, fuel efficiency can be indirectly increased by alleviating the alternator load, thereby reducing fuel consumption and pollutant emissions. Moreover, they can be utilized to extend the range of electric vehicles. However, adding an RSA in parallel to passive suspension causes a significant degradation in suspension dynamic performance at high frequencies due to the inertial force effect produced by the RSA. Therefore, the RD is coupled with the TID suspension by replacing the inerter with the RSA to harness such inertial effects, synergistically improving both vibration isolation capability and vibration energy regeneration. Subsequently, a parametric sensitivity analysis is performed using Monte Carlo simulation to determine the RSA parameters with the greatest influence on energy regeneration. Then, performance indices for the AR and AR-TID suspensions are calculated, along with the normalized performance index using the random vibration integrals approach. The suspension system optimization of the AR-TID is carried out graphically based on these performance indices. Finally, the complete vehicle model with AR-TID suspension is simulated considering artificial road profiles based on different driving cycles to determine the energy regeneration potential.

Resumen

El gran incremento en la población a nivel mundial durante los últimos años ha provocado mayor demanda de energía en el sector transporte, saturando gravemente las ciudades de vehículos con motor de combustión interna. Como consecuencia, los niveles de emisiones contaminantes y el consumo de los combustibles fósiles han alcanzado niveles preocupantes para el medio ambiente. Por estas razones, surgieron los amortiguadores regenerativos (AR) para aprovechar la energía cinética que normalmente se disipa en los amortiguadores de fluido viscoso y convertirla en energía eléctrica. Al aprovechar tal energía, se puede incrementar indirectamente la eficiencia del combustible al eliminar la carga del alternador, reduciendo así, el consumo de combustible y las emisiones contaminantes. Además, se pueden utilizar para aumentar el rango de autonomía de los vehículos eléctricos. Sin embargo, la adición de un AR en paralelo a la suspensión pasiva provoca una considerable degradación en el rendimiento dinámico de la suspensión a alta frecuencia debido al efecto de fuerza inercial que produce el AR. Por ello, se acopla el AR en la suspensión TID sustituyendo el inersor por el AR para aprovechar tales efectos inerciales, mejorando sinérgicamente tanto la capacidad de aislamiento de vibración como la regeneración de energía vibratoria. Posteriormente, se realiza un análisis de sensibilidad paramétrica utilizando la simulación Monte Carlo para determinar los parámetros del AR con mayor influencia en la regeneración de energía. Después, se calculan los índices de rendimiento de la suspensión AR y AR-TID y el índice de rendimiento normalizado utilizando la norma utilizando el enfoque de las integrales de vibración aleatoria. Con los índices de rendimiento se lleva a cabo la optimización del sistema de suspensión AR-TID de manera gráfica. Finalmente, se simula el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID considerando perfiles de carretera artificial basados en diferentes ciclos de conducción para determinar el potencial de regeneración de energía.

Nomenclatura

Notación	Descripción
AR	Amortiguador regenerativo.
BA	Body Acceleration, Aceleración de la carrocería.
SWS	Suspension Working Space o deflexión de la suspensión.
DTL	Dynamic Tire Load, Carga dinámica del automóvil.
PG	Potencia regenerada.
F_L	Fuerza de Lorentz.
m_{tp}	Masa del plato superior.
m_p	Masa del engrane planetario.
Bl	Coeficiente acoplamiento electromecánico.
R_i	Resistencia de la bobina.
R_e	Resistencia externa.
j	Relación de transmisión.
J_{FW}	Inercia rotacional del volante de inercia.
J_{am}	Inercia rotacional del volante del brazo.
J_{pcr}	Inercia rotacional del porta engrane planetario.
J_p	Inercia rotacional del engrane planetario.
J_g	Inercia rotacional del generador.
J_s	Inercia rotacional del engrane sol.
r_p	Radio del engrane planetario.
r	Radio equivalente.
r_g	Radio del rotor del generador.
k_e	Constante del generador.
m_b	Masa del vehículo.
I_p	Momento de inercia de cabeceo.

I_b	Momento de inercia de balanceo.
m_{wfl}, m_{wfr}, m_{wrr} y m_{wrl}	Masa del neumático frontal izq. der. y trasero der. izq.
l_f y l_r	Brazos de palanca para cabeceo frontal y trasero.
l_i y l_d	Brazos de palanca para balanceo izquierdo y trasero.
k_{fl}, k_{fr}, k_{rr} y k_{rl}	Rigidez del resorte secundario frontal izq. der. y trasero der. izq.
k_i	Rigidez del resorte principal.
c_{fl}, c_{fr}, c_{rr} y c_{rl}	Coeficiente del amortiguador frontal izq. der. y trasero der. izq.
c_i	Coeficiente del amortiguador principal frontal izq. der. y trasero der. izq.
k_{tfl}, k_{tfr}, k_{trr} y k_{trl}	Rigidez del neumático frontal izq. der. y trasero der. izq.
m_s, b_{fl}, b_{fr}, b_{rr} y b_{rl}	Masa equivalente del AR frontal izq. der. y trasero der. izq.
V_{fl}, V_{fr}, V_{rr} y V_{rl}	Voltaje generado en el AR frontal izq. der. y trasero der. izq.
x_{gfl}, x_{gfr}, x_{grr} y x_{rl}	Excitación vibratoria de tipo desplazamiento de las ruedas frontal izq. der. y trasero der. izq.

Simbología

η_{tp}	Eficiencia del plato superior.
η_{pg}	Eficiencia del engrane planetario.
η_g	Eficiencia del generador.
θ	Posición angular de cabeceo
ϕ	Posición angular de balanceo

Índice general

DEDICATORIA ..... **II**
AGRADECIMIENTOS ..... **IV**
ABSTRACT ..... **VI**
RESUMEN ..... **VII**
NOMENCLATURA ..... **IX**
SIMBOLOGÍA ..... **XI**
ÍNDICE GENERAL ..... **XIII**
ÍNDICE DE FIGURAS ..... **XVI**
ÍNDICE DE TABLAS ..... **XXI**
CAPÍTULO 1 ..... **3**
1. INTRODUCCIÓN **3**
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 5
1.2 JUSTIFICACIÓN 6
1.3 HIPÓTESIS 7
1.4 OBJETIVOS 7
1.4.1 Objetivo general. 7
1.4.2 Objetivos específicos. 7
1.5 METAS 8
1.6 METODOLOGÍA 8
1.7 CONSIDERACIONES Y LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN 10
CAPÍTULO 2 ..... **15**
2. ESTADO DEL ARTE **15**
2.1 SUSPENSIONES AUTOMOTRICES 15
2.2 INERSOR 17
2.3 SUSPENSIÓN AUTOMOTRIZ BASADA EN INERSOR. 21
2.4 SUSPENSIONES REGENERATIVAS AUTOMOTRICES 25
2.4.1 Amortiguador regenerativo electromagnético lineal. 27
2.4.2 Amortiguador regenerativo electrohidráulico. 30
2.4.3 Amortiguador regenerativo electromecánico. 33

2.5 Conclusión del estado del arte 41
CAPÍTULO 3 45
3. MARCO TEÓRICO 45
3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange para el acoplamiento de sistemas electromecánicos 45
3.2 Ley de Faraday 46
3.3 Leyes de Kirchhoff 46
3.4 Modelos dinámicos del vehículo 47
3.4.1 Modelos de suspensión de un cuarto de vehículo. 48
3.4.2 Modelos de suspensión de medio vehículo. 49
3.4.3 Modelos de suspensión del vehículo completo. 51
3.4.4 Modelo del perfil de carretera. 53
3.5 Método Monte Carlo 54
3.6 Norma H2 y su optimización 56
3.7 Medidas de rendimiento dinámico de las suspensiones automotrices 57
3.8 Modelado y simulación de la suspensión TID 58
CAPÍTULO 4 65
4. MODELADO MATEMÁTICO DE UN CUARTO, MEDIO Y VEHÍCULO COMPLETO ACOPLADO CON TID, AR Y AR-TID. 65
4.1 Modelos de suspensión con TID 65
4.2 Modelos de suspensión con AR 70
4.3 Modelos de suspensión con AR-TID 76
CAPÍTULO 5 83
5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARAMÉTRICA. 83
5.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de la suspensión pasiva y suspensión TID 83
5.1.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para un cuarto de vehículo. 84

5.1.2 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para medio vehículo.... 86
5.1.3 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para vehículo completo. 88
5.2 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de la suspensión pasiva y suspensión AR 90
5.3 Análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método de simulación Monte Carlo 92
CAPÍTULO 6 97
6. OPTIMIZACIÓN Y COMPARACIÓN DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN AR-TID 97
6.1 Obtención de los índices de rendimiento 97
6.2 Optimización y comparación del sistema AR-TID con el TID convencional 100
6.3 Optimización, comparación y simulación del sistema AR-TID con el AR convencional 106
6.4 Simulación numérica basada en ciclos de conducción 114
CAPITULO 7 125
7. CONCLUSIÓN 125
APÉNDICE A. DEDUCCIÓN DEL RADIO EQUIVALENTE DEL MECANISMO DE BRAZO DENTADO 129
APÉNDICE B. DEDUCCIÓN DE LA MASA EQUIVALENTE 132
APÉNDICE C. DEDUCCIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE 133
APÉNDICE D. COEFICIENTES DE LAS MATRICES PARA EL ANÁLISIS FRECUENCIAL DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN TANTO PASIVOS COMO REGENERATIVOS 133
APÉNDICE E. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL DEL PERFIL DE CARRETERA ALEATORIO 138
APÉNDICE F. OBTENCIÓN DE LOS ÍNDICES DE RENDIMIENTO PARA UN CUARTO DE VEHÍCULO EN LAS SUSPENSIONES REGENERATIVAS CON AR-TID Y AR EN PARALELO 139
APÉNDICE G. MATRICES DE LAS ECUACIONES EN ESPACIO DE ESTADOS PARA LOS MODELOS DE MEDIO Y VEHÍCULO COMPLETO CON AR-TID 142
REFERENCIAS 147

Índice de figuras

FIGURA 1. POTENCIAL DE MEJORA EN LA EFICIENCIA DEL COMBUSTIBLE UTILIZANDO SUSPENSIONES REGENERATIVAS. 4

FIGURA 2. PASOS DE LA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN. 8

FIGURA 3. RED MECÁNICA TID Y AMORTIGUADOR REGENERATIVO DE BRAZO DENTADO CON SU RESPECTIVO CIRCUITO DE RECOLECCIÓN DE ENERGÍA. 11

FIGURA 4. REPRESENTACIÓN DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN: A) PASIVA, B) ACTIVA Y C) SEMIACTIVA. 16

FIGURA 5. SÍMBOLO DEL INERSOR. 18

FIGURA 6. ANALOGÍA DE LOS DISPOSITIVOS ELÉCTRICOS Y MECÁNICOS. 18

FIGURA 7. INERSOR DE PIÑÓN-CREMALLERA. 19

FIGURA 8. A) INERSOR DE TORNILLO-BOLA, B) INERSOR HIDRÁULICO CON BOMBA DE ENGRANES, C) INERSOR DE FLUIDO Y D) INERSOR ROTACIONAL. 20

FIGURA 9. DISEÑOS DE SUSPENSIÓN BASADOS EN INERSOR. 22

FIGURA 10. MODELO DE LA SUSPENSIÓN SEMIACTIVA EN UN CUARTO DE VEHÍCULO. 23

FIGURA 11. MODELO DE SUSPENSIÓN ISD. 24

FIGURA 12. PÉRDIDAS DE ENERGÍA EN EL VEHÍCULO. 25

FIGURA 13. ESQUEMA DE UN SISTEMA DE REGENERACIÓN DE ENERGÍA. 26

FIGURA 14. VISTA SECCIONADA DE UN AMORTIGUADOR ELECTROMAGNÉTICO LINEAL. 28

FIGURA 15. VISTA SECCIONADA DE UN AMORTIGUADOR ELECTROMAGNÉTICO HÍBRIDO. 29

FIGURA 16. VISTA SECCIONADA DE AMORTIGUADOR ELECTROMAGNÉTICO HÍBRIDO. 29

FIGURA 17. AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROHIDRÁULICO CON RECTIFICADOR DE MOVIMIENTO. A) PROTOTIPO, B) DIAGRAMA. 31

FIGURA 18. AMORTIGUADOR HIDRÁULICO DE DOBLE TUBO. 32

FIGURA 19. SISTEMA DE SUSPENSIÓN HIDRÁULICA INTERCONECTADA BASADO EN AMORTIGUADORES REGENERATIVOS ELECTROHIDRÁULICOS. 33

FIGURA 20. PROTOTIPO DE AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO DEL TIPO PIÑÓN-CREMALLERA. 34

FIGURA 21. PROTOTIPO DE AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO CON CREMALLERAS HELICOIDALES DE ROSCAS OPUESTAS. 35

FIGURA 22. AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO EN EL NEUMÁTICO. 36

FIGURA 23. AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO DE 3 MECANISMOS Y 6 GENERADORES. MODELO, MONTAJE Y DIAGRAMA.....37

FIGURA 24. AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO CON DOS MECANISMOS DE TORNILLO-BOLA. 37

FIGURA 25. AMORTIGUADOR ELECTROMECÁNICO DE A) UN MECANISMO DE BRAZO DENTADO Y B) DOBLE MECANISMO DE BRAZO DENTADO. 39

FIGURA 26. AMORTIGUADOR ELECTROMECÁNICO DE A) TORNILLO ALGEBRAICO Y B) ENGRANAJES HELICOIDALES. 39

FIGURA 27. AMORTIGUADOR ELECTROMECÁNICO DE SEGUIDOR DE LEVA DE BARRIL. 40

FIGURA 28. VISTA DE SECCIÓN DE AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO BASADO EN EL MECANISMO DE ESLABÓN RANURADO. 41

FIGURA 29. CIRCUITO RL.....47

FIGURA 30. MODELO DE SUSPENSIÓN DE UN CUARTO DE VEHÍCULO. 48

FIGURA 31. MODELO DE SUSPENSIÓN DE MEDIO DE VEHÍCULO. 50

FIGURA 32. MODELO DE SUSPENSIÓN DEL VEHÍCULO COMPLETO. 52

FIGURA 33. DIAGRAMA DE FLUJO DE LAS SIMULACIONES DE SENSIBILIDAD PARAMÉTRICA MONTE CARLO. 55

FIGURA 34. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN TID DE LAS GANANCIAS DE: A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO. 61

FIGURA 35. RESPUESTAS DINÁMICAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN TID DE: A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....62

FIGURA 36. DIAGRAMA DE UN CUARTO DE SUSPENSIÓN CON TID. 65

FIGURA 37. DIAGRAMA DE UN CUARTO DE SUSPENSIÓN CON AR. 72

FIGURA 38. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN TID DE A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....85

FIGURA 39. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE MEDIO VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN TID DE: A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN DE LA RUEDA DELANTERA Y C) RUEDA TRASERA, D) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO DE LA RUEDA DELANTERA Y E) RUEDA TRASERA. 87

FIGURA 40. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE VEHÍCULO COMPLETO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN TID DE: A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN EN LAS CUATRO RUEDAS Y C) CARGA DINÁMICA DE LOS CUATRO NEUMÁTICOS. 89

FIGURA 41. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN AR DE A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....91

FIGURA 42. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LA POTENCIA REGENERADA. 92

FIGURA 43. POTENCIA ELÉCTRICA REGENERADA PARA LA VARIACIÓN ALEATORIA DESDE SU VALOR MEDIO HASTA UNA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL 30% DE: A) RESISTENCIA INTERNA, B) RESISTENCIA EXTERNA, C) RELACIÓN DE TRANSMISIÓN, D) CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO ELECTROMECÁNICO, E) INDUCTANCIA, F) RADIO DEL GENERADOR. 94

FIGURA 44. SUPERFICIES Y CURVAS DE CONTORNO DE LOS ÍNDICES DE RENDIMIENTO DEL SISTEMA AR-TID EN LA SUSPENSIÓN DE SHEN, OBTENIDAS A PARTIR DE LA VARIACIÓN DE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN J DE A) 80 Y B)100..... 102

FIGURA 45. SUPERFICIES Y CURVAS DE CONTORNO DE LOS ÍNDICES DE RENDIMIENTO DEL SISTEMA AR-TID EN LA SUSPENSIÓN DE SHEN, OBTENIDAS A PARTIR DE LA VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA INTERNA DE A) 10 Y B) 30 OHMS.104

FIGURA 46. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA, SUSPENSIÓN TID Y SUSPENSIÓN AR-TID DE A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....105

FIGURA 47. SUPERFICIES Y CURVAS DE CONTORNO DEL ÍNDICE DE RENDIMIENTO NORMALIZADO DEL SISTEMA AR-TID OBTENIDAS A PARTIR DEL VALOR DE A) LA RESISTENCIA INTERNA DE 10 OHMS Y B) LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN EN 60..... 107

FIGURA 48. SUPERFICIES Y CURVAS DE CONTORNO DE LOS ÍNDICES DE RENDIMIENTO DEL SISTEMA AR-TID EN LA SUSPENSIÓN DE ZHANG, OBTENIDAS CON UN VALOR CONSTANTE DE 10 OHMS PARA LA RESISTENCIA INTERNA. 108

FIGURA 49. RESPUESTAS EN FRECUENCIA DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA, SUSPENSIÓN AR Y SUSPENSIÓN AR-TID DE LA A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO. 109

FIGURA 50. PERFIL ARTIFICIAL DE CARRETERA ALEATORIO 110

FIGURA 51. RESPUESTAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN AR-TID DE LA A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....112

FIGURA 52. RESPUESTAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE LAS DINÁMICAS EN EL MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO CON SUSPENSIÓN PASIVA Y SUSPENSIÓN AR-TID DE LA A) ACELERACIÓN DE LA CARROCERÍA, B) DEFLEXIÓN DE LA SUSPENSIÓN Y C) CARGA DINÁMICA DEL NEUMÁTICO.....113

FIGURA 53. PERFIL ARTIFICIAL DE CARRETERA ALEATORIO A) CLASE C Y CLASE D, B) PARA LAS CUATRO RUEDAS.....115

FIGURA 54. A) NUEVO CICLO DE VELOCIDAD DE CONDUCCIÓN EUROPEO (NEDC) Y B) PERFIL DE CARRETERA CLASE C Y D UTILIZANDO EL NEDC. 116

FIGURA 55. A) CICLO DE CONDUCCIÓN DEL PROCEDIMIENTO MUNDIAL ARMONIZADO DE PRUEBAS DE VEHÍCULOS LIGEROS (WLTP) Y B) PERFIL DE

CARRETERA CLASE C Y D UTILIZANDO EL WLTP.....117

FIGURA 56. A) CICLO DE CONDUCCIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE PRUEBA FEDERAL (FTP) Y B) PERFIL DE CARRETERA CLASE C Y D UTILIZANDO EL FTP....118

FIGURA 57. A) CICLO DE CONDUCCIÓN DE LA PRUEBA DE ECONOMÍA DE COMBUSTIBLE EN CARRETERA (HWFET) Y B) PERFIL DE CARRETERA CLASE C Y D UTILIZANDO EL HWFET.....119

FIGURA 58. POTENCIA ELÉCTRICA INSTANTÁNEA REGENERADA EN EL MODELO DE VEHÍCULO COMPLETO CON SUSPENSIÓN AR-TID, CONSIDERANDO EL CICLO DE CONDUCCIÓN NEDC PRODUCIDO EN: A) EL EJE DELANTERO Y B) EL EJE TRASERO. 120

FIGURA 59. POTENCIA ELÉCTRICA INSTANTÁNEA REGENERADA EN EL MODELO DE VEHÍCULO COMPLETO CON SUSPENSIÓN AR-TID, CONSIDERANDO EL CICLO DE CONDUCCIÓN WLTP PRODUCIDO EN: A) EL EJE DELANTERO Y B) EL EJE TRASERO. 121

FIGURA 60. POTENCIA ELÉCTRICA INSTANTÁNEA REGENERADA EN EL MODELO DE VEHÍCULO COMPLETO CON SUSPENSIÓN AR-TID, CONSIDERANDO EL CICLO DE CONDUCCIÓN FTP PRODUCIDO EN: A) EL EJE DELANTERO Y B) EL EJE TRASERO. 122

FIGURA 61. POTENCIA ELÉCTRICA INSTANTÁNEA REGENERADA EN EL MODELO DE VEHÍCULO COMPLETO CON SUSPENSIÓN AR-TID, CONSIDERANDO EL CICLO DE CONDUCCIÓN HWFET PRODUCIDO EN: A) EL EJE DELANTERO Y B) EL EJE TRASERO. 123

FIGURA 62. ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN BRAZO DEL MECANISMO DE BRAZO DENTADO. 129

FIGURA 63. CONVERSIÓN DE MOVIMIENTO DEL BRAZO 130

FIGURA 64. RELACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE BRAZO DENTADO. 131

Índice de tablas

TABLA 1. PARÁMETROS PARA EL MODELO DE SUSPENSIÓN DE VEHÍCULO COMPLETO. 11

TABLA 2. PARÁMETROS FÍSICOS DEL AMORTIGUADOR REGENERATIVO ELECTROMECÁNICO DE BRAZO DENTADO. 12

TABLA 3. NIVELES DE RUGOSIDAD DE CARRETERA POR LA NORMA ISO 8608. 54

TABLA 4. PARÁMETROS DE LA SUSPENSIÓN TID. 60

Capítulo 1

1. Introducción

En las últimas décadas, el enorme crecimiento de la población provocó un gran incremento en las unidades de transporte a nivel mundial. En consecuencia, los niveles de contaminación han alcanzado cifras preocupantes incentivando a los investigadores a desarrollar tecnologías sostenibles y con mayor eficiencia. La tecnología de vehículos eléctricos es una posible solución que aún sigue en desarrollo ofreciendo cero emisiones contaminantes y una mayor eficiencia que aprovecha mejor la energía. Desafortunadamente, no se han desarrollado nuevas tecnologías en baterías y métodos de generación de energía eléctrica que asegure el empleo sostenible de vehículos eléctricos en masa. Por otro lado, se han investigado maneras de aumentar la eficiencia de los vehículos basados en motor de combustión interna, al mismo tiempo que se reducen las emisiones contaminantes. Un ejemplo es el desarrollo de combustibles sintetizados que mejoren las propiedades del diésel y la gasolina actual, aumentando el rendimiento y reduciendo la producción de gases nocivos. Otra posible solución es el empleo de suspensiones regenerativas, las cuales son el objeto de estudio de este trabajo. Dichas suspensiones son capaces de transformar la energía cinética producida por las irregularidades del camino en energía eléctrica aprovechable. Esto permite aumentar la eficiencia de los vehículos con motor de combustión interna retirando o disminuyendo la carga del alternador (Figura 1). En cuanto a los vehículos eléctricos, se ha demostrado teóricamente que el uso de suspensiones regenerativas puede incrementar el rango de autonomía, el cual representa una de las desventajas de estos tipos de vehículos.

Las suspensiones regenerativas se clasifican de acuerdo a la forma en que se aprovecha o transforma el movimiento en: electromagnéticos, electromecánicos y electrohidráulicos. Por cuestiones de eficiencia, potencia de regeneración de energía y número de componentes, se pretende diseñar un amortiguador regenerativo electromecánico. Adicional a la regeneración de energía, se tiene como objetivo mejorar la efectividad en la mitigación de vibraciones de la suspensión mediante el acoplamiento de un aislador de vibraciones de alto rendimiento denominado TID. La red mecánica TID compuesta de un resorte y amortiguador en paralelo

conectados en serie con un inersor ya ha sido analizado en las suspensiones automotrices, resultando en una notable mejora en los índices de rendimiento en comparación con una suspensión pasiva tradicional. Esto se logró gracias al empleo del novedoso dispositivo mecánico llamado inersor (*The Inerter*) introducido por Smith en 2002. Este dispositivo de dos terminales es capaz de proporcionar una fuerza entre sus terminales proporcional a la aceleración relativa entre ellas. Adicionalmente, debido a que el inersor es capaz de almacenar energía completó la analogía eléctrica-mecánica adoptando el comportamiento del capacitor.

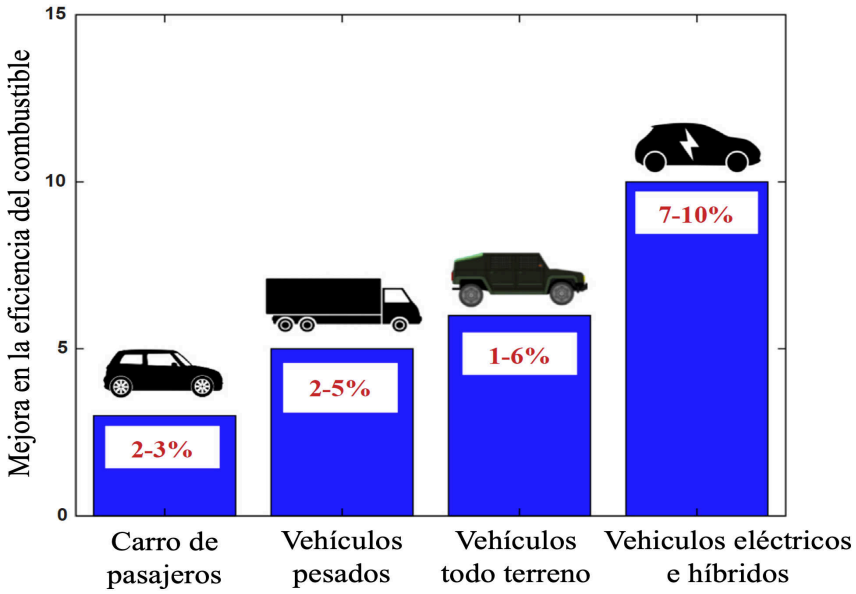


Figura 1. *Potencial de mejora en la eficiencia del combustible utilizando suspensiones regenerativas. Fuente: (Abdelkareem, Xu, Ali, et al., 2018)*

Posteriormente, se realizará un análisis de sensibilidad paramétrica con el método de simulación Montecarlo para conocer los parámetros a los cuales es sensible la potencia de regeneración de energía para maximizarla en lo posible. Después se realizará un proceso de optimización por medio de la norma H_2 para obtener los parámetros óptimos de la suspensión, con el fin de adaptar el amortiguador regenerativo a los valores necesarios.

Finalmente, se crearán diversos perfiles de carretera con diferentes rugosidades y velocidades de conducción para calcular la potencia que es capaz de regenerar la suspensión diseñada. Adicionalmente, se calcularán los índices de rendimiento para realizar una comparación con los

de la suspensión pasiva para corroborar que la suspensión AR-TID es más segura y más cómoda a pesar de tener la característica de regeneración de energía.

1.1 Planteamiento del problema

A nivel mundial, el sector transporte representa el segundo lugar en consumo de energía solo por debajo de la industria. La mayor parte de esta energía proviene de los combustibles fósiles lo que provoca una gran cantidad de emisiones nocivas y el agotamiento del petróleo. Por estas razones, los investigadores se han enfocado en diseñar suspensiones regenerativas para aumentar la baja eficiencia de los vehículos que utilizan máquinas de combustión interna, y en el caso de los vehículos eléctricos y de energías alternativas, se busca aumentar la autonomía debido a la limitada tecnología actual en baterías. El aprovechamiento de la energía disipada en los amortiguadores aumentaría la eficiencia del combustible hasta en un 10% y mejoraría la economía del combustible hasta 0.7 L cada 100 km, al mismo tiempo que se reducen 3 g por km las emisiones (Abdelkareem, Xu, Ali, et al., 2018).

En cuanto a las suspensiones activas y semiactivas, una de las desventajas que más afecta hoy en día es el alto consumo de energía para realizar la acción de control de la suspensión. Lo que ha obligado a los investigadores a buscar alternativas como diseñar suspensiones semiactivas de bajo consumo. Desafortunadamente, estas poseen una robustez inferior a la que proveen las suspensiones activas, la cual proporciona los mejores compromisos de diseño entre los índices de rendimiento del sistema de suspensión. Sin embargo, la alta demanda de energía y de actuadores voluminosos son los principales inconvenientes de este tipo de aislador de vibraciones, además de incrementar la carga del tren motriz del vehículo.

Por las razones antes mencionadas, los amortiguadores regenerativos integrados en los sistemas de suspensión activos y semiactivos, son capaces desde reducir el consumo energético, hasta llegar a ser sistemas completamente autoalimentados para resolver la problemática del alto consumo de energía. Así mismo, existen en la actualidad numerosas investigaciones con prototipos de amortiguadores regenerativos enfocados a vehículos eléctricos, con el fin de regenerar energía para aumentar la autonomía de estos o para alimentar diversos dispositivos de

monitoreo y control, reduciendo la carga del sistema de baterías. Cabe destacar, que los amortiguadores regenerativos electromecánicos sufren de deterioración en los índices de rendimiento, especialmente a alta frecuencia de excitación debido a valores altos de inertancia en el sistema de rectificación de movimiento. Tomando esto en cuenta, se pretende diseñar un amortiguador regenerativo electromecánico que además de regenerar energía para diferentes fines, sea capaz de mejorar las dinámicas de la suspensión pasiva empleando en él, una red mecánica que ya ha sido estudiada en la literatura.

1.2 Justificación

El creciente consumo de energía en el transporte proveniente de combustibles fósiles ha provocado un continuo agotamiento del petróleo. Por esta razón, se ha comenzado a utilizar fuentes de energía alternativas y se han realizado numerosas investigaciones para incrementar la eficiencia del combustible. Un porcentaje de la energía que se produce a partir del combustible es normalmente disipada en forma de calor en la suspensión automotriz y es una cantidad importante que se puede recuperar mediante los amortiguadores regenerativos.

En cuanto a vehículos híbridos y completamente eléctricos, se ha demostrado en investigaciones que las suspensiones regenerativas son capaces de incrementar la autonomía de estos vehículos. Lo cual, representa una de las mayores desventajas de los vehículos eléctricos debido a la falta de infraestructura para la recarga del sistema de baterías y/o ultra-capacitores. Adicionalmente, con la energía regenerada se podrían alimentar diferentes sensores y sistemas de control de baja potencia.

Por estas razones, se pretende realizar el diseño de un amortiguador regenerativo electromecánico que además de su capacidad para regenerar energía, mejore las dinámicas de una suspensión pasiva empleando como acoplamiento dinámico la red mecánica conocida como TID.

1.3 Hipótesis

Mediante el uso adecuado del aislador de vibración de alto rendimiento dinámico nombrado en la literatura como TID, se mejorará dualmente tanto la capacidad de regeneración de energía vibratoria como la efectividad de mitigación de vibración de la suspensión regenerativa electromecánica convencional.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general.

Determinar el diseño óptimo del sistema regenerativo electromecánico basado en el TID, para mejorar sinérgicamente tanto la capacidad de transducción de energía como la de mitigación de vibración estocástica.

1.4.2 Objetivos específicos.

1. Analizar el modelo matemático en el dominio del tiempo del AR propuesto utilizando el formulismo de Euler-Lagrange.
2. Acoplar las dinámicas del AR al modelo de la cuarta parte, medio y del vehículo completo, para determinar las ecuaciones diferenciales de movimiento.
3. Realizar un análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método de simulación Monte-Carlo a la respuesta en frecuencia de la potencia eléctrica de salida.
4. Calcular los índices de rendimiento del sistema de suspensión a través de la norma $\mathscr{H}_2$, utilizando el enfoque de integrales de vibración aleatoria.
5. Formular y minimizar el índice de rendimiento normalizado para determinar los parámetros óptimos del AR-TID.
6. Realizar simulaciones numéricas del modelo de vehículo completo considerando los ciclos de velocidad de conducción.

7. Determinar el potencial de regeneración de energía vibratoria del nuevo diseño del AR electromecánico basado en el TID.
8. Realizar un análisis comparativo entre el nuevo diseño con el existente en la literatura.

1.5 Metas

Las metas que se desean alcanzar con la realización de este trabajo son las siguientes:

- Modelos matemáticos de la suspensión de un cuarto de vehículo, medio vehículo y vehículo completo con y sin el amortiguador regenerativo electromecánico.
- Diseño óptimo de la suspensión AR-TID de modo que se maximice la generación de potencia eléctrica con un mejor rendimiento de suspensión en comparación con una suspensión pasiva convencional.

1.6 Metodología

Para este trabajo de investigación se utilizó la metodología descrita en (Canales et al., 2020). En la Figura 2 se pueden observar los pasos a seguir para el desarrollo de la investigación planteada.

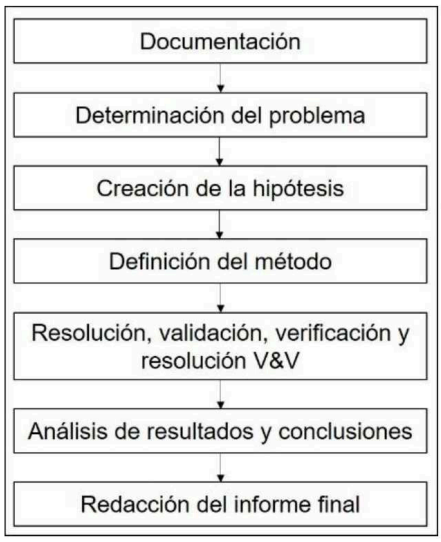


Figura 2. Pasos de la metodología de investigación.
Fuente: (Canales et al., 2020)

Documentación: Esta fase consiste en realizar una amplia investigación a través del tiempo en temas íntimamente relacionados con el tema de tesis propuesto. En este caso se buscó información acerca de prototipos de amortiguadores regenerativos realizados hasta el momento, con énfasis en los dispositivos electromecánicos, con la finalidad de comparar eficiencias de conversión de energía y los índices de rendimiento que se mejoran en comparación con una suspensión pasiva. Adicionalmente, se investigará un poco acerca de las suspensiones pasivas, activas y semiactivas como parte del tema seleccionado. Por último, se debe incluir el desarrollo del inersor y los impactos que ha tenido en su aplicación en la suspensión automotriz, especialmente la red mecánica TID.

Determinación del problema: Este paso de la metodología es para establecer la finalidad de la aportación de este trabajo y delimitarlo para cumplir los objetivos en concreto sin extender innecesariamente el trabajo de investigación. Por ende, el problema planteado consiste en capturar la energía cinética de la suspensión automotriz para su posterior conversión a energía eléctrica y su aprovechamiento en vehículos eléctricos o para aumentar la eficiencia de vehículos con motor a combustión interna. Adicionalmente, mejorar ligeramente los índices de rendimiento a baja frecuencia sin necesidad de incorporar alguna función activa o semiactiva.

Creación de la hipótesis: Es la postulación de lo que se quiere realizar y demostrar a través del siguiente trabajo de investigación para dar solución al problema planteado a través de diferentes herramientas de simulación. Adicionalmente, la hipótesis no siempre puede ser demostrada por lo que puede ser refutada en el proceso.

Para este trabajo la hipótesis es la siguiente: Mediante el uso adecuado del aislador de vibración de alto rendimiento dinámico nombrado en la literatura como TID, se mejorará dualmente tanto la capacidad de regeneración de energía vibratoria como la efectividad de mitigación de vibración de la suspensión regenerativa electromecánica convencional.

Definición del método: Se utilizarán las ecuaciones de Euler-Lagrange para la realización del modelo matemático que rige el comportamiento de los amortiguadores regenerativos incluyendo tanto la parte mecánica como la electromagnética. Después, se realizarán diferentes perfiles de carretera y ciclos de velocidad de conducción en el software Matlab/Simulink a los cuales será

sometido el modelo del sistema de suspensión. Así mismo, por medio de las leyes de Kirchhoff se analizará el circuito de recolección de energía para cuantificar la potencia de salida. Posteriormente, mediante un tratamiento matemático se obtendrán las funciones de respuesta en frecuencia a modo de corroboración con las respuestas en el dominio del tiempo. Finalmente, se realizará la optimización del sistema para obtener el mejor balance posible entre confort, seguridad y la potencia regenerada, donde se calcularán los índices de rendimiento del sistema optimizado.

Resolución, validación y verificación: El sistema será sometido a intensas simulaciones tomando en cuenta modelos en el dominio de la frecuencia y el tiempo para la validación y verificación del sistema.

Análisis de resultados y conclusiones: Al final de las simulaciones y soluciones numéricas, se realizará una comparación entre los dominios del tiempo y la frecuencia para verificar su concordancia. Posteriormente, se compararán con investigaciones previas y con el rendimiento de una suspensión pasiva para verificar que se ha cumplido con la hipótesis planteada y se ha resuelto la problemática o son necesarios algunos cambios para la satisfacción de la misma.

Redacción del informe final: Posterior a la obtención de resultados satisfactorios acorde a los objetivos se debe realizar la redacción de la tesis de manera ordenada resaltando cada uno de los métodos, procesos y resultados obtenidos a lo largo de la investigación. Se deben explicar claramente y de manera coherente los descubrimientos obtenidos y su relación con el cumplimiento de los objetivos planteados al inicio de este trabajo.

1.7 Consideraciones y limitaciones de la investigación.

Debido a la gran variedad de diseños de suspensiones con inersores y a los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos, se realizó una extensa investigación descrita en la siguiente sección. A partir de la cual, se eligió el amortiguador regenerativo electromecánico de brazo dentado diseñado por (Zhang et al., 2018), para adaptarse al arreglo de suspensión conocido como TID. En la parte izquierda de la Figura 3 se encuentra el arreglo conocido como TID, compuesto de un inersor conectado al arreglo en paralelo de un amortiguador y un resorte. En la

parte central se muestra el amortiguador regenerativo de brazo dentado, ilustrando cada uno de sus componentes. Así mismo, en la parte derecha se muestra el circuito de recolección de energía perteneciente al generador del AR.

En seguida, en la Tabla 2 se describen los valores de los parámetros físicos de los componentes del amortiguador regenerativo establecidos por el diseñador, los cuales, son fundamentales para el análisis que se llevará a cabo en este trabajo de investigación. Así mismo, se consideran los parámetros de la suspensión del vehículo completo descritos en la Tabla 1, los cuales fueron utilizados por (Zhang et al., 2018) como parte de su investigación. De esta manera, se podrá realizar una comparación justa entre el diseño final de este trabajo de investigación con el existente en la literatura.

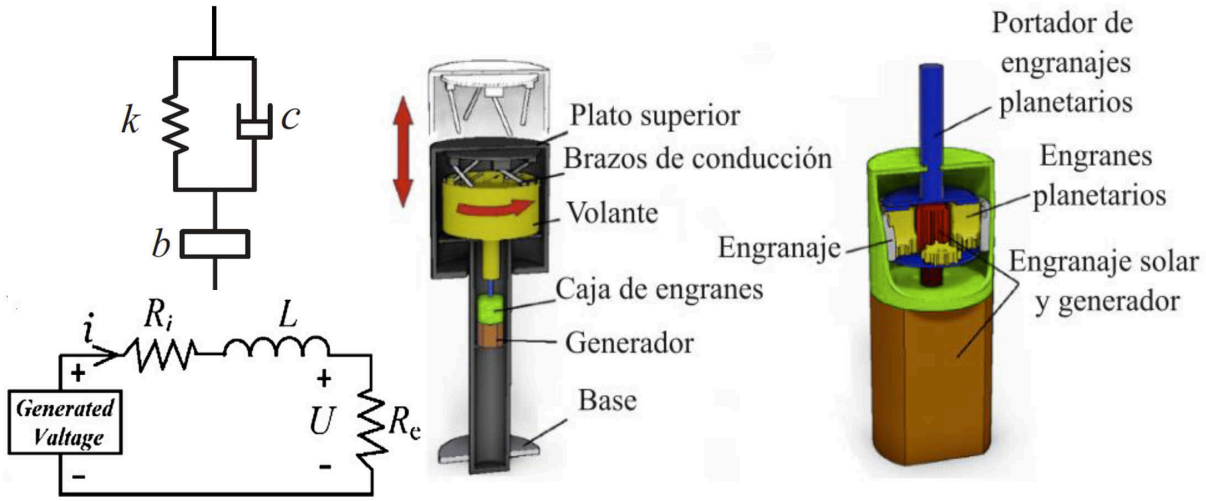


Figura 3. Red mecánica TID y amortiguador regenerativo de brazo dentado con su respectivo circuito de recolección de energía.

Fuentes: (Zhang et al., 2018) y (Shen et al., 2016)

Tabla 1. Parámetros para el modelo de suspensión de vehículo completo.

Masa del vehículo m_b	1040	$[kg]$
Momento de inercia de cabeceo I_p	3000	$[kg \cdot m^2]$
Momento de inercia de balanceo I_b	574	$[kg \cdot m^2]$
Masa del neumático: m_{wfl}, m_{wfr}, m_{wrr} y m_{wrl}	40	$[kg]$
Brazo de palanca para cabeceo: l_f y l_r	1.6	$[m]$

Brazo de palanca para balanceo: l_i y l_d	0.7	$[m]$
Rigidez del resorte: k_{fl}, k_{fr}, k_{rr} y k_{rl}	26	$[kNm^{-1}]$
Coeficiente del amortiguador: c_{fl}, c_{fr}, c_{rr} y c_{rl}	520	$[Nsm^{-1}]$
Rigidez del neumatico: k_{tfl}, k_{tfr}, k_{trr} y k_{trl}	130	$[kNm^{-1}]$

Fuente: (Zhang et al., 2018).

Tabla 2. Parámetros físicos del amortiguador regenerativo electromecánico de brazo dentado.

Parámetros	Valores	
Masa del plato superior m_{tp}	3.722	$[kg]$
Masa del engrane planetario m_p	0.049	$[kg]$
Acoplamiento electromecánico Bl	6.5	$[Tm]$
Resistencia de la bobina R_e	113	$[\Omega]$
Resistencia externa R_e	113	$[\Omega]$
Relación de transmisión j	22.6	.
Inercia rotacional del volante de inercia J_{FW}	$6.65\ x10^{-2}$	$[kgm^2]$
Inercia rotacional del volante del brazo J_{am}	$1.92\ x10^{-4}$	$[kgm^2]$
Inercia rotacional del porta engrane planetario J_{pcr}	$5.64\ x10^{-7}$	$[kgm^2]$
Inercia rotacional del engrane planetario J_p	$5.6\ x10^{-7}$	$[kgm^2]$
Inercia rotacional del generador J_g	$5.75\ x10^{-6}$	$[kgm^2]$
Inercia rotacional del engrane sol J_s	$2.45\ x10^{-7}$	$[kgm^2]$
Radio del engrane planetario r_p	0.00925	$[m]$
Radio equivalente r	0.033	$[m]$
Radio del rotor del generador r_g	0.01	$[m]$
Eficiencia del plato superior η_{tp}	92	[%]
Eficiencia del engrane planetario η_{pg}	80	[%]
Eficiencia del engrane planetario η_g	65	[%]
Constante del generador k_e	0.066	$[Vs/\text{rad}]$

Fuente: (Zhang et al., 2018).

Por último, el diseño de la suspensión regenerativa basada en el TID consiste en proponer el uso de un AR existente para sustituir el inersor en el arreglo denominado TID. Posteriormente, se determinarán los respectivos modelos matemáticos de la suspensión para el proceso de optimización y evaluación mediante diversas simulaciones numéricas. Cabe aclarar, que no se realizará de manera física el sistema de suspensión propuesto por las limitaciones tecnológicas y económicas. Además, con el avance tecnológico con los que cuentan las herramientas matemáticas como los software Matlab, Matlab/Simulink y Maple, es posible cumplir los objetivos y comprobar o refutar la hipótesis de este trabajo de investigación.

Capítulo 2

2. Estado del arte

2.1 Suspensiones automotrices

La suspensión de un automóvil es uno de los sistemas fundamentales para la seguridad de los pasajeros que conducen en diferentes condiciones de carretera y velocidad, así como, proveer el mayor nivel de confort de manejo posible. Un sistema de suspensión automotriz se encarga de mitigar las aceleraciones excesivas en la carrocería del automóvil al mismo tiempo que mantiene el contacto entre las ruedas y el suelo con el fin de controlar el automóvil en todo momento.

A lo largo de los años se han estado realizando investigaciones detalladas de novedosos sistemas y dispositivos que mejoren la comodidad de los automóviles sin que afecten el rendimiento de la suspensión por seguridad de los pasajeros. Para realizar la evaluación del rendimiento de una suspensión automotriz se deben tomar en cuenta la relación entre factores como: confort de manejo, dureza, deflexión de la suspensión, agarre del neumático, maniobrabilidad, aceleración de la masa no suspendida, entre otros (Scheibe & Smith, 2009).

Los sistemas de suspensión de un automóvil se pueden clasificar en: suspensión pasiva, suspensión activa y suspensión semiactiva. La suspensión pasiva se caracteriza por mantener su amortiguamiento y rigidez con un valor fijo para cualquier condición de trabajo. Además, no se requiere energía para alimentar algún elemento para su funcionamiento y es ampliamente utilizado en la actualidad. Está compuesto por elementos pasivos como: resortes, amortiguadores e inersores, lo que conduce a una alta confiabilidad, bajo costo y consumo cero de energía (Hu et al., 2014). Los sistemas de suspensión activas y semiactivas surgen de la necesidad de obtener un mejor balance entre confort y seguridad de conducción. Debido a que una suspensión cómoda se obtiene en una suspensión con bajos niveles de amortiguamiento y rigidez, sin embargo, una suspensión rígida soporta mejor el peso y una suspensión con rigidez intermedia presenta una mejor maniobrabilidad (Ezeta et al., 2017).

Una suspensión semiactiva se caracteriza por tener un coeficiente de amortiguamiento variable controlado electrónicamente. Tal característica permite endurecer o suavizar la suspensión según se requiera, mejorando la respuesta dinámica a bajas frecuencias. Adicionalmente, al igual que la suspensión pasiva, no cuenta con una entrada de fuerza por medio de un actuador y mantiene una rigidez en el resorte constante (Fahmi et al., 2018). Existen varios tipos de amortiguadores semiactivos y pueden ser clasificados como sigue: amortiguador magnetorreológico, utiliza un fluido ferromagnético cuya viscosidad es controlada magnéticamente para variar el amortiguamiento; amortiguador electrorreológico, su amortiguamiento es controlado por medio de un campo eléctrico variando el voltaje aplicado al fluido; amortiguadores hidro-neumáticos y amortiguadores de fricción seca servo-controlados (Ezeta et al., 2017).

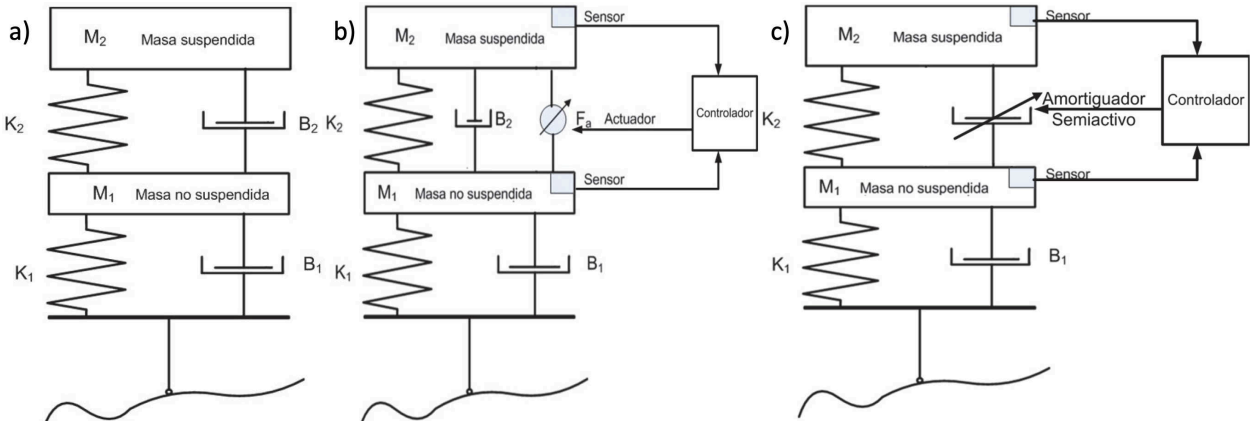


Figura 4. Representación de los sistemas de suspensión: a) Pasiva, b) Activa y c) Semiactiva. Fuente: (Ezeta et al., 2017)

Los sistemas de suspensión activa son los más complejos debido al empleo de componentes adicionales como: sensores, actuadores y unidades de control complejas. A diferencia de las suspensiones antes mencionadas, la suspensión activa utiliza un actuador que suministra una fuerza activa entre la masa suspendida y no suspendida regulada por un sistema de control basado en los datos recopilados por los sensores. El actuador puede ser electrohidráulico, neumático y electromagnético principalmente. Debido a la fuerza proveída por el actuador se pueden mejorar significativamente las respuestas dinámicas del sistema, lo que favorece a una mejor relación entre comodidad y maniobrabilidad. Por esta razón, muchos investigadores coinciden en que un sistema activo diseñado apropiadamente está entre las mejores para el

control de vibraciones de un automóvil (Fahmi et al., 2018). Sin embargo, debido a su complejidad tiene la gran desventaja de ser muy costosa, pesada y utiliza mucho espacio, por lo que su aplicación se reduce a unos cuantos vehículos de alta gama. En la Figura 4 se pueden observar estos tres tipos de sistemas de suspensión.

2.2 Inersor

El inersor (*The Inerter*) es un dispositivo mecánico propuesto recientemente por Malcolm C. Smith en el 2002 (Smith, 2002). Desde su introducción hasta la fecha se han estado innovando diferentes tipos de inersores con el propósito de mejorar la respuesta dinámica de estructuras mecánicas estacionarias y no estacionarias. En (Liu et al., 2022) se menciona que del 2002 al 2010, el enfoque principal del inersor era la ingeniería automotriz. Después, la línea de investigación se estuvo enfocando crecientemente en la ingeniería civil. Por último, en años recientes se estuvieron estudiando campos de aplicación en la aislación de vibraciones de turbinas de viento, ruedas, cables, suspensión de asientos, suspensión de trenes, dirección de motocicletas y en sistemas de recolección de energía de olas marinas. Por lo tanto, el inersor puede trabajar dualmente en dos enfoques, los cuales son: mitigación de vibración estructural y como un sistema de recolección de energía vibratoria.

Smith (Smith, 2002) propuso tres aplicaciones donde demostró que el inersor es capaz de mejorar aspectos de importancia en problemas que habían sido ampliamente estudiados. El primero, fue el problema de la absorción de vibraciones de diferentes sistemas donde la solución consistía en agregar una masa sujeta con arreglos de resortes y amortiguadores a la masa principal conocidos como absorbedores de vibración dinámica (DVA por sus siglas en ingles). Reemplazando estos arreglos con uno utilizando un inersor, demostró que se puede igualar o mejorar la absorción de las vibraciones sin tener que agregar una gran masa física al sistema. La siguiente propuesta fue agregar un inersor en la suspensión automotriz donde demostró que se pueden reducir las oscilaciones provocadas por las irregularidades de la carretera. Por último, sugirió que, en el caso de que se requiera probar un soporte o algún dispositivo sometido a una gran masa se puede llevar a cabo conectando una terminal del inersor a tierra y la otra al dispositivo.

El inersor es un dispositivo que almacena energía y se caracteriza por tener dos terminales al igual que un resorte. Su función principal es proporcionar fuerzas iguales y en sentido opuesto, proporcionales a la aceleración relativa entre sus terminales (Smith, 2020). Dicha constante de proporcionalidad *b* es conocida como inertancia y su unidad de medida es el kilogramo. Su símbolo en una red mecánica se puede observar en la Figura 5.

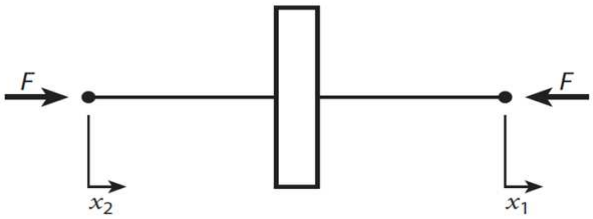


Figura 5. Símbolo del inersor.

Fuente: (Smith, 2020)

Debido a que el inersor cuenta con dos terminales, fue posible completar la analogía entre las redes eléctrica y mecánica conocida como la analogía Fuerza-Corriente. Anteriormente, existía en una forma incompleta, ya que el análogo del capacitor era el elemento masa, el cual solo tiene una terminal libre y la otra debía de estar conectada a tierra. Gracias a la nueva analogía, se pueden aplicar diversos métodos y teorías que se han estudiado a detalle para la síntesis de redes eléctricas. En la Figura 6 se muestra la analogía entre los dispositivos eléctricos y mecánicos junto con las ecuaciones correspondientes que relacionan la fuerza con la corriente y la velocidad con el voltaje.

Mecánica		Eléctrica	
F F v_2 v_1	$Y(s) = \frac{k}{s}$	i i v_2 v_1	$Y(s) = \frac{1}{Ls}$
$\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	Resorte	$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$	Inductor
F F v_2 v_1	$Y(s) = bs$	i i v_2 v_1	$Y(s) = Cs$
$F = b\frac{d(v_2-v_1)}{dt}$	Inersor	$i = C\frac{d(v_2-v_1)}{dt}$	Capacitor
F F v_2 v_1	$Y(s) = c$	i i v_2 v_1	$Y(s) = \frac{1}{R}$
$F = c(v_2 - v_1)$	Amortiguador	$i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$	Resistor

Figura 6. Analogía de los dispositivos eléctricos y mecánicos.

Fuente: Imagen adaptada de (Smith, 2020)

En cuanto a la implementación del inersor, en (Smith, 2002) se menciona que el dispositivo debe ser capaz de tener una masa pequeña independiente de su valor de inertancia, sin el requerimiento de estar conectado a tierra y funcionar adecuadamente en cualquier orientación y movimiento. Adicionalmente, el dispositivo debe tener una carrera finita ajustable en el diseño y su correspondiente restricción similar a un amortiguador automotriz tradicional.

Un ejemplo simple y de fácil construcción, es el inersor que se muestra en la Figura 7, el cual funciona mediante el uso de una cremallera que impulsa un arreglo de engranes para hacer girar un volante de inercia. Una terminal corresponde a la cremallera y la otra a la carcasa junto con el volante y los engranes.

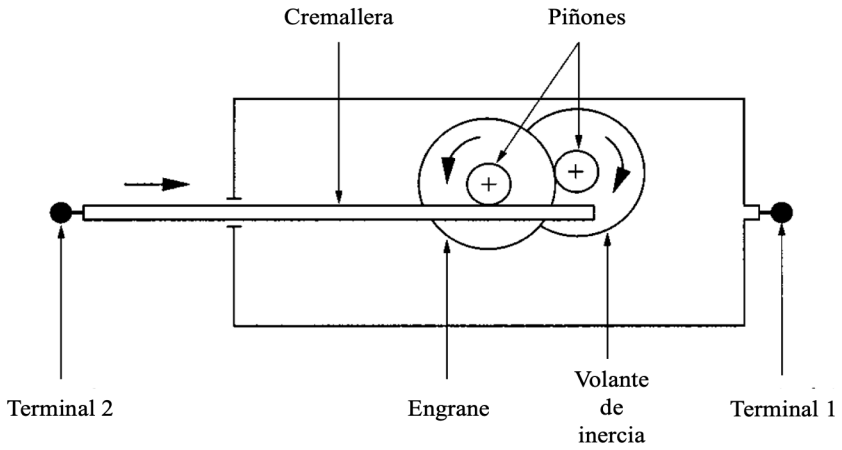


Figura 7. Inersor de piñón-cremallera.
Fuente: Imagen adaptada de (Smith, 2002)

En la Figura 8 se pueden apreciar otros tipos de inersor como: a) inersor de tornillo-bola, donde el volante de inercia está unido a la tuerca de bolas que giran cuando el tornillo se desplaza en el interior; b) inersor hidráulico con bomba de engranes, en el cual las terminales están unidas a un pistón dentro de un cilindro que empujan el fluido a través de la bomba donde cada engrane esta unido a un volante de inercia para almacenar la energía; c) inersor de fluido, el cual tiene un pistón que es empujado por una terminal desplazando el fluido por una tubería helicoidal y d) Inersor rotacional, tiene una caja de engranes epicíclicos que están engranados con un volante de inercia.

