

Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Instituto de Física y Matemáticas

---

**Comparación de diferentes ordenamientos de la  
matriz de Hadamard en la reconstrucción de  
imágenes en la cámara de un solo pixel.**

---

Tesis

para obtener el título profesional de:

Ingeniero en Física Aplicada

Presenta:

Luján López Uziel Isaí

Director:

Dr. Raúl Juárez Amaro

Co-director:

M.C. José Antonio Cisneros Martínez

Huajuapán de León, Oaxaca, junio 2024



## **Dedicatoria**

Este trabajo está dedicado a todos aquellos amigos y familiares que me han brindado su apoyo en cada etapa de mi vida. Reconozco lo difícil que puede ser encontrar personas verdaderamente valiosas en nuestras vidas, y puedo afirmar con orgullo que cuento con ellas. Su constante respaldo y aliento han sido fundamentales en mi camino, y este logro es también suyo. Gracias por estar siempre presentes y por compartir este viaje conmigo.

## **Agradecimientos.**

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi madre, Ana López Sanginez, por los invaluable consejos, cariño e instrucciones que me brindó desde mi infancia. Gracias a su guía, me convertí en la persona que soy hoy en día. Además de deberle la vida, admiro su valentía y trabajo constante. Espero que se sienta orgullosa de mí, donde sea que se encuentre.

A mi tío Jerónimo López, le debo un agradecimiento especial por su incondicional apoyo, el cual fue fundamental para que pudiera completar mi carrera universitaria sin contratiempos. Todos mis logros futuros llevan su huella y reconocimiento.

Quiero reconocer y agradecer la amabilidad y dedicación del personal de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. Su labor incansable con los estudiantes fue un factor determinante en mi decisión de seguir con mis estudios universitarios. Sin su presencia y apoyo, mi camino académico habría sido diferente.

Al INAOE, quiero expresar mi gratitud por facilitarme el equipo y el apoyo necesario para la realización de mi trabajo de tesis. Su contribución fue invaluable para alcanzar mis metas académicas.

También deseo agradecer a la empresa Corona por brindar becas alimenticias a estudiantes de Ingeniería en Física Aplicada y Automotriz, incluyéndome a mí. Este respaldo fue de gran importancia para aliviar las presiones económicas que conlleva la vida estudiantil.

Por último, pero no menos importante, quiero dedicar un sincero agradecimiento a mis amigos Uriel, Carlos, Laura, Isaac, y muchos más, por su gran amistad y por compartir conmigo largas jornadas de trabajo, proyectos y estudio. Sus contribuciones fueron fundamentales y los momentos compartidos permanecerán en mi memoria para siempre.

## Resumen

La técnica de formación de imágenes con un solo píxel, conocida en inglés como single-pixel imaging, es una técnica novedosa mediante la cual es posible reconstruir imágenes proyectando una serie de patrones de luz con resolución espacial sobre un objeto y capturando las intensidades de la luz reflejada o transmitida con un detector sin resolución espacial, es decir, un detector que consta de un solo píxel. El presente trabajo se enfoca en explorar y comparar varios ordenamientos de la matriz de Hadamard utilizada para obtener los patrones de muestreo en el contexto de la formación de imágenes con un solo píxel. Se investiga cómo estos ordenamientos influyen en la calidad de las imágenes reconstruidas al reducir el número de mediciones de intensidad. El objetivo de esta investigación es identificar los métodos de ordenamiento más eficaces para obtener reconstrucciones precisas y de alta calidad con datos limitados. Los resultados obtenidos revelaron la significativa influencia de las magnitudes de los coeficientes de correlación en la calidad de las imágenes reconstruidas. Estas magnitudes se refieren a las intensidades de luz reflejada al proyectar el patrón de luz sobre el objeto de prueba, y su impacto fue especialmente notable durante el análisis perceptual del ordenamiento descendente. Los métodos de ordenamiento que presentaron el mejor desempeño fueron los basados en un escaneo zigzag de la base Hadamard y el método Cake-cutting.

# Índice

<b>Capítulo 1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Planteamiento del problema.</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Justificación.</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Hipótesis.</b>	<b>4</b>
<b>1.4. Objetivos y metas.</b>	<b>4</b>
<b>1.4.1. Objetivo general.</b>	<b>4</b>
<b>1.4.2. Objetivos específicos</b>	<b>5</b>
<b>1.4.3. Metas</b>	<b>5</b>
<b>1.5. Metodología.</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 2. Marco teórico.</b>	<b>7</b>
<b>2.1. La cámara de un solo píxel.</b>	<b>7</b>
<b>2.1.1. Dispositivos de microespejos digitales..</b>	<b>7</b>
<b>2.1.2. Reconstrucción de la imagen.</b>	<b>8</b>
<b>2.2. Bases ortonormales.</b>	<b>10</b>
<b>2.2.1. Base..</b>	<b>10</b>
<b>2.2.2. Base ortonormal.</b>	<b>10</b>
<b>2.2.3. Matriz ortogonal.</b>	<b>11</b>
<b>2.3. Matriz de Hadamard..</b>	<b>11</b>
<b>2.3.1. Patrones de Hadamard..</b>	<b>13</b>
<b>2.3.2. Transformada de Hadamard en imágenes..</b>	<b>13</b>
<b>2.3.3. Propiedades de la transformada de Hadamard en imágenes.</b>	<b>14</b>
<b>2.3.4. Ordenamientos de la matriz de Hadamard.</b>	<b>16</b>
<b>2.4. Muestreo de señales en tiempo continuo.</b>	<b>25</b>
<b>2.4.1. Señales.</b>	<b>25</b>
<b>2.4.2. Conversiones analógica-digital y digital-analógica.</b>	<b>25</b>
<b>2.4.3. Muestreo periódico.</b>	<b>27</b>
<b>2.4.4. Teorema de muestreo.</b>	<b>28</b>
<b>2.5. Sensado comprimido.</b>	<b>29</b>
<b>2.5.1. Señales compresibles..</b>	<b>29</b>
<b>2.5.2. El problema del sensado comprimido..</b>	<b>30</b>
<b>2.5.3. Matriz estable de medición.</b>	<b>30</b>
<b>2.5.4. Espacios vectoriales normados.</b>	<b>31</b>

2.5.5. Algoritmo de reconstrucción. . . . .	33
<b>Capítulo 3. Desarrollo experimental y simulaciones. . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.1. Primeras simulaciones en reconstrucción de imágenes mediante suma de patrones, transformada de Hadamard y algoritmos de sensado comprimido. . . . .</b>	<b>34</b>
3.1.1. Suma de patrones de Hadamard.. . . .	34
3.1.2. Transformada Hadamard. . . . .	35
3.1.3. Algoritmos de sensado comprimido. . . . .	35
3.2. Obtención de los ordenamientos de la matriz de Hadamard.. . . .	38
3.3. Experimentación. . . . .	40
3.3.1. Interfaz de control.. . . .	40
3.3.2. Componentes del arreglo experimental. . . . .	41
3.3.3. Configuración del arreglo experimental.. . . .	43
3.4. Adquisición de la señal y coeficientes de correlación. . . . .	46
<b>Capítulo 4. Resultados. . . . .</b>	<b>52</b>
4.1. Resultados de simulaciones computacionales. . . . .	53
4.1.1. Reconstrucción de la imagen “cameraman”. . . . .	53
4.1.2. Reconstrucción de la imagen “pout”. . . . .	56
4.2. Resultados experimentales. . . . .	59
4.2.1. Primeras pruebas realizadas. . . . .	59
4.2.2. Reconstrucción logo Universidad Tecnológica de la Mixteca . . . . .	62
4.2.3. Reconstrucción de la prueba de resolución USAF de 1951 . . . . .	65
<b>Capítulo 5. Análisis de resultados. . . . .</b>	<b>68</b>
5.1. Simulaciones computacionales. . . . .	68
5.1.1. Espectros de Hadamard. . . . .	71
5.2. Mediciones experimentales. . . . .	73
5.3. Pruebas de evaluación. . . . .	80
5.3.1. Calidad perceptual contra precisión. . . . .	83
5.4. Algoritmo TVAL3 contra L1-magic.. . . .	84
5.5. Tiempos de cómputo. . . . .	86
<b>Capítulo 6. Conclusiones. . . . .</b>	<b>89</b>
<b>Apéndice A . . . . .</b>	<b>93</b>
A.1. DMD. . . . .	93
A.2. Tarjeta de adquisición de la señal. . . . .	94
A.3. Fotodetector. . . . .	95

<b>Apéndice B</b>	<b>96</b>
<b>B.1. Código para generar y guardar los patrones de Hadamard.</b>	<b>96</b>
<b>B.2. Código para generar y guardar las matrices de los ordenamientos.</b>	<b>96</b>
<b>B.3. Función “hadamard2graycode” para generar la matriz secuencial de Hadamard.</b>	<b>98</b>
<b>B.4. Función “Walsh_Paley_Transform” para generar la matriz Walsh-Paley de Hadamard.</b>	<b>99</b>
<b>B.5. Función “ZigZagScan” para realizar un escaneo en zigzag de una matriz.</b>	<b>99</b>
<b>B.6. Función “Cake_Cutting” para generar la matriz del orden Cake cutting.</b>	<b>100</b>
<b>B.7. Código para obtener el vector de índices del orden Descendente de la matriz de Hadamard.</b>	<b>101</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>103</b>
<b>Referencias</b>	<b>107</b>

## Capítulo 1. Introducción.

A lo largo de la historia, el ser humano ha sentido la necesidad de plasmar imágenes del mundo que le rodea, incluso desde los tiempos en que se realizaban pinturas rupestres [1]. Esta práctica propició el pensamiento cognitivo de alto nivel del ser humano [2]. El método para realizar esta actividad ha evolucionado a lo largo del tiempo, desde el uso de piedras, papel o madera junto con distintos tipos de pigmentos, hasta el descubrimiento de la fotografía tal como la conocemos hoy en día, realizado por Nicéphore Niépce.

En la actualidad, las representaciones fotográficas se realizan mediante el empleo de instrumentos tecnológicos y procesos tanto fotoquímicos como digitales [1]. Las cámaras fotográficas utilizadas actualmente utilizan arreglos 2D de sensores de luz, los cuales, requieren de millones de píxeles para alcanzar la alta calidad que ofrecen. Esto implica un incremento en el número de elementos del sensor y, consecuentemente, un aumento en el costo y complejidad del dispositivo. Asimismo, los requerimientos de memoria crecen a un ritmo similar. Para hacer frente a esta situación, las imágenes son comprimidas con el fin de reducir su tamaño y ahorrar espacio [3].

Comúnmente, estos sensores están basados en tecnologías de silicio como los dispositivos de carga acoplada (CCD) o píxeles de semiconductor complementario de óxido metálico (CMOS). Estas tecnologías han traído beneficios significativos, como costos más bajos y un alto desempeño, permitiendo una amplia gama de aplicaciones en el campo de la imagen gracias a su capacidad para captar ciertas regiones del espectro electromagnético, particularmente en el espectro visible [4].

En contraste, la formación de imágenes con un solo píxel (SPI) se basa en el uso de un único detector para obtener una imagen a partir de una escena al hacer proyectar una serie de patrones de luz y registrar las fluctuaciones de intensidad de la fuente de luz empleada con el detector de un solo píxel [5, 6]. Es importante destacar que estas intensidades de la fuente de luz no necesariamente tienen que pertenecer al espectro visible [7]. Por consiguiente, los detectores de un solo píxel ofrecen ventajas significativas en cuanto a rendimiento, como la sensibilidad a longitudes de onda no visibles o una resolución de tiempo muy precisa, características que pueden resultar poco prácticas o prohibitivamente costosas de implementar en un dispositivo de imagen convencional. Estas ventajas se vuelven especialmente relevantes en escenarios donde las señales detectadas son muy débiles debido a esparcimiento o absorción del medio circundante.

La técnica de formación de imágenes con un solo píxel ha proporcionado una plataforma de prueba ideal para el desarrollo de nuevas tecnologías de detección, lo que ha permitido el surgimiento de sistemas rentables de imágenes en diversas longitudes de onda dentro del espectro electromagnético. En la última década, han surgido varias aplicaciones para la cámara de un solo

píxel. Por ejemplo, se han utilizado en imágenes en el espectro visible [8], imágenes multiespectrales [9–11], imágenes hiperespectrales [12, 13], imágenes infrarrojas [14], imágenes de terahertz [15, 16], imágenes de gas [17], video en tiempo real [14, 18, 19], microscopía [12, 20], imágenes 3D [18, 21–24], imágenes a través de medios dispersivos [25, 26], tomografía de difracción de rayos X [27] y en telescopios VIS-NIR [28].

El concepto de imágenes de un solo píxel surgió tras el desarrollo de sensado comprimido [29–31] y fue reportado poco después en un trabajo por Duarte et. al. [8]. En este trabajo pionero se muestra una combinación de diferentes técnicas de obtención de imágenes y muestreo el cual inspiró el campo de imágenes de un solo píxel colocando los cimientos para recuperar las imágenes obtenidas de la cámara de un solo píxel cuando el número de mediciones es menor que el número total de píxeles desconocidos en la imagen, es decir, cuando las propiedades de la imagen se detectan compresivamente, también conocidas como submuestreo [5].

Para que los sistemas de imágenes de un solo píxel sean ampliamente adoptados es necesaria una reducción significativa del número de patrones y mediciones requeridas. Recientemente, sensado comprimido (SC) [32] que permite la reconstrucción de una señal, bajo ciertas condiciones, usando un limitado subconjunto de muestras. SC ha mostrado ser una ruta para explotar la “redundancia” en la estructura de la mayoría de las señales naturales o imágenes.

La teoría de SC está construida basada en dos condiciones fundamentales principales: escasez e incoherencia [33], es decir, SC está basado en el principio de que la mayoría de imágenes son *sparse*, esparcidas en español, cuando se expresan en la base apropiada, esto es, con una base en la cual se tengan muchos coeficientes cercanos o iguales a cero. SC permite la reconstrucción de imágenes con muchas menos mediciones de las que se requieren en muestreos convencionales, permitiendo así, una adquisición más rápida de datos. De esta forma, la idea fundamental del sensado comprimido es detectar directamente los datos en forma comprimida, en lugar de muestrear primero a una alta velocidad y luego comprimir los datos muestreados. Esto implica operar a una tasa de muestreo más baja. La importancia de las características del sensado comprimido radica en el hecho de que contradice la teoría de muestreo de Shannon-Nyquist la cual establece que para poder reconstruir una señal analógica la tasa de muestreo debe ser al menos dos veces la frecuencia más alta contenida en la señal [34]. Debido a que el sensado comprimido se basa en la adquisición de un número restringido de mediciones, es crucial elegir cuidadosamente los patrones utilizados en los sistemas y arreglos de la cámara de un solo píxel. Un conjunto de patrones bien seleccionado permitirá una mejor reconstrucción de la imagen utilizando menos muestras, lo que reducirá tanto la cantidad de tiempo requerido para escanear el objeto como la cantidad de memoria necesaria para almacenar los patrones de proyección y la información muestreada.

Sin embargo, si el conjunto consiste en patrones no ortogonales y/o las mediciones están sujetas a ruido, entonces se necesita un gran número de mediciones para lograr una buena relación señal-ruido (SNR en inglés) en la imagen final. Un enfoque común en el caso de la cámara de un solo píxel es utilizar un conjunto de patrones ortogonales para muestrear la imagen. Tal es el caso de la base de Hadamard cuyo uso fue demostrado por Duarte et al. [8], siendo especialmente apropiada gracias a su naturaleza binaria de patrones que pueden proyectarse utilizando la tecnología DMD (Dispositivo Digital de Microespejos) como modulador espacial de luz.

Además de la base de Hadamard, se utilizan otras bases de muestreo con patrones ortogonales en el sensado comprimido, como la transformada discreta del coseno (DCT, en inglés) y noiselet [35], Fourier [36], wavelet [37], Morlet wavelet [38] y Cústicas [39].

Recientemente, en varios artículos se ha estudiado la influencia de la selección de patrones, bajo diversos criterios, en la calidad de la reconstrucción de imágenes, especialmente al utilizar la matriz de Hadamard como base de detección [40–42]. En este trabajo, se presenta un estudio sobre el impacto del orden de proyección de los patrones en la calidad de reconstrucción de imágenes, además de una comparación cuantitativa de ordenamientos específicos utilizados en el estado de arte.

## 1.1 Planteamiento del problema.

Una de las principales desventajas en la implementación de la cámara de un solo píxel es el tiempo empleado para adquirir la señal necesaria en la reconstrucción de la imagen. Esto se debe a que se requieren  $n^2$  patrones para obtener una imagen con una resolución de  $n \times n$  píxeles. Una solución innovadora para abordar este inconveniente es emplear algoritmos de sensado comprimido, compressive sensing en inglés. Estos algoritmos permiten la reconstrucción de imágenes con muchas menos mediciones de las que se necesitarían en muestreos convencionales, lo que resulta en una adquisición de datos más rápida sin comprometer la calidad de la imagen.

Una propuesta alternativa para resolver este problema es modificar el orden de secuencia en el que se despliegan los patrones de la matriz de Hadamard, considerando la ponderación de cada patrón como criterio. Es posible combinar estas dos técnicas, y de hecho, son ampliamente utilizadas en el estado del arte [40–42].

## **1.2 Justificación.**

El uso de diferentes ordenamientos de la matriz de Hadamard en la cámara de un solo pixel afecta las distribuciones de los coeficientes de correlación en la señal adquirida. Dependiendo de las características y propiedades del ordenamiento en cuestión, se producirá un mejor o peor resultado en la calidad de la imagen cuando sólo se adquiriera una cierta porción de la señal completa. En este trabajo, se reconstruirán imágenes utilizando la técnica de sensado comprimido en combinación de nueve ordenamientos de la matriz de Hadamard. Se compararán cualitativa y cuantitativamente los resultados obtenidos y de esta forma determinar las cualidades de la imagen. El estudio realizado en esta tesis permitirá reconstruir imágenes utilizando la menor cantidad de patrones posibles sin comprometer la calidad de estas y, de esta forma, reducir significativamente el tiempo del procedimiento. Además, proporcionará una perspectiva sólida para seleccionar la mejor alternativa dentro de los métodos y procedimientos previamente propuestos en el estado del arte señalando una vía óptima para llevar a cabo la obtención de imágenes en la cámara de un solo pixel. Se llevará a cabo un análisis exhaustivo de estas propuestas y se comprobarán o replicarán los resultados obtenidos en trabajos previos.

## **1.3 Hipótesis.**

Los ordenamientos de los patrones de Hadamard que permitan recuperar la señal de la imagen logrando que los coeficientes de correlación se distribuyan de manera decreciente según su magnitud serán los más adecuados para obtener la mejor calidad de imagen cuando la señal se trunque. Esto permitirá distinguir las diferencias entre cada ordenamiento y seleccionar el más apropiado según las necesidades específicas de cada procedimiento.

## **1.4 Objetivos y metas.**

### **1.4.1 Objetivo general**

El objetivo principal de este trabajo es lograr la reconstrucción de imágenes tanto experimentalmente como mediante simulaciones. Se busca evaluar el impacto de los diferentes ordenamientos de la matriz de Hadamard en la calidad de las imágenes obtenidas cuando se adquieren solo porciones de la señal total, es decir, de los coeficientes de correlación. A través de este análisis, se pretende proporcionar una vía óptima para reducir el tiempo del procedimiento de reconstrucción de imágenes.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

1. Revisar el estado del arte en el área de single-pixel imaging.
2. Profundizar en los fundamentos matemáticos del sensado comprimido y la matriz de Hadamard, explorando su teoría, propiedades y aplicaciones en la adquisición y reconstrucción de imágenes.
3. Aplicar el uso de sensado comprimido y las matrices de Hadamard en la cámara de un solo píxel.
4. Caracterizar y obtener los ordenamientos de la matriz de Hadamard, adaptando la programación para su uso posterior.
5. Aprender a utilizar la interfaz desarrollada en LabView para controlar el DMD y la tarjeta de adquisición.
6. Procesar y recuperar las imágenes obtenidas en el laboratorio empleando los ordenamientos de la matriz de Hadamard y algoritmos de sensado comprimido utilizando el software de MATLAB.
7. Comparar cualitativa y cuantitativamente la calidad de las imágenes obtenidas con los diferentes ordenamientos.

### **1.4.3 Metas**

1. Documentación de las técnicas actuales, los avances recientes y las aplicaciones más relevantes de la formación de imágenes con un solo píxel.
2. Entendimiento sólido del funcionamiento del sensado comprimido y la matriz de Hadamard en la reconstrucción de imágenes, incluyendo ejemplos ilustrativos y demostraciones.
3. Obtención de imágenes en simulaciones computacionales aplicando el uso algoritmos de sensado comprimido y la matriz de Hadamard con programación en MATLAB.
4. Generación del conjunto de ordenamientos de la matriz de Hadamard para su uso en simulaciones y en el desarrollo experimental.
5. Dominio y manejo fluido de la interfaz de LabView para el control preciso de los dispositivos experimentales.
6. Configuración y calibración completa del sistema experimental de la cámara de un solo píxel.
7. Procesamiento de la señal digital obtenida con un fotodiodo, para la generación de los coeficientes de correlación.
8. Reconstrucción de imágenes obtenidas en el laboratorio documentando el proceso y evaluando la eficacia de cada ordenamiento en la calidad de la imagen con ayuda de gráficas y tablas.

## 1.5 Metodología.

A continuación se describe brevemente el proceso para el desarrollo del proyecto de tesis:

1. Realizar una revisión bibliográfica exhaustiva del estado del arte en el área de la formación imágenes con un solo píxel, explorando técnicas y avances recientes y sus aplicaciones más relevantes.
2. Profundizar en los detalles técnicos de sensado comprimido y la matriz de Hadamard, incluyendo algoritmos, funciones específicas en MATLAB y métricas para evaluar el desempeño y calidad en la reconstrucción de las imágenes
3. Se desarrollará programación en MATLAB para realizar las primeras simulaciones de reconstrucción de imágenes usando lo investigado sobre sensado comprimido y la matriz de Hadamard.
4. Se obtendrán los ordenamientos de la matriz de Hadamard identificados en la revisión bibliográfica, comprendiendo sus características y principios matemáticos.
5. Se implementará y optimizará la programación necesaria para llevar a cabo tanto el procedimiento experimental como el de simulación. Esto incluirá la creación de archivos para la proyección de los patrones en el DMD, el procesamiento de la señal captada y la adquisición de los coeficientes de correlación.
6. Familiarizarse con la interfaz que permite controlar el DMD y la tarjeta de adquisición de la señal.
7. Se realizarán experimentos en el laboratorio de la cámara de un solo píxel, configurando y calibrando adecuadamente cada componente del arreglo y utilizando distintas figuras impresas con láser en acetato como objetos de prueba.
8. Se evaluarán de forma cualitativa y cuantitativa las imágenes reconstruidas analizando parámetros como la resolución, el contraste y la fidelidad visual, con el fin de obtener resultados para el análisis final de la tesis.

## Capítulo 2. Marco teórico.

### 2.1 La cámara de un solo píxel.

La cámara de un solo píxel consta de dos componentes principales: un modulador espacial de luz y un detector de un solo píxel [5].

Esta técnica permite reconstruir una imagen usando el modulador espacial de luz, colocado antes o después del objeto que se va a fotografiar, éste despliega una secuencia de patrones modulados espacialmente que varía con el tiempo para filtrar la escena, luego, las fluctuaciones de intensidad se registran con un detector de un solo píxel.

En el modo de operación comúnmente llamado **detección estructurada** la fuente de luz es colocada de tal forma que la luz incida primero sobre el objeto para enmascarar la escena, después, la luz reflejada incide sobre el modulador de luz el cual muestra cada patrón seleccionado y finalmente, las intensidades filtradas son medidas por el sensor de un solo píxel (figura 1 (a)). Alternativamente, el modulador de luz puede ser usado para proyectar los patrones en la escena haciendo incidir primero la luz de la fuente en éste y luego, el detector de un solo píxel mide las intensidades de la luz que es devuelta, este modo de operación es llamado **iluminación estructurada** (figura 1 (b)).

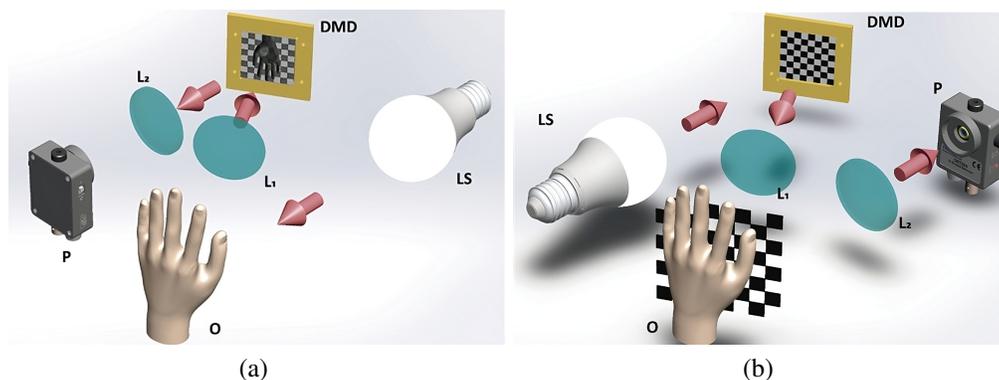


Figura 1: Configuraciones de la cámara de un solo píxel. a) Configuración de detección estructurada. b) Configuración de iluminación estructurada [43].

#### 2.1.1 Dispositivos de microespejos digitales.

Existen varias opciones con respecto a las tecnologías de modulación de luz utilizadas para producir los patrones para los sistemas de imágenes de un solo píxel tanto para detección estructurada como iluminación estructurada [5].

En concreto un DMD (Digital Micromirror Device) el cual consiste en un arreglo de cientos o de miles de microespejos direccionables ofrece un método para modular luz el cual es rápido y funciona en una amplia gama de longitudes de onda (figura 2 (a) y (c) ). Los microespejos pueden ser orientados individualmente a  $\pm 12^\circ$ , con respecto al plano del arreglo, desplegando un patrón binario sobre el DMD. El resultado es que la luz que incide normalmente sobre el DMD es redirigida en dos trayectorias a  $\pm 24^\circ$  respectivamente (figura 2 (b)).

En una configuración típica de la cámara de un solo píxel el DMD se implementa como una transmisión binaria programable donde solo la luz que proviene de los microespejos en el estado “encendido”, corresponde al valor de “+1 ”en el patrón binario, mientras que el correspondiente a “0” es bloqueado. El uso de la luz se puede optimizar midiendo la luz en las direcciones positivas y negativas de la inclinación del espejo. Esto se logra el detector al desplegar un patrón el cual es inmediatamente seguido por su inverso [5] .

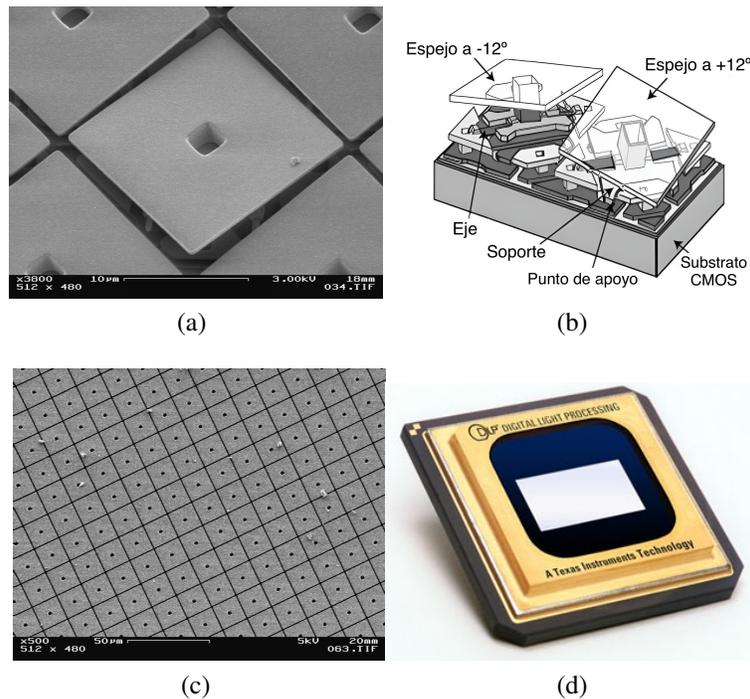


Figura 2: a) Fotografía de un microespejo colocado en la posición de “encendido”,o “apagado” [44]. b) Ángulos de inclinación de un par de microespejos en la unidad DMD [45]. c) Fotografía del arreglo de microespejos en el DMD [44]. d) Fotografía de la pantalla de un DMD [46].

### 2.1.2 Reconstrucción de la imagen.

El método de muestreo que se propone en la cámara de un solo píxel usa una base de patrones ortogonales para obtener las mediciones, en particular, la base de Hadamard es adecuada para realizar la experimentación debido a la naturaleza binaria de sus patrones que pueden ser proyectados

usando un DMD como modulador espacial de luz.

SPI permite capturar imágenes usando un detector sin resolución espacial registrando solo las variaciones de la intensidad de luz  $m_i$  cuando un objeto  $f(x, y)$  es muestreado con un conjunto de patrones  $P_i(x, y)$ , con  $i = 1, 2, \dots, N^2$ ; siendo  $N^2$  el número total de píxeles de la imagen deseada. La  $i$ -ésima intensidad completa en el detector se expresa como:

$$m_i \propto \int \int |f(x, y) P_i(x, y)|^2 dx dy \quad (1)$$

donde los límites de la integral se extienden sobre todos los puntos del objeto muestreado [35].

De esta forma, una medición puede ser modelada como un proceso lineal [41]

$$\mathbf{m} = A\mathbf{f} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la imagen deseada del objeto dispuesta en un vector columna de longitud  $N^2$ ,  $A$  es la matriz de medición cuyas filas de tamaño  $1 \times N^2$  son los patrones de muestreo  $P_i$  y el vector  $\mathbf{m}$  contiene las  $m_i$  mediciones correspondientes.

El proceso de obtener la imagen dado el conjunto de patrones dispuesto en la matriz  $A$  y las mediciones  $\mathbf{m}$  es llamado restauración o reconstrucción. Hay varias maneras de resolver el sistema de la ecuación 2:

a) Invertiendo la matriz de medición cuando sea posible

$$\mathbf{f} = A^{-1}\mathbf{m} \quad (3)$$

lo cual produce un vector unidimensional de la imagen que requiere ser transformado en una imagen 2D.

b) La intensidad del objeto 2D puede ser expresada como una superposición lineal de los patrones de muestreo, ponderados por las mediciones de intensidad [35], y el objeto o la escena es reconstruido multiplicando cada patrón en la secuencia correspondiente a la intensidad medida, resultando en un conjunto de patrones ponderados los cuales son sumados para obtener la imagen.

$$f = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} m_i P_i \quad (4)$$

c) Utilizando métodos no lineales tales como algoritmos de sensado comprimido [47].

## 2.2 Bases ortonormales.

### 2.2.1 Base.

Un conjunto finito de vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$  si

1.  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es linealmente independiente.
2.  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  genera a  $V$ .

Ya que la base es linealmente independiente se tiene que cada vector en dicho espacio tendrá una representación única como una combinación lineal de los vectores base.

En concreto, para cualquier vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , existen coeficientes únicos  $\alpha_i$  tales que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

Si  $A$  es la matriz de tamaño  $n \times n$  con sus columnas dadas por  $\vec{v}_i$  y  $\vec{\alpha}$  el vector de los  $n$  coeficientes  $\alpha_i$ , se puede representar al vector  $\vec{v}$  de manera más compacta

$$\vec{v} = A\vec{\alpha}$$

### 2.2.2 Base ortonormal.

Se dice que un conjunto de vectores  $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$  es un **conjunto ortonormal** si

1.  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$  si  $i \neq j$
2.  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$

Si solo se satisface la primera condición se dice que el conjunto es **ortogonal**.

Una propiedad ventajosa de una base ortonormal es que los coeficientes de proyección  $\alpha_i$  del vector  $\vec{v}$  en la base puede calcularse como

$$\alpha_i = \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle$$

donde  $\langle, \rangle$  denota producto interno. O en notación matricial

$$\vec{\alpha} = A^T \vec{v}$$

### 2.2.3 Matriz ortogonal.

Una matriz  $Q$  de  $n \times n$  es llamada **ortogonal** si  $Q$  es invertible y

$$Q^{-1} = Q^T$$

entonces  $Q^T Q = I$ .

La matriz  $Q$  es ortogonal si y solo si las columnas de  $Q$  forman una base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$  [48].

### 2.3 Matriz de Hadamard.

La matriz de Hadamard es una matriz cuadrada de la cual se obtienen patrones a través de sus filas y columnas que son ortogonales entre sí con valores binarios de +1 y -1. Si  $H$  es una matriz Hadamard de tamaño  $N \times N$  entonces el producto de  $H$  y su transpuesta es la matriz identidad, es decir

$$HH^T = NI \quad (5)$$

con  $I$  la matriz identidad. De igual forma, la matriz de Hadamard  $H$  es simétrica, entonces la ecuación (5) se reduce a

$$HH = NI \quad (6)$$

Las filas y columnas de una matriz Hadamard pueden ser intercambiadas entre sí sin afectar las propiedades de ortogonalidad de la matriz.