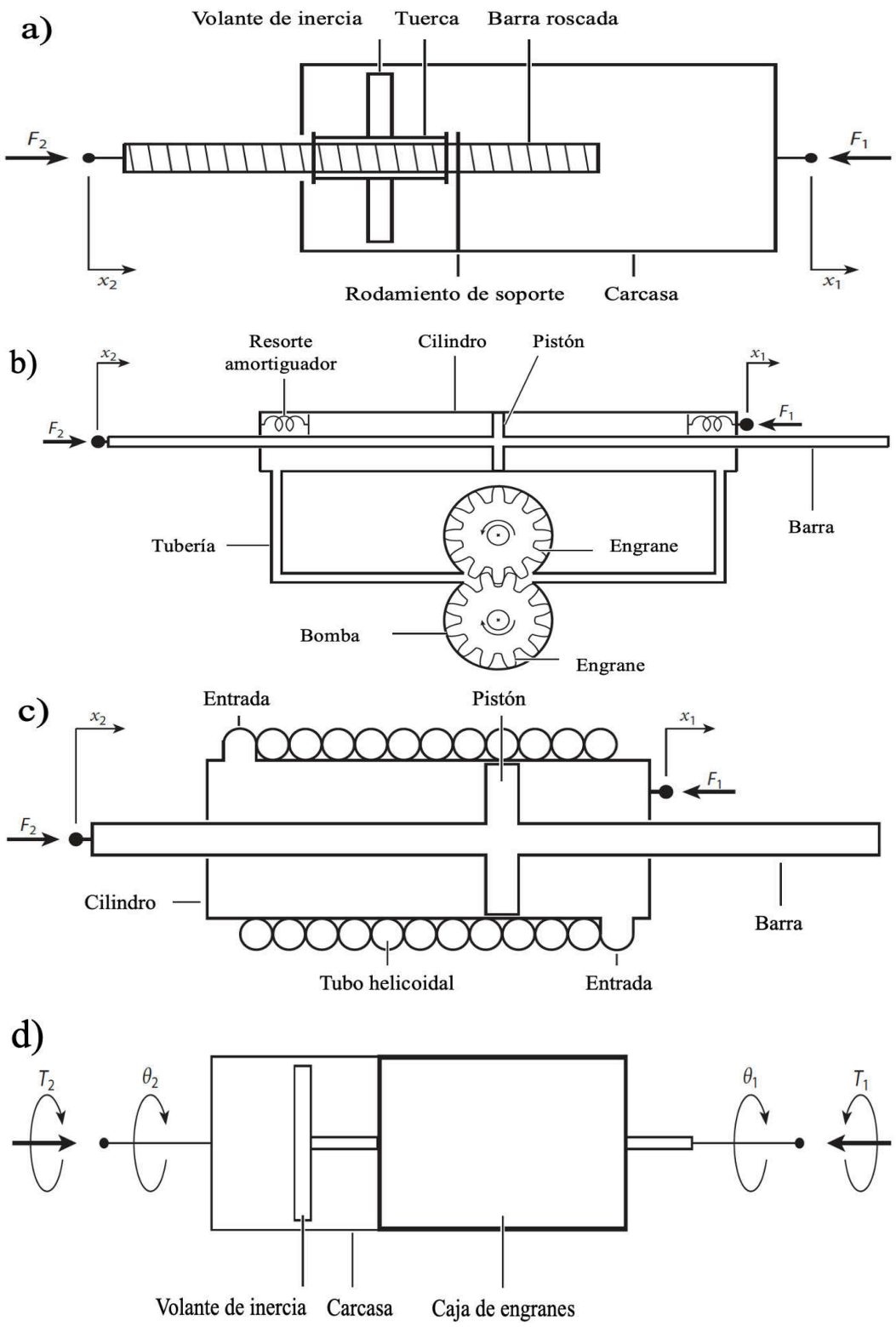


Figura 8. a) Inersor de tornillo-bola, b) Inersor hidráulico con bomba de engranes, c) Inersor de fluido y d) Inersor rotacional.

Fuente: Imagen adaptada de (Smith, 2020).

2.3 Suspensión automotriz basada en inersor.

A pesar de las extensas investigaciones recientes en las suspensiones activas y semiactivas, no han logrado conseguir su aplicación a gran escala como es en el caso de las suspensiones pasivas. Esto se debe a sus sistemas complejos, el costo de los controladores y el espacio que ocupan (Shen et al., 2016).

Por esta razón surgió una línea de investigación donde se aprovecha el uso de un dispositivo mecánico relativamente nuevo llamado inersor en la suspensión automotriz. De esta forma se busca mejorar tanto la comodidad y maniobrabilidad, como las respuestas dinámicas de la suspensión sin aumentar demasiado el costo o complejidad.

Desde que Smith introdujo el inersor en (Smith, 2002), propuso su aplicación en la suspensión automotriz como un elemento conectado en paralelo al resorte y amortiguador donde demostró que se pueden disminuir las oscilaciones provocadas por las irregularidades de la carretera. Más tarde, (Smith & Wang, 2004) diseñaron 5 redes mecánicas más para suspensión automotriz con inersor, y realizaron la optimización numérica considerando los siguientes índices de rendimiento: el confort de manejo, deflexión del sistema de suspensión, carga dinámica del neumático y la combinación del confort de manejo y la carga dinámica. Los resultados obtenidos mostraron una mejora de al menos 10% en los rendimientos antes mencionados. Algunas de estas redes mecánicas fueron nuevamente estudiadas por (Scheibe & Smith, 2009), esta vez tomando en cuenta el confort de manejo, el agarre del neumático y su combinación. Gracias a este análisis se corroboraron los resultados del trabajo anterior concluyendo que, en efecto, el inersor proporciona un rendimiento de control superior al de una suspensión pasiva tradicional.

Más tarde, (X. J. Zhang et al., 2012) analizaron las redes mecánicas de Smith (2004) y dos más que se muestran en la Figura 9, en una suspensión semiactiva utilizando los métodos de control “Skyhook”, “Groundhook” y el híbrido. Los autores demostraron que todas las redes mecánicas brindan un mejor rendimiento que la suspensión pasiva, mientras que el mejor control es el híbrido. El diseño que más destacó fue el diseño 8 con el control híbrido, brindando una disminución en la aceleración de la masa suspendida RMS en un 49%, una disminución de la

deflexión de la suspensión RMS en 36% y menor deflexión del neumático RMS en 22% en comparación con la suspensión pasiva.

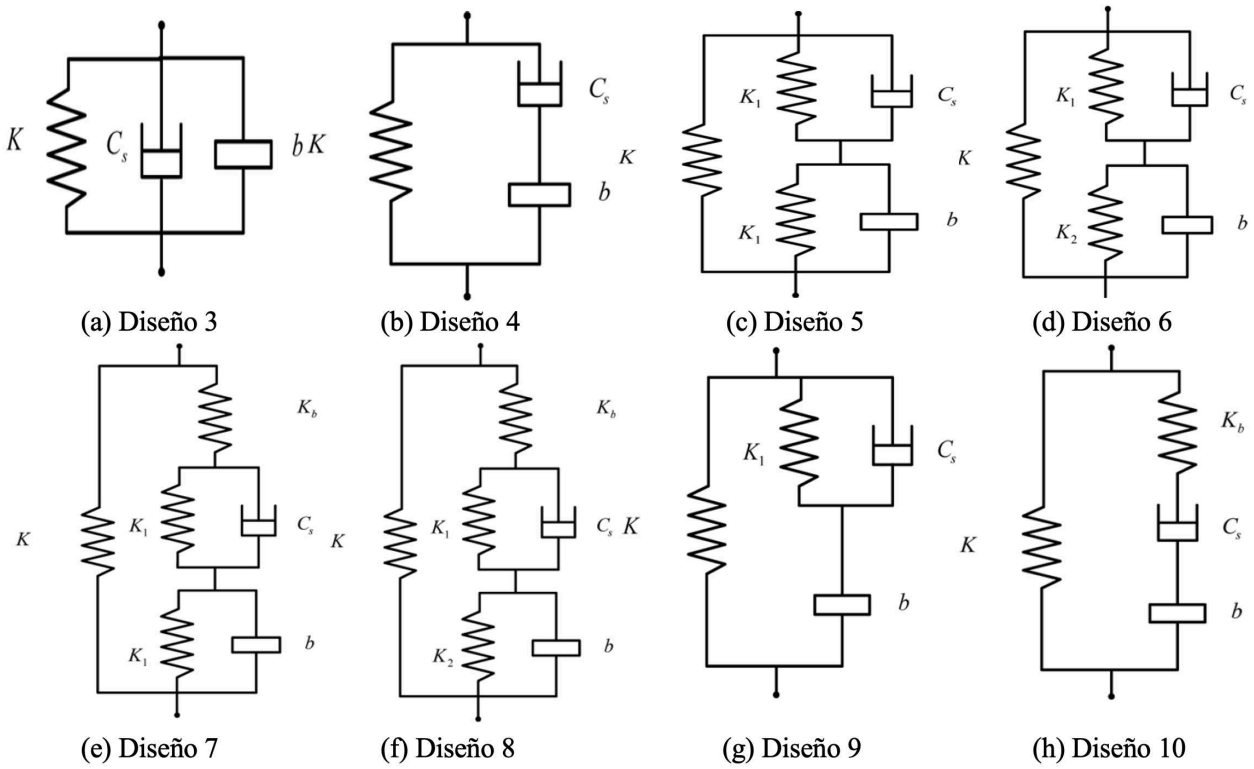


Figura 9. Diseños de suspensión basados en inersor.
Fuente: Imagen adaptada de (X. J. Zhang et al., 2012).

Posteriormente, (Hu et al., 2014) agregaron en su análisis el índice de rendimiento de la deflexión de la suspensión, el cual es un parámetro importante que no se había tomado en consideración para evaluar el rendimiento de las suspensiones pasivas, ya que una gran deflexión provoca un rápido deterioro en los componentes, y consecuentemente fatiga mecánica. Además, analizaron los diseños 3, 4, 9 y 10 descritos en la Figura 10, demostrando que la deflexión de la suspensión es un limitante para el rendimiento de la suspensión, ya que, al mejorar la comodidad y el agarre del neumático, se deteriora rápidamente la deflexión de la suspensión.

Adicionalmente, (M. Z. Q. Chen et al., 2015) estudiaron las redes mecánicas en suspensiones semiactivas utilizando los diseños 3, 4, 6, 8, 9 y 10 de la Figura 9. Cada una de las redes con impedancia mecánica W(s) se conectaron en paralelo al resorte de rigidez k_s, como se muestra en la Figura 10, para evaluar el rendimiento de la suspensión tomando en cuenta el confort de

manejo, la deflexión de la suspensión y el agarre del neumático. Concluyendo en una mejora de más del 10% del rendimiento de la suspensión en comparación con las suspensiones semiactivas sin inersor.

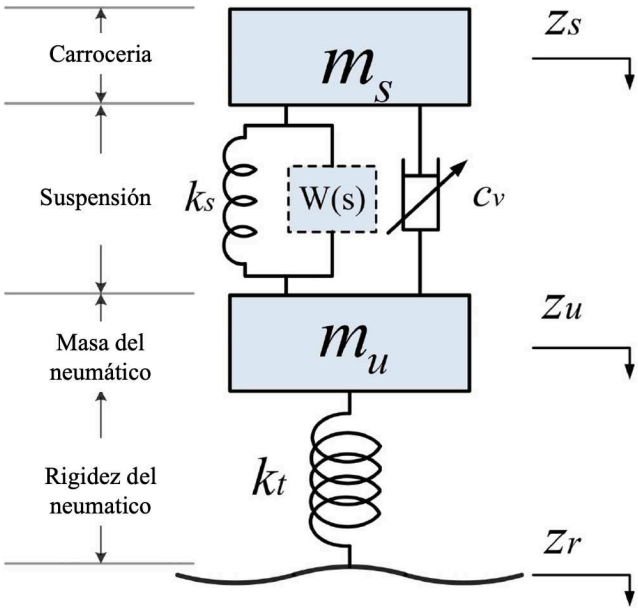


Figura 10. Modelo de la suspensión semiactiva en un cuarto de vehículo.
Fuente: Imagen adaptada de (M. Z. Q. Chen et al., 2015)

Inspirado en el absorbedor de vibración dinámico compuesto por el amortiguador sintonizado con inercia rotacional (TID), (Shen et al., 2016) realizaron el diseño y prototipo de una suspensión automotriz pasiva nombrada como ISD (por sus siglas en inglés inerter-spring-damper, inersor-resorte-amortiguador). El análisis en el dominio del tiempo reveló que la suspensión ISD puede proporcionar una reducción de la aceleración RMS de la carrocería de al menos 4%, una disminución de la deflexión RMS de la suspensión del 16% y la carga dinámica RMS del neumático se redujo el 6% en comparación con una suspensión pasiva tradicional. Cabe destacar que las mejoras son más notables a bajas frecuencias de excitación y que la red TID ya ha sido aplicada principalmente en estructuras mecánicas de ingeniería civil. Posteriormente, (L. Chen et al., 2016) rediseñaron el modelo de suspensión ISD mostrado en la Figura 11, utilizando el método de síntesis de redes mecánicas. Los resultados revelaron una mejora significativa en el confort de manejo disminuyendo la aceleración RMS de la carrocería en un 18.9%. De igual

forma se redujo la deflexión de la suspensión en un 1.47% y la carga dinámica del neumático en 0.3%.

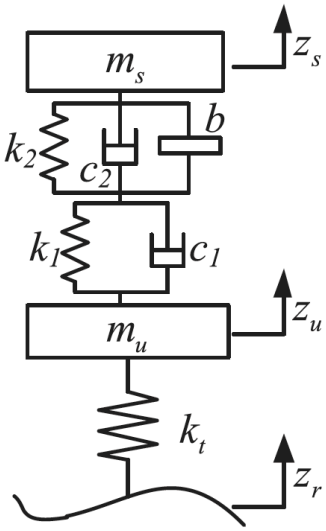


Figura 11. Modelo de suspensión ISD.
Fuente: (L. Chen et al., 2016)

Posteriormente, (H. Li et al., 2019) propusieron 8 redes mecánicas para suspensiones ISDs de tres elementos mecánicos, de las cuales 3 están descritas en la Figura 9. Los autores fijaron los valores de la rigidez de los resortes y los coeficientes de amortiguamiento para todas las redes, y también variaron la inertancia de 0 a 1000 kg para estudiar la convergencia del rendimiento de la suspensión en cuanto a la aceleración RMS de la carrocería, la deflexión RMS de la suspensión y la carga dinámica RMS del neumático. En efecto, solo 3 redes no convergieron, por lo que las otras 5 redes presentaron rendimientos superiores a esas 3 y a la suspensión pasiva. La red mecánica que mejor rendimiento presentó, fue la red conocida como TID, con un valor de inertancia de 216 kg.

Por último, (GE et al., 2022) diseñaron una suspensión activa utilizando la red mecánica TID. Normalmente, las suspensiones activas utilizan un actuador que se coloca entre la masa suspendida y la no suspendida cuya masa no es despreciable. Por esta razón, entre mayor sea la masa del actuador, mayor será la degradación del rendimiento de la suspensión debido a los efectos inerciales que esta masa provoca. Con la ayuda del sistema mecánico TID, estos efectos inerciales son aprovechados para mejorar el rendimiento de la suspensión. Los resultados

mostraron que la suspensión TID activa es superior en comparación con las suspensiones pasivas basadas en el TID y TMD. Donde la suspensión TMD se mostró superior a la TID, con la gran desventaja de que la masa del TMD debe de ser de 109 kg en comparación a los 1.3 kg del inersor activo.

2.4 Suspensiones regenerativas automotrices

Aumentar la eficiencia de los vehículos con motor de combustión interna ha sido una preocupación desde el año 1900 cuando se realizó su producción en masa. En la Figura 12 se pueden observar las diferentes pérdidas de energía que sufre un vehículo, siendo solo el 21.5% de la energía del combustible para mover el vehículo. Sin embargo, no fue hasta aproximadamente en 1990 que los investigadores comenzaron a buscar maneras para recuperar la energía que normalmente se disipa en el amortiguador de fluido viscoso de las suspensiones automotrices convencionales (Abdelkareem, Xu, Ali, et al., 2018).

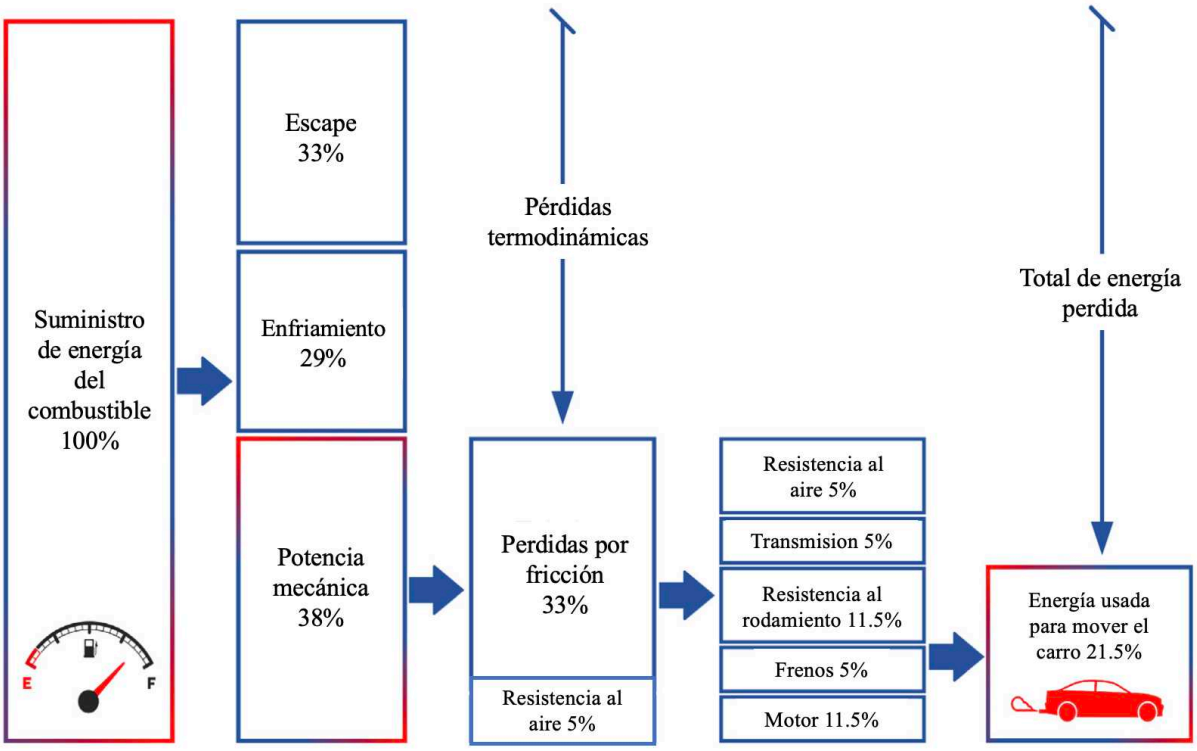


Figura 12. Pérdidas de energía en el vehículo.

Fuente: Imagen adaptada de (Abdelkareem, Xu, Ali, et al., 2018)

El estudio realizado en (Zuo & Zhang, 2013) determinó que un vehículo de tamaño medio viajando a una velocidad de 97 km/h aproximadamente, disipa entre 100 y 400 W de energía en las cuatro suspensiones, la cual puede ser potencialmente recuperada y aprovechada. También se destacó a modo de comparación que un alternador genera una potencia de 500 a 600 W con una eficiencia de 50 a 60%. Más tarde, (Abdelkareem, Xu, Guo, et al., 2018) realizó un estudio detallado del potencial de energía aprovechable en la suspensión y un análisis de sensibilidad paramétrica tomando en cuenta el modelo del vehículo completo, cuatro ciclos de conducción y diferentes rugosidades de carretera para obtener resultados más realistas. Los cuales indicaron que el potencial de energía aprovechable es de hasta 420 W y es sensible a la velocidad del vehículo, la excitación de la carretera y la rigidez del neumático. Por esta razón, se mencionan que en vehículos de carga pesada y todo terreno se calcula un máximo de 3 kW de energía aprovechable.

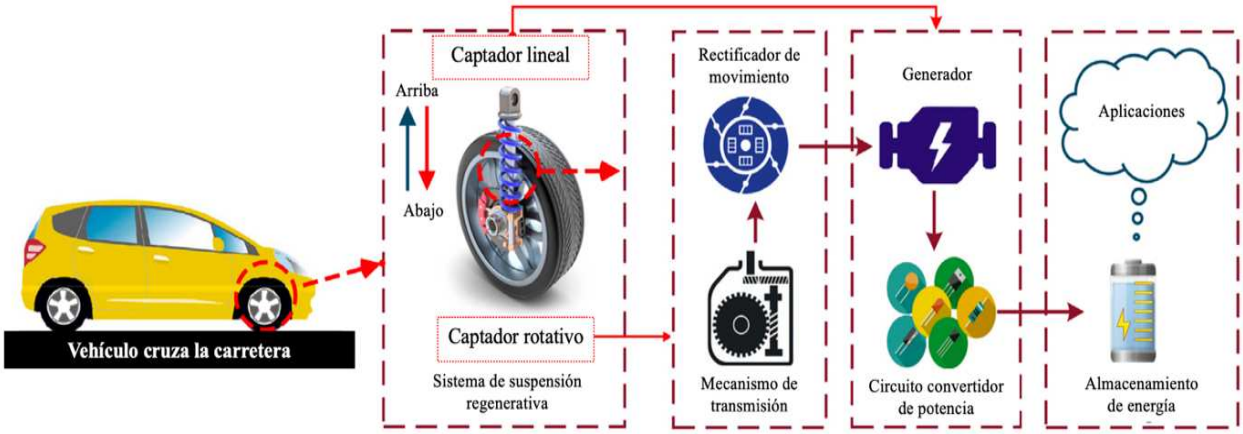


Figura 13. Esquema de un sistema de regeneración de energía.
Fuente: Imagen adaptada de (Abdelkareem, Xu, Ali, et al., 2018)

Las suspensiones regenerativas se caracterizan generalmente ya sea por agregar un amortiguador regenerativo (AR) o por reemplazar el amortiguador pasivo por un AR. Un AR es un dispositivo que permite aprovechar el movimiento relativo entre sus terminales para generar energía eléctrica. Dependiendo de la manera en que se realiza esta conversión de energía existen dos clasificaciones de ARs. La primera clasificación es de accionamiento directo e indirecto, donde los de accionamiento indirecto contienen un mecanismo que convierte el movimiento oscilante bidireccional en una rotación unidireccional para impulsar un generador, en cambio, los

de accionamiento directo aprovechan ese movimiento bidireccional directamente. En la Figura 13, se presenta un esquema del proceso de regeneración de energía donde el captador lineal pasa directamente a la generación de energía para un posterior rectificado, en cambio, el captador rotativo requiere de un mecanismo de transmisión y un rectificador de movimiento para generar energía. La segunda clasificación, la cual se utilizará en esta investigación, se basa en la forma en que se convierte el movimiento oscilante a giratorio habiendo tres tipos de amortiguadores regenerativos que son: Electromagnéticos, electromecánicos y electrohidráulicos. Cabe destacar que los electromagnéticos son de accionamiento directo.

2.4.1 Amortiguador regenerativo electromagnético lineal.

Este dispositivo genera energía eléctrica mediante el movimiento relativo entre un arreglo de imanes y una bobina por medio de la inducción electromagnética. Es por eso que aprovecha directamente el movimiento relativo entre la masa suspendida y no suspendida de una suspensión automotriz. Gracias a esto, son sencillos de fabricar y montar, teniendo una alta eficiencia de conversión debido a la ausencia de mecanismos. Por otro lado, al no tener un mecanismo de amplificación de movimiento suelen generar bajos niveles de energía y proporcionan bajos niveles de amortiguación. Son ideales para suspensiones activas y semiactivas donde se busca reducir el consumo al mismo tiempo que se mejoran las dinámicas de la suspensión del vehículo.

El primer amortiguador electromagnético lineal fue creado por Karnopp en 1989 utilizando un motor lineal de imanes permanentes con una resistencia externa variable para variar el coeficiente de amortiguamiento (Karnopp, 1989). Al poder variar el coeficiente de amortiguamiento su uso sería en suspensiones semiactivas donde en la Figura 14 se puede apreciar la disposición de los imanes permanentes y de las bobinas en un amortiguador electromagnético sencillo.

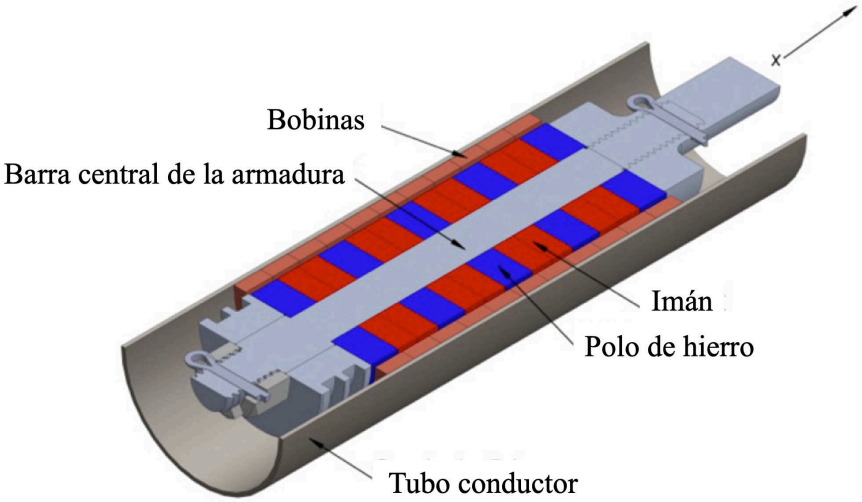


Figura 14. Vista seccionada de un amortiguador electromagnético lineal.
Fuente: Imagen adaptada de (Asadi et al., 2015)

Más tarde, para compensar la desventaja de los bajos niveles de amortiguación surgieron los amortiguadores electromagnéticos lineales híbridos. Estos dispositivos combinan un fluido viscoso o los efectos de las corrientes de Foucault con un motor electromagnético lineal para proporcionar mayores niveles de amortiguación. Además, se disminuye considerablemente el consumo de energía de los amortiguadores. (Ebrahimi et al., 2011) desarrolló un amortiguador electromagnético híbrido que consiste de dos conjuntos de imanes permanentes montados en la misma parte móvil. En la Figura 15 se puede apreciar que los imanes internos corresponden al motor lineal ya que están cerca de la bobina. Por otro lado, los imanes en la parte exterior están cubiertos internamente y externamente por una carcasa conductora donde se inducirán las corrientes de Foucault, las cuales proporcionan la fuerza de amortiguamiento pasiva. Se demostró que este dispositivo redujo el consumo de energía en un 74% en comparación con un amortiguador electromagnético activo. Igualmente, se redujo el peso en 54% en comparación con el amortiguador electromagnético activo y se redujo el peso total del sistema en 53%.

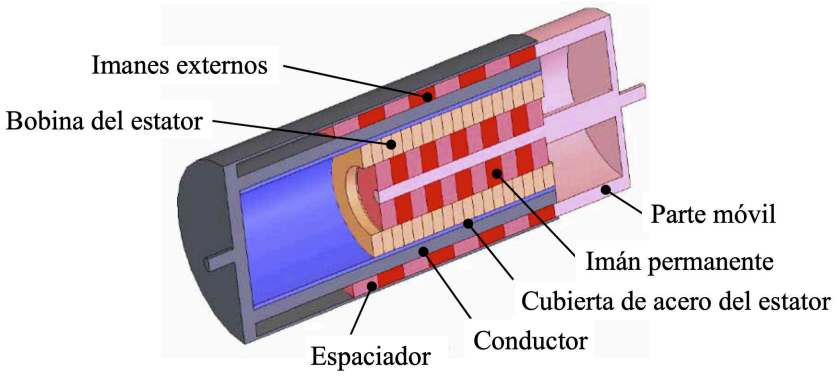


Figura 15. Vista seccionada de un amortiguador electromagnético híbrido.
Fuente: Imagen adaptada de (Ebrahimi et al., 2011)

Más adelante, (Asadi et al., 2015) presentó otro tipo de amortiguador electromagnético híbrido, el cual consiste en una combinación de un motor electromagnético lineal y un fluido viscoso para proporcionar las fuerzas de amortiguación. Sus resultados mostraron que la parte hidráulica del dispositivo genera un coeficiente de amortiguamiento de 1300 Ns/m, mientras que el motor lineal es capaz de generar un coeficiente de amortiguamiento de 0 a 238 Ns/m y puede regenerar energía cuando no necesite ejercer fuerza en el sistema. En la Figura 16 se muestra el diseño del dispositivo híbrido.

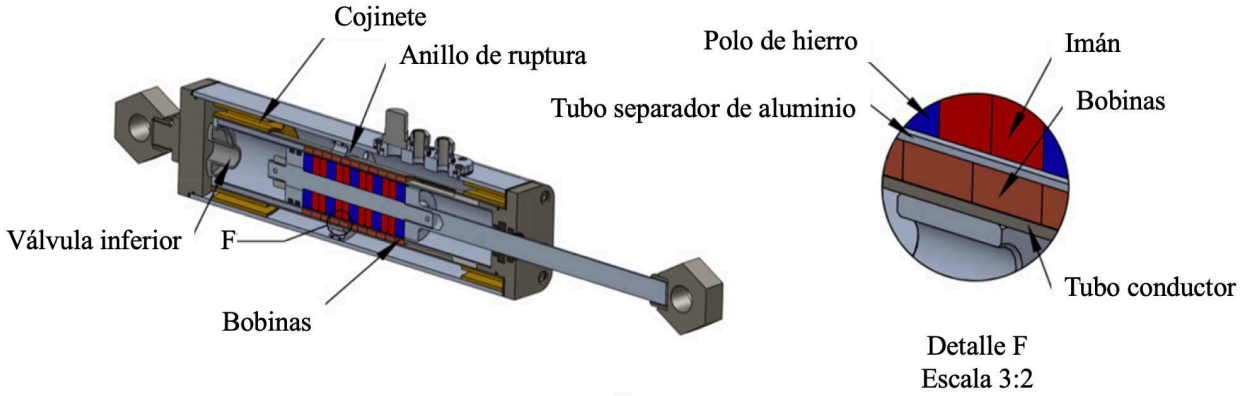


Figura 16. Vista seccionada de amortiguador electromagnético híbrido.
Fuente: Imagen adaptada de (Asadi et al., 2015)

Recientemente, (Ding et al., 2019) desarrolló un sistema de suspensión activa electromagnética combinando un motor lineal y un amortiguador con fluido magnetorreológico y realizó el diseño de su sistema de control. Este sistema mejoró notablemente las dinámicas de la suspensión reduciendo la deflexión de la suspensión en más del 15.9% llegando hasta 88.1%,

también se redujo la aceleración de la carrocería en más del 15.9% y se redujo la carga dinámica del neumático en más de 3.7% en comparación con la suspensión pasiva. Adicionalmente, en comparación con la suspensión activa electromagnética lineal se redujo el consumo de energía en al menos 39.9%.

Por último, (Lafarge et al., 2021) diseñó y analizó un amortiguador electromagnético lineal embebido, en el cual, agregó un arreglo de imanes y bobinas a un amortiguador convencional de fluido viscoso para mantener la suspensión sin cambios. Dicho dispositivo es capaz de generar una potencia aproximada de 10 W.

2.4.2 Amortiguador regenerativo electrohidráulico.

Los amortiguadores electrohidráulicos aprovechan el flujo causado por el deslizamiento de un pistón para impulsar una bomba hidráulica que esta acoplada a un generador eléctrico. Generalmente, están constituidas por válvulas de retención que aseguran el flujo en un solo sentido, tuberías, bombas hidráulicas, generadores eléctricos y en algunos casos de acumuladores de gas o aceite que garantizan la estabilidad de las fuerzas de amortiguamiento en las carreras de compresión y tensión del dispositivo (Barredo-Hernández et al., 2022). Son capaces de generar grandes fuerzas de amortiguamiento y son altamente confiables y durables, es por eso que domina la aplicación de amortiguadores de fluido viscoso hasta el día de hoy. Por otro lado, son costosos y tienen problemas de eficiencia debido a la fricción viscosa. Adicionalmente, tiene la desventaja de que requieren sellos para contener el fluido, lo cual muchas veces provoca su fallo por fugas.

(C. Li & Tse, 2013) diseñaron y realizaron un prototipo de amortiguador regenerativo electrohidráulico sin válvulas de retención. Por esta razón, el generador gira en dos sentidos dependiendo de la carrera del AR provocando la caída en la potencia de generación de energía a altas frecuencias y altas amplitudes de excitación, cuando anteriormente se menciona que estas condiciones favorecen una mayor generación de energía. A pesar de esto, lograron obtener una potencia máxima de 435.1 W/(m/s). Poco después, en (C. Li et al., 2014) se corrigió este problema agregando 4 válvulas de retención y dos circuitos hidráulicos para crear un rectificador de movimiento hidráulico que convierte el movimiento vertical oscilante en una rotación de un

solo sentido a través del control del flujo del fluido. Los resultados mostraron una potencia máxima instantánea de 248.8 W y una potencia media de 114.1 W con una eficiencia máxima del 38.81%. En la Figura 17 se puede observar del lado izquierdo el prototipo de AR electrohidráulico con sus respectivas partes y en la parte derecha su diagrama correspondiente del circuito hidráulico donde se aprecia el rectificador de movimiento hidráulico.

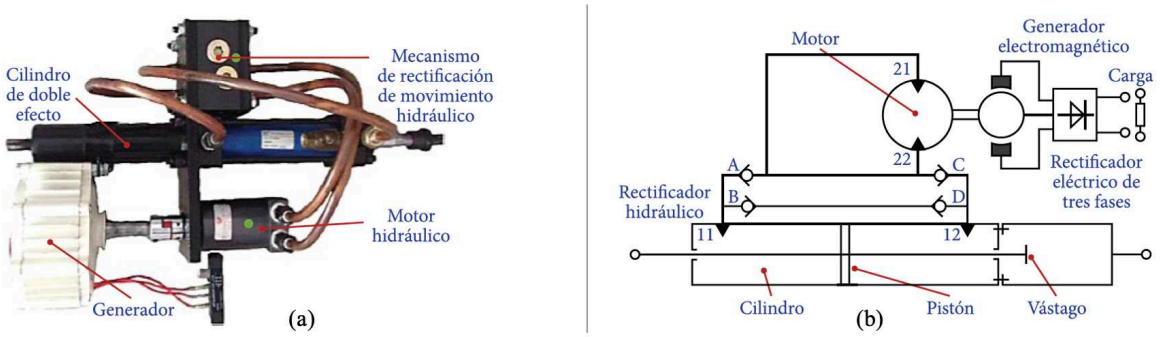


Figura 17. Amortiguador regenerativo electrohidráulico con rectificador de movimiento. a) Prototipo, b) Diagrama.

Fuente: (Barredo-Hernández et al., 2022)

Más tarde, (Galluzzi et al., 2016) realizaron una comparación entre dos AR´s electrohidráulicos donde solo uno utiliza un rectificador de movimiento para poder conocer si existe una mejora y cuantificarla cuantitativamente. Los resultados favorecieron el uso de un rectificador de movimiento hidráulico donde se redujo la aceleración de la carrocería en un 11.8%, la carga dinámica de neumático en un 9.5% y se incrementó la potencia generada en un 5.3% y la eficiencia en un 8%.

En (Y. Zhang et al., 2017) diseñaron un AR electrohidráulico de doble tubo para aplicaciones en vehículos todo terreno con sistemas de suspensiones semiactivas y activas, el cual, es más compacto con solo dos tuberías, dos válvulas de retención y utiliza una cavidad con hidrógeno como acumulador de presión como se puede observar en la Figura 18. Es capaz de proporcionar fuerzas de amortiguación asimétricas para las carreras de compresión y extensión similar a un amortiguador pasivo de fluido viscoso. Este dispositivo generó una potencia máxima cerca de 200 W y una potencia promedio de 110.6 W, aunque no realiza un análisis de los índices de rendimiento.

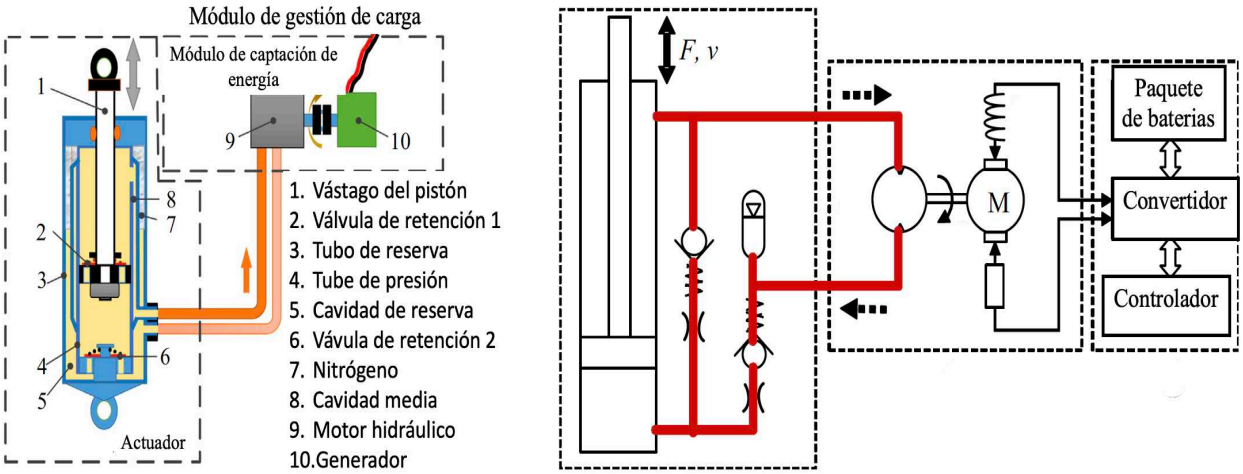


Figura 18. Amortiguador hidráulico de doble tubo.
Fuente: Imagen adaptada de (Y. Zhang et al., 2017)

Por último, (Zou et al., 2019) diseñaron y analizaron un sistema de suspensión hidráulica interconectada con cuatro ARs electrohidráulicos. El sistema está compuesto principalmente por cilindros, acumuladores, válvulas de retención y tuberías. Los ARs tienen su propio rectificador de movimiento hidráulico, los cuales, están conectados entre ellos en dos líneas hidráulicas comunes que terminan en el motor hidráulico para impulsar al eje del generador eléctrico. Cada una de estas dos líneas está conectada a un acumulador de alta y baja presión según corresponda. En la Figura 19 se puede observar el diagrama del sistema antes descrito. De acuerdo a los resultados que presentaron, el sistema es capaz de generar una potencia máxima de 397 W. De igual forma, puede mejorar el confort de manejo en 33% y mejorar el agarre en un 20% en comparación con la suspensión pasiva, al mismo tiempo que captura una potencia de 190 W.

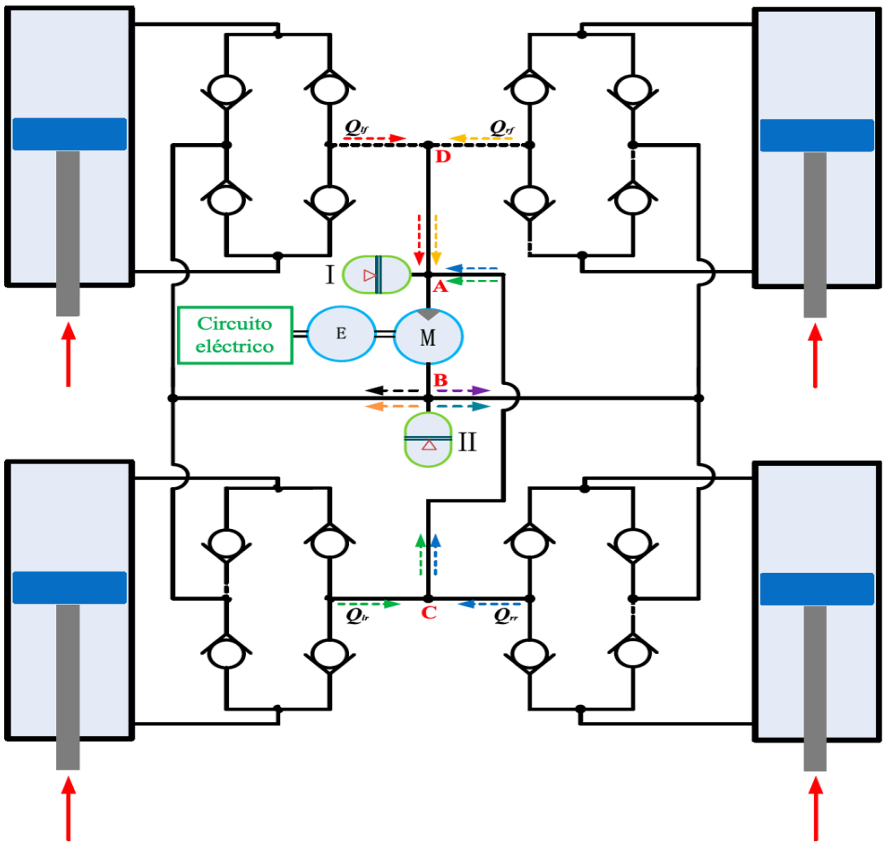


Figura 19. Sistema de suspensión hidráulica interconectada basado en amortiguadores regenerativos electrohidráulicos.

Fuente: (Zou et al., 2019)

2.4.3 Amortiguador regenerativo electromecánico.

Los amortiguadores regenerativos electromecánicos están basados en un mecanismo de rectificación de movimiento que convierte las oscilaciones verticales provocadas por las irregularidades de la carretera, en una rotación en un solo sentido que acciona un generador eléctrico. A lo largo de los años, han surgido diversos mecanismos capaces de cumplir esta función con diferentes relaciones de transmisión y eficiencias mecánicas. Adicionalmente, se introducen transmisiones con engranajes helicoidales con la finalidad de amplificar aún más la relación de transmisión, aumentando la energía generada y el amortiguamiento electromagnético. En cuanto a los mecanismos de conversión se encuentran los siguientes: tornillo algebraico (algebraic screw), piñón-cremallera (rack-pinion), tornillo de bola (ball-screw), mecanismo de engranajes helicoidales (helical gears transmission), mecanismo de brazo dentado (arm-teeth mechanism), entre otros (Barredo-Hernández et al., 2022).

En (Z. Zhang et al., 2016) diseñaron un AR electromecánico del tipo piñón cremallera, el cual está compuesto por dos cremalleras engranadas a dos engranes rectos de rueda libre montados en el mismo eje. Cada engrane recto permite la transmisión de movimiento en un solo sentido de giro, de esta manera, en ambas carreras de extensión y compresión provocará el giro en un solo sentido del eje que, a su vez, este acoplado con un conjunto de engranes cónicos para accionar la caja de engranes planetarios conectados al generador eléctrico (Figura 20). Los resultados de la prueba de banco del prototipo mostraron que el dispositivo es capaz de producir una potencia promedio de 4.302 W con una eficiencia mecánica del 44.24%. Cabe destacar que la aplicación de este dispositivo estaba dirigida por primera vez a vehículos completamente eléctricos de rango extendido.

Figura 20. Prototipo de amortiguador regenerativo electromecánico del tipo piñón-cremallera. Fuente: Imagen adaptada de (Z. Zhang et al., 2016)

Más tarde, (R. Zhang, Wang, & Liu, 2018) diseñaron un mecanismo de piñón-cremallera que duplica la velocidad de un amortiguador electromagnético lineal, con el fin de realizar una adecuada comparación entre estos dispositivos en cuanto a la generación de potencia y sensibilidad paramétrica. Los resultados mostraron que el AR de doble velocidad genera el doble de voltaje que el de velocidad simple, provocando que se cuadruplique la potencia generada. El AR de doble velocidad con parámetros óptimos fue capaz de generar una potencia máxima de 54 W.

Recientemente, (H. Li et al., 2021) realizaron un AR electromecánico de alta eficiencia utilizando dos cremalleras helicoidales con roscas opuestas engranadas a dos engranes helicoidales de diferente radio con embragues unidireccionales. Estos engranes están acoplados en un mismo eje conectado a la caja de engranes planetarios para accionar el generador (Figura 21). Los engranes de diferente radio son para proporcionar diferentes fuerzas de amortiguamiento en las carreras de compresión y extensión, acercándose más al comportamiento de un amortiguador de fluido viscoso pasivo. En la prueba de banco se obtuvo una eficiencia mecánica promedio de 39.46% y la potencia generada es de 4.25 W con una amplitud de excitación de 7 mm a 2.5 Hz. Adicionalmente, realizaron una prueba de campo instalando el prototipo en un autobús, donde lograron capturar una potencia de 17 W.

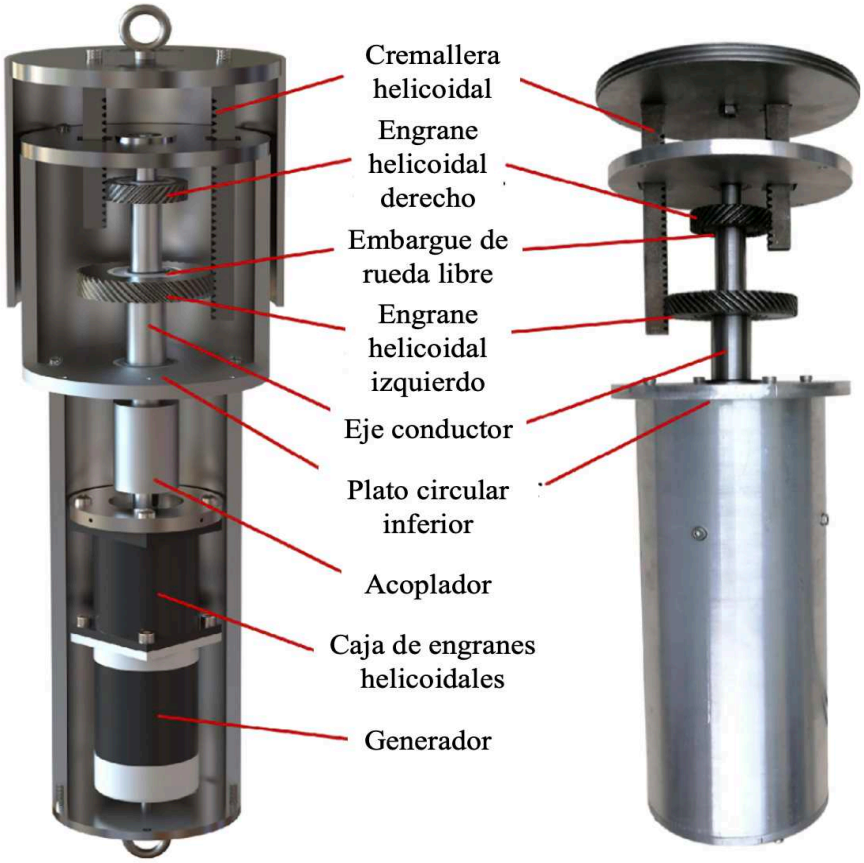


Figura 21. Prototipo de amortiguador regenerativo electromecánico con cremalleras helicoidales de roscas opuestas.

Fuente: Imagen adaptada de (H. Li et al., 2021)

El año pasado, (Salman et al., 2022) desarrollaron un AR electromecánico compacto diseñado para ser instalado por la parte de adentro del rin. Está basado en el mecanismo piñón-cremallera y está compuesto por dos cremalleras engranadas con engranes rectos con embragues de rueda libre. Dichos engranes están en dos ejes acoplados con un conjunto de engranes cónicos que accionan dos generadores como se muestra en la Figura 22. El sistema logro obtener una generación de potencia de 380 W con una amplitud de excitación de entrada de 5 mm a 1.5 Hz. Así mismo, alcanzó una eficiencia mecánica promedio del 44%.

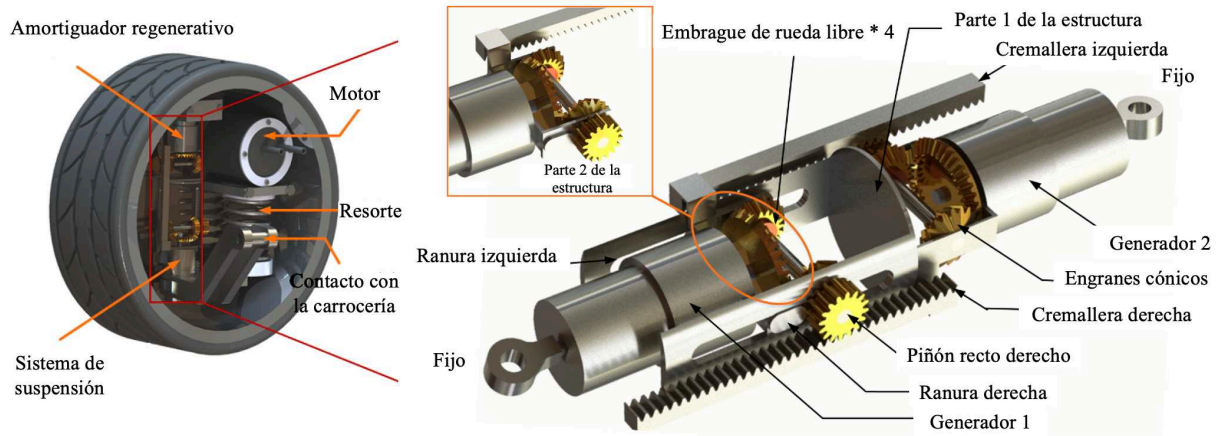
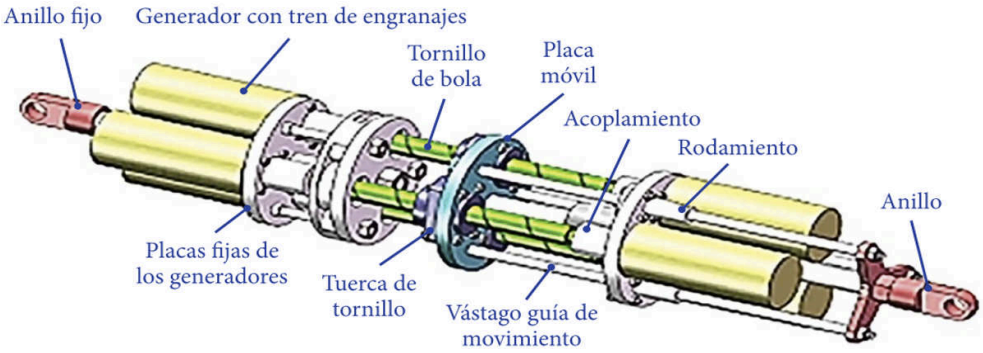


Figura 22. Amortiguador regenerativo electromecánico en el neumático.
Fuente: Imagen adaptada de (Salman et al., 2022)

En cuanto al mecanismo de tornillo-bola, (Xie et al., 2018) incrementaron el número de generadores a 6 con el fin de aumentar la eficiencia del sistema y capturar una mayor potencia. Utilizaron tres mecanismos de tornillo-bola conectados a dos generadores cada uno mediante un acoplador y las tuercas están montadas en un plato deslizante que al desplazarse gira los tres tornillos (Figura 23). Este dispositivo logró una gran eficiencia mecánica del 89% y generar una potencia máxima de 32 W con una amplitud de excitación de 20 mm a 3 Hz.



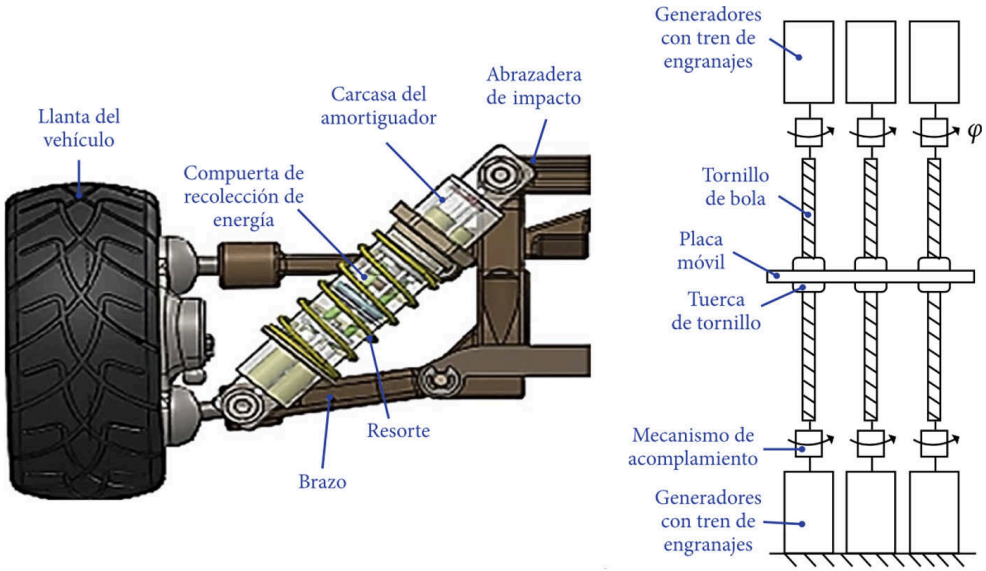


Figura 23. Amortiguador regenerativo electromecánico de 3 mecanismos y 6 generadores. Modelo, montaje y diagrama.

Fuente: (Barredo-Hernández et al., 2022)

Figura 24. Amortiguador regenerativo electromecánico con dos mecanismos de tornillo-bola.

Fuente: Imagen adaptada de (Wang et al., 2020)

Más tarde, (Wang et al., 2020) diseñaron un AR electromecánico con dos mecanismos de tornillo-bola con roscas opuestas similar al que diseñaron en (H. Li et al., 2021). Cada tornillo está acoplado con un engrane recto con embragues unidireccionales que, a su vez, están engranados con el eje del generador mediante un engrane recto pequeño. Las tuercas están

montadas en un plato deslizante unido a la parte móvil en la parte superior del dispositivo (Figura 24). Cabe destacar que, el paso de las roscas de los tornillos es diferente para proporcionar diferentes fuerzas de amortiguamiento en las carreras de tensión y compresión. Con una resistencia de 3 Ohms como carga externa, el dispositivo tiene un coeficiente de amortiguación de 4884 Ns/m para la carrera de compresión y 12504 Ns/m para la carrera de extensión. Finalmente, se obtuvo una eficiencia mecánica promedio de 36.44%, generando una potencia promedio de 3.701 W con una entrada de vibración a 1 Hz y 3 mm de amplitud.

Otro mecanismo estudiado recientemente es el mecanismo de brazo dentado. En (R. Zhang, Wang, Al Shami, et al., 2018) se estudió con el fin de hacer una comparación con un AR directo, donde, los resultados indicaron que el AR indirecto de brazo dentado presenta mejor confort hasta los 13 Hz y mayor potencia de regeneración de energía. Cabe destacar que en este modelo de AR de brazo dentado solo aprovecha el movimiento en la carrera de compresión. Por lo que el autor sugiere incorporar otro mecanismo de brazo dentado en la parte inferior del volante de inercia. Posteriormente, (R. Zhang & Wang, 2019) aplicaron el método Taguchi al mismo dispositivo en un modelo de medio vehículo para realizar un análisis paramétrico y la optimización. Como resultado, se demostró que la optimización de tres parámetros en el rango de frecuencias de 1 a 30 Hz, puede duplicar el ancho de banda de captación de energía y aumentar la potencia de generación de energía máxima. Recientemente, (Abdelkareem et al., 2022) implementó el AR electromecánico con dos mecanismos de brazo dentado aplicado a una suspensión de tráiler con semirremolque articulado utilizando un modelo de 23 grados de libertad con 12 ARs. Los resultados mostraron que cada AR genera en promedio una potencia de 17 W, resultando en una potencia total capturada de hasta 200 W con los 12 ARs con una amplitud de excitación de 35 mm a 7 Hz. En la Figura 25 se pueden observar los dispositivos con un mecanismo y dos mecanismos de brazo dentado. Para este trabajo de investigación se eligió el AR de un brazo dentado debido a su fácil construcción que cuenta con un mecanismo sencillo de pocos elementos mecánicos entre los cuales se encuentra un volante de inercia y una caja de engranes. Estos elementos son clave para variar con mayor facilidad el efecto de inertancia que aporta este AR, el cual, es de suma importancia para el funcionamiento de una red TID óptima.

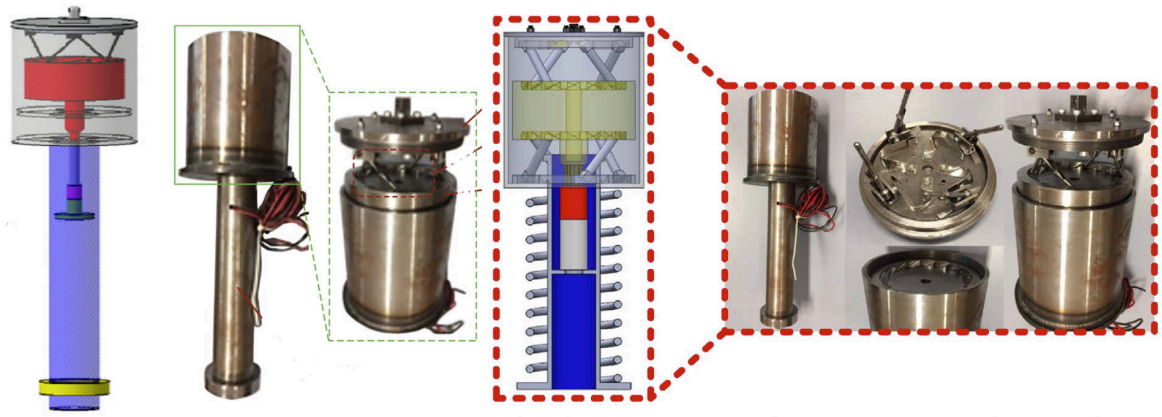


Figura 25. Amortiguador electromecánico de a) un mecanismo de brazo dentado y b) doble mecanismo de brazo dentado.

Fuente: Imagen adaptada de (Abdelkareem et al., 2022)

Durante los últimos diez años surgieron algunos amortiguadores electromecánicos con mecanismos de conversión peculiares. Uno de ellos es el mecanismo de tornillo algebraico presentado en (Sabzehgar et al., 2014), el cual, fue diseñado para aumentar la eficiencia de los mecanismos de tornillo-bola y piñón-cremallera. Al estar compuesto por dos juegos de eslabones unidos con rotulas en los extremos, se consideró una eficiencia mecánica teórica del 92% (Figura 26a). Con los resultados en las pruebas al prototipo, la eficiencia mecánica se redujo al 59% a causa de la fricción. Más adelante, (Salman et al., 2018) diseñó un mecanismo de conversión de movimiento basado en engranajes helicoidales y embragues unidireccionales de doble rodillo cónico. Este novedoso dispositivo obtuvo una eficiencia promedio del 40%, generando una potencia promedio de 270 W con una entrada de excitación de 2.5 Hz de frecuencia y una amplitud de 5 mm.

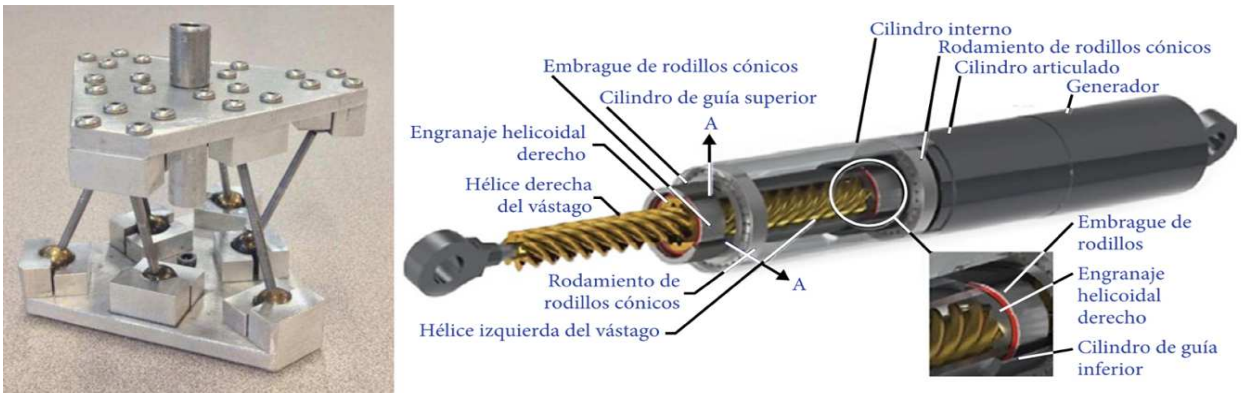


Figura 26. Amortiguador electromecánico de a) tornillo algebraico y b) engranajes helicoidales.

Fuentes: Imágenes adaptadas de (Sabzehgar et al., 2014) y (Salman et al., 2018).

Posteriormente, (Ali et al., 2021) propuso un mecanismo que consiste de un seguidor de leva barril que impulsa un eje acoplado a una transmisión de engranes cónicos y embragues unidireccionales que accionan el generador (Figura 27). La prueba de banco resultó en una potencia pico de 3.85 W con una eficiencia promedio de 45.79% a una entrada de excitación con 7.5 mm de amplitud a 2 Hz.

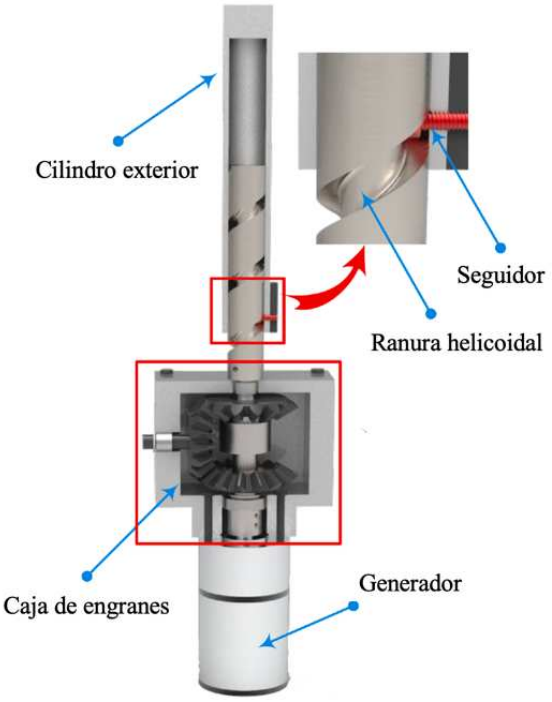


Figura 27. Amortiguador electromecánico de seguidor de leva de barril.
Fuente: (Ali et al., 2021)

Por último, (Abdelrahman et al., 2023) diseñó y analizó un AR electromecánico cuyo rectificador de movimiento mecánico consiste principalmente de un eslabón ranurado para transformar el movimiento lineal bidireccional en rotación unidireccional. Este eslabón acciona un eje donde se encuentra un conjunto de engranes cónicos con embragues unidireccionales que impulsan un generador eléctrico (Figura 28). Los resultados de la prueba de banco al prototipo mostraron una eficiencia promedio de 39.37%, generando una potencia 6.591 W a una amplitud de excitación de 7.5 mm a 2.5 Hz.

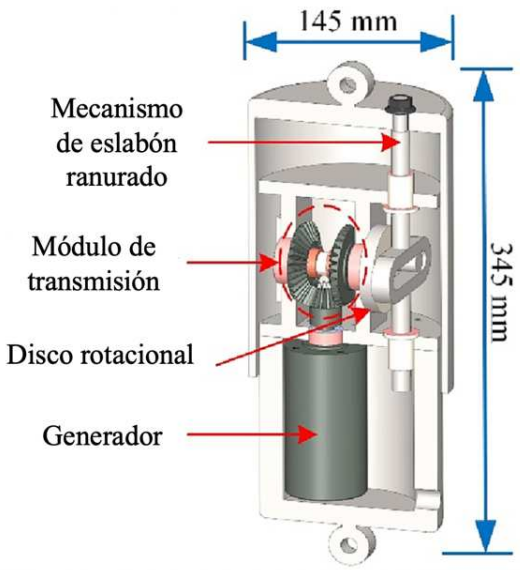


Figura 28. Vista de sección de amortiguador regenerativo electromecánico basado en el mecanismo de eslabón ranurado.

Fuente: Imagen adaptada de (Abdelrahman et al., 2023)

2.5 Conclusión del estado del arte

Con la nueva tendencia de las energías limpias se ha incrementado el interés en dispositivos de regeneración de energía en las suspensiones automotrices con el fin de extender la autonomía de los vehículos eléctricos y así reducir la ansiedad que esta provoca, conocida como range anxiety. Primeramente, se investigó su aplicación en suspensiones activas y semiactivas con una reducción del consumo de energía para el control de la suspensión. Tratando de que los amortiguadores tuvieran la capacidad de autoalimentarse para aprovechar las ventajas dinámicas que estas suspensiones presentan frente a las suspensiones convencionales. Posteriormente, enfocados en aumentar la eficiencia del combustible, los investigadores propusieron diferentes sistemas de suspensiones regenerativas para recuperar parte de la energía cinética que normalmente se disipa en los amortiguadores convencionales. Estos sistemas se dividen en tres tipos de amortiguadores regenerativos: amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales, amortiguadores regenerativos electrohidráulicos y amortiguadores regenerativos electro-mecánicos.

Los amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales se caracterizan por ser sencillos de fabricar y controlar, siendo ideales para aplicaciones en suspensiones activas y semiactivas autoalimentadas. Tienen una gran eficiencia de conversión de energía debido a la ausencia de mecanismos. Sin embargo, al no tener un mecanismo de amplificación de movimiento generan una baja relación entre su peso y las fuerzas de amortiguamiento que producen. De igual manera, la potencia generada por estos dispositivos suele ser baja.

A diferencia de los amortiguadores regenerativos electromagnéticos, los electrohidráulicos generan grandes fuerzas de amortiguamiento en relación a su tamaño y peso. Sin embargo, debido al uso de fluido viscoso suelen tener una baja eficiencia de conversión de energía provocada por la fricción viscosa. Por lo que es necesario mantener un sellado que muchas veces provoca fallas en los sistemas convencionales. Adicionalmente, un sistema de suspensión regenerativo electrohidráulico requiere un mayor número de componentes como tuberías, acumuladores de presión y válvulas de retención. Para reducir un poco el número de componentes, se creó un sistema hidráulico interconectando las cuatro suspensiones para compartir algunos dispositivos.

Por último, los amortiguadores electromecánicos presentan una buena relación entre las fuerzas de amortiguamiento que generan con su tamaño y peso. Así mismo, presentan una alta eficiencia de conversión de energía gracias a los mecanismos de amplificación de movimiento. Sin embrago, por esta misma razón generan fuerzas inerciales que afectan las dinámicas de la suspensión a altas frecuencias de excitación, por lo que es necesario optimizar la inercia rotacional del mecanismo de conversión de movimiento. Como último punto, es necesario tomar en cuenta la fatiga de los elementos mecánicos que conforman el mecanismo de rectificación de movimiento, evitando los mecanismos susceptibles a rupturas por altas cargas mecánicas a altas frecuencias de excitación.

Es importante mencionar que los ARs electromecánicos afectan a los índices de rendimiento del sistema de suspensión específicamente a altas frecuencias de excitación, lo cual, es un fenómeno que ocurre en el arreglo en paralelo de un inersor, un amortiguador y un resorte. Para lograr un mejor funcionamiento del sistema de aislamiento de vibración, se ha propuesto

recientemente el TID (Tuned-Inerter-Damper), el cual, funciona mejor a alta frecuencia de excitación proporcionando un mejor balance dinámico entre los índices de rendimiento del sistema de suspensión. Cabe destacar que la elección del TID, se debe a la notable mejora que provoca en el rendimiento dinámico de una suspensión en comparación de la suspensión pasiva, lo cual fue propuesto y estudiado por (Shen et al., 2016). Adicionalmente, (H. Li et al., 2019) estudió una vez más el TID y la comparo con otras 7 suspensiones basadas en el inersor, concluyendo que la suspensión con mejor rendimiento utiliza el TID. Por esta razón, vale la pena hibridar al TID mediante el uso de la tecnología del AR electromecánico, para mejorar significativamente no solo la capacidad de amortiguamiento del sistema, sino también la efectividad de regeneración de energía vibratoria. En cuanto a la elección del AR, se optó por el AR electromecánico de brazo dentado, debido al uso de una transmisión de engranes planetarios que permite una gran variación en la relación de transmisión, afectando directamente en la inercia que es capaz de proveer. Además, a diferencia de varios diseños, su modelado matemático consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, lo que facilita su solución, la aplicación de procesos matemáticos y diversas simulaciones. Adicionalmente, el AR electromecánico es capaz de generar fuerzas inerciales comparables al comportamiento de un inersor.

Capítulo 3

3. Marco teórico

3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange para el acoplamiento de sistemas electromecánicos

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para obtener las ecuaciones que rigen el movimiento de un sistema mecánico y/o eléctrico a través de un análisis de energía sin utilizar las leyes de Kirchhoff y Newton. Cabe destacar que se respetan dichas leyes en las ecuaciones resultantes al aplicar el método de Euler-Lagrange.

Lo primero es definir el número de coordenadas generalizadas del sistema a analizar, ya que este número define la cantidad de ecuaciones resultantes que es igual a los grados de libertad del sistema. La ecuación (3.1) de Lagrange es para sistemas mecánicos conservativos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.1}$$

Donde L representa al lagrangiano y q_i es la i-ésima variable generalizada del sistema. El lagrangiano consiste en la resta de la energía cinética T menos la energía potencial U del sistema que resulta en la ecuación (3.2).

$$L = T - U \tag{3.2}$$

Para el caso no conservativo se tiene la ecuación (3.3) Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i - \frac{\partial D_i}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.3}$$

Donde F_i representa la i-ésima fuerza impuesta al sistema y D_i es la disipación de energía.

En cuanto a los sistemas electromecánicos se debe agregar en el lagrangiano la energía cinética y potencial del sistema eléctrico al lagrangiano antes descrito, como se puede observar en la ecuación (3.4):

$$L = T - V + W_m - W_e \tag{3.4}$$

Donde W_m y W_e representan la energía cinética y potencial del sistema eléctrico respectivamente. Adicionalmente, se deben considerar en D_i la energía eléctrica disipada en la resistencia del sistema y en F_i el voltaje (Manhães et al., 2018).

3.2 Ley de Faraday

De acuerdo con (Purcell & Morin, 2013), la ley de Faraday establece que en un conductor se induce un voltaje conocido como fuerza electromotriz (FEM) cuando es sometido a un flujo de campo magnético variable cuya ecuación (3.5) se describe como sigue:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} \tag{3.5}$$

Donde ε representa la fem y Φ es el flujo magnético variable en el tiempo que atraviesa el conductor. Tal flujo magnético se puede representar con la siguiente integral de lazo cerrado (ecuación (3.6)):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint B \bullet (v \times ds) \tag{3.6}$$

Donde B es la intensidad del campo magnético, v es la velocidad con la que se desplaza el conductor dentro del campo magnético y ds representa la longitud del conductor. Cabe destacar que, en el caso de una bobina, las ecuaciones anteriores se deben multiplicar por N que es el número de vueltas.

3.3 Leyes de Kirchhoff

De acuerdo con (Alexander C. & Sadiku M., 2013) las leyes de Kirchhoff se introdujeron en 1847 por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff. La primera Ley de Kirchhoff establece que la suma de corrientes que entran y salen de un nodo es cero y cumple la ecuación (3.7):

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \tag{3.7}$$

La segunda Ley de Kirchhoff también conocida como la ley de tensión de Kirchhoff cuya ecuación (3.8) menciona que la suma de todas las tensiones dentro de un lazo cerrado es igual a cero.

$$\sum_{m=1}^{M} U_m = 0 \tag{3.8}$$

Adicionalmente, un lazo consiste en una trayectoria cerrada de un circuito. Por ejemplo, el circuito RL de la Figura 29 representa un lazo cerrado.

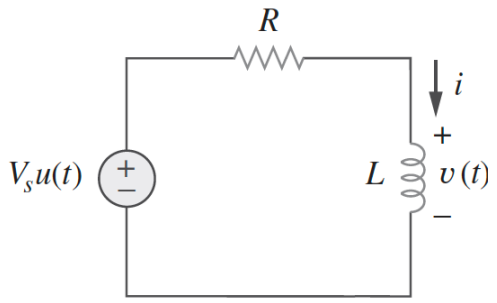


Figura 29. Circuito RL.
Fuente: (Alexander C. & Sadiku M., 2013)

3.4 Modelos dinámicos del vehículo

El modelo dinámico consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento que tienen las suspensiones automotrices bajo diferentes tipos de perturbaciones. Los grados de libertad contenidos en dichas ecuaciones diferenciales representan el desplazamiento, velocidad y aceleración de los neumáticos y de la carrocería. En el caso del modelo de medio vehículo y vehículo completo también se analizan las dinámicas angulares de la carrocería, las cuales son descritas en los puntos posteriores. Adicionalmente, como perturbación se pueden utilizar procesos estocásticos que simulan de manera más realista las carreteras de diferentes rugosidades. También se han utilizado en artículos perturbaciones senoidales experimentales debido a que los bancos de pruebas MTS solo admiten este tipo de perturbaciones con el fin de poder corroborar los resultados experimentales y los analíticos.

3.4.1 Modelos de suspensión de un cuarto de vehículo.

Este modelo destaca por su simplicidad ya que solo tiene dos grados de libertad. Es ideal para simular el comportamiento vertical de una cuarta parte de la suspensión de manera rápida y con un consumo bajo en costo computacional. Es utilizado por diversos investigadores para comparar los resultados de las pruebas de banco con sus simulaciones computacionales. Sin embargo, debido a que no contempla el comportamiento de balanceo y cabeceo carece de precisión al simular una suspensión. (Abdelkareem, Xu, Guo, et al., 2018) comprobó que la variación en la capacidad de recolección de energía cuando se utiliza el modelo de un cuarto de suspensión difiere significativamente de los otros dos modelos de suspensión. En la Figura 30 se pueden observar los parámetros considerados en el modelo de suspensión de un cuarto de vehículo donde M_1 y M_2 representan las masas del neumático y de la carrocería, K_1 y K_2 representan la rigidez del neumático y del resorte de la suspensión y B_1 y B_2 representan el coeficiente de amortiguación del neumático y del amortiguador de la suspensión. Cabe destacar que, para fines prácticos el coeficiente de amortiguación del neumático no se tomará en cuenta para los análisis.

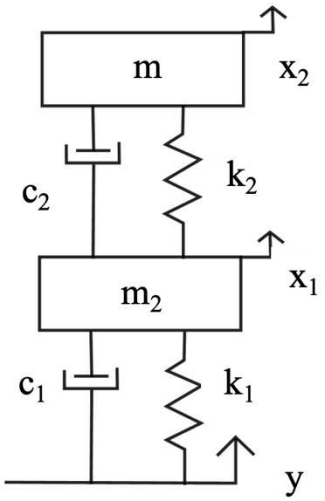


Figura 30. Modelo de suspensión de un cuarto de vehículo.
Fuente: Imagen adaptada de (R. Zhang et al., 2020)

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al modelo de un cuarto de suspensión son las siguientes ecuaciones (3.9):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Donde la función lagrangiana y de disipación de energía se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} L(T, V) = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) - V(x_1, x_2, y) \\ D = \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - x_1)^2 \end{cases} \tag{3.10}$$

Combinando las ecuaciones (3.9) y (3.10) se obtienen las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de un cuarto de suspensión pasiva en el dominio del tiempo mostradas en la ecuación (3.11):

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_t(x_1 - y) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Para obtener el modelo matemático en el dominio de la frecuencia, se aplica la transformada de Laplace al conjunto de ecuaciones (3.11) que resultan en lo siguiente:

$$\begin{cases} s^2 m x_2 - k_2(x_2 - x_1) + s c_2(x_2 - x_1) = 0 \\ s^2 m_2 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - s c_2(x_2 - x_1) + k_t x_1 = k_t y \end{cases} \tag{3.12}$$

Después, se sustituye la variable de Laplace por la unidad imaginaria (I) multiplicada por la frecuencia angular ω. Posteriormente, se lleva a una forma matricial que facilita la solución del sistema y se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(I\omega) \\ x_1(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_t y \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Donde los coeficientes de la matriz de la ecuación (3.13) se encuentran en el Apéndice D.

3.4.2 Modelos de suspensión de medio vehículo.

Referente a este modelo de suspensión (Abdelkareem, Xu, Guo, et al., 2018) menciona que, si la función de excitación de entrada en la suspensión es la misma en las ruedas izquierdas y derechas y solo varia por un pequeño retraso entre las ruedas delanteras y traseras, los modelos de suspensión de medio vehículo y el de vehículo completo tienen exactamente la misma respuesta. Esto se debe a que con estas condiciones de excitación el vehículo no se balancea

debido a que el eje transversal de la suspensión se mantiene sin girar, a diferencia del cabeceo donde el eje longitudinal si gira por el retraso de la excitación y este movimiento esta descrito en el modelo de medio y vehículo completo. Con lo antes mencionado, es posible obtener los mismos resultados en los modelos de medio y vehículo completo si no existe un balanceo en el vehículo. En la Figura 31 se puede observar el modelo de la suspensión de medio vehículo donde de manera similar al modelo de un cuarto de vehículo se representan los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de los elementos de la suspensión, los cuales, se diferencían de la parte delantera y trasera con la letra f y r, respectivamente. Adicionalmente, se agrega θ como la variable angular del eje longitudinal conocido como cabeceo y su correspondiente momento de inercia j, nuevamente sin considerar el amortiguamiento del neumático.

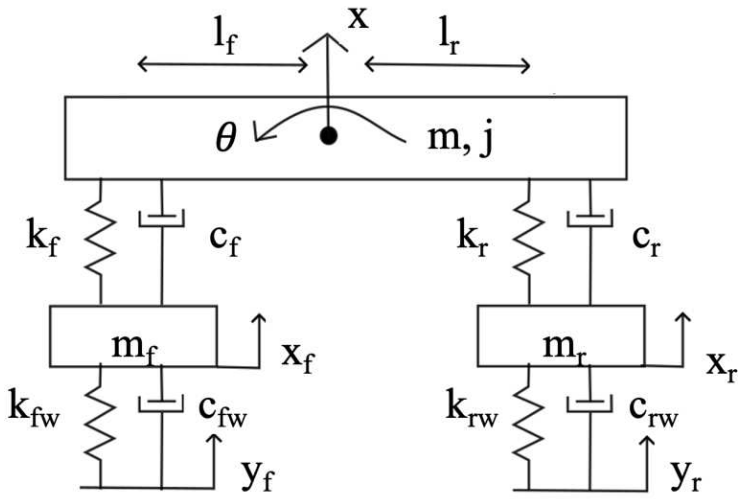


Figura 31. Modelo de suspensión de medio de vehículo.
Fuente: Imagen adaptada de (R. Zhang et al., 2020)

Para este modelo las ecuaciones de Euler-Lagrange a aplicar son las siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wr}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wf}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wf}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wf}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

De las cuales se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones de movimiento correspondientes a los cuatro grados de libertad, mostrados en la ecuación (3.15):

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) = 0 \\ j\ddot{\theta} - L_f[k_1(x_{bf} - x_{wf}) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f)] + L_r[k_2(x_{br} - x_{wr}) + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r)] = 0 \\ m_{wf}\ddot{x}_{wf} - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) - c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) = 0 \\ m_{wr}\ddot{x}_{wr} - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) - c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Donde se utiliza la siguiente cinemática lineal que considera el desplazamiento angular

$$\begin{cases} x_{bf} = x_b - L_f\theta \\ x_{br} = x_b + L_r\theta \end{cases} \tag{3.16}$$

Después, se aplica la transformada de Laplace y se lleva a la forma matricial correspondiente siguiendo el mismo proceso aplicado al sistema de un cuarto de suspensión pasiva, resultando en las ecuaciones (3.16) y (3.17):

$$\begin{cases} s^2m_bx_b + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + sc_f(x_{bf} - x_f) + sc_r(x_{br} - x_r) = 0 \\ s^2j\theta - L_f[k_1(x_{bf} - x_{wf}) + sc_f(x_{bf} - x_f)] + L_r[k_2(x_{br} - x_{wr}) + sc_r(x_{br} - x_r)] = 0 \\ s^2m_{wf}x_{wf} - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) - sc_f(x_{bf} - x_f) = 0 \\ s^2m_{wr}x_{wr} - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) - sc_r(x_{br} - x_r) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(I\omega) \\ x_f(I\omega) \\ x_r(I\omega) \\ \theta(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_t y_{gf} \\ k_t y_{gr} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Los coeficientes de la matriz de la ecuación (3.18) se describen en el Apéndice D.

3.4.3 Modelos de suspensión del vehículo completo.

Por último, el modelo de suspensión del vehículo completo incluye el cabeceo y el balanceo del vehículo, siendo el más completo y el más cercano a la realidad. Por esta razón, utilizar este modelo de suspensión permite obtener resultados más precisos que los demás modelos.

Como se puede observar en la Figura 32, el modelo del vehículo completo además de agregar las dinámicas de dos neumáticos adicionales, se incorpora un nuevo grado de libertad angular que corresponde al cabeceo.

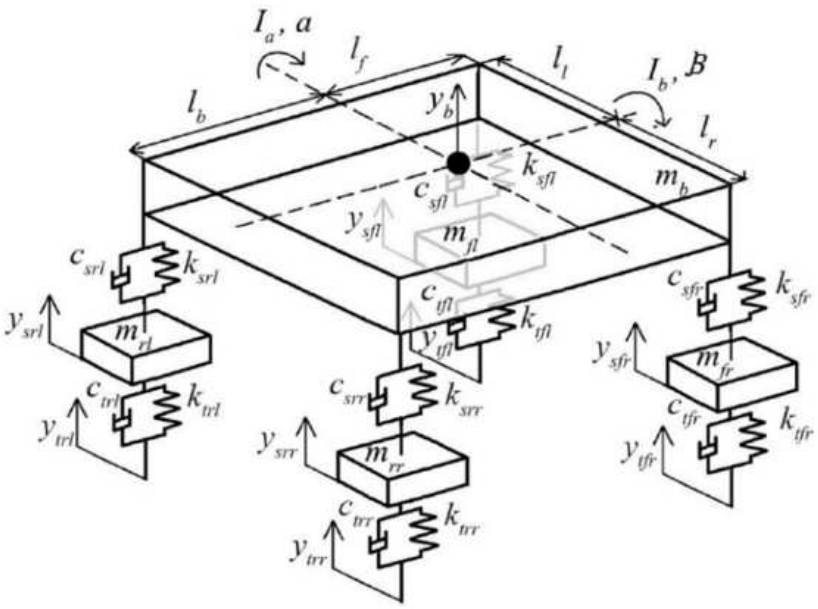


Figura 32. Modelo de suspensión del vehículo completo.

Fuente: Imagen adaptada de (R. Zhang et al., 2020)

Para este modelo corresponden las formulaciones de Euler-Lagrange contenidas en el conjunto de ecuaciones (3.18):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{y}_b} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_{srl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srl}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_{sfr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfr}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \beta} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_{sfl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfl}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_{srr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srr}} = 0 & \end{cases} \tag{3.19}$$

Posteriormente, desarrollando el conjunto de ecuaciones (3.19) se obtiene el siguiente conjunto de modelos matemáticos en la ecuación (3.20).

$$
\begin{cases}
m_b\ddot{y}_b + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) + \\
\quad c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) = 0 \\
I_a\ddot{\alpha} - l_b(c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl})) \\
\quad + l_f(c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl})) = 0 \\
I_b\ddot{\beta} + l_r(c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr})) \\
\quad - l_l(c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl})) = 0 \\
m_{rr}\ddot{y}_{srr} - c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{trr}(\dot{y}_{srr} - \dot{y}_{trr}) - k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{trr}(y_{srr} - y_{trr}) = 0 \\
m_{rl}\ddot{y}_{srl} - c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{trl}(\dot{y}_{srl} - \dot{y}_{trl}) - k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{trl}(y_{srl} - y_{trl}) = 0 \\
m_{fr}\ddot{y}_{sfr} - c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{tfr}(\dot{y}_{sfr} - \dot{y}_{tfr}) - k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{tfr}(y_{sfr} - y_{tfr}) = 0 \\
m_{fl}\ddot{y}_{sfl} - c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + c_{tfl}(\dot{y}_{sfl} - \dot{y}_{tfl}) - k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) + k_{tfl}(y_{sfl} - y_{tfl}) = 0
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

Después, en la ecuación (3.21) se muestra la forma matricial de la respuesta en frecuencia del modelo de vehículo completo. Así mismo, los coeficientes de la matriz se encuentran en el Apéndice D.

$$
\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 \\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 \\
A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 \\
A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 \\
A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 \\
A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 \\
A_7 & B_7 & C_7 & D_7 & E_7 & F_7 & G_7
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y_b(I\omega) \\ \alpha(I\omega) \\ \beta(I\omega) \\ y_{srr}(I\omega) \\ y_{srl}(I\omega) \\ y_{sfr}(I\omega) \\ y_{sfl}(I\omega)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{trr}y_{trr} \\ k_{trl}y_{trl} \\ k_{tfr}y_{tfr} \\ k_{tfl}y_{tfl}
\end{pmatrix}
\tag{3.21}
$$

3.4.4 Modelo del perfil de carretera.

Comúnmente se crean perfiles de carretera artificiales como excitación, con el objetivo de simular el comportamiento dinámico del vehículo bajo ciertas condiciones y perturbaciones. Existen cuatro tipos de excitaciones: armónica, periódica, transitoria y aleatoria. Las excitaciones armónicas y transitorias son las más utilizadas. Además, son más predecibles que las excitaciones periódicas y aleatorias. Una excitación del tipo sinusoidal es una excitación armónica, y cuando la perturbación desaparece después de un tiempo o se mantiene constante, es una excitación transitoria. Por otro lado, la excitación aleatoria no posee un patrón a corto plazo, sin embargo, es posible definir algunos promedios a largo plazo para caracterizar una excitación aleatoria. El tipo de excitación dependerá del objetivo de la prueba, por ejemplo, para evaluar el

comportamiento de la suspensión frente a un bache, bastará con una excitación transitoria (Jazar, 2014).

El perfil de carretera aleatorio se puede desarrollar con base en las rugosidades de la carretera establecidos por la norma ISO 8608 (Tabla 3) y a la velocidad de manejo. Por ende, en (Abdelkareem et al., 2018) se define la siguiente ecuación que describe el desplazamiento en el dominio del tiempo de la carretera irregular:

$$\dot{x}_g(t) = 2\pi\eta_o w(t)\sqrt{G_x(\eta_o)V(t)} - 2\pi f_o x_g(t) \tag{3.22}$$

Donde $x_g(t)$ es el desplazamiento de excitación de la carretera en [m], $G_x(\eta_o)$ es el coeficiente de rugosidad de la carretera en [m^3], η_o es la frecuencia espacial de referencia con un valor de 0.1 m^{-1}, f_o es una frecuencia de corte igual a 0.0628 Hz, $V(t)$ es la velocidad de manejo en [m/s] y $w(t)$ es una señal de ruido blanco gaussiano en el dominio del tiempo.

Tabla 3. Niveles de rugosidad de carretera por la norma ISO 8608.

Grado del perfil de carretera	$G_x(\eta_o)(*10^{-6})$m^3 Media geométrica	Grado del perfil de carretera	$G_x(\eta_o)(*10^{-6})$m^3 Media geométrica
Clase A	16	Clase E	4096
Clase B	64	Clase F	16384
Clase C	256	Clase G	65536
Clase D	1024	Clase H	262164

Fuente: (Abdelkareem et al., 2018)

3.5 Método Monte Carlo

El método Monte Carlo se utiliza para resolver una gran variedad de problemas en diferentes campos como: ciencia, economía e ingeniería, mediante el uso del muestreo estadístico en computadoras. Este método se aplica principalmente de las siguientes tres maneras: (1) Para generar objetos y procesos aleatorios con el fin de observar su comportamiento, (2) para estimar cantidades numéricas mediante muestreo repetido y (3) con el objetivo de resolver problemas de optimización a través de algoritmos aleatorizados (Kroese & Rubinstein, 2012).

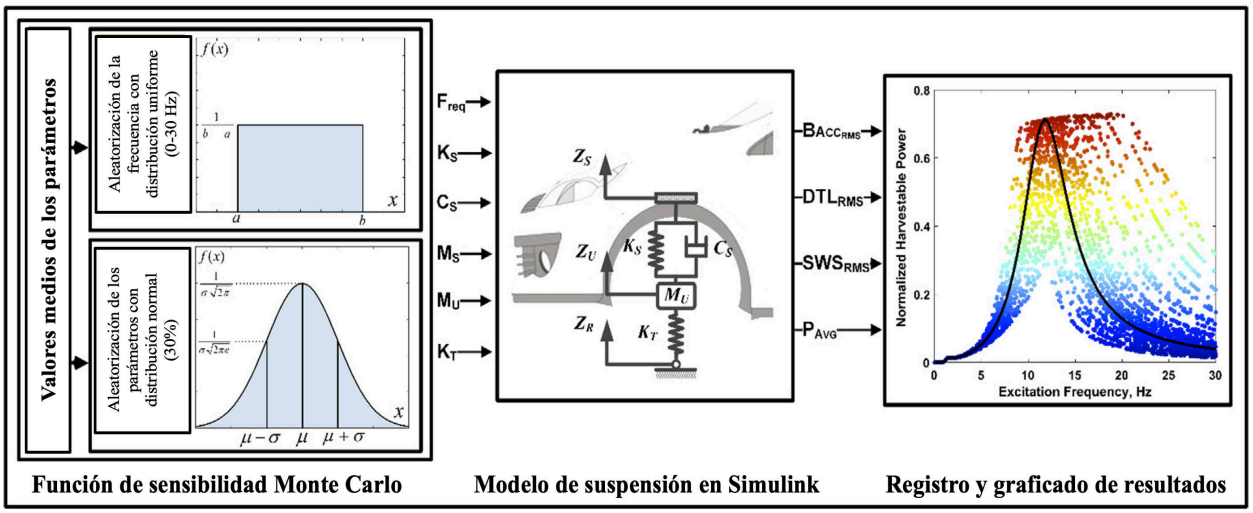


Figura 33. Diagrama de flujo de las simulaciones de sensibilidad paramétrica Monte Carlo. Fuente: Imagen adaptada de (Abdelkareem et al., 2020).

En (Abdelkareem et al., 2020) adaptaron el método Monte Carlo para realizar análisis de sensibilidad paramétrica de las respuestas en frecuencia de las dinámicas de aceleración de la carrocería, deflexión de la suspensión, la carga dinámica del neumático y la potencia aprovechable para regeneración de energía. Esta adaptación se describe en el diagrama de flujo de la Figura 33, el cual esta compuesto por tres etapas. La primera etapa consiste en obtener el muestreo necesario mediante la aleatorización de los parámetros seleccionados y de la frecuencia de excitación, por medio de funciones de distribución de probabilidad. Para los parámetros de la suspensión, se emplea la función de distribución normal gaussiana descrita en la ecuación 3.23, con una desviación estándar (σ) del 30% , un número aleatorio $x \in (-\infty, \infty)$ y un total de 80 muestras por parámetro.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.23}$$

En cuanto a la frecuencia de excitación, se utiliza una función de probabilidad normal limitada de 0 a 30 Hz con un total de 80 muestras. Cabe destacar que en Matlab existen comandos como Rand y Randn, los cuales, permiten generar números aleatorios con una distribución uniforme y normal, respectivamente.

La segunda etapa consiste en la programación del modelo matemático de la suspensión en el dominio de la frecuencia y el cálculo de las dinámicas establecidas. Como entrada al sistema, se

tienen los valores aleatorizados de un parámetro, las frecuencias de excitación y los valores medios del resto de los parámetros. En la salida, se tienen los resultados de la respuesta en frecuencia de las dinámicas correspondientes. Cabe aclarar, que el proceso anterior se debe repetir para cada uno de los parámetros seleccionados. Finalmente, la tercera etapa consiste en la recopliación de los resultados y la realización de las gráficas correspondientes. En ellas, se puede observar el nivel de sensibilidad que presenta con cierto parámetro, tanto en amplitud como en ancho de banda para las dinámicas establecidas.

3.6 Norma H_2 y su optimización

La norma H_2 es un criterio de optimización aplicado principalmente a sistemas vibratorios excitados específicamente con perturbaciones aleatorias. Esta optimización busca minimizar la energía de vibración total del sistema para todas las frecuencias, provocando la minimización del área bajo la curva de la respuesta en frecuencia del sistema (Asami et al., 2002).

Esta norma se ha utilizado ampliamente para obtener parámetros óptimos de diversos tipos de absorbedores de vibración dinámicos, tanto tradicionales como no tradicionales. En el caso de las suspensiones automotrices, se aplica la norma H_2 para obtener los índices de rendimiento necesarios para evaluar y comparar distintos tipos de sistemas de suspensión. (Smith & Wang, 2004) definieron la norma H_2 con la siguiente expresión:

$$||f(I\omega)||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(I\omega) \right|^2 d\omega \right)^{1/2} \tag{3.24}$$

Al resolver la ecuación (3.24) se obtiene una función objetivo, la cual, debe someterse a un proceso de optimización. Existen diversos métodos para resolver este tipo de problemas de optimización para el diseño de suspensiones automotrices. Algunos de ellos son; Algoritmos genéticos (GA), Operación Evolutiva de Cuadrado Rotativo (ROVOP), Método de búsqueda secuencial y métodos basados en gradientes (Mitra et al., 2016). Además, se pueden emplear programas matemáticos como Matlab o Maplesoft, que cuentan con herramientas específicas para optimización multivariable. En el caso de Maplesoft, se pueden utilizar comandos como

NLPSolve y Minimize, que permiten resolver problemas de optimización multivariable con restricciones.

3.7 Medidas de rendimiento dinámico de las suspensiones automotrices

En el diseño de las suspensiones automotrices, se deben de considerar aspectos clave de la conducción, tales como la seguridad, comodidad, maniobrabilidad y la durabilidad de la suspensión. Estos aspectos han sido objeto de mejora continua desde la construcción de los vehículos a vapor, lo que ha llevado al desarrollo de diversos sistemas de suspensiones innovadores, incluyendo tipos como las suspensiones pasivas, activas y semiactivas (Khajavi et al., 2010).

De acuerdo con (Hu et al., 2014), (Sharp & Hassan, 1986) y (Shen et al., 2016), los requerimientos de una suspensión tomando en cuenta los aspectos antes mencionados, se pueden representar con las siguientes respuestas dinámicas: la aceleración de la carrocería (BA por sus siglas en inglés, Body Acceleration), la deflexión de la suspensión (SWS, Suspension Working Space) y la carga dinámica de los neumáticos (DTL, Dynamic Tire Load). Según la norma ISO 2631-1:1997 la comodidad depende del valor cuadrático medio (RMS) de la aceleración que se ejerce sobre el cuerpo y la carga dinámica de los neumáticos indica, el agarre en carretera, lo que permite cierto nivel de maniobrabilidad y seguridad (Mitra et al., 2016). En cuanto a la deflexión de la suspensión o espacio de trabajo de la suspensión, entre menor sea su valor, menor será la fatiga de los componentes de la suspensión. Con esto, surgen los siguientes índices de rendimiento: índice del confort (J_{BA}), índice del nivel de la deflexión de la suspensión (J_{SWS}) y el índice de la carga dinámica de los neumáticos (J_{DTL}) definidos por (Hu et al., 2014) y (Smith & Wang, 2004) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} J_{BA} = ||\left(S(v)\right) \cdot \left(H_{BA}\right)||_2 \\ J_{SWS} = ||\left(S(v)\right) \cdot \left(H_{SWS}\right)||_2 \\ J_{DTL} = ||\left(S(v)\right) \cdot \left(H_{DTL}\right)||_2 \end{cases} \tag{3.25}$$

Donde $S(v)$ es la función de densidad espectral de desplazamiento del perfil de carretera aleatorio y H_{BA}, H_{SWS} y H_{DTL} son las funciones de transferencia de las dinámicas correspondientes.

Adicionalmente, para las suspensiones regenerativas se tiene la potencia regenerada como el requerimiento principal. Por ende, los diseños de amortiguadores regenerativos se han enfocando en obtener la mayor cantidad de potencia regenerada, al mismo tiempo que asemejan el comportamiento de un amortiguador de fluido viscoso. La expresión del índice de la potencia regenerada se puede expresar como sigue:

$$\left\{ J_{PG} = || \left(S(v)\right) \cdot \left(H_{PG}\right) ||_2 \right. \tag{3.26}$$

Donde H_{PG} es la función de transferencia de la potencia regenerada.

3.8 Modelado y simulación de la suspensión TID

En (Shen et al., 2016) diseñaron una suspensión automotriz óptima basada en la estructura TID, la cual, se ilustra en el diseño 9 de la Figura 8. A continuación se desarrolla brevemente el proceso de modelado matemático, optimización y comparación de la suspensión TID con respecto a la suspensión pasiva tradicional. El siguiente modelo matemático de la suspensión TID se realizó utilizando la segunda ley de Newton:

$$\begin{cases} m_s\ddot{z}_s + k_1(z_s - z_u) + F = 0 \\ m_u\ddot{z}_u + k_t(z_u - z_r) - k_1(z_s - z_u) - F = 0 \\ F = b(\ddot{z}_b - \ddot{z}_u) = k_2(z_s - z_b) + c(\dot{z}_z - \dot{z}_b) \end{cases} \tag{3.27}$$

Donde m_s y m_u son la masa suspendida y no suspendida; k_1, k_2 y k_t son las rigideces del resorte principal, secundario y del neumático; b es la inertancia del inersor; c es el coeficiente del amortiguador y F es la fuerza entre el inersor y el arreglo en paralelo del amortiguador y el resorte secundario. En cuanto a las variables, z_s y z_u son los desplazamientos de las masas suspendida y no suspendida; z_b es el desplazamiento del inersor y z_r es el desplazamiento de entrada de la carretera. Posteriormente, aprovechando la segunda ley de Newton aplicada a la

estructura TID, se puede utilizar rápidamente la siguiente ecuación en espacio de estados para la solución del modelo matemático de la ecuación (3.27):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases} \tag{3.28}$$

Donde la variable de estado es la siguiente:

$$X = [\dot{z}_s \quad \dot{z}_u \quad \dot{z}_b \quad z_s \quad z_u \quad z_b]^T \tag{3.29}$$

La variable de entrada es:

$$u = z_r \tag{3.30}$$

Las variables de salida son la aceleración de la carrocería (BA), la deflexión de la suspensión (SWS) y la carga dinámica (DTL), expresadas en orden de la siguiente manera:

$$y = [\ddot{z}_s \quad z_s - z_u \quad k_t(z_u - z_r)] \tag{3.31}$$

Finalmente, se presentan los elementos restantes de la ecuación (3.28) en espacios de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{m_s} & -\frac{c}{m_s} & -\frac{k_1}{m_s} & \frac{k_1+k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} \\ 0 & -\frac{c}{m_u} & \frac{c}{m_u} & -\frac{k_1}{m_u} & -\frac{k_1+k_2+k_t}{m_u} & \frac{k_2}{m_u} \\ 0 & \frac{c}{m_s}+\frac{c}{b} & -\left(\frac{c}{m_s}+\frac{c}{b}\right) & -\frac{k_1}{m_s} & \left(\frac{k_1+k_2}{m_s}+\frac{k_2}{b}\right) & -\left(\frac{k_2}{m_s}+\frac{k_2}{b}\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad \frac{k_t}{m_u} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{m_s} & -\frac{c}{m_s} & -\frac{k_1}{m_s} & \frac{k_1+k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_t & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \quad 0 \quad -k_t]^T$$

Posteriormente, para la optimización de la suspensión TID se definió una función objetivo unificada, a partir de una combinación lineal de la división de los valores RMS de los tres

criterios mencionados anteriormente, de la suspensión TID sobre la suspensión pasiva. La función objetivo a ser minimizada se muestra a continuación:

$$J = \frac{BA}{BA_{pas}} + \frac{SWS}{SWS_{pas}} + \frac{DTL}{DTL_{pas}} \tag{3.32}$$

La optimización se realizó mediante un algoritmo genético, el cual, simula la selección natural de la evolución genética con base en los parámetros como lo son la masa suspendida y no suspendida y la rigidez del neumático, produciendo los valores óptimos contenidos en la Tabla 4.

Tabla 4. Parámetros de la suspensión TID.

Parametros	Valores
Rigidez del resorte principal k_1	22 $[kNm^{-1}]$
Rigidez del resorte secundario k_2	10 $[kNm^{-1}]$
Inertancia b	217 $[kg]$
Coeficiente del amortiguador c	1067 $[Nsm^{-1}]$
Masa suspendida m_s	320 $[kg]$
Masa no suspendida m_u	45 $[kg]$
Rigidez del neumático k_t	190 $[kNm^{-1}]$

Fuente: (Shen et al., 2016).

Para cuantificar la mejora de la suspensión TID, se contempla como referencia una suspensión pasiva, en la cual, se reemplaza la estructura del TID por un amortiguador con el mismo coeficiente de amortiguamiento utilizado en el TID. Con esto, se asegura una comparación justa entre ambas suspensiones. En seguida, se simula el comportamiento dinámico de ambas suspensiones a modo de comparación. En el dominio de la frecuencia, se utiliza una excitación de tipo sinusoidal con una variación en la frecuencia de [0-15] Hz. En cambio, en el dominio del tiempo se crea un perfil de carretera aleatorio como desplazamiento de entrada para ambos sistemas de suspensión.

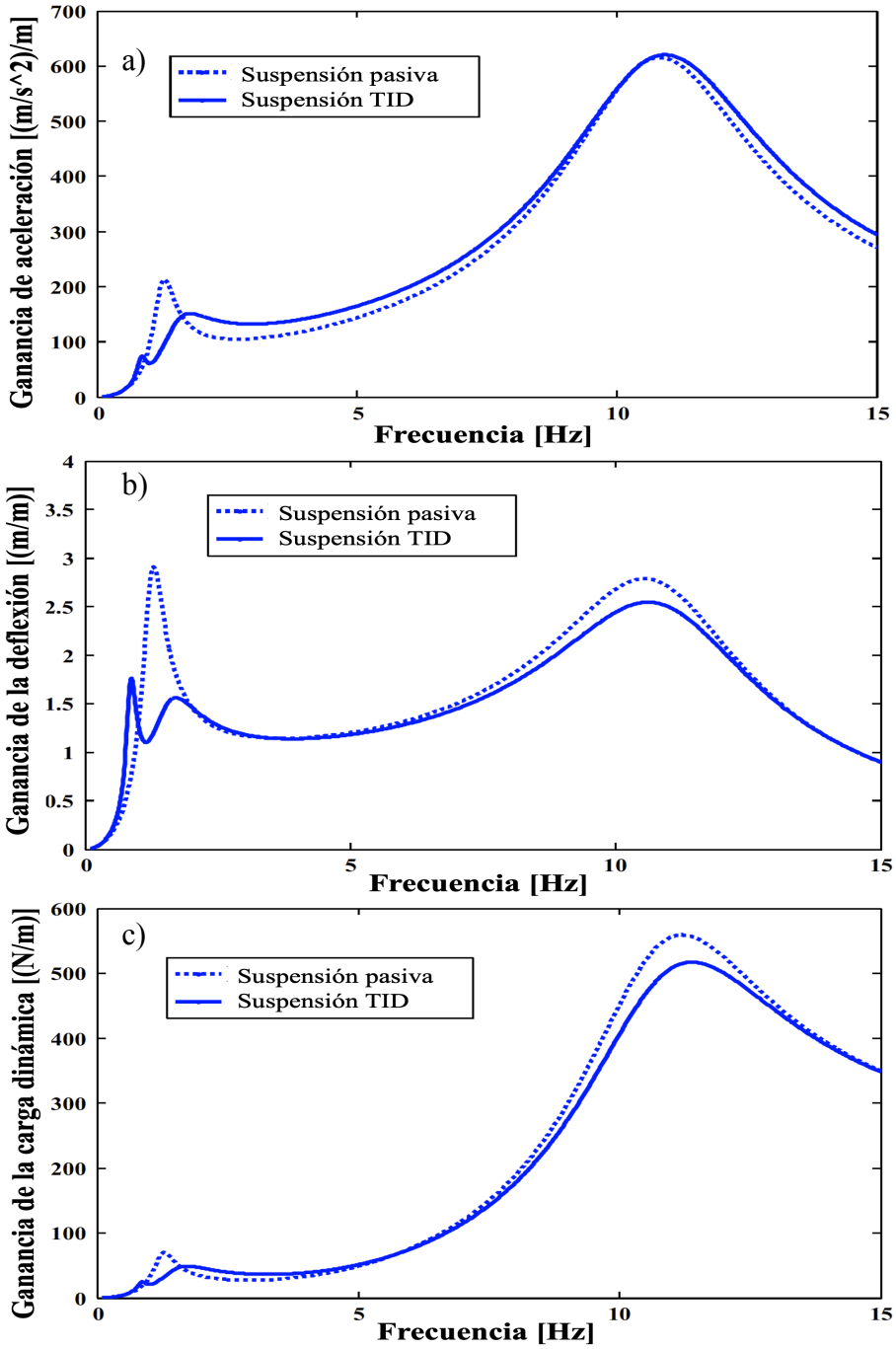


Figura 34. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID de las ganancias de: a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

En la Figura 34, se muestran los resultados de la simulación en el dominio de la frecuencia. Nótese que, la suspensión TID es capaz de reducir la aceleración de la carrocería a bajas frecuencias. Sin embargo, para mayores frecuencias de excitación aumenta la aceleración en comparación de la suspensión pasiva. En cuanto a la deflexión de la suspensión y la carga

dinámica del neumático, la suspensión TID reduce notoriamente ambas dinámicas en comparación con la suspensión pasiva. Con base en las respuestas en frecuencia, (Shen et al., 2016) destacaron que el pico de la primera resonancia en las tres respuestas dinámicas ha sido reducido de manera consistente con el DVA utilizado. Además, el diseño mejorado es razonable.

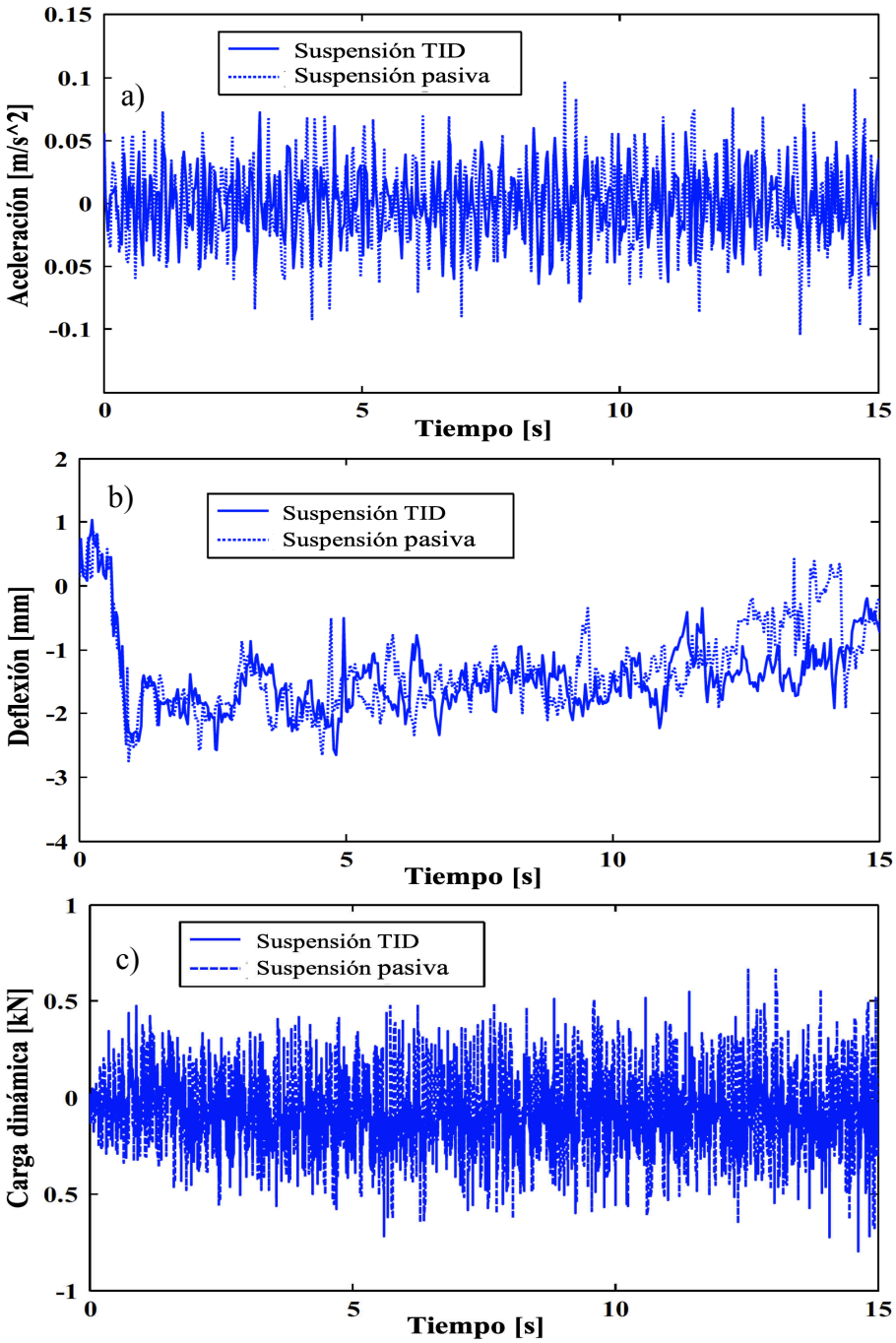


Figura 35. Respuestas dinámicas en el dominio del tiempo en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID de: a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

Más adelante, las respuestas en el dominio del tiempo se muestran en la Figura 35, donde se puede apreciar que en las tres dinámicas analizadas la suspensión TID reduce la amplitud en la mayor parte del tiempo. Adicionalmente, (Shen et al., 2016) cuantificaron la mejora que proporciona la suspensión TID calculando los valores RMS de las dinámicas analizadas en el dominio del tiempo en ambas suspensiones. Los valores RMS se calcularon para diferentes velocidades de conducción, resultando en una disminución de hasta el 4% en la aceleración de la carrocería, de hasta el 16% en la deflexión de la suspensión y una disminución de la carga dinámica en el neumático de hasta el 6%. Cabe destacar, que la variación en la velocidad de conducción afecta de forma despreciable en la comparación de ambas suspensiones, por lo que se pueden realizar los cálculos con una sola velocidad de conducción.

Capítulo 4

4. Modelado matemático de un cuarto, medio y vehículo completo acoplado con TID, AR y AR-TID.

En esta sección, se presentan los modelos matemáticos que rigen el comportamiento dinámico de las suspensiones en el dominio del tiempo y la frecuencia acopladas con los siguientes dispositivos: el absorbedor de vibraciones de alto rendimiento TID, el amortiguador regenerativo electromecánico de brazo dentado (AR) y el amortiguador regenerativo electromecánico de brazo dentado acoplado al TID denominado AR-TID.

4.1 Modelos de suspensión con TID

Para el modelado de las suspensiones automotrices con el TID acoplado, se considera la red mecánica propuesta en (Shen et al., 2016) conectado en paralelo con el resorte principal de la suspensión. La red TID está compuesta por un resorte y un amortiguador en paralelo, conectados a su vez a un inersor en serie como se puede observar en la Figura 36.

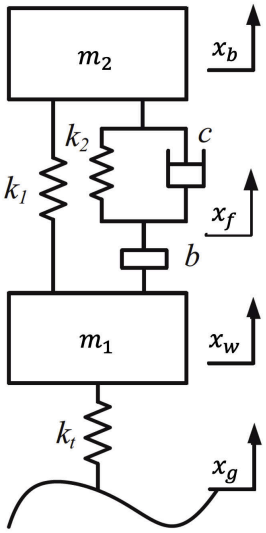


Figura 36. Diagrama de un cuarto de suspensión con TID.
Fuente: (Shen et al., 2016)

Primeramente, se toma en cuenta una cuarta parte del vehículo tal y como se muestra en la Figura 36, donde se tiene un grado de libertad adicional en comparación con la suspensión pasiva

tradicional. Este grado de libertad se debe a la conexión en serie de los elementos mecánicos de la red TID y se localiza entre dichos elementos.

Posteriormente, se realiza el mismo procedimiento de la sección 3.4, comenzando con la aplicación del formulismo de Lagrange, del cual, se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas correspondientes a un cuarto de suspensión TID:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 \qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_w}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_w} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_w} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_f}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_f} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Donde la función lagrangiana y de disipación de energía se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} L(T, V) = T(\dot{x}_b, \dot{x}_f, \dot{x}_w) - V(x_b, x_f, x_w) \\ D = \frac{1}{2}c(\dot{x}_b - \dot{x}_f)^2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Al combinar las ecuaciones (4.1) y (4.2), se obtiene el siguiente modelo matemático en el dominio del tiempo:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b - k_1(x_b - x_w) + k_2(x_b - x_f) - c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) = 0 \\ b(\ddot{x}_f - \ddot{x}_w) - k_2(x_b - x_f) - c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) = 0 \\ m_w\ddot{x}_w - b(\ddot{x}_f - \ddot{x}_w) - k_1(x_b - x_w) + k_t x_w = k_t x_g \end{cases} \tag{4.3}$$

Para obtener el modelo en el dominio de la frecuencia, se aplica la transformada de Laplace al conjunto de ecuaciones (4.3) como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} s^2 m_b x_b - k_1(x_b - x_w) + k_2(x_b - x_f) - sc(x_b - x_f) = 0 \\ s^2 b(x_f - x_w) - k_2(x_b - x_f) - sc(x_b - x_f) = 0 \\ s^2 m_w x_w - s^2 b(x_f - x_w) - k_1(x_b - x_w) + k_t x_w = k_t x_g \end{cases} \tag{4.4}$$

Finalmente, el conjunto de ecuaciones (4.4) se expresa en la siguiente forma matricial que describe el comportamiento dinámico en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ x_f(I\omega) \\ x_w(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_t x_g \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Donde los coeficientes de la matriz se describen en el Apéndice D y la variable de Laplace fue sustituida por el producto de la unidad imaginaria (I) y la frecuencia angular (ω).