La matriz de Hadamard se deriva a partir de la matriz inicial de orden 2 (orden más bajo)  $H_2$  para producir cualquier matriz de tamaño  $2^k$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, si  $H$  es una matriz Hadamard de orden  $N = 2^{k-1}$ , la matriz

$$H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

es una matriz Hadamard de orden  $N = 2^k$  [49]. Un ejemplo se ilustran en las ecuaciones (8, 9) y en la figura 3.

$$H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

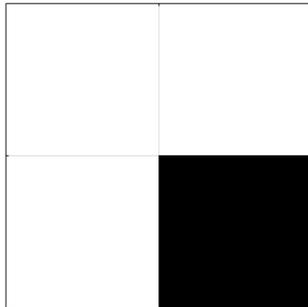
$$H_4 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

De igual forma, se pueden construir a partir de dos matrices de Hadamard utilizando el producto Kronecker, por ejemplo:

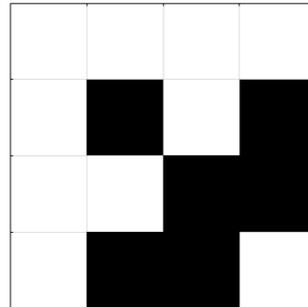
$$H_4 = H_2 \otimes H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

O de manera general

$$H_{2^k} = \underbrace{H_2 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_2}_{k \text{ veces}} = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}}_{k \text{ veces}} \quad (11)$$



(a)



(b)

Figura 3: Matrices de Hadamard de orden 2 (a) y 4 (b). Los cuadrados negros corresponden al valor de  $-1$ , y los cuadrados blancos corresponden al valor de  $+1$ .

### 2.3.1 Patrones de Hadamard.

Los patrones de Hadamard se obtienen multiplicando cada columna de  $H_{2^k}$  por cada renglón de  $H_{2^k}$ , lo cual también es llamado “producto diádico”

$$P_i = \vec{H}_j \vec{H}_l \quad (12)$$

con  $i = 1, 2, \dots, 2^{2k}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^k$  y  $l = 1, 2, \dots, 2^k$ .

Por ejemplo, los 2 primeros patrones Hadamard obtenidos de  $H_4$  se ilustran en las ecuaciones 13, 14 y el resto, en la figura 4.

$$\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

### 2.3.2 Transformada de Hadamard en imágenes.

Sea  $f(x, y)$  el arreglo que representa las muestras de intensidad de una imagen original sobre un arreglo de  $N^2$  puntos. Entonces, la transformada bidimensional de Hadamard,  $F(u, v)$ , de  $f(x, y)$  está dada por el producto matricial

$$[F(u, v)] = [H(u, v)][f(x, y)][H(u, v)] \quad (15)$$

donde  $[H(u, v)]$  es una matriz Hadamard de orden  $N$ .

Una multiplicación por ambos lados de  $[F(u, v)]$  por la matriz Hadamard resulta en

$$[H(u, v)][F(u, v)][H(u, v)] = [H(u, v)][H(u, v)][f(x, y)][H(u, v)][H(u, v)] \quad (16)$$

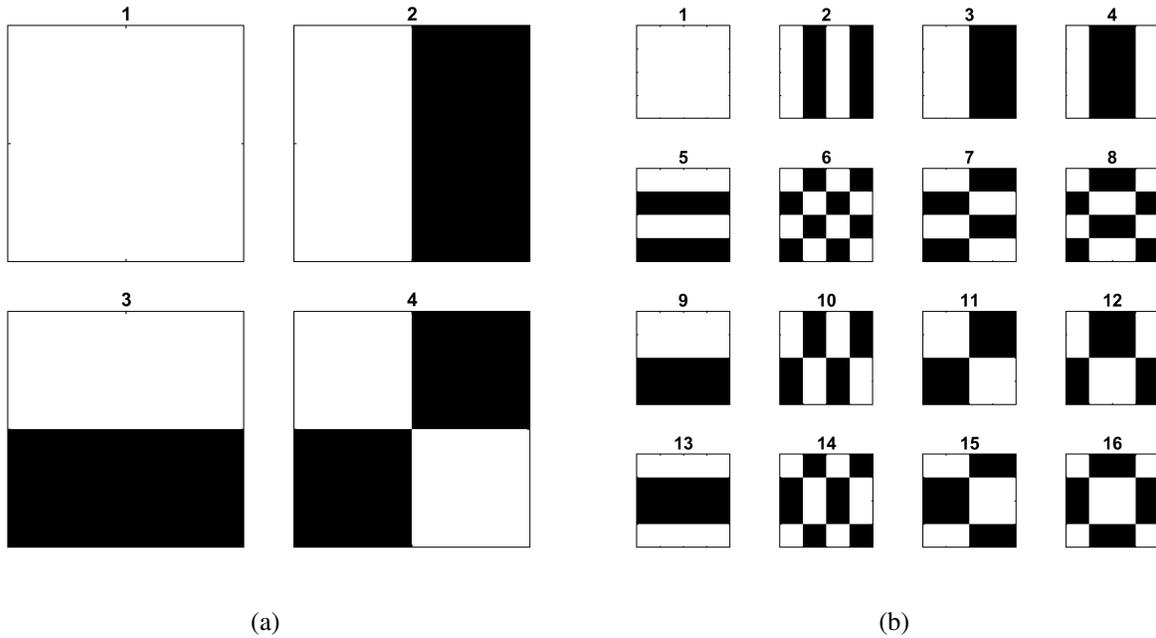


Figura 4: a) Patrones de Hadamard obtenidos con  $H_2$ . b) Patrones de Hadamard obtenidos con  $H_4$ .

Pero, de la ecuación 6 para una matriz Hadamard simétrica,  $HH = NI$ . Por tanto,

$$[f(x, y)] = \frac{1}{N^2}[H(u, v)][F(u, v)][H(u, v)] \quad (17)$$

Esta operación representa la inversa de la transformada de Hadamard y proporciona la codificación de la imagen original que permite su reconstrucción [49].

Se puede adoptar un método alternativo de la transformada e inversa de Hadamard aprovechando las propiedades matriciales y siguiendo el enfoque de las ecuaciones 2 y 3 en el que la transformada Hadamard se obtiene por medio de

$$\mathbf{F} = [H]\mathbf{f} \quad (18)$$

Y la imagen recuperada

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N^2}[H]\mathbf{F} \quad (19)$$

Donde ahora  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{f}$  son vectores unidimensionales y el orden de  $[H]$  crece al cuadrado.

### 2.3.3 Propiedades de la transformada de Hadamard en imágenes.

La transformada Hadamard tiene varias propiedades interesantes. Las propiedades más importantes desde el punto de vista de la codificación de imágenes son el rango dinámico, la conservación

de la energía y la entropía.

El término de secuencia cero

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (20)$$

es una medida del brillo promedio de una escena. Si  $f(x, y)$  es una función real positiva, entonces el valor máximo posible para el término de secuencia cero es  $N^2 A$ , donde  $A$  es el valor máximo de  $f(x, y)$ . Todas las muestras en el dominio de Hadamard, excepto la muestra de secuencia cero, oscilan entre un rango de  $\pm \frac{N^2 A}{2}$ . La magnitud del término de secuencia cero es un límite para la magnitud de todas las demás muestras en el dominio de Hadamard [49].

Existe una propiedad de conservación de energía entre el dominio espacial y el dominio de Hadamard. Específicamente,

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x, y)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2 \quad (21)$$

Esta ecuación es análoga a la relación de Parseval para la transformada de Fourier [50]. La implicación de esta ecuación para la codificación de imágenes es que si algunas de las muestras en el dominio de Hadamard tienen una magnitud grande, entonces muchas de las muestras restantes deben ser necesariamente de muy baja magnitud. Por lo tanto, las muestras de baja magnitud pueden ser descartadas, de la misma forma que con la técnica de codificación de la transformada de Fourier, para obtener una reducción del ancho de banda.

Cuando se considera una imagen bidimensional como una función aleatoria, su entropía representa la cantidad de información promedio contenida en la imagen. De esta forma, si  $f(x, y)$  se considera una función bidimensional aleatoria con una entropía especificada, entonces la entropía de  $F(u, v)$  es la misma que la entropía de  $f(x, y)$  ya que el Jacobiano de la matriz de transformación es unitario [51].

Si la entropía de la imagen original es alta, esto sugiere que la imagen tiene una gran cantidad de detalles o variaciones, lo que significa que se requiere una mayor capacidad de canal para transmitir la información de manera efectiva. Por otro lado, si la entropía es baja, esto indica que la imagen tiene menos detalles o variaciones, lo que permite una codificación más eficiente y una reducción en la capacidad de canal requerida para su transmisión. Por lo tanto, la conservación de la entropía permite que con una codificación adecuada sea posible transmitir tanto una escena como su transformada de Hadamard a través de un canal con la misma capacidad de canal [49].

### 2.3.4 Ordenamientos de la matriz de Hadamard.

En el método de SPI basado en la transformada Hadamard, una imagen puede ser reconstruida proyectando todos los vectores base. Sin embargo, si hay restricciones de tiempo, la mejor opción para lograr el proceso de restauración de la imagen es seleccionar los vectores base más significativos, es decir, aprovechar las propiedades de la matriz de Hadamard para la reconstrucción de imágenes descritas en la sección 2.3.3.

Esto es equivalente a intentar ordenar las filas de la matriz de Hadamard en orden descendente de relevancia y usar solo un porcentaje de las filas de acuerdo con el orden establecido.

Para alcanzar este objetivo, es necesario definir un criterio para asignar un valor numérico a la relevancia de cada fila de la matriz Hadamard [41].

Los ordenamientos a utilizar en la presente se describen a continuación y fueron escogidos debido a su buen desempeño mostrado en trabajos previos.

- **Ordenamiento Natural.**

El orden natural de la matriz Hadamard puede ser calculado usando la ecuación 7, donde  $2^k$  es el tamaño u orden de la matriz Hadamard, con  $k$  un entero no negativo mayor o igual a 2. Debido a su naturaleza, esta matriz es calculada usando métodos recursivos.

La figura 5 muestra un ejemplo del orden natural de una matriz Hadamard para  $k = 4$ .

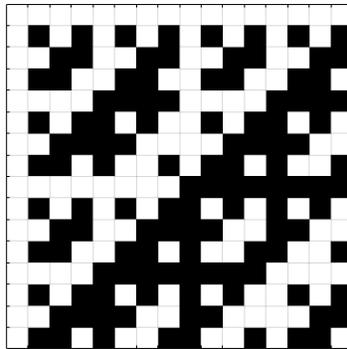


Figura 5: Orden natural de una matriz Hadamard de orden 16.

- **Ordenamiento Secuencial.**

Se puede dar una interpretación de frecuencia a la matriz Hadamard. Se le llama frecuencia al número de cambios de signo a lo largo de cada fila de la matriz Hadamard. Harmuth acuñó la palabra “secuencial” para designar el número de cambios de signo [52]. La ecuación 22 ilustra la

interpretación de frecuencia de una matriz de Hadamard. En esta representación, cada fila corresponde a una frecuencia diferente. Para la primera fila, no hay cambios de signo, lo cual se indica colocando un 0 a la derecha. En contraste, la segunda fila muestra un total de 7 cambios de signo, indicado de igual manera con un 7 a la derecha, y así sucesivamente.

Es posible construir una matriz Hadamard de orden  $N = 2^n$  que tenga componentes de frecuencia para cada entero desde 0 hasta  $N - 1$ . La interpretación de frecuencia de las filas de una matriz Hadamard conduce a considerar a las filas equivalentes a ondas rectangulares en el rango  $\pm 1$  con un subperiodo de  $\frac{1}{N}$  unidades [49].

$$H_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \quad (22)$$

El orden de secuencial de la matriz de Hadamard se puede construir del ordenamiento de la matriz de Hadamard aplicando primero la permutación de inversión de bits para cada número de fila y después la permutación de código Gray.

Una permutación de inversión de bits es una permutación de una secuencia de  $n$  elementos, donde  $n = 2^k$  es una potencia de dos. Se define mediante la indexación de los elementos de la secuencia por los números de 0 a  $n - 1$  y luego se invierten las representaciones binarias de cada uno de estos números,  $(n_2n_1n_0) \rightarrow (n_1n_0n_2) \rightarrow (n_0n_1n_2)$ . Cada elemento se asigna a la nueva posición dada por este valor invertido.

El código Gray, nombrado así en honor del investigador Frank Gray, es un sistema de numeración binario en el que dos números consecutivos difieren solamente en uno de sus dígitos.

El procedimiento para ordenar las filas de la matriz de Hadamard  $H_4$  de la ecuación 22 se ilustra en la figura 6. El resultado del ordenamiento se muestra en la ecuación 23.

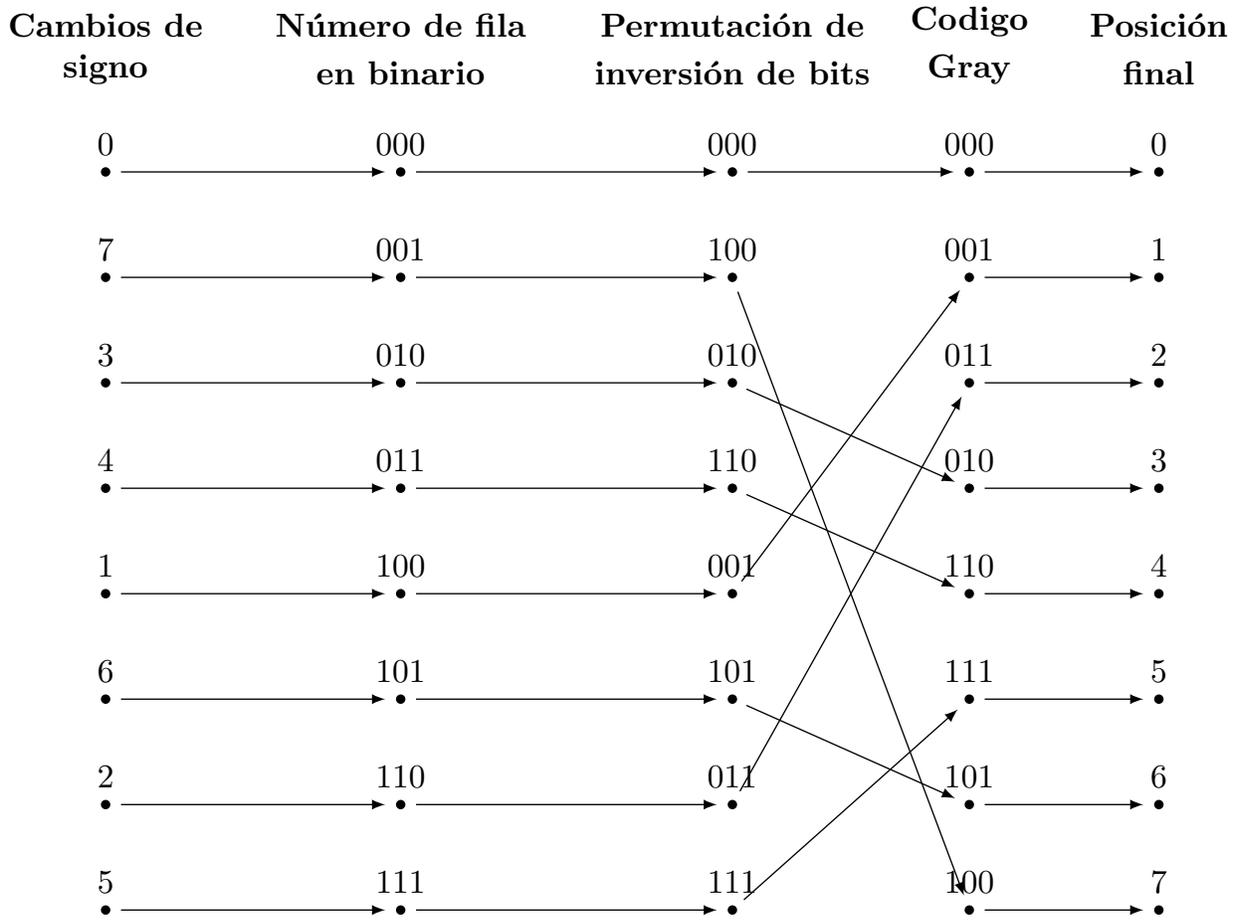


Figura 6: Secuencia para ordenar la matriz de Hadamard  $H_8$  [53].

$$S_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \quad (23)$$

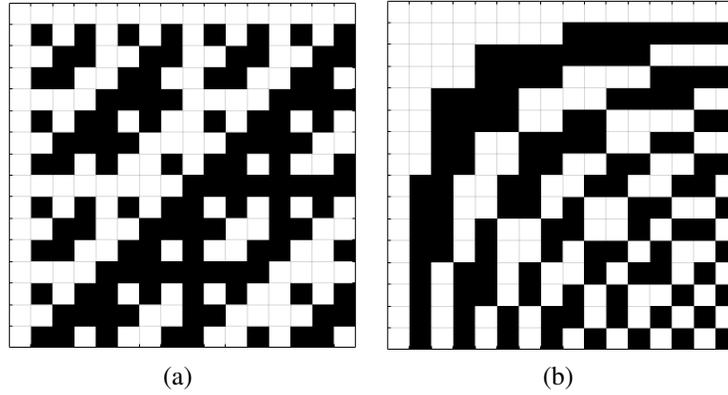


Figura 7: Comparación entre  $H_{16}$  y  $S_{16}$ . (a) orden natural la matriz de Hadamard; (b) orden secuencial de la matriz de Hadamard.

• **Ordenamiento Walsh-Paley.**

El sistema Walsh-Paley (a veces llamado orden-diádico de la matriz Walsh-Hadamard) introducido por Walsh en 1923 [54] es construido recursivamente mediante

$$P_N = \begin{pmatrix} P_{N/2} \otimes (+1 & +1) \\ P_{N/2} \otimes (+1 & -1) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } P_1 = (1), \quad N = 2^n, n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

En la figura 8 se muestran matrices Walsh-Paley de órdenes 4, 8 y 16.

Por ejemplo, para  $n = 3$  obtenemos

$$P_8 = \begin{pmatrix} P_4 \otimes (+1 & +1) \\ P_4 \otimes (+1 & -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \otimes (+1 & +1) \\ \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \otimes (+1 & -1) \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

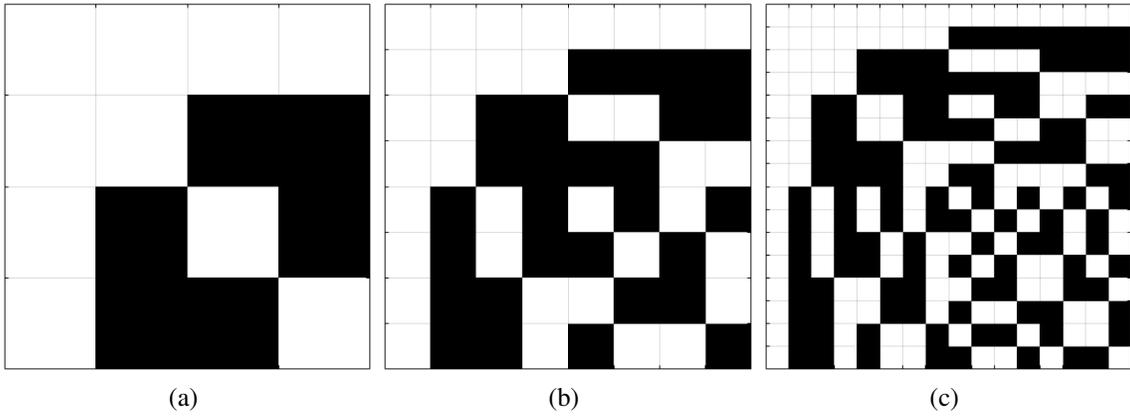


Figura 8: Matrices Walsh-Paley de órdenes a) 4, b) 8, c) 16.

Los elementos de la matriz Walsh-Paley de orden  $N = 2^n$  pueden ser expresados como

$$wal_p(j, k) = (-1)^{\sum_{m=0}^{n-1} (k_{n-m} + k_{n-m-1})j_m}$$

donde  $j_m, k_m$  son los  $m$ -ésimos bits en la representación binaria de  $j$  y  $k$ .

Las matrices Walsh-Paley tienen propiedades similares a las matrices Hadamard. El conjunto de funciones  $\{wal_p(0, k), wal_p(1, k), \dots, wal_p(n-1, k)\}$ , donde

$$\begin{aligned} wal_p(0, k) &= \{wal_p(0, 1), wal_p(0, 2), \dots, wal_p(0, n-1)\} \\ wal_p(1, k) &= \{wal_p(1, 1), wal_p(1, 2), \dots, wal_p(1, n-1)\} \\ &\dots \\ wal_p(n-1, k) &= \{wal_p(0, k), wal_p(1, k), \dots, wal_p(n-1, n-1)\} \end{aligned} \quad (26)$$

es llamado el sistema de funciones discretas Walsh-Paley, o la base de funciones discretas Walsh-Paley [55].

- **Ordenamiento Frecuencial (GCS +) y (GCS -).**

La matriz de este ordenamiento es obtenida a través de los patrones reordenados de la matriz Secuencial, los cuales se consiguen utilizando el método de la sección previa. Es llamada GCS pues se utiliza como base una secuencia del código Gray (Gray Code Sequence). También es llamada orden Frecuencial pues como se ve en la figura 9 a) y c) los patrones parecen aumentar su frecuencia en las variaciones de tonalidades blancas y negras en sus filas y columnas. El signo + o - se debe a trasponer o no los patrones iniciales.

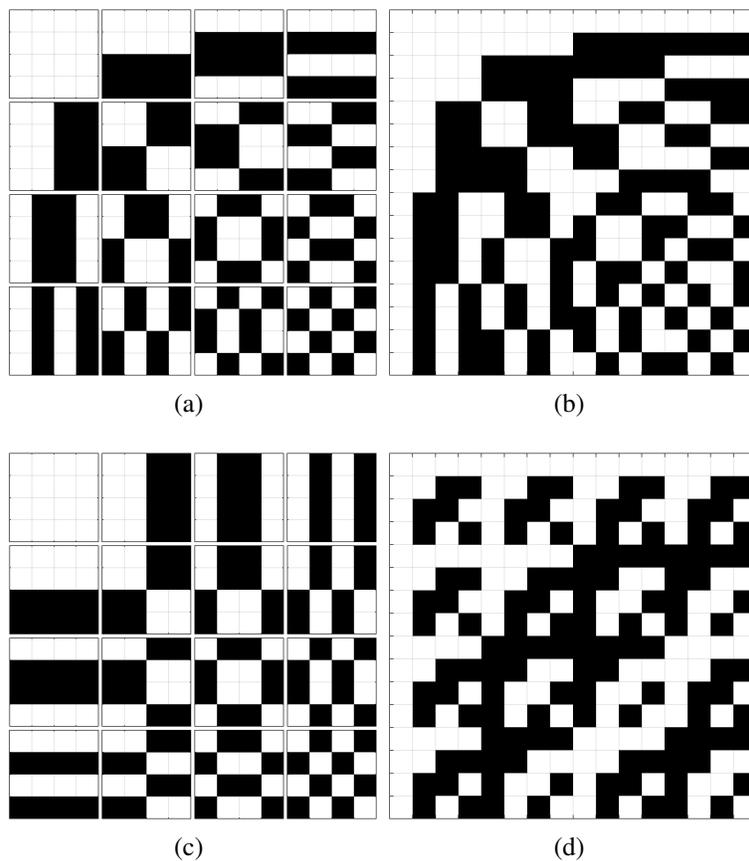


Figura 9: a) Patrones del ordenamiento GCS+ obtenidos a través de la matriz Secuencial, b) Matriz CGS+ generada a partir de los patrones, c) Patrones del ordenamiento GCS-, d) Matriz GCS- generada a partir de los patrones respectivos.

- **Ordenamiento en zigzag (GCS + S) y (GCS - S).**

En este ordenamiento, los patrones son recorridos en forma de zigzag desde el patrón superior izquierdo al patrón inferior derecho (figura 10). El recorrido en zigzag permite elegir los patrones con energía más alta o que más contribuyen en la restauración de la imagen [56].

H. Ma et al. mostró que un escaneo en zigzag de un reordenamiento 4–dimensional de los patrones

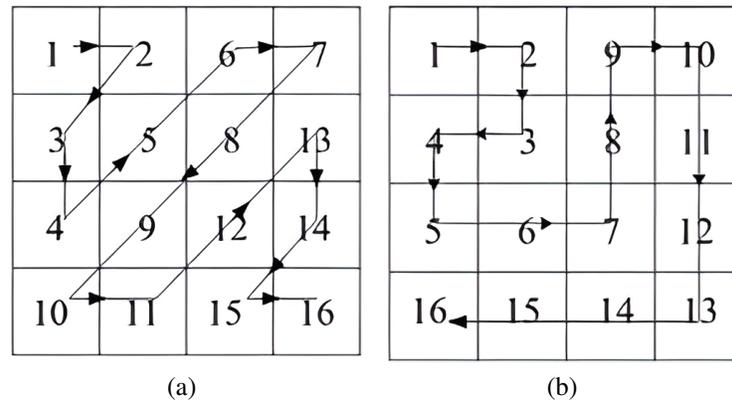


Figura 10: Ejemplo de una indexación y un recorrido a) transversal zigzag b) cuadrado [56].

base de Hadamard tiene la característica que permite concentrar los coeficientes de mayor valor de energía en la esquina superior izquierda y decrecer vertical y horizontalmente [56]. Sin embargo, el recorrido considerado recorre los vectores base en un orden fijo usando el ordenamiento Natural de la matriz de Hadamard.

L. López-García et al. [41] encontraron que cambiar la indexación de los vectores base permite mejorar la velocidad de muestreo usando los más importantes vectores para restaurar la imagen, se eligió una indexación derivada de permutar los vectores en un orden ascendente de acuerdo con el cambio de signo (orden Secuencial). Se realizó una combinación de los patrones generados por el orden Frecuencial y el recorrido zigzag llamándolo método GCS+S (figura 11), el caso para GCS-S es invirtiendo la dirección del zigzag o de la indexación (figura 12).

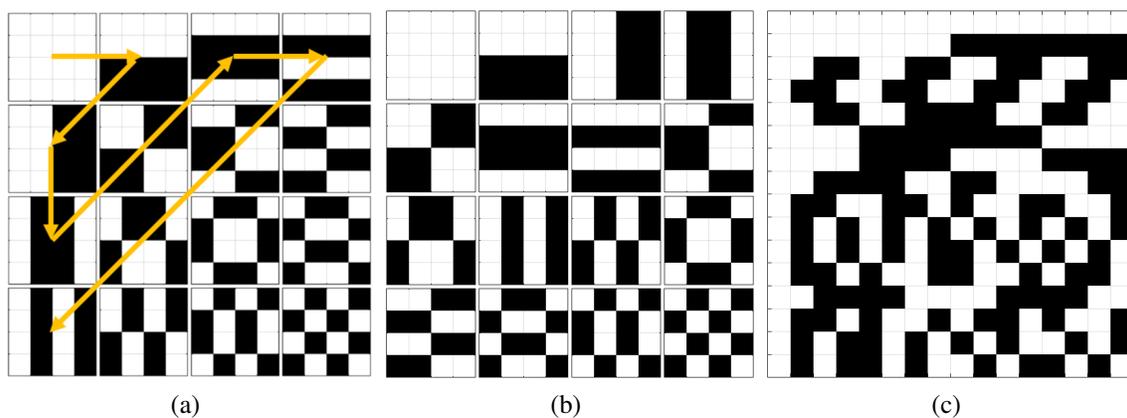


Figura 11: Método GCS+S a) recorrido en zigzag de patrones del orden Frecuencial, b) patrones ordenados en zigzag, c) matriz del orden GCS+S

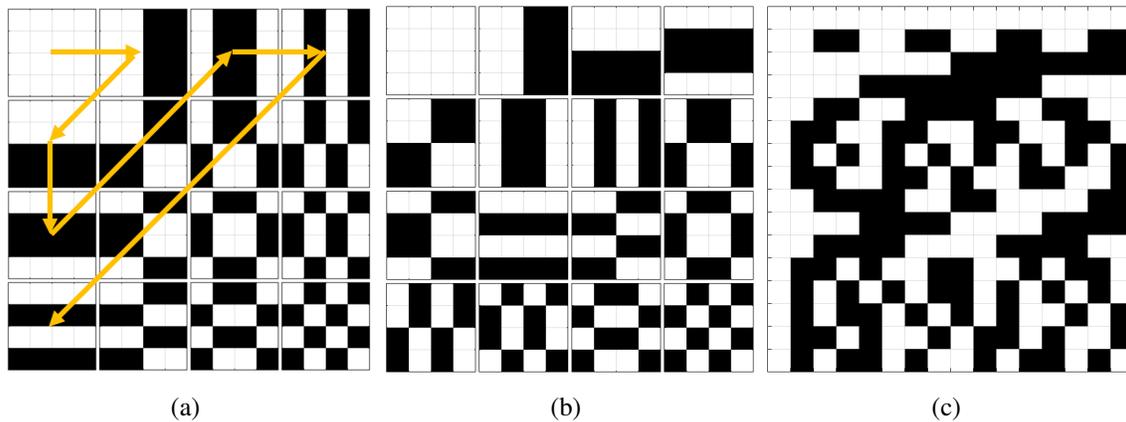


Figura 12: Método GCS – S a) recorrido en zigzag de patrones del orden Frecuencial, b) patrones ordenados en zigzag c) matriz del orden GCS–S

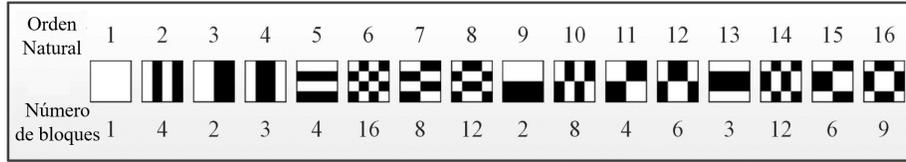
- **Ordenamiento Cake-cutting.**

Wen-Kai Yu [57] propuso un nuevo ordenamiento de Hadamard, al que llamo Cake-cutting, donde los patrones de proyección son ordenados incrementando el número de componentes conectados. La estrategia llamada Cake-Cutting permite reordenar de manera óptima la base Hadamard, basado en la contribución de los patrones base en la reconstrucción.

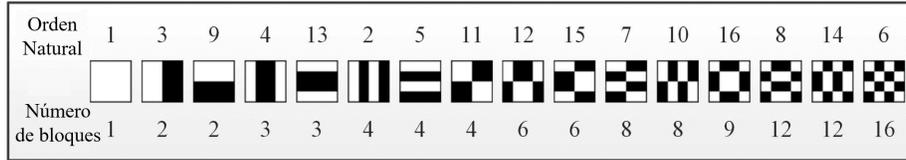
El método propuesto es capaz de reconstruir imágenes de alta calidad y de gran tamaño en píxeles con una increíble reducción en la velocidad de muestreo, realizando un muestreo súper Sub-Nyquist y disminuyendo significativamente el tiempo de adquisición [57].

Cada fila de la matriz Hadamard de tamaño  $N \times N$  es transformado en una matriz de  $p \times q = N$ . Imaginando a cada patrón base como un *pastel*; se puede contar en cuántas *piezas* se corta este pastel, y cada pieza puede ser considerada como una *mota* (región conectada). Es por eso que este método es conocido como estrategia Cake-cutting (Corte de pastel, CC en inglés) [57].

En topología y matemáticas, una región conectada es una región topológica que no puede ser representada como la unión de dos o más subconjuntos disjuntos no vacíos. Esto sugiere que los valores en cada pieza del pastel son todos  $-1$  (en negro) o  $+1$  (en blanco). De este modo, el número de piezas del pastel puede ser denotado por el número de regiones conectadas de  $-1$  y de  $+1$ . Además, para un pixel en un patrón base, sus píxeles adjuntos (arriba y abajo, izquierda y derecha) con los mismos valores puede ser tratadas como una parte de su región conectada. De acuerdo con la teoría de CI (Correspondence imaging), solo una pequeña fracción de los patrones completos contribuyen con valores de intensidad más grandes.



(a)



(b)

Figura 13: a) Patrones base de  $H_{16}$  en el orden natural, b) patrones base de  $H_{16}$  en el orden optimizado “Cake-cutting” [57].

Se encontró que cuantas menos regiones conectadas contiene un patrón base, tanto mayor será la probabilidad de que este patrón sea significativo o genere un valor medido más alto para un mismo objeto. Por lo tanto, aquí, se ordenan todos los patrones base de Hadamard de acuerdo con su número de piezas y se adquiere una secuencia de ordenamiento *seq* de tamaño  $N \times 1$ . Después de eso, los  $N$  patrones reordenados pueden ser transformados en  $N$  vectores filas, cada uno de tamaño  $1 \times N$ , formando una matriz de medición de  $N \times N$ . La figura 13 da un ejemplo de cómo funciona el ordenamiento Cake-cutting de la base Hadamard.

- **Ordenamiento descendente.**

Este ordenamiento se basa en el uso de la gráfica de una señal de las intensidades de la fuente de luz (o coeficientes de correlación) registradas por el sensor de un solo píxel. Si primero se registran las intensidades de cualquier otro ordenamiento mencionado anteriormente y luego, mediante algún método se ordenan los coeficientes de las intensidades en orden descendente, se conseguirá colocar a los coeficientes de mayor peso en una región muy concentrada (ver figura 14). Si se etiqueta cada coeficiente con su patrón correspondiente se puede obtener la secuencia ideal en la que los patrones deben ser desplegados para realizar la reconstrucción de la imagen más optimizada, permitiendo truncar mucho más la señal.

Técnicamente éste no es un ordenamiento único pues requiere hacer uso de algún otro previamente, además de que solo podría ser utilizado para una escena en concreto pues si se cambia algún parámetro de la escena (o la escena en sí misma) la señal captada en el sensor y el ordenamiento requerido serán distintos.

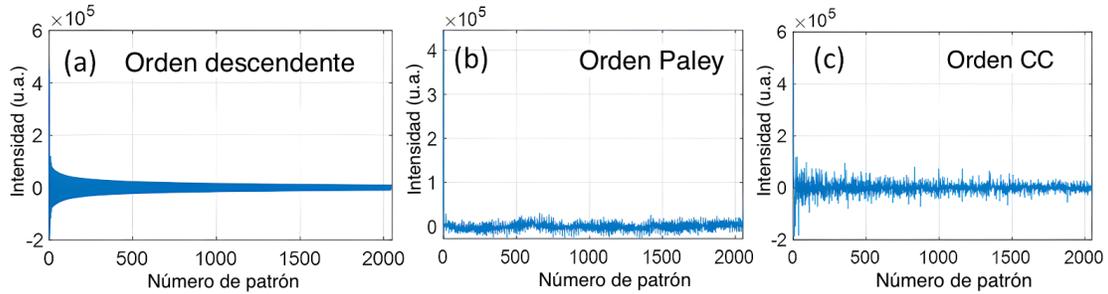


Figura 14: Gráficas de intensidad la señal medida ordenada en forma a) descendente, usando ordenamiento b) Walsh-Paley y c) Cake-cutting [40].