En el caso de la suspensión de medio vehículo, se consideran dos ruedas para el análisis de las dinámicas de la suspensión a lo largo del eje longitudinal, donde se considera el ángulo de cabeceo (θ) y las longitudes desde el centro de gravedad de la carrocería hasta las ruedas delantera (L_f) y trasera (L_r). Tales distancias, representan los brazos de palanca de las fuerzas que ejercen las suspensiones en la carrocería del vehículo. De esta forma, la formulación lagrangiana correspondiente se expresa como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_r} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wf}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wf}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wf}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_f}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_f} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wr}} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Posteriormente, se obtiene el siguiente modelo dinámico en el dominio del tiempo:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) \\ \qquad + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) = 0 \\ I_b\ddot{\theta} - L_f[k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f)] + L_r[k_2(x_{br} - x_{wr}) \\ \qquad + k_r(x_{br} - x_r) + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r)] = 0 \\ b_f(\ddot{x}_f - \ddot{x}_{wf}) - k_f(x_{bf} - x_f) - c_f(+\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) = 0 \\ b_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{wr}) - k_r(x_{br} - x_r) - c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) = 0 \\ m_{wf}\ddot{x}_{wf} - b_f(\ddot{x}_f - \ddot{x}_{wf}) - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) = 0 \\ m_{wr}\ddot{x}_{wr} - b_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{wr}) - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Donde se utiliza la siguiente cinemática lineal:

$$\begin{cases} x_{bf} = x_b - L_f\theta \\ x_{br} = x_b + L_r\theta \end{cases} \tag{4.8}$$

A continuación, se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (4.7) para obtener lo siguiente:

$$\begin{cases} s^2 m_b x_{bf} + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) \\ \qquad + sc_f(x_{bf} - x_f) + sc_r(x_{br} - x_r) = 0 \\ I_b\theta - L_f[k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + sc_f(x_{bf} - x_f)] \\ \qquad + L_r[k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) + sc_r(x_{br} - x_r)] = 0 \\ s^2 b_f(x_f - x_{wf}) - k_f(x_{bf} - x_f) - sc_f(x_{bf} - x_f) = 0 \\ s^2 b_r(x_r - x_{wr}) - k_r(x_{br} - x_r) - sc_r(x_{br} - x_r) = 0 \\ m_{wf}x_{wf} - s^2 b_f(x_f - x_{wf}) - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) = 0 \\ m_{wr}x_{wr} - s^2 b_r(x_r - x_{wr}) - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

La cual se expresa en la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ x_f(I\omega) \\ x_r(I\omega) \\ x_{wf}(I\omega) \\ x_{wr}(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tf}x_{gf} \\ k_{tr}x_{gr} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Donde los coeficientes de la matriz de la ecuación (4.10) se encuentran en el Apéndice D.

En el caso del modelo de suspensión TID de vehículo completo, se agrega el ángulo de balanceo (ϕ) que representa el movimiento angular del eje transversal del vehículo y los respectivos brazos de palanca L_i y L_d, las cuales se miden desde el centro de gravedad del vehículo hacia las ruedas izquierdas y derechas, respectivamente.

En seguida se muestra el formulismo de Lagrange aplicado al modelo de vehículo completo con suspensión TID:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{rl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{rl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{rl}} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wfl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfl}} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wfr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfr}} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{fl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{fl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{fl}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wrr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrr}} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{fr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{fr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{fr}} = 0 & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wrl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrl}} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{rr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{rr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{rr}} = 0 &
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

Al desarrollar cuidadosamente el conjunto de ecuaciones (4.11) se obtiene el siguiente modelo matemático en el dominio del tiempo:

$$
\begin{cases}
m_b\ddot{x}_b + k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) \\
\quad + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) + k_4(x_b - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) \\
\quad + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl}) = 0 \\
I_b\ddot{\theta} - L_f[k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) \\
\quad + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr})] + L_t[k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) \\
\quad + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl})] = 0 \\
I_p\ddot{\phi} - L_d[k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) \\
\quad + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr})] + L_i[k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) \\
\quad + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl})] = 0 \\
b_{fl}(\ddot{x}_{fl} - \ddot{x}_{wfl}) - k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) - c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) = 0 \\
b_{fr}(\ddot{x}_{fr} - \ddot{x}_{wfr}) - k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) - c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) = 0 \\
b_{rr}(\ddot{x}_{rr} - \ddot{x}_{wrr}) - k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) - c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) = 0 \\
b_{rl}(\ddot{x}_{rl} - \ddot{x}_{wrl}) - k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) - c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl}) = 0 \quad \ldots
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

$$\begin{cases} m_{wfl}\ddot{x}_{wfl} - b_{fl}(\ddot{x}_{fl} - \ddot{x}_{wfl}) - k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{tfl}(x_{wfl} - x_{gfl}) = 0 \\ m_{wfr}\ddot{x}_{wfr} - b_{fr}(\ddot{x}_{fr} - \ddot{x}_{wfr}) - k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{tfr}(x_{wfr} - x_{gfr}) = 0 \\ m_{wrr}\ddot{x}_{wrr} - b_{rr}(\ddot{x}_{rr} - \ddot{x}_{wrr}) - k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{trr}(x_{wrr} - x_{grr}) = 0 \\ m_{wrl}\ddot{x}_{wrl} - b_{rl}(\ddot{x}_{rl} - \ddot{x}_{wrl}) - k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{trl}(x_{wrl} - x_{grl}) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Donde se utiliza la siguiente cinemática lineal que considera los desplazamientos angulares tanto de cabeceo como balanceo:

$$\begin{cases} x_{bfl} = (x_b - L_f\theta + L_i\phi) \\ x_{bfr} = (x_b - L_f\theta - L_d\phi) \\ x_{brr} = (x_b + L_t\theta - L_d\phi) \\ x_{bfl} = (x_b + L_t\theta + L_i\phi) \end{cases} \tag{4.13}$$

Finalmente, se obtiene el sistema matricial que determina las dinámicas del sistema en el dominio de la frecuencia siguiendo el mismo proceso utilizado en el modelo de medio vehículo:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 & I_1 & J_1 & K_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 & I_2 & J_2 & K_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & H_3 & I_3 & J_3 & K_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 & H_4 & I_4 & J_4 & K_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 & H_5 & I_5 & J_5 & K_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 & H_6 & I_6 & J_6 & K_6 \\ A_7 & B_7 & C_1 & D_1 & E_7 & F_7 & G_7 & H_7 & I_7 & J_7 & K_7 \\ A_8 & B_8 & C_2 & D_2 & E_8 & F_8 & G_8 & H_8 & I_8 & J_8 & K_8 \\ A_9 & B_9 & C_3 & D_3 & E_9 & F_9 & G_9 & H_9 & I_9 & J_9 & K_9 \\ A_{10} & B_{10} & C_{10} & D_{10} & E_{10} & F_{10} & G_{10} & H_{10} & I_{10} & J_{10} & K_{10} \\ A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & E_{11} & F_{11} & G_{11} & H_{11} & I_{11} & J_{11} & K_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ \phi(I\omega) \\ x_{fl}(I\omega) \\ x_{fr}(I\omega) \\ x_{rr}(I\omega) \\ x_{rl}(I\omega) \\ x_{wfl}(I\omega) \\ x_{wfr}(I\omega) \\ x_{wrr}(I\omega) \\ x_{wrl}(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tfl}x_{gfl} \\ k_{tfr}x_{gfr} \\ k_{trr}x_{grr} \\ k_{trl}x_{grl} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Donde los coeficientes de la matriz de la ecuación (4.14) se encuentran en el Apéndice D.

4.2 Modelos de suspensión con AR

El amortiguador regenerativo a utilizar es el de brazo dentado diseñado por Ran Zhang e introducido en (Zhang et al., 2018), el cual, se muestra en la Figura 25 inciso a). Este dispositivo está compuesto por un mecanismo de conversión de movimiento particular, conformado por un

plato superior, del cual, se sujetan cuatro brazos que se acoplan en los dientes del volante de inercia solo cuando se comprime el dispositivo. Después del acoplamiento, se transforma el movimiento lineal en compresión del dispositivo en un movimiento rotacional del volante de inercia. Posteriormente, el eje del volante de inercia está conectado a una transmisión de engranes planetarios, cuya salida esta acoplada al eje del generador, donde se produce la energía eléctrica. Tomando en cuenta los elementos que conforman el AR, se utiliza la expresión de una masa equivalente del dispositivo (m_s) para englobar el comportamiento dinámico de las piezas móviles y simplificar el modelo matemático cuando es acoplado en una suspensión automotriz, el cual, se muestra en la ecuación (A.16) y su obtención se describe en el Apéndice B. Adicionalmente, se considera el amortiguamiento del AR producido por la fricción de los componentes en movimiento junto con el amortiguamiento eléctrico debido al generador (c_L), el cual es descrito en la ecuación (A.20) y deducido en el Apéndice C. Por último, se considera la fuerza de Lorentz producida por el movimiento entre la bobina y los imanes del generador, el cual, se multiplica por el factor de amplificación de movimiento (ecuación (4.18)).

$$m_s = \left[m_{tp} + \frac{J_{FW} + J_{am} + J_{pcr} + 4(J_p + m_p r_p^2)}{r^2} + \frac{(J_g + J_s)j^2}{r^2} \right] \tag{4.15}$$

$$c_L = \frac{k_e^2 j^2}{r^2 \eta_{tp} \eta_{pg} \eta_g (R_e + R_i)} \tag{4.16}$$

$$F_L = \frac{j r_g}{r} \frac{BlV}{R_e} \tag{4.17}$$

Donde:

$$k_e = Blr_g \tag{4.18}$$

Representa la constante de la máquina eléctrica de corriente directa. Una vez definido lo anterior, se sigue el mismo procedimiento y variables en común del sistema de suspensión de la sección 4.1 para la obtención de los modelos matemáticos de la suspensión con AR. Primeramente, se realiza la siguiente formulación Lagrangiana que rige el comportamiento dinámico de la suspensión de un cuarto de vehículo con el AR acoplado en paralelo a la suspensión pasiva tradicional como se observa en la Figura 37:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} - F_L = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_w}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_w} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_w} + F_L = 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

Posteriormente, se aplica la Ley de Voltaje de Kirchhoff al circuito de recolección de energía de la Figura 3 para obtener la ecuación diferencial adicional del sistema de suspensión con AR:

$$L\frac{\dot{V}}{R_e} + \frac{(R_i + R_e)V}{R_e} - \frac{k_e j}{r}(\dot{x}_b - \dot{x}_w) = 0 \tag{4.20}$$

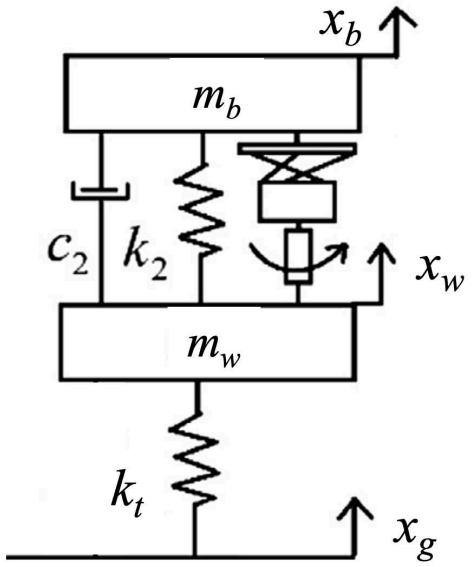


Figura 37. Diagrama de un cuarto de suspensión con AR.
Fuente: (Zhang et al., 2018)

Donde el primer término representa la caída de voltaje en la bobina del generador, el segundo término la caída de voltaje en las resistencias y la parte derecha de la ecuación (4.20) representa la energía que se genera en la máquina eléctrica.

Desarrollando el conjunto de ecuaciones (4.19) y agregando la ecuación (4.20), se obtiene el siguiente modelo matemático que rige el comportamiento dinámico y eléctrico en el dominio del tiempo de la suspensión de un cuarto con AR:

$$\begin{cases} m_2\ddot{x}_b + m_s(\ddot{x}_b - \ddot{x}_w) + k_1(x_b - x_w) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + c_L(\dot{x}_b - \dot{x}_w) - \dfrac{BlVjr_g}{R_e r} = 0 \\ m_1\ddot{x}_w - m_s(\ddot{x}_b - \ddot{x}_w) - k_1(x_b - x_w) - c(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + k_t(x_w - x_g) - c_L(\dot{x}_f - \dot{x}_w) + \dfrac{BlVjr_g}{R_e r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V}{R_e} - \dfrac{k_e j}{r}(\dot{x}_b - \dot{x}_w) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Aplicando el procedimiento utilizado anteriormente, se realiza la respectiva transformada de Laplace y la sustitución de la variable de Laplace en la ecuación (4.21), se llega a la siguiente forma matricial que rige el comportamiento mecánico y eléctrico en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ x_w(I\omega) \\ V(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_t x_g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Así mismo, los coeficientes de la matriz de la ecuación (4.22) se encuentran en el Apéndice D.

Posteriormente, para la obtención de los modelos matemáticos de medio vehículo con AR, se realiza la correspondiente formulación lagrangiana contemplando las mismas dinámicas de la suspensión pasiva tradicional de la sección 3.4.2 y agregando las fuerzas de Lorentz:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} - F_{Lf} - F_{Lr} = 0 \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wr}} + F_{Lf} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wf}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wf}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wf}} + F_{Lf} = 0 \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - L_f F_{Lf} + L_r F_{Lr} = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Donde L_f y L_r son los brazos de palanca y se pueden visualizar en la Figura 32. En el caso de las fuerzas de Lorentz, se agrega la letra f o r como subíndice para indicar si el dispositivo se encuentra en la suspensión delantera o en la trasera, respectivamente. Adicionalmente, se toman en cuenta dos ecuaciones del dominio eléctrico al igual que la ecuación (4.20) utilizando el respectivo voltaje y velocidad relativa de cada dispositivo según su posición en el modelo de medio vehículo. De acuerdo con lo anterior, se obtiene el siguiente modelo que rige el comportamiento de la suspensión de medio vehículo con AR utilizando la cinemática lineal de la ecuación (4.8):

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + b_f(\ddot{x}_{bf} - \ddot{x}_{wf}) + b_r(\ddot{x}_{br} - \ddot{x}_{wr}) + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_{wf}) \\ \quad + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_{wr}) + c_{Lf}(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf}) - F_{Lf} + c_{Lr}(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr}) - F_{Lr} = 0 \\ I_b\ddot{\theta} - L_f[b_f(\ddot{x}_{bf} - \ddot{x}_{wf}) + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) + c_{Lf}(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf}) - F_{Lf}] + \\ L_r[b_r(\ddot{x}_{br} - \ddot{x}_{wr}) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) + c_{Lr}(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr}) - F_{Lr} = 0] = 0 \\ m_{wf}\ddot{x}_{wf} - b_f(\ddot{x}_f - \ddot{x}_{wf}) - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) - c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_{wf}) - c_{Lf}(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf}) + F_{Lf} = 0 \\ m_{wr}\ddot{x}_{wr} - b_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{wr}) - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) - c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_{wr}) - c_{Lr}(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr}) + F_{Lr} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_f}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_f}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_{wf})}{r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_r}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_r}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{br} - \dot{x}_{wr})}{r} = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

Posteriormente, se obtiene la siguiente forma matricial de las ecuaciones en el dominio de la frecuencia cuyos coeficientes se encuentran en el Apéndice D:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ x_{wf}(I\omega) \\ x_{wr}(I\omega) \\ V_f(I\omega) \\ V_r(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tf}x_{gf} \\ k_{tr}x_{gr} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Finalmente, para el modelado del vehículo completo se sigue el mismo proceso utilizado en el de medio vehículo con AR, utilizando como base el modelo de la sección 3.4.3 y agregando los efectos dinámicos que produce el AR como se ha realizado durante esta sección. Con lo anterior, se define el siguiente conjunto de ecuaciones con el formalismo de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wfl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfl}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wfr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfr}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrr}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wrr}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrr}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrl}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_{wrl}} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrl}} = 0 \end{matrix} \tag{4.26}$$

Al cual se le deben agregar cuatro ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento eléctrico del dispositivo, resultando en el siguiente modelo matemático de once ecuaciones:

$$
\begin{cases}
m_b\ddot{x}_b + b_{fl}(\ddot{x}_{bfl} - \ddot{x}_{wfl}) + b_{fr}(\ddot{x}_{bfr} - \ddot{x}_{wfr}) + b_{rr}(\ddot{x}_{brr} - \ddot{x}_{wrr}) + b_{rl}(\ddot{x}_{brl} - \ddot{x}_{wrl}) + k_1(\\
x_{bfl} - x_{wfl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + c_1(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) \\
+c_2(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) + c_3(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) + c_4(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) + c_{Lfl}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{wfl}) - F_{Lfl} \\
+c_{Lfr}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{wfr}) - F_{Lfr} + c_{Lrr}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{wrr}) - F_{Lrr} + c_{Lrl}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{wrl}) - F_{Lrl} = 0 \\
I_b\ddot{\theta} - L_f[b_{fl}(\ddot{x}_{bfl} - \ddot{x}_{wfl}) + b_{fr}(\ddot{x}_{bfr} - \ddot{x}_{wfr}) + k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) \\
+c_1(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) + c_2(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) + c_{Lfl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) - F_{Lfl} + c_{Lfr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) \\
-F_{Lfr}] + L_t[k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + c_3(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) \\
+c_4(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) + c_{Lrr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) - F_{Lrr} + c_{Lrl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) - F_{Lrl}] = 0 \\
I_p\ddot{\phi} - L_d[b_{fr}(\ddot{x}_{bfr} - \ddot{x}_{wfr}) + b_{rr}(\ddot{x}_{brr} - \ddot{x}_{wrr}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) \\
+c_2(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) + c_3(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) + c_{Lfr}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{wfr}) - F_{Lfr} + c_{Lrr}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{wrr}) \\
-F_{Lrr}] + L_i[b_{fl}(\ddot{x}_{bfl} - \ddot{x}_{wfl}) + b_{rl}(\ddot{x}_{brl} - \ddot{x}_{wrl}) + k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + \\
c_1(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) + c_4(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) + c_{Lfl}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{wfl}) - F_{Lfl} + c_{Lrl}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{wrl}) - F_{Lrl}] = 0 \\
m_{wfl}\ddot{x}_{wfl} - b_{fl}(\ddot{x}_{bfl} - \ddot{x}_{wfl}) - k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) - c_1(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) + k_{tfl}(x_{wfl} - x_{gfl}) \\
-c_{Lfl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) + F_{Lfl} = 0 \\
m_{wfr}\ddot{x}_{wfr} - b_{fr}(\ddot{x}_{bfr} - \ddot{x}_{wfr}) - k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) - c_2(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) + k_{tfr}(x_{wfr} - x_{gfr}) \\
-c_{Lfr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) + F_{Lfr} = 0 \\
m_{wrr}\ddot{x}_{wrr} - b_{rr}(\ddot{x}_{brr} - \ddot{x}_{wrr}) - k_3(x_{brr} - x_{wrr}) - c_3(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) + k_{trr}(x_{wrr} - x_{grr}) \\
-c_{Lrr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) + F_{Lrr} = 0 \\
m_{wrl}\ddot{x}_{wrl} - b_{rl}(\ddot{x}_{brl} - \ddot{x}_{wrl}) - k_4(x_{brl} - x_{wrl}) - c_4(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) + k_{trl}(x_{wrl} - x_{grl}) \\
-c_{Lrl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) + F_{Lrl} = 0 \\
L\dfrac{\dot{V}_{fl}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{fl}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl})}{r} = 0 \\
L\dfrac{\dot{V}_{fr}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{fr}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr})}{r} = 0 \\
L\dfrac{\dot{V}_{rr}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{rr}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr})}{r} = 0 \\
L\dfrac{\dot{V}_{rl}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{rl}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl})}{r} = 0
\end{cases}
\tag{4.27}
$$

En donde se utiliza la cinemática lineal de la ecuación (4.13).

Finalmente, se aplica la transformada de Laplace y la sustitución correspondiente como se ha realizado en la suspensión completa con TID, resultando en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 & I_1 & J_1 & K_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 & I_2 & J_2 & K_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & H_3 & I_3 & J_3 & K_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 & H_4 & I_4 & J_4 & K_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 & H_5 & I_5 & J_5 & K_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 & H_6 & I_6 & J_6 & K_6 \\ A_7 & B_7 & C_1 & D_1 & E_7 & F_7 & G_7 & H_7 & I_7 & J_7 & K_7 \\ A_8 & B_8 & C_2 & D_2 & E_8 & F_8 & G_8 & H_8 & I_8 & J_8 & K_8 \\ A_9 & B_9 & C_3 & D_3 & E_9 & F_9 & G_9 & H_9 & I_9 & J_9 & K_9 \\ A_{10} & B_{10} & C_{10} & D_{10} & E_{10} & F_{10} & G_{10} & H_{10} & I_{10} & J_{10} & K_{10} \\ A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & E_{11} & F_{11} & G_{11} & H_{11} & I_{11} & J_{11} & K_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ \phi(I\omega) \\ x_{wfl}(I\omega) \\ x_{wfr}(I\omega) \\ x_{wrr}(I\omega) \\ x_{wrl}(I\omega) \\ V_{fl}(I\omega) \\ V_{fr}(I\omega) \\ V_{rr}(I\omega) \\ V_{rl}(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tfl}x_{gfl} \\ k_{tfr}x_{gfr} \\ k_{trr}x_{grr} \\ k_{trl}x_{grl} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Los coeficientes de la matriz se encuentran en el Apéndice D.

4.3 Modelos de suspensión con AR-TID

En este trabajo de investigación, se propone la combinación de las dos suspensiones anteriores con la finalidad de aprovechar algunas de las características que ofrecen para el mejoramiento en la efectividad de la mitigación de vibraciones y la regeneración de energía eléctrica. Tal combinación consiste en reemplazar el inersor de la suspensión TID con el AR de brazo dentado, donde la masa equivalente del AR de la ecuación (4.15) proporciona el efecto de inertancia necesario. Adicionalmente, para la obtención de los modelos matemáticos de la nueva suspensión denominada AR-TID, se utilizan como base los modelos de las suspensiones TID y se le agregan los efectos dinámicos y eléctricos del AR, los cuales son descritos en las ecuaciones (4.16) y (4.17).

Considerando lo anterior, el formulismo de Lagrange para la suspensión de un cuarto de vehículo con AR-TID se escribe como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_b}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_b} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 \qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_w}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_w} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_w} + F_L = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_f}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_f} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} - F_L = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Posteriormente, debido a que el circuito de recolección de energía sigue siendo el mismo, se adapta la ecuación (4.20) a las nuevas variables del AR-TID debido a la nueva posición del AR, resultando en lo siguiente:

$$L\frac{\dot{V}}{R_e} + \frac{(R_i + R_e)V}{R_e} - \frac{k_e j}{r}(\dot{x}_f - \dot{x}_w) = 0 \tag{4.30}$$

En seguida, al igual que la suspensión con AR se desarrolla la ecuación (4.29) y se agrega la ecuación (4.30) para obtener el siguiente modelo matemático que rige el comportamiento de la suspensión con AR-TID de un cuarto de vehículo en el dominio del tiempo:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_b - x_w) + k_2(x_b - x_f) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) = 0 \\ m_s(\ddot{x}_f - \ddot{x}_w) - k_2(x_b - x_f) - c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) + c_L(\dot{x}_f - \dot{x}_w) - F_L = 0 \\ m_w\ddot{x}_f - m_s(\ddot{x}_f - \ddot{x}_w) - k_1(x_b - x_w) + k_t(x_w - x_g) - c_L(\dot{x}_f - \dot{x}_w) + F_L = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V}{R_e} - \dfrac{k_e j}{r}(\dot{x}_f - \dot{x}_w) = 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

Como se puede observar, la ecuación (4.31) tiene una ecuación diferencial adicional en comparación de la suspensión TID debido a la parte eléctrica, lo que aumenta el costo computacional para la solución del sistema. Por esta razón, se utiliza la ecuación (3.27) y el proceso de la sección 3.8 para convertir la ecuación (4.31) en una ecuación en espacio de estados. Primero, se define el vector de las variables como sigue:

$$X = [\dot{x}_b \quad \dot{x}_f \quad \dot{x}_w \quad x_b \quad x_f \quad x_w \quad V]^T \tag{4.32}$$

En seguida, se define la entrada como:

$$u = x_g \tag{4.33}$$

Después, se definen en la salida del sistema las respuestas requeridas como el BA, SWS, DTL y el voltaje generado de la siguiente manera:

$$y = [\ddot{x}_b \quad x_b - x_w \quad k_t(x_w - x_g) \quad V]^T \tag{4.34}$$

Para obtener A de la ecuación (3.27), es necesario despejar la derivada de las primeras tres variables de X a partir de la ecuación (4.31) en términos del vector X. Por esta razón, es necesario expresar la segunda linea de la ecuación (4.31) de la siguiente manera:

$$F_b = m_s(\ddot{x}_f - \ddot{x}_w) + c_L(\dot{x}_f - \dot{x}_w) - F_L = k_2(x_b - x_f) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) \tag{4.35}$$

Donde por segunda ley de Newton, F_b es la fuerza que ejerce el arreglo AR-TID tanto a la masa de la carrocería como a la masa de la rueda. Mediante un breve tratamiento algebraico, se puede introducir la fuerza en la ecuación (4.31) como sigue:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_b - x_w) + F_b = 0 \\ m_w\ddot{x}_f - k_1(x_b - x_w) + k_t(x_w - x_g) - F_b = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V}{R_e} - \dfrac{k_e j}{r}(\dot{x}_f - \dot{x}_w) = 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

De esta forma, es posible despejar las variables requeridas para obtener A, a partir de las ecuaciones (4.35) y (4.36). Al despejar las variables mencionadas anteriormente, se obtiene la matriz A y el vector B, de modo que se cumpla la igualdad de la primera ecuación en espacio de estados. De la misma forma, se obtiene C y D.

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{m_b} & \frac{c}{m_b} & -\frac{k_1}{m_b} & -\frac{k_2}{m_b} & \frac{k_1+k_2}{m_b} & 0 \\ \frac{cl}{m_s} & -\left(\frac{c}{m_b} + \frac{cl+c}{m_s}\right) & \frac{c}{m_b} + \frac{c}{m_s} & -\frac{k_1}{m_b} & -\left(\frac{k_2}{m_b} + \frac{k_2}{m_s}\right) & \frac{k_1+k_2}{m_b} + \frac{k_2}{m_s} & -\frac{F_L}{m_s} \\ 0 & \frac{c}{m_w} & -\frac{c}{m_w} & \frac{k_1}{m_w} & \frac{k_2}{m_w} & -\left(\frac{k_1+k_2+k_t}{m_w}\right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ke \cdot j \cdot Re}{L \cdot r} & -\frac{ke \cdot j \cdot Re}{L \cdot r} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{Ri+Re}{L} \end{bmatrix} \\ B = [0 \quad 0 \quad \frac{k_t}{m_u} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad ; \quad D = [0 \quad 0 \quad -k_t \quad 0 \quad 0]^T \\ C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{m_b} & \frac{c}{m_b} - \frac{k_1}{m_b} & -\frac{k_2}{m_b} & \frac{k_1+k_2}{m_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{cl}{m_s} - \left(\frac{c}{m_b} + \frac{cl+c}{m_s}\right) & \left(\frac{c}{m_b} + \frac{c}{m_s}\right) & -\frac{k_1}{m_b} & -\left(\frac{k_2}{m_b} + \frac{k_2}{m_s}\right) & \left(\frac{k_1+k_2}{m_b} + \frac{k_2}{m_s}\right) & -\frac{F_L}{m_s} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.37}$$

Posteriormente, utilizando el mismo método aplicado a los sistemas de suspensiones anteriores, se obtiene el siguiente modelo matricial de variables complejas que describe el comportamiento en el dominio de la frecuencia del sistema de la ecuación (4.31):

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ x_f(I\omega) \\ x_w(I\omega) \\ V(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_t x_g \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Los coeficientes de la matriz de la ecuación (4.38) se encuentran en el Apéndice D.

Otro método para obtener los modelos, es tomar como base la suspensión de medio vehículo con TID y agregar los efectos del AR contenidos en la ecuación (4.24), resultando en el siguiente modelo de suspensión de medio vehículo con AR-TID:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) \\ \qquad + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) = 0 \\ I_b\ddot{\theta} - L_f[k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_f(x_{bf} - x_f) + c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f)] + L_r[k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_r(x_{br} - x_r) \\ \qquad + c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r)] = 0 \\ b_f(\ddot{x}_f - \ddot{x}_{wf}) - k_f(x_{bf} - x_f) - c_f(\dot{x}_{bf} - \dot{x}_f) + c_{Lf}(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf}) - F_{Lf} = 0 \\ b_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{wr}) - k_r(x_{br} - x_r) - c_r(\dot{x}_{br} - \dot{x}_r) + c_{Lr}(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr}) - F_{Lr} = 0 \\ m_{wf}\ddot{x}_{wf} - b_f(\ddot{x}_f - \ddot{x}_{wf}) - k_1(x_{bf} - x_{wf}) + k_{tf}(x_{wf} - x_{gf}) - c_{Lf}(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf}) + F_{Lf} = 0 \\ m_{wr}\ddot{x}_{wr} - b_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{wr}) - k_2(x_{br} - x_{wr}) + k_{tr}(x_{wr} - x_{gr}) - c_{Lr}(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr}) + F_{Lr} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_f}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_f}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_f - \dot{x}_{wf})}{r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_r}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_r}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_r - \dot{x}_{wr})}{r} = 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

A la cual, le corresponde el siguiente modelo matricial con el cambio de dominio al frecuencial. Los coeficientes correspondientes a la matriz se encuentran en al Apéndice D.

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & H_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 & H_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 & H_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 & H_6 \\ A_7 & B_7 & C_7 & D_7 & E_7 & F_7 & G_7 & H_7 \\ A_8 & B_8 & C_8 & D_8 & E_8 & F_8 & G_8 & H_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ x_f(I\omega) \\ x_r(I\omega) \\ x_{wf}(I\omega) \\ x_{wr}(I\omega) \\ V_f(I\omega) \\ V_r(I\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tf}x_{gf} \\ k_{tr}x_{gr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Finalmente, para el modelo de vehículo completo, se sigue el mismo procedimiento que en el de medio vehículo. Se toma el modelo de la ecuación (4.12) y se agregan los efectos correspondientes del AR, lo que resulta en el siguiente modelo matemático:

$$\begin{cases} m_b\ddot{x}_b + k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) \\ \quad + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) + k_4(x_b - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) \\ \quad + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl}) = 0 \\ I_b\ddot{\theta} - L_f[k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) + k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) \\ \quad + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr})] + L_t[k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) \\ \quad + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl})] = 0 \\ I_p\ddot{\phi} - L_d[k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) + k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) \\ \quad + c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) + c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr})] + L_i[k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) \\ \quad + k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) + c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl})] = 0 \\ b_{fl}(\ddot{x}_{fl} - \ddot{x}_{wfl}) - k_{fl}(x_{bfl} - x_{fl}) - c_{fl}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) + c_{Lfl}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{wfl}) - F_{Lfl} = 0 \\ b_{fr}(\ddot{x}_{fr} - \ddot{x}_{wfr}) - k_{fr}(x_{bfr} - x_{fr}) - c_{fr}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) + c_{Lfr}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{wfr}) - F_{Lfr} = 0 \\ b_{rr}(\ddot{x}_{rr} - \ddot{x}_{wrr}) - k_{rr}(x_{brr} - x_{rr}) - c_{rr}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) + c_{Lrr}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{wrr}) - F_{Lrr} = 0 \\ b_{rl}(\ddot{x}_{rl} - \ddot{x}_{wrl}) - k_{rl}(x_{brl} - x_{rl}) - c_{rl}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl}) + c_{Lrl}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{wrl}) - F_{Lrl} = 0 \\ m_{wfl}\ddot{x}_{wfl} - b_{fl}(\ddot{x}_{fl} - \ddot{x}_{wfl}) - k_1(x_{bfl} - x_{wfl}) + k_{tfl}(x_{wfl} - x_{gfl}) - c_{Lfl}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{wfl}) + F_{Lfl} = 0 \\ m_{wfr}\ddot{x}_{wfr} - b_{fr}(\ddot{x}_{fr} - \ddot{x}_{wfr}) - k_2(x_{bfr} - x_{wfr}) + k_{tfr}(x_{wfr} - x_{gfr}) - c_{Lfr}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{wfr}) + F_{Lfr} = 0 \\ m_{wrr}\ddot{x}_{wrr} - b_{rr}(\ddot{x}_{rr} - \ddot{x}_{wrr}) - k_3(x_{brr} - x_{wrr}) + k_{trr}(x_{wrr} - x_{grr}) - c_{Lrr}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{wrr}) + F_{Lrr} = 0 \\ m_{wrl}\ddot{x}_{wrl} - b_{rl}(\ddot{x}_{rl} - \ddot{x}_{wrl}) - k_4(x_{brl} - x_{wrl}) + k_{trl}(x_{wrl} - x_{grl}) - c_{Lrl}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{wrl}) - F_{Lrl} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_{fl}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{fl}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{wfl})}{r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_{fr}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{fr}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{wfr})}{r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_{rr}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{rr}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{wrr})}{r} = 0 \\ L\dfrac{\dot{V}_{rl}}{R_e} + \dfrac{(R_i + R_e)V_{rl}}{R_e} - \dfrac{k_e j(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{wr;})}{r} = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

Donde se utiliza la cinemática lineal de la ecuación (4.13) y las siguientes fuerzas de Lorentz:

$$\left\{ F_{Lfl} = \frac{BlV_{fl} j r_g}{R_e r}, \quad F_{Lfr} = \frac{BlV_{fr} j r_g}{R_e r}, \quad F_{Lrr} = \frac{BlV_{rr} j r_g}{R_e r}, \quad F_{Lrl} = \frac{BlV_{rl} j r_g}{R_e r} \right. \tag{4.42}$$

Por último, se obtiene el siguiente modelo matricial en el dominio de la frecuencia con sus respectivos coeficientes descritos en el Apéndice D:

$$\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 & I_1 & J_1 & K_1 & L_1 & M_1 & N_1 & O_1 \\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 & I_2 & J_2 & K_2 & L_2 & M_2 & N_2 & O_2 \\
A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & H_3 & I_3 & J_3 & K_3 & L_3 & M_3 & N_3 & O_3 \\
A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 & H_4 & I_4 & J_4 & K_4 & L_4 & M_4 & N_4 & O_4 \\
A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 & H_5 & I_5 & J_5 & K_5 & L_5 & M_5 & N_5 & O_5 \\
A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 & H_6 & I_6 & J_6 & K_6 & L_6 & M_6 & N_6 & O_6 \\
A_7 & B_7 & C_1 & D_1 & E_7 & F_7 & G_7 & H_7 & I_7 & J_7 & K_7 & L_7 & M_7 & N_7 & O_7 \\
A_8 & B_8 & C_2 & D_2 & E_8 & F_8 & G_8 & H_8 & I_8 & J_8 & K_8 & L_8 & M_8 & N_8 & O_8 \\
A_9 & B_9 & C_3 & D_3 & E_9 & F_9 & G_9 & H_9 & I_9 & J_9 & K_9 & L_9 & M_9 & N_9 & O_9 \\
A_{10} & B_{10} & C_{10} & D_{10} & E_{10} & F_{10} & G_{10} & H_{10} & I_{10} & J_{10} & K_{10} & L_{10} & M_{10} & N_{10} & O_{10} \\
A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & E_{11} & F_{11} & G_{11} & H_{11} & I_{11} & J_{11} & K_{11} & L_{11} & M_{11} & N_{11} & O_{11} \\
A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & E_{12} & F_{12} & G_{12} & H_{12} & I_{12} & J_{12} & K_{12} & L_{12} & M_{12} & N_{12} & O_{12} \\
A_{13} & B_{13} & C_{13} & D_{13} & E_{13} & F_{13} & G_{13} & H_{13} & I_{13} & J_{13} & K_{13} & L_{13} & M_{13} & N_{13} & O_{13} \\
A_{14} & B_{14} & C_{14} & D_{14} & E_{14} & F_{14} & G_{14} & H_{14} & I_{14} & J_{14} & K_{14} & L_{14} & M_{14} & N_{14} & O_{14} \\
A_{15} & B_{15} & C_{15} & D_{15} & E_{15} & F_{15} & G_{15} & H_{15} & I_{15} & J_{15} & K_{15} & L_{15} & M_{15} & N_{15} & O_{15}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_b(I\omega) \\ \theta(I\omega) \\ \phi(I\omega) \\ x_{fl}(I\omega) \\ x_{fr}(I\omega) \\ x_{rr}(I\omega) \\ x_{rl}(I\omega) \\ x_{wfl}(I\omega) \\ x_{wfr}(I\omega) \\ x_{wrr}(I\omega) \\ x_{wrl}(I\omega) \\ V_{fl}(I\omega) \\ V_{fr}(I\omega) \\ V_{rr}(I\omega) \\ V_{rl}(I\omega)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{tfl} x_{gfl} \\ k_{tfr} x_{gfr} \\ k_{trr} x_{grr} \\ k_{trl} x_{grl} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Capítulo 5

5. Simulación numérica de los sistemas de suspensión y análisis de sensibilidad paramétrica.

En este capítulo se realizan las simulaciones numéricas en el domino de la frecuencia de los sistemas de suspensión descritos en el capítulo 4. El propósito es comparar el comportamiento dinámico de la suspensión TID y la suspensión regenerativa AR con la suspensión pasiva tradicional. Dicha comparación se debe realizar por separado, debido a que, los parámetros de los diseños existentes de la suspensión TID y la suspensión AR a analizar varían considerablemente, impidiendo una comparación justa entre ambos. Adicionalmente, ésta comparación consiste en graficar el rendimiento de las suspensiones mediante las siguientes respuestas dinámicas: la aceleración de la carrocería (BA), la carga dinámica del neumático (DTL), la deflexión de la suspensión (SWS) y en el caso de las suspensiones regenerativas, se agrega la potencia regenerada (PG). Posteriormente, se realizará un análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método de simulación Monte Carlo a la suspensión regenerativa AR-TID propuesta en este trabajo de investigación.

5.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de la suspensión pasiva y suspensión TID

En esta subsección, se realiza la comparación de la respuesta en frecuencia de las dinámicas de la suspensión pasiva tradicional con la suspensión TID diseñada por (Shen et al., 2016). En la comparación, se toman en cuenta los modelos de un cuarto, medio y vehículo completo para un análisis más completo.

En cuanto a la solución de los modelos matemáticos, se utiliza el método matricial convencional para resolver los sistemas matriciales correspondientes mediante la codificación del método en código de Matlab. En la Tabla 4, se pueden apreciar los parámetros físicos de la suspensión TID producidos en (Shen et al., 2016), a la cual, se le agregan las inercias rotacionales y los brazos de palanca correspondientes al cabeceo y balanceo, completando así,

los datos necesarios para las simulaciones de medio y vehículo completo. Dichos datos se tomaron de la Tabla 1. De igual forma, se utilizan los mismos parámetros físicos para la suspensión pasiva, reemplazando la red TID por un amortiguador de fluido viscoso con el mismo coeficiente de amortiguamiento, permitiendo una comparación justa entre ambos sistemas de suspensión.

5.1.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para un cuarto de vehículo.

A continuación, se consideran las ecuaciones (3.13) y (4.5) correspondientes a los modelos en frecuencia de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID, respectivamente. Una vez que se obtiene la solución de dichas ecuaciones, se obtienen las respuestas en frecuencia de las dinámicas a analizar descritas en la ecuación (5.1).

$$\begin{cases} BA = (I\omega)^2 \cdot x_b \\ SWS = x_b - x_w \\ DTL = k_t \cdot (x_w - x_g) \end{cases} \tag{5.1}$$

Donde BA representa la aceleración de la carrocería, SWS la deflexión de la suspensión, la cual, se obtiene con la diferencia de los desplazamientos de la carrocería y el neumático, y DTL la carga dinámica del neumático obtenida con la multiplicación del coeficiente de rigidez del neumático y su deformación. Adicionalmente, la excitación de los sistemas de suspensión (x_g) es una onda sinusoidal con amplitud de 0.035 m y un rango de frecuencia de 0 a 25 Hz. Con el objetivo de comparar, en la Figura 38 se observan las respuestas en frecuencia de las dinámicas de la suspensión pasiva (rojo) y suspensión TID (azul). Primeramente, se puede apreciar que la aceleración de la suspensión TID se reduce considerablemente en la primera frecuencia de resonancia hasta llegar a los 1.6 Hz. Después, se deteriora en el resto del rango de frecuencias, siendo en mayor cantidad hasta los 7 Hz, donde el comportamiento de ambas suspensiones comienza a ser similar. En cuanto a la deflexión de la suspensión, la primera frecuencia de resonancia de la suspensión TID es menor que la pasiva, provocando que se deteriore en un principio y solo en un rango de frecuencia muy pequeño. En seguida, se puede apreciar que la

suspensión TID mejora la deflexión en ambas frecuencias de resonancia en comparación de la suspensión pasiva. Después de la segunda resonancia, el comportamiento en ambas suspensiones es prácticamente el mismo.

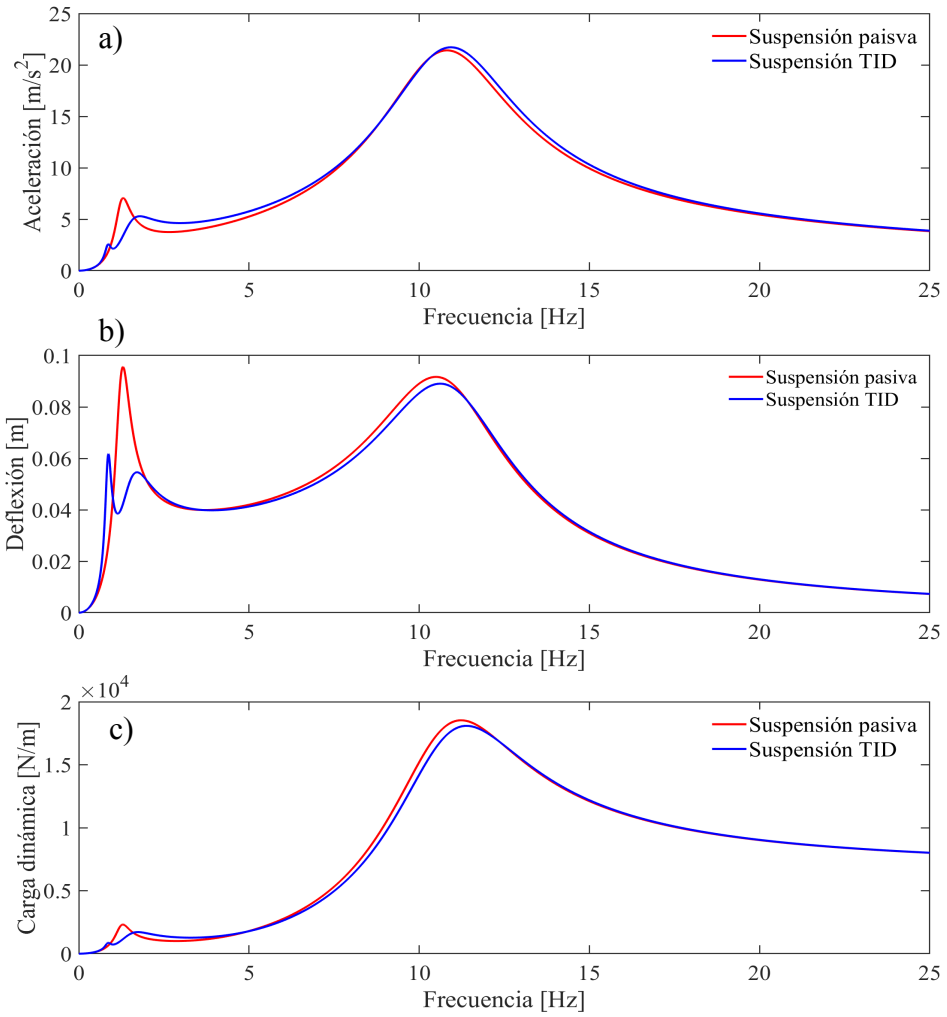


Figura 38. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID de a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

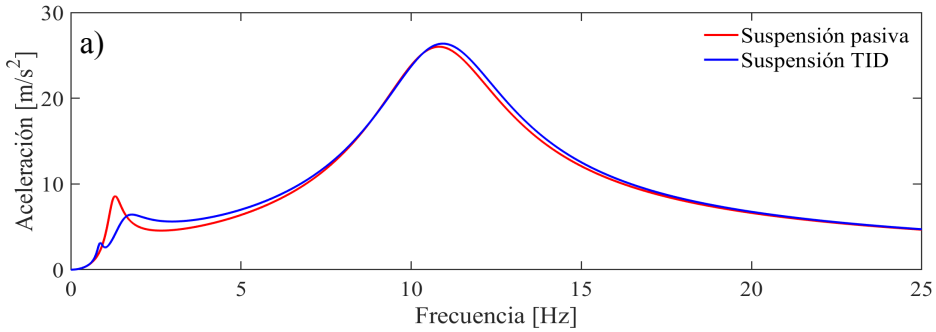
Finalmente, las cargas dinámicas del neumático se comportan de manera similar a las aceleraciones en la primera frecuencia resonante. En cambio, en la segunda frecuencia resonante, la suspensión TID logra reducir dicha carga para después comportarse igual que la suspensión pasiva.

Cabe destacar, que el comportamiento de las gráficas de la Figura 38 coinciden con las ganancias de las mismas dinámicas estudiadas por (Shen et al., 2016) mostrados en la Figura 34,

comprobando así, tanto el desarrollo de los modelos como la solución. Basado en lo anterior, se extiende el análisis para los modelos de medio y vehículo completo descritos a continuación.

5.1.2 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para medio vehículo.

En este caso, se utilizan los modelos de las ecuaciones (3.18) y (4.10) que describen el comportamiento dinámico en el dominio de la frecuencia de medio vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID, respectivamente. En cuanto a las excitaciones del sistema, se consideran dos ondas sinusoidales con el mismo rango de frecuencia del sistema anterior y con una amplitud de excitación frontal x_{gf} de 0.035 m y trasero x_{gr} de 0.05 m. La diferencia de amplitudes se realiza con el fin de provocar el efecto de cabeceo y observar el comportamiento de las dinámicas estudiadas en el modelo anterior y compararlas. Para obtener las respuestas dinámicas establecidas anteriormente, se utilizan las expresiones de la ecuación (5.1) y se extienden para la rueda trasera utilizando los respectivos desplazamientos. En la Figura 39, se muestran las respuestas en frecuencia de las dinámicas para medio vehículo. Primeramente, se puede apreciar que la gráfica de aceleración de la carrocería se comporta de la misma manera que la aceleración en la Figura 38, con una variación en la amplitud debido a la diferencia de excitaciones en los sistemas.



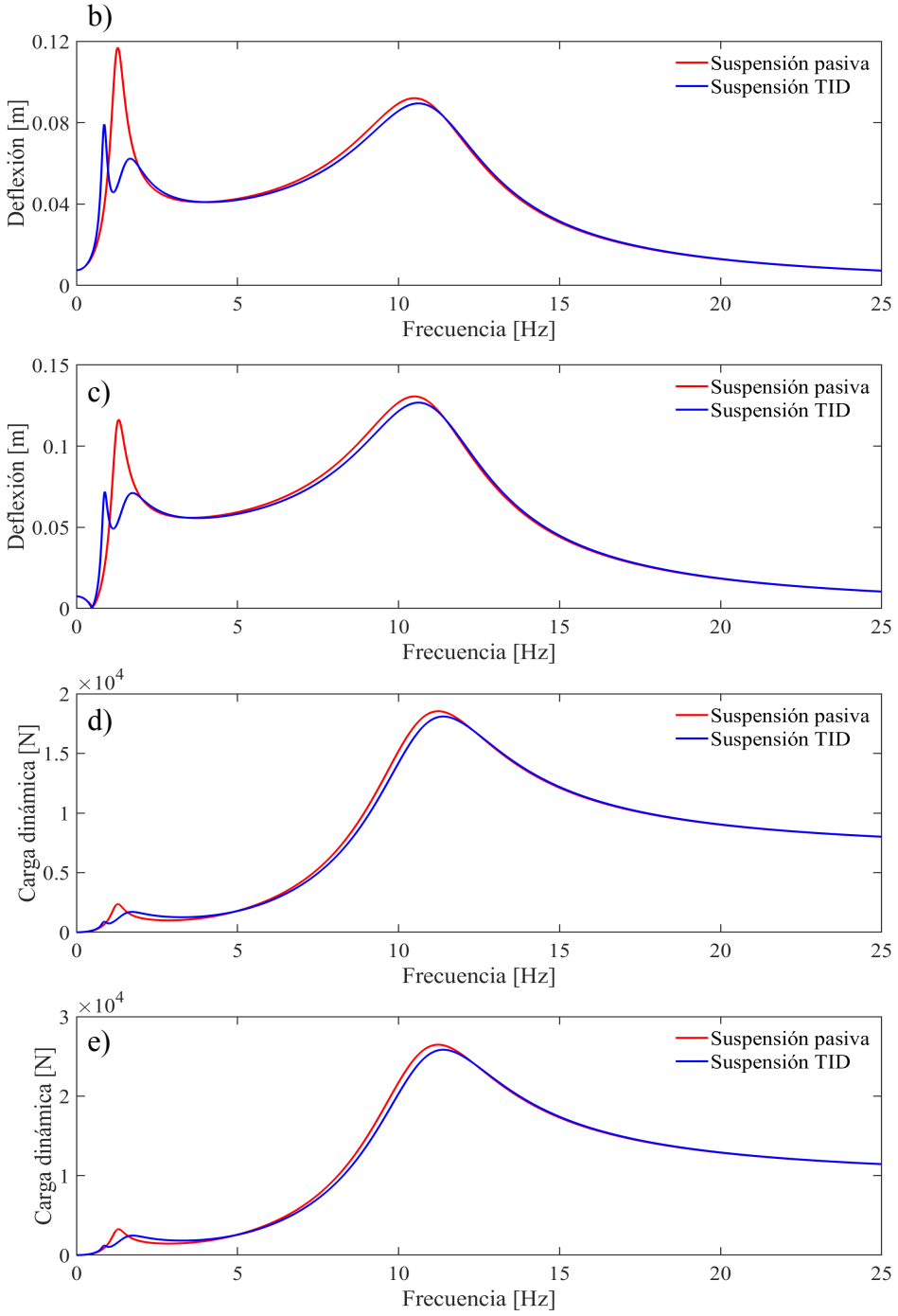


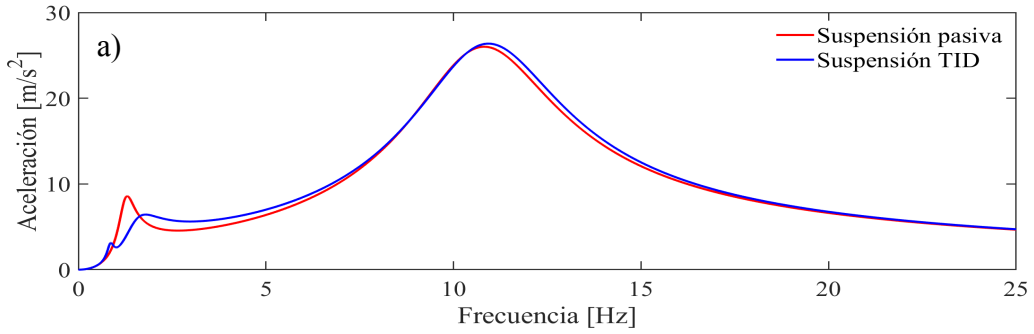
Figura 39. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de medio vehículo con suspensión pasiva y suspensión TID de: a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión de la rueda delantera y c) Rueda trasera, d) Carga dinámica del neumático de la rueda delantera y e) Rueda trasera.

De igual manera, la deflexión de la suspensión en ambas ruedas varían en amplitud, sobre todo en sus frecuencias resonantes. Sin embargo, mantienen el comportamiento descrito en la sección 5.1.1. En cuanto a las cargas dinámicas, el comportamiento en ambas ruedas y en el modelo de un cuarto de vehículo es prácticamente el mismo.

En base a lo anterior, el comportamiento dinámico comparativo en los modelos de un cuarto y medio vehículo con suspensión pasiva y TID son muy similares, lo que indica que el modelo de un cuarto de vehículo es una aceptable aproximación para el comportamiento de una suspensión de medio vehículo.

5.1.3 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para vehículo completo.

Para analizar el comportamiento dinámico de vehículo completo, se utiliza el mismo procedimiento de la sección 5.1.2 y se consideran los modelos de la ecuación (3.21) y (4.14). Así mismo, se agregan señales de excitación correspondientes a las cuatro ruedas, cuyas amplitudes son las siguientes: $x_{gfl} = 0.06$, $x_{gfr} = 0.055$, $x_{grr} = 0.02$, $x_{grl} = 0.035$. Con lo anterior, se producen las curvas de las respuestas en frecuencia de la Figura 40. Nótese que, la aceleración de la carrocería es muy similar a la de la Figura 39 en cuanto a comportamiento y amplitud. Así mismo, el comportamiento de la deflexión y carga dinámica en las cuatro ruedas conservan el comportamiento comparativo entre la suspensión pasiva y TID, observada en el modelo de un cuarto y medio vehículo.



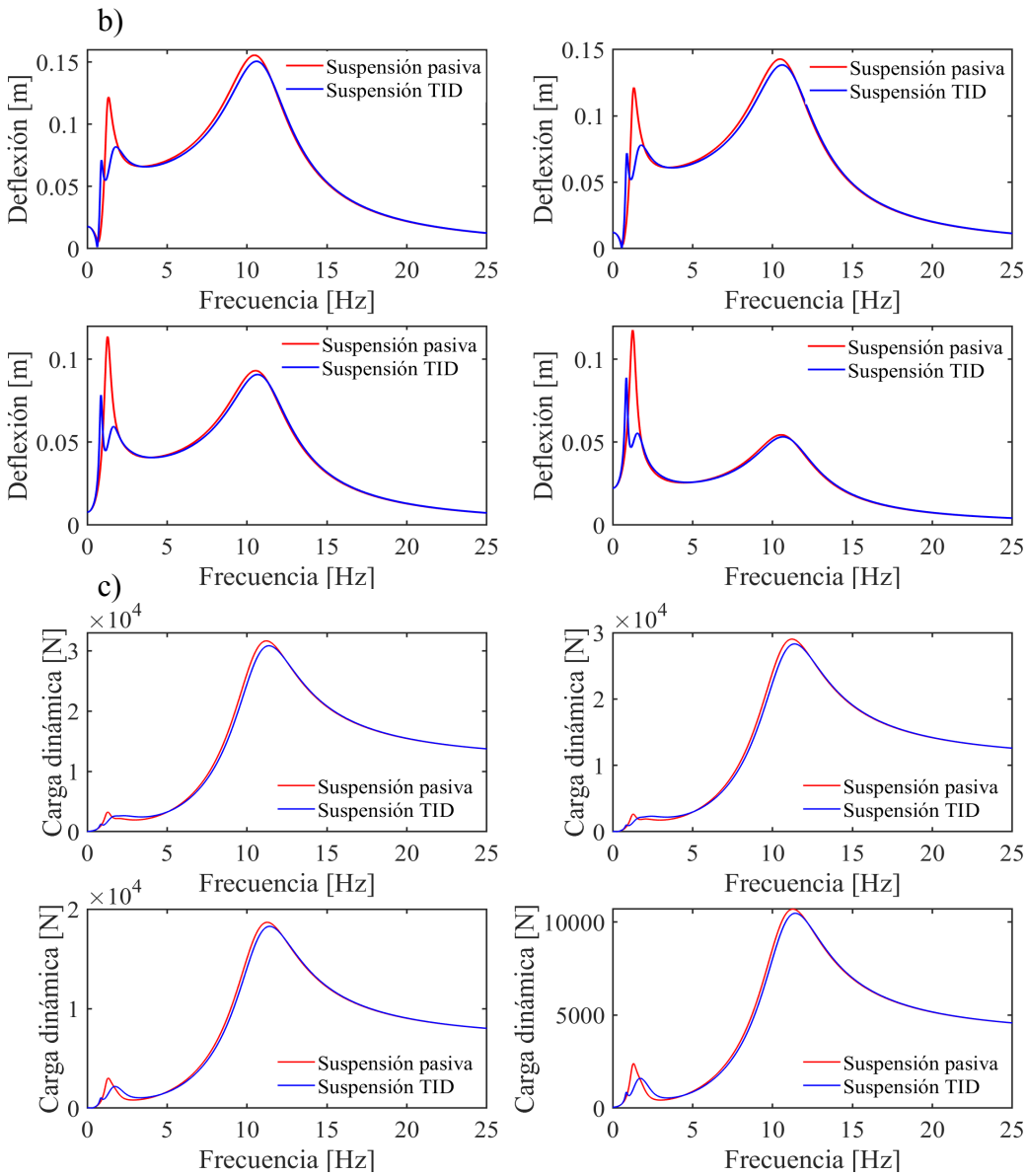


Figura 40. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de vehículo completo con suspensión pasiva y suspensión TID de: a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión en las cuatro ruedas y c) Carga dinámica de los cuatro neumáticos.