## 2.4 Muestreo de señales en tiempo continuo.

### 2.4.1 Señales.

Una señal se define como cualquier magnitud física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Matemáticamente, describimos una señal como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, las funciones

$$s_1(t) = 5t$$

$$s_2(t) = 20t^2$$

describen dos señales [58].

Existen casos en los que la relación funcional es desconocida o extremadamente compleja como una señal de voz (figura 15) la cual no se puede describir funcionalmente. En general, un segmento de voz se puede representar con un alto grado de precisión como la suma de varias señales sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias, es decir, como

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \text{sen}[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)]$$

### 2.4.2 Conversiones analógica-digital y digital-analógica.

La mayor parte de la señales como las señales de voz, las señales biológicas, sísmicas, de radar, de sonar y las diversas señales de comunicación como las de audio y vídeo, son analógicas. Para poder procesar señales analógicas a través de medios digitales, primero es necesario convertirlas a formato digital, es decir, convertirlas en una secuencia de números con una precisión finita [58].

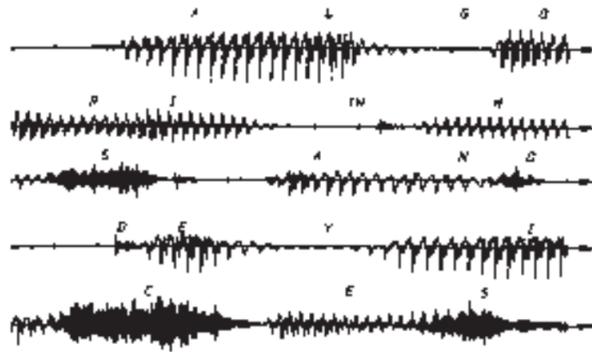


Figura 15: Ejemplo de una señal de voz [58] .

Este procedimiento se denomina conversión analógica-digital y es un proceso de tres pasos, el cual se ilustra en la figura 16.

1. Muestreo. Consiste en la conversión de una señal continua en el tiempo en una señal discreta en el tiempo obtenida mediante la toma de “muestras” de la señal continua en el tiempo en instantes discretos de tiempo. Por tanto, si  $x_a(t)$  es la entrada del muestreador, la salida será  $x_a(nT) \equiv x(n)$ , donde  $T$  es el *intervalo de muestreo*.
2. Cuantificación. Realiza la conversión de una señal de valores continuos tomados en instantes discretos de tiempo en una señal de valores discretos en instantes de tiempo discretos (es decir, es una señal digital). El valor de cada muestra de la señal se representa mediante un valor seleccionado dentro de un conjunto finito de posibles valores. La diferencia entre la muestra no cuantificada  $x(n)$  y la salida cuantificada  $x_q(n)$  es el error de cuantificación.
3. Codificación. En el proceso de codificación, cada valor discreto  $x_q(n)$  se representa mediante una secuencia binaria de  $b$ -bits [58].

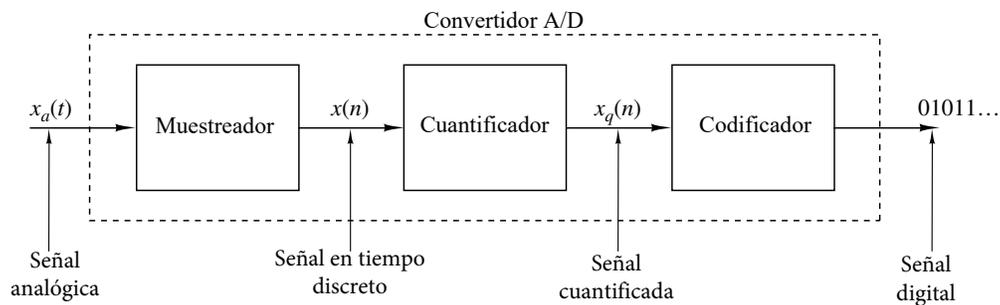


Figura 16: Partes básicas de un convertidor analógico-digital (A/D) [58] .

### 2.4.3 Muestreo periódico.

Las representaciones discretas de las señales pueden tomar muchas formas, estas representaciones se basan frecuentemente en un conocimiento previo de las propiedades de la señal que pueden ser explotadas para obtener representaciones más eficientes. En general se parte de una representación en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo, obtenida mediante muestreo periódico. Es decir, a partir de una señal continua  $x_c(t)$  se obtiene una secuencia de muestras  $x[n]$  mediante la relación

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

Donde  $T$  es el *periodo de muestreo* y su inverso,  $f_s = 1/T$ , se denomina *frecuencia de muestreo* en unidades de muestras por segundo [59].

Es conveniente representar matemáticamente el proceso de muestreo dividiéndolo en las dos etapas que se indican en la figura 17 (a). Las etapas consisten en un modulador con un tren de impulsos seguido por una conversión del tren de impulsos en una secuencia

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

donde  $\delta(t)$  es la función impulso unidad o delta de Dirac. El producto de  $s(t)$  y  $x_c(t)$  es por tanto

$$x_s(t) = x_c(t)s(t)$$

$$x_s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT).$$

Utilizando la propiedad de la función impulso en tiempo continuo  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ ,  $x_s(t)$  se puede expresar como

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Es decir, el tamaño (área) del impulso en el instante de muestreo  $nT$  es igual al valor de la señal en tiempo continuo en ese instante. En este sentido, la modulación del tren de impulsos es una representación matemática del muestreo [59], ver figura 17 (a)-(c).

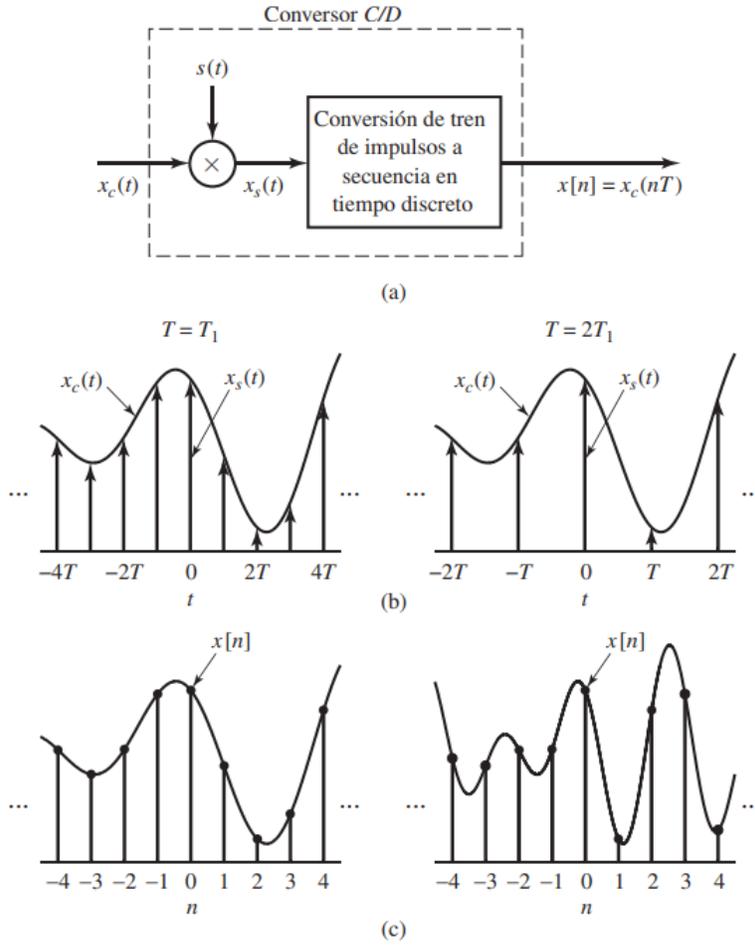


Figura 17: Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido de la conversión a una secuencia en tiempo discreto. (a) Sistema completo. (b)  $x_s(t)$  para dos frecuencias de muestreo. (c) La secuencia de salida para las dos frecuencias de muestreo [59].

#### 2.4.4 Teorema de muestreo.

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica  $x_a(t)$  es  $F_{max} = B$  y la señal se muestrea a una frecuencia  $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$ , entonces  $x_a(t)$  puede recuperarse de forma exacta a partir de los valores de sus muestras utilizando la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

Luego  $x_a(t)$  puede expresarse como

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

Cuando el muestreo de  $x_a(t)$  se realiza a la frecuencia mínima de muestreo  $F_s = 2B$ , la fórmula de reconstrucción se convierte en

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen}(2\pi B(t - n/2B))}{2\pi B(t - n/2B)}$$

La frecuencia de muestreo  $F_N = 2B = 2F_{max}$  se denomina *frecuencia de Nyquist* [58].

## 2.5 Sensado comprimido.

Sensado comprimido es una área de investigación novedosa la cual fue introducida en 2006 en dos innovadores artículos, por Donoho [30] y por Candès, Romberg y Tao [60], desde entonces se ha convertido en un concepto clave en varias áreas como matemáticas aplicadas, ciencias de la computación e ingeniería eléctrica. Sorprendentemente predice que las señales de alta dimensión, las cuales tienen una representación esparcida dada una base adecuada, se pueden recuperar a partir de lo que previamente se consideraba mediciones lineales altamente incompletas mediante el uso de algoritmos eficientes [61].

El teorema de muestreo de Shannon/Nyquist especifica que para evitar la pérdida de información cuando se captura una señal, se debe muestrear al menos dos veces más rápido que el ancho de banda de la señal. En muchas aplicaciones, incluyendo imagen digital y video cámaras, la frecuencia de Nyquist es tan alta que se obtienen demasiadas muestras, haciendo que la compresión sea una prioridad para el almacenamiento o la transmisión, de esta forma, incrementar la velocidad de muestreo es muy costoso [33].

### 2.5.1 Señales compresibles.

Consideremos una señal  $\mathbf{x}$  de valor real, longitud finita, unidimensional y discreta en el tiempo la cual puede ser vista como un vector columna de tamaño  $N \times 1$  en  $\mathbb{R}^n$  el cual tiene elementos  $\mathbf{x}[n]$  con  $n = 1, 2, \dots, N$  de acuerdo con la sección 2.2 la señal  $\mathbf{x}$  puede ser expresada como

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s} \tag{27}$$

donde  $\Psi$  es una base ortonormal (por simplicidad) de  $N \times N$  y  $\mathbf{s}$  es el vector columna de  $N \times 1$  que contiene los coeficientes de peso  $s_i = \langle \mathbf{x}, \psi_i \rangle$

La señal  $\mathbf{x}$  es llamada *K - sparse* si es una combinación lineal de solo  $K$  vectores base; esto es, solo  $K$  de los coeficientes  $s_i$  no son cero y por tanto,  $(N - K)$  son cero. El caso de interés

es cuando  $K \ll N$ , así, la señal  $\mathbf{x}$  es llamada *compressible* si tiene solo unos cuantos coeficientes grandes y muchos coeficientes pequeños [33].

### 2.5.2 El problema del sensado comprimido.

Sensado comprimido adquiere directamente la representación comprimida de una señal sin pasar por la etapa intermedia de adquirir  $N$  muestras [30, 60].

Considere un proceso lineal de mediciones que calcule  $M < N$  productos internos entre  $\mathbf{x}$  y un conjunto de vectores  $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ , esto es,  $y_j = \langle \mathbf{x}, \phi_j \rangle$ . Colocando las mediciones  $y_j$  en un vector  $\mathbf{y}$  de  $M \times 1$  y los vectores  $\phi_j^T$  como renglones en una matriz  $\Phi$  de  $M \times N$ . Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \Theta \mathbf{s} \quad (28)$$

con  $\Theta = \Phi \Psi$  una matriz de  $M \times N$ , siendo la matriz  $\Phi$  fija y no dependiente de la señal  $\mathbf{x}$ , esto se ilustra en la figura 18. De esta forma, el problema del sensado comprimido consiste en: a) diseñar una *matriz estable de medición*  $\Phi$  tal que la información de cualquier señal compresible no sea dañada debido a la reducción dimensional de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$  y b) diseñar un *algoritmo de reconstrucción* para recuperar  $\mathbf{x}$  a partir de solo  $M \approx K$  mediciones en  $\mathbf{y}$  [33].

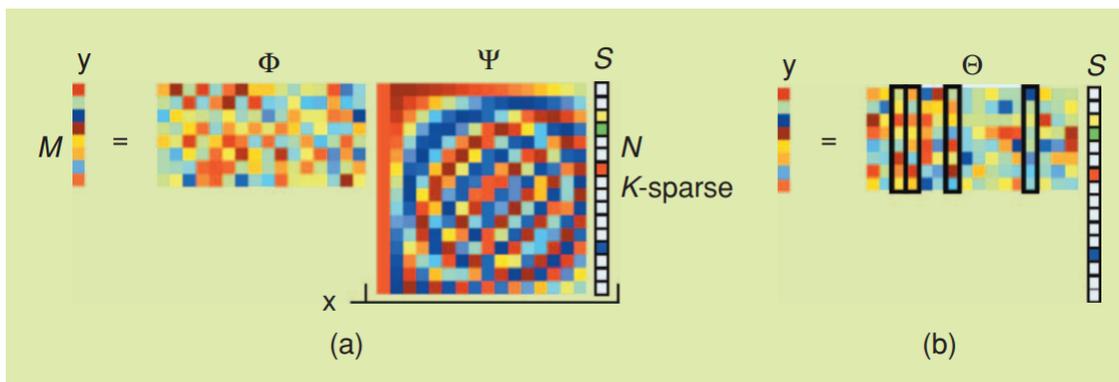


Figura 18: (a) Proceso de medición en sensado comprimido con una matriz de medición aleatoria  $\Phi$ . El vector de mediciones  $\mathbf{s}$  es esparcido con  $K = 4$ . (b) Proceso de medición con  $\Theta = \Phi \Psi$ . Hay 4 columnas que corresponden a los coeficientes  $s_i$  no cero; el vector de medición  $\mathbf{y}$  es una combinación lineal de esas columnas [33]

### 2.5.3 Matriz estable de medición.

La matriz de medición  $\Phi$  debe permitir la reconstrucción de la señal  $\mathbf{x}$  de longitud  $N$  a partir de  $M < N$  mediciones. En tanto que  $\mathbf{x}$  sea  $K - sparse$  y las  $K$  ubicaciones de los coeficientes

no cero en  $\mathbf{s}$  sean conocidas, entonces el problema puede ser resuelto proporcionando  $M \geq K$ , por supuesto, en general las ubicaciones de las  $K$  entradas no cero en  $\mathbf{s}$  no son conocidas. Sin embargo, una condición suficiente para una solución estable es que  $\Theta$  satisfaga una condición muy específica. Una condición relacionada, denominada *incoherencia*, requiere que las filas  $\{\phi_j\}$  de  $\Phi$  no puedan representar de forma esparcida las columnas  $\{\psi_i\}$  de  $\Psi$  (y vice versa) [33].

#### 2.5.4 Espacios vectoriales normados.

En el procesamiento moderno de señales se ha incorporado la modelación de señales como *vectores* que viven en un *espacio vectorial* apropiado, dotándolas de propiedades lineales muy útiles, además los espacios vectoriales nos permiten aplicar intuiciones y herramientas de la geometría en  $\mathbb{R}^3$ , tales como longitudes, distancias y ángulos. Esto es útil incluso cuando nuestras señales viven en espacios de alta dimensión o dimensión infinita [61].

Por lo general, nos interesaremos por los *espacios vectoriales normados*, es decir, espacios vectoriales dotados de una *norma*. En el caso de un dominio discreto y finito, podemos ver nuestras señales como vectores en un espacio Euclidiano  $n$  – *dimensional*, denotado por  $\mathbb{R}^n$ . Cuando tratamos con vectores en  $\mathbb{R}^n$ , utilizaremos con frecuencia las normas  $\ell_p$ , las cuales están definidas para  $p \in [1, \infty]$  como

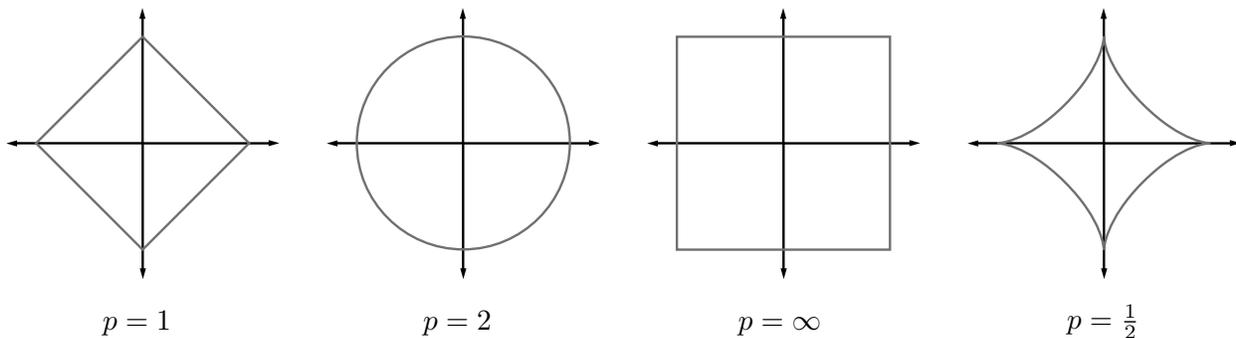


Figura 19: Esferas unitarias en  $\mathbb{R}^2$  para las normas  $\ell_p$  con  $p = 1, 2, \infty$ , y para la cuasinorma  $\ell_p$  con  $p = \frac{1}{2}$  [61].

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in (1, \infty) \\ \max |x_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (29)$$

la ecuación anterior se ilustra en  $\mathbb{R}^2$  en la figura 19.

En el espacio Euclidiano el producto interno conduce a la norma  $\ell_2$ :  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . En

algunos contextos es útil extender la noción de las normas  $\ell_p$  para el caso donde  $p < 1$ . En este caso, la “norma” definida anteriormente falla para satisfacer la desigualdad del triángulo, así que es en realidad una cuasinorma. También se hace uso frecuente de la notación  $\|x\|_0 := |supp(x)|$ , donde  $supp(x) = \{i : x_i \neq 0\}$  denota el “apoyo” de  $x$  y  $|supp(x)|$  denota la cardinalidad de  $supp(x)$ . Note que  $\|\cdot\|_0$  no es ni siquiera una cuasinorma, pero se puede mostrar que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|x\|_p^p = |supp(x)|$$

lo cual justifica esta elección de notación.

Típicamente usamos normas como medición de la fuerza de una señal, o el tamaño de un error. Por ejemplo, supongamos que tenemos una señal  $x \in \mathbb{R}^2$  y deseamos aproximarla usando un punto en un espacio unidimensional afín  $A$ . Si medimos el error de aproximación usando una norma  $\ell_p$ , entonces nuestra tarea es encontrar el  $\hat{x} \in A$  que minimiza  $\|x - \hat{x}\|_p$ . La elección de  $p$  tendrá un efecto significativo en las propiedades del error de aproximación resultante (figura 20). Para calcular el punto más cercano a  $x$  en  $A$  usando cada norma  $\ell_p$ , podemos imaginar una esfera  $\ell_p$  creciendo alrededor de  $x$  hasta que intersecte con  $A$ . Este será el punto  $\hat{x} \in A$  que sea más cercano a  $x$  en la correspondiente norma  $\ell_p$ . Se puede observar que una  $p$  más grande tiende a repartir el error más uniformemente entre los dos coeficientes, mientras que  $p$  más pequeñas conduce a un error que se distribuye de manera más desigual y tiende a ser escaso. Esta intuición se generaliza a dimensiones más altas y juega un rol importante en el desarrollo de la teoría de sensado comprimido [61].

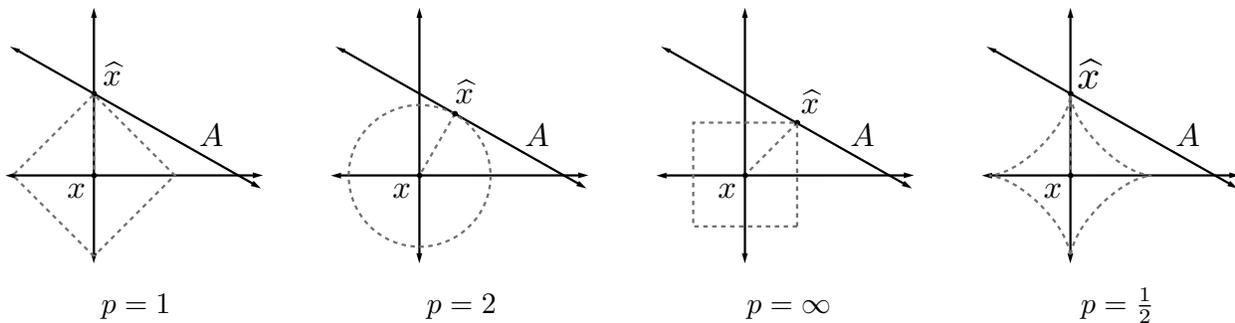


Figura 20: Mejor aproximación de un punto en  $\mathbb{R}^2$  por un subespacio unidimensional usando la norma  $\ell_p$  para  $p = 1, 2, \infty$ , y de la cuasinorma con  $p = \frac{1}{2}$  [61].

### 2.5.5 Algoritmo de reconstrucción.

El algoritmo de reconstrucción de la señal debe tomar las  $M$  mediciones en el vector  $\mathbf{y}$ , la matriz aleatoria de mediciones  $\Phi$ , la base  $\Psi$  y reconstruir la señal  $\mathbf{x}$  de longitud  $N$  o, equivalentemente su vector esparcido de coeficientes  $\mathbf{s}$ .

- **Reconstrucción norma  $\ell_2$  mínima.**

Desafortunadamente, la minimización  $\ell_2$  casi nunca encontrará una solución  $K - sparse$ , regresando en lugar un vector  $\hat{\mathbf{s}}$  no esparcido con muchos elementos no cero, donde

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{s}'\|_2 \quad \text{tal que} \quad \Theta \mathbf{s}' = \mathbf{y}$$

- **Reconstrucción norma  $\ell_0$  mínima.**

Ya que la norma  $\ell_2$  mide la energía de la señal y no la escasez de la señal, considere la norma  $\ell_0$  que cuenta el número de entradas no cero en  $\mathbf{s}$  (Por tanto un vector  $K - sparse$  tiene una norma  $\ell_0$  igual a  $K$ ). La optimización

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{s}'\|_0 \quad \text{tal que} \quad \Theta \mathbf{s}' = \mathbf{y}$$

puede recuperar exactamente la señal  $K - sparse$  con alta probabilidad usando, por ejemplo, mediciones Gaussianas *iid* (del inglés, independientes e idénticamente distribuidas). Desafortunadamente, resolver esta ecuación es numéricamente inestable y NP-completa, requiriendo una exhaustiva enumeración de todas las  $\binom{N}{K}$  ubicaciones posibles de las entradas no cero en  $\mathbf{s}$ .

- **Reconstrucción norma  $\ell_1$  mínima.**

Sorprendentemente, la optimización basada en la norma  $\ell_1$

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{s}'\|_1 \quad \text{tal que} \quad \Theta \mathbf{s}' = \mathbf{y}$$

puede recuperar exactamente las señales  $K - sparse$  y aproximar cercanamente señales compresibles con alta probabilidad usando solo  $M \geq cK \log(\frac{N}{K})$  mediciones Gaussianas. Este es un problema de optimización convexa que se reduce convenientemente a un programa lineal conocido como búsqueda de bases cuya complejidad computacional es alrededor de  $O(N^3)$ , es decir, cúbica [33].

## Capítulo 3. Desarrollo experimental y simulaciones.

En este capítulo, se proporciona una descripción detallada del proceso llevado a cabo en el desarrollo experimental del presente trabajo de tesis. Además, se incluyen las etapas de simulación, pues se destaca su papel crucial en una mejor comprensión de la técnica antes de su implementación en el laboratorio. Este enfoque no solo facilita una comprensión más profunda, sino que también establece un punto de referencia esencial para garantizar la congruencia entre los resultados experimentales y la teoría.

### 3.1 Primeras simulaciones en reconstrucción de imágenes mediante suma de patrones, transformada de Hadamard y algoritmos de sensado comprimido.

#### 3.1.1 Suma de patrones de Hadamard.

La primera fase del proyecto de tesis consistió en la aplicación de la información recopilada en la revisión bibliográfica sobre SPI. Utilizando la matriz de Hadamard, se llevaron a cabo simulaciones computacionales para la reconstrucción de imágenes. Esta etapa inicial de programación fue relativamente sencilla, ya que se basó principalmente en la aplicación de las ecuaciones 1 y 4.

$$m_i \propto \int \int |f(x, y)P_i(x, y)|^2 dx dy$$

$$f = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} m_i P_i$$

En estas ecuaciones,  $P_i$  representa el  $i$ -ésimo patrón de Hadamard obtenido de la matriz correspondiente, los cuales se calcularon empleando la ecuación 12 o utilizando la función “reshape” de MATLAB para el reajuste de matrices.

Dado que tanto  $f$  como  $P_i$  son, en este caso, matrices, siendo la primera, la imagen de prueba y las segundas los patrones de Hadamard, la doble integral mencionada en la ecuación 1 se reduce a un producto interno matricial. En otras palabras, se trata de la suma de los productos de todas las componentes de cada una de estas matrices. De este modo, se obtiene un vector cuyas componentes son los coeficientes de correlación entre cada patrón y la imagen de prueba. El análogo experimental de este vector resultante representa la intensidad de luz que cada patrón proyecta sobre el DMD, codificada en la señal eléctrica detectada por el sensor de un solo píxel.

### 3.1.2 Transformada Hadamard.

Por otro lado, el procedimiento se puede adoptar con un enfoque alternativo utilizando la Transformada de Hadamard, que se explora en la sección 2.3.2. En este caso, el vector de coeficientes se convierte en una matriz como resultado de la operación mostrada en la ecuación 15 o mantener su forma de vector utilizando la estructura de la ecuación 18.

$$[F(u, v)] = [H(u, v)][f(x, y)][H(u, v)]$$

$$\mathbf{F} = [H]\mathbf{f}$$

y la imagen se obtiene utilizando la ecuación 17 y 19

$$[f(x, y)] = \frac{1}{N^2}[H(u, v)][F(u, v)][H(u, v)].$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N^2}[H]\mathbf{F}$$

La programación en este caso es aún más sencilla, y debido a la eficiencia de los cálculos, se presenta como una opción más rápida que la utilizada en el método anterior, como se discutirá más adelante.

### 3.1.3 Algoritmos de sensado comprimido.

Finalmente, el último enfoque tratado en esta fase fue la aplicación de algoritmos de sensado comprimido. Específicamente, en el desarrollo de esta tesis, se emplearon los algoritmos denominados “TVAL3 ” y “L1-magic”. Estos fueron seleccionados con el propósito de comparar su desempeño y resultados, además de mostrar la evolución de los algoritmos de sensado comprimido a lo largo del tiempo puesto que L1-magic fue presentado como el primero de estos algoritmos en ser utilizado específicamente en la técnica de Single-Pixel Imaging [8] .

#### **TVAL3.**

El primer algoritmo utilizado en la reconstrucción de imágenes fue TVAL3, desarrollado por Li, Yi y Zhang [62]. Su nombre proviene de la abreviatura en inglés “ Total Variation Minimization by Augmented Lagrangian and Alternating Direction Algorithms”. TVAL3 es un solucionador de MATLAB que se puede aplicar a los siguientes cuatro modelos de minimización basados en la variación total (TV) para reconstruir una imagen  $u$  a partir de sus observaciones  $b$ :

$$(TV) \quad \min_{u \in \mathbb{C}^n} \sum_i \|D_i u\|_p, \quad \text{sujeto a } Au = b \quad (30)$$

$$(TV+) \quad \min_{u \in \mathbb{C}^n} \sum_i \|D_i u\|_p, \quad \text{sujeto a } Au = bu \geq 0 \quad (31)$$

$$(TV/L2) \quad \min_{u \in \mathbb{C}^n} \sum_i \|D_i u\|_p + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2, \quad (32)$$

$$(TV/L2+) \quad \min_{u \in \mathbb{C}^n} \sum_i \|D_i u\|_p + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2, \quad \text{sujeto a } u \geq 0 \quad (33)$$

donde  $\|\cdot\|_p$  representa la norma  $\ell_1$  o  $\ell_2$ ,  $n = n_1 \times n_2$  es el tamaño de las señales o imágenes,  $D_i u (\in \mathbb{C}^2 \text{ o } \mathbb{R}^2 \text{ según } u \in \mathbb{C}^n \text{ o } \mathbb{R}^n)$  es el gradiente discreto de  $u$  en la posición  $i$  y  $\mu > 0$  es el parámetro de penalización para los modelos TV/L2.

Los primeros términos en las funciones objetivo son los términos de regularización de TV, que pueden ser isotrópicos para  $p = 2$  y anisotrópicos para  $p = 1$ . Usar los isotrópicos suele ser preferido, ya que resulta en menos contornos zigzagueantes en la imagen reconstruida. Los segundos términos en las funciones objetivo son comúnmente denominados términos de fidelidad.

La función en MATLAB que ejecuta TVAL3 es una interfaz sencilla con 5 argumentos de entrada y ya sea 1 o 2 argumentos de salida.

```
U = TVAL3(A, b, n1, n2, opts);
o [U, out] = TVAL3(A, b, n1, n2, opts);
```

donde la entrada  $A$  es la matriz de medición y puede ser una matriz en  $\mathbb{C}^{m \times n}$  con  $m < n$  o una función de referencia,  $b \in \mathbb{C}^m$  es la observación obtenida de mediciones lineales y  $U \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$  es la salida. Todas esas cantidades pueden ser reales o complejas. El argumento de entrada **opts** es una estructura que lleva opciones de control y el argumento de salida opcional **out** contiene información secundaria de salida.

TVAL3 puede resolver uno de los cuatro modelos admitidos: TV, TV+, TV/L2 y TV/L2+, y cada uno puede ser isotrópico o anisotrópico. Se selecciona un modelo de acuerdo con las opciones dadas en **opts**.

Para configurar los modelos, se pueden usar las siguientes opciones:

- El modelo de TV isotrópico se resuelve por defecto.
- El modelo de TV+ isotrópico se configura con `opts.nonneg = true`
- El modelo de TV/L2 isotrópico se configura con `opts.TVL2=true`

• El modelo de TV/L2+ isotrópico se configura con `opts.nonneg = true` y `opts.TVL2=true`. Para resolver cualquiera de los modelos de arriba con TV anisotrópico correspondiente a  $p = 1$ , `opts.TVnorm = 1`.

Otras configuraciones del algoritmo TVAL3 se pueden consultar en la guía de usuario [63]. Para este trabajo, después de varias pruebas, se seleccionaron las siguientes opciones para obtener una calidad visual equilibrada:

```
opts.mu = 2^8;  
opts.beta = 2^5;  
opts.tol = 1E-3;  
opts.maxit = 300;  
opts.TVnorm = 1;  
opts.nonneg = true;
```

### **L1-magic.**

Para contrastar con los resultados obtenidos mediante TVAL3 se consideró utilizar el algoritmo llamado “L1-magic” desarrollado por Candes, Romberg y Tao en artículos como [29, 60] el cual fue el pionero en ser utilizado en la técnica de Single-pixel Imaging [8]. L1-magic es una colección de rutinas de MATLAB para resolver los programas de optimización convexa fundamentales para sensado comprimido. Los algoritmos se basan en métodos estándar de puntos interiores y son adecuados para problemas de gran tamaño. Las rutinas y guía de usuario y pueden ser consultados en [64].

Aquí, siete problemas de interés son considerados:

- Min- $\ell_1$  con restricciones de igualdad.
- Min- $\ell_1$  con error de aproximación.
- Min- $\ell_1$  con restricciones cuadráticas.
- Min- $\ell_1$  con correlación residual acotada.
- Min-TV con restricciones de igualdad.
- Min-TV con restricciones cuadráticas.
- Dantzing TV.

Las rutinas de optimización que ofrece L1-magic son mostradas a continuación:

- `cgsolve`: Resuelve  $Ax = b$ , donde  $A$  es simétrica y definida positiva, utilizando el método del Gradiente Conjugado.
- `l1dantzing_pd`: Resuelve el selector Dantzig utilizando un algoritmo primal-dual.
- `l1decode_pd`: Resuelve el problema de aproximación de norma para decodificación a través de programación lineal utilizando un algoritmo primal-dual.
- `l1eq_pd`: Resuelve el problema de la Búsqueda de Base Estándar utilizando un algoritmo primal-dual.
- `l1qc_logbarrier`: Iteraciones de barrera (.<sup>externas</sup>) para resolver la minimización cuadráticamente restringida de la norma  $\ell - 1$ .
- `l1qc_newton`: Iteraciones de Newton (internas) para resolver la minimización cuadráticamente restringida de la norma  $\ell - 1$ .
- `tvdantzing_logbarrier`: Iteraciones de barrera para resolver el selector de Dantzig de TV ( $TV_D$ ).
- `tvdantzing_newton`: Iteraciones de Newton para ( $TV_D$ ).
- `tveq_logbarrier`: Iteraciones de barrera para la minimización de TV con restricciones de igualdad ( $TV_1$ ).
- `tveq_newton`: Iteraciones de Newton para ( $TV_1$ ).
- `tvqc_logbarrier`: Iteraciones de barrera para la minimización de TV cuadráticamente restringida ( $TV_2$ ).
- `tvqc_newton`: Iteraciones de Newton para ( $TV_2$ ).