Basado en lo anterior, se confirma que el modelo de un cuarto de vehículo es una aceptable aproximación para observar la comparación de las dinámicas entre dos sistemas de suspensión. Por esta razón, los investigadores de las suspensiones regenerativas y las suspensiones con inersor solo utilizan el modelo de un cuarto de vehículo para exponer sus resultados. Además, el modelo de un cuarto de vehículo simplifica considerablemente el modelo matemático y requiere menos recursos computacionales para su simulación.

5.2 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de la suspensión pasiva y suspensión AR

En esta subsección, se comparan las respuestas en frecuencia del sistema de suspensión pasiva con el sistema de suspensión AR descrito en la sección 4.2. Basado en los resultados de la subsección anterior, solo es necesario analizar el modelo de un cuarto de vehículo para la comparación de las dinámicas. En cuanto a la solución de los modelos matemáticos, se utiliza el mismo método empleado en la sección 5.1 aplicado a los modelos de las ecuaciones (3.13) y (4.22), considerando los parámetro físicos de la Tabla 1 para ambos sistemas de suspensión y los parámetros de la Tabla 2 para el amortiguador regenerativo. De igual forma, la excitación de ambos sistemas es una onda sinusoidal con amplitud de 0.035 m.

Una vez resueltos los modelos, se utiliza el conjunto de ecuaciones (5.1) para producir las curvas de respuesta en frecuencia en ambos sistemas de suspensión. En la Figura 41, se pueden observar las gráficas comparativas de las dinámicas de la suspensión pasiva y suspensión AR. Nótese que, la aceleración de la carrocería se reduce considerablemente en la suspensión con AR a frecuencias menores de 3.4 Hz. Sin embargo, la aceleración se incrementa abruptamente en la segunda frecuencia resonante de la suspensión AR, provocando una grave degradación del confort. En cuanto a la deflexión de la suspensión, es mínima la mejora que proporciona la suspensión AR a frecuencias menores a los 4 Hz, desafortunadamente, al igual que en el resto de las dinámicas, en la segunda frecuencia resonante se degrada drásticamente. Además, la segunda frecuencia resonante de la suspensión AR es considerablemente menor en comparación de la suspensión pasiva, lo que representa un mayor riesgo de alcanzar tal frecuencia resonante. De igual forma, la carga dinámica del neumático se mejora a baja frecuencia y se deteriora en gran cantidad a alta frecuencia con el sistema de suspensión AR. Cabe destacar, que el comportamiento dinámico de la suspensión AR coincide con el análisis realizado en (Liu et al., 2022). Donde se estudia la ganancia de la aceleración de la carrocería y la carga dinámica del neumático de una suspensión con inersor conectado en paralelo al resorte y amortiguador. Mostrando, que el efecto inercial modifica las frecuencias resonantes del sistema de suspensión, mayormente en la segunda resonancia y se deterioran ambas dinámicas en la segunda resonancia.

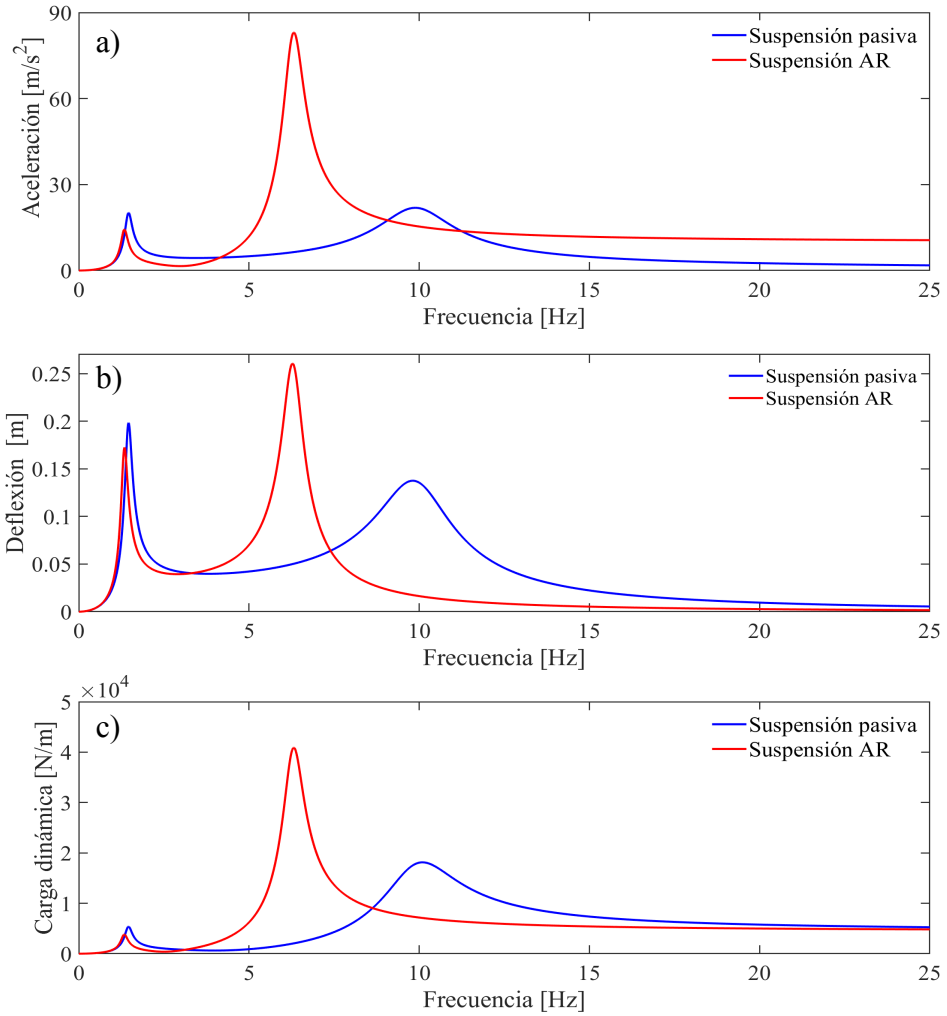


Figura 41. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión AR de a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

De acuerdo con lo anterior, es posible utilizar el amortiguador regenerativo de brazo dentado como un inersor, gracias a que los elementos del mecanismo de rectificación de movimiento proveen efectos inerciales durante su funcionamiento. De esta manera, surge la idea de aprovechar tales efectos inerciales creando una red TID con el AR en lugar del inersor. Con esto, se pretende asemejar el comportamiento dinámico de la suspensión TID, al mismo tiempo que se genera energía eléctrica.

Finalmente, al ser una suspensión regenerativa se debe considerar un aspecto adicional, el cual, es la potencia generada por el AR. Para obtener la potencia generada, se utiliza la ecuación (5.2).

$$P_e = \frac{V^2}{R_e} \tag{5.2}$$

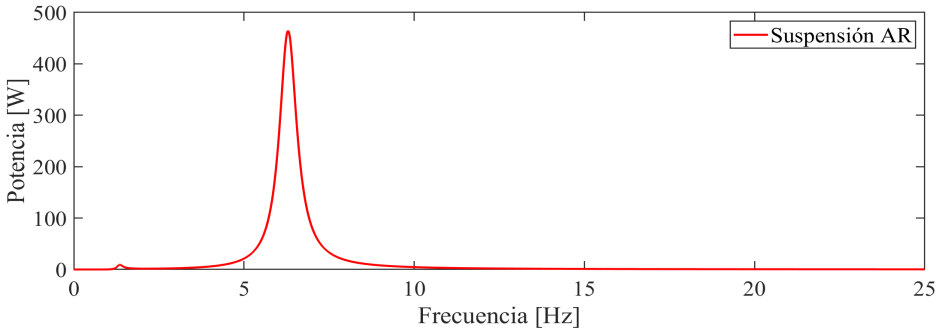


Figura 42. Respuesta en frecuencia de la potencia regenerada.

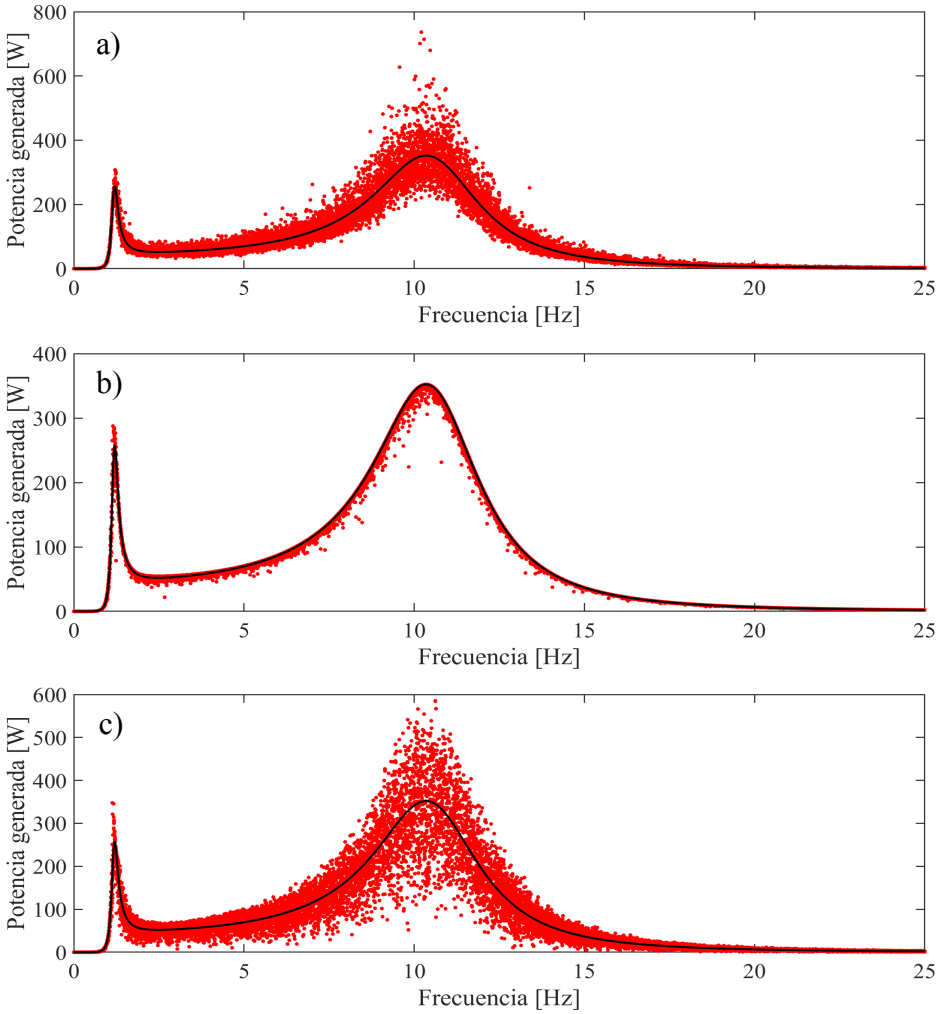
En la Figura 42 se aprecia que la potencia regenerada alcanza un valor de 464 W a una frecuencia de 6.3 Hz. Vale la pena resaltar, que el ancho de banda frecuencial donde existe mayor producción de potencia, es de 5 a 8 Hz aproximadamente. En el resto de las frecuencias, la potencia generada es mínima, destacando ligeramente en la primera frecuencia resonante.

5.3 Análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método de simulación Monte Carlo

En este apartado, se realiza un análisis de sensibilidad paramétrica en la capacidad de regeneración de potencia eléctrica de la suspensión AR-TID en el domino de la frecuencia, con el fin de obtener los parámetros físicos que tienen mayor influencia en la regeneración de energía. Los parámetros del AR a considerar en el análisis son los siguientes: la resistencia interna R_i, la resistencia externa R_e, la relación de transmisión j, la constante de acoplamiento electromecánico Bl, la inductancia L_e y el radio del rotor del generador r_g. Al igual que en la sección anterior, la excitación del sistema es una onda sinusoidal con 0.035 m de amplitud y una variación de frecuencia de 0 a 25 Hz. Los parámetros físicos de la suspensión a considerar, se encuentran en la Tabla 3. Adicionalmente, se considera una función de probabilidad normal con una desviación estándar del 30% respecto a los valores medios. En cuanto a los valores medios, no es posible utilizar directamente todos los parámetros de la Tabla 2, debido a que el comportamiento dinámico de la suspensión AR-TID con esos parámetros está muy alejado del comportamiento de la suspensión pasiva, afectando el análisis de sensibilidad. Por esta razón, se ajustaron los

primeros tres parámetros antes mencionados de manera heurística para asemejar el comportamiento dinámico a una suspensión convencional. Los valores de tales parámetros son: $R_i = 8$, $R_e = 8$ y $j = 40$, donde el resto de los parámetros son los de la Tabla 2. De esta manera, se asegura la obtención de los parámetros a los que la potencia regenerada es sensible estando relativamente cerca de un comportamiento óptimo.

En la Figura 43 se presentan los resultados de la simulación Monte Carlo realizada a la suspensión AR-TID. En primer lugar, en el inciso a) se muestra la variación aleatoria de la resistencia interna, donde la dispersión de datos en puntos rojos indican una mayor producción de potencia a partir de la primera frecuencia de resonancia, siendo más notorio en la segunda frecuencia resonante, llegando a producir una potencia instantánea de 700 W.



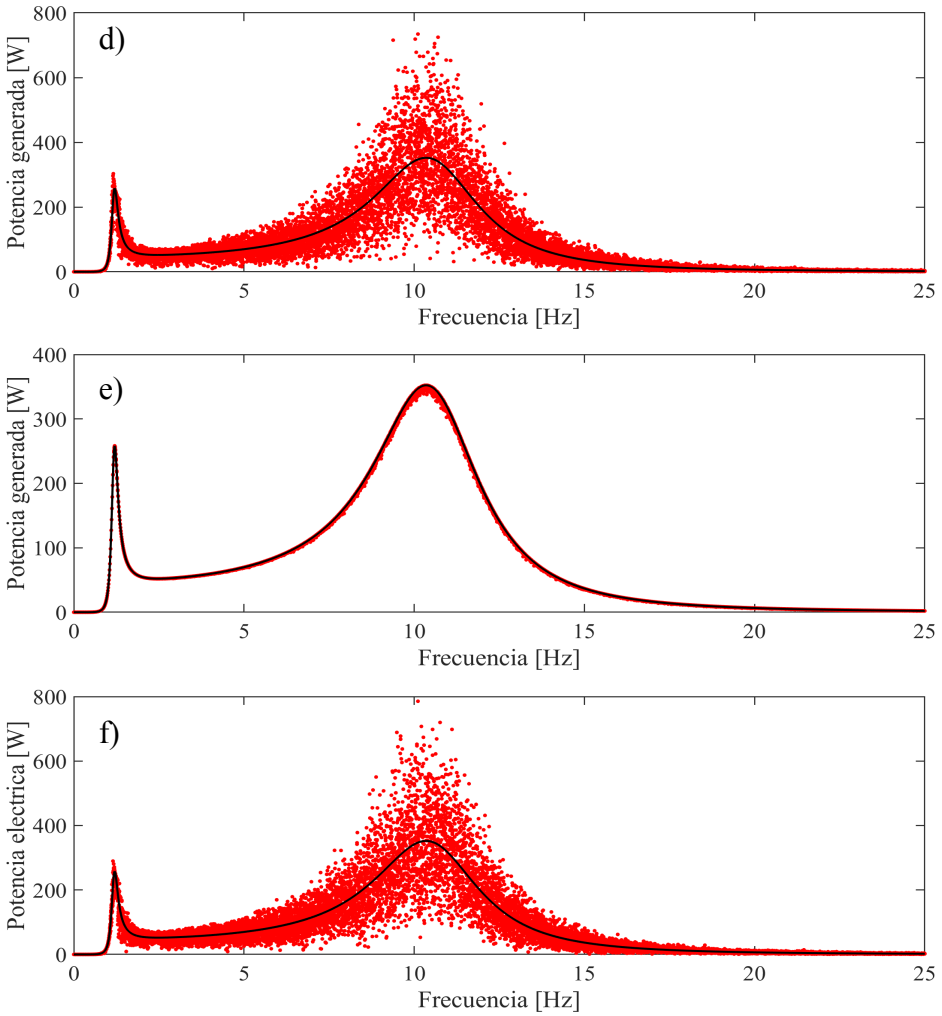


Figura 43. Potencia eléctrica regenerada para la variación aleatoria desde su valor medio hasta una desviación estándar del 30% de: a) Resistencia interna, b) Resistencia externa, c) Relación de transmisión, d) Constante de acoplamiento electromecánico, e) Inductancia, f) Radio del generador.

De igual forma, el ancho de banda en frecuencia de la producción de potencia se incrementa en la segunda frecuencia resonante. En cambio, la dispersión con la variación de la resistencia externa (b) es considerablemente menor y solo aumenta la producción en la primera frecuencia resonante. Por otro lado, la variación de la relación de transmisión (c) afecta notablemente en la amplitud de la potencia generada a partir de la primera frecuencia de resonancia, llegando a generar una potencia de hasta 600 W. El ancho de banda se incrementa considerablemente en la segunda frecuencia resonante, de forma comparable a la variación de la resistencia interna. Así mismo, la variación de la constante de acoplamiento electromecánico (d) presenta una dispersión similar a la variación de la resistencia interna. La diferencia radica en que la dispersión de datos

debido a la constante de acoplamiento es mas densa por encima de los 500 W, indicando una mayor sensibilidad. El parámetro con menor efecto lo presenta la variación de la inductancia de la bobina (e), donde la dispersión de la gráfica es mínima para todo el rango de frecuencias considerado. Finalmente, la variación aleatoria del radio del generador (f) presenta un comportamiento similar al del inciso d), ampliando ligeramente el ancho de banda frecuencial en la segunda frecuencia resonante.

Cabe mencionar, que con cuatro de los seis parámetros utilizados en el análisis de sensibilidad paramétrica, se logra superar los 460 W regenerados por la suspensión AR existente en la literatura.

Capítulo 6

6. Optimización y comparación del sistema de suspensión AR-TID

La optimización de la suspensión AR-TID consiste en encontrar los parámetros físicos óptimos del AR, con los cuales, se genere la mayor potencia de energía eléctrica y el mejor rendimiento dinámico posible. Por esta razón, es necesario considerar los índices de rendimiento de la sección 3.7. Los parámetros físicos del AR considerados para el proceso de optimización son la resistencia externa (R_e), la resistencia interna (R_i) y la relación de transmisión (j), los cuales, a partir de la simulación Monte Carlo de la sección anterior, demostraron influir en la generación de energía eléctrica, tanto en amplitud como en el ancho de banda. El proceso de optimización se realizó en dos ocasiones. Priemramente, se consideran los parámetros físicos de la suspensión diseñada por (Shen et al., 2016), con el objetivo de comparar solamente el rendimiento dinámico de la suspensión AR-TID optimizada con la suspensiones TID y pasiva. Posteriormente, se realizará la segunda optimización considerando los parámetros de la suspensión regenerativa diseñada por (Zhang et al., 2018). En este caso, al tratarse de dos suspensiones regenerativas es posible definir un índice de rendimiento normalizado para la optimización de la suspensión AR-TID.

6.1 Obtención de los índices de rendimiento

En primer lugar, se obtienen los indices de rendimiento descritos en la sección 3.7, considerando como excitación al sistema el perfil de carretera aleatorio descrito en la sección 3.4.4, definiendo la velocidad de conducción constante. Después se calcula la siguiente función de densidad espectral obtenida en el Apéndice E:

$$H_{x_g}(I\omega) = \frac{2\pi\eta_0\sqrt{G_x(\eta_0)V}}{I\omega + 2\pi f_0} \tag{6.1}$$

Posteriormente, para el índice de potencia generada se obtiene la respectiva función de transferencia a partir de la función de transferencia del voltaje y la ecuación (6.2), como sigue:

$$H_{PG}(I\omega) = \frac{1}{R_e}\left(\frac{V(I\omega)}{x_g(I\omega)}\right)^2 \tag{6.2}$$

Después se sustituye la función de densidad espectral de la ecuación (6.1) en la ecuación (3.25).

$$J_{PG} = \left\| \frac{2\pi\eta_0\sqrt{G_x(\eta_0)V}}{I\omega + 2\pi f_o} \cdot H_{PG}(I\omega) \right\|_2 \tag{6.3}$$

Al aplicar la norma H_2 descrita en la ecuación (3.23) a la ecuación (6.3), se obtiene el siguiente valor RMS del índice de la potencia regenerada:

$$J_{PG} = \left(2\pi n_0\right)\sqrt{G_x V S_x}\left[\frac{1}{R_e}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{PG}(I\omega)\right|^2 d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.4}$$

Donde S_x representa la potencia del ruido blanco gaussiano con un valor de 0.5 y la expresión $2\pi f_o$ es la frecuencia de corte circular, la cual, toma un valor despreciable al elevarse al cuadrado y su omisión simplifica considerablemente la resolución de la integral. Finalmente, para la resolución de la integral de la ecuación (6.4) se utiliza el siguiente enfoque de integrales de vibración aleatoria desarrollado por (Roberts & Spanos, 2003):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G_m(\omega)}{E_m(I\omega)\cdot E_m(-I\omega)}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_{m-1}\omega^{2(m-1)} + B_{m-2}\omega^{2(m-2)} + B_{m-3}\omega^{2(m-3)} + \ldots + B_0}{A_m(I\omega)^m + A_{m-1}(I\omega)^{m-1} + A_{m-2}(I\omega)^{m-2} + \ldots + A_0}d\omega \tag{6.5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{H_{PG}(I\omega)}{I\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_6\omega^{12} + B_5\omega^{10} + B_4\omega^8 + B_3\omega^6 + B_2\omega^4 + B_1\omega^2 + B_0}{A_7(I\omega)^7 + A_6(I\omega)^6 + A_5(I\omega)^5 + A_4(I\omega)^4 + A_3(I\omega)^3 + A_2(I\omega)^2 + A_1(I\omega) + A_0}d\omega$$

$$= \left[\frac{\pi}{A_7}\frac{det\begin{pmatrix} B_6 & B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ -A_7 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_7 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_7 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} A_6 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_7 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_7 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_7 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}\right] \tag{6.6}$$

Donde los coeficientes de las matrices de la ecuación (6.6) se encuentran en el Apéndice F. Siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen el resto de los índices de rendimiento expresados en la ecuación (3.24) como sigue:

$$\begin{cases} J_{BA} = \left(2\pi n_0\right)\sqrt{G_x V S_x}\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dfrac{1}{I\omega}H_{BA}(I\omega)\right|^2 d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \\ J_{SWS} = \left(2\pi n_0\right)\sqrt{G_x V S_x}\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dfrac{1}{I\omega}H_{SWS}(I\omega)\right|^2 d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \\ J_{DTL} = \left(2\pi n_0\right)\sqrt{G_x V S_x}\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dfrac{1}{I\omega}H_{DTL}(I\omega)\right|^2 d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{6.7}$$

De igual forma, los coeficientes de las matrices de las soluciones de la ecuación (6.7) se encuentran en el Apéndice F.

Posteriormente, el índice de rendimiento normalizado surge en base a la función objetivo unificada propuesta por (Shen et al., 2016). La función objetivo esta compuesta por una combinación lineal de las divisiones de los valores RMS de BA, SWS y DTL de la suspensión TID sobre la suspensión pasiva. Por ende, se puede extender para tomar en cuenta la potencia regenerada y utilizar los índices de rendimiento descritos anteriormente. El índice de rendimiento normalizado se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_N = &\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{PG}(I\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{PGb}(I\omega)\right|^2 d\omega}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{BA}(I\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{BAb}(I\omega)\right|^2 d\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{SWS}(I\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{SWSb}(I\omega)\right|^2 d\omega}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{DTL}(I\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{I\omega}H_{DTLb}(I\omega)\right|^2 d\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

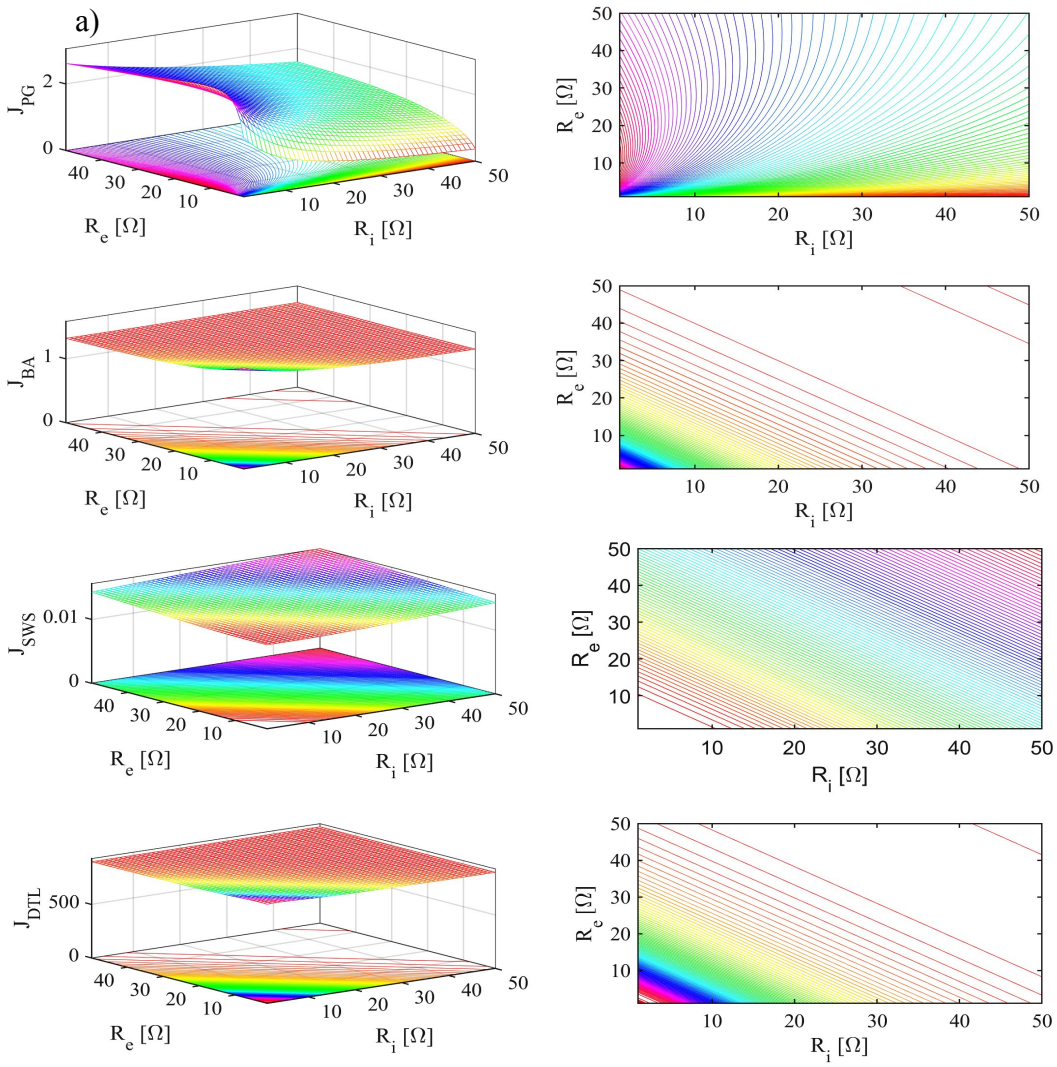
Donde los denominadores representan los índices de rendimiento de la suspensión con AR en paralelo, los cuales, son calculados en el Apéndice F.

6.2 Optimización y comparación del sistema AR-TID con el TID convencional

Posterior a la obtención de los índices de rendimiento, se programa el comando Maximize en el software Maple, tomando como función objetivo el índice de la potencia regenerada de la ecuación (6.4). Las variables se restringen a valores mayores o igual a diez para asegurar la convergencia del comando. Como resultado, se obtiene la mayor generación de potencia con los siguientes valores: Ri = 10, Re = 32.7123 y j = 89.9190. Desafortunadamente, la expresión del resto de los índices de rendimiento son demasiado extensos, imposibilitando el uso de las herramientas de optimización en Maple. Por esta razón, se decidió realizar una serie de análisis paramétricos de forma gráfica sobre los índices de rendimiento para observar su comportamiento y poder seleccionar los valores adecuados para una suspensión óptima. El análisis paramétrico se dividirá en dos partes; primero se varían los valores de la resistencia interna y externa en un rango de [1-50] ohms, mientras se mantiene un valor fijo en cada simulación de la relación de transmisión con los siguientes valores [80, 100]. En la siguiente parte, se varían los valores de la resistencia externa y la relación de transmisión en un rango de [5-500] ohms y [1-200], respectivamente, mientras se mantiene constante la resistencia interna en [10, 30] ohms.

En la Figura 44, se muestra la primera parte del análisis de sensibilidad paramétrica de los índices de rendimiento. Se puede observar que aún con el incremento en la relación de la transmisión, se requiere un valor pequeño para la resistencia interna y un valor con mayor tolerancia para la resistencia externa donde se puede producir la mayor cantidad de potencia posible. Lo mismo sucede con la deflexión de la suspensión, el cual, se mejora con valores pequeños de ambas resistencias. Por el contrario, los índices del confort y la carga dinámica se mejoran con valores mayores en ambas resistencias. Cabe destacar, que el índice que presenta mayor sensibilidad a la variación de las resistencias es el de la potencia generada. Por esta razón,

se prioriza una zona donde se aproveche la mayor potencia posible, al mismo tiempo que se evitan las zonas donde el resto de los índices son mayores.



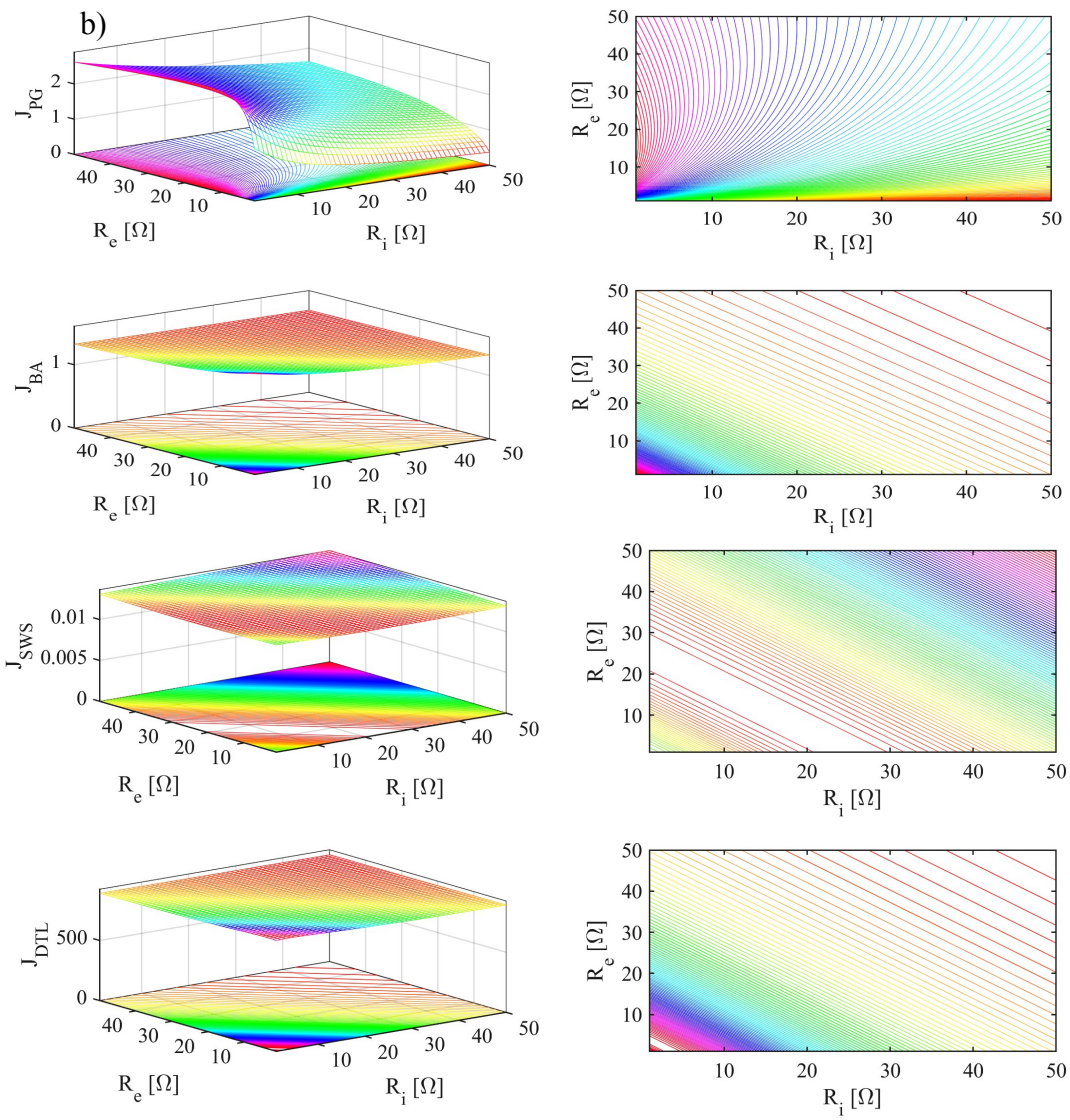
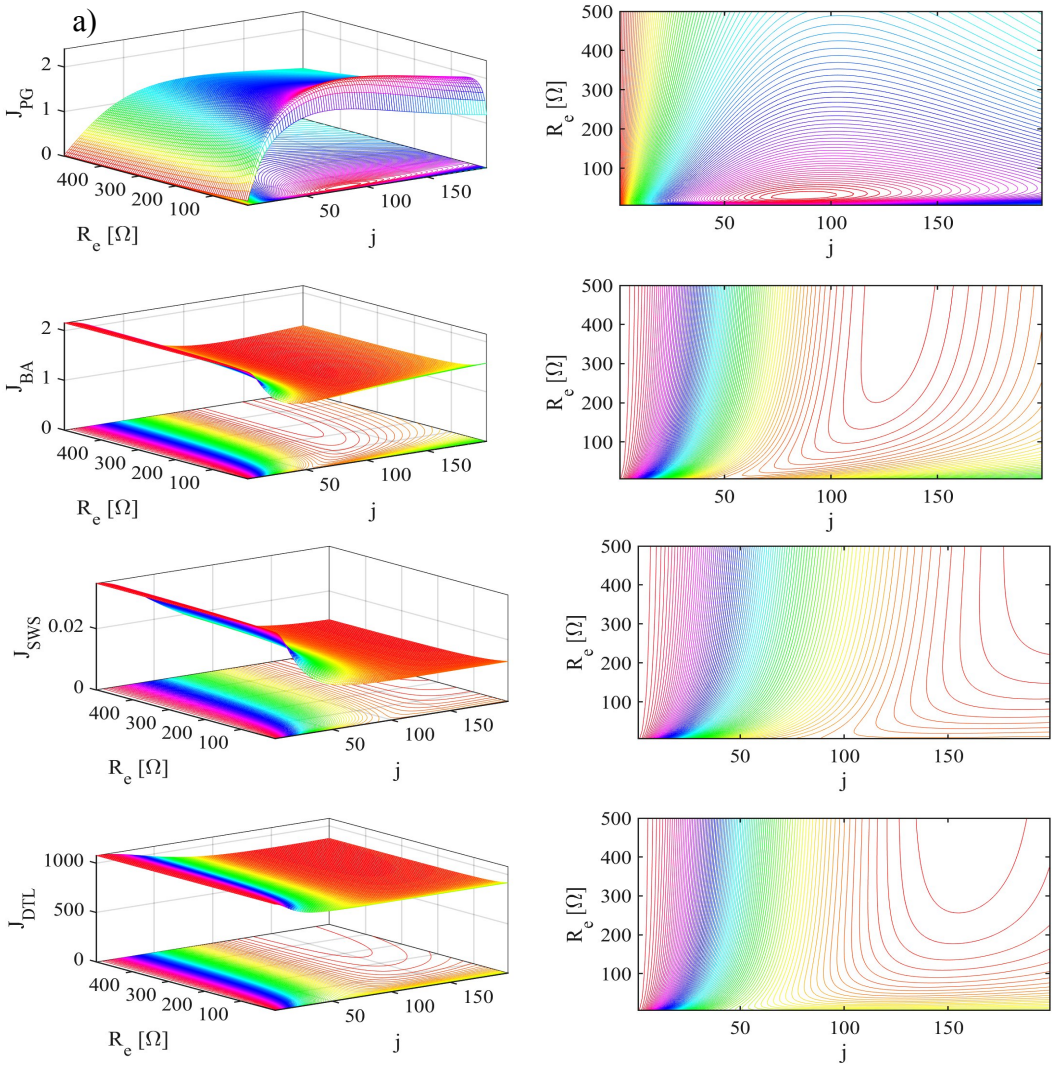


Figura 44. Superficies y curvas de contorno de los índices de rendimiento del sistema AR-TID en la suspensión de Shen, obtenidas a partir de la variación de la relación de transmisión j de a) 80 y b)100.

Posteriormente, se muestran los resultados de la segunda parte del análisis en la Figura 45. Se puede apreciar que el índice de la potencia eléctrica con $R_i = 10\Omega$ se maximiza en una zona entre los 75 y 100 de relación de transmisión y de 20 a 40 ohms de resistencia externa. Esto coincide con el resultado obtenido por el comando Maximize. En cuanto al resto de los índices de rendimiento, se puede apreciar que se minimizan con valores mayores a 100 de relación de transmisión y valores mayores a 100 ohms de resistencia externa. Adicionalmente, el análisis con $R_i = 30\Omega$ muestra una reducción en todos los índices. Por lo que al aumentar la resistencia interna, se mejora ligeramente la respuesta dinámica de la suspensión, al mismo tiempo que se

reduce la potencia generada con una mayor proporción. Finalmente, se eligió un valor de 30 ohms como el valor óptimo de la resistencia interna, a la cual, le corresponde un valor de 100 para la relación de transmisión y 65 ohms de resistencia externa para maximizar la potencia generada. Adicionalmente, con estos valores se obtiene un balance entre la mejora del confort y la carga dinámica, al mismo tiempo que se deteriora ligeramente la deflexión de la suspensión.

Posteriormente, se comparan las respuestas en frecuencia estudiadas en la sección 5.1 con las respuestas de la suspensión AR-TID optimizada, con el fin de observar si es posible mejorar dichas respuestas sustituyendo el inersor con el amortiguador regenerativo de brazo dentado.



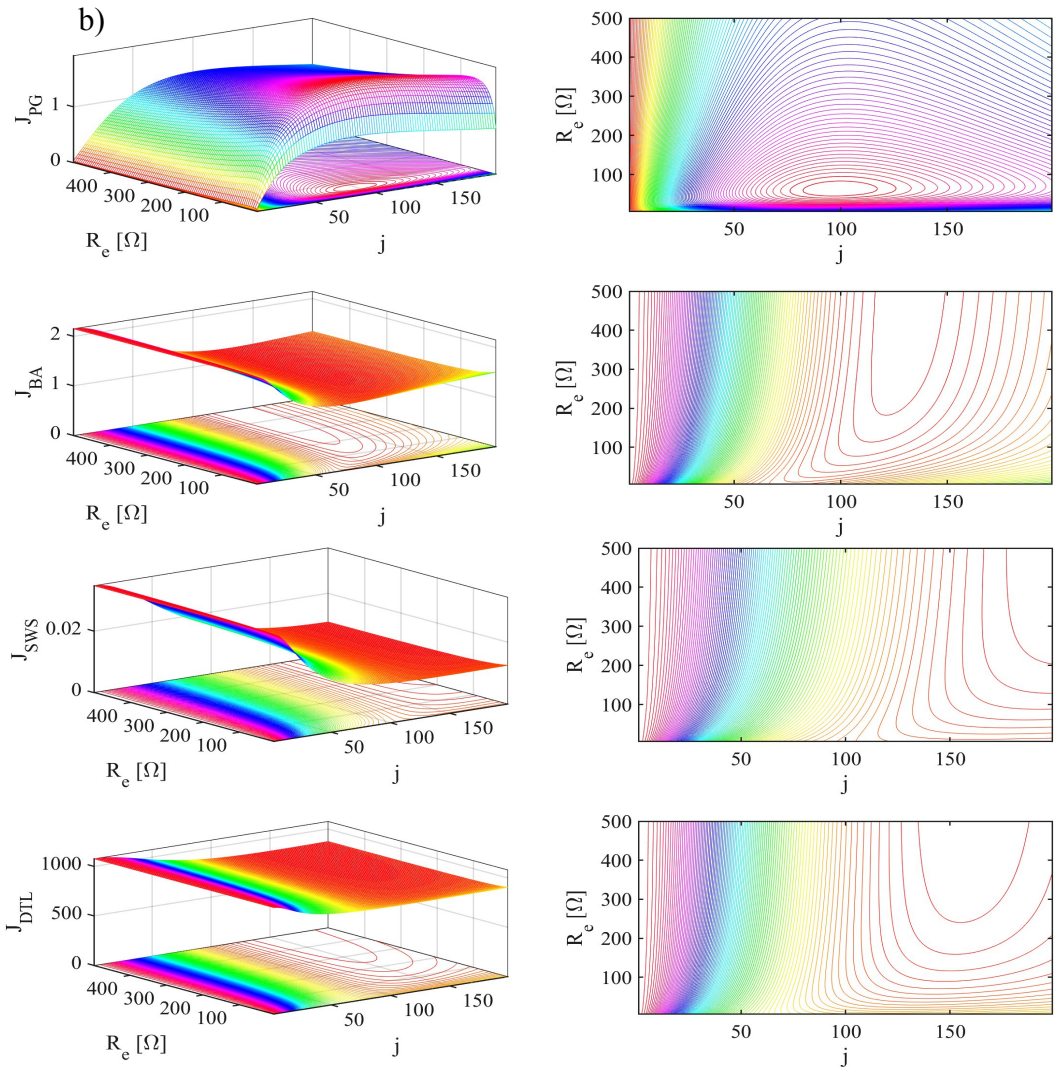


Figura 45. Superficies y curvas de contorno de los índices de rendimiento del sistema AR-TID en la suspensión de Shen, obtenidas a partir de la variación de la resistencia interna de a) 10 y b) 30 ohms.

Para la comparación, se utilizan los parámetros del AR propuestos por (Zhang et al., 2018) y los parámetros óptimos antes mencionados. Además, los parámetros de la suspensión son los mismos empleados en la suspensión TID para una comparación justa. Los resultados se muestran en la Figura 46, donde se puede observar que la suspensión AR-TID presenta una ligera mejora en la aceleración de la carrocería y en la carga dinámica a baja frecuencia en comparación con la suspensión pasiva, pero se deterioran ligeramente en comparación de la suspensión TID. Además, en la zona donde se deteriora la suspensión TID en comparación de la suspensión pasiva, la suspensión AR-TID presenta una ligera mejora en comparación de la suspensión pasiva. Sin embargo, en la deflexión de la suspensión el sistema AR-TID no presenta una mejora

como tal, debido a que su comportamiento es muy similar al de la suspensión pasiva y solo se desplaza ligeramente la primera frecuencia de resonancia. Cabe destacar que el comportamiento de la deflexión de la suspensión es el esperado de acuerdo al proceso de optimización e incluso, (Hu et al., 2014) menciona que en las suspensiones con inersores, la deflexión de la suspensión es la limitación básica para la mejora tanto del confort como de la carga dinámica.

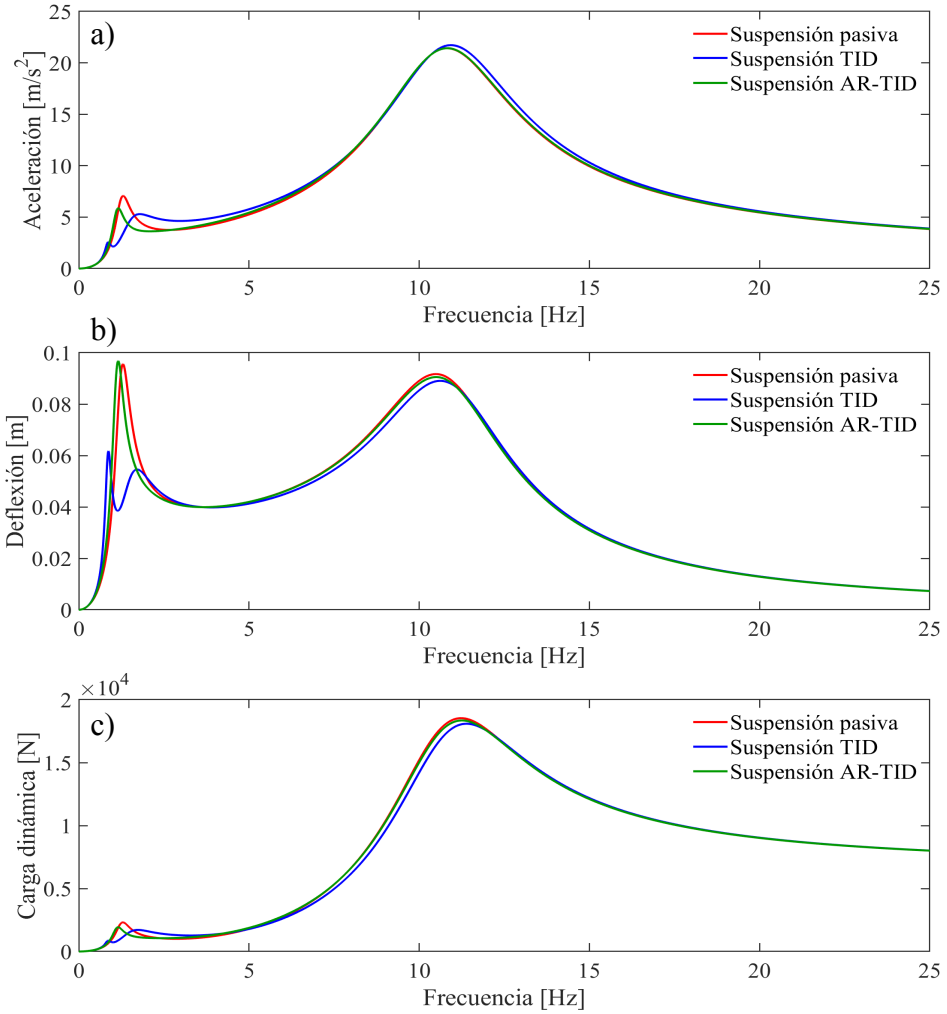


Figura 46. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva, suspensión TID y suspensión AR-TID de a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

6.3 Optimización, comparación y simulación del sistema AR-TID con el AR convencional

En este caso, los parámetros físicos de la suspensión considerados pertenecen a la suspensión diseñada por (Zhang et al., 2018), donde el valor del coeficiente de amortiguamiento de dicha suspensión, se utiliza en el sistema AR-TID para una comparación justa. El proceso de optimización comienza con la minimización del índice de rendimiento normalizado descrito en la ecuación (6.8). Debido a que esta expresión es demasiado extensa para utilizar un comando de optimización multivariable, se optó por graficar su comportamiento tridimensional ante la variación de los tres parámetros del AR establecidos anteriormente. Con base en la optimización anterior se establece un valor de 10 ohms para la resistencia interna, permitiendo variar la relación de transmisión y la resistencia externa de [1-200] y [5-500] Ω, respectivamente. Posteriormente, se fija el valor de la relación de transmisión a 60, variando el valor de ambas resistencias de [1-50] Ω. En la Figura 47 se muestran las superficies y curvas de contorno del comportamiento del índice de rendimiento normalizado. Nótese que, para una resistencia fija de 10 ohms se requiere una relación de transmisión menor a 90. Además, entre mayor sea este valor, se requiere un valor mayor de resistencia externa para minimizar el índice normalizado. En cuanto al resultado de la variación de ambas resistencia frente a una relación de transmisión fija, se puede apreciar que se debe evitar la zona triangular donde se encuentra un pequeño pico del índice normalizado.

Adicionalmente, se realiza un análisis paramétrico para los índices de rendimiento al igual que en la Figura 45, considerando solo el valor fijo de 10 ohms para la resistencia interna. En la Figura 48, se muestran los resultados del análisis paramétrico. Se puede notar, que la potencia máxima se alcanza con los siguientes valores: $R_i = 10\ \Omega$, $R_e = 35\ \Omega$ y j = 85.

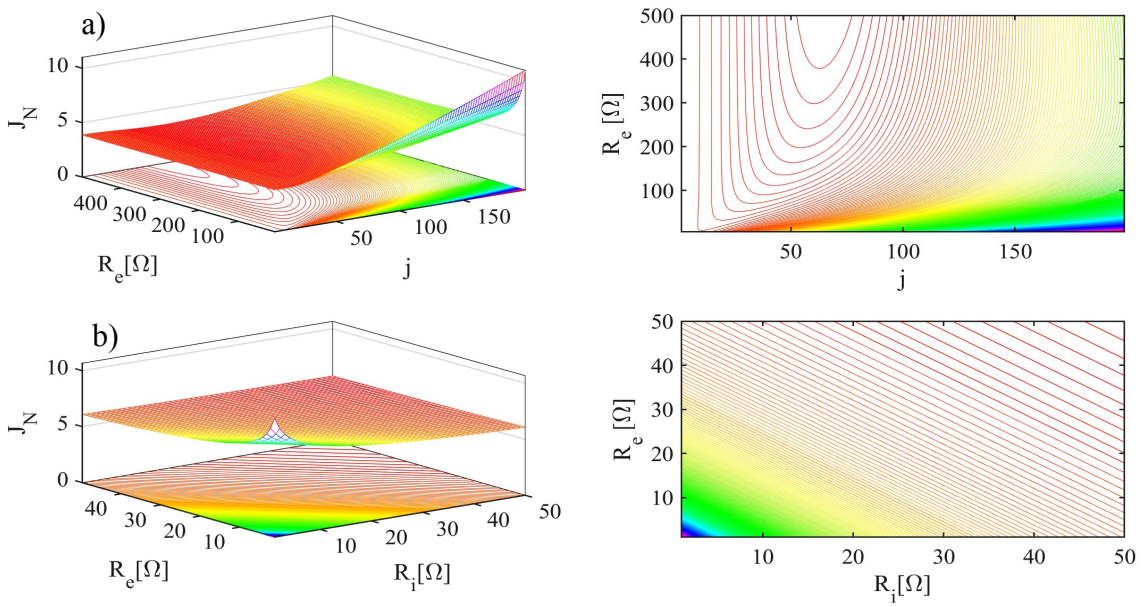


Figura 47. Superficies y curvas de contorno del índice de rendimiento normalizado del sistema AR-TID obtenidas a partir del valor de a) la resistencia interna de 10 ohms y b) la relación de transmisión en 60.

Sin embargo, para el mejoramiento del índice de confort y de la carga dinámica, se requiere un valor mayor para la resistencia externa o un valor menor en la relación de transmisión. En cambio, el índice de la deflexión requiere tanto valores mayores en la resistencia externa como en la relación de transmisión. Siendo el más afectado al momento de maximizar la potencia generada.

Se puede notar que los valores de las resistencias que maximizan el índice de la potencia generada, logran evitar la zona pico del índice normalizado. Por lo que no es necesario ajustar los valores de la resistencia. En cambio, la relación de transmisión con un valor de 85 se encuentra en una zona alta en el índice normalizado de la Figura 47. Por ende, es necesario reducir su valor a 60, mejorando de esta manera el resto de los índices de rendimiento mostrados en la Figura 48. Cabe destacar, que el índice del confort y de la carga dinámica se pueden mejorar si se incrementa la resistencia externa. Sin embargo, la mejora es menor en comparación de la deterioración del índice de la potencia eléctrica, por lo que se opta por mantener esos valores.

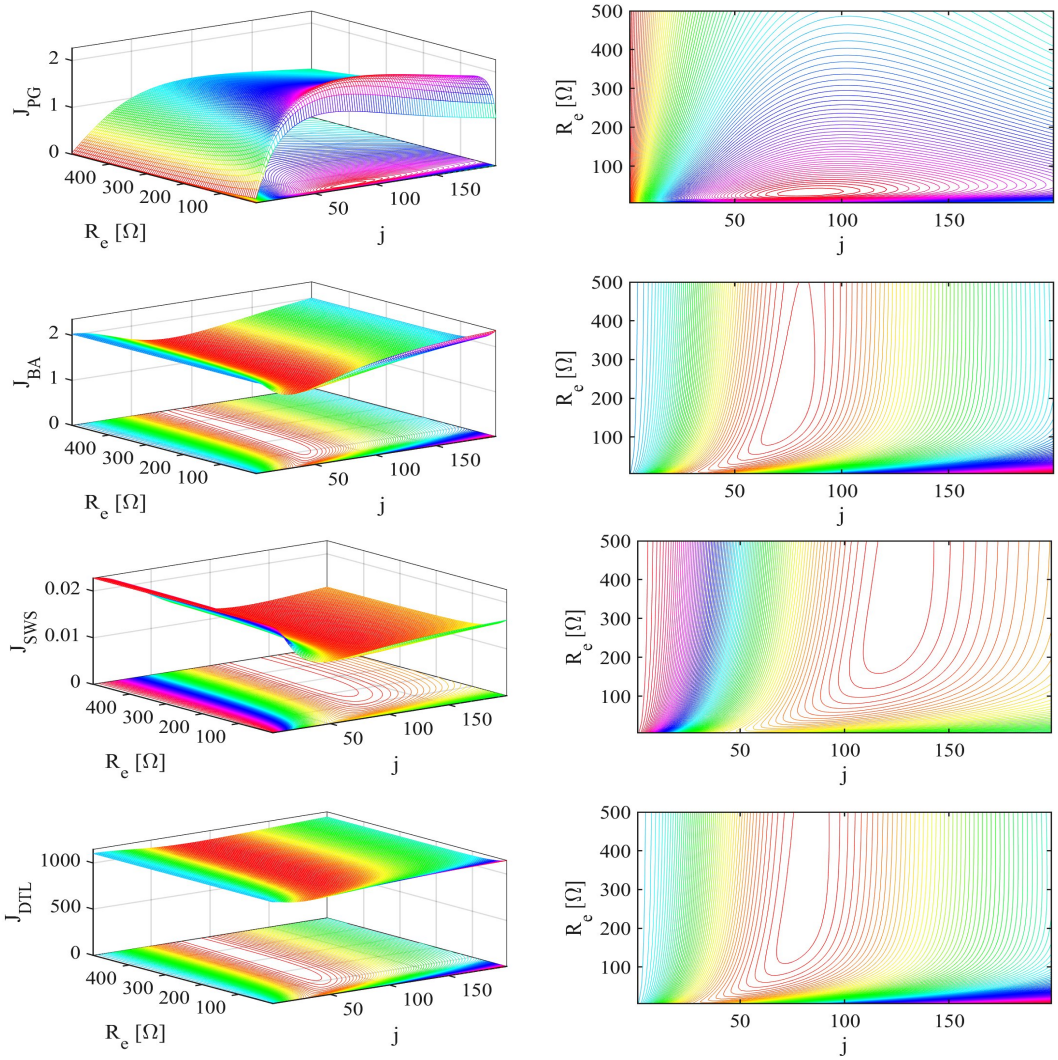
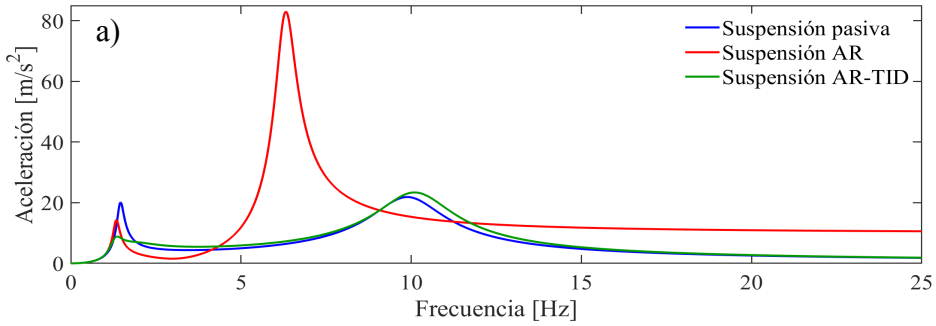


Figura 48. Superficies y curvas de contorno de los índices de rendimiento del sistema AR-TID en la suspensión de Zhang, obtenidas con un valor constante de 10 ohms para la resistencia interna.