Específicamente la rutina utilizada para la reconstrucción de imágenes son las basadas en TV, por lo que para este desarrollo se utilizó la siguiente función con los siguientes parámetros de entrada elegidos después de varias pruebas.

```
est_Image = tvqc_logbarrier(x0, A, [], y, 0.01, 1e-4, 2);
```

### 3.2 Obtención de los ordenamientos de la matriz de Hadamard.

Después de revisar la bibliografía correspondiente, se seleccionaron los métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard a utilizar en este estudio. Todos estos ordenamientos están detalladamente descritos en la sección 2.3.4, donde se analizan y estudian sus técnicas y características distintivas.

Tras consultar funciones y algoritmos especiales en el software de MATLAB, se realizó la programación que permitió generar las representaciones gráficas de estos métodos de ordenamiento. Los códigos de programación correspondientes pueden ser consultados en los apéndices B.1-B.7.

El objetivo de esta etapa de programación fue preparar los patrones de cada ordenamiento en archivos que fueran leídos por el sistema de funcionamiento del modulador de luz para su posterior proyección. Por lo que, es importante mencionar que para reconstruir una imagen de  $N^2$  píxeles, es decir una matriz de tamaño de  $N \times N$  se necesitan  $N^2$  patrones de tamaño  $N \times N$  obtenidos de:

- a) Una matriz de Hadamard de tamaño  $N \times N$  si son obtenidos por medio de la ecuación 12
- o
- b) Una matriz de Hadamard de tamaño  $N^2 \times N^2$  si son obtenidos usando la función “reshape”.

El procedimiento consistió en que primero cada ordenamiento era obtenido en forma de matrices cuadradas de tamaños que iban desde  $4 \times 4$ , hasta  $128 \times 128$  píxeles y una vez generadas se guardaron en archivos “.mat” para ahorrar tiempo de computo al ser empleadas. Algunas de estas matrices se muestran en las imágenes 5 7, 8. El siguiente paso fue calcular los patrones de cada ordenamiento utilizando el método de la función “reshape” para un uso más eficiente dentro de MATLAB. Los resultados fueron guardados como imágenes en formato “.png” con profundidad de bits de 1 y con las dimensiones de la pantalla del DMD, las cuales son  $1920 \times 1080$  píxeles en archivos específicos, listos para su utilización en la proyección. Un conjunto de patrones positivos se muestran en la figura 21.

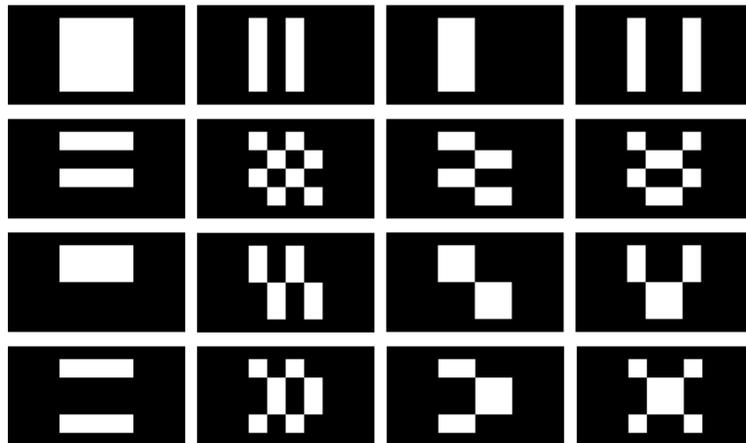


Figura 21: Patrones positivos de Hadamard de tamaño  $4 \times 4$  en una disposición de  $1920 \times 1080$  píxeles en formato .png.

A pesar de que los patrones de Hadamard son patrones binarios surge un inconveniente al trabajar con ellos, ya que estos poseen valores de  $+1$  y  $-1$ , mientras que el DMD solo puede representar los valores 0 y 1 (indicando encendido y apagado, respectivamente). Para lidiar con los valores negativos de  $H$ , se utilizó el método diferencial en el cual dos matrices de patrones se

definen como

$$H = H^+ - H^-$$

donde  $H^+$  y  $H^-$  son las matrices que contienen los patrones binarios de Hadamard tales que la matriz  $H^+ = (H + \mathbf{1})/2$  vale cero en cada entrada negativa de  $H$  y la matriz  $H^- = (\mathbf{1} - H)/2$  vale cero en cada entrada positiva de  $H$  y  $\mathbf{1}$  es una matriz del mismo orden que  $H$  cuyas entradas son todas iguales a  $+1$ . Por lo tanto, las mediciones  $m_+$  y  $m_-$  obtenidas al usar  $H^+$  y  $H^-$ , respectivamente, son restadas para obtener la medición real  $m = m_+ - m_-$ . De esta forma las imágenes de cada patrón se guardaron en positivo y negativo.

Debido a las limitaciones de memoria del DMD, el tamaño máximo de los patrones utilizados en el desarrollo fue de  $128 \times 128$  píxeles. Del mismo modo, este tamaño constituyó el límite para las dimensiones de las imágenes recuperadas en el laboratorio.

### **3.3 Experimentación.**

La siguiente fase del desarrollo de tesis involucró la experimentación en el laboratorio de óptica con la cámara de un solo píxel.

#### **3.3.1 Interfaz de control.**

En el primer paso, antes de configurar el arreglo experimental, se realizaron una serie de pruebas para familiarizarse y dominar el uso de la interfaz implementada en LabView proyectando patrones y variando los parámetros del sistema. Esta interfaz fue desarrollada por Cisneros en [53] y controla los componentes principales del sistema de la cámara de un solo píxel como el modulador de luz (DMD), la tarjeta de adquisición de la señal y el sensor de luz de un solo píxel. Facilita varias funciones, incluida la selección de las rutas para cargar los patrones de cada ordenamiento y guardar la señal capturada por el sensor, ajustar la velocidad de proyección del DMD y la tasa de muestreo del sensor, además proporciona gráficas de la amplitud de la señal obtenida junto con una vista previa de la imagen capturada (consulte la figura 22).

En esta primera fase de pruebas se obtuvieron los primeros resultados experimentales puesto que se utilizó un montaje de la cámara de un solo píxel combinado con un interferómetro Mach-Zehnder previamente realizado por estudiantes del INAOE para obtener imágenes tridimensionales con la técnica de SPI. De esta forma, estos resultados de las imágenes reconstruidas fueron obtenidos utilizando una fuente de luz láser.

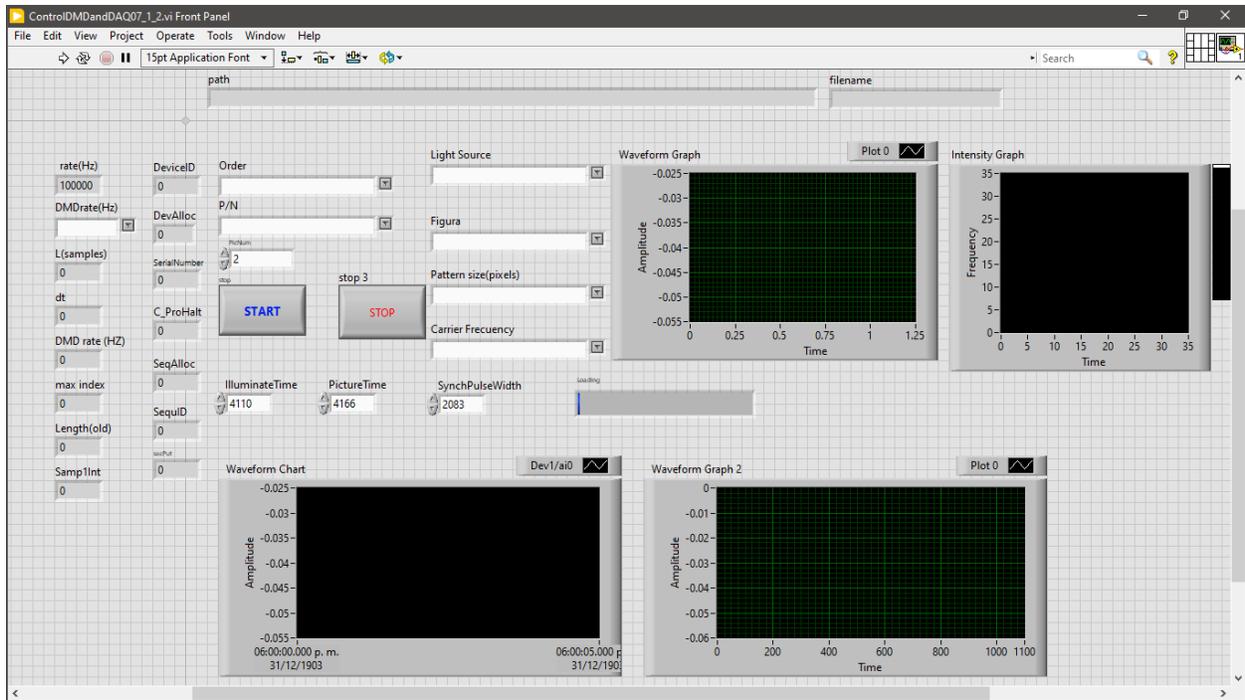


Figura 22: Interfaz de control del sistema de la cámara de un solo pixel.

### 3.3.2 Componentes del arreglo experimental.

A continuación se describen brevemente los componentes utilizados en el arreglo experimental.

- El Dispositivo de Microespejos Digitales (DMD) utilizado en este trabajo fue el modelo VIA-LUX V-9501. Se muestra una fotografía del dispositivo en la figura 23 y sus especificaciones se pueden consultar en el apéndice A.1.

- El fotodiodo elegido como sensor de único pixel para registrar las fluctuaciones en la señal fue el detector modelo Thorlabs DET36A, una fotografía del sensor se muestra en la figura 24, las especificaciones técnicas del detector se pueden consultar en el apéndice A.3. La ventaja al elegir este fotodetector es que el área del sensor es grande,  $3.6 \times 3.6 \text{ mm}^2$  puesto que un sensor más pequeño podría filtrar espacialmente la luz que registra el detector, sin embargo, el precio a pagar es el bajo tiempo de respuesta.

- El dispositivo de adquisición de datos elegido para este trabajo fue la tarjeta NI USB-6003, por ser de tamaño compacto, de bajo precio y con un desempeño más óptimo que otras opciones más como los osciloscopios [53]. Una imagen de este dispositivo se muestra en la figura 25 y sus

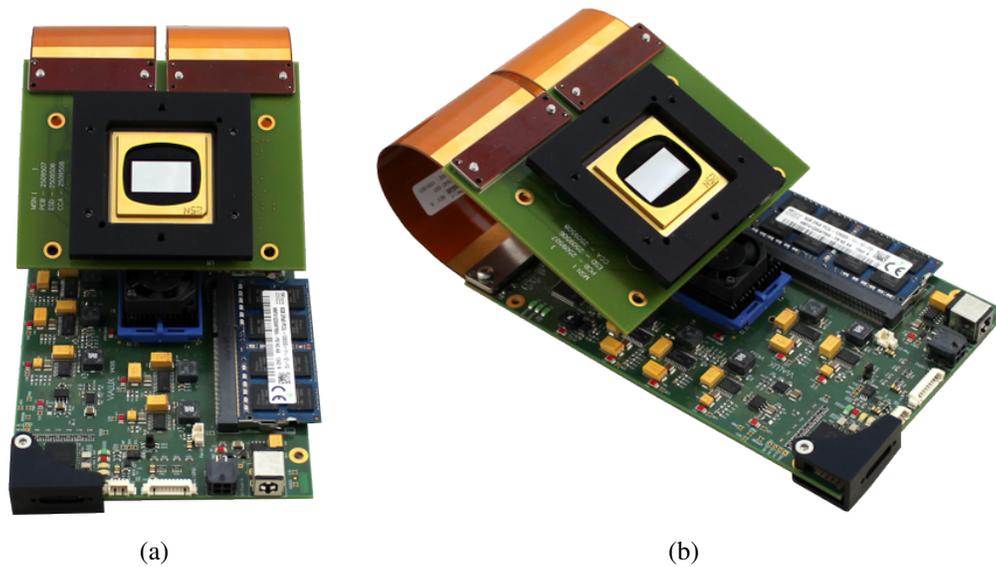


Figura 23: Imagen del DMD utilizado modelo VIALUX V-9501. a) Vista frontal b) Vista en perspectiva.



Figura 24: Sensor de luz utilizado como único pixel, Thorlabs DET36A.

especificaciones se muestran en el apéndice A.2.

- Se seleccionaron dos fuentes de luz: una lámpara LED con fibra óptica y un láser de luz roja. Tras comparar su desempeño y resultados, se observó que la luz LED proporcionó mejores resultados en contraste con la fuente láser, como se discutirá más adelante.

- Como componentes ópticos se utilizaron lentes y espejos, en concreto, se utilizó un espejo plano pequeño de alrededor de 2 cm de diámetro y tres lentes convergentes de distancias focales una de 17 cm y dos de 5 cm los cuales en este caso fueron lentes de cámara digital escogidos solo por su distancia focal específica.



Figura 25: Dispositivo para adquisición de la señal NI USB-6003.

- Y finalmente como objeto de prueba se escogió utilizar transparencias puesto que éstas proporcionan resultados de mayor calidad visual lo cual resulta muy oportuno para comparar el desempeño de cada ordenamiento aquí estudiado. Las transparencias fueron una serie de imágenes impresas en acetato con una impresora láser, algunas de ellas se muestran en la figura 26



Figura 26: Objeto de prueba, transparencia del logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca

### 3.3.3 Configuración del arreglo experimental.

El arreglo de la cámara de un solo pixel utilizado siguió la configuración de detección estructurada descrita anteriormente en la sección 2.1 tal como se ilustra en la figura 1 (a) . Una representación más detallada del arreglo experimental utilizado se muestra en el esquema de la figura 27 .

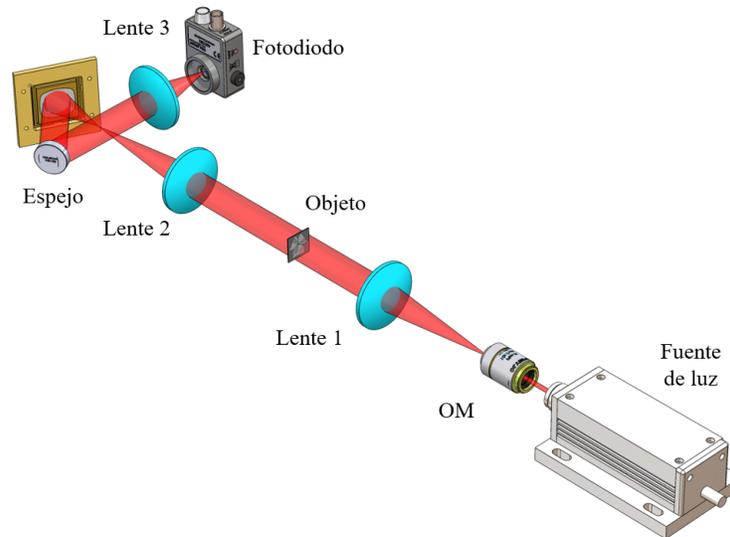


Figura 27: Esquema del arreglo óptico de la cámara de un solo píxel utilizado en el desarrollo experimental.

De esta forma, la configuración y el funcionamiento general del arreglo experimental se describen a continuación:

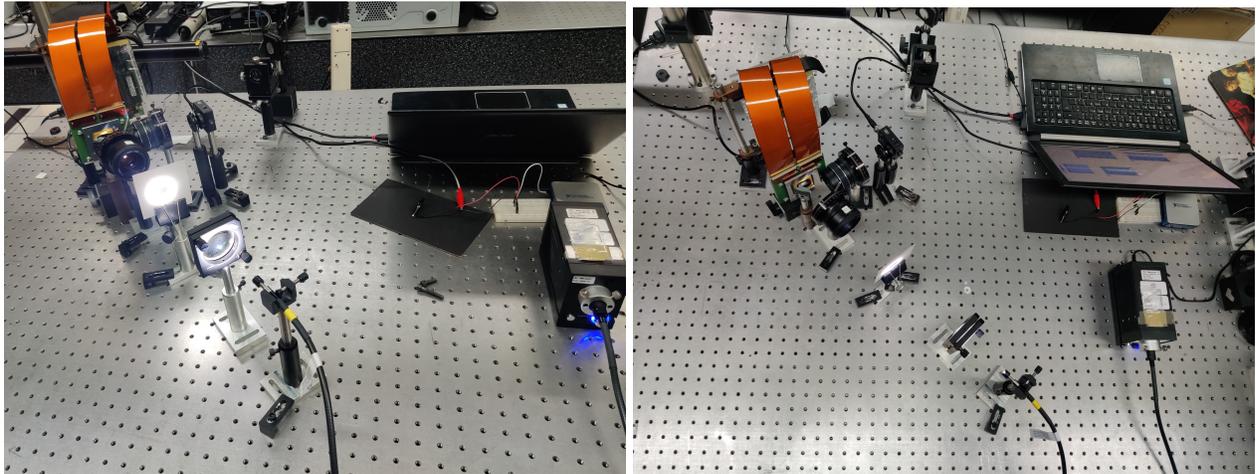
El primer componente en ser colocado sobre la mesa de pruebas ópticas fue el módulo del DMD, este sirvió de referencia para alinear el resto de los componentes ya que como se explica en la sección 2.1.1 los microespejos pueden ser inclinados  $\pm 12^\circ$  haciendo que los haces de luz que inciden normalmente sobre el plano del DMD puedan ser redirigidos en trayectorias de  $\pm 24^\circ$ , por lo que se necesitaban determinar las direcciones óptimas para colocar el resto de componentes. Por tanto, se decidió colocar los primeros componentes siguiendo una línea recta con un ángulo de  $6^\circ$  respecto a la normal del plano del DMD. Sobre esta línea se colocó primeramente la fuente de luz, para esta fase fue la lámpara de luz LED la cual posee un cable de fibra óptica que permitió dirigir de forma más precisa el haz de luz. Luego, se colocó la primer lente convergente y se posicionó a su distancia focal de la fuente de luz asegurando una iluminación uniforme de los objetos de prueba en un haz que no variaba su apertura, similar a haber colimado el haz de luz.

Después, se añadió una segunda lente convergente, seleccionando una lente de cámara debido a su corta distancia focal, que permitía enfocar adecuadamente la luz del objeto sobre la superficie del DMD. Durante este procedimiento la fuente de luz se mantuvo encendida para la correcta alineación de los componentes.

Posteriormente se desplegó en un estado de encendido de todos los microespejos del DMD inclinándolos  $12^\circ$  con respecto a su posición original al mismo tiempo la fuente de luz permitía ver la trayectoria de la luz y el objeto perfectamente enfocado sobre el DMD, de esta forma, la elección

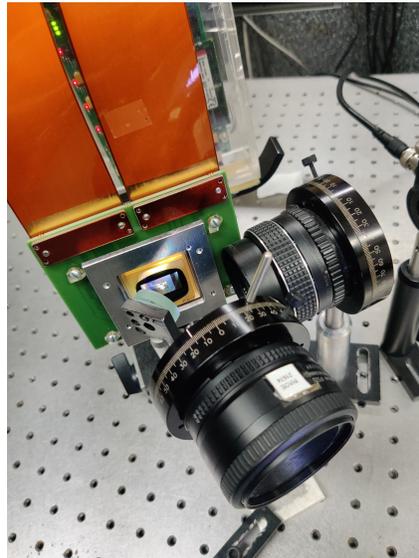
de los  $6^\circ$  de inclinación inicial hizo que de los espejos reflejaran el haz de luz en una dirección total de  $12^\circ$  evitando adecuadamente una distorsión del plano imagen del objeto de prueba. La nueva línea determinada por la dirección del haz de luz reflejado condujo a la colocación del espejo plano, que redirigió el haz de luz hacia la última lente convergente, nuevamente una lente de cámara, que enfocó todo el haz de luz dentro de la superficie del sensor de luz.

Finalmente, se procedió a conectar correctamente los componentes electrónicos y la computadora para iniciar la adquisición de la señal. Se incluyen fotografías que muestran la configuración completa del arreglo experimental en las siguientes figuras:



(a)

(b)



(c)

Figura 28: Montaje del arreglo experimental en el laboratorio. a) Vista en perspectiva, b) Vista superior, c) Acercamiento al DMD .

### 3.4 Adquisición de la señal y coeficientes de correlación.

Una vez completado el arreglo experimental, se inició la fase de mediciones. Utilizando la interfaz de control, los patrones de cada ordenamiento se cargaron en la memoria RAM del DMD desde la computadora. La duración de este proceso depende de dos factores principales: la velocidad de escritura de la computadora y la velocidad de lectura del DMD utilizados. En términos prácticos, el proceso se consideraría lento si toma más de unos pocos segundos por patrón, pero este tiempo específico puede variar según el hardware empleado. El tiempo promedio de carga por cada conjunto de patrones fue de aproximadamente 5 minutos, lo cual se considera adecuado para el equipo de cómputo utilizado, que es de gama baja y no cuenta con características de alto rendimiento, como se detallará más adelante. Sin embargo, una vez cargados los patrones, no es necesario repetir este paso para un ordenamiento en específico. Pero, ya que en este caso se presentaron 9 ordenamientos distintos, fue necesario repetir el proceso 9 veces para cada conjunto de patrones positivos y negativos. Cuando los patrones estuvieron listos se comenzó con la proyección en el DMD. Al mismo tiempo en que cada patrón era proyectado por el DMD las intensidades de luz iban siendo registradas por el sensor de luz, de esta forma al terminar el proceso de proyección un archivo lleno de todas estas mediciones era obtenido y guardado en la computadora.

Para todo el procedimiento se eligió una velocidad de proyección del DMD de  $f_{DMD} = 960$  Hz y como velocidad de muestreo en el fotodiodo o sensor de luz de  $f_{fd} = 100000$  Hz, estos dos parámetros determinan el cálculo para obtener los coeficientes de correlación al procesar la señal capturada. De igual forma, determinan el tiempo de captura de la señal, por ejemplo, para recuperar una imagen de un tamaño de  $128 \times 128$  píxeles se necesitarían proyectar  $n = 128 \times 128 = 16384$  patrones y este proceso tardaría un tiempo

$$t = \frac{16384 \text{ patrones}}{960 \text{ patrones/s}} = 17.06 \text{ s}$$

Por supuesto, este tiempo puede ser disminuido aumentando la velocidad de proyección de los patrones hasta los límites que impongan los dispositivos utilizados, sin embargo, el enfoque en este trabajo es disminuir la cantidad de patrones a ser proyectados sin perder calidad visual.

Una vez capturada la señal de cada medición realizada, el procedimiento para su tratamiento con objetivo de obtener los coeficientes de correlación entre cada patrón y el objeto de prueba siguió los pasos que se muestran en el diagrama de flujo de la figura 29.

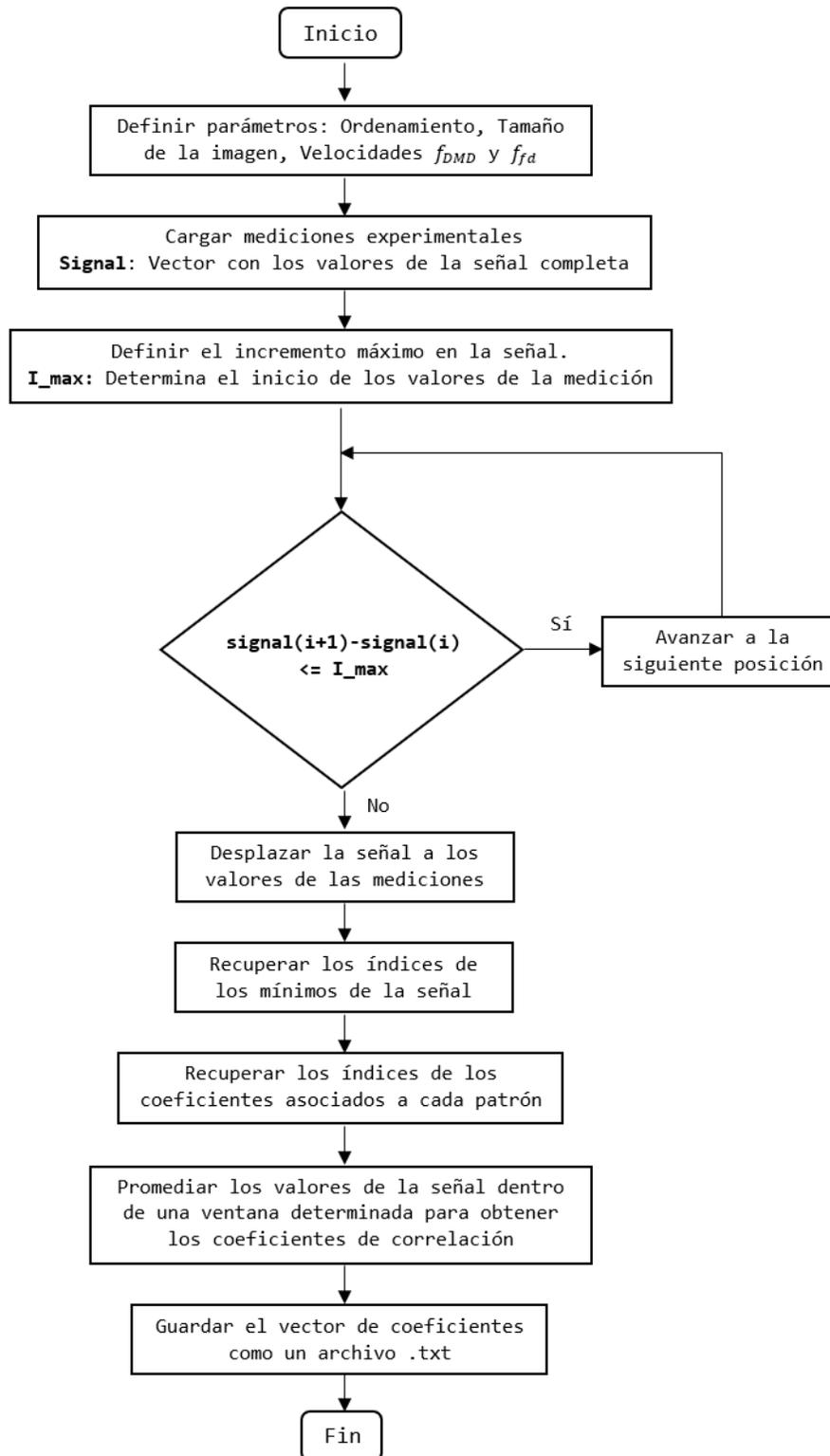


Figura 29: Diagrama de flujo para obtener los coeficientes de correlación.

En el proceso de medición, el sensor de luz no muestrea la señal exactamente al mismo tiempo en el que el DMD comienza a desplegar los patrones sino que hay un periodo en el que las primeras muestras capturadas en el vector de la señal provienen de un pequeño intervalo de tiempo en el que no se registra ninguna intensidad de luz, ya que aun ha comenzado la proyección del primer patrón. Los valores de estas muestras son muy cercanos a cero, como se puede ver en la figura 30, donde las unidades de los valores de cada intensidad están en voltios. Por lo que el primer paso es determinar en qué punto de la señal las muestras corresponden a la medición de las intensidades de luz de cada patrón y no al periodo de oscuridad. Se define entonces un valor obtenido por prueba y error para el cual la resta entre una entrada del vector de la señal y la siguiente sea mayor que ese umbral y se pueda considerar que en este punto las muestras corresponden a las intensidades respectivas. Al encontrar el punto en el que esto ocurre se desplaza el vector de la señal eliminando las mediciones no útiles, ver figura 31.

El siguiente paso es determinar el valor de los coeficientes de correlación y para ello se decidió primero ubicar los puntos mínimos entre cada cresta de la señal para determinar las regiones cuyas muestras corresponden a los valores medidos de las intensidades de cada patrón, una vez ubicados estos puntos los coeficientes pueden ser determinados promediando los valores en un intervalo o ventana establecido de cada cresta de la onda señal como se muestra en la imagen de las figuras 32 y 33.

Este procedimiento se repitió para cada una de las mediciones realizadas en este trabajo. En la figura se muestra una gráfica de los coeficientes obtenidos de las mediciones de los patrones positivos, negativos y su resta para el caso del ordenamiento natural de la Matriz de Hadamard. La obtención de los coeficientes de correlación representa el último paso para obtener la reconstrucción de la imagen del objeto de prueba.

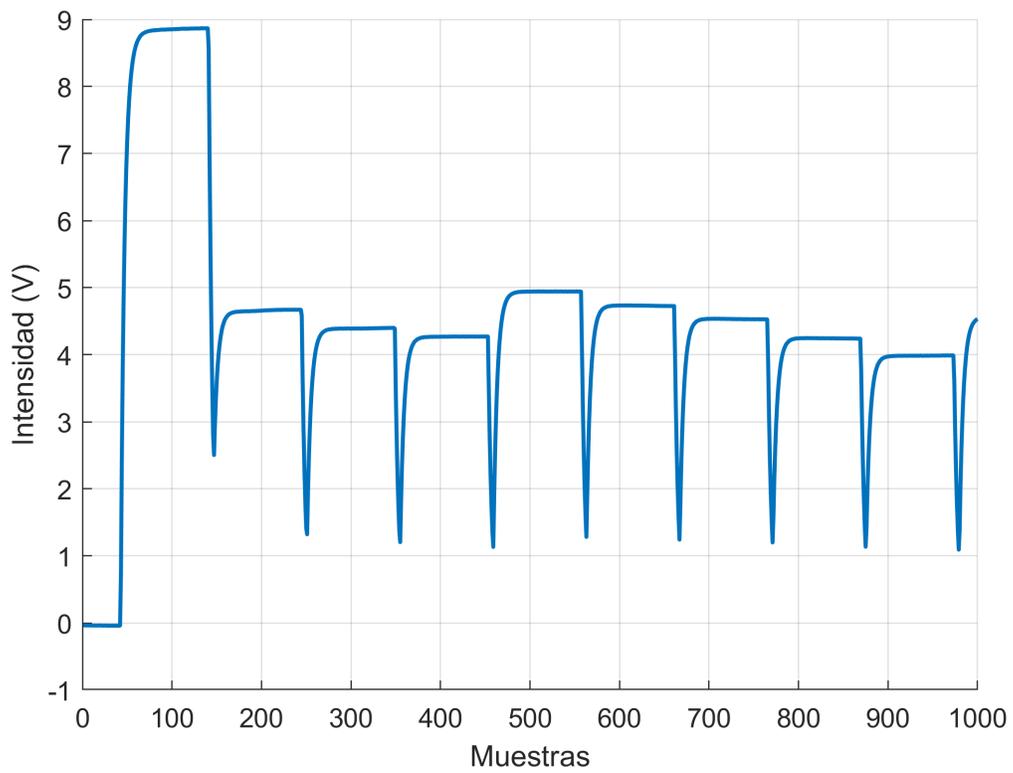


Figura 30: Gráfica de las primeras 1000 muestras de la señal. Se aprecia que las primeras intensidades tienen valores cercanos a cero.

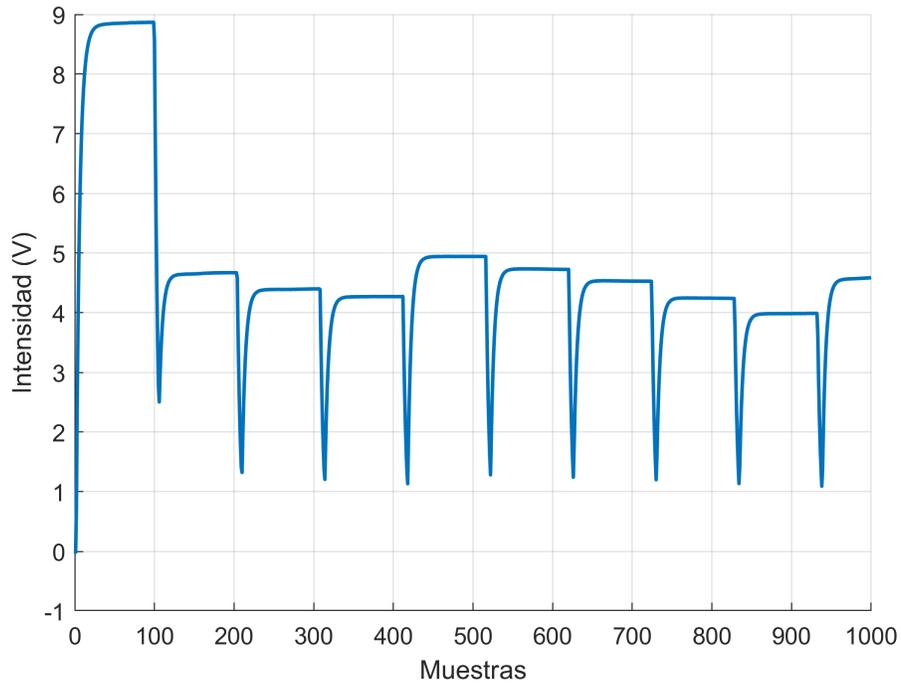


Figura 31: Gráfica de las primeras 1000 muestras de la señal. La señal ha sido desplazada a las muestras correspondientes a la intensidades de luz del primer patrón.

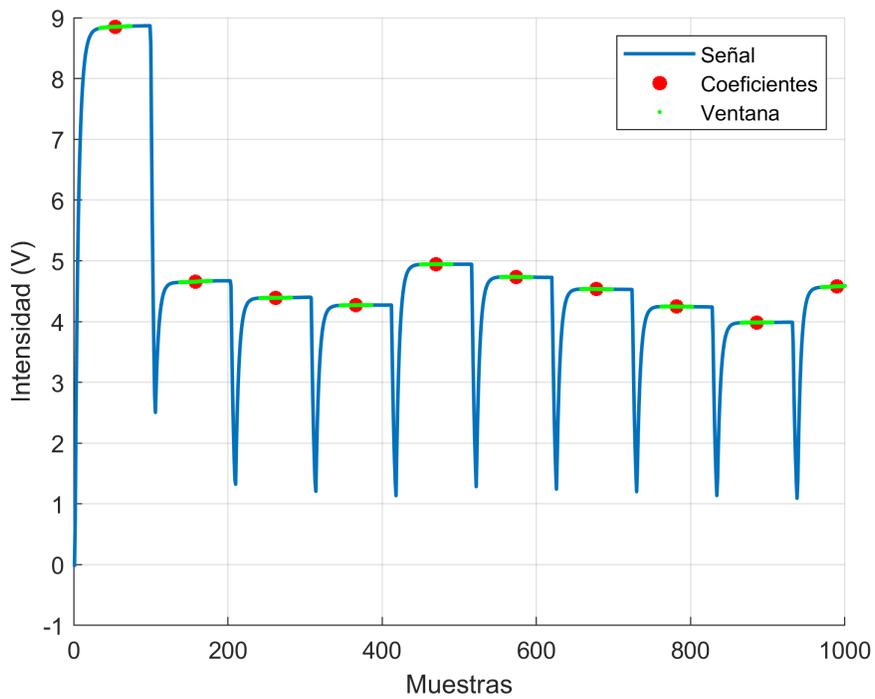


Figura 32: Coeficientes asociados a cada patrón obtenidos al promediar la ventana de valores, se ubican sobre las crestas de la señal.

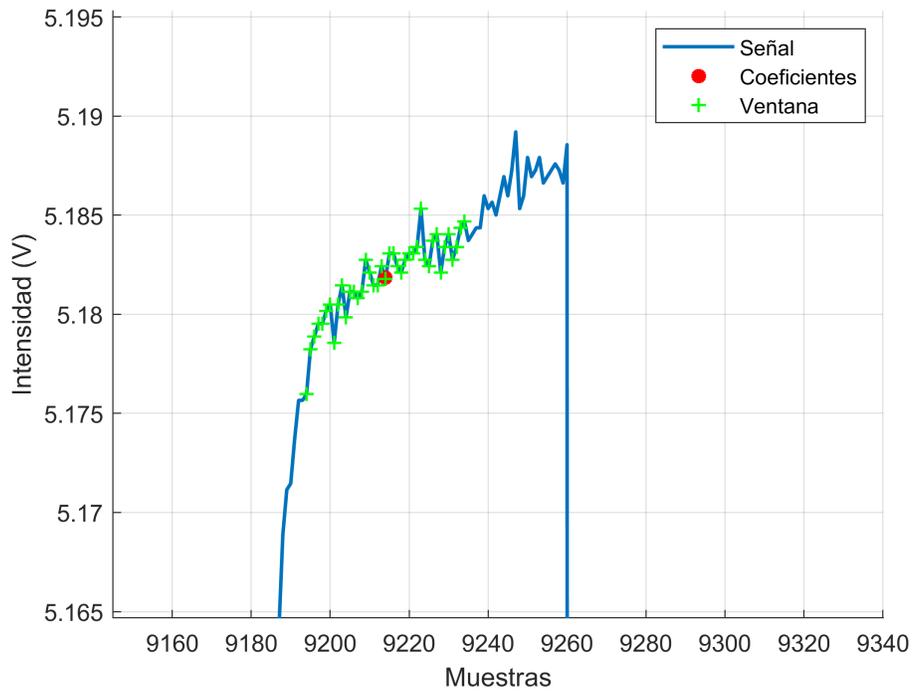


Figura 33: Acercamiento a una cresta de la señal, se puede apreciar que el coeficiente obtenido cae dentro de los valores de la ventana o intervalo elegido.

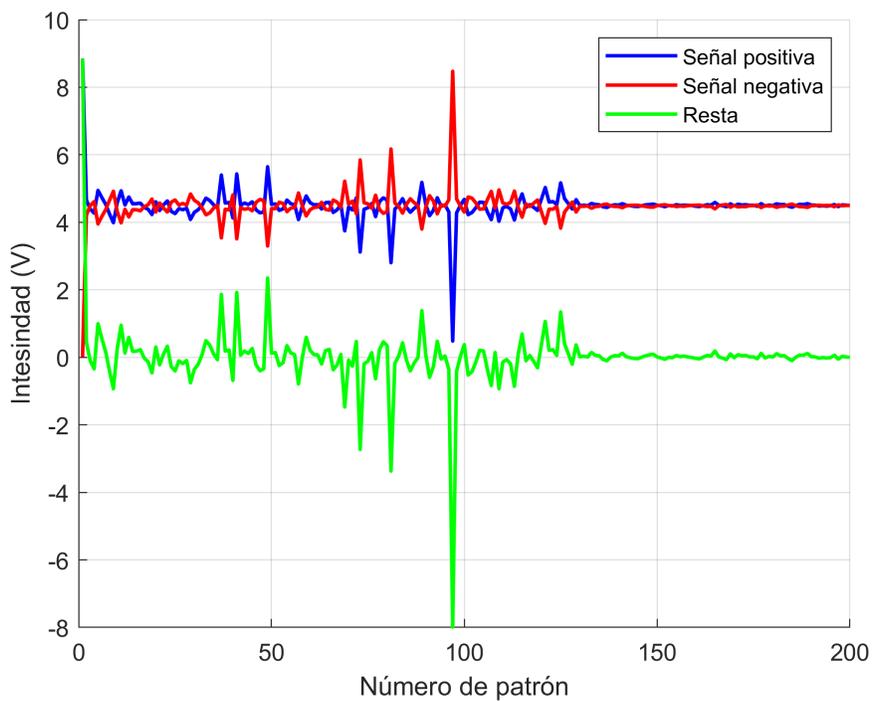


Figura 34: Gráfica de los primeros 200 coeficientes de correlación para el orden Natural. Se muestran las mediciones de los patrones negativos, positivos y su resta.

## Capítulo 4. Resultados.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones computacionales y de las mediciones experimentales. Se presentan imágenes reconstruidas utilizando los 9 ordenamientos propuestos para realizar este estudio comparativo cuyas características son descritas detalladamente en las secciones previas. Se muestran las imágenes reconstruidas por los dos métodos tratados: sin sensado comprimido, es decir, con suma de patrones y por los algoritmos de sensado comprimido. En este capítulo, se presentan los resultados proporcionados por el algoritmo TVAL3, mientras que los obtenidos por L1-magic se analizan más adelante, ya que este último no resultó adecuado para todos los ordenamientos estudiados.

Los porcentajes de los coeficientes o patrones de Hadamard utilizados para la reconstrucción de estas imágenes fueron de 10 %, 20 %, 30 %, . . . 100 %, esto es mejor referido con el término Tasa de Compresión el cual se puede definir como el número de proyecciones utilizadas en la reconstrucción dividido por el número de píxeles totales de la imagen ( $m/n$ ). Sin embargo, en este capítulo solo se muestran tasas de compresión del 50 %, pues de esta forma los detalles visuales entre cada ordenamientos pueden percibirse de mejor manera, además, se evita una saturación visual de imágenes.

## 4.1 Resultados de simulaciones computacionales.

Para estos resultados se recuperó la imagen “Cameraman.tif” y “Pout.tif”, estas son imágenes en escala de grises ampliamente utilizadas en el campo de procesamiento de imágenes como imágenes de prueba estándar y son algunas de las muchas imágenes dentro de la biblioteca de visualización de MATLAB. Las imágenes fueron redimensionadas a un tamaño de  $128 \times 128$  píxeles y se muestran en las figuras 35 y 38.

### 4.1.1 Reconstrucción de la imagen “cameraman”.

La imagen “cameraman” es una imagen clásica que se ha utilizado ampliamente en el procesamiento de imágenes y en la investigación de visión por computadora. La imagen representa a un hombre con una cámara de vídeo en la mano y debido a su simplicidad y características distintivas el “cameraman.tif” se ha convertido en una herramienta útil para probar y comparar algoritmos y técnicas de procesamiento de imágenes. Entre sus usos más comunes se encuentra la evaluación de algoritmos de restauración de imágenes que intentan recuperar detalles perdidos o dañados en una imagen. La figura 35 muestra la imagen original y la redimensionada, las figuras 36 y 37 muestran las imágenes reconstruidas con una tasa de compresión del 50 % utilizando suma de patrones y el algoritmo TVAL3, respectivamente.

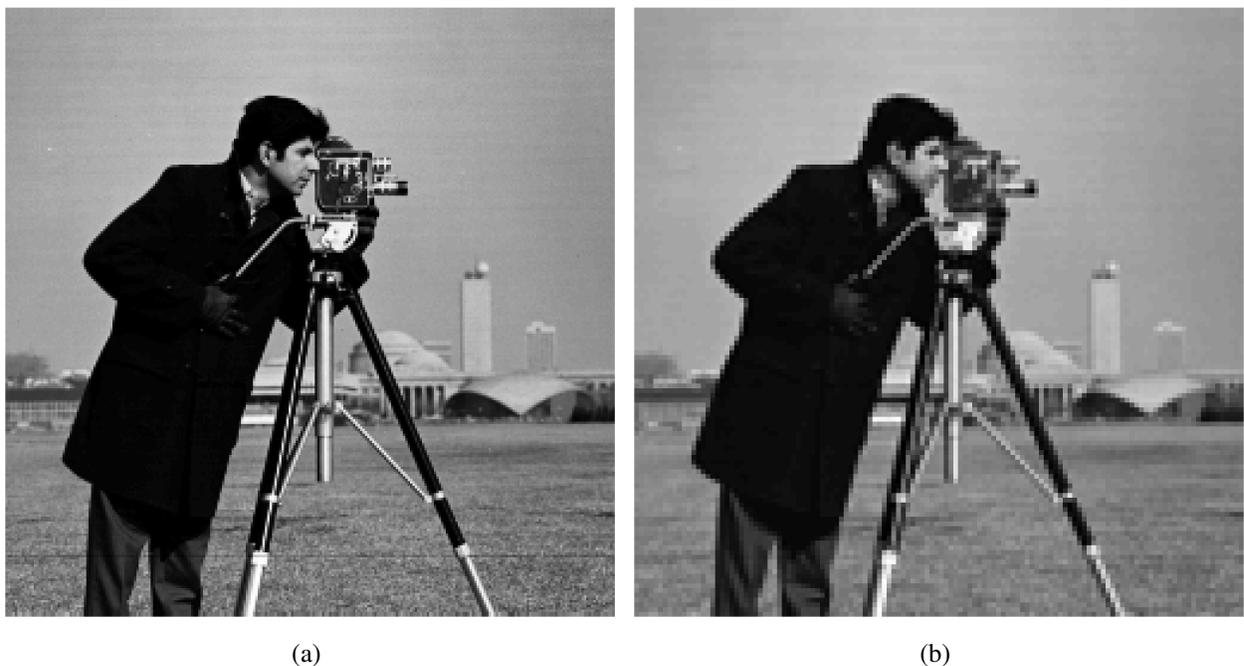


Figura 35: Imagen de prueba “Cameraman”, a) Imagen original, b) Imagen redimensionada a un tamaño de  $128 \times 128$ .



Figura 36: Reconstrucción de la imagen “cameraman” utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.



Figura 37: Reconstrucción de la imagen “cameraman” utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

#### 4.1.2 Reconstrucción de la imagen “pout”.

La imagen “pout.tif” también es una imagen clásica de prueba en el campo del procesamiento de imágenes. Esta imagen muestra una niña con los labios fruncidos con un fondo sencillo resaltando los detalles faciales de la niña. A diferencia del “cameraman” la resolución de la imagen original no es tan alta, además, no presenta variaciones de contraste tan significativas por lo que es ideal para comparar el desempeño de los ordenamientos en imágenes de características opuestas. La figura 38 muestra la imagen original y la redimensionada, las figuras 39 y 40 muestran las imágenes reconstruidas con una tasa de compresión del 50 % utilizando suma de patrones y el algoritmo TVAL3, respectivamente.

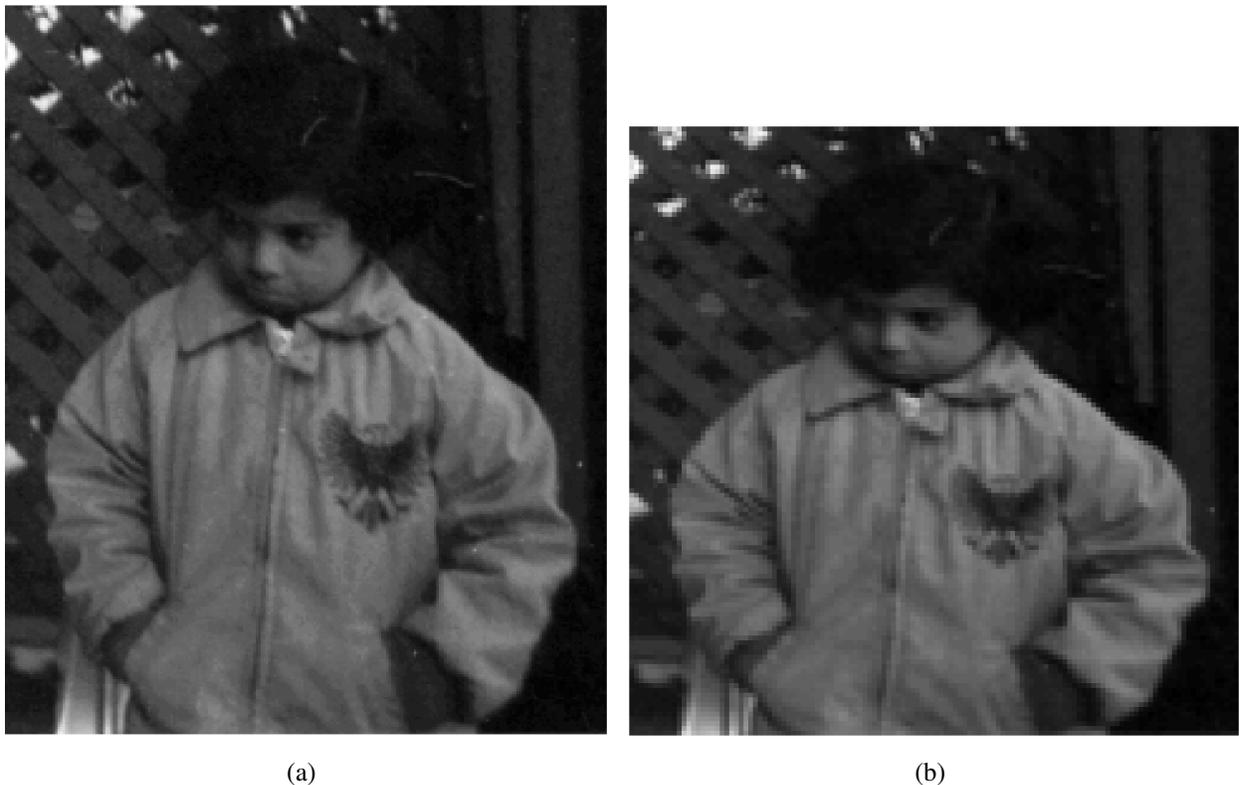


Figura 38: Imagen de prueba “Pout”, a) Imagen original, b) Imagen redimensionada a un tamaño de  $128 \times 128$ .



Figura 39: Reconstrucción de la imagen “pout” utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

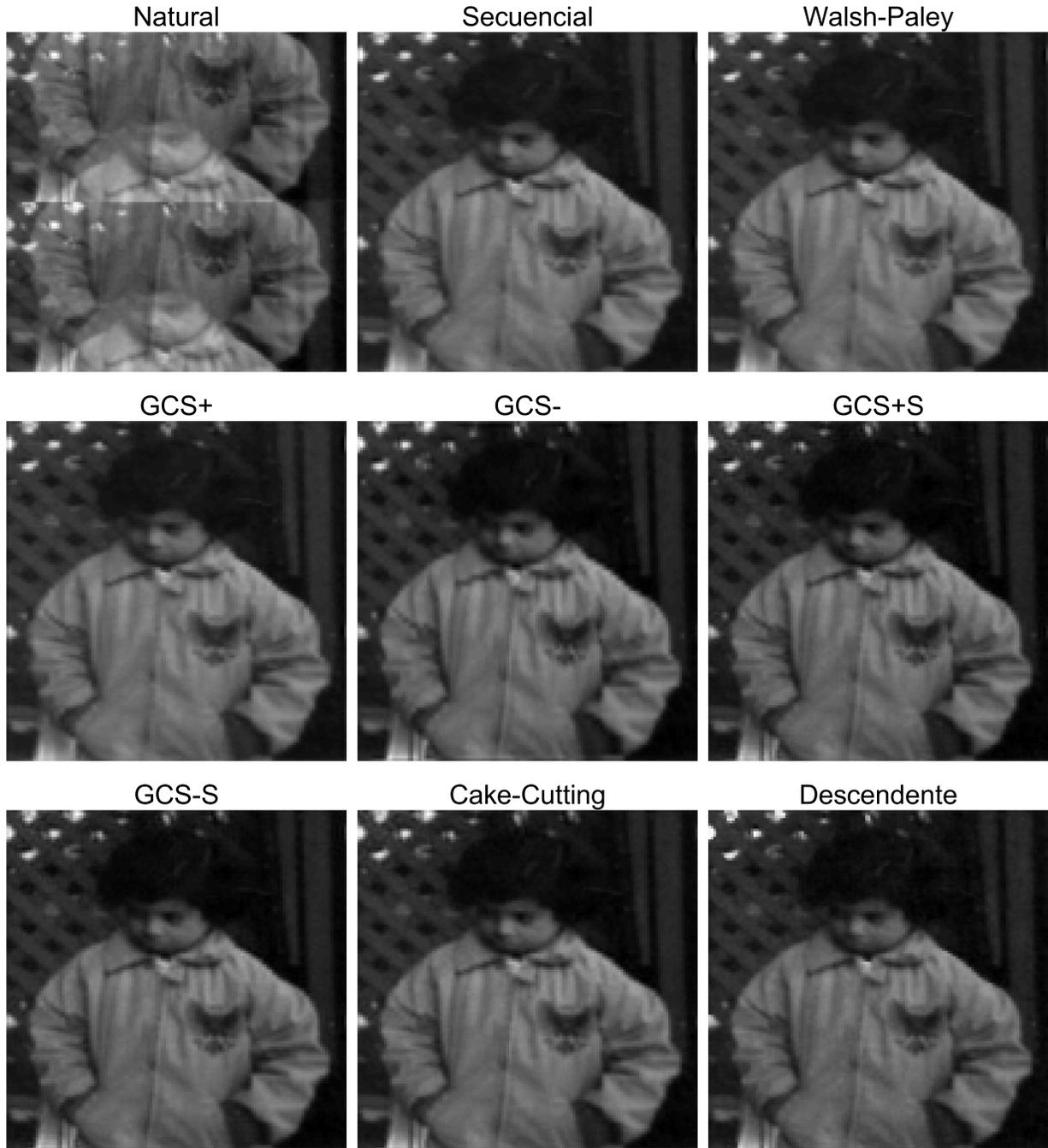


Figura 40: Reconstrucción de la imagen “pout” utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

## **4.2 Resultados experimentales.**

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las mediciones realizadas en el laboratorio de óptica. Como se describió en la sección 3.3.2, los objetos de prueba seleccionados fueron distintas imágenes impresas en transparencias, esto con el objetivo de maximizar la calidad en las imágenes reconstruidas garantizando una buena visibilidad de los detalles para su posterior análisis, sin embargo, otro tipo de objetos de prueba también podrían proporcionar resultados viables.

### **4.2.1 Primeras pruebas realizadas.**

En esta primera parte se muestran las imágenes obtenidas de las primeras pruebas experimentales realizadas para familiarizarse con el funcionamiento del DMD y los demás componentes. Las imágenes de prueba seleccionadas muestran distintas formas incluyendo letras de distintos logos y figuras de internet con el objetivo de analizar como se comporta la técnica de SPI en distintos tipos de imagen. En esta fase pruebas se utilizaron dos fuentes de luz, en la figura 41 se muestran las imágenes reconstruidas utilizando como fuente de iluminación el láser rojo ( $630 - 670 \text{ nm}$ ) y la figura 42 muestra las obtenidas al utilizar la lámpara LED. Finalmente una secuencia de imágenes del mismo objeto se muestran en la figura 43 para mostrar las distintas resoluciones alcanzables con la técnica.

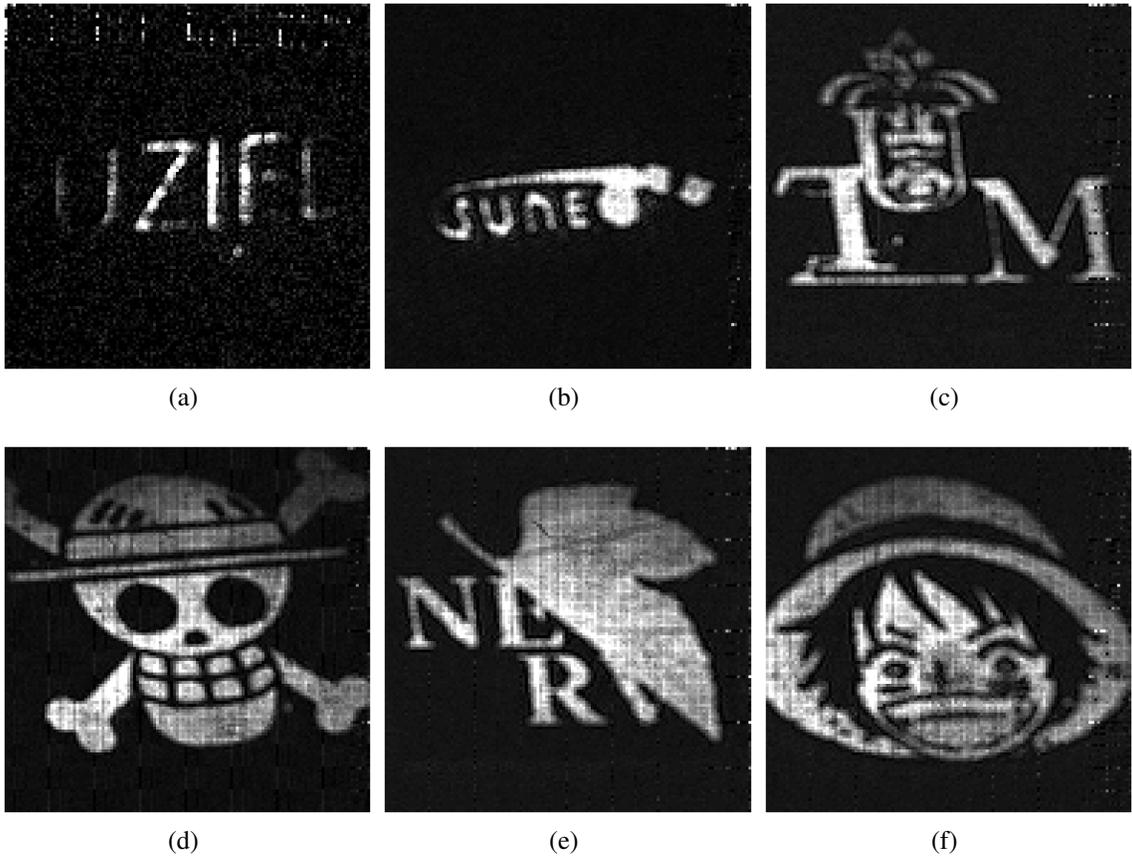


Figura 41: Conjunto de imágenes recuperadas en el laboratorio con ayuda de una fuente de luz láser. a) Imagen con letras del nombre Uziel, b) Logo del SUNE0, c) Logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, d),e),f) Imágenes aleatorias de internet.

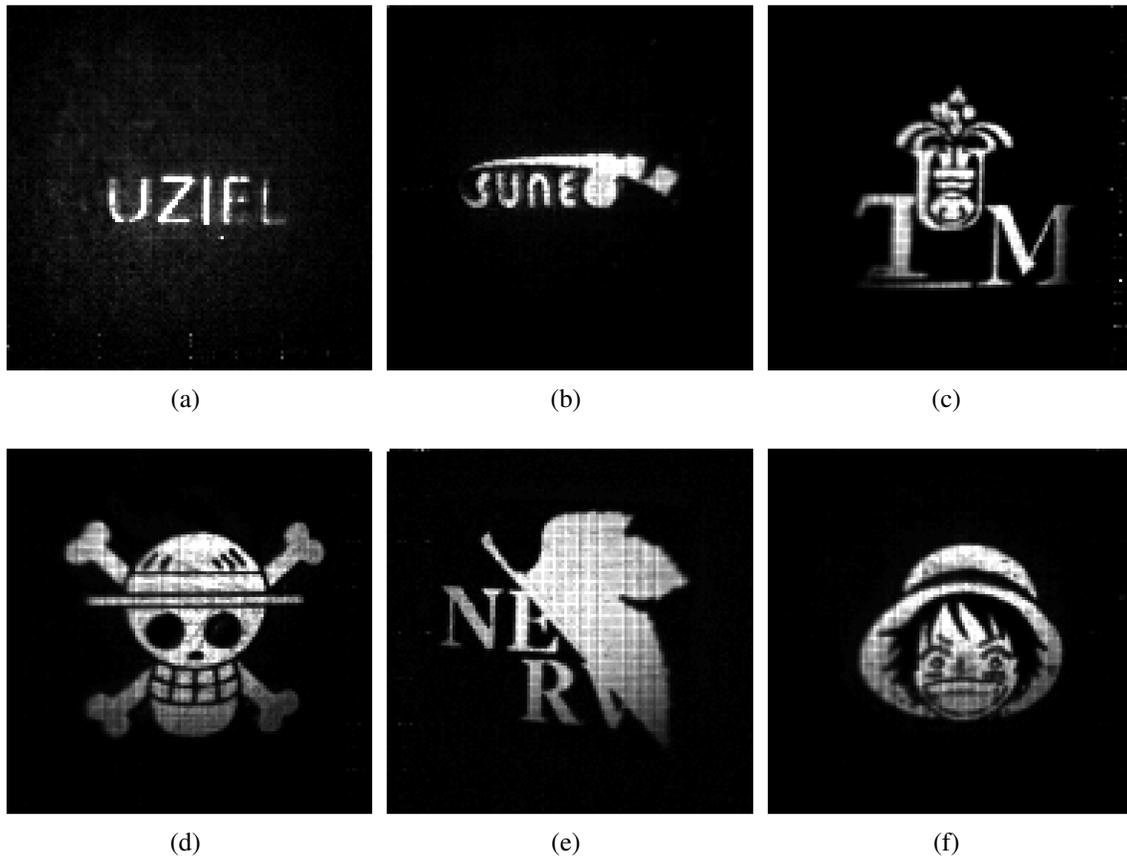


Figura 42: Conjunto de imágenes recuperadas utilizando una fuente de luz LED. a) Imagen con letras del nombre Uziel, b) Logo del SUNEQ, c) Logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, d),e),f) Imágenes aleatorias de internet.

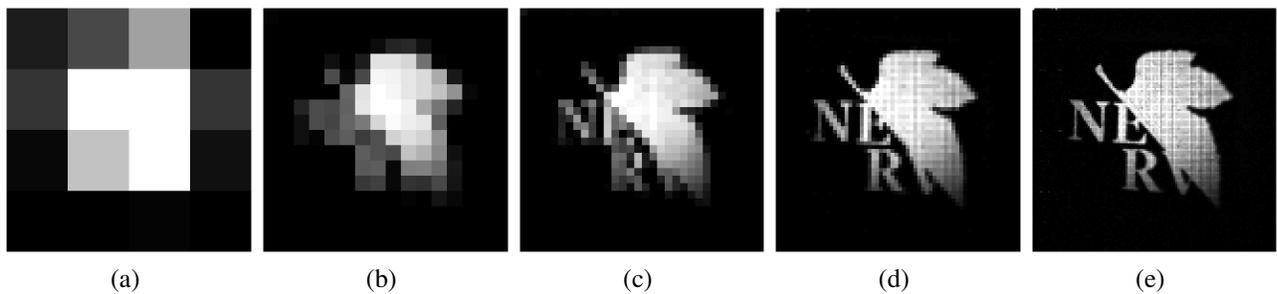


Figura 43: Secuencia de imágenes del mismo objeto, reconstruidas con distinto número de patrones obteniendo resoluciones de: a)  $4 \times 4$ , b)  $16 \times 16$ , c)  $32 \times 32$ , d)  $64 \times 64$ , e)  $128 \times 128$

#### 4.2.2 Reconstrucción logo Universidad Tecnológica de la Mixteca

Una de las imágenes elegidas para la fase de comparación de todos los ordenamientos fue el logotipo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. Esta imagen fue editada y se convirtió en un elemento en escala de grises que se caracteriza por sus pequeños detalles que componen el logotipo y las letras del nombre de la universidad. Esto la hace ideal para analizar cómo se desempeñan los diferentes ordenamientos en la reconstrucción bajo diversas tasas de compresión. En la figura 44 a) se muestra la imagen obtenida de la edición del logo original, en la figura 44 b) la obtenida con el 100 % de las mediciones, es decir la imagen objetivo al truncar la señal con distintas tasas de compresión. Las figuras 45 y 46 muestran las imágenes reconstruidas con los distintos ordenamientos y con una tasa de compresión del 50 % utilizando suma de patrones y el algoritmo TVAL3, respectivamente.

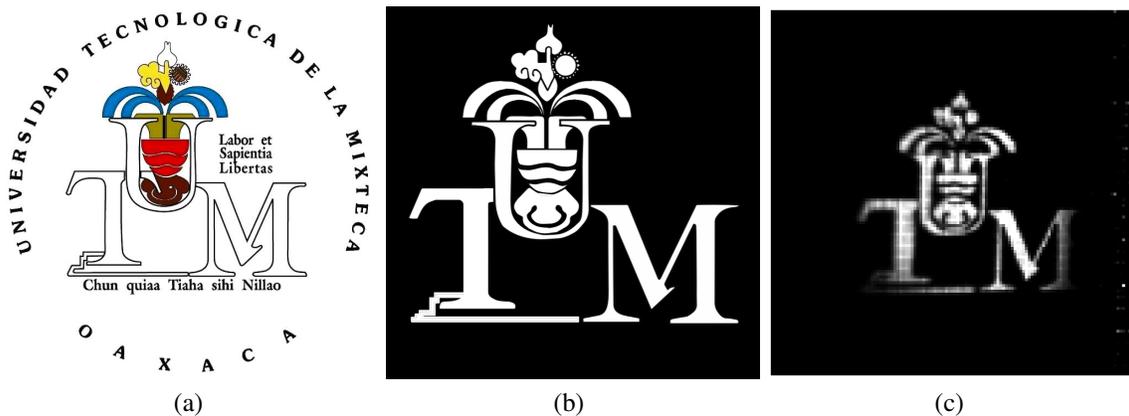


Figura 44: Imagen de prueba logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. a) Imagen original, b) Versión editada del logo original, c) Imagen objetivo obtenida con el 100 % de las mediciones en un tamaño de  $128 \times 128$ .