Posteriormente, al igual que en la sección anterior, se realiza una comparación de las respuestas en frecuencia de las dinámicas de la suspensión AR y la suspensión pasiva con la suspensión AR-TID, tal como se realizó en la sección 5.1.1.



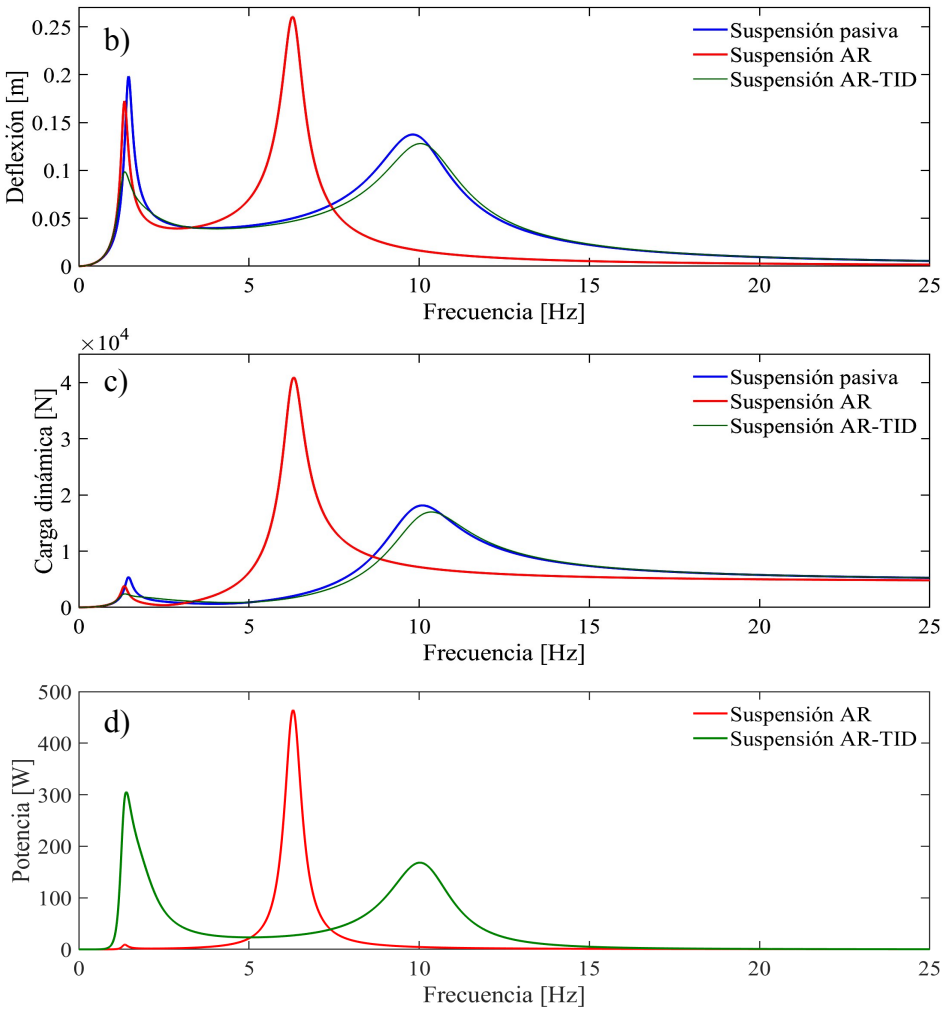


Figura 49. Respuestas en frecuencia de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva, suspensión AR y suspensión AR-TID de la a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

Los resultados de la comparación se muestran en la Figura 48, donde se puede notar que la suspensión AR-TID reduce ligeramente la aceleración a bajas frecuencias en comparación con la suspension pasiva y AR. Sin embargo, después de la primera resonancia, la suspensión AR-TID deteriora ligeramente la aceleración en comparación de la suspensión pasiva, adoptando el comportamiento que tiene la suspensión TID en comparación de la pasiva. Cabe destacar que con el AR-TID, se evita el pico en amplitud que se tiene en la segunda resonancia con la suspensión AR en paralelo. En cuanto a la deflexión de la suspensión, la suspensión AR-TID muestra una considerable mejora en comparación con la suspensión pasiva y AR, en casi todas las frecuencias analizadas. Posteriormente, en la comparación de la carga dinámica, la suspensión AR-TID

presenta una ligera mejora a bajas frecuencias y a frecuencias mayores a los 5 Hz en comparación de la suspensión pasiva. Al igual que en el caso de la aceleración y la deflexión, el sistema AR-TID evita el gran pico que presenta la suspensión AR en su segunda resonancia. Finalmente, la potencia generada en la suspensión AR-TID en comparación de la suspensión AR presenta un gran incremento en el ancho de banda de frecuencias, lo que permite una mayor capacidad de recolección de energía a bajas y altas frecuencias. En cambio, a pesar de que la suspensión AR presenta un gran pico en la segunda resonancia de la potencia generada, solo se produce energía en un rango de frecuencias muy angosto y a altas frecuencias. Lo que dificulta llegar a generar el potencial de energía que ofrece este sistema de suspensión.

Posteriormente, una vez optimizado el sistema AR-TID, se realiza la comparación de las dinámicas en estudio en el dominio del tiempo siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.8. Como entrada al sistema, se considera el perfil de carretera aleatorio descrita en la sección 3.4.4, con un nivel de rugosidad clase C y una velocidad de conducción constante de 20 m/s (72 km/h). Las condiciones fueron establecidas por (Abdelkareem et al., 2018), donde evaluaron el potencial de generación de energía en el modelo de vehículo completo. La carretera aleatoria se muestra en la Figura 49, donde se contempla una simulación de 100 s para una mayor cantidad de muestras a comparar.

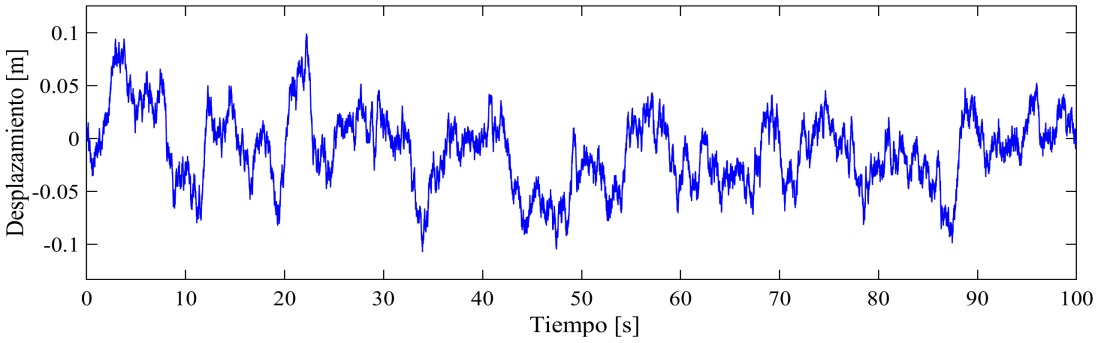
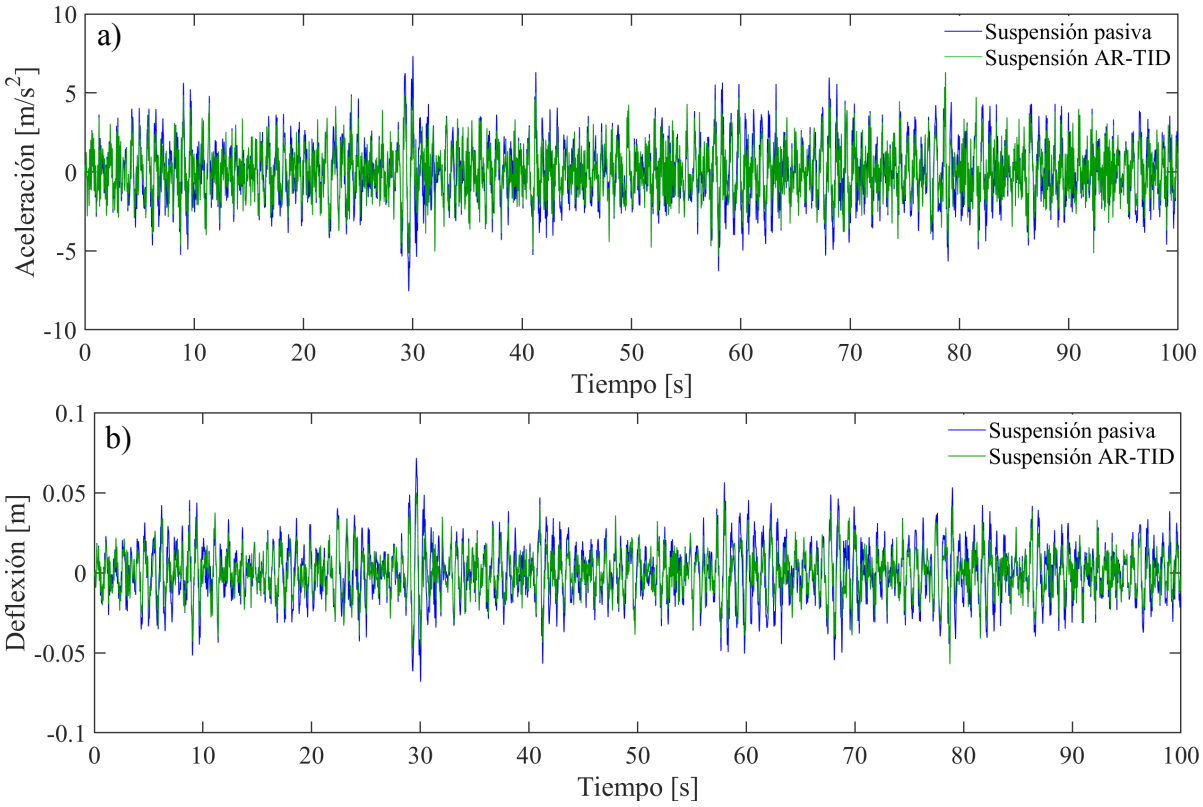


Figura 50. Perfil artificial de carretera aleatorio

Después, se programan lo modelos matemáticos de las ecuaciones (3.11), (4.21) y (4.31) correspondientes a un cuarto de suspensión pasiva, AR y AR-TID en Matlab/Simulink para realizar las simulaciones correspondientes. Desafortunadamente, los métodos de integración en Matlab/Simulink no fueron capaces de resolver el modelo matemático de la suspensión AR-TID. Por esta razón, se recurrió a la ecuación en espacio de estados de la suspensión AR-TID

desarrollada en la sección 4.3. La ecuación en estados de espacios se resolvió mediante código en Matlab con el comando lsim, programando las matrices y arreglos de la ecuación (4.37) y agregando un arreglo que contiene los datos que describen la gráfica de la Figura 49, como excitación del sistema. Una vez resueltos los tres sistemas, se realizan las comparaciones entre la suspensión AR-TID con la pasiva y la suspensión AR por separado. Esto se debe a que la alta densidad de datos dificulta la visualización y por lo tanto, su comprensión. En la Figura 50 se muestran las respuestas dinámicas de la suspensión pasiva y la AR-TID. Se puede observar que la suspensión AR-TID presenta una ligera reducción en la aceleración de la carrocería en la mayor parte del tiempo simulado, en comparación con la suspensión pasiva. En cambio, la reducción es más notoria en la deflexión de la suspensión y en la carga dinámica del neumático. Los resultados obtenidos en el dominio del tiempo concuerdan con los obtenidos en el dominio frecuencial, ya que en ambos dominios, la aceleración de la carrocería presenta una mínima mejora a diferencia de la mejora en las demás dinámicas.



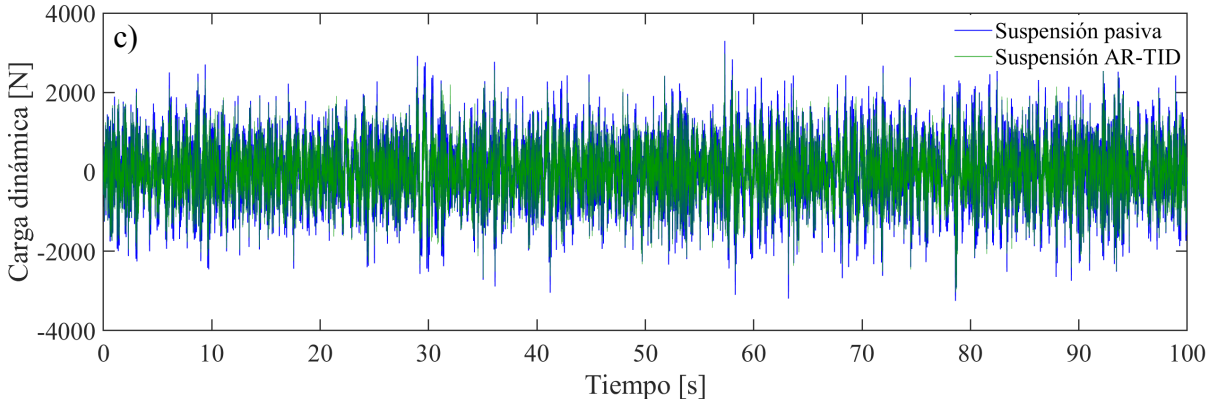
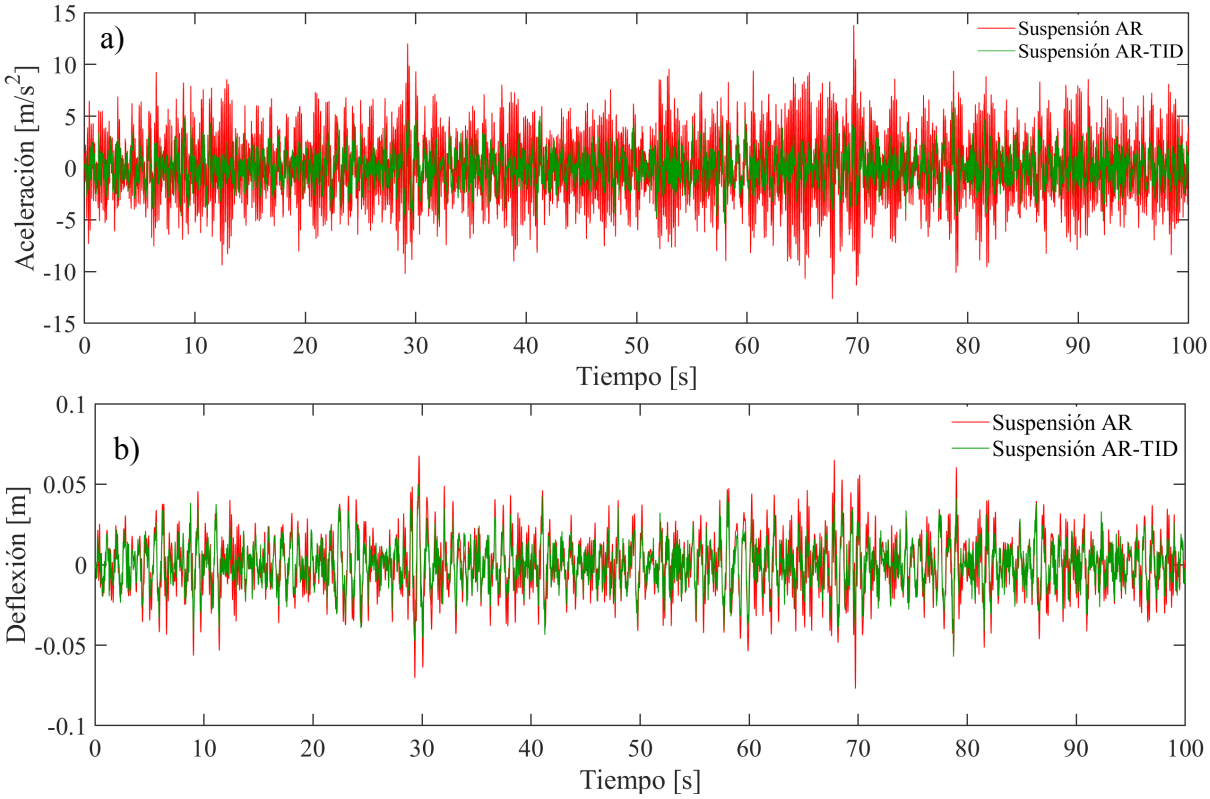


Figura 51. Respuestas en el dominio del tiempo de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión AR-TID de la a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

Posteriormente, en la Figura 51 se muestran las comparaciones de la suspensión AR con la suspensión AR-TID. Nótese que, la suspensión AR-TID reduce en gran medida la aceleración de la carrocería y la carga dinámica del neumático en comparación con la suspensión AR. En cuanto a la deflexión de la suspensión, la reducción es menor. Por último, la suspensión AR-TID es capaz de generar una potencia instantánea de hasta 105 W, lo cual, es mucho mayor a la potencia que genera la suspensión AR.



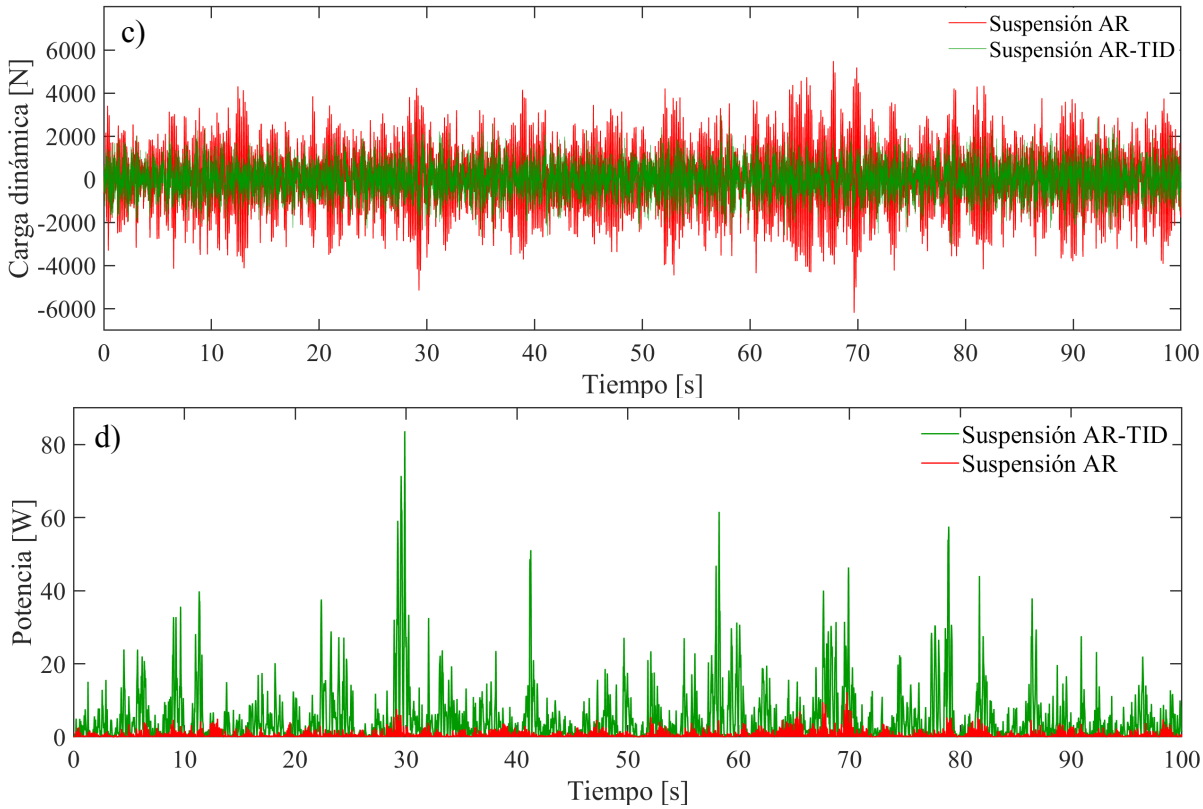


Figura 52. Respuestas en el dominio del tiempo de las dinámicas en el modelo de un cuarto de vehículo con suspensión pasiva y suspensión AR-TID de la a) Aceleración de la carrocería, b) Deflexión de la suspensión y c) Carga dinámica del neumático.

Con el propósito de cuantificar las comparaciones en las respuestas en el dominio del tiempo, se utilizan las siguientes expresiones para obtener los valores RMS de las dinámicas:

$$\begin{cases} BA_{RMS} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(BA(t)\right)^2 \cdot d(t)} \quad ; \quad SWS_{RMS} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(SWS(t)\right)^2 \cdot d(t)} \\ DTL_{RMS} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(DTL(t)\right)^2 \cdot d(t)} \quad ; \quad PG_{RMS} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(PG(t)\right)^2 \cdot d(t)} \end{cases} \tag{6.9}$$

Donde las funciones de las dinámicas en el tiempo, representan las gráficas de las Figuras 50 y 51. Después, para cuantificar la mejora de la suspensión AR-TID, se utiliza la ecuación (6.10). Donde $BA(PAS)_{RMS}$ y $BA(AR-TID)_{RMS}$ representan los valores RMS de la aceleración de la suspensión pasiva y AR-TID, obtenidas a partir de la ecuación (6.9). Lo mismo se aplica para el

resto de las dinámicas, a excepción de la potencia regenerada que solo se puede comparar con la suspensión AR.

$$\begin{cases} \%BA = \dfrac{BA(PAS)_{RMS} - BA(AR-TID)_{RMS}}{BA(PAS)_{RMS}} x100\,\% \\ \%SWS = \dfrac{SWS(PAS)_{RMS} - SWS(AR-TID)_{RMS}}{SWS(PAS)_{RMS}} x100\,\% \\ \%DTL = \dfrac{DTL(PAS)_{RMS} - DTL(AR-TID)_{RMS}}{DTL(PAS)_{RMS}} x100\,\% \\ \%PG = \dfrac{PG(AR-TID)_{RMS} - PG(AR)_{RMS}}{PG(AR)_{RMS}} x100\,\% \end{cases} \tag{6.10}$$

Al realizar los cálculos correspondientes, la suspensión AR-TID presenta las siguientes mejoras en comparación de la suspensión pasiva: BA en 18.14%, SWS en 23.69% y DTL en 11.29%.

Ahora en comparación de la suspensión AR, la suspensión AR-TID presenta los siguientes valores: BA en 50.34%, SWS en 23.97%, DTL en 50.05% y PG en 733.32%.

6.4 Simulación numérica basada en ciclos de conducción

Por último, se determina el potencial de regeneración de energía en el sistema de suspensión AR-TID considerando ciclos de velocidad de conducción en lugar de una velocidad de conducción constante. De acuerdo con la investigación de (Zhang et al., 2020), no es posible determinar el potencial de regeneración de energía considerando el modelo de un cuarto de vehículo por simetría como en el caso de las secciones anteriores. Esto se debe, que al considerar los efectos de balanceo y cabeceo en el modelo de vehículo completo, el potencial de regeneración de energía varía considerablemente en comparación con la suma de cuatro suspensiones de un cuarto de vehículo, sobre todo a baja frecuencia. Por esta razón, se utiliza el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID en el dominio del tiempo descrito en la sección 4.3, el cual, se soluciona utilizando la ecuación en espacio de estados descrito en el Apéndice G mediante el método utilizado en la sección 6.3.

En cuanto a la excitación del sistema de suspensión, se considera el perfil de carretera artificial descrito en la sección 3.4.4. Para crear los perfiles artificiales de carretera para cada una de las cuatro ruedas de forma que se provoquen los efectos de balanceo y cabeceo, se utilizan las rugosidades de carretera clase C y clase D de la Tabla 3 para excitar las ruedas del lado izquierdo y del lado derecho, respectivamente (Figura 52a). Adicionalmente, las excitaciones del eje trasero deben tener cierto retraso con respecto del eje delantero, como se muestra en la Figura 52b, donde las señales de las ruedas RR, FR, FL y RL corresponden a las excitaciones de las ruedas trasera derecha, frontal derecha, frontal izquierda y trasera izquierda, respectivamente.

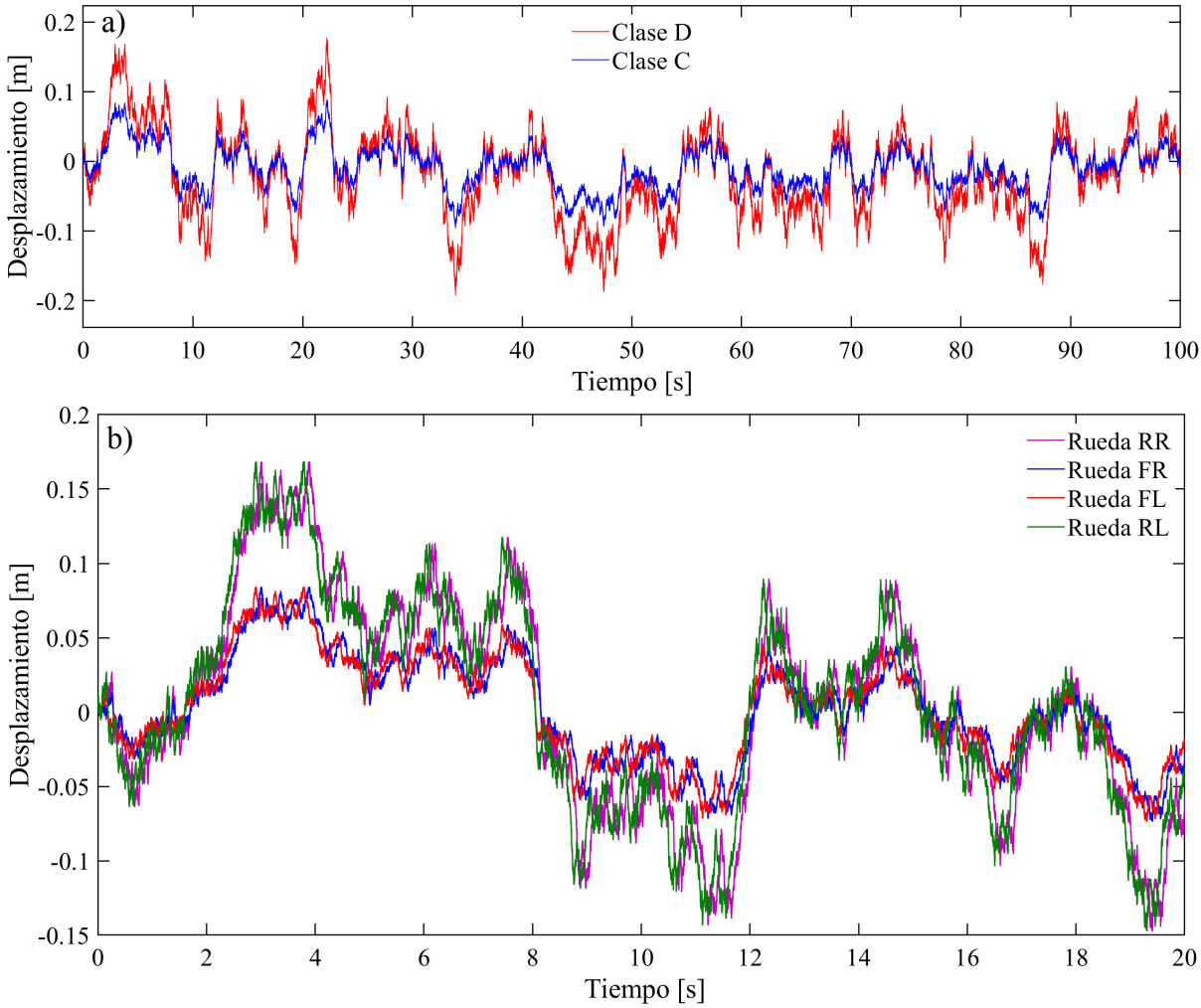


Figura 53. Perfil artificial de carretera aleatorio a) Clase C y clase D, b) Para las cuatro ruedas.

Posteriormente, (Abdelkareem et al., 2018) investigó el potencial de energía cosechable en una suspensión pasiva a través de intensas simulaciones utilizando los siguientes cuatro ciclos de velocidad de conducción: NEDC (New European Driving Cycle), WLTP (Worldwide

harmonized Light Vehicules Test Procedure), FTP (Federal Test Procedure) y HWFET (Highway Fuel Economy Test). Como se muestra en la Figura 53a, el nuevo ciclo de conducción europeo (NEDC) está dividido en dos secciones; la primera sección corresponde a una conducción en ciudad compuesta por cuatro repeticiones de un patrón de conducción con una velocidad máxima de 50 km/h y la segunda sección representa una conducción fuera de la ciudad (EUDC, por sus siglas en inglés ¨Extra Urban Driving Cycle¨) con una velocidad de hasta 120 km/h. En seguida, en la Figura 53b se muestra el perfil de carretera clase C y D utilizando el ciclo de conducción NEDC. Nótese que en la etapa NEDC la densidad de la gráfica es considerablemente menor que en la etapa EUDC, debido a que en la ciudad existen paradas frecuentes y fuera de la ciudad la velocidad de conducción es mayor.

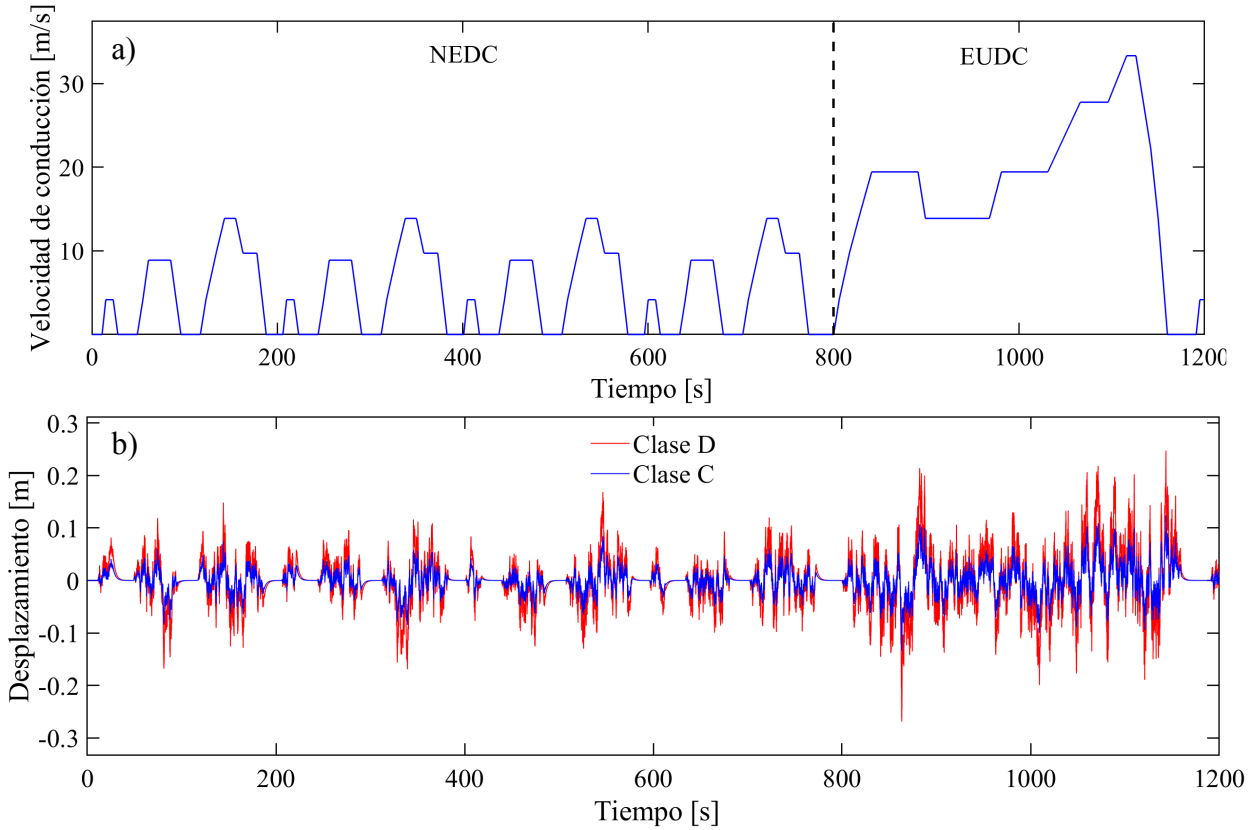


Figura 54. a) Nuevo ciclo de velocidad de conducción europeo (NEDC) y b) Perfil de carretera Clase C y D utilizando el NEDC.

Más adelante, en la Figura 54a se muestra el ciclo de conducción conocido como el procedimiento mundial armonizado de pruebas de vehículos ligeros (WLTP), el cual, no contiene patrones repetitivos de conducción dentro del tiempo graficado y se divide en cuatro partes de

acuerdo a la velocidad de conducción máxima alcanzado desde baja hasta extra alta. Igualmente, en la Figura 54b se ilustra el perfil de carretera clase C y D con el ciclo de conducción WLTP. Se puede notar que en las etapas de mayor velocidad, se incrementa proporcionalmente la amplitud del desplazamiento de la carretera. De igual forma, la etapa de mayor velocidad corresponde a una mayor densidad en el perfil de carretera artificial.

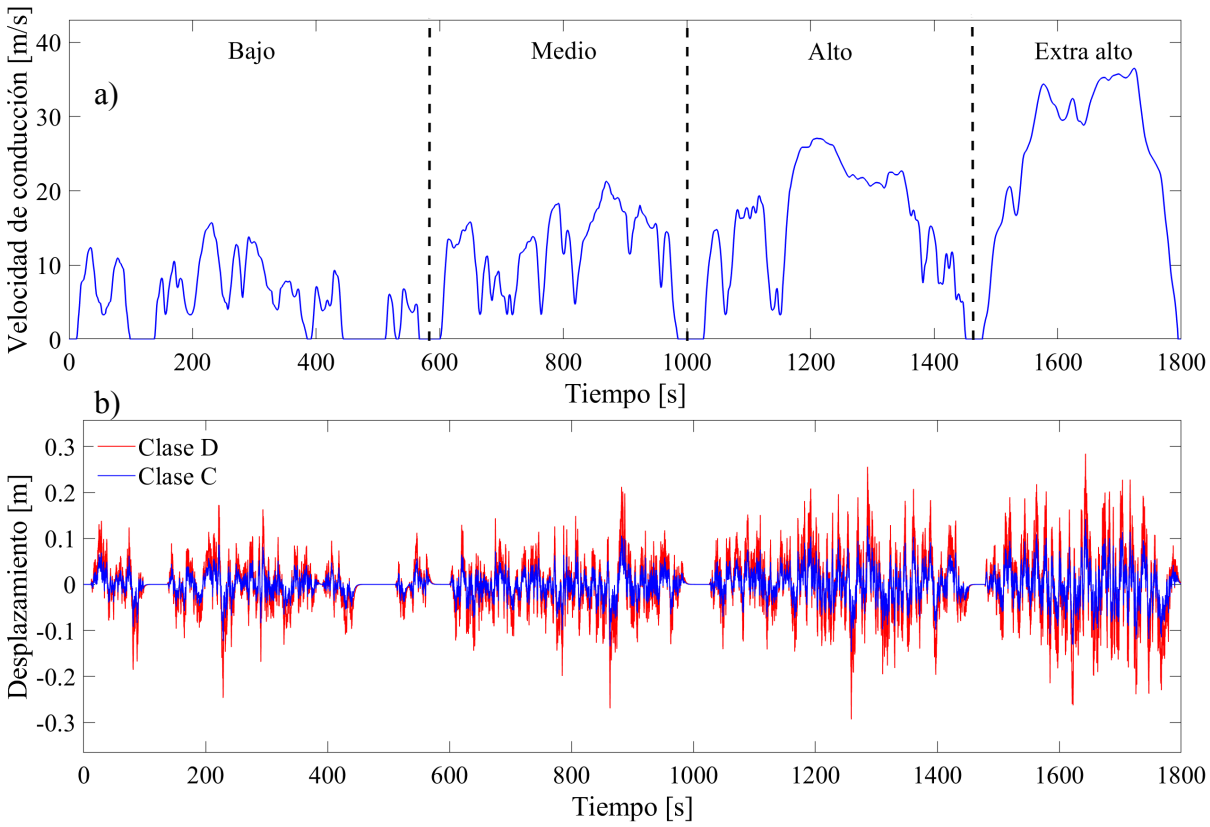


Figura 55. a) Ciclo de conducción del Procedimiento Mundial Armonizado de Pruebas de Vehículos Ligeros (WLTP) y b) Perfil de carretera Clase C y D utilizando el WLTP.

El siguiente ciclo de conducción es el procedimiento de prueba federal (FTP) mostrado en la Figura 55a. Se puede apreciar un mayor número de paradas y con mayor velocidad que en la conducción urbana del NEDC. Además, existen ciertos patrones que se repiten durante la conducción como el segmento inicial y final, así como las secciones con mayor velocidad. Después, se grafican en la Figura 55b los perfiles de carretera clase C y D correspondiente al ciclo de conducción FTP. Se puede apreciar la correspondencia que tienen ambas gráficas con el ciclo de conducción, ya que en áreas donde existe mayor velocidad de conducción se produce una mayor intensidad en el desplazamiento del perfil artificial de las carreteras.

Por último, el ciclo de conducción para prueba de economía de combustible en carretera (HWFET) es representado en la Figura 56a. Se puede observar que la velocidad de conducción no llega a ser cero y se mantiene con mayor estabilidad, lo que representa adecuadamente un manejo en autopista sin paradas. Adicionalmente, en la Figura 56b se muestra el perfil de carretera clase C y D con el ciclo de conducción HWFET.

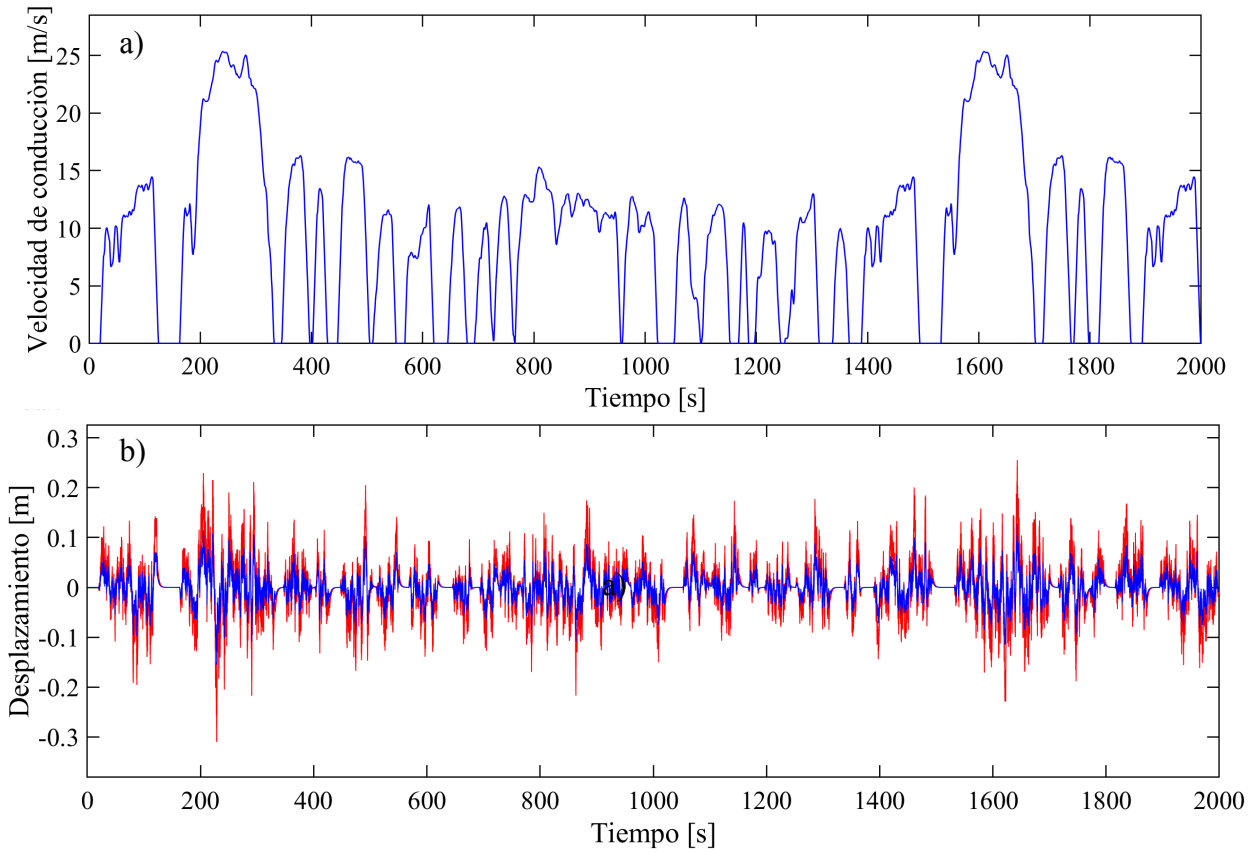


Figura 56. a) Ciclo de conducción del Procedimiento de Prueba Federal (FTP) y b) Perfil de carretera Clase C y D utilizando el FTP.

Al considerar los cuatro ciclos de conducción descritos anteriormente, se cubren diferentes clases de conducción tanto en ciudad como en autopista. De esta manera, se logra un mayor acercamiento a condiciones reales de conducción, generando resultados más confiables.

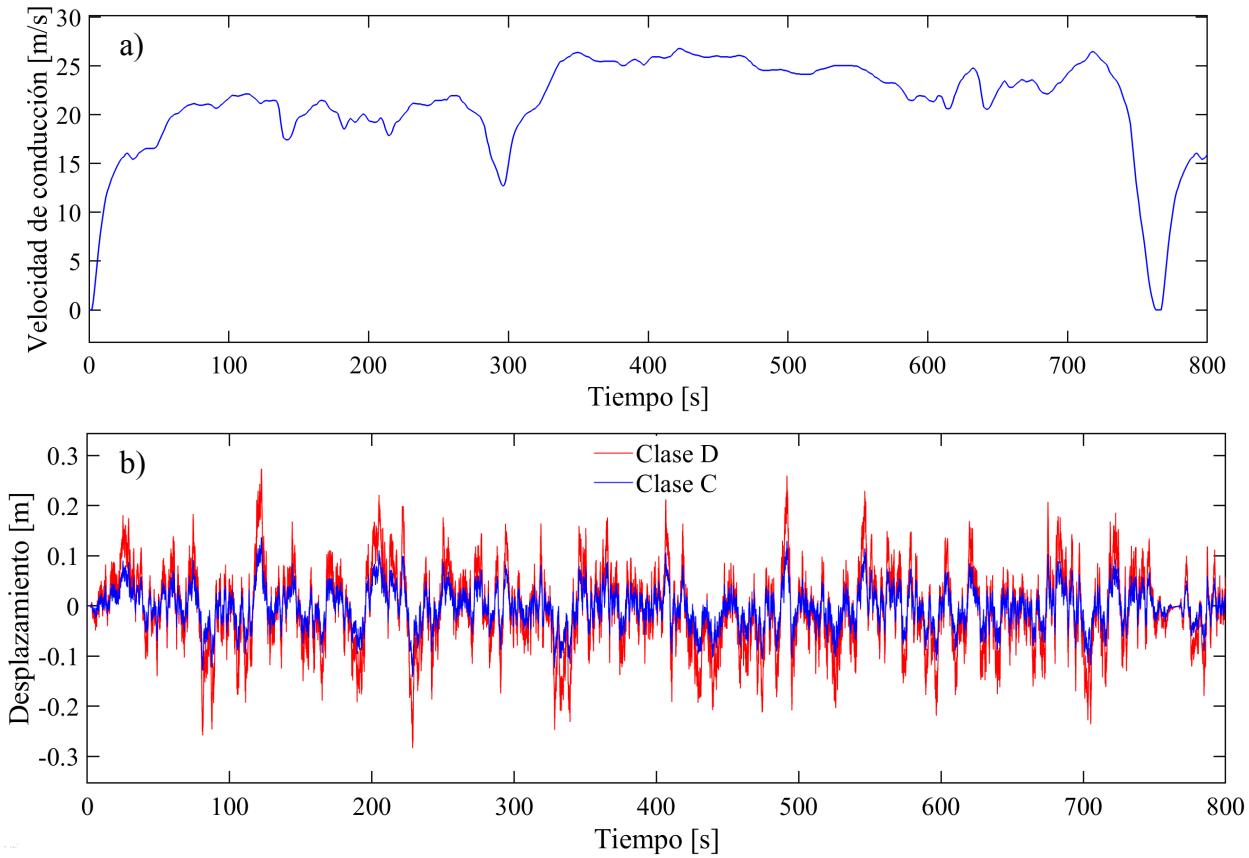
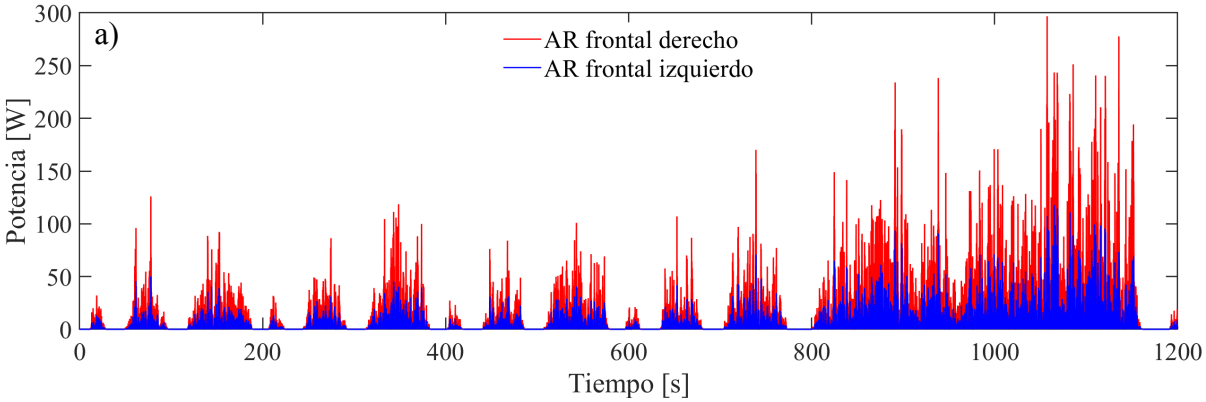


Figura 57. a) Ciclo de conducción de la prueba de economía de combustible en carretera (HWFET) y b) Perfil de carretera Clase C y D utilizando el HWFET.

Posteriormente, se realizan las simulaciones en el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID considerando los perfiles de carretera artificiales correspondientes a cada ciclo de conducción mostrados de la Figura 53b a la Figura 56b.



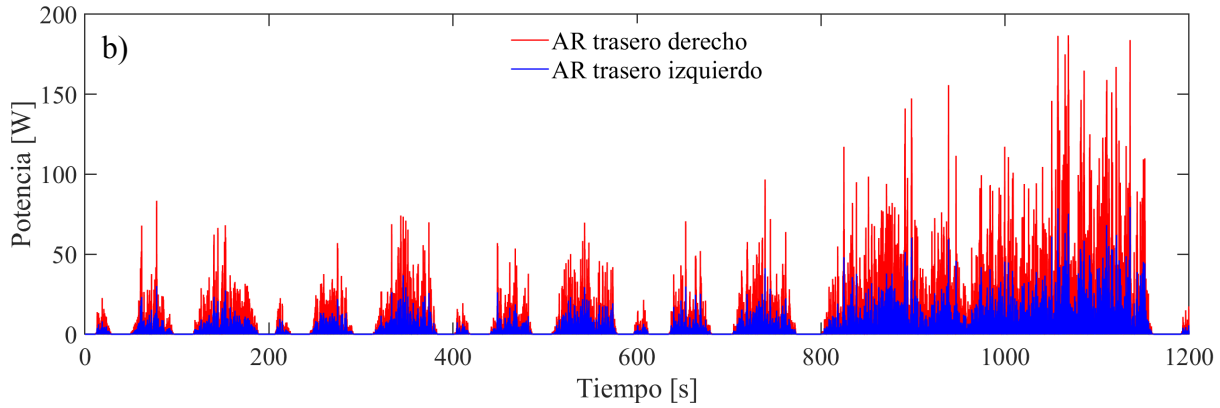
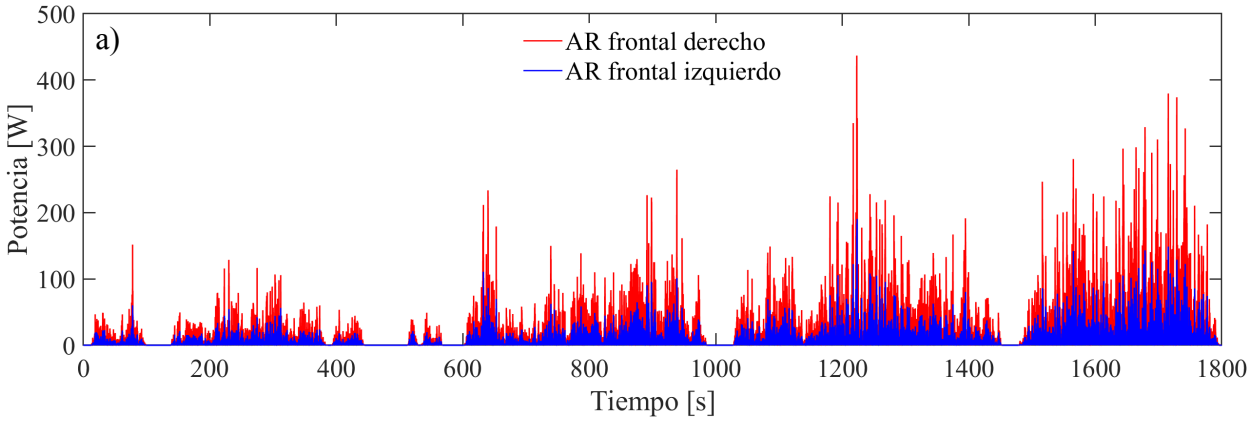


Figura 58. Potencia eléctrica instantánea regenerada en el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID, considerando el ciclo de conducción NEDC producido en: a) el eje delantero y b) el eje trasero.

En la Figura 57 se muestra la potencia eléctrica instantánea regenerada en los cuatro ARs de la suspensión completa con AR-TID. Se puede observar que se genera mayor energía en las ruedas derechas que en las izquierdas, debido a que las ruedas derechas se excitan con el perfil artificial de carretera clase D. Entre mayor grado de rugosidad tenga el perfil artificial de carretera, mayor será la energía vibratoria que recibe la suspensión, provocando un incremento en el potencial de energía regenerada. Adicionalmente, se puede notar que la potencia eléctrica instantánea llega a un valor máximo de 300 W en el eje delantero. En cuanto al valor RMS de la potencia regenerada, se obtiene un total de 50.55 W mediante la suma de la potencia regenerada de los cuatro ARs.



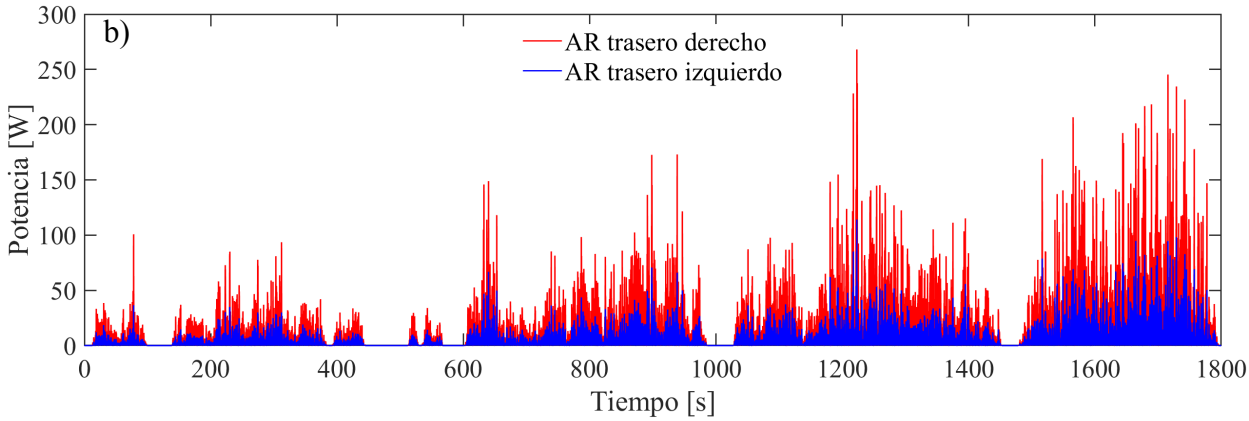
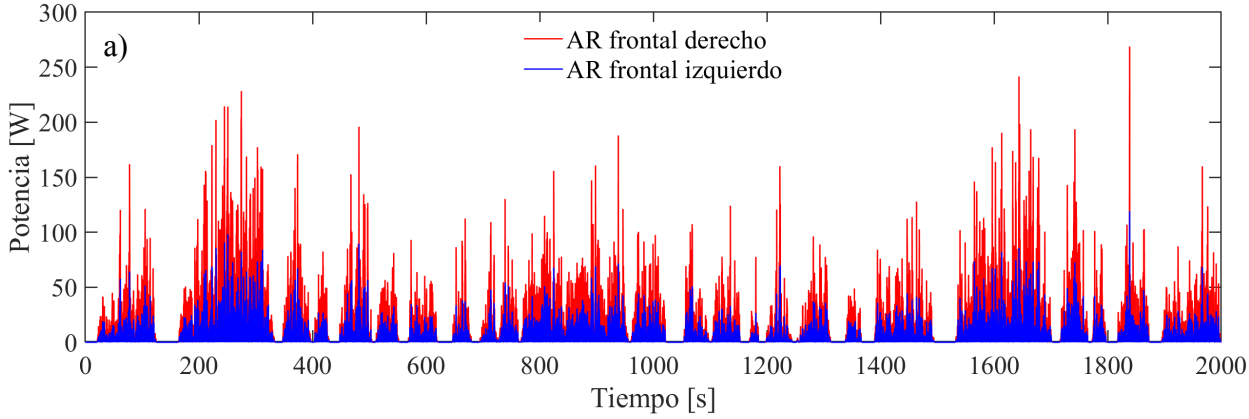


Figura 59. Potencia eléctrica instantánea regenerada en el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID, considerando el ciclo de conducción WLTP producido en: a) el eje delantero y b) el eje trasero.

Después, en la Figura 58 se muestran los resultados de la simulación de vehículo completo considerando el ciclo de conducción WLTP. Nótese que la potencia regenerada máxima es de 440 W, siendo mayor en comparación al ciclo NEDC. De igual forma, al sumar los valores RMS de las potencias regeneradas en cada AR se obtienen 63.23 W en total, superando al ciclo de conducción NEDC. Cabe destacar que los valores de potencia instantánea regenerada son mayores en las zonas donde la velocidad de conducción es mayor y más constante.



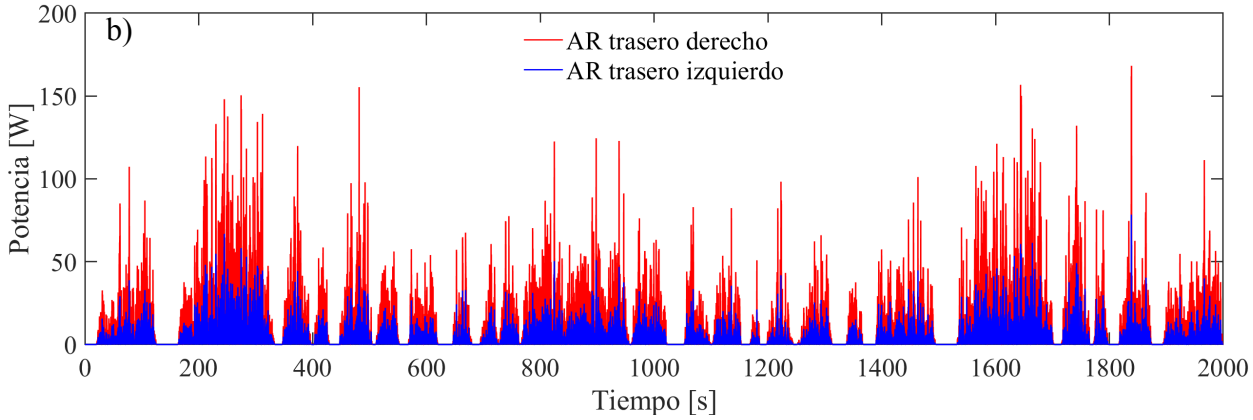
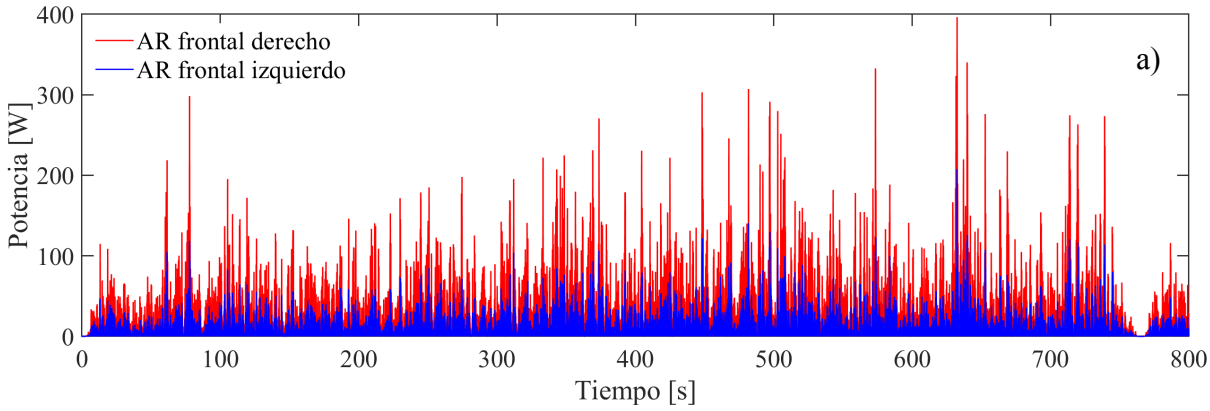


Figura 60. Potencia eléctrica instantánea regenerada en el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID, considerando el ciclo de conducción FTP producido en: a) el eje delantero y b) el eje trasero.

En la Figura 59 se muestra la potencia instantánea regenerada considerando el ciclo de conducción FTP. Nótese que la potencia instantánea máxima regenerada es de 270 W producida por el AR frontal derecho, al igual que en los demás ciclos. Además, la potencia RMS generada por los cuatro ARs es de 44.58 W. En este ciclo se regenera menos potencia que en los ciclos anteriores debido a las paradas continuas durante todo el ciclo de conducción.

Finalmente, los resultados de la simulación en el dominio del tiempo del modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID considerando el ciclo de conducción HWFET, se muestra en las gráficas de la Figura 60. Se puede notar que la potencia instantánea máxima es de 400 W. Además, la potencia generada tiene mayor densidad que las anteriores debido a que el ciclo de conducción HWFET no tiene paradas continuas y se mantiene una velocidad alta de conducción. Por esta razón, el valor RMS de la potencia regenerada correspondiente es de 84.5 W, siendo la mayor potencia regenerada de los cuatro ciclos de conducción estudiados.



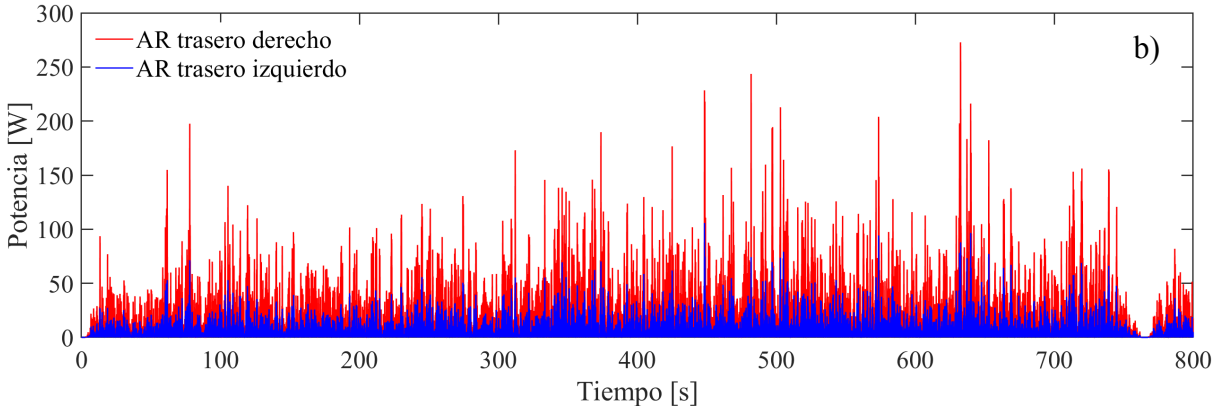


Figura 61. Potencia eléctrica instantánea regenerada en el modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID, considerando el ciclo de conducción HWFET producido en: a) el eje delantero y b) el eje trasero.

Capitulo 7

7. Conclusión

Al extender el análisis dinámico comparativo de la suspensión TID con la suspensión pasiva al modelo de medio y vehículo completo, los resultados mostraron una importante semejanza a nivel comparativo en los tres modelos analizados, manteniendo las mejoras dinámicas por parte de la suspensión TID sobre la pasiva. Con esto, se reafirma la aplicación de una aproximación fiable al considerar solo el modelo de un cuarto de vehículo basado en la simetría para la comparación entre dos o más sistemas de suspensión automotriz.

Posteriormente, el análisis dinámico comparativo entre la suspensión regenerativa electromecánica de brazo dentado y la suspensión pasiva tradicional, reveló una importante degradación por parte de la suspensión regenerativa en la aceleración de la carrocería, la deflexión de la suspensión y la carga dinámica del neumático. Por esta razón, se acopla el AR de brazo dentado a la suspensión TID reemplazando el inersor, con la intención de aprovechar el rendimiento dinámico que provee la suspensión TID. Una vez acoplado el AR en la suspensión TID, se realizó un análisis de sensibilidad paramétrica en la respuesta en frecuencia de la producción de potencia eléctrica mediante la simulación Monte Carlo sobre los parámetros del AR. Los resultados indicaron que la producción de potencia es altamente sensible a la resistencia interna R_i, a la relación de transmisión j, a la constante de acoplamiento electromecánico Bl y al radio del generador r_g.

En cuanto a la optimización de la suspensión AR-TID propuesta en este trabajo de investigación, se calcularon los índices del confort, de la deflexión de la suspensión, de la carga dinámica y de la potencia generada, tanto de la suspensión AR-TID como la suspensión AR mediante la aplicación de la norma H_2. Adicionalmente, se calculó el índice de rendimiento normalizado a partir de la combinación lineal de los índices de la suspensión AR-TID y la AR. La optimización se llevó a cabo gráficamente con la variación de la relación de transmisión, la resistencia externa e interna en todos los índices mencionados anteriormente. Primeramente, se optimizó el sistema AR-TID en la suspensión TID de Shen con la finalidad de analizar el

comportamiento dinámico de la suspensión AR-TID. Como resultado, se obtuvieron los siguientes valores óptimos: una relación de transmisión de 100 y una resistencia interna y externa de 30 y 65 ohms, respectivamente. Al comparar las respuestas en frecuencia de la suspensión AR-TID óptima con la suspensión TID y la suspensión pasiva, se nota una reducción considerable en la aceleración de la carrocería y la carga dinámica con la suspensión AR-TID en comparación de la pasiva, evitando el incremento de las mismas, que provoca la suspensión TID a altas frecuencias. Sin embargo, la respuesta de la deflexión de la suspensión es similar para el caso de la suspensión AR-TID y la pasiva.

En seguida, se optimiza el sistema AR-TID en la suspensión AR de Zhang utilizando principalmente el índice de rendimiento normalizado. Los parámetros óptimos obtenidos son los siguientes: una relación de transmisión de 60, una resistencia interna y externa de 10 y 35 ohms, respectivamente. Al comparar las respuestas en frecuencia de la suspensión AR-TID óptima con la suspensión AR y la suspensión pasiva, se aprecia una importante reducción de la deflexión de la suspensión y la carga dinámica en la suspensión AR-TID. En cuanto a la aceleración de la carrocería, la mejora es menos notoria. A pesar de que la suspensión AR-TID no es capaz de reducir la aceleración como lo hace la suspensión AR a bajas frecuencias, a mayores frecuencias la suspensión AR-TID evita las grandes amplitudes que alcanza la suspensión AR en su segunda frecuencia resonante. Por último, la potencia regenerada es enormemente mejorada con la suspensión AR-TID debido al gran incremento en el ancho de banda de captación de energía y una amplitud alta aunque menor que la potencia pico de la suspensión AR. Adicionalmente, se realizan las comparaciones de las respuestas dinámicas analizadas en el dominio del tiempo, con el fin de cuantificar la mejora de los valores RMS que es capaz de proveer la suspensión AR-TID. En comparación con la suspensión pasiva tradicional, la suspensión AR-TID reduce en un 18.14% la aceleración de la carrocería, en 23.69% la deflexión de la suspensión y 11.29% la carga dinámica. En cambio, en comparación con la suspensión AR, la suspensión AR-TID reduce en 50.34% la aceleración, en 23.97% la deflexión, en 50.05% la carga dinámica del neumático y aumenta la potencia regenerada en 733.32%. Con lo anterior, es evidente que la suspensión AR-TID es capaz de mejorar sustancialmente la suspensión regenerativa electromecánica existente,

incluso, supera el rendimiento dinámico de una suspensión pasiva tradicional sin la necesidad de un dispositivo activo o semiactivo, aprovechando solamente el efecto inercial del AR.

Finalmente, se realiza la simulación del modelo de vehículo completo con suspensión AR-TID considerando los ciclos de velocidad de conducción europeos y estadounidenses utilizados para evaluar el rendimiento del combustible, emisiones de partículas, rango de autonomía de vehículos eléctricos, entre otros, con el fin de calcular la potencia RMS que es capaz de regenerar con los cuatro ARs. Con el ciclo de conducción NEDC se obtuvo una potencia RMS total de 50.55 W, con el ciclo WLTP se regenera una potencia RMS de 63.23 W, considerando el ciclo FTP se regenera una potencia de 44.58 W y con el ciclo de conducción HWFET se genera una potencia RMS de 84.5 W. Basado en lo anterior, entre mayor sea la velocidad de conducción y mayor el grado de rugosidad de la carretera, se incrementa la regeneración de energía eléctrica. Adicionalmente, para poder aprovechar la potencia generada por los amortiguadores regenerativos se debe agregar un circuito de rectificación conectado a un estabilizador de voltaje y a un banco de super capacitores. De esta forma, la energía que se almacena en los capacitores se puede utilizar para recargar las baterías de un vehículo eléctrico.

Apéndice A. Deducción del radio equivalente del mecanismo de brazo dentado

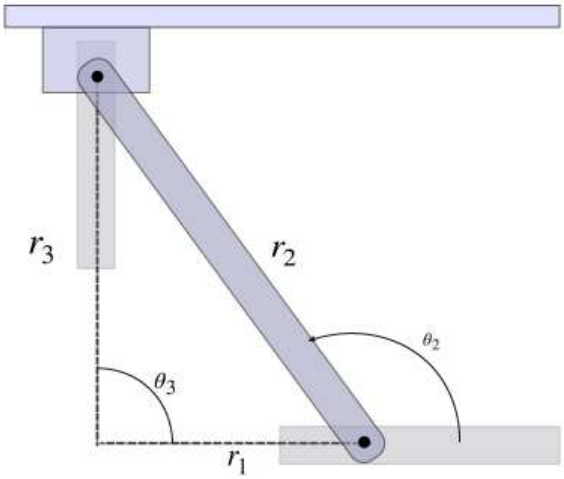


Figura 62. Análisis cinemático de un brazo del mecanismo de brazo dentado.
Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a la ecuación de cierre de circuito y álgebra compleja en mecanismos, se obtiene la siguiente ecuación de los tres eslabones que conforman la Figura 62:

$$r_1(t)e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2(t)} = r_3(t)e^{i\theta_3} \tag{A.1}$$

Donde r_2 representa el brazo del mecanismo, θ_2 el ángulo del brazo respecto a la horizontal y r_1 y r_3 representan las trayectorias de los extremos del brazo con sus respectivos ángulos.

Desarrollando la ecuación (A.1) se obtiene:

$$r_1(t)(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = r_3(t)(\cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3)) \tag{A.2}$$

Para el siguiente análisis de posición se consideran constantes las longitudes y ángulos de los eslabones y se sustituyen los ángulos conocidos en (A.2):

$$r_1(\cos(0) + i\sin(0)) + r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = r_3(\cos(90) + i\sin(90)) \tag{A.3}$$

Simplificando (A.3):

$$r_1 + r_2\cos(\theta_2) + ir_2\sin(\theta_2) = ir_3 \tag{A.4}$$

Analizando la parte real de (A.4) se obtiene:

$$r_1 = -\, r_2 \cos(\theta_2) \tag{A.5}$$

En la parte imaginaria se tiene que:

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \tag{A.6}$$

Sustituyendo (A.6) en (A.5) se obtiene:

$$r_1 = -\, r_2 \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right) \tag{A.7}$$

Mediante un proceso matemático se introduce el desplazamiento de la suspensión $d = (x_s - x_u)$ y la longitud inicial del eslabón r_{3ini} en la ecuación (A.7) para relacionar el movimiento de la suspensión con el desplazamiento del extremo inferior del brazo (r_2):

$$r_1 = r_2 \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_{3ini} - d}{r_2}\right)\right) \tag{A.8}$$

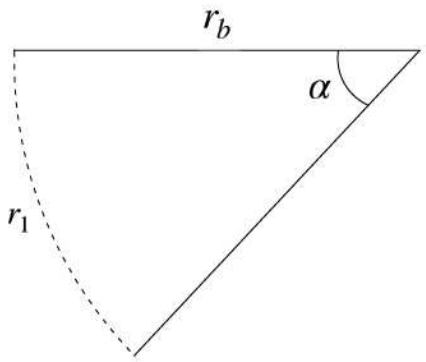


Figura 63. Conversión de movimiento del brazo
Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, de la Figura 63 se relaciona el movimiento del extremo inferior del brazo (r_1) con la rotación del volante de inercia (α) al cual se engancha, con la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{r_1}{r_b} \tag{A.9}$$

Donde (r_b) representa la distancia del centro del mecanismo al brazo.

Se sustituye la ecuación (A.8) en (A.9) y se introduce el valor inicial (r_{1ini}):

$$\alpha = \frac{r_2 \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_{3ini} - d}{r_2}\right)\right) - r_{1ini}}{r_b} \tag{A.10}$$

Debido a que los autores no especifican las medidas precisas del mecanismo de brazo dentado, se proponen los siguientes valores basado en la medidas generales de (R. Zhang, Wang, Al Shami, et al., 2018) con el fin de demostrar el radio equivalente: $\theta_{2ini} = 100°$, $r_2 = 0.05$ m y la carrera del AR es 0.03 m. Estos valores se introducen en las ecuaciones (A.5) y (A.6) para obtener los valores iniciales de r_{1ini} y r_{3ini}.

Por último, se programa la gráfica de la ecuación (A.10) en Matlab donde la variable independiente es d que va de 0 a 0.03 m. Cuando $d = 0$, el AR esta en completa extensión y al comprimir el dispositivo se ejerce una rotación en el volante de inercia (α). Donde la curva de relación de movimiento se aproxima con una recta de pendiente 0.033, el cual, es el valor del radio equivalente utilizado en los artículos sobre el mecanismo de brazo dentado.

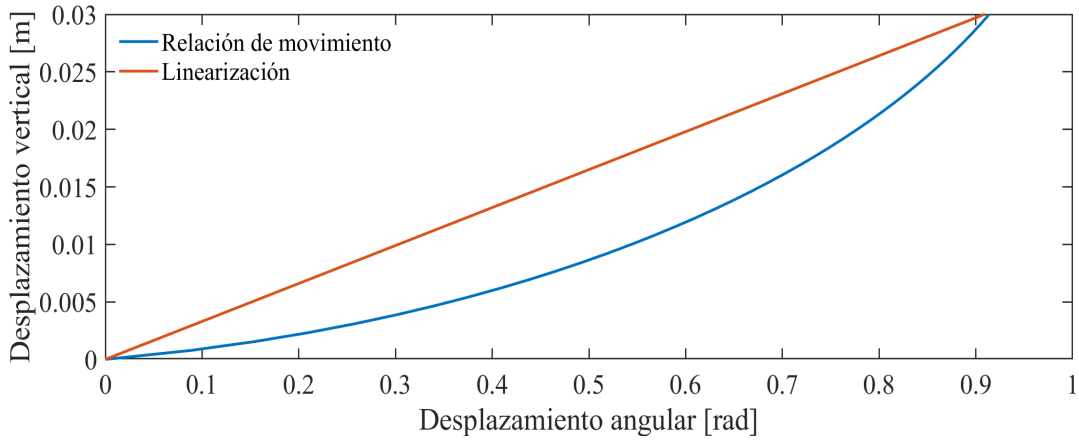


Figura 64. Relación de movimiento del mecanismo de brazo dentado.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 64 se puede observar una aproximación de la curva que se linearizó para obtener el radio equivalente utilizado como factor de conversión del movimiento oscilante bidireccional de la suspensión en una rotación unidireccional.

Apéndice B. Deducción de la masa equivalente

Realizando un análisis de energía cinética del AR electromecánico de brazo dentado se obtiene lo siguiente:

$$T = \frac{1}{2}m_{tp}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}J_{FW}\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}J_{am}\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}J_{pcr}\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}(4)(J_p + m_p r_p^2)\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}J_g\dot{\omega}_g^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\omega}_g^2 \qquad \text{(A.11)}$$

Donde cada término representa una parte móvil del AR electromecánico. El término $(1/2)(4)(J_p + m_p r_p^2)\dot{\omega}^2$ proviene de la aplicación del Teorema de Steiner a los cuatro engranes planetarios para obtener el momento de inercia rotacional respecto al eje del generador como sigue:

$$J_{pl} = J_p + m_p r_p^2 \qquad \text{(A.12)}$$

Siendo J_p el momento de inercia rotacional de un engrane planetario sobre su propio eje y r_p la distancia del eje del engrane sol al eje del engrane planetario.

Después la velocidad entre la masa suspendida y no suspendida de la suspensión se relaciona con la velocidad rotacional del volante de inercia del mecanismo de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{\dot{x}_s - \dot{x}_u}{r} \qquad \text{(A.13)}$$

Siendo r el radio equivalente obtenido en el Apéndice A.

Posteriormente, la velocidad rotacional del generador se expresa como sigue:

$$\omega_g = \omega j \qquad \text{(A.14)}$$

Donde j es el factor de amplificación de movimiento de la transmisión.

Mediante un ligero proceso matemático se sustituye (A.13) en (A.14) y esto a su vez en (A.11) resultando en:

$$T = \frac{1}{2}\left[m_{tp} + \frac{J_{FW} + J_{am} + J_{pcr} + 4(J_p + m_p r_p^2)}{r^2} + \frac{(J_g + J_s)j^2}{r^2}\right](\dot{x}_b - \dot{x}_w)^2 \qquad \text{A.15)}$$

Donde el término entre corchetes es lo que se conoce como masa equivalente en la literatura:

$$m_s = \left[m_{tp} + \frac{J_{FW} + J_{am} + J_{pcr} + 4(J_p + m_p r_p^2)}{r^2} + \frac{(J_g + J_s)j^2}{r^2}\right] \qquad \text{(A.16)}$$

Apéndice C. Deducción del amortiguamiento equivalente c_L

Por conservación de la energía, se igualan las siguientes energías de amortiguamiento:

$$P_{in} \cdot \eta_{tp} \cdot \eta_{pg} \cdot \eta_g = P_E \tag{A.17}$$

Donde η_{tp}, η_{pg} y η_g son las eficiencias mecánicas del plato superior, de la transmisión y del generador respectivamente. P_{in} es la energía del amortiguamiento total y P_E es la del amortiguamiento eléctrico debido al generador, las cuales se describen en la ecuación (A.18).

$$\begin{cases} P_{in} = \dfrac{1}{2} c_L (\dot{x}_b - \dot{x}_w)^2 \\ P_E = \dfrac{1}{2} c_R \omega_g^2 \end{cases} \tag{A.18}$$

De igual manera, ω_g es la velocidad de rotación definida en la ecuación (A.14) y c_R es el amortiguamiento rotacional definido como sigue:

$$c_R = \frac{k_e^2}{R_i + R_e} \tag{A.19}$$

Posteriormente, se obtiene c_L sustituyendo la ecuación (A.19) en (A.18) y a su vez en (A.17), produciendo la siguiente ecuación:

$$c_L = \frac{k_e^2 j^2}{r^2 \eta_{tp} \eta_{pg} \eta_g (R_i + R_e)} \tag{A.20}$$

Apéndice D. Coeficientes de las matrices para el análisis frecuencial de los sistemas de suspensión tanto pasivos como regenerativos

Suspension pasiva tradicional.

Coeficientes de la matriz (2x2):

$$\left\{ A_1 = (i\omega c_2) - \omega^2 m_s + k_2, \quad B_1 = (-i\omega c_2) - k_2, A_2 = (-i\omega c_2) - k_2, \quad B_2 = (i\omega c_2) - \omega^2 m_u + k_2 + k_t \right. \tag{A.26}$$

Coeficientes de la matriz de (4x4):

$$\begin{cases} A_1 = (-i\,\omega\,c_1 L_f) + (i\,\omega\,c_2 L_r) - k_1 L_f + k_2 L_r, B_1 = (i\,\omega\,c_1) + (i\,\omega\,c_2) - \omega^2 m_b + k_1 + k_2, C_1 = (-i\,\omega\,c_1) - k_1, D_1 = (-i\,\omega\,c_2) - k_2, A_2 = \\ -\omega^2 I_b - L_f((-i\,\omega\,c_1 L_f) - k_1 L_f) + L_r((i\,\omega\,c_2 L_r) + k_2 L_r), B_2 = -L_f((i\,\omega\,c_1) + k_1) + L_r((i\,\omega\,c_2) + k_2), C_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_1) - k_1), D_2 = \\ L_r((-i\,\omega\,c_2) - k_2), A_3 = (i\,\omega\,c_1 L_f) + k_1 L_f, B_3 = (-i\,\omega\,c_1) - k_1, C_3 = (i\,\omega\,c_2) - \omega^2 m_{wr} + k_2 + k_{tr}, D_3 = 0, A_4 = (-i\,\omega\,c_2 L_r) - k_2 L_r, \\ B_4 = (-i\,\omega\,c_2) - k_2, C_4 = 0, D_4 = (i\,\omega\,c_2) - \omega^2 m_{wr} + k_2 + k_{tr} \end{cases} \tag{A.27}$$

Coeficientes de la matriz (7x7):

$$\begin{cases} A_1 = (-i\,\omega\,c_2 L_d) + (-i\,\omega\,c_3 L_d) + (i\,\omega\,c_1 L_i) + (i\,\omega\,c_4 L_i) - k_2 L_d - k_3 L_d + k_1 L_i + k_4 L_i, B_1 = (-i\,\omega\,c_1 L_f) + (-i\,\omega\,c_2 L_f) + (i\,\omega\,c_3 L_t) \\ +(i\,\omega\,c_4 L_t) - k_1 L_f - k_2 L_f + k_3 L_t + k_4 L_t, C_1 = (i\,\omega\,c_1) + (i\,\omega\,c_2) + (i\,\omega\,c_3) + (i\,\omega\,c_4) - \omega^2 m_b + k_1 + k_2 + k_3 + k_4, D_1 = (-i\,\omega\,c_1) - \\ k_1, E_1 = (-i\,\omega\,c_2) - k_2, F_1 = (-i\,\omega\,c_4) - k_4, G_1 = (-i\,\omega\,c_3) - k_3, A_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_2 L_d) + (i\,\omega\,c_1 L_i) - k_2 L_d + k_1 L_i) + L_t((-i\,\omega\,c_3 L_d) \\ +(i\,\omega\,c_4 L_i) - k_3 L_d + k_4 L_i), B_2 = -\omega^2 I_b - L_f((-i\,\omega\,c_1 L_f) + (-i\,\omega\,c_2 L_f) - k_1 L_f - k_2 L_f) + L_t((i\,\omega\,c_3 L_t) + (i\,\omega\,c_4 L_t) + k_3 L_t + k_4 L_t), \\ C_2 = -L_f((i\,\omega\,c_1) + (i\,\omega\,c_2) + k_1 + k_2) + L_t((i\,\omega\,c_3) + (i\,\omega\,c_4) + k_3 + k_4), D_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_1) - k_1), E_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_2) - k_2), F_2 = \\ L_t((-i\,\omega\,c_4) - k_4), G_2 = L_t((-i\,\omega\,c_3) - k_3), A_3 = -\omega^2 I_p - L_d((-i\,\omega\,c_2 L_d) + (-i\,\omega\,c_3 L_d) - k_2 L_d - k_3 L_d) + L_i((i\,\omega\,c_1 L_i) + (i\,\omega\,c_4 L_i) \\ +k_1 L_i + k_4 L_i), B_3 = -L_d((-i\,\omega\,c_2 L_f) + (i\,\omega\,c_3 L_t) - k_2 L_f + k_3 L_t) + L_i((-i\,\omega\,c_1 L_f) + (i\,\omega\,c_4 L_t) - k_1 L_f + k_4 L_t), C_3 = -L_d((i\,\omega\,c_2) \\ +(i\,\omega\,c_3) + k_2 + k_3) + L_i((i\,\omega\,c_1) + (i\,\omega\,c_4) + k_1 + k_4), D_3 = L_i((-i\,\omega\,c_1) - k_1), E_3 = -L_d((-i\,\omega\,c_2) - k_2), F_3 = L_i((-i\,\omega\,c_4) - k_4), \\ G_3 = -L_d((-i\,\omega\,c_3) - k_3), A_4 = (-i\,\omega\,c_1 L_i) - k_1 L_i, B_4 = (i\,\omega\,c_1 L_f) + k_1 L_f, C_4 = (-i\,\omega\,c_1) - k_1, D_4 = (i\,\omega\,c_1) - \omega^2 m_{wfl} + k_1 + k_{tfl} \\ E_4 = 0, F_4 = 0, G_4 = 0, A_5 = (i\,\omega\,c_2 L_d) + k_2 L_d, B_5 = (i\,\omega\,c_2 L_f) + k_2 L_f, C_5 = (-i\,\omega\,c_2) - k_2, D_5 = 0, E_5 = (i\,\omega\,c_2) - \omega^2 m_{wfr} + k_2 \\ +k_{tfr}, F_5 = 0, G_5 = 0, A_6 = (i\,\omega\,c_3 L_d) + k_3 L_d, B_6 = (-i\,\omega\,c_3 L_t) - k_3 L_t, C_6 = (-i\,\omega\,c_3) - k_3, D_6 = 0, E_6 = 0, F_6 = 0, G_6 = (i\,\omega\,c_3) \\ -\omega^2 m_{wrr} + k_3 + k_{trr}, A_7 = (-i\,\omega\,c_4 L_i) - k_4 L_i, B_7 = (-i\,\omega\,c_4 L_t) - k_4 L_t, C_7 = (-i\,\omega\,c_4) - k_4, D_7 = 0, E_7 = 0, F_7 = (i\,\omega\,c_4) - \omega^2 m_{wrl} \\ +k_4 + k_{trl}, G_7 = 0 \end{cases} \tag{A.28}$$

Suspension TID:

Coeficientes de la matriz (3x3):

$$\begin{cases} A_1 = (-i\,\omega\,c_1) - k_2, B_1 = (i\,\omega\,c_1) - \omega^2 m_s + k_1 + k_2, C_1 = -k_1, A_2 = (i\,\omega\,c_1) - \omega^2 b\,e\,q + k_2, B_2 = (-i\,\omega\,c_1) - k_2, C_2 = \\ \omega^2 b\,e\,q, A_3 = \omega^2 b\,e\,q, B_3 = -k_1, C_3 = -\omega^2 b\,e\,q - m_u \omega^2 + k_1 + k_t \end{cases} \tag{A.29}$$

Coeficientes de la matriz (6x6):

$$\begin{cases} A_1 = (-i\,\omega\,c_f L_f) + (i\,\omega\,c_r L_r) - k_1 L_f - k_f L_f + k_2 L_r + k_r L_r, B_1 = (i\,\omega\,c_f) + (i\,\omega\,c_r) - \omega^2 m_b + k_1 + k_2 + k_f + k_r, C_1 = (-i\,\omega\,c_f) - k_f \\ D_1 = (-i\,\omega\,c_r) - k_r, E_1 = -k_1, F_1 = -k_2, A_2 = -\omega^2 I_b - L_f((-i\,\omega\,c_f L_f) - k_1 L_f - k_f L_f) + L_r((i\,\omega\,c_r L_r) + k_2 L_r + k_r L_r), B_2 = \\ -L_f((i\,\omega\,c_f) + k_1 + k_f) + L_r((i\,\omega\,c_r) + k_2 + k_r), C_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_f) - k_f), D_2 = L_r((-i\,\omega\,c_r) - k_r), E_2 = k_1 L_f, F_2 = -k_2 L_r \\ A_3 = (i\,\omega\,c_f L_f) + k_f L_f, B_3 = (-i\,\omega\,c_f) - k_f, C_3 = (i\,\omega\,c_f) - \omega^2 b_f + k_f, D_3 = 0, E_3 = \omega^2 b_f, F_3 = 0, A_4 = (-i\,\omega\,c_r L_r) - k_r L_r, B_4 = \\ (-i\,\omega\,c_r) - k_r, C_4 = 0, D_4 = (i\,\omega\,c_r) - \omega^2 b_r + k_r, E_4 = 0, F_4 = \omega^2 b_r, A_5 = k_1 L_f, B_5 = -k_1, C_5 = \omega^2 b_f, D_5 = 0, E_5 = -\omega^2 b_f \\ -m_{wf}\omega^2 + k_1 + k_{tf}, F_5 = 0, A_6 = -k_2 L_r, B_6 = -k_2, C_6 = 0, D_6 = \omega^2 b_r, E_6 = 0, F_6 = -\omega^2 b_r - m_{wr}\omega^2 + k_2 + k_{tr} \end{cases} \tag{A.30}$$

Coeficientes de la matriz (11x11):

$$
\begin{cases}
A_1 = k_1L_i + k_{fl}L_i - k_2L_d - k_{fr}L_d - k_3L_d - k_{rr}L_d + k_4L_i + k_{rl}L_i + (i\,\omega\,c_{fl}L_i) + (-i\,\omega\,c_{fr}L_d) + (-i\,\omega\,c_{rr}L_d) + (i\,\omega\,c_{rl}L_i) \\
B_1 = -k_1L_f - k_{fl}L_f - k_2L_f - k_{fr}L_f + k_3L_t + k_{rr}L_t + k_4L_t + k_{rl}L_t + (-i\,\omega\,c_{fl}L_f) + (-i\,\omega\,c_{fr}L_f) + (i\,\omega\,c_{rr}L_t) + (i\,\omega\,c_{rl}L_t) \\
C_1 = (i\,\omega\,c_{fl}) + (i\,\omega\,c_{fr}) + (i\,\omega\,c_{rl}) + (i\,\omega\,c_{rr}) - \omega^2 m_b + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_{fl} + k_{fr} + k_{rl} + k_{rr}, D_1 = (-i\,\omega\,c_{fl}) - k_{fl} \\
E_1 = (-i\,\omega\,c_{fr}) - k_{fr}, F_1 = (-i\,\omega\,c_{rl}) - k_{rl}, G_1 = (-i\,\omega\,c_{rr}) - k_{rr}, H_1 = -k_1, I_1 = -k_2, J_1 = -k_3, K_1 = -k_4, A_2 = \\
-L_f((-i\,\omega\,c_{fr}L_d) + (i\,\omega\,c_{fl}L_i) - k_2L_d - k_{fr}L_d + k_1L_i + k_{fl}L_i) + L_t((-i\,\omega\,c_{rr}L_d) + (i\,\omega\,c_{rl}L_i) - k_3L_d - k_{rr}L_d + k_4L_i + k_{rl}L_i) \\
B_2 = -\omega^2 I_b - L_f((-i\,\omega\,c_{fl}L_f) + (-i\,\omega\,c_{fr}L_f) - k_1L_f - k_2L_f - k_{fl}L_f - k_{fr}L_f) + L_t((i\,\omega\,c_{rl}L_t) + (i\,\omega\,c_{rr}L_t) + k_3L_t + k_4L_t \\
+k_{rl}L_t + k_{rr}L_t), C_2 = -L_f((i\,\omega\,c_{fl}) + (i\,\omega\,c_{fr}) + k_1 + k_2 + k_{fl} + k_{fr}) + L_t((i\,\omega\,c_{rl}) + (i\,\omega\,c_{rr}) + k_3 + k_4 + k_{rl} + k_{rr}), D_2 = \\
-L_f((-i\,\omega\,c_{fl}) - k_{fl}), E_2 = -L_f((-i\,\omega\,c_{fr}) - k_{fr}), F_2 = L_t((-i\,\omega\,c_{rl}) - k_{rl}), G_2 = L_t((-i\,\omega\,c_{rr}) - k_{rr}), H_2 = k_1L_f, I_2 = k_2L_f \\
J_2 = -k_3L_t, K_2 = -k_4L_t, A_3 = -\omega^2 I_p - L_d((-i\,\omega\,c_{fr}L_d) + (-i\,\omega\,c_{rr}L_d) - k_2L_d - k_3L_d - k_{fr}L_d - k_{rr}L_d) + L_i((i\,\omega\,c_{fl}L_i) \\
+(i\,\omega\,c_{rl}L_i) + k_1L_i + k_4L_i + k_{fl}L_i + k_{rl}L_i), B_3 = -L_d((-i\,\omega\,c_{fr}L_f) + (i\,\omega\,c_{rr}L_t) - k_2L_f - k_{fr}L_f + k_3L_t + k_{rr}L_t) + L_i((-i\,\omega \\
c_{fl}L_f) + (i\,\omega\,c_{rl}L_t) - k_1L_f - k_{fl}L_f + k_4L_t + k_{rl}L_t), C_3 = -L_d((i\,\omega\,c_{fr}) + (i\,\omega\,c_{rr}) + k_2 + k_3 + k_{fr} + k_{rr}) + L_i((i\,\omega\,c_{fl}) + \\
(i\,\omega\,c_{rl}) + k_1 + k_4 + k_{fl} + k_{rl}), D_3 = L_i((-i\,\omega\,c_{fl}) - k_{fl}), E_3 = -L_d((-i\,\omega\,c_{fr}) - k_{fr}), F_3 = L_i((-i\,\omega\,c_{rl}) - k_{rl}), G_3 = -L_d(\\
(-i\,\omega\,c_{rr}) - k_{rr}), H_3 = -k_1L_i, I_3 = k_2L_d, J_3 = k_3L_d, K_3 = -k_4L_i, A_4 = (-i\,\omega\,c_{fl}L_i) - k_{fl}L_i, B_4 = (i\,\omega\,c_{fl}L_f) + k_{fl}L_f, C_4 \\
= (-i\,\omega\,c_{fl}) - k_{fl}, D_4 = (i\,\omega\,c_{fl}) - \omega^2 b_{fl} + k_{fl}, E_4 = 0, F_4 = 0, G_4 = 0, H_4 = \omega^2 b_{fl}, I_4 = 0, J_4 = 0, K_4 = 0, A_5 = (i\,\omega\,c_{fr}L_d) \\
+k_{fr}L_d, B_5 = (i\,\omega\,c_{fr}L_f) + k_{fr}L_f, C_5 = (-i\,\omega\,c_{fr}) - k_{fr}, D_5 = 0, E_5 = (i\,\omega\,c_{fr}) - \omega^2 b_{fr} + k_{fr}, F_5 = 0, G_5 = 0, H_5 = 0, I_5 = \omega^2 \\
b_{fr}, J_5 = 0, K_5 = 0, A_6 = (i\,\omega\,c_{rr}L_d) + k_{rr}L_d, B_6 = (-i\,\omega\,c_{rr}L_t) - k_{rr}L_t, C_6 = (-i\,\omega\,c_{rr}) - k_{rr}, D_6 = 0, E_6 = 0, F_6 = 0, \\
G_6 = (i\,\omega\,c_{rr}) - \omega^2 b_{rr} + k_{rr}, H_6 = 0, I_6 = 0, J_6 = \omega^2 b_{rr}, K_6 = 0, A_7 = (-i\,\omega\,c_{rl}L_i) - k_{rl}L_i, B_7 = (-i\,\omega\,c_{rl}L_t) - k_{rl}L_t, C_7 = \\
(-i\,\omega\,c_{rl}) - k_{rl}, D_7 = 0, E_7 = 0, F_7 = (i\,\omega\,c_{rl}) - \omega^2 b_{rl} + k_{rl}, G_7 = 0, H_7 = 0, I_7 = 0, J_7 = 0, K_7 = \omega^2 b_{rl}, A_8 = -k_1L_i, B_8 = k_1L_f \\
C_8 = -k_1, D_8 = \omega^2 b_{fl}, E_8 = 0, F_8 = 0, G_8 = 0, H_8 = -b_{fl}\omega^2 - m_{wfl}\omega^2 + k_1 + k_{tfl}, I_8 = 0, J_8 = 0, K_8 = 0, A_9 = k_2L_d, \\
B_9 = k_2L_f, C_9 = -k_2, D_9 = 0, E_9 = \omega^2 b_{fr}, F_9 = 0, G_9 = 0, H_9 = 0, I_9 = -\omega^2 b_{fr} - m_{wfr}\omega^2 + k_2 + k_{tfr}, J_9 = 0, K_9 = 0 \\
A_{10} = k_3L_d, B_{10} = -k_3L_t, C_{10} = -k_3, D_{10} = 0, E_{10} = 0, F_{10} = 0, G_{10} = \omega^2 b_{rr}, H_{10} = 0, I_{10} = 0, J_{10} = -\omega^2 b_{rr} - m_{wrr}\omega^2 \\
+k_3 + k_{trr}, K_{10} = 0, A_{11} = -k_4L_i, B_{11} = -k_4L_t, C_{11} = -k_4, D_{11} = 0, E_{11} = 0, F_{11} = \omega^2 b_{rl}, G_{11} = 0, H_{11} = 0, I_{11} = 0, \\
J_{11} = 0, K_{11} = -\omega^2 b_{rl} - m_{wrl}\omega^2 + k_4 + k_{trl}
\end{cases}
\tag{A.31}
$$

Suspension con AR:

Coeficientes de la matriz (3x3):

$$
\begin{cases}
A_1 = i\,\omega\,c_2 + i\,\omega\,c_{L1} - \omega^2 b - \omega^2 m_s + k_2, B_1 = -i\,\omega\,c_2 - i\,\omega\,c_{L1} + \omega^2 b - k_2, C_1 = -\dfrac{B_l \kappa\, r_g}{R_e r}, A_2 = -i\,\omega\,c_2 - i\,\omega\,c_{L1} + \omega^2 b - k_2, \\
B_2 = i\,\omega\,c_1 + i\,\omega\,c_2 + i\,\omega\,c_{L1} - \omega^2 b - \omega^2 m_u + k_t + k_2, C_2 = \dfrac{B_l \kappa\, r_g}{R_e r}, A_3 = -i\,\omega\,k_e\dfrac{\kappa}{r}, B_3 = i\,\omega\,k_e\dfrac{\kappa}{r}, C_3 = i\,\omega\,\dfrac{L_e}{R_e} + \dfrac{R_i + R_e}{R_e}
\end{cases}
\tag{A.32}
$$

Coeficientes de la matriz (6x6):

$$
\begin{cases}
A_1 = -i\,\omega\,c_{Lf}L_f - i\,\omega\,c_fL_f + \omega^2 b_fL_f + i\,\omega\,c_{Lr}L_r + i\,\omega\,c_rL_r - \omega^2 b_rL_r - k_1L_f + k_2L_r, B_1 = i\,\omega\,c_{Lf} + i\,\omega\,c_{Lr} + i\,\omega\,c_f + i\,\omega\,c_r - \omega^2 b_f \\
-\omega^2 b_r - \omega^2 m_b + k_1 + k_2, C_1 = -i\,\omega\,c_{Lf} - i\,\omega\,c_f + \omega^2 b_f - k_1, D_1 = -i\,\omega\,c_{Lr} - i\,\omega\,c_r + \omega^2 b_r - k_2, E_1 = -\dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, F_1 = - \\
\dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, A_2 = -\omega^2 I_b - L_f((-i\,\omega\,c_{Lf}L_f - i\,\omega\,c_fL_f + \omega^2 b_fL_f - k_1L_f)) + L_r(i\,\omega\,c_{Lr}L_r + i\,\omega\,c_rL_r - \omega^2 b_rL_r + k_2L_r), B_2 = -L_f(i\,\omega \\
c_{Lf} + i\,\omega\,c_f - \omega^2 b_f + k_1) + L_r(i\,\omega\,c_{Lr} + i\,\omega\,c_r - \omega^2 b_r + k_2), C_2 = -L_f(-i\,\omega\,c_{Lf} - i\,\omega\,c_f + \omega^2 b_f - k_1), D_2 = L_r(-i\,\omega\,c_{Lr} - i\,\omega\,c_r + \\
\omega^2 b_r - k_2), E_2 = L_f\dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, F_2 = -L_r\dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, A_3 = i\,\omega\,c_{Lf}L_f + i\,\omega\,c_fL_f - \omega^2 b_fL_f + k_1L_f, B_3 = -i\,\omega\,c_{Lf} \\
-i\,\omega\,c_f + \omega^2 b_f - k_1, C_3 = i\,\omega\,c_{Lf} + i\,\omega\,c_f + i\,\omega\,c_{tf} - \omega^2 b_f - \omega^2 m_{wf} + k_1 + k_{tf}, D_3 = 0, E_3 = \dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, F_3 = 0, A_4 = -i\,\omega\,c_{Lr}L_r - \\
i\,\omega\,c_rL_r + \omega^2 b_rL_r - k_2L_r, B_4 = -i\,\omega\,c_{Lr} - i\,\omega\,c_r + \omega^2 b_r - k_2, C_4 = 0, D_4 = i\,\omega\,c_{Lr} + i\,\omega\,c_r + i\,\omega\,c_{tf} - \omega^2 b_r - \omega^2 m_{wr} + k_2 + k_{tr}, \\
E_4 = 0, F_4 = \dfrac{B_l r_g r\,el}{R_e r}, A_5 = i\,\omega\,k_e\dfrac{r\,el\,L_f}{r}, B_5 = -i\,\omega\,k_e\dfrac{r\,el}{r}, C_5 = i\,\omega\,k_e\dfrac{r\,el}{r}, D_5 = 0, E_5 = i\,\omega\,\dfrac{L\,e}{R_e} + \dfrac{R_i + R_e}{R_e}, F_5 = 0, A_6 = -i\,\omega\,k_e \\
\dfrac{r\,el\,L_r}{r}, B_6 = -i\,\omega\,k_e\dfrac{r\,el}{r}, C_6 = 0, D_6 = i\,\omega\,k_e\dfrac{r\,el}{r}, E_6 = 0, F_6 = i\,\omega\,\dfrac{L\,e}{R_e} + \dfrac{R_i + R_e}{R_e}
\end{cases}
\tag{A.33}
$$

Coeficientes de la matriz (11x11):

$$
\begin{cases}
A_1 = (-m_b - 4m_s)\omega^2 + i(4C_L + C_{sfl} + C_{sfr} + C_{srl} + C_{srr})\omega + K_{sfr} + K_{srl} + K_{srr} + K_{sfl}, B_1 = -2m_s(l_b - l_f)\omega^2 + i((2C_L + C_{srl} \\
+C_{srr})l_b - 2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfl} + \frac{1}{2}C_{sfr}))l_f)\omega + (K_{srl} + K_{srr})l_b - l_f(K_{sfl} + K_{sfr}), C_1 = -2m_s(l_l - l_r)\omega^2 + i((2C_L + C_{sfl} + C_{srl})l_l - \\
2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfr} + \frac{1}{2}C_{srr}))l_r)\omega + (K_{sfl} + K_{srl})l_l - l_r(K_{sfr} + K_{srr}), D_1 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{sfr} + C_L) - K_{sfr}, E_1 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{srr} + \\
C_L) - K_{srr}, F_1 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{srl} + C_L) - K_{srl}, G_1 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{sfl} + C_L) - K_{sfl}, H_1 = \frac{B r_g \kappa}{R r}, I_1 = \frac{B r_g \kappa}{R r}, J_1 = \frac{B r_g \kappa}{R r}, K_1 = \\
\frac{B r_g \kappa}{R r}, A_2 = -2m_s(l_b - l_f)\omega^2 + i((2C_L + C_{srl} + C_{srr})l_b - (2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfl} + \frac{1}{2}C_{sfr}))l_f)\omega + (K_{srl} + K_{srr})l_b - l_f(K_{sfl} + K_{sfr}), B_2 = \\
(-2l_b^2 m_s - 2l_f^2 m_s - I_a)\omega^2 + i((2C_L + C_{srl} + C_{srr})l_b^2 + 2l_f^2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfl} + \frac{1}{2}C_{sfr}))\omega + (K_{srl} + K_{srr})l_b^2 + l_f^2(K_{sfl} + K_{sfr}), C_2 = \\
-m_s(l_l - l_r)(l_b - l_f)\omega^2 + i(((C_L + C_{srl})l_l - l_r(C_{srr} + C_L))l_b - ((C_{sfl} + C_L)l_l - l_r(C_{sfr} + C_L))l_f)\omega + (K_{srl}l_l - K_{srr}l_r)l_b - l_f(K_{sfl}l_l - \\
K_{sfr}l_r), D_2 = -l_f(\omega^2 m_s - i\omega(C_{sfr} + C_L) - K_{sfr}), E_2 = l_b(\omega^2 m_s - i\omega(C_{srr} + C_L) - K_{srr}), F_2 = l_b(\omega^2 m_s - i\omega(C_L + C_{srl}) - K_{srl}), \\
G_2 = -l_f(\omega^2 m_s - i\omega(C_{sfl} + C_L) - K_{sfl}), H_2 = -l_f\frac{B r_g \kappa}{R r}, I_2 = l_b\frac{B r_g \kappa}{R r}, J_2 = l_b\frac{B r_g \kappa}{R r}, K_2 = -l_f\frac{B r_g \kappa}{R r}, A_3 = -2m_s(l_l - l_r)\omega^2 + \\
i((2C_L + C_{sfl} + C_{srl})l_l - (2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfr} + \frac{1}{2}C_{srr}))l_r)\omega + (K_{sfl} + K_{srl})l_l - l_r(K_{sfr} + K_{srr}), B_3 = -m_s(l_l - l_r)(l_b - l_f)\omega^2 + i((C_L + \\
C_{srl})l_l - l_r(C_{srr} + C_L))l_b - ((C_{sfl} + C_L)l_l - l_r(C_{sfr} + C_L))l_f)\omega + (K_{srl}l_l - K_{srr}l_r)l_b - l_f(K_{sfl}l_l - K_{sfr}l_r), C_3 = (-2l_l^2 m_s - 2l_r^2 m_s - \\
I_b)\omega^2 + i((2C_L + C_{sfl} + C_{srl})l_l^2 + 2l_r^2(C_L + \frac{1}{2}C_{sfr} + \frac{1}{2}C_{srr}))\omega + (K_{sfl} + K_{srl})l_l^2 + l_r^2(K_{sfr} + K_{srr}), D_3 = -l_r(\omega^2 m_s - i\omega(C_{sfr} + \\
C_L) - K_{sfr}), E_3 = -l_r(\omega^2 m_s - i\omega(C_{srr} + C_L) - K_{srr}), F_3 = l_l(\omega^2 m_s - i\omega(C_L + C_{srl}) - K_{srl}), G_3 = l_l(\omega^2 m_s - i\omega(C_{sfl} + C_L) - \\
K_{sfl}), H_3 = -l_r\frac{B r_g \kappa}{R r}, I_3 = -l_r\frac{B r_g \kappa}{R r}, J_3 = l_l\frac{B r_g \kappa}{R r}, K_3 = l_l\frac{B r_g \kappa}{R r}, A_4 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{sfr} + C_L) - K_{sfr}, B_4 = -\omega^2 m_s l_f + i\omega(C_{sfr} \\
+C_L)l_f + K_{sfr}l_f, C_4 = -\omega^2 m_s l_r + i\omega(C_{sfr} + C_L)l_r + K_{sfr}l_r, D_4 = -\omega^2 m_{fr} - \omega^2 m_s + i\omega(C_{sfr} + C_L) + K_{sfr} + i\omega C_{tfr} + K_{tfr}, \\
E_4 = 0, F_4 = 0, G_4 = 0, H_4 = -\frac{B r_g \kappa}{R r}, I_4 = 0, J_4 = 0, K_4 = 0, A_5 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{srr} + C_L) - K_{srr}, B_5 = \omega^2 m_s l_b - i\omega(C_{srr} + C_L)l_b \\
-K_{srr}l_b, C_5 = -\omega^2 m_s l_r + i\omega(C_{srr} + C_L)l_r + K_{srr}l_r, D_5 = 0, E_5 = -\omega^2 m_{rr} - \omega^2 m_s + i\omega(C_{srr} + C_L) + K_{srr} + i\omega C_{trr} + K_{trr}, F_5 \\
= 0, G_5 = 0, H_5 = 0, I_5 = -\frac{B r_g \kappa}{R r}, J_5 = 0, K_5 = 0, A_6 = \omega^2 m_s - i\omega(C_L + C_{srl}) - K_{srl}, B_6 = \omega^2 m_s l_b - i\omega(C_L + C_{srl})l_b - K_{srl}l_b, \\
C_6 = \omega^2 m_s l_l - i\omega(C_L + C_{srl})l_l - K_{srl}l_l, D_6 = 0, E_6 = 0, F_6 = -\omega^2 m_{rl} - \omega^2 m_s + i\omega(C_L + C_{srl}) + K_{srl} + i\omega C_{trl} + K_{trl}, G_6 = 0, \\
H_6 = 0, I_6 = 0, J_6 = -\frac{B r_g \kappa}{R r}, K_6 = 0, A_7 = \omega^2 m_s - i\omega(C_{sfl} + C_L) - K_{sfl}, B_7 = -\omega^2 m_s l_f + i\omega(C_{sfl} + C_L)l_f + K_{sfl}l_f, C_7 = \omega^2 m_s l_l \\
-i\omega(C_{sfl} + C_L)l_l - K_{sfl}l_l, D_7 = 0, E_7 = 0, F_7 = 0, G_7 = -\omega^2 m_{fl} - \omega^2 m_s + i\omega(C_{sfl} + C_L) + K_{sfl} + i\omega C_{tfl} + K_{tfl}, H_7 = 0, I_7 = 0; \\
J_7 = 0, K_7 = -\frac{B r_g \kappa}{R r}, A_8 = -i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, B_8 = i\omega k_e\frac{\kappa l_f}{r}, C_8 = i\omega k_e\frac{\kappa l_r}{r}, D_8 = i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, E_8 = 0, F_8 = 0, G_8 = 0, H_8 = i\omega\frac{L_e}{R} + \frac{R + R_e}{R}; \\
I_8 = 0, J_8 = 0, K_8 = 0, A_9 = -i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, B_9 = -i\omega k_e\frac{\kappa l_b}{r}, C_9 = i\omega k_e\frac{\kappa l_r}{r}, D_9 = 0, E_9 = i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, F_9 = 0, G_9 = 0, H_9 = 0, I_9 = i\omega\frac{L_e}{R} \\
+\frac{R + R_e}{R}, J_9 = 0, K_9 = 0, A_{10} = -i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, B_{10} = -i\omega k_e\frac{\kappa l_b}{r}, C_{10} = -i\omega k_e\frac{\kappa l_l}{r}, D_{10} = 0, E_{10} = 0, F_{10} = i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, G_{10} = 0, H_{10} = \\
0, I_{10} = 0, J_{10} = i\omega\frac{L_e}{R} + \frac{R + R_e}{R}, K_{10} = 0, A_{11} = -i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, B_{11} = i\omega k_e\frac{\kappa l_f}{r}, C_{11} = -i\omega k_e\frac{\kappa l_l}{r}, D_{11} = 0, E_{11} = 0, F_{11} = 0; G_{11} \\
= i\omega k_e\frac{\kappa}{r}, H_{11} = 0, I_{11} = 0, J_{11} = 0, K_{11} = i\omega\frac{L_e}{R} + \frac{R + R_e}{R}
\end{cases}
\tag{A.34}
$$

Suspension con AR-TID:

Coeficientes de la matriz (4x4):

$$\begin{cases} A_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_1 - k_2, B_1 = (1i)\cdot\omega\cdot c_1 - \omega^2\cdot m_s + k_1 + k_2, C_1 = -k_1, D_1 = 0, A_2 = (1i)\cdot\omega\cdot c_1 + (1i)\cdot\omega\cdot c_L - \omega^2\cdot b_{eq} + k_2, \\ B_2 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_1 - k_2, C_2 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_L + \omega^2\cdot b_{eq}, D_2 = -\dfrac{B_l\cdot rel\cdot r_g}{R_e\cdot r}, A_3 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_L + \omega^2\cdot b_{eq}, B_3 = -k_1, C_3 = (1i) \\ \cdot\omega\cdot c_L - \omega^2\cdot b_{eq} - \omega^2\cdot m_u + k_1 + k_t, D_3 = \dfrac{B_l\cdot rel\cdot r_g}{R_e\cdot r}, A_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\dfrac{rel}{r}, B_4 = 0, C_4 = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\dfrac{rel}{r}, D_4 = (1i)\cdot\omega \\ \cdot\dfrac{L_e}{R_e} + \dfrac{R_i + R_e}{R_e} \end{cases} \tag{A.35}$$

Coeficientes de la matriz (8x8):

$$\begin{cases} A_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_f\cdot L_f + (1i)\cdot\omega\cdot c_r\cdot L_r - k_1\cdot L_f - k_f\cdot L_f + k_2\cdot L_r + k_r\cdot L_r, B_1 = (1i)\cdot\omega\cdot c_f + (1i)\cdot\omega\cdot c_r - \omega^2\cdot m_b + k_1 + k_2 + k_f \\ +k_r, C_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_f - k_f, D_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_r - k_r, E_1 = -k_1, F_1 = -k_2, G_1 = 0, H_1 = 0, A_2 = -\omega^2\cdot I_b - L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_f\cdot L_f \\ -k_1\cdot L_f - k_f\cdot L_f) + L_r\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_r\cdot L_r + k_2\cdot L_r + k_r\cdot L_r), B_2 = -L_f\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_f + k_1 + k_f) + L_r\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_r + k_2 + k_r), C_2 = \\ -L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_f - k_f), D_2 = L_r\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_r - k_r), E_2 = k_1\cdot L_f, F_2 = -k_2\cdot L_r, G_2 = 0, H_2 = 0, A_3 = (1i)\cdot\omega\cdot c_f\cdot L_f + k_f\cdot L_f, \\ B_3 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_f - k_f, C_3 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lf} + (1i)\cdot\omega\cdot c_f - \omega^2\cdot b_f + k_f, D_3 = 0, E_3 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lf} + \omega^2\cdot b_f, F_3 = 0, G_3 = - \\ \dfrac{B_l\cdot r_g\cdot rel}{R_e\cdot r}, H_3 = 0, A_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_r\cdot L_r - k_r\cdot L_r, B_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_r - k_r, C_4 = 0, D_4 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lr} + (1i)\cdot\omega\cdot c_r - \omega^2\cdot b_r + k_r; \\ E_4 = 0, F_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lr} + \omega^2\cdot b_r, G_4 = 0, H_4 = -\dfrac{B_l\cdot r_g\cdot rel}{R_e\cdot r}, A_5 = k_1\cdot L_f, B_5 = -k_1, C_5 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lf} + \omega^2\cdot b_f, D_5 = 0; \\ E_5 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lf} - \omega^2\cdot b_f - \omega^2\cdot m_{wf} + k_1 + k_{tf}, F_5 = 0, G_5 = \dfrac{B_l\cdot r_g\cdot rel}{R_e\cdot r}, H_5 = 0, A_6 = -k_2\cdot L_r, B_6 = -k_2, C_6 = 0, D_6 = (-1i)\cdot \\ \omega\cdot c_{Lr} + \omega^2\cdot b_r, E_6 = 0, F_6 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lr} - \omega^2\cdot b_r - \omega^2\cdot m_{wr} + k_2 + k_{tr}, G_6 = 0, H_6 = \dfrac{B_l\cdot r_g\cdot rel}{R_e\cdot r}, A_7 = 0, B_7 = 0, C_7 = (-1i)\cdot\omega \\ \cdot k_e\cdot\dfrac{rel}{r}, D_7 = 0, E_7 = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\dfrac{rel}{r}, F_7 = 0, G_7 = \dfrac{R_i + R_e}{R_e} + (1i)\cdot\omega\cdot\dfrac{L_e}{R_e} \end{cases} \tag{A.36}$$