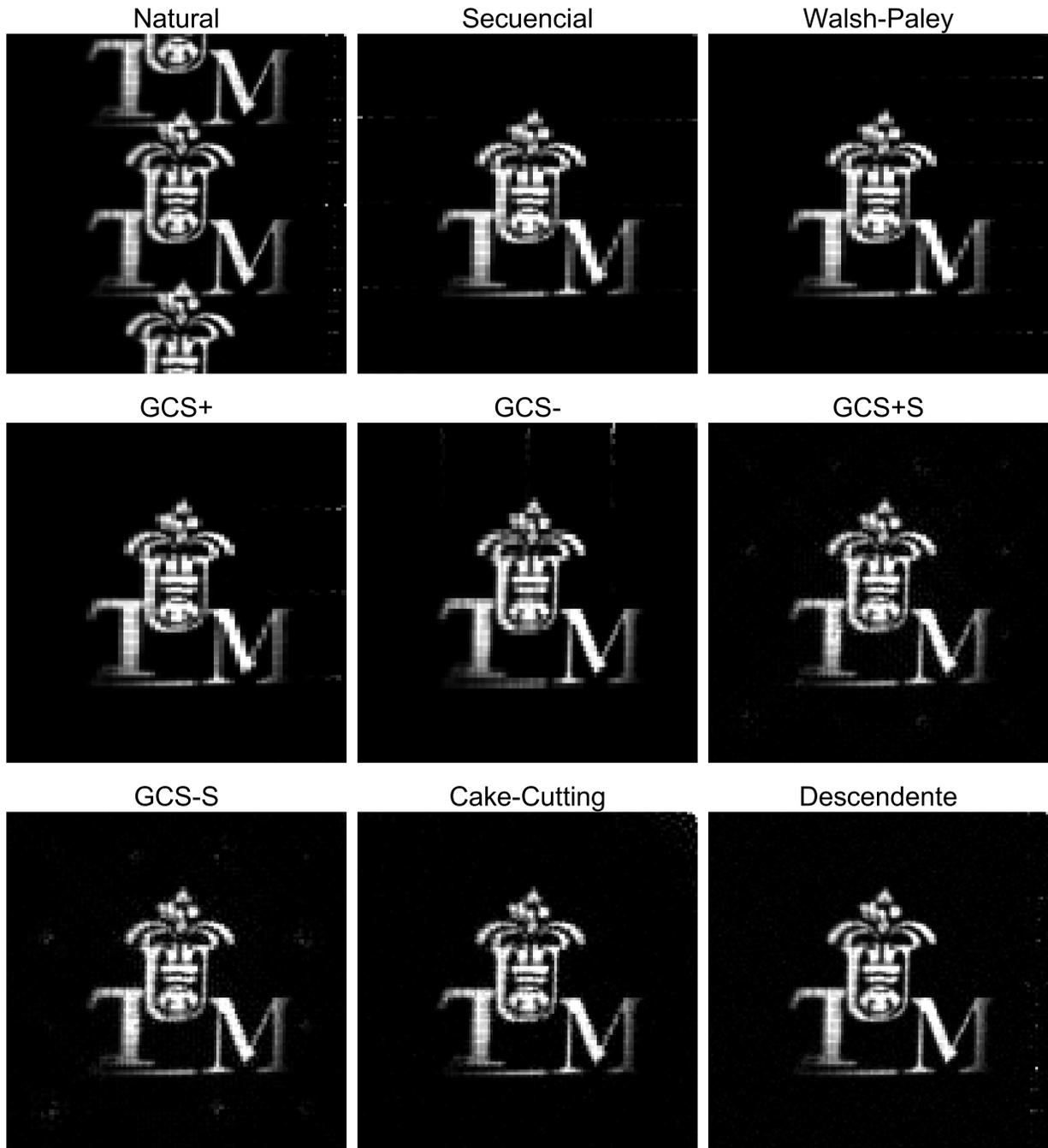


Figura 45: Reconstrucción del logo de la UTM utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

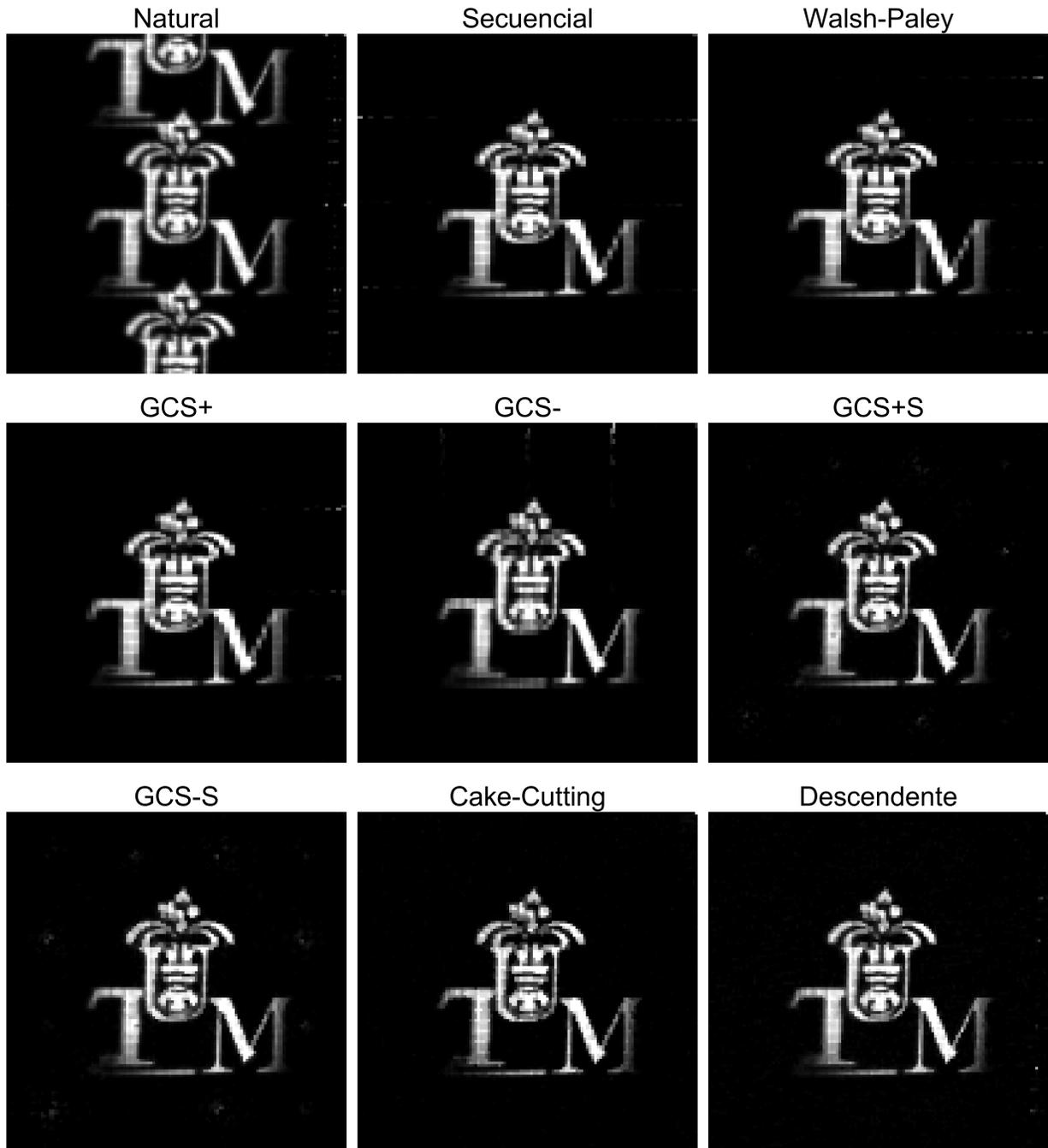


Figura 46: Reconstrucción del logo de la UTM utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

### 4.2.3 Reconstrucción de la prueba de resolución USAF de 1951

El “1951 USAF Resolution Test Chart” es un estándar utilizado para evaluar la capacidad de resolución de sistemas ópticos, como cámaras, microscopios y otros dispositivos de imagen. Fue desarrollado por la Fuerza Aérea de los Estados Unidos en 1951 y desde entonces ha sido ampliamente utilizado en el campo de la óptica y la imagenología.

Este gráfico de resolución consiste en una serie de patrones de líneas dispuestas en filas y columnas, están diseñados para ser fotografiados o visualizados mediante el sistema óptico que se está evaluando.

La forma en que estas líneas son distribuidas permite evaluar la resolución espacial, el contraste y el desempeño del sistema óptico en las regiones horizontales y verticales. Esto se logra al observar el punto más pequeño en el que las líneas y los espacios se pueden distinguir claramente. En la figura 47 a) se muestra la imagen de la prueba original de 1951 [65], en la figura 47 b) una versión simplificada de la prueba original donde solo se muestran las filas y columnas para una mejor claridad visual y simplicidad en el análisis, c) La imagen objetivo obtenida con el 100 % de las mediciones. Las figuras 48 y 49 muestran las imágenes reconstruidas con los distintos ordenamientos y con una tasa de compresión del 50 % utilizando suma de patrones y el algoritmo TVAL3, respectivamente.

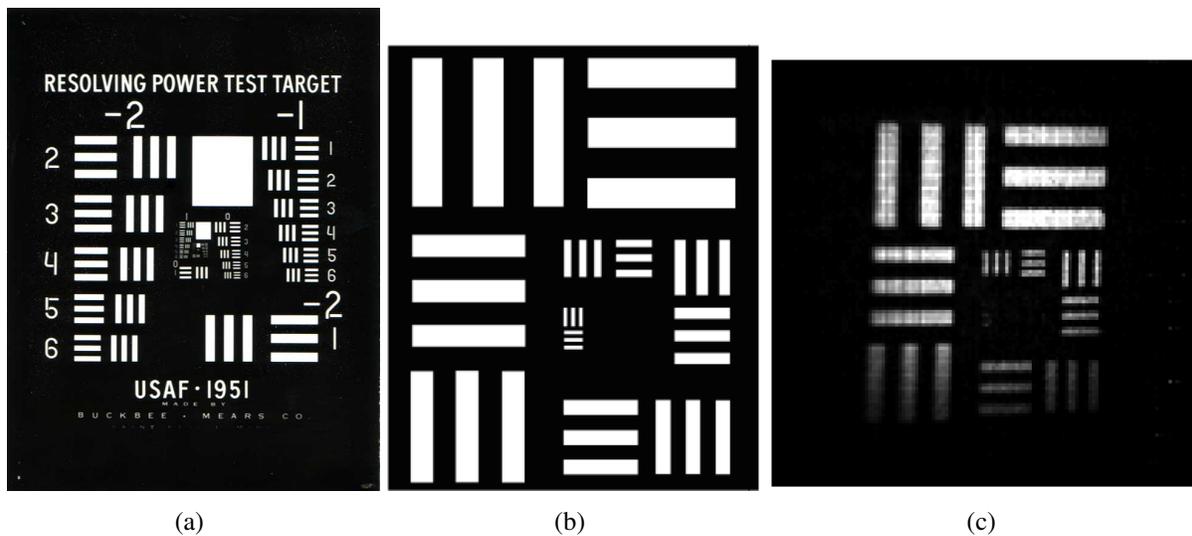


Figura 47: Imagen de prueba del USAF 1951, a) Imagen original, b) Imagen simplificada de la versión original, c) Imagen objetivo obtenida con el 100 % de las mediciones en un tamaño de  $128 \times 128$ .

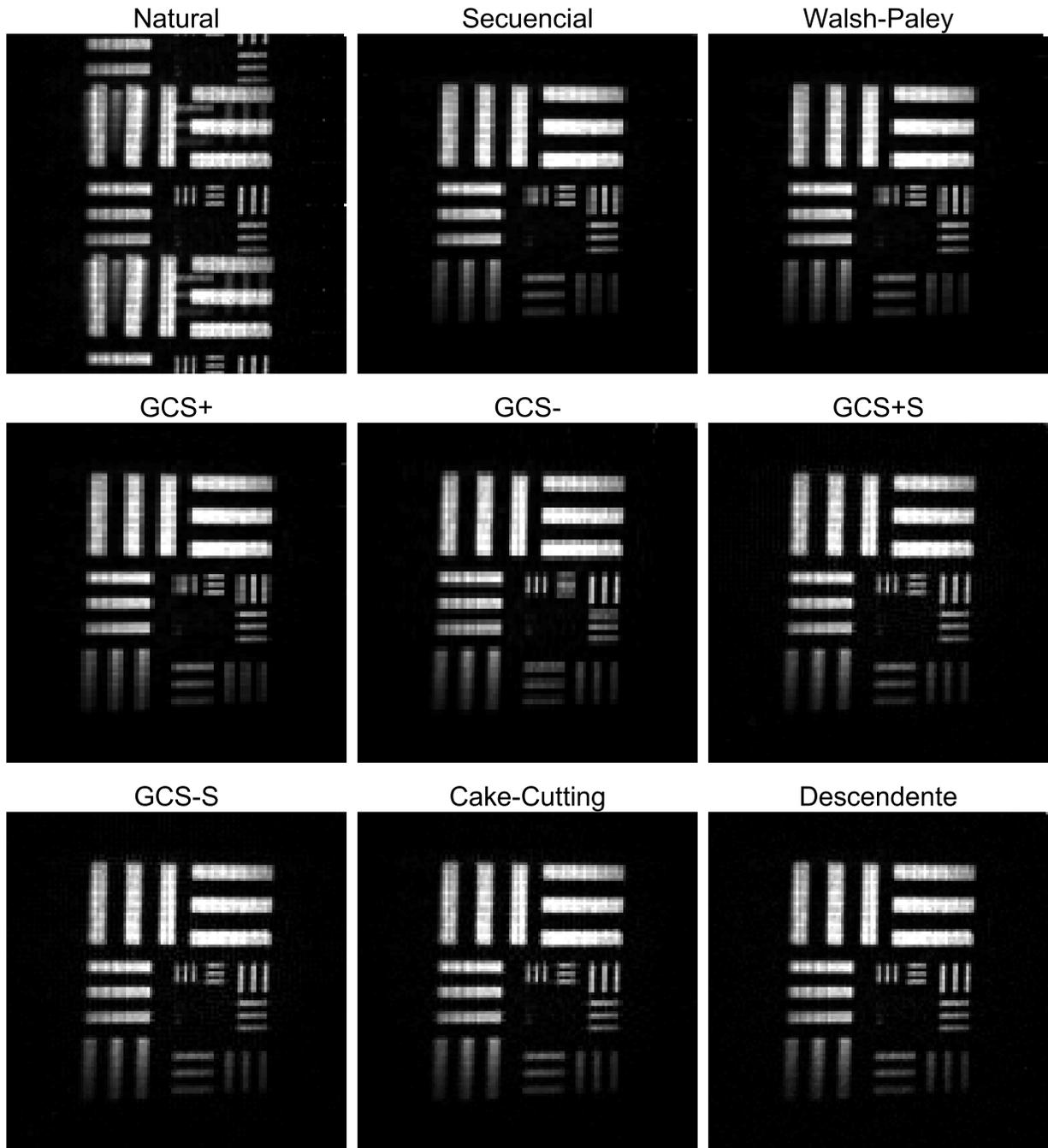


Figura 48: Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

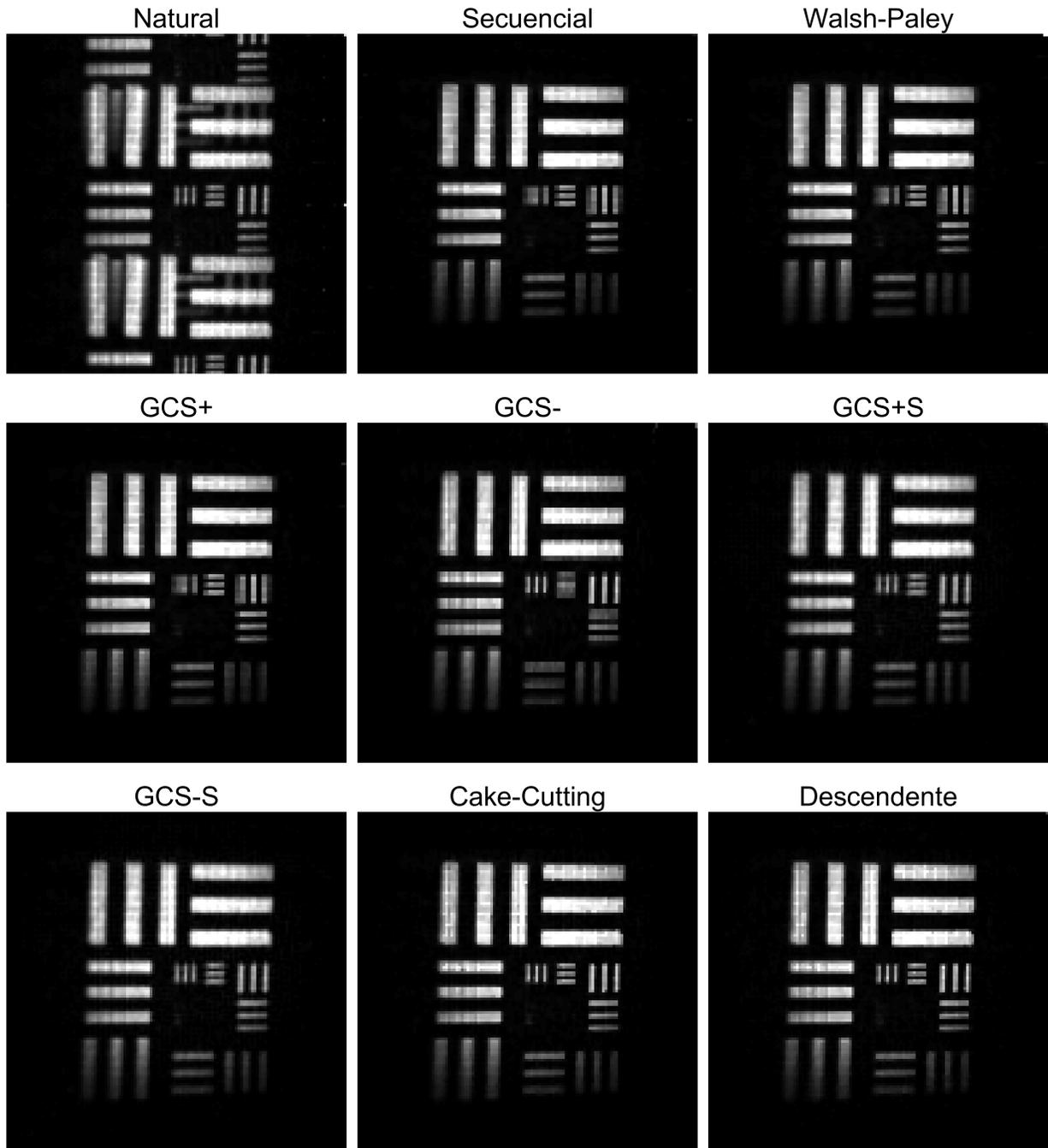


Figura 49: Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.

## Capítulo 5. Análisis de resultados.

En este capítulo se examinan los resultados obtenidos tanto de las simulaciones computacionales como de las mediciones experimentales. Se lleva a cabo una comparación del rendimiento de los 9 métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard seleccionados para la reconstrucción de las imágenes de prueba utilizadas destacando sus puntos fuertes y débiles en términos de la calidad visual. Además, se contrastan los espectros de las transformadas Hadamard y los coeficientes experimentales obtenidos. Se evalúa la calidad de las imágenes reconstruidas haciendo uso de una prueba de evaluación ampliamente utilizada en el estado del arte. También se comparan los resultados obtenidos por los algoritmos de sensado comprimido empleados en este estudio. Por último, se presentan las mediciones de los tiempos de cómputo asociados con cada una de las técnicas de reconstrucción de las imágenes.

### 5.1 Simulaciones computacionales.

En esta sección, analizamos las imágenes reconstruidas en la fase de simulaciones computacionales, comparando el rendimiento de cada método de ordenamiento en las dos imágenes utilizadas.

El propósito principal de aplicar la técnica de single-pixel imaging mediante simulaciones, en lugar de confiar únicamente en la parte experimental, fue el de familiarizarse hasta alcanzar un dominio adecuado de esta novedosa técnica de reconstrucción de imágenes. Sin embargo, otro objetivo fundamental fue proporcionar una pauta de referencia para determinar los resultados esperados de su aplicación en el laboratorio permitiéndonos visualizar en qué medida la práctica experimental se desvía de la técnica en su estado ideal.

Ya que el objetivo de estudio en este trabajo de tesis se centra en comparar el desempeño de cada ordenamiento a la hora de reducir las mediciones experimentales, la comparación entre cada imagen reconstruida debe hacerse con respecto a la imagen objetivo, es decir a la imagen que se obtiene con el 100 % de los coeficientes, estas imágenes se muestran en las figuras 35 (b) y 38 (b). Las figuras 36 y 39 muestran la reconstrucción de las imágenes utilizando la técnica de SPI solamente con la suma de patrones de cada ordenamiento empleando el método descrito por la ecuación 4, es decir, sin ayuda de la herramienta de sensado comprimido que mejore la calidad de cada imagen.

Es fácil notar en estas imágenes que el ordenamiento Natural de la matriz de Hadamard presenta el peor desempeño de todos, proporcionando en todos los casos algo similar a una superposición del objeto de prueba en la imagen, es decir, parece que tanto la imagen del *cameraman* como *pout*

parecen haber sido cortados por la mitad y superpuestos en dos regiones de la imagen, esto no nos permite considerar la reconstrucción como un resultado cercano a la imagen objetivo.

Con respecto a los ordenamientos Secuencial, Walsh-Paley y GCS+ se puede notar que los tres proporcionaron resultados en extremo similares, no es de extrañar para el caso de GCS+ pues su construcción tiene la misma base que el orden Secuencial (código Gray), sin embargo, para el orden Walsh-Paley se presenta como una curiosa coincidencia, aun así, para tasas de compresión distintas del 50% esto no se vuelve a repetir como se verá más adelante. En estos tres métodos de ordenamiento es fácil notar regiones con bordes dentados o patrones de escalera, características típicas del *aliasing* fuertemente presentes en detalles de la imagen que se muestran en orientaciones inclinadas como los bordes de las personas en ambas imágenes o el bastón de la cámara, contrario a detalles rectos que se ven beneficiados de este hecho. En cualquier caso presenta un mayor acercamiento a la imagen objetivo que el orden Natural permitiendo ver una calidad muy aceptable.

Comparando el orden GCS+ con el GCS- se puede apreciar una diferencia muy notable entre ambos y es el hecho de que los bordes dentados o patrones de escalera se muestran en disposiciones verticales para el orden GCS+ y horizontales para el orden GCS-, de esta forma el ordenamiento GCS+ permite tener mejor calidad de recuperación para los elementos horizontales en las imágenes y el caso contrario para GCS- recuperando mucho mejor los verticales. Esto es una clara consecuencia del criterio de obtención de estos ordenamientos siendo que la secuencia de los patrones que construyen la matriz de los ordenamientos son los traspuestos de uno con respecto al otro, de esta forma, la frecuencia espacial se ve implicada en la reconstrucción de las imágenes horizontalmente o verticalmente según sea el caso del ordenamiento.

No obstante, para los ordenamientos en zigzag, es decir, el método GCS+S y GCS-S esto no se repite a pesar de que la base de construcción de estos ordenamientos son los dos anteriores respectivamente. En otras palabras, el criterio de este ordenamiento de seleccionar los patrones en forma zigzageante de GCS+ y GCS- permitió reducir al mínimo las tendencias de bordes dentados horizontales y verticales difuminando estos defectos. Sin embargo, el precio a pagar es una región de puntos borrosos alrededor de las zonas donde ocurren cambios en el contraste, logrando difuminar el contraste general de las imágenes esto es muy notable en la imagen del *cameraman* pues los saltos de contraste y los bordes remarcados de los elementos que lo conforman son mayores que los que contiene *pout*, de hecho, como ya se mencionó, esta última parece tener detalles suavizados por la textura general de la imagen lo que disminuye la notoriedad de estos aspectos.

Algo similar ocurre con el ordenamiento Cake-cutting donde las imágenes reconstruidas presentan, de nueva cuenta, las zonas con puntos borrosos, sin embargo, hay una clara reducción de este

efecto con respecto a los ordenamientos en zigzag, aun así, la reducción o difuminación en los cambios en el contraste sigue presente.

De cualquier forma, los ordenamientos GCS+S, GCS-S y Cake-cutting presentaron resultados muy cercanos a la imagen objetivo permitiendo mostrar detalles más finos y difuminando los patrones dentados que se presentan en el resto de ordenamientos. Por supuesto, la clara disminución en el contraste o las zonas de puntos borrosos hacen que la calidad empeore, sin embargo, la calidad visual perceptible nos permite determinar fácilmente la estructura e información relevante de las imágenes de prueba.

Tanto en las imágenes mostradas en la figura 36 como en la 39, se puede observar un claro ganador en cuanto al rendimiento de la reconstrucción de las imágenes proporcionado por el método de ordenamiento descendente. En estas imágenes, se aprecia visualmente una mayor fidelidad con respecto a la imagen objetivo. Esto se evidencia en la capacidad de mostrar con más precisión los detalles en el rostro tanto del *cameraman* como de *pout*. No se observa una disminución en los cambios de contraste ni la presencia de patrones dentados, solo se percibe un ligero efecto de puntos borrosos, apenas notable en el cielo de fondo del *cameraman*.

Finalmente, en las imágenes 37 y 40 se muestran los efectos de sensado comprimido sobre la reconstrucción de las imágenes, nuevamente con el propósito de acercarse más a la imagen objetivo. En líneas generales, lo que permitió SC fue una mejora de la calidad visual en los resultados de todos los métodos de ordenamiento presentados tanto en *cameraman* como en *pout* resaltando tres puntos principales:

- Una notable disminución de los bordes dentados suavizando estos defectos en los ordenamientos que los presentaron.
- Una mejora en el control del contraste principalmente en GCS+S, GCS-S y Cake-cutting donde el defecto de suavizado o de opacidad del contraste fue eliminado totalmente, de igual forma, en estos ordenamientos las regiones de puntos borrosos fueron eliminadas.
- En el ordenamiento descendente mejoró el contraste y remarcó la visibilidad de los bordes en los elementos de las imágenes, sin embargo, de acuerdo con la percepción visual, el efecto que tuvo la aplicación de SC sobre este ordenamiento parece haber alejado la fidelidad con la imagen objetivo eliminando los detalles faciales y teniendo un efecto similar al desenfoque.

### 5.1.1 Espectros de Hadamard.

La aplicación de la transformada de Hadamard utilizando la ecuación 15 o 18, permite ver el llamado espectro de Hadamard, y cuyo análogo puede ser el espectro de Fourier obtenido por medio de su transformada respectiva. Estos espectros generalmente se visualiza como un gráfico 2D llamado “espectro de potencia” o energía. Y entre sus usos comunes se destaca la compresión de imágenes al eliminar las frecuencias de menor energía, lo que permite reducir la cantidad de datos necesarios para almacenar la imagen.

En la figura 51 se muestran los espectros resultantes de la aplicación de la transformada Hadamard a la imagen *cameraman* de  $64 \times 64$  píxeles utilizando las matrices de los ordenamientos discutidos obtenidos. En la figura 50 se muestra como referencia de comparación el espectro de la Transformada de Fourier aplicada a la misma imagen.

La visualización de estos espectros permite apreciar la concentración de energía para cada método de ordenamiento [5] [56]. En el caso del orden Natural, tiende a dispersar la energía en todo el espacio, mientras que el orden Secuencial concentra hacia las esquinas superiores derecha e izquierda. Walsh-Paley permite distinguir 4 regiones distintas, concentrando la mayor energía en la esquina superior izquierda caso similar a los métodos GCS+ y GCS-, de hecho, la concentración en esta región en particular justifica el escaneo en zigzag para los métodos GCS+S y GCS-S lo que promueve un espectro resultante concentrado en la parte superior, correspondiente a los primeros patrones de proyección. Este mismo caso se repite para Cake-cutting y descendente, destacando este último por su gran concentración de energía en la parte superior, logrando incluso un gradiente suavizado en su intensidades, es decir, las tonalidades de la escala de intensidades varían de acuerdo a su intensidad en orden descendente de relevancia.

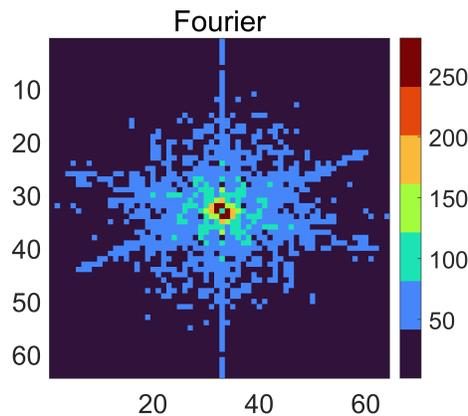


Figura 50: Visualización del espectro de la Transformada de Fourier aplicada a la imagen *cameraman*.

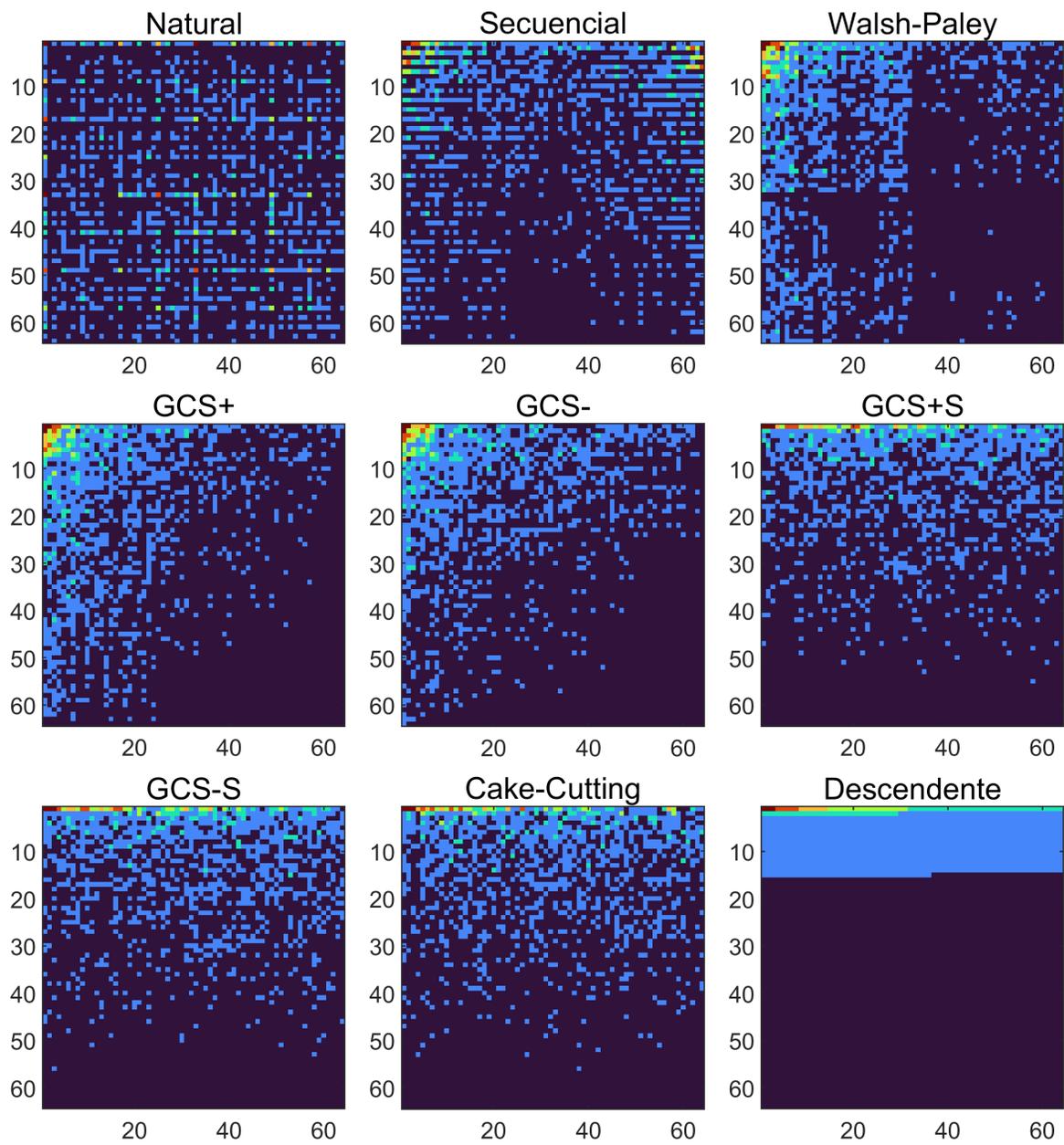


Figura 51: Visualización de los espectros de la Transformada de Hadamard para cada uno de los métodos de ordenamiento aplicada a la imagen *cameraman*.

## 5.2 Mediciones experimentales.

En esta sección analizamos nuevamente las imágenes reconstruidas comparando el rendimiento de cada ordenamiento pero esta vez en la fase de las pruebas experimentales.

Las figuras 45 y 48 muestran los resultados de la recuperación de dichas imágenes para una tasa de compresión del 50 %, es decir, habiendo truncado la mitad de la señal o coeficientes de correlación y sin utilizar algoritmos de sensado comprimido.

En líneas generales el desempeño de los ordenamientos en los resultados proporcionados siguen las descripciones dadas en la sección 5.1. Nuevamente el ordenamiento Natural genera una especie de superposición vertical de la mitad de la imagen, alejándose demasiado de la fidelidad original. Los ordenamientos Secuencial, Walsh-Paley y GCS+ son muy similares entre sí y la comparación entre GCS+ y GCS− repite el comportamiento anterior, es decir, para el caso del USAF 1951 las líneas horizontales se ven mejor recuperadas para el GCS+ y perdiendo muchos detalles en las líneas verticales, y viceversa para el GCS−, lo cual también es evidente, aunque de forma más sutil, para la imagen del logo de la UTM en la que los detalles verticales y horizontales de las letras se ven comprometidos según sea el caso.

Nuevamente los dos ordenamientos de Zigzag y Cake-cutting presentan el mejor desempeño en calidad visual con respecto a los anteriores, aunque muestran muy ligeramente los puntos borrosos descritos previamente alrededor de las regiones de cambio de contraste. Finalmente, el desempeño del orden descendente, tanto para UTM como para USAF presenta la mejor fidelidad visual, provocando que las diferencias entre las imágenes obtenidas con este ordenamiento y las imágenes objetivo sean prácticamente indistinguibles.

A pesar de lo descrito anteriormente, es importante mencionar que en la fase experimental, las diferencias entre los resultados de cada método de ordenamiento son más difíciles de distinguir que en el caso de las simulaciones. Esto podría atribuirse a cualquier interferencia que pudo haber provocado ruido en las intensidades registradas, manifestando el hecho de que estos resultados son la aplicación experimental del escenario ideal, donde la falta de distinción entre los métodos de ordenamiento refleja las discrepancias entre la teoría y la práctica de la técnica de Single-Pixel Imaging.

El hecho de la poca distinguibilidad entre ordenamientos se vuelve aun más notorio en las imágenes reconstruidas mostradas en las figuras 46 y 49 donde la aplicación de sensado comprimido atenúa aun más esta diferencias haciendo que sea casi imperceptible distinguir entre ordenamientos, a menos que se tenga gran atención al detalle. Sin embargo, esto resalta la gran fidelidad entre estas reconstrucciones y las imágenes objetivo pues de la misma forma que ocurrió en las simulaciones, la ayuda de sensado comprimido mejoró la calidad visual de todas las reconstrucciones

quitando cualquier defecto presente.

De esta forma, para visualizar mejor las diferencias entre ordenamientos, en las figuras 52 y 53, se presentan las imágenes reconstruidas para UTM y USAF con una tasa de compresión del 10 %, y sin sensado comprimido, respectivamente. Esta vez las características distintivas de cada método de ordenamiento son muy notorias, realizando las descripciones previamente proporcionadas.

La presencia de estas características resalta los defectos en las reconstrucciones, donde para los ordenamientos Natural, Secuencial, Walsh-Paley, GCS+ y GCS-, la calidad visual es deficiente y la fidelidad con respecto al objeto original se pierde casi por completo.

Por otro lado, indiscutiblemente, los ordenamientos GCS+S GCS-S y Cake-cutting presentan un mejor desempeño con respecto a los anteriores al permitir una visualización adecuada del objeto de prueba y ofrecer una cercanía muy buena con la imagen objetivo. Sin embargo, el orden descendente sobresale al lograr una reconstrucción excepcional del objeto de prueba, permitiendo la visualización clara tanto del logo UTM como de la prueba USAF, incluso con una reducción del 90 % en el número total de coeficientes o de la señal.