Coeficientes de la matriz (15x15):

$$\begin{cases} A_1 = k_1\cdot L_i + k_{fl}\cdot L_i - k_2\cdot L_d - k_{fr}\cdot L_d - k_3\cdot L_d - k_{rr}\cdot L_d + k_4\cdot L_i + k_{rl}\cdot L_i + (1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_i + (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_d + (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} \\ \cdot L_d + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_i, B_1 = -k_1\cdot L_f - k_{fl}\cdot L_f - k_2\cdot L_f - k_{fr}\cdot L_f + k_3\cdot L_t + k_{rr}\cdot L_t + k_4\cdot L_t + k_{rl}\cdot L_t + (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_f + (-1i) \\ \cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_f + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_t + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_t, C_1 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} - \omega^2\cdot m_b + k_1 + k_2 \\ +k_3 + k_4 + k_{fl} + k_{fr} + k_{rl} + k_{rr}, D_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} - k_{fl}, E_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} - k_{fr}, F_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} - k_{rl}, G_1 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} \\ -k_{rr}, H_1 = -k_1, I_1 = -k_2, J_1 = -k_3, K_1 = -k_4, L_1 = 0, M_1 = 0, N_1 = 0, O_1 = 0, A_2 = -L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_d + (1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_i - \\ k_2\cdot L_d - k_{fr}\cdot L_d + k_1\cdot L_i + k_{fl}\cdot L_i) + L_t\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_d + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_i - k_3\cdot L_d - k_{rr}\cdot L_d + k_4\cdot L_i + k_{rl}\cdot L_i), B_2 = -\omega^2 \\ \cdot I_b - L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_f + (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_f - k_1\cdot L_f - k_2\cdot L_f - k_{fl}\cdot L_f - k_{fr}\cdot L_f) + L_t\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_t + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_t \\ +k_3\cdot L_t + k_4\cdot L_t + k_{rl}\cdot L_t + k_{rr}\cdot L_t), C_2 = -L_f\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} + k_1 + k_2 + k_{fl} + k_{fr}) + L_t\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} + (1i)\cdot\omega \\ \cdot c_{rr} + k_3 + k_4 + k_{rl} + k_{rr}), D_2 = -L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} - k_{fl}), E_2 = -L_f\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} - k_{fr}), F_2 = L_t\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} - k_{rl}), G_2 \\ = L_t\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} - k_{rr}), H_2 = k_1\cdot L_f, I_2 = k_2\cdot L_f, J_2 = -k_3\cdot L_t, K_2 = -k_4\cdot L_t, L_2 = 0, M_2 = 0, N_2 = 0, O_2 = 0, A_3 = -\omega^2\cdot I_p \\ -L_d\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_d + (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_d - k_2\cdot L_d - k_3\cdot L_d - k_{fr}\cdot L_d - k_{rr}\cdot L_d) + L_i\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_i + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_i + k_1\cdot \\ L_i + k_4\cdot L_i + k_{fl}\cdot L_i + k_{rl}\cdot L_i), B_3 = -L_d\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_f + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_t - k_2\cdot L_f - k_{fr}\cdot L_f + k_3\cdot L_t + k_{rr}\cdot L_t) + L_i\cdot((-1i) \\ \cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_f + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_t - k_1\cdot L_f - k_{fl}\cdot L_f + k_4\cdot L_t + k_{rl}\cdot L_t), C_3 = -L_d\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} + k_2 + k_3 + k_{fr} + k_{rr}) \\ +L_i\cdot((1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} + k_1 + k_4 + k_{fl} + k_{rl}), D_3 = L_i\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} - k_{fl}), E_3 = -L_d\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} - k_{fr}), F_3 = L_i \\ \cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} - k_{rl}), G_3 = -L_d\cdot((-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} - k_{rr}), H_3 = -k_1\cdot L_i, I_3 = k_2\cdot L_d, J_3 = k_3\cdot L_d, K_3 = -k_4\cdot L_i, L_3 = 0, M_3 = 0, N_3 \\ = 0, O_3 = 0, A_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_i - k_{fl}\cdot L_i, B_4 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{fl}\cdot L_f + k_{fl}\cdot L_f, C_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fl} - k_{fl}, D_4 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfl} + (1i)\cdot \\ \omega\cdot c_{fl} - \omega^2\cdot b_{fl} + k_{fl}, E_4 = 0, F_4 = 0, G_4 = 0, H_4 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfl} + \omega^2\cdot b_{fl}, I_4 = 0, J_4 = 0, K_4 = 0, L_4 = -B_l\cdot r_g\cdot\dfrac{rel}{R_e\cdot r}, M_4 = 0 \\ N_4 = 0, O_4 = 0, A_5 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_d + k_{fr}\cdot L_d, B_5 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{fr}\cdot L_f + k_{fr}\cdot L_f, C_5 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} - k_{fr}, D_5 = 0, E_5 = (1i)\cdot\omega\cdot \\ c_{Lfr} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{fr} - \omega^2\cdot b_{fr} + k_{fr}, F_5 = 0, G_5 = 0, H_5 = 0, I_5 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfr} + \omega^2\cdot b_{fr}, J_5 = 0, K_5 = 0, L_5 = 0, M_5 = -B_l\cdot r_g\cdot \\ \dfrac{rel}{R_e\cdot r}, N_5 = 0, O_5 = 0, A_6 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_d + k_{rr}\cdot L_d, B_6 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr}\cdot L_t - k_{rr}\cdot L_t, C_6 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} - k_{rr}, D_6 = 0, E_6 = \\ 0, F_6 = 0, G_6 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrr} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rr} - \omega^2\cdot b_{rr} + k_{rr}, H_6 = 0, I_6 = 0, J_6 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrr} + \omega^2\cdot b_{rr}, K_6 = 0, L_6 = 0, M_6 = 0 \\ , N_6 = -B_l\cdot r_g\cdot\dfrac{rel}{R_e\cdot r}, O_6 = 0, A_7 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_i - k_{rl}\cdot L_i, B_7 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl}\cdot L_t - k_{rl}\cdot L_t, C_7 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} - k_{rl}, D_7 = 0; \end{cases} \tag{A.37}$$

$$
\begin{cases}
E_7 = 0, F_7 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrl} + (1i)\cdot\omega\cdot c_{rl} - \omega^2\cdot b_{rl} + k_{rl}, G_7 = 0, H_7 = 0, I_7 = 0, J_7 = 0, K_7 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrl} + \omega^2\cdot b_{rl}, L_7 = 0, M_7 = \\
0, N_7 = 0, O_7 = -B_l\cdot r_g\cdot\frac{rel}{R_e\cdot r}, A_8 = -k_1\cdot L_i, B_8 = k_1\cdot L_f, C_8 = -k_1, D_8 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfl} + \omega^2\cdot b_{fl}, E_8 = 0, F_8 = 0, G_8 = 0, H_8 = \\
(1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfl} - \omega^2\cdot b_{fl} - \omega^2\cdot m_{wfl} + k_1 + k_{tfl}, I_8 = 0, J_8 = 0, K_8 = 0, L_8 = B_l\cdot r_g\cdot\frac{rel}{R_e\cdot r}, M_8 = 0, N_8 = 0, O_8 = 0, A_9 = k_2\cdot L_d, B_9 = \\
k_2\cdot L_f, C_9 = -k_2, D_9 = 0, E_9 = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfr} + \omega^2\cdot b_{fr}, F_9 = 0, G_9 = 0, H_9 = 0, I_9 = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lfr} - \omega^2\cdot b_{fr} - \omega^2\cdot m_{wfr} + k_2 + \\
k_{tfr}, J_9 = 0, K_9 = 0, L_9 = 0, M_9 = B_l\cdot r_g\cdot\frac{rel}{R_e\cdot r}, N_9 = 0, O_9 = 0, A_{10} = k_3\cdot L_d, B_{10} = -k_3\cdot L_t, C_{10} = -k_3, D_{10} = 0, E_{10} = 0, F_{10} = 0, \\
G_{10} = -i\omega\cdot c_{Lrr} + \omega^2\cdot b_{rr}, H_{10} = 0, I_{10} = 0, J_{10} = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrr} - \omega^2\cdot b_{rr} - \omega^2\cdot m_{wrr} + k_3 + k_{trr}, K_{10} = 0, L_{10} = 0, M_{10} = 0, N_{10} \\
= B_l\cdot r_g\cdot\frac{rel}{R_e\cdot r}, O_{10} = 0, A_{11} = -k_4\cdot L_i, B_{11} = -k_4\cdot L_t, C_{11} = -k_4, D_{11} = 0, E_{11} = 0, F_{11} = (-1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrl} + \omega^2\cdot b_{rl}, G_{11} = 0 \\
H_{11} = 0, I_{11} = 0, J_{11} = 0, K_{11} = (1i)\cdot\omega\cdot c_{Lrl} - \omega^2\cdot b_{rl} - \omega^2\cdot m_{wrl} + k_4 + k_{trl}, L_{11} = 0, M_{11} = 0, N_{11} = 0, O_{11} = B_l\cdot r_g\cdot \\
\frac{rel}{R_e\cdot r}, A_{12} = 0, B_{12} = 0, C_{12} = 0, D_{12} = (-1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, E_{12} = 0, F_{12} = 0, G_{12} = 0, H_{12} = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, I_{12} = 0, J_{12} = 0 \\
K_{12} = 0, L_{12} = (1i)\cdot\omega\cdot\frac{L_e}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}, M_{12} = 0, N_{12} = 0, O_{12} = 0, A_{13} = 0, B_{13} = 0, C_{13} = 0, D_{13} = 0, E_{13} = (-1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r} \\
F_{13} = 0, G_{13} = 0, H_{13} = 0, I_{13} = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, J_{13} = 0, K_{13} = 0, L_{13} = 0, M_{13} = (1i)\cdot\omega\cdot\frac{L_e}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}, N_{13} = 0, O_{13} = 0, A_{14} \\
= 0, B_{14} = 0, C_{14} = 0, D_{14} = 0, E_{14} = 0, F_{14} = 0, G_{14} = (-1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, H_{14} = 0, I_{14} = 0, J_{14} = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, K_{14} = 0, L_{14} \\
= 0, M_{14} = 0, N_{14} = (1i)\cdot\omega\cdot\frac{L_e}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}, O_{14} = 0, A_{15} = 0, B_{15} = 0, C_{15} = 0, D_{15} = 0, E_{15} = 0, F_{15} = (-1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, G_{15} \\
= 0, H_{15} = 0, I_{15} = 0, J_{15} = 0, K_{15} = (1i)\cdot\omega\cdot k_e\cdot\frac{rel}{r}, L_{15} = 0, M_{15} = 0, N_{15} = 0, O_{15} = (1i)\cdot\omega\cdot\frac{L_e}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}
\end{cases}
\tag{A.37}
$$

Apéndice E. Obtención de la función de densidad espectral del perfil de carretera aleatorio

Para la siguiente ecuación diferencial estocástica que produce el perfil de carretera aleatorio:

$$\dot{x}_g(t) = 2\pi\eta_0\sqrt{G_x\eta_0 V}w(t) - 2\pi f_0 x_g(t) \tag{A.38}$$

Se considera la siguiente transformada de Fourier:

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-I\omega t} f(t)d(t) \tag{A.39}$$

La cual, al aplicarse a la ecuación (A.38) se obtiene lo siguiente:

$$I\omega x_g(t) = 2\pi\eta_0\sqrt{G_x(\eta_0)V}\int_0^\infty e^{-I\omega t} w(t)d(t) - 2\pi f_0 x_g(I\omega) \tag{A.40}$$

Donde la transformada de Fourier de la señal del ruido blanco gaussiano se puede expresa como sigue:

$$w(I\omega) = \mathscr{F}\left[w(t)\right] = \int_0^\infty e^{-I\omega t} w(t)d(t) \tag{A.41}$$

Sustituyendo la ecuación (A.41) en (A.40) se obtiene lo siguiente:

$$I\omega x_g(t) = 2\pi\eta_0\sqrt{G_x(\eta_0)V}w(I\omega) - 2\pi f_0 x_g(I\omega) \tag{A.42}$$

Posteriormente, mediante un breve tratamiento algebraico se obtiene la siguiente función de transferencia del perfil de carretera aleatorio:

$$H(I\omega) = \frac{x_g(I\omega)}{w(I\omega)} = \frac{2\pi\eta_0\sqrt{G_x(\eta_0)V}}{I\omega + 2\pi f_0} \tag{A.43}$$

Apéndice F. Obtención de los índices de rendimiento para un cuarto de vehículo en las suspensiones regenerativas con AR-TID y AR en paralelo

Suspensión AR-TID:

Coeficientes de la matriz de la ecuación (5.6) para la solución de la integral de vibración del índice de la potencia generada:

$$\begin{cases} A_0 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_t \cdot r^2 \cdot (R_e + R_i), A_1 = ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_1 + k_2 \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot r^2 - k_e \cdot r_g \cdot B_l \cdot \kappa^2 \cdot (k_1 \\ +k_2) \cdot k_t, A_2 = (k_2 \cdot (R_e + R_i) \cdot (k_1 + k_t) \cdot m_s + k_1 \cdot k_2 \cdot m_u \cdot (R_e + R_i) + k_t \cdot ((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot \\ c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i))) \cdot r^2 - B_l \cdot c \cdot k_e \cdot k_t \cdot \kappa^2 \cdot r_g, A_3 = ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_t + (L \\ \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_1 + k_2 \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot m_s \cdot r^2 + k_t \cdot (L \cdot k_1 \cdot b + L \cdot k_2 \cdot b + (L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot c) \\ +((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_1 + k_2 \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot m_u \cdot r^2 - k_e \cdot r_g \cdot B_l \cdot \kappa^2 \cdot ((k_1 + k_2 + k_t) \cdot m_s + m_u \cdot (k_1 + \\ k_2)), A_4 = (((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_t + k_2 \cdot (R_e + R_i) \cdot m_u + (L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot c_L + \\ b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot m_s + L \cdot k_t \cdot b \cdot c + m_u \cdot ((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot c_L + b \cdot (\\ R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot r^2 - B_l \cdot c \cdot k_e \cdot \kappa^2 \cdot r_g \cdot (m_s + m_u)) \cdot r^2, A_5 = ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot m_u \\ +L \cdot k_1 \cdot b + L \cdot k_2 \cdot b + (L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot c + L \cdot k_t \cdot b) \cdot m_s \cdot r^2 + m_u \cdot (L \cdot k_1 \cdot b + L \cdot k_2 \cdot b + (L \cdot c_L + b \cdot \\ (R_e + R_i)) \cdot c) \cdot r^2 - m_s \cdot B_l \cdot k_e \cdot \kappa^2 \cdot r_g \cdot m_u, A_6 = (((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot m_u + L \cdot b \cdot c) \cdot m_s + L \cdot m_u \cdot b \cdot \\ c) \cdot r^2, A_7 = m_s \cdot L \cdot b \cdot r^2 \cdot m_u; B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = R_e^2 \cdot k_2^2 \cdot k_e^2 \cdot k_t^2 \cdot \kappa^2 \cdot m_s^2 \cdot r^2, B_3 = R_e^2 \cdot c^2 \cdot k_e^2 \cdot k_t^2 \cdot \kappa^2 \cdot m_s^2 \cdot r^2 \\ B_4 = 0, B_5 = 0, B_6 = 0; \end{cases} \tag{A.43}$$

Cabe destacar, que las soluciones de las integrales de los índices de rendimiento comparten los coeficientes del denominador de la ecuación (5.6). Por esta razón, solo se mostrarán los coeficientes del numerador para el resto de los índices de rendimiento.

En seguida, se muestra la integral del índice del confort y sus respectivos coeficientes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{H_{BA}(j\omega)}{j\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_6\omega^{12} + C_5\omega^{10} + C_4\omega^8 + C_3\omega^6 + C_2\omega^4 + C_1\omega^2 + C_0}{A_7(j\omega)^7 + A_6(j\omega)^6 + A_5(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \tag{A.44}$$

Donde:

$$\begin{cases} C_0 = 0, C_1 = k_1^2 \cdot k_2^2 \cdot k_t^2 \cdot r^4 \cdot (R_e + R_i)^2, C_2 = ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_1 + k_2 \cdot c_L \cdot (R_e + R_i))^2 \cdot k_t^2 + 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \\ \cdot k_t^2 \cdot r^2 \cdot (R_e + R_i) \cdot (-((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot r^2 + B_l \cdot \\ c \cdot k_e \cdot \kappa^2 \cdot r_g), C_3 = -2 \cdot ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot k_1 + k_2 \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_t^2 \cdot (L \cdot k_1 \cdot b + L \cdot k_2 \cdot b + (L \cdot c_L + \\ b \cdot (R_e + R_i)) \cdot c) \cdot r^2 + 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_t^2 \cdot r^4 \cdot (R_e + R_i) \cdot L \cdot b \cdot c + (-((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot c_L + b \cdot \\ (R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot r^2 + B_l \cdot c \cdot k_e \cdot \kappa^2 \cdot r_g)^2 \cdot k_t^2, C_4 = (L \cdot k_1 \cdot b + L \cdot k_2 \cdot b + (L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot \\ c)^2 \cdot r^4 \cdot k_t^2 + 2 \cdot (-((L \cdot c + L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_1 + (L \cdot c_L + b \cdot (R_e + R_i)) \cdot k_2 + c \cdot c_L \cdot (R_e + R_i)) \cdot r^2 + B_l \cdot c \cdot \\ k_e \cdot \kappa^2 \cdot r_g) \cdot k_t^2 \cdot L \cdot b \cdot c \cdot r^2, C_5 = L^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot r^4 \cdot k_t^2, C_6 = 0 \end{cases} \quad (A.45)$$

Integral del índice de la deflexión de la suspensión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{H_{SWS}(j\omega)}{j\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D_6\omega^{12} + D_5\omega^{10} + D_4\omega^8 + D_3\omega^6 + D_2\omega^4 + D_1\omega^2 + D_0}{A_7(j\omega)^7 + A_6(j\omega)^6 + A_5(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \quad (A.46)$$

Donde:

$$\begin{cases} D_0 = 0, D_1 = k_t^2 \cdot m_s^2 \cdot k_2^2 \cdot r^4 \cdot (R_e + R_i)^2, D_2 = k_t^2 \cdot m_s^2 \cdot ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot r^2 - k_e \cdot r_g \cdot \kappa^2 \cdot B_l)^2 - 2 \cdot k_t^2 \\ \cdot m_s^2 \cdot k_2 \cdot r^4 \cdot (R_e + R_i) \cdot (L \cdot c + L \cdot c_L + R_e \cdot b + R_i \cdot b), D_3 = -2 \cdot k_t^2 \cdot m_s^2 \cdot ((L \cdot k_2 + (R_e + R_i) \cdot (c + c_L)) \cdot r^2 - k_e \\ \cdot r_g \cdot \kappa^2 \cdot B_l) \cdot L \cdot b \cdot r^2 + k_t^2 \cdot m_s^2 \cdot r^4 \cdot (L \cdot c + L \cdot c_L + R_e \cdot b + R_i \cdot b)^2, D_4 = k_t^2 \cdot m_s^2 \cdot L^2 \cdot b^2 \cdot r^4, D_5 = 0, D_6 = 0 \end{cases} \quad (A.47)$$

Integral del índice de la carga dinámica del neumático:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{H_{DTL}(j\omega)}{j\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_6\omega^{12} + E_5\omega^{10} + E_4\omega^8 + E_3\omega^6 + E_2\omega^4 + E_1\omega^2 + E_0}{A_7(j\omega)^7 + A_6(j\omega)^6 + A_5(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \quad (A.48)$$

Donde:

$$\begin{cases} E_0 = 0, E_1 = k_t^2 k_1^2 k_2^2 r^4 (R_e + R_i)^2 (m_s + m_u)^2, E_2 = k_t^2 (((L k_2 + (R_e + R_i)(c + c_L)) k_1 + k_2 c_L (R_e + R_i)) r^2 - r_g \kappa^2 k_e B_l (k_1 \\ + k_2))^2 (m_s + m_u)^2 + 2 k_t^2 k_1 k_2 r^2 (R_e + R_i)(m_s + m_u)(-(k_2 (R_e + R_i) m_u + (L c + L c_L + b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + b (R_e + \\ R_i)) k_2 + c c_L (R_e + R_i)) m_s + m_u ((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + b (R_e + R_i)) k_2 + c c_L (R_e + R_i))) r^2 + B_l c k_e \kappa^2 r_g \\ (m_s + m_u), E_3 = -2 k_t^2 (((L k_2 + (R_e + R_i)(c + c_L)) k_1 + k_2 c_L (R_e + R_i)) r^2 - r_g \kappa^2 k_e B_l (k_1 + k_2))(m_s + m_u)((((L k_2 + (R_e \\ + R_i)(c + c_L)) m_u + L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + R_i)) c) m_s + m_u (L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + R_i)) c)) r^2 - m_s B_l k_e \\ \kappa^2 r_g m_u) + 2 k_t^2 k_1 k_2 r^4 (R_e + R_i)(m_s + m_u)(((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) m_u + L b c) m_s + L m_u b c) + k_t^2 (-(k_2 (R_e + R_i) m_u \\ + (L c + L c_L + b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + b (R_e + R_i)) k_2 + c c_L (R_e + R_i)) m_s + m_u ((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + \\ b (R_e + R_i)) k_2 + c c_L (R_e + R_i))) r^2 + B_l c k_e \kappa^2 r_g (m_s + m_u)^2, E_4 = 2 k_t^2 (((L k_2 + (R_e + R_i)(c + c_L)) k_1 + k_2 c_L (R_e + R_i)) \\ r^2 - r_g \kappa^2 k_e B_l (k_1 + k_2))(m_s + m_u) m_s L b r^2 m_u + k_t^2 ((((L k_2 + (R_e + R_i)(c + c_L)) m_u + L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + \\ R_i)) c) m_s + m_u (L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + R_i)) c)) r^2 - m_s B_l k_e \kappa^2 r_g m_u)^2 + 2 k_t^2 (-(k_2 (R_e + R_i) m_u + (L c + L c_L + \\ b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + b (R_e + R_i)) k_2 + c c_L (R_e + R_i)) m_s + m_u ((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) k_1 + (L c_L + b (R_e + R_i)) k_2 \\ + c c_L (R_e + R_i))) r^2 + B_l c k_e \kappa^2 r_g (m_s + m_u)((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) m_u + L b c) r^2, E_5 = -2 k_t^2 ((((L k_2 + (R_e + R_i)(c + \\ c_L)) m_u + L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + R_i)) c) m_s + m_u (L k_1 b + L k_2 b + (L c_L + b (R_e + R_i)) c)) r^2 - m_s B_l k_e \kappa^2 r_g m_u) \\ m_s L b r^2 m_u + k_t^2 (((L c + L c_L + b (R_e + R_i)) m_u + L b c) m_s + L m_u b c)^2 r^4, E_6 = k_t^2 m_s^2 L^2 b^2 r^4 m_u^2 \end{cases} \quad (A.49)$$

Suspensión AR en paralelo:

Se utiliza el mismo procedimiento de la suspensión anterior y las expresiones de las ecuaciones (5.4) y (5.7). Después se sustituyen las funciones de transferencia de la suspensión AR-TID por

las funciones de la suspensión AR. En la siguiente ecuación se soluciona la integral correspondiente al índice de la potencia generada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{H_{PGb}(I\omega)}{I\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_4\omega^8+B_3\omega^6+B_2\omega^4+B_1\omega^2+B_0}{A_5(I\omega)^5+A_4(I\omega)^4+A_3(I\omega)^3+A_2(I\omega)^2+A_1(I\omega)+A_0}d\omega =$$
$$\left[\frac{\pi}{A_5}\frac{det\begin{pmatrix} B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}\right] \tag{A.50}$$

Donde:

$$\begin{cases} A_0 = k_1k_2r^2(R_e+R_i), A_1 = ((c_2k_1+c_Lk_1)R_e+(c_2k_1+c_Lk_1)R_i+Lk_1k_2)r^2+Bk_1k_e\kappa^2r_g, A_2 = ((R_e+R_i)(k_1+k_2)m_2 \\ +k_2(R_e+R_i)m_1+k_1m_sR_e+k_1m_sR_i+L(c_2k_1+c_Lk_1))r^2, A_3 = (((c_2+c_L)R_e+(c_2+c_L)R_i+L(k_1+k_2))m_2+((c_2+ \\ c_L)R_e+(c_2+c_L)R_i+k_2L)m_1+Lk_1m_s)r^2+Bk_e\kappa^2r_g(m_2+m_1), A_4 = r^2(((R_e+R_i)m_1+R_em_s+R_im_s+L(c_2+c_L)) \\ m_2+(R_em_s+R_im_s+L(c_2+c_L))m_1), A_5 = r^2L((m_1+m_s)m_2+m_1m_s), B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = R_e^2k_1^2k_e^2\kappa^2m_2^2r^2B_3 = \\ R_e^2c_1^2k_e^2\kappa^2m_2^2r^2, B_4 = 0 \end{cases} \tag{A.51}$$

Al igual que en la suspensión AR-TID, las soluciones a las integrales de los índices de rendimiento comparten los mismos coeficientes del denominador. Por esta razón, solo se describen los coeficientes del numerador para los siguientes índices de rendimiento.

En seguida, se muestra la integral del índice del confort y sus respectivos coeficientes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{H_{BAb}(j\omega)}{j\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_4\omega^8+C_3\omega^6+C_2\omega^4+C_1\omega^2+C_0}{A_5(j\omega)^5+A_4(j\omega)^4+A_3(j\omega)^3+A_2(j\omega)^2+A_1(j\omega)+A_0}d\omega \tag{A.52}$$

Donde:

$$\begin{cases} C_0 = 0, C_1 = (R_ek_1k_2r^2+R_ik_1k_2r^2)^2, C_2 = (-Bk_1k_e\kappa^2r_g-Lk_1k_2r^2-R_ec_2k_1r^2-R_ec_Lk_1r^2-R_ic_2k_1r^2-R_ic_Lk_1r^2)^2 \\ +2(R_ek_1k_2r^2+R_ik_1k_2r^2)(-Lc_2k_1r^2-Lc_Lk_1r^2-R_ek_1m_sr^2-R_ik_1m_sr^2), C_3 = (2(-Bk_1k_e\kappa^2r_g-Lk_1k_2r^2-R_ec_2k_1 \\ r^2-R_ec_Lk_1r^2-R_ic_2k_1r^2-R_ic_Lk_1r^2))Lk_1m_sr^2+(-Lc_2k_1r^2-Lc_Lk_1r^2-R_ek_1m_sr^2-R_ik_1m_sr^2)^2, C_4 = L^2k_1^2m_s^2r^4 \end{cases} \tag{A.53}$$

Integral del índice de la deflexión de la suspensión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{H_{SWSb}(j\omega)}{j\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D_6\omega^{12}+D_5\omega^{10}+D_4\omega^8+D_3\omega^6+D_2\omega^4+D_1\omega^2+D_0}{A_7(j\omega)^7+A_6(j\omega)^6+A_5(j\omega)^5+A_4(j\omega)^4+A_3(j\omega)^3+A_2(j\omega)^2+A_1(j\omega)+A_0}d\omega \quad \text{(A.54)}$$

Donde:

$$D_0 = 0, D_1 = m_2^2 r^4 k_1^2 (R_e+R_i)^2, D_2 = m_2^2 r^4 k_1^2 L^2, D_3 = 0, D_4 = 0 \quad \text{(A.55)}$$

Integral del índice de la carga dinámica del neumático:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{H_{DTLb}(j\omega)}{j\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E_6\omega^{12}+E_5\omega^{10}+E_4\omega^8+E_3\omega^6+E_2\omega^4+E_1\omega^2+E_0}{A_7(j\omega)^7+A_6(j\omega)^6+A_5(j\omega)^5+A_4(j\omega)^4+A_3(j\omega)^3+A_2(j\omega)^2+A_1(j\omega)+A_0}d\omega \quad \text{(A.56)}$$

Donde:

$$\begin{cases} E_0 = 0, E_1 = k_2^2 r^4 (R_e+R_i)^2 (m_2+m_1)^2 k_1^2, E_2 = (m_2+m_1)^2(((c_2+c_L)R_e+(c_2+c_L)R_i+k_2L)r^2+Bk_e\kappa^2 r_g)^2 k_1^2 - 2 \\ k_2 r^4 (R_e+R_i)(m_2+m_1)k_1^2(((R_e+R_i)m_1+R_e m_s+R_i m_s+L(c_2+c_L))m_2+(R_e m_s+R_i m_s+L(c_2+c_L))m_1), E_3 = - \\ (2(m_2+m_1))(((c_2+c_L)R_e+(c_2+c_L)R_i+k_2L)r^2+Bk_e\kappa^2 r_g)k_1^2 r^2 L((m_1+m_s)m_2+m_1 m_s)+r^4(((R_e+R_i)m_1+R_e \\ m_s+R_i m_s+L(c_2+c_L))m_2+(R_e m_s+R_i m_s+L(c_2+c_L))m_1)^2 k_1^2, E_4 = r^4 L^2((m_1+m_s)m_2+m_1 m_s)^2 k_1^2 \end{cases} \quad \text{(A.57)}$$

Apéndice G. Matrices de las ecuaciones en espacio de estados para los modelos de medio y vehículo completo con AR-TID

Modelo de medio vehículo:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{-(c_f+c_r)}{m_b} & \frac{(L_f c_f - L_r c_r)}{m_b} & 0 & 0 & \frac{c_f}{m_b} & \frac{c_r}{m_b} & \frac{-(k_1+k_2+k_f+k_r)}{m_b} \\ \frac{-(-L_f c_f + L_r c_r)}{I_b} & \frac{-(L_f^2 c_f + L_r^2 c_r)}{I_b} & 0 & 0 & \frac{-c_f L_f}{I_b} & \frac{c_r L_r}{I_b} & \frac{-(-L_f k_1 - L_f k_f + L_r k_2 + L_r k_r)}{I_b} \\ \frac{c_f}{m_{wf}} & \frac{-c_f L_f}{m_{wf}} & 0 & 0 & \frac{-c_f}{m_{wf}} & 0 & \frac{-(k_1+k_f)}{m_{wf}} \\ \frac{c_r}{m_{wr}} & \frac{c_r L_r}{m_{wr}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_r}{m_{wr}} & \frac{(k_2+k_r)}{m_{wr}} \\ \frac{c_f}{b_f+m_{wf}} & \frac{-c_f L_f}{b_f+m_{wf}} & \frac{c_{Lf}}{b_f} & 0 & \frac{-c_{Lf}-c_f}{b_f+m_{wf}} & 0 & \frac{k_f}{b_f} - \frac{-(k_1+k_f)}{m_{wf}} \\ \frac{c_r}{b_r+m_{wr}} & \frac{c_r L_r}{b_r+m_{wr}} & \frac{c_{Lr}}{b_r} & 0 & \frac{-c_{Lr}-c_r}{b_r+m_{wr}} & \frac{k_r}{b_r} + \frac{(k_2+k_r)}{m_{wr}} & \frac{L_r k_r}{b_r} + \frac{L_r k_2 + L_r k_r}{m_{wr}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(R_e i k_e)}{Lr} & 0 & \frac{(R_e i k_e)}{Lr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(R_e i k_e)}{Lr} & 0 & \frac{(R_e i k_e)}{Lr} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(A.58)}$$

$$
\cdots\begin{bmatrix}
\frac{(L_f k_1 + L_f k_f - L_r k_2 - L_r k_r)}{m_b} & \frac{k_1}{m_b} & \frac{k_2}{m_b} & \frac{k_f}{m_b} & \frac{k_r}{m_b} & 0 & 0 \\
\frac{-(L_f^2 k_1 + L_f^2 k_f + L_r^2 k_2 + L_r^2 k_r)}{I_b} & \frac{-L_f k_1}{I_b} & \frac{L_r k_2}{I_b} & \frac{-L_f k_f}{I_b} & \frac{L_r k_r}{I_b} & 0 & 0 \\
\frac{-(L_f k_1 + L_f k_f)}{m_{wf}} & \frac{-(k_1 + k_{tf})}{m_{wf}} & 0 & \frac{-k_f}{m_{wf}} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(L_r k_2 + L_r k_r)}{m_{wr}} & 0 & \frac{-(k_2 + k_{tr})}{m_{wr}} & 0 & \frac{-k_r}{m_{wr}} & 0 & 0 \\
\frac{-L_f k_f}{b_f} - \frac{L_f k_1 + L_f k_f}{m_{wf}} & \frac{-(k_1 + k_{tf})}{m_{wf}} & 0 & \frac{-k_f}{b_f} - \frac{k_f}{m_{wf}} & \frac{F_L}{b_f} & 0 & 0 \\
\frac{k_r}{b_r} + \frac{(k_2 + k_r)}{m_{wr}} & \frac{L_r k_r}{b_r} + \frac{L_r k_2 + L_r k_r}{m_{wr}} & 0 & \frac{-(k_2 + k_{tr})}{m_{wr}} & 0 & \frac{-k_r}{b_r} - \frac{k_r}{m_{wr}} & \frac{F_L}{b_r} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(R_e + R_i)}{L} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(R_e + R_i)}{L}
\end{bmatrix} \tag{A.58}
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{wf}} & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{wf}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{wr}} & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{wr}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}^T \tag{A.59}
$$

$$
C = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{A.60}
$$

Modelo de vehículo completo:

$$
\begin{cases}
B = [0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; k_tfl/m_wfl\ \ 0\ 0\ 0; 0\ \ k_tfr/m_wfr\ \ 0\ 0; \ 0\ 0\ \ k_trr/m_wrr\ \ 0; \\
0\ 0\ 0\ \ k_trl/m_wrl; k_tfl/m_wfl\ \ 0\ 0\ 0; 0\ \ k_tfr/m_wfr\ \ 0\ 0; 0\ 0\ \ k_trr/m_wrr\ \ 0; 0\ 0\ 0\ \ k_trl/m_wrl; 0\ 0\ 0 \\
0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; \\
0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0]; \\
\end{cases} \tag{A.61}
$$

$$
\begin{cases}
C = [(-c_fl - c_fr - c_rr - c_rl)/m_b\ \ (L_f*c_fl + L_f*c_fr - L_t*c_rl - L_t*c_rr)/m_b\ \ (L_d*c_fr + L_d*c_rr - L_i*c_fl - L_i*c_rl)/ \\
m_b\ \ c_fl/m_b\ \ c_fr/m_b\ \ c_rr/m_b\ \ c_rl/m_b\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ \ (-k_rl - k_1 - k_fl - k_2 - k_fr - k_3 - k_rr - k_4)/m_b\ \ (L_f*k_1 + L_f*k_2 + \\
L_f*k_fl + L_f*k_fr - L_t*k_3 - L_t*k_4 - L_t*k_rl - L_t*k_rr)/m_b\ \ (L_d*k_2 + L_d*k_3 + L_d*k_fr + L_d*k_rr - L_i*k_1 - L_i*k_4 - L_i* \\
k_fl - L_i*k_rl)/m_b\ \ k_fl/m_b\ \ k_fr/m_b\ \ k_rr/m_b\ \ k_rl/m_b\ \ k_1/m_b\ \ k_2/m_b\ \ k_3/m_b\ \ k_4/m_b\ \ 0\ 0\ 0\ 0; \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0; \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0; \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0; \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]; \\
\end{cases} \tag{A.62}
$$

$$
\begin{cases}
A = [(-c_{fl} - c_{fr} - c_{rr} - c_{rl})/m_b \quad (L_f * c_{fl} + L_f * c_{fr} - L_t * c_{rl} - L_t * c_{rr})/m_b \quad (L_d * c_{fr} + L_d * c_{rr} - L_i * c_{fl} - L_i * c_{rl})/m_b \quad c_{fl} \\
/m_b \quad c_{fr}/m_b \quad c_{rr}/m_b \quad c_{rl}/m_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-k_{rl} - k_1 - k_{fl} - k_2 - k_{fr} - k_3 - k_{rr} - k_4)/m_b \quad (L_f * k_1 + L_f * k_2 + L_f * k_{fl} + \\
L_f * k_{fr} - L_t * k_3 - L_t * k_4 - L_t * k_{rl} - L_t * k_{rr})/m_b \quad (L_d * k_2 + L_d * k_3 + L_d * k_{fr} + L_d * k_{rr} - L_i * k_1 - L_i * k_4 - L_i * k_{fl} - L_i * k_{rl}) \\
/m_b \quad k_{fl}/m_b \quad k_{fr}/m_b \quad k_{rr}/m_b \quad k_{rl}/m_b \quad k_1/m_b \quad k_2/m_b \quad k_3/m_b \quad k_4/m_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; -(-L_f * c_{fl} - L_f * c_{fr} + L_t * c_{rl} + L_t \\
* c_{rr})/I_b \quad -(L_f^2 * c_{fl} + L_f^2 * c_{fr} + L_t^2 * c_{rl} + L_t^2 * c_{rr})/I_b \quad -(L_d * L_f * c_{fr} - L_d * L_t * c_{rr} - L_f * L_i * c_{fl} + L_i * L_t * c_{rl})/I_b \quad -L_f \\
* c_{fl}/I_b \quad -L_f * c_{fr}/I_b \quad L_t * c_{rr}/I_b \quad L_t * c_{rl}/I_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-L_f * k_1 - L_f * k_2 - L_f * k_{fl} - L_f * k_{fr} + L_t * k_3 + L_t * k_4 + \\
L_t * k_{rl} + L_t * k_{rr})/I_b \quad -(L_f^2 * k_1 + L_f^2 * k_2 + L_f^2 * k_{fl} + L_f^2 * k_{fr} + L_t^2 * k_3 + L_t^2 * k_4 + L_t^2 * k_{rl} + L_t^2 * k_{rr})/I_b \quad -(L_d * L_f * k_2 + \\
L_d * L_f * k_{fr} - L_d * L_t * k_3 - L_d * L_t * k_{rr} - L_f * L_i * k_1 - L_f * L_i * k_{fl} + L_i * L_t * k_4 + L_i * L_t * k_{rl})/I_b \quad -L_f * k_{fl}/I_b \quad -L_f * k_{fr}/ \\
I_b \quad L_t * k_{rr}/I_b \quad L_t * k_{rl}/I_b \quad -L_f * k_1/I_b \quad -L_f * k_2/I_b \quad L_t * k_3/I_b \quad L_t * k_4/I_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; -(-L_d * c_{fr} - L_d * c_{rr} + L_i * c_{fl} \\
+ L_i * c_{rl})/I_p \quad -(L_d * L_f * c_{fr} - L_d * L_t * c_{rr} - L_f * L_i * c_{fl} + L_i * L_t * c_{rl})/I_p \quad -(L_d^2 * c_{fr} + L_d^2 * c_{rr} + L_i^2 * c_{fl} + L_i^2 * c_{rl})/I_p \\
L_i * c_{fl}/I_p \quad -L_d * c_{fr}/I_p \quad -L_d * c_{rr}/I_p \quad L_i * c_{rl}/I_p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-L_d * k_2 - L_d * k_3 - L_d * k_{fr} - L_d * k_{rr} + L_i * k_1 + L_i \\
* k_4 + L_i * k_{fl} + L_i * k_{rl})/I_p \quad -(L_d * L_f * k_2 + L_d * L_f * k_{fr} - L_d * L_t * k_3 - L_d * L_t * k_{rr} - L_f * L_i * k_1 - L_f * L_i * k_{fl} + L_i * L_t * k_4 \\
+ L_i * L_t * k_{rl})/I_p \quad -(L_d^2 * k_2 + L_d^2 * k_3 + L_d^2 * k_{fr} + L_d^2 * k_{rr} + L_i^2 * k_1 + L_i^2 * k_4 + L_i^2 * k_{fl} + L_i^2 * k_{rl})/I_p \quad L_i * k_{fl}/I_p \quad -L_d * \\
k_{fr}/I_p \quad -L_d * k_{rr}/I_p \quad L_i * k_{rl}/I_p \quad L_i * k_1/I_p \quad -L_d * k_2/I_p \quad -L_d * k_3/I_p \quad L_i * k_4/I_p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; c_{fl}/b_{fl} + c_{fl}/m_{wfl} \quad -L_f \\
* c_{fl}/b_{fl} - L_f * c_{fl}/m_{wfl} \quad L_i * c_{fl}/b_{fl} + L_i * c_{fl}/m_{wfl} \quad (-c_{Lfl} - c_{fl})/b_{fl} - c_{fl}/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{Lfl}/b_{fl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad k_{fl}/ \\
b_{fl} - (-k_1 - k_{fl})/m_{wfl} \quad -L_f * k_{fl}/b_{fl} - (L_f * k_1 + L_f * k_{fl})/m_{wfl} \quad L_i * k_{fl}/b_{fl} - (-L_i * k_1 - L_i * k_{fl})/m_{wfl} \quad -k_{fl}/b_{fl} - k_{fl} \\
/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(k_1 + k_{tfl})/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_L/b_{fl} \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad c_{fr}/b_{fr} + c_{fr}/m_{wfr} \quad -L_f * c_{fr}/b_{fr} - L_f * c_{fr}/ \\
m_{wfr} \quad -L_d * c_{fr}/b_{fr} - L_d * c_{fr}/m_{wfr} \quad 0 \quad (-c_{Lfr} - c_{fr})/b_{fr} - c_{fr}/m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{Lfr}/b_{fr} \quad 0 \quad 0 \quad k_{fr}/b_{fr} - (-k_2 \\
- k_{fr})/m_{wfr} \quad -L_f * k_{fr}/b_{fr} - (L_f * k_2 + L_f * k_{fr})/m_{wfr} \quad -L_d * k_{fr}/b_{fr} - (L_d * k_2 + L_d * k_{fr})/m_{wfr} \quad 0 \quad -k_{fr}/b_{fr} - k_{fr}/ \\
m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(k_2 + k_{tfr})/m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_L/b_{fr} \quad 0 \quad 0; c_{rr}/b_{rr} + c_{rr}/m_{wrr} \quad L_t * c_{rr}/b_{rr} + L_t * c_{rr}/m_{wrr} \quad - \\
L_d * c_{rr}/b_{rr} - L_d * c_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad (-c_{Lrr} - c_{rr})/b_{rr} - c_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{Lrr}/b_{rr} \quad 0 \quad k_{rr}/b_{rr} - (-k_3 - k_{rr})/m_{wrr} \\
L_t * k_{rr}/b_{rr} - (-L_t * k_3 - L_t * k_{rr})/m_{wrr} \quad -L_d * k_{rr}/b_{rr} - (L_d * k_3 + L_d * k_{rr})/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad -k_{rr}/b_{rr} - k_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad -(k_3 + k_{trr})/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_L/b_{rr} \quad 0; \quad c_{rl}/b_{rl} + c_{rl}/m_{wrl} \quad L_t * c_{rl}/b_{rl} + L_t * c_{rl}/m_{wrl} \quad L_i * c_{rl}/b_{rl} + L_i * c_{rl}/ \\
m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-c_{Lrl} - c_{rl})/b_{rl} - c_{rl}/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{Lrl}/b_{rl} \quad k_{rl}/b_{rl} + (k_4 + k_{rl})/m_{wrl} \quad L_t * k_{rl}/b_{rl} + (L_t * k_4 + L_t * \\
k_{rl})/m_{wrl} \quad L_i * k_{rl}/b_{rl} + (L_i * k_4 + L_i * k_{rl})/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -k_{rl}/b_{rl} - k_{rl}/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-k_4 - k_{trl})/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad F_L/b_{rl}; \quad c_{fl}/m_{wfl} \quad -L_f * c_{fl}/m_{wfl} \quad L_i * c_{fl}/m_{wfl} \quad -c_{fl}/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-k_1 - k_{fl})/m_{wfl} \\
-(L_f * k_1 + L_f * k_{fl})/m_{wfl} \quad -(-L_i * k_1 - L_i * k_{fl})/m_{wfl} \quad -k_{fl}/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(k_1 + k_{tfl})/m_{wfl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0; \quad c_{fr}/m_{wfr} \quad -L_f * c_{fr}/m_{wfr} \quad -L_d * c_{fr}/m_{wfr} \quad 0 \quad -c_{fr}/m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-k_2 - k_{fr})/m_{wfr} \\
-(L_f * k_2 + L_f * k_{fr})/m_{wfr} \quad -(L_d * k_2 + L_d * k_{fr})/m_{wfr} \quad 0 \quad -k_{fr}/m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(k_2 + k_{tfr})/m_{wfr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0; \quad c_{rr}/m_{wrr} \quad L_t * c_{rr}/m_{wrr} \quad -L_d * c_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad -c_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-k_3 - k_{rr})/m_{wrr} \quad -(- \\
L_t * k_3 - L_t * k_{rr})/m_{wrr} \quad -(L_d * k_3 + L_d * k_{rr})/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad -k_{rr}/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(k_3 + k_{trr})/m_{wrr} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0; \quad c_{rl}/m_{wrl} \quad L_t * c_{rl}/m_{wrl} \quad L_i * c_{rl}/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -c_{rl}/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (k_4 + k_{rl})/m_{wrl} \quad (L_t * k_4 + L_t * k_{rl})/ \\
m_{wrl} \quad (L_i * k_4 + L_i * k_{rl})/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -k_{rl}/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-k_4 - k_{trl})/m_{wrl} \quad 0 \quad 0 \quad 0; 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e + R_i)/L \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e + R_i)/L \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(\\
R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e + R_i)/L \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (R_e * i * k_e)/ \\
(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e * i * k_e)/(L * r) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(R_e + R_i)/L];
\end{cases}
\tag{A.63}
$$

$$
D = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{A.61}
$$

Referencias

Abdelkareem, M. A. A., Xu, L., Ali, M. K. A., Elagouz, A., Mi, J., Guo, S., Liu, Y., & Zuo, L. (2018). Vibration energy harvesting in automotive suspension system: A detailed review. *Applied Energy*, *229*, 672–699. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2018.08.030

Abdelkareem, M. A. A., Xu, L., Guo, X., Ali, M. K. A., Elagouz, A., Hassan, M. A., Essa, F. A., & Zou, J. (2018). Energy harvesting sensitivity analysis and assessment of the potential power and full car dynamics for different road modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *110*, 307–332. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2018.03.009

Abdelkareem, M. A. A., Zhang, R., Jing, X., Wang, X., & Ali, M. K. A. (2022). Characterization and implementation of a double-sided arm-toothed indirect-drive rotary electromagnetic energy-harvesting shock absorber in a full semi-trailer truck suspension platform. *Energy*, *239*, 121976. https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2021.121976

Abdelrahman, M., Liu, G., Fan, C., Zhang, Z., Ali, A., Li, H., Azam, A., Cao, H., & Mohamed, A. A. (2023). Energy regenerative shock absorber based on a slotted link conversion mechanism for application in the electrical bus to power the low wattages devices. *Applied Energy*, *347*, 121409. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2023.121409

Alexander C., & Sadiku M. (2013). *Fundamentos de circuitos eléctricos* (Roig Pablo E. & Edmundo Zúñiga Edmundo, Eds.; 5a ed.). Mc Graw Hill.

Ali, A., Qi, L., Zhang, T., Li, H., Azam, A., & Zhang, Z. (2021). Design of novel energy-harvesting regenerative shock absorber using barrel cam follower mechanism to power the auxiliaries of a driverless electric bus. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, *48*, 101565. https://doi.org/10.1016/J.SETA.2021.101565

Asadi, E., Ribeiro, R., Behrad Khamesee, M., & Khajepour, A. (2015). A new adaptive hybrid electromagnetic damper: modelling, optimization, and experiment. *Smart Materials and Structures*, *24*(7), 075003. https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/7/075003

Barredo-Hernández, E., Gabriel Mendoza-Larios, J., Irving Abdiel Maldonado-Bravo, M. C., Mayén-Chaires, J., & Cuauhtémoc Mazón-Valadez, M. C. (2022). Amortiguadores regenerativos para sistemas de suspensión automotriz: Una revisión. *Cultura Científica y Tecnológica*, *19*(1), 1–20. https://doi.org/10.20983/CULCYT.2022.1.3.2

Canales, M., Paucar, W., & Juipa, N. (2020). Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica. *RevIA*, *7*(4), 5–9. https://revistas.unas.edu.pe/index.php/revia/article/view/172

Chen, L., Liu, C., Liu, W., Nie, J., Shen, Y., & Chen, G. (2016). Network synthesis and parameter optimization for vehicle suspension with inerter. *Advances in Mechanical Engineering*, *9*(1). https://doi.org/10.1177/1687814016684704/ASSET/IMAGES/LARGE/10.1177_1687814016684704-FIG5.JPEG

Chen, M. Z. Q., Hu, Y., Li, C., & Chen, G. (2015). Performance Benefits of Using Inerter in Semiactive Suspensions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, *23*(4), 1571–1577. https://doi.org/10.1109/TCST.2014.2364954

Ding, R., Wang, R., Meng, X., & Chen, L. (2019). Energy consumption sensitivity analysis and energy-reduction control of hybrid electromagnetic active suspension. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *134*, 106301. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.106301

Ebrahimi, B., Bolandhemmat, H., Khamesee, M. B., & Golnaraghi, F. (2011). A hybrid electromagnetic shock absorber for active vehicle suspension systems. *Vehicle System Dynamics*, *49*(1–2), 311–332. https://doi.org/10.1080/00423111003602400

Ezeta, J. H., Teran, E., Nicolalde, F. F., Peralta, J., & Flores, B. (2017). Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo. En *Proceedings of the 15th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Global Partnership for Development and Engineering Education"*.

Fahmi, A., Riduan, M., Tamaldin, N., Sudrajat, A., & Ahmad, F. (2018). Review on active suspension system. *SHS Web of Conferences*, *49*, 02008. https://doi.org/10.1051/SHSCONF/20184902008

Galluzzi, R., Tonoli, A., Amati, N., Curcuruto, G., Conti, P., Greco, G., & Nepote, A. (2016). Regenerative Shock Absorbers and the Role of the Motion Rectifier. *SAE Technical Papers*, *2016-April*(April). https://doi.org/10.4271/2016-01-1552

GE, Z., WANG, W., LI, G., & RAO, D. (2022). Design, Parameter Optimisation, and Performance Analysis of Active Tuned Inerter Damper (TID) Suspension for Vehicle. *Journal of Sound and Vibration*, *525*, 116750. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2022.116750

Hu, Y., Chen, M. Z. Q., & Shu, Z. (2014). Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration*, *333*(8), 2212–2225. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2013.12.016

Karnopp, D. (1989). Permanent Magnet Linear Motors Used as Variable Mechanical Dampers for Vehicle Suspensions. *Vehicle System Dynamics*, *18*(4), 187–200. https://doi.org/10.1080/00423118908968918

Lafarge, B., Grondel, S., Delebarre, C., Curea, O., & Richard, C. (2021). Linear electromagnetic energy harvester system embedded on a vehicle suspension: From modeling to performance analysis. *Energy*, *225*, 119991. https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2021.119991

Li, C., & Tse, P. W. (2013). Fabrication and testing of an energy-harvesting hydraulic damper. *Smart Materials and Structures*, *22*(6), 065024. https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/6/065024

Li, C., Zhu, R., Liang, M., & Yang, S. (2014). Integration of shock absorption and energy harvesting using a hydraulic rectifier. *Journal of Sound and Vibration*, *333*(17), 3904–3916. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2014.04.020

Li, H., Yang, H. T., Kwon, I. Y., -, al, Jin, S., Sun, S., Yang, J., Liu, Y., Chen, L., Yang, X., & Yang, Y. (2019). Structural Design and Inertial Impact Analysis of Vehicle ISD Suspension. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, *252*(2), 022119. https://doi.org/10.1088/1755-1315/252/2/022119

Li, H., Zheng, P., Zhang, T., Zou, Y., Pan, Y., Zhang, Z., & Azam, A. (2021). A high-efficiency energy regenerative shock absorber for powering auxiliary devices of new energy

driverless buses. *Applied Energy*, *295*, 117020. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2021.117020

Liu, C., Chen, L., Lee, H. P., Yang, Y., & Zhang, X. (2022). A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: Theory, devices, and applications. *Journal of the Franklin Institute*, *359*(14), 7677–7707. https://doi.org/10.1016/J.JFRANKLIN.2022.07.030

Manhães, W., Sampaio, R., Lima, R., Hagedorn, P., Deü, J.-F., Etse, J. G., Luccioni, B. M., Pucheta, M. A., & Storti, M. A. (2018). Lagrangians for Electromechanical Systems. *Mecánica Computacional*, *36*(42), 1911–1934. http://venus.santafe-conicet.gov.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5720

Purcell, E. M., & Morin, D. J. (2013). *Electricity and Magnetism*. https://doi.org/10.1017/CBO9781139012973

Sabzehgar, R., Maravandi, A., & Moallem, M. (2014). Energy regenerative suspension using an algebraic screw linkage mechanism. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, *19*(4), 1251–1259. https://doi.org/10.1109/TMECH.2013.2277854

Salman, W., Qi, L., Zhu, X., Pan, H., Zhang, X., Bano, S., Zhang, Z., & Yuan, Y. (2018). A high-efficiency energy regenerative shock absorber using helical gears for powering low-wattage electrical device of electric vehicles. *Energy*, *159*, 361–372. https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2018.06.152

Salman, W., Zhang, X., Li, H., Wu, X., Li, N., Azam, A., & Zhang, Z. (2022). A novel energy regenerative shock absorber for in-wheel motors in electric vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *181*, 109488. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2022.109488

Scheibe, F., & Smith, M. C. (2009). Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions. *Vehicle System Dynamics*, *47*(10), 1229–1252. https://doi.org/10.1080/00423110802588323

Shen, Y., Chen, L., Yang, X., Shi, D., & Yang, J. (2016). Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, *361*, 148–158. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2015.06.045

Smith, M. C. (2002). Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *47*(10), 1648–1662. https://doi.org/10.1109/TAC.2002.803532

Smith, M. C. (2020). The Inerter: A Retrospective. *https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023917*, *3*, 361–391. https://doi.org/10.1146/ANNUREV-CONTROL-053018-023917

Smith, M. C., & Wang, F. U. C. (2004). Performance Benefits in Passive Vehicle Suspensions Employing Inerters. *Vehicle System Dynamics*, *42*(4), 235–257. https://doi.org/10.1080/00423110412331289871

Wang, Z., Zhang, T., Zhang, Z., Yuan, Y., & Liu, Y. (2020). A high-efficiency regenerative shock absorber considering twin ball screws transmissions for application in range-extended electric vehicles. *Energy and Built Environment*, *1*(1), 36–49. https://doi.org/10.1016/J.ENBENV.2019.09.004

Xie, L., Li, J., Li, X., Huang, L., & Cai, S. (2018). Damping-tunable energy-harvesting vehicle damper with multiple controlled generators: Design, modeling and experiments. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *99*, 859–872. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2017.07.005

Zhang, R., & Wang, X. (2019). Parameter study and optimization of a half-vehicle suspension system model integrated with an arm-teeth regenerative shock absorber using Taguchi method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *126*, 65–81. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.02.020

Zhang, R., Wang, X., Al Shami, E., John, S., Zuo, L., & Wang, C. H. (2018). A novel indirect-drive regenerative shock absorber for energy harvesting and comparison with a conventional direct-drive regenerative shock absorber. *Applied Energy*, *229*, 111–127. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2018.07.096

Zhang, R., Wang, X., & Liu, Z. (2018). A novel regenerative shock absorber with a speed doubling mechanism and its Monte Carlo simulation. *Journal of Sound and Vibration*, *417*, 260–276. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2017.12.017

Zhang, R., Zhao, L., Qiu, X., Zhang, H., & Wang, X. (2020). A comprehensive comparison of the vehicle vibration energy harvesting abilities of the regenerative shock absorbers predicted by the quarter, half and full vehicle suspension system models. *Applied Energy*, *272*, 115180. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2020.115180

Zhang, X. J., Ahmadian, M., & Guo, K. H. (2012). On the Benefits of Semi-Active Suspensions with Inerters. *Shock and Vibration*, *19*(3), 257–272. https://doi.org/10.3233/SAV-2011-0628

Zhang, Y., Chen, H., Guo, K., Zhang, X., & Eben Li, S. (2017). Electro-hydraulic damper for energy harvesting suspension: Modeling, prototyping and experimental validation. *Applied Energy*, *199*, 1–12. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2017.04.085

Zhang, Z., Zhang, X., Chen, W., Rasim, Y., Salman, W., Pan, H., Yuan, Y., & Wang, C. (2016). A high-efficiency energy regenerative shock absorber using supercapacitors for renewable energy applications in range extended electric vehicle. *Applied Energy*, *178*, 177–188. https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2016.06.054

Zou, J., Guo, X., Abdelkareem, M. A. A., Xu, L., & Zhang, J. (2019). Modelling and ride analysis of a hydraulic interconnected suspension based on the hydraulic energy regenerative shock absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *127*, 345–369. https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.02.047

Zuo, L., & Zhang, P. S. (2013). Energy harvesting, ride comfort, and road handling of regenerative vehicle suspensions. *Journal of Vibration and Acoustics*, *135*(1). https://doi.org/10.1115/1.4007562/379262