Por supuesto, utilizar sensado comprimido bajo estas condiciones resulta igualmente beneficioso como se puede ver en las imágenes de las figuras 54 y 55, donde se destaca el buen desempeño del ordenamiento descendente en el que la calidad visual y la fidelidad a la imagen objetivo son sorprendentes. Esto sin olvidar mencionar que en los ordenamientos GCS+S GCS-S y Cake-cutting, el algoritmo de sensado comprimido mejora aún más sus resultados.

Para resaltar aun más las diferencias en el desempeño de los métodos de ordenamiento, en la figura 56 se presentan gráficas de los coeficientes de correlación obtenidos de las mediciones experimentales para cada ordenamiento utilizando la imagen de prueba del logo de la UTM. Aquí se puede apreciar que la manera en que los coeficientes se ordenan cambia con el aumento del número de patrones proyectados para cada método de ordenamiento. Sin embargo, es evidente que la tendencia general es que las magnitudes absolutas de los coeficientes disminuyan a medida que aumenta el número de patrones, lo que resulta en una acumulación o concentración efectiva de los coeficientes en los primeros patrones proyectados. En otras palabras, los métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard tienden a concentrar los coeficientes de mayor peso en los primeros patrones que son proyectados. De hecho, aquellos que logran hacerlo lo mejor posible son los que presentan mejores resultados en las imágenes reconstruidas. Específicamente, esto se refleja en una correlación entre los buenos resultados en calidad visual de los métodos de ordenamiento GCS+S, GCS-S, Cake-cutting y, especialmente, en el método descendente, y la capacidad de concentrar los coeficientes de correlación hacia los primeros patrones.

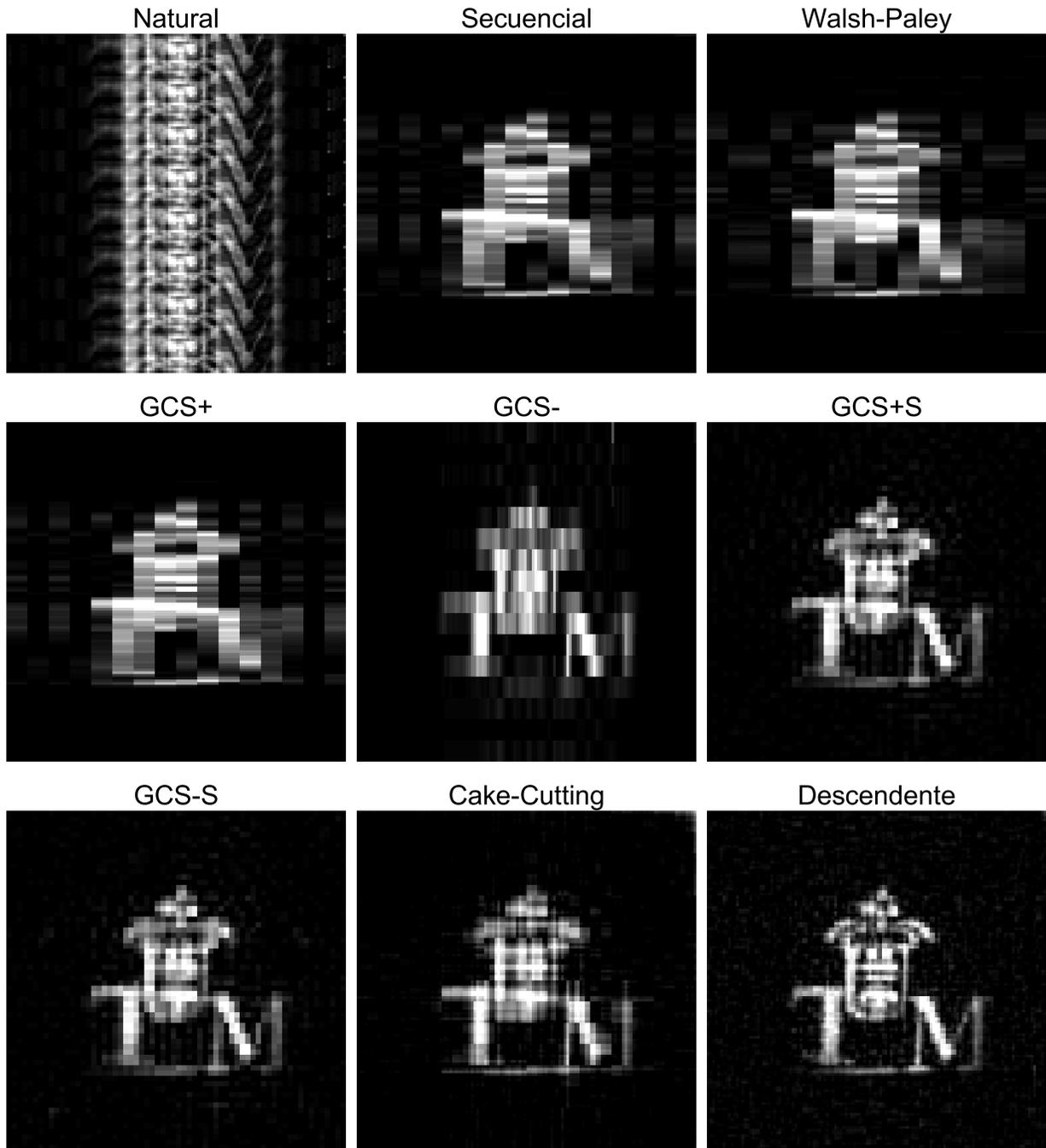


Figura 52: Reconstrucción del logo de la UTM utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 10 %.

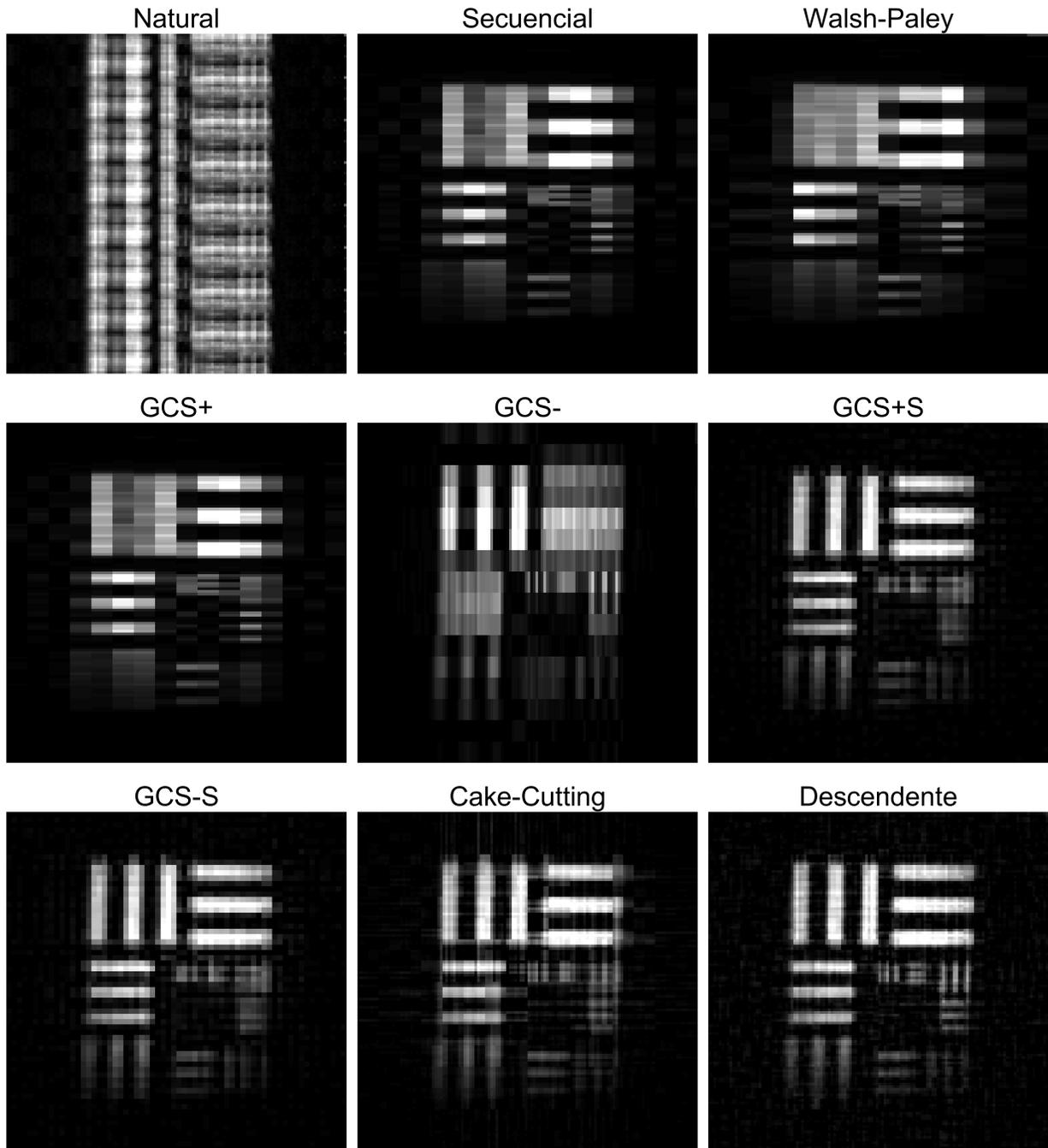


Figura 53: Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 10%.

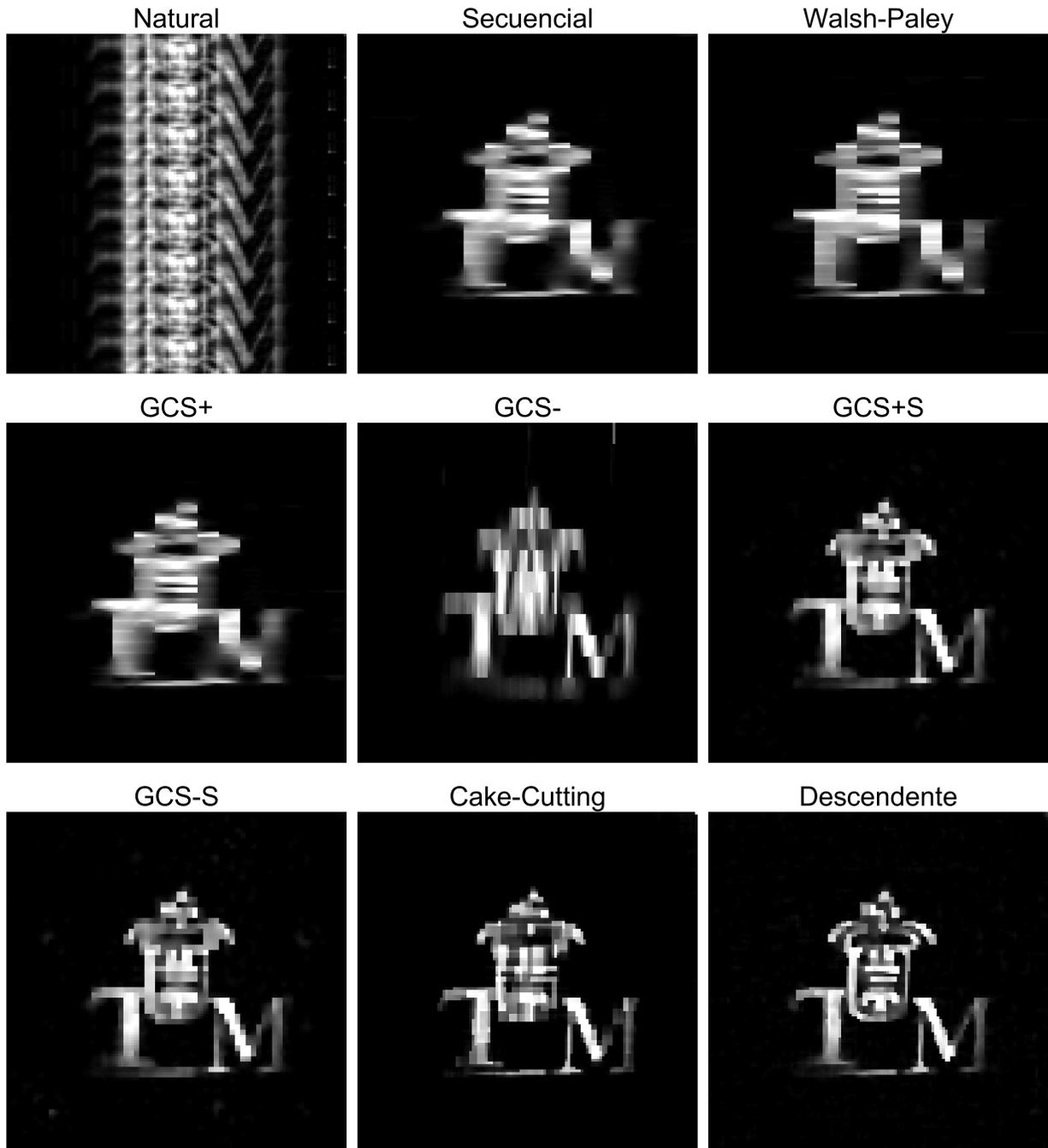


Figura 54: Reconstrucción del logo de la UTM utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 10%.

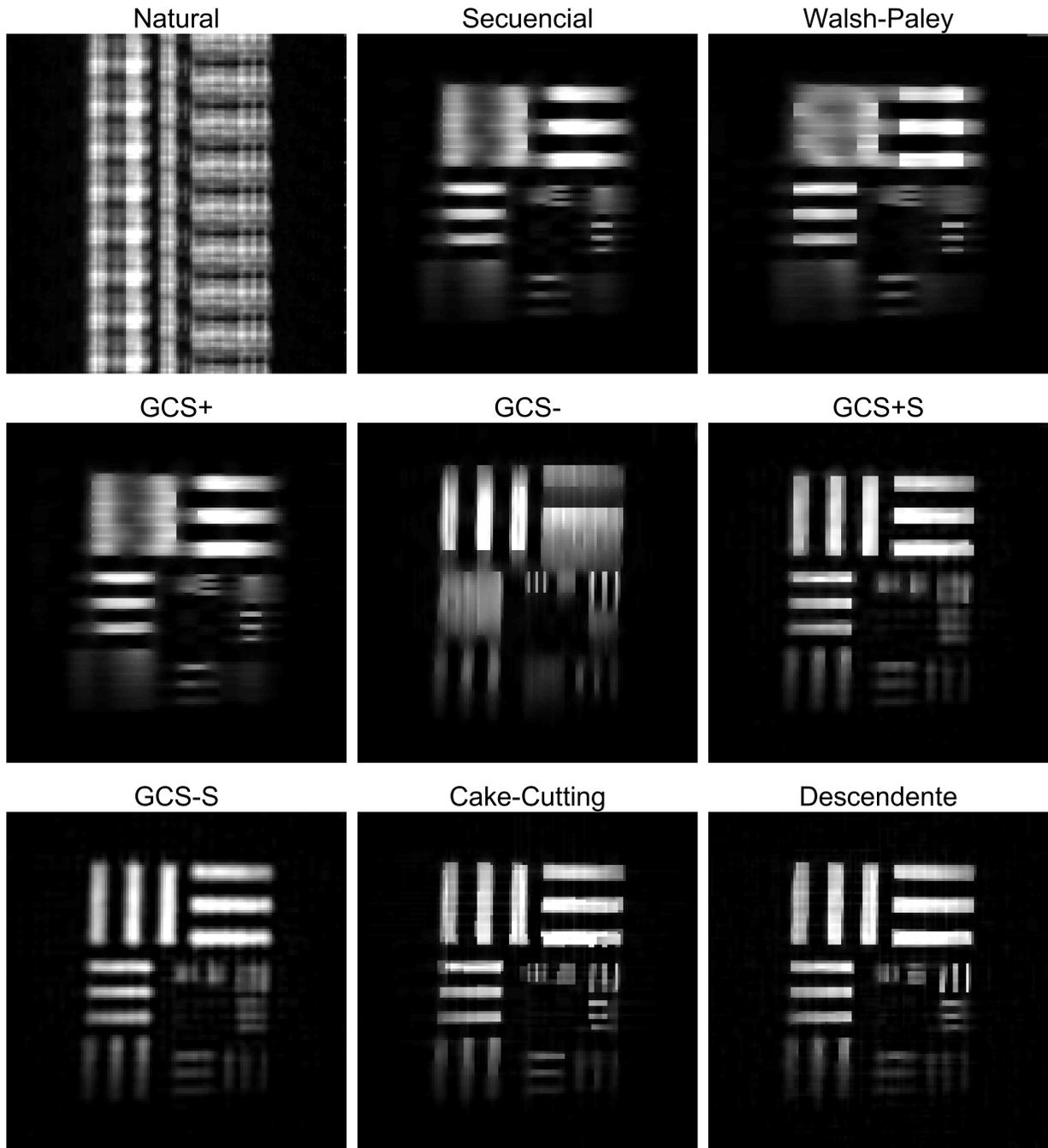


Figura 55: Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 10%.

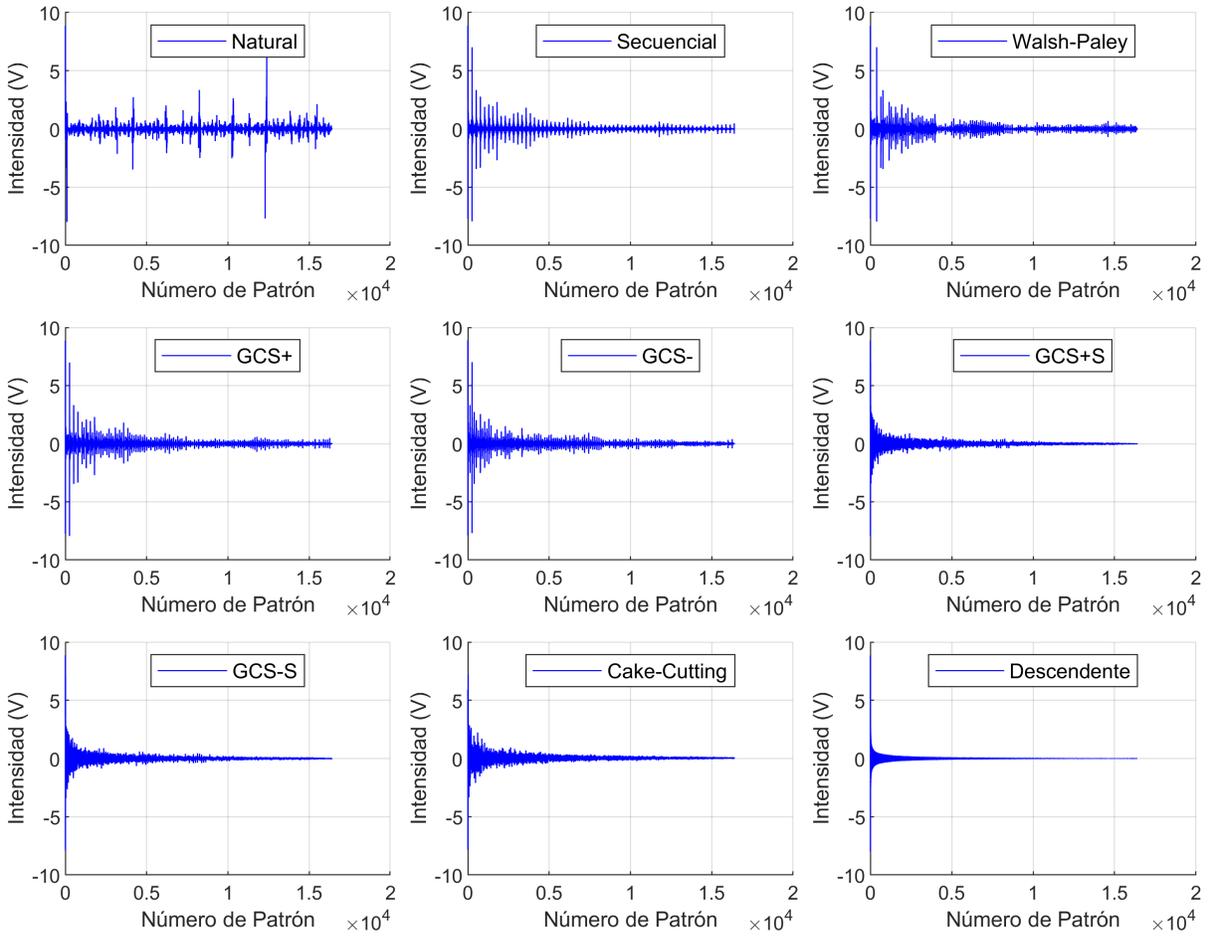


Figura 56: Comparación gráfica de los coeficientes de correlación obtenidos de los 9 métodos de ordenamiento para la reconstrucción de la imagen del logo UTM.

### 5.3 Pruebas de evaluación.

Hasta este punto se han analizado las imágenes reconstruidas con ayuda de la percepción visual que una persona común podría tener simplemente observando una imagen y extrayendo información de ésta. Sin embargo, para dar conclusiones más rigurosas se requiere de una métrica que evalúe los resultados cuantitativamente y proporcione una perspectiva distinta. Existen múltiples métricas de evaluación usadas para la realizar pruebas de fidelidad entre una imagen de referencia y una distorsionada.

La métrica de calidad de referencia completa más simple y ampliamente utilizada es el error cuadrático medio, MSE, por sus siglas en inglés, el cual es calculado promediando las diferencias de intensidad al cuadrado de los píxeles de la imagen distorsionada y de referencia, junto con la cantidad relacionada de relación señal-ruido pico (PSNR). Estas suelen ser métricas atractivas porque son simples de calcular, tienen significados físicos claros y son matemáticamente convenientes en el contexto de la optimización. Sin embargo, no están muy bien relacionadas con la calidad visual percibida.

El Índice de Similitud Estructural, SSIM, es un paradigma para la evaluación de calidad en imágenes, basado en la hipótesis de que el sistema visual humano está altamente adaptado para extraer información estructural, propuesto por Wang Z. et. al. en [66]. SSIM compara patrones locales de intensidades de píxeles que han sido normalizados para luminancia y contraste y para explorar la información estructural en una imagen, separa la influencia de la iluminación, definiendo la información estructural en una imagen como aquellos atributos que representan la estructura de los objetos en la escena, independientemente del brillo promedio y del contraste.

Por todas estas razones, la prueba SSIM fue elegida como métrica para evaluar las imágenes reconstruidas para distintas tasas de compresión teniendo como imagen de referencia aquella que es obtenida con el 100 % de las mediciones de los coeficientes de correlación. Tanto MSE como PSNR fueron excluidas como métricas debido a que hay evidencia de que, en algunos casos, no produce resultados coherentes con la percepción visual [66].

La métrica  $SSIM(x, y)$  se calcula mediante:

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)} \quad (34)$$

donde  $x$  representa la imagen de referencia y  $y$  es la imagen a evaluar,  $\mu_x$  y  $\mu_y$  son los valores medios de  $x$  y  $y$ , respectivamente,  $\sigma_{xy}$  es la covarianza de  $x$  y  $y$ ;  $\sigma_x^2$  y  $\sigma_y^2$  es la varianza de  $x$  y  $y$ ; y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes para estabilizar la división.

Esta métrica fue calculada usando la función en Matlab `ssim` esta función toma como argumentos

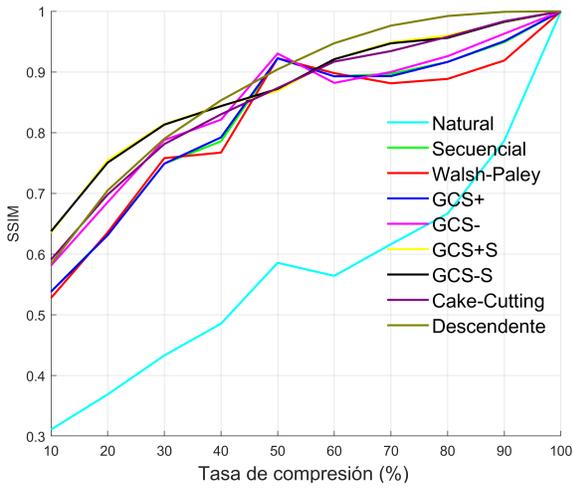
de entrada dos imágenes y devuelve un valor que representa la similitud estructural entre ellas y cuanto más cercano sea su valor a 1, mayor será la similitud entre las imágenes.

En las figuras 57 y 58 se presentan las gráficas de los valores obtenidos por la función `ssim` aplicada a las imágenes reconstruidas utilizando suma de patrones y el algoritmo TVAL3, respectivamente. Estas gráficas abarcan las cuatro imágenes de prueba y se muestran para tasas de compresión del 10 % hasta 100 % en intervalos de 10 %.

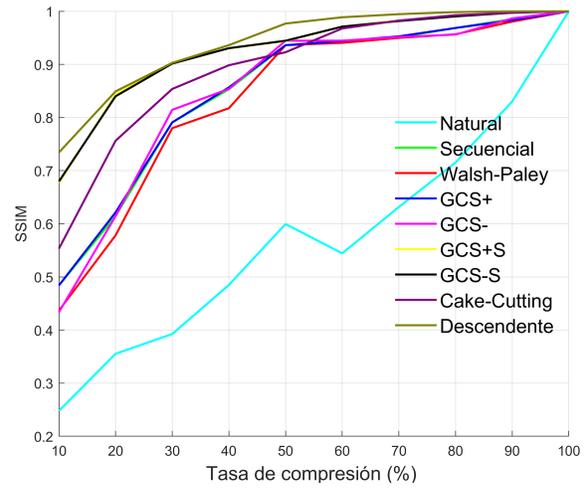
Al analizar los resultados arrojados por esta métrica de evaluación podemos notar, como era de esperarse, que el peor desempeño es obtenido con el orden Natural de la matriz de Hadamard, seguidos por los métodos Secuencial y Walsh-Paley con valores de SSIM entre 0.5 y 0.6 para las reconstrucciones computacionales y 0.6-0.7 para las experimentales para tasas de compresión del 10 %. También se puede apreciar una coincidencia en los valores obtenidos por SSIM para los ordenamientos Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, incluso GCS- a una tasa de compresión del 50 % algo esperado dada la similitud visual anteriormente discutida, resaltando esta coincidencia para cameraman y UTM (figura 57 (a) y (c)).

Las mejores puntuaciones fueron obtenidas por los métodos GCS+S, GCS+S, Cake-cutting y descendente disputando valores cercanos, a veces superiores o inferiores entre sí, esto para las cuatro imágenes de prueba. Sin embargo, a diferencia del análisis perceptual realizado anteriormente, el método descendente no sobresale entre los mencionados, manteniendo valores SSIM entre los mejores pero de forma modesta, es decir, por debajo de puntajes de 0.7 o incluso 0.6 según sea el caso, de hecho, para el caso de UTM, parece que su desempeño fue el segundo peor. Estos resultados curiosos y poco esperados pueden deberse al hecho de que, para esta imagen de prueba en específico, la reconstrucción mediante el método descendente se realizó posterior a las mediciones experimentales, es decir, el método descendente fue aplicado a los coeficientes ya obtenidos con el ordenamiento Natural, a diferencia de la imagen USAF donde las mediciones experimentales corresponden a las obtenidas por este ordenamiento al desplegar los patrones sobre la imagen, lo que puede generar incongruencias dentro de la estructura de la imagen. La razón de haber realizado el procedimiento de esta manera, es que en principio no debería haber diferencias entre realizar la medición los patrones del orden descendente directamente a realizarlo de manera indirecta utilizando mediciones previas, pues precisamente esa es la idea central del método descendente.

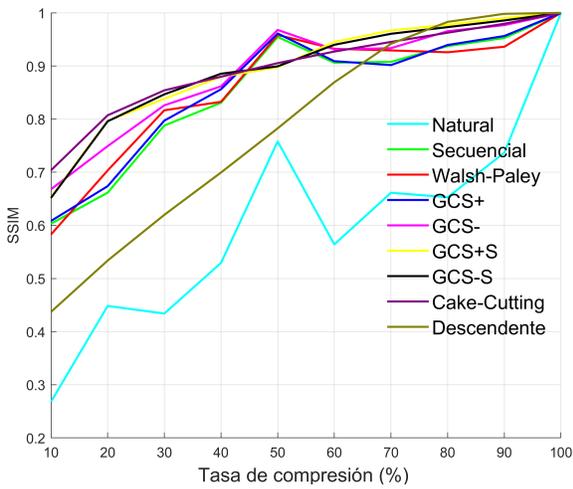
Finalmente, para el caso de la aplicación del algoritmo TVAL3 en la reconstrucción de las imágenes mostradas en las gráficas de la figura 58, se observa que la tendencia general fue mejorar la puntuaciones obtenidas por la prueba SSIM, logrando puntuaciones entre 0.7 y 0.8 a una tasa de compresión del 10 % para los mejores ordenamientos en las simulaciones y valores cercanos o incluso superiores a 0.9 en algunos métodos para las reconstrucciones experimentales.



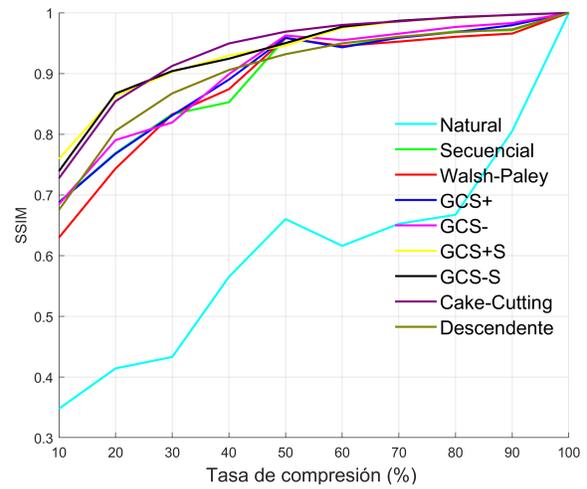
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 57: Comparación de los métodos de ordenamiento Natural, Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, GCS-, GCS+S, GCS-S, Cake-cutting y descendente bajo la prueba de evaluación SSIM en la reconstrucción de las imágenes con suma de patrones. a) Cameraman, b) Pout, c) UTM, d) USAF.

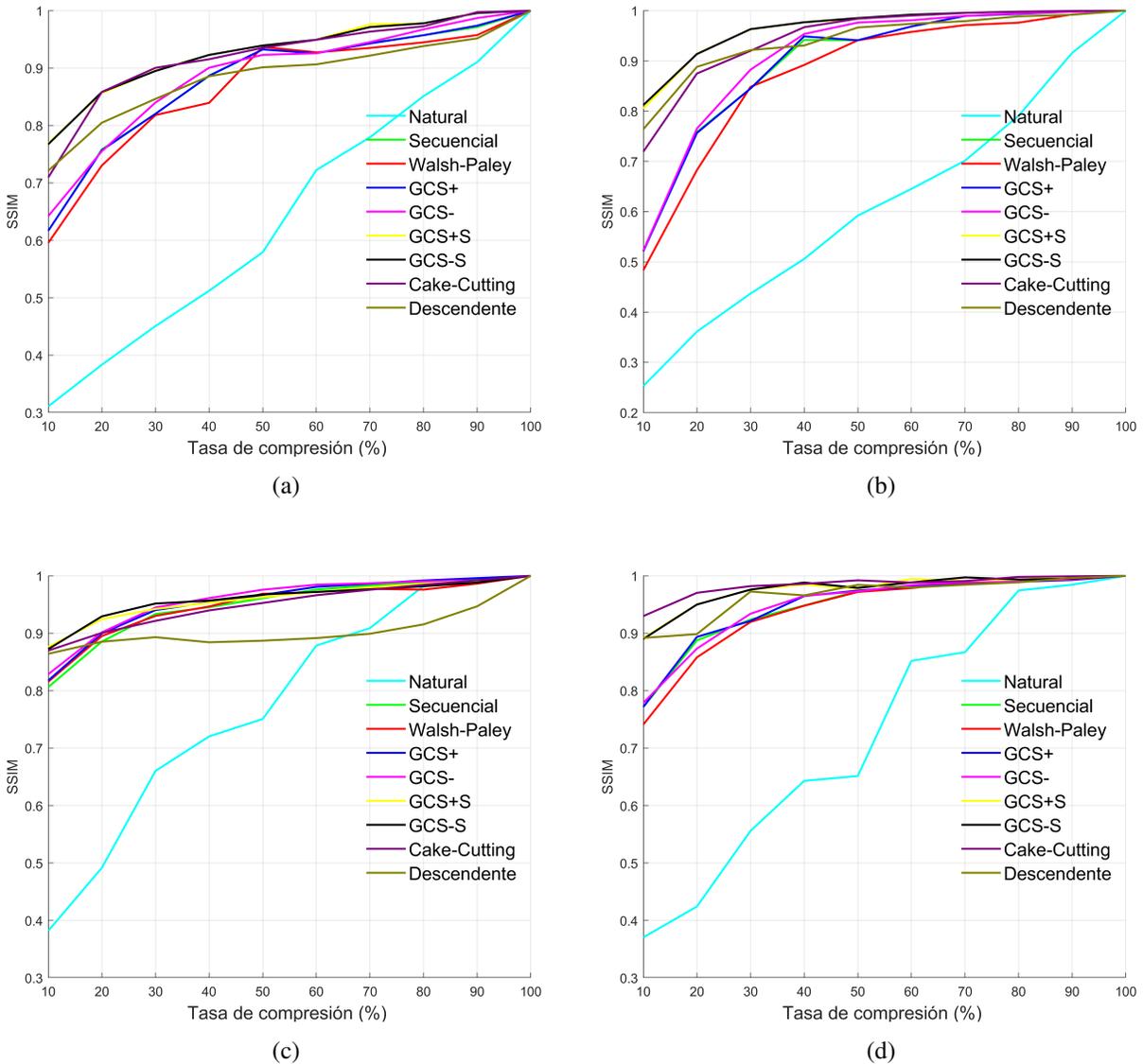


Figura 58: Comparación de los métodos de ordenamiento Natural, Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, GCS-, GCS+S, GCS-S, Cake-cutting y descendente bajo la prueba de evaluación SSIM en la reconstrucción de las imágenes con ayuda del algoritmo TVAL3. a) Cameraman, b) Pout, c) UTM, d) USAF

### 5.3.1 Calidad perceptual contra precisión.

Como se explicó previamente, se obtuvieron resultados contrastantes al evaluar las imágenes recuperadas con el método descendente. Por un lado es innegable que, de un análisis visual, las imágenes recuperadas por este método fueron superiores a cualquier otro incluso para tasas de compresión del 10 % (ver figuras 52 -55). Sin embargo, esto no parece concordar con los puntajes poco destacables obtenidos por medio del análisis preciso del Índice de Similitud Estructural

(SSIM).

Un estudio realizado por Y. Blau et al. [67] sobre la calidad perceptual en imágenes reconstruidas con algoritmos de súper-resolución (aumento desde una baja a una alta resolución) destacó que la precisión de reconstrucción y la calidad perceptual suelen estar en desacuerdo entre sí. Es decir, “los modelos que sobresalen en minimizar el error de reconstrucción tienden a producir resultados visualmente desagradables, mientras que los modelos que producen resultados con una calidad visual superior reciben calificaciones bajas según medidas de distorsión como PSNR, SSIM, IFC, etc.” [67]. Esto se ilustra visualmente en las imágenes mostradas en la figura 59 extraídas de dicho estudio, donde se muestra la inconsistencia entre los puntajes obtenidos para tres algoritmos de súper-resolución bajo pruebas estándar y la calidad visual perceptual que ofrecen.

En este estudio definen la calidad perceptual como la calidad visual de la imagen reconstruida independientemente de su similitud con cualquier imagen de referencia. Es decir, es el grado en que la reconstrucción se asemeja a una imagen natural válida. Este argumento es relevante para explicar las inconsistencias encontradas al evaluar los resultados del método descendente con la métrica SSIM y la calidad visual que presentan.



Figura 59: Inconsistencia entre los valores de PSNR/SSIM y la calidad perceptual en algoritmos de súper-resolución, comparación extraída de [67].

#### 5.4 Algoritmo TVAL3 contra L1-magic.

En esta sección se comparan imágenes de  $64 \times 64$  reconstruidas con los métodos de ordenamiento tratados contrastando el desempeño del algoritmo TVAL3 contra L1-magic.

La figura 60 compara la reconstrucción de la imagen *cameraman* entre estos dos algoritmos para una tasa de compresión del 50 %. Como se mencionó al inicio del capítulo 4, las imágenes recuperadas con el algoritmo L1-magic fueron reservadas para mostrarse en este capítulo, pues presentó inconvenientes en su uso. Uno de estos problemas fue que el algoritmo no podía resolver el problema de reconstrucción con cada una de las matrices utilizadas en este estudio, específicamente las

matrices GCS-S, Cake-cutting y descendente presentaron resultados totalmente reprobables. Un segundo problema se presentó en el tiempo de computo de este algoritmo pues para estas reconstrucciones presento un desempeño demasiado lento al contrastarlo con los tiempos ligeramente cortos que presentó TVAL3, esto es discutido detalladamente más adelante.

Estos problemas hacen inviable tratar con matrices de buen desempeño y más aun, reconstruir imágenes de mayor resolución. Sin embargo, sorprendentemente el algoritmo L1-magic presentó una mayor calidad visual en las imágenes reconstruidas con los métodos Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, GCS- y GCS+S que el TVAL3, aunque el costo a pagar es un tiempo de cómputo 10 veces mayor o más y limitando el tamaño de las imágenes reconstruidas.

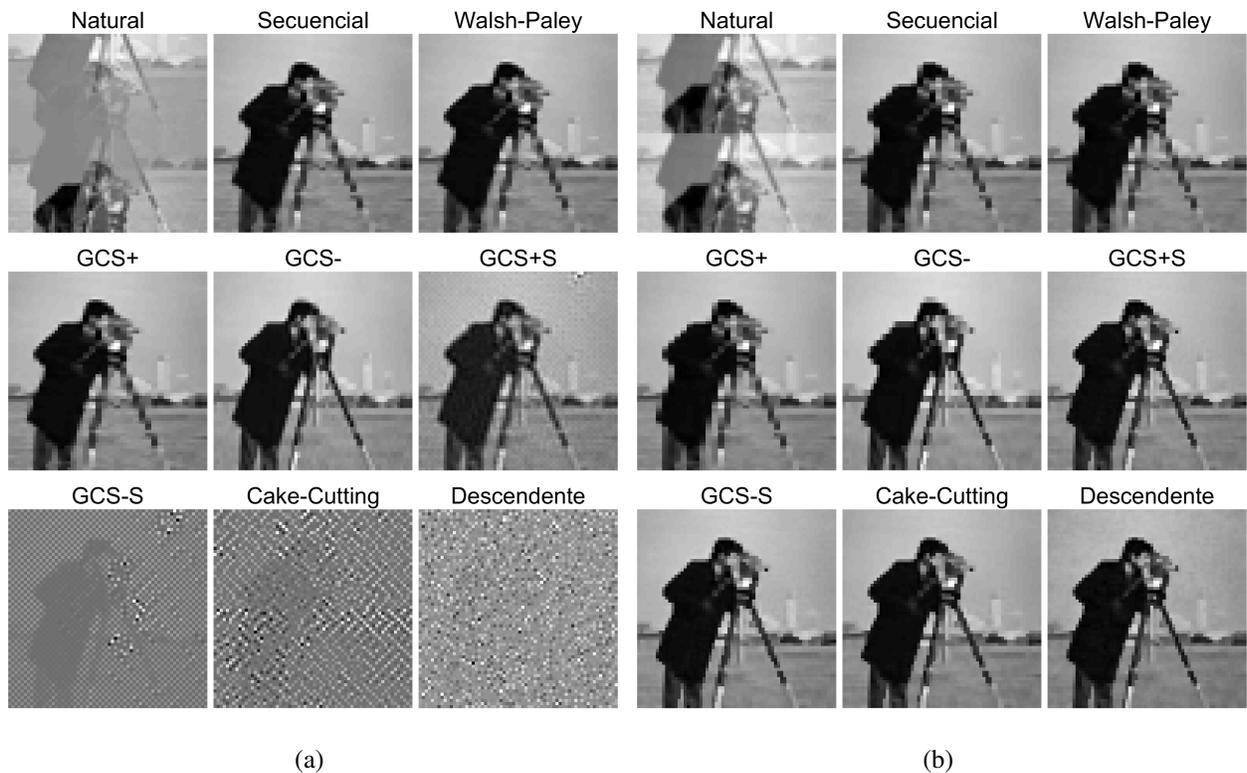


Figura 60: Comparación de algoritmos de sensado comprimido utilizados para reconstruir la imagen *cameraman* de un tamaño de  $64 \times 64$  con una tasa de compresión del 50%. (a) L1-magic, (b) TVAL3.

## 5.5 Tiempos de cómputo.

Como se detalló en las secciones 2.1.2 y 2.3.2, existen distintos métodos para llevar a cabo la reconstrucción de las imágenes, cada uno de con sus características distintivas, así como ventajas y desventajas propias. En esta sección, se evalúan los tiempos de cómputo requerido para realizar estos cálculos de reconstrucción. Los cálculos y mediciones de los tiempos se realizaron en una computadora con un procesador Intel core i5 7200U a 2.5 GHz de 2 núcleos, 4 hilos y 8Gb de memoria RAM, utilizando una versión de Matlab R2019a, en el sistema operativo Windows 10 Home Single Language. La imagen seleccionada para ser reconstruida con las técnicas evaluadas fue nuevamente el “cameraman”, y se realizó un promedio entre 5 mediciones de tiempo.

Aunque el rendimiento puede variar entre imágenes, el propósito de la evaluación de los tiempos de cómputo es observar las diferencias de magnitud entre estas técnicas de recuperación. Se evaluaron las 4 técnicas de reconstrucción anteriormente descritas, siendo:

a) Inversa de la transformada de Hadamard, obtenida mediante la ecuación 17

$$[f] = \frac{1}{N^2} [H][F][H]$$

b) Inversa de la transformada Hadamard desde el enfoque de vector unidimensional, llamado también “flatten” (aplanado) [6], utilizando la ecuación 19.

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N^2} [H]\mathbf{F}$$

c) Sumatoria de Patrones de Hadamard, utilizando la ecuación 4.

$$[f] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} m_i [P_i]$$

d) Por medio de algoritmos de sensado comprimido, TVAL3 o L1-magic, en este caso.

En la figura 61 (a) se presenta una gráfica de barras que muestra los tiempos de cómputo de cada método para reconstruir una imagen de  $128 \times 128$ , la más alta resolución tratada en este estudio y por tanto, el desempeño de mayor tiempo. En la figura 61 (b) se muestran para las reconstrucciones de misma imagen pero con resoluciones entre  $2 \times 2$  y  $128 \times 128$  y para una tasa de compresión del 100 %.

De las evaluaciones realizadas para la reconstrucción de la imagen de  $128 \times 128$  (figura 61 (a)) se puede observar claramente como el método más rápido es la aplicación de la inversa de la transformada Hadamard, con un tiempo menor a una milésima de segundo. Seguido por el método

“flatten” de la inversa de Hadamard con ligeramente más de un segundo, luego, la técnica de sumatoria, que muestra un desempeño mucho más lento con casi 9 segundos. Finalmente el método de reconstrucción más lento llegando a casi 15 segundos es la aplicación de sensado comprimido con el algoritmo TVAL3. Esta tendencia se mantiene para los otros tamaños de imagen como se puede ver en la figura 61 (b).

En la figura 62 se muestra una comparación en los tiempos de cómputo para la reconstrucción del “cameraman” de  $64 \times 64$  píxeles utilizando los algoritmos TVAL3 y L1-magic a una tasa de compresión del 50 % y para todas las matrices de los ordenamientos. Se puede notar la enorme cantidad de tiempo que le toma a L1-magic resolver la reconstrucción de imágenes, tardando un tiempo máximo de alrededor de 230 segundos mientras que para TVAL3 el desempeño más lento fue de apenas 7 segundos. Esto permite ver el significativo avance que se ha tenido en los algoritmos de sensado comprimido.

A pesar de las contrastantes diferencias en tiempos de cómputo de cada técnica de reconstrucción, cada una presenta una serie de ventajas que puede compensar su desempeño. Por ejemplo, en el caso de la inversa de Hadamard, aunque tuvo por mucho el menor tiempo de reconstrucción esta técnica solo puede utilizar los demás ordenamientos si la inversa de su matriz existe, caso similar con la técnica del segundo mejor tiempo, además, en ambas técnicas se pueden presentar problemas al momento de trabajar con tasas de compresión muy específicas que no segmenten las matrices apropiadamente. Esto no ocurre con la técnica de sumatoria, pues a pesar de su relativamente elevado tiempo de reconstrucción se puede elegir cualquier número específico de patrones en la reconstrucción y no solo determinados porcentajes. En el caso del algoritmo TVAL3, aunque presentó el mayor tiempo de reconstrucción, se destaca como la mejor opción para obtener una muy buena calidad visual en la imagen reconstruida incluso con las tasas de compresión más bajas.

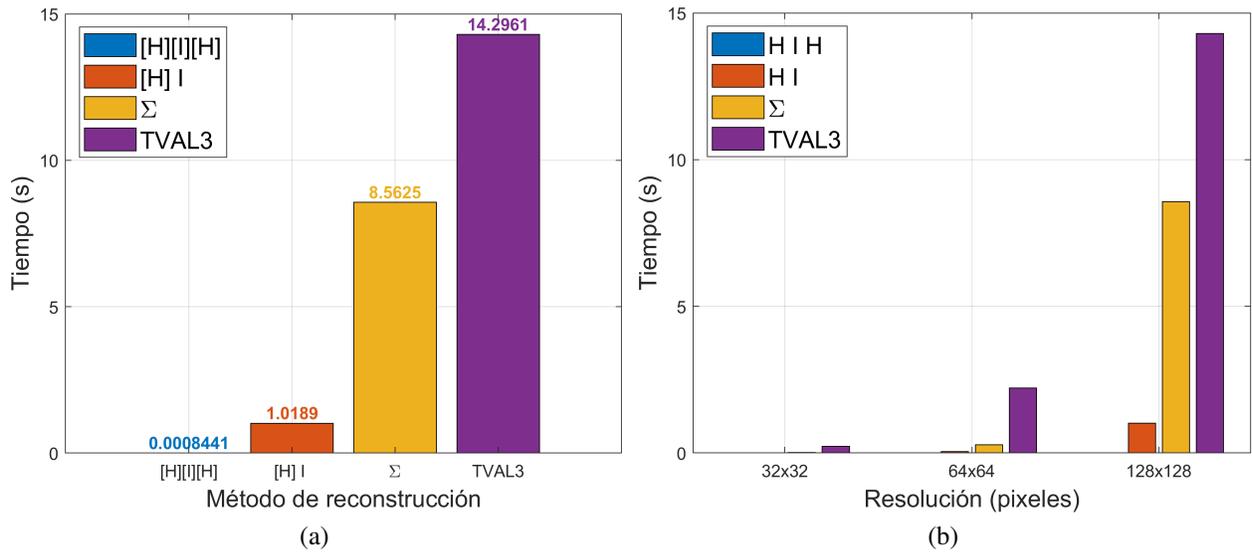


Figura 61: Comparación de los tiempos de cómputo de las técnicas de reconstrucción de imágenes en Single-Pixel Imaging. (a) Para una misma resolución  $128 \times 128$ . (b) Para distintas resoluciones,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$  y  $128 \times 128$ .

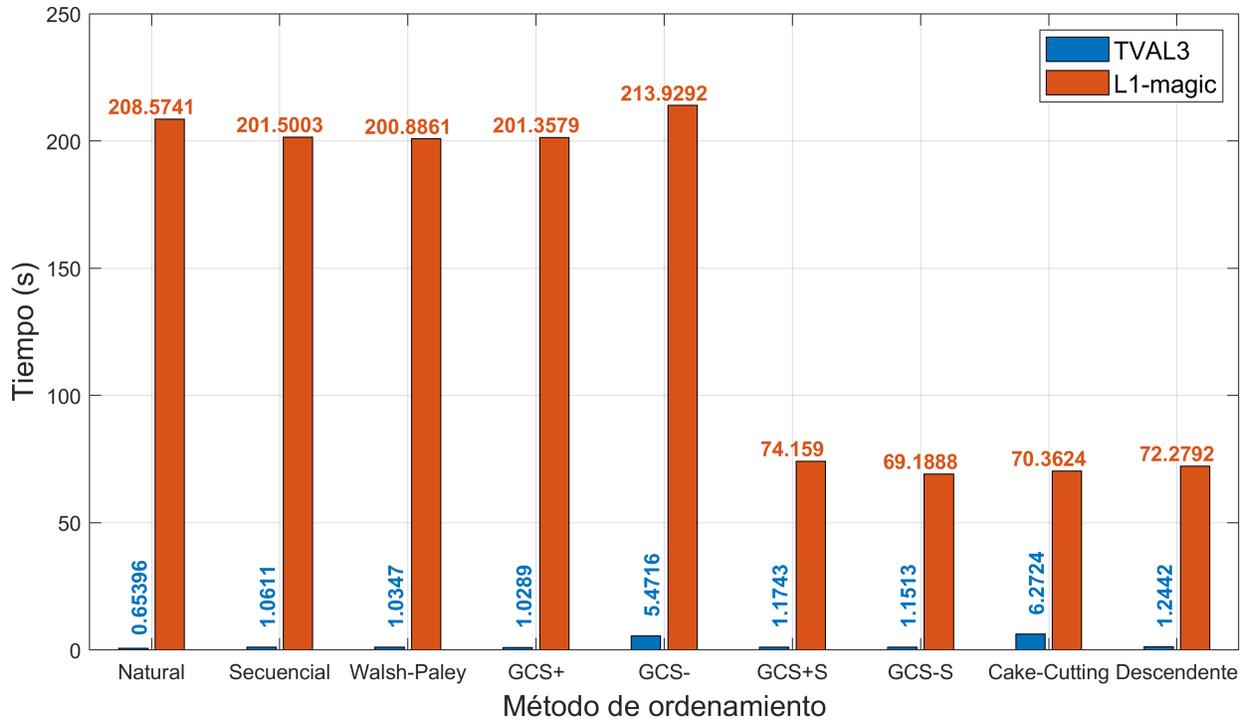


Figura 62: Comparación de los tiempos de cómputo en la reconstrucción de la imagen *cameraman* utilizando los algoritmos de sensing comprimido, TVAL3 y L1-magic, para la reconstrucción del "cameraman" de  $64 \times 64$  píxeles.

## Capítulo 6. Conclusiones.

En este trabajo de tesis se presentó un marco de comparación entre diversos métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard. La matriz de Hadamard es ampliamente utilizada como base de muestreo en el área de formación de imágenes de un solo píxel gracias a sus propiedades como la ortogonalidad y valores binarios de sus vectores base lo que permite un buen desempeño en la técnica. Este método de formación de imágenes presenta ventajas significativas al mostrarse como una plataforma de prueba para distintas tecnologías como la utilización de detectores que estén fuera del espectro visible o en ciencias de la computación.

Sin embargo, en contextos donde el tiempo es un factor crucial, como en la construcción de vídeos en tiempo real, es imprescindible reducir la cantidad de vectores base, o patrones de Hadamard, seleccionando aquellos que son más relevantes en la reconstrucción de la imagen. Esta reducción permite una compresión de la señal de medición y una significativa reducción en el tiempo de adquisición, sin comprometer la calidad de la imagen reconstruida.

El análisis se llevó a cabo desde un enfoque tanto experimental como mediante simulaciones computacionales, en los cuales se reconstruyeron imágenes utilizando distintos métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard. Estos métodos han demostrado un buen desempeño en estudios previos y han permitido una reducción significativa de los vectores base utilizados, al mismo tiempo que han logrado una compresión de la señal de medición.

Durante todo el procedimiento se utilizó el software de MATLAB el cual se presentó como una plataforma ideal gracias a su versatilidad, variedad de herramientas y funciones específicas sumamente útiles para llevar a cabo la técnica. La experimentación se realizó en un laboratorio de óptica utilizando componentes simples pero que requirieron un entorno desarrollado en LabView bien optimizado para la utilización de todo el sistema en conjunto, eligiendo como objetos de prueba transparencias de imágenes específicas y utilizando una fuente de luz láser y LED, este último para mejorar la calidad de los resultados.

Los métodos de ordenamiento analizados en este trabajo han sido propuestos por diversos autores y presentan diferentes enfoques y criterios para seleccionar los vectores de la base Hadamard, algunos con mejor desempeño que otros [41, 42, 52, 56, 57], tal como se describió en su sección respectiva. Sin embargo, en este trabajo de tesis se propuso utilizar un ordenamiento particular con el objetivo de explorar la relación entre la calidad visual de la imagen reconstruida y la magnitud de los coeficientes de correlación de cada patrón.

Este ordenamiento de la base de Hadamard fue de interés en este trabajo, refiriéndose a él como ordenamiento descendente. Con este método se propuso ordenar los patrones según la magnitud de sus coeficientes de correlación con ayuda de una medición previamente realizada de algún otro ordenamiento, por ejemplo el Natural, de esta forma, cada patrón anteriormente utilizado se etiquetó con su coeficiente respectivo lo que permitió ordenarlos con base en esta magnitud en una región altamente concentrada de la señal, lo cual permitió reducir enormemente el tamaño de la medición.

Todas las imágenes analizadas fueron reconstruidas utilizando la técnica de suma de patrones de los ordenamientos. Esta técnica permitió seleccionar las tasas de compresión deseadas. Además, se emplearon algoritmos de sensado comprimido para mejorar la calidad de las reconstrucciones. Estas imágenes fueron evaluadas desde una perspectiva perceptual y también por medio de una prueba bastante utilizada en el área, la métrica del Índice de Similitud Estructural, SSIM. A partir de estas evaluaciones se puede concluir que, aunque el método descendente es relativamente sencillo presentó los mejores resultados en términos de calidad perceptual, logrando que las imágenes reconstruidas obtuvieran gran fidelidad visual incluso bajo una alta compresión de la señal, resultados que replican lo encontrado en [57]. Sin embargo, esto no se vio reflejado en las puntuaciones obtenidas por la métrica SSIM.

El análisis comparativo entre el resto de ordenamientos determinó que los que presentaron el mejor desempeño tanto en calidad perceptual como en técnicas precisas de evaluación fueron los basados en un escaneo en zigzag (GCS+S y GCS-S) y Cake-cutting cuyas imágenes reconstruidas presentaron una gran calidad y fidelidad visual con las imágenes objetivo. Estos resultados confirman estudios previos dentro del área. [41] [42].

Se presentaron las gráficas de los coeficientes de correlación obtenidos de las mediciones experimentales y una visualización de los espectros de Hadamard de cada método de ordenamiento, ambos permitieron visualizar el desempeño de cada ordenamiento justificando la gran calidad obtenida en los resultados.

Además de las evaluaciones de calidad realizadas a dichas imágenes, se midieron los tiempos de cómputo de las técnicas de reconstrucción de imágenes utilizadas en Single-Pixel Imaging, como son: la inversa de la transformada Hadamard, la suma de patrones y los algoritmos de sensado comprimido. Estas mediciones determinaron que el método más lento es el uso de algoritmos de sensado comprimido pero compensándolo con la gran calidad de las imágenes reconstruidas, mientras que el más rápido es el uso de la inversa Hadamard. Sin embargo, este último se ve limitado por la existencia de las inversas de las matrices de los métodos de ordenamiento.

Como un comentario adicional, cabe mencionar la importancia de los métodos de almacenamien-

to de las imágenes reconstruidas. Dentro del entorno de Matlab se pueden utilizar las funciones `imwrite` y `print`. La función `imwrite` permite guardar la matriz recuperada como una imagen logrando un suavizado en la textura de los píxeles. Por otro lado, `print` funciona de manera similar a una captura de pantalla, lo que permite preservar la fidelidad de los píxeles, especialmente útil para observar detalles sutiles. Además, al combinar estas funciones con `imresize`, es posible aumentar la resolución de las imágenes obtenidas, lo que elimina esta restricción y permite una mayor calidad visual de los resultados.

En conclusión, este estudio ofrece una vía óptima para la selección de métodos de ordenamiento de la matriz de Hadamard para la reconstrucción de imágenes cuando solo se requiera adquirir una porción de la señal de medición sin comprometer la eficiencia en términos de tiempo de cómputo ni sacrificar la calidad visual. Se determinó que los métodos GCS+S, GCS-S y Cake-cutting ofrecen los mejores desempeños tanto perceptiblemente como de precisión. El método descendente mostró los mejores resultados visuales solo desde la evaluación perceptual en estas imágenes, la evaluación realizada con la prueba SSIM permitió determinar que la estructura en general de las imágenes obtenidas por el método descendente no es la mejor, razón de la inconsistencia entre los dos métodos de evaluación, en contraposición con los ordenamientos anteriormente mencionados, concluyendo que, en efecto, el método cuyo desempeño logre concentrar los coeficientes de correlación lo más posible conseguirá los mejores resultados visuales.

Este estudio contribuye al aportar un análisis de las técnicas de recuperación de imágenes en el área de Single-Pixel Imaging, área que sigue vigente y que tiene diversas aplicaciones. Por lo que algunos posibles trabajos a futuro podrían ser, evaluación de otros métodos de ordenamiento más recientes, la reconstrucción de vídeos en tiempo real dentro y fuera del espectro visible y la implementación de machine learning en la recuperación de las imágenes.



# Apéndice A

## Especificaciones técnicas.

### A.1 DMD.

Modelo	VIALUX v-9501
Chipset	DLP9500 & DLPC410
Formato DLP	0.95" 1080p
Opciones de Ventanas	VIS, UV
Microspejos	1920 × 1080
Pitch (Paso)	10.8 $\mu$ m
Área DLP	20.7 × 11.7 mm <sup>2</sup>
Tarjeta Controladora	V4395
Dimensiones de la Tarjeta Controladora	162 × 99 mm <sup>2</sup>
Dimensiones de la Tarjeta DMD	102 × 83 mm <sup>2</sup>
Cable Flexible	105/283/573 mm
Memoria RAM Integrada	64 Gbit
Patrones en RAM	31068
Disparador	maestro/esclavo
Tasa de Conmutación	
1 bit B/N	17857 Hz
6 bits Gris	987 Hz
8 bits Gris	266 Hz
12 bits Gris	17 Hz
Interfaz con PC	USB 3.0
Velocidad de Transferencia a PC	1000 – 2500 * fps

Cuadro 1: Datos técnicos sobre el Dispositivo de Microespejos Digitales utilizado.

## A.2 Tarjeta de adquisición de la señal.

<b>Dispositivo USB de Adquisición de Datos modelo NI USB-6003.</b>
<b>Entrada analógica</b>
Canales: 4 diferenciales, 8 de un solo extremo Resolución ADC: 16 bits Tasa de Muestreo: 100 kS/s Rango de Entrada: $\pm 10$ V Protección Contra Sobretensiones: $\pm 30$ V (encendido), $\pm 20$ V (apagado) Precisión Absoluta: 6 mV (típico), 26 mV (máximo) Ruido del Sistema: 0.4 mVrms Impedancia de Entrada: 1 G $\Omega$ CMRR: 56 dB (DC a 5 kHz)
<b>Salida analógica</b>
Salidas analógicas: 2 Resolución DAC: 16 bits Rango de Salida: $\pm 10$ V Tasa Máxima de Actualización: 5 kS/s por canal Corriente de Salida: $\pm 5$ mA Corriente de cortocircuito: $\pm 11$ mA Slew Rate: 3 V/ $\mu$ s
<b>Entrada/Salida Digital</b>
13 líneas digitales distribuidas en tres puertos (8, 4, 1 líneas respectivamente) Voltaje de entrada (encendido): 0-5 V Voltaje de entrada (apagado): 0-3.3 V Corriente de salida máxima por línea: $\pm 4$ mA Contador: 1, resolución de 32 bits, frecuencia máxima de entrada de 5 MHz
<b>Fuente de alimentación</b>
Salida de +5 V, $\pm 3$ % Corriente máxima: 150 mA Protección contra sobrecorriente y cortocircuitos
<b>Interfaz USB</b>
USB Full Speed (12 Mb/s)

Cuadro 2: Datos técnicos sobre la tarjeta de adquisición de datos utilizada.

### A.3 Fotodetector.

Detector Si Biased modelo DET36A	
Área activa	$3.6 \times 3.6 \text{ mm} (13) \text{ mm}^2$
Rango de longitudes de onda	$350 - 1100 \text{ nm}$
Longitud de onda pico ( $\lambda_p$ )	$970 \text{ nm}$
Longitud de onda pico ( $\lambda_p$ )	970
Resistencia de derivación	1 G $\Omega$
Energía de la banda prohibida a 298 K	1.1114 eV
Tiempo de respuesta de subida	14 ns
Ancho de banda de ruido	0.025 kHz
Voltaje de polarización	10 V
Corriente de saturación a 298 K	0.35 nA
Voltaje de salida	0 a 10 V
NEP en $\lambda_p$	$1.6 \times 10^{-14} \frac{W}{\sqrt{Hz}}$

Cuadro 3: Datos técnicos sobre el fotodetector utilizado. Según su hoja de especificaciones, todas las mediciones se realizaron a una temperatura ambiente de 25 °C, a menos que se indique lo contrario.

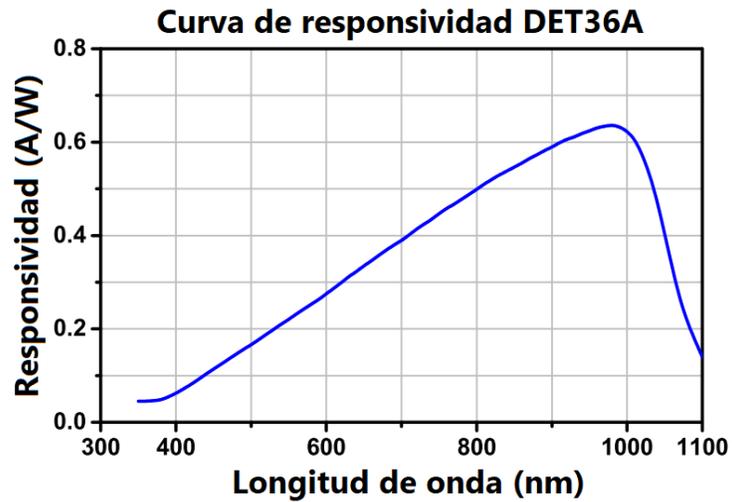


Figura 63: Curva de respuesta del detector DET36A.

# Apéndice B

## Códigos de programación.

### B.1 Código para generar y guardar los patrones de Hadamard.

La estructura del código es similar para el caso de los demás ordenamientos al utilizar la matriz correspondiente.

```
1 clear;
2 clc;
3 %Tamaño de la matriz
4 m=128; n=m*m;
5 Ordenamientos={'Natural';'Secuencial';'Walsh-Paley';'GCS+';'GCS-';'GCS+S';'GCS-S';'Cake-Cutting';
   'Descendente'};
6
7 % Utilizando función "reshape"
8 H=hadamard(n);
9 Patrones_Natural=zeros(m,m,n);
10 for i=1:n
11     Patrones_Natural(:, :, i)=reshape(H(i, :), m, m)';
12 end
13
14 % Utilizando producto diadico
15 H=hadamard(m);
16 Patrones=zeros(m,m,n);
17 k=1;
18 for j=1:m
19     for i=1:m
20         Patrones(:, :, k)=H(:, j)*H(i, :);
21         k=k+1;
22     end
23 end
24
25 save([Ordenamientos{1}, '_', num2str(n), '_pats'], 'Patrones', '-v7.3')
```

### B.2 Código para generar y guardar las matrices de los ordenamientos.

```
1 clear;
2 clc;
3 % Tamaño de la matriz
4 m = 128;
5 n = m * m;
6 % Ordenamientos
7 Ordenamientos = {'Natural', 'Secuencial', 'Walsh-Paley', 'GCS+', 'GCS-', 'GCS+S', 'GCS-S', 'Cake-
   Cutting', 'Descendente'};
8
9 % Generación y almacenamiento de la matriz 'Natural'
```

```

10 H = hadamard(n); %Función integrada en Matlab para generar matrices de Hadamard
11 save(['Natural_', num2str(n), '_matriz'], 'H', '-v7.3')
12
13 % Generación y almacenamiento de la matriz 'Secuencial'
14 S = hadamard2graycode(n); %Función hadamard2graycode para generar los patrones base de Walsh-
    Hadamard
15 Secuencial = zeros(m, m, n);
16 for i = 1:n
17     Secuencial(:, :, i) = reshape(S(i, :), m, m)';
18 end
19 save(['Secuencial_', num2str(n), '_matriz'], 'S', '-v7.3')
20
21 % Generación y almacenamiento de la matriz 'Walsh-Paley'
22 WalshPaley = Walsh_Paley_Transform(log2(n)); %Función para obtener el ordenamiento de la
    transformada Walsh-Paley
23 save(['Walsh-Paley_', num2str(n), '_matriz'], 'WalshPaley', '-v7.3')
24
25 % Generación y almacenamiento de la matriz 'GCS+'
26 v = 1:n;
27 indices = zeros(1, n);
28 for j = 0:m-1
29     if mod(j, 2) == 0
30         indices(j*m+1:(j+1)*m) = v(j*m+1:(j+1)*m);
31     elseif mod(j, 2) == 1
32         indices(j*m+1:(j+1)*m) = flipud(v(j*m+1:(j+1)*m))';
33     end
34 end
35 GCS1 = zeros(m, m, n);
36 for i = 1:n
37     GCS1(:, :, i) = Secuencial(:, :, indices(i));
38 end
39 save(['GCS+', num2str(n), '_matriz'], 'GCS1', '-v7.3')
40
41 % Generación y almacenamiento de la matriz 'GCS-'
42 GCS2 = zeros(n, n);
43 for i = 1:n
44     GCS2(i, :) = reshape(GCS1(:, :, i), 1, n);
45 end
46 save(['GCS-', num2str(n), '_matriz'], 'GCS2', '-v7.3')
47
48 % Generación y almacenamiento de la matriz 'ZigZag (GCS+S)'
49 mat_ind = zeros(m, m);
50 k = 1;
51 for i = 1:m
52     for j = 1:m
53         mat_ind(i, j) = k;
54         k = k + 1;
55     end
56 end
57 indices = ZigZagscan(mat_ind); %Función que escanea una matriz de entrada en una dirección de
    zigzag
58 ZigZag1 = zeros(m, m, n);

```

```

59 for i = 1:n
60     ZigZag1(:, :, i) = GCS1(:, :, indices(i));
61 end
62 Z = zeros(n, n);
63 for i = 1:n
64     Z(i, :) = reshape(ZigZag1(:, :, i)', 1, n);
65 end
66 save(['GCS+S_', num2str(n), '_matriz'], 'Z', '-v7.3')
67
68 % Generación y almacenamiento de la matriz 'ZigZag (GCS-S)'
69 ZigZag2 = zeros(m, m, n);
70 for i = 1:n
71     ZigZag2(:, :, i) = GCS2(indices(i), :, :);
72 end
73 Z2 = zeros(n, n);
74 for i = 1:n
75     Z2(i, :) = reshape(ZigZag2(:, :, i)', 1, n);
76 end
77 save(['GCS-S_', num2str(n), '_matriz'], 'Z2', '-v7.3')
78
79 % Generación y almacenamiento de la matriz 'Cake-cutting'
80 H=hadamard(n);
81 %Llamamos a la función Cake Cutting
82 dim=log2(n)/2;
83 type='blocks'; %'blocks' desde el menor número de bloques hasta el mayor número de bloques.
84             %o 'lblocks' desde el bloque más grande hasta el bloque más pequeño.
85 [H_new, I, blocks] = Cake_Cutting(H, dim, type);
86 CakeCutting=H_new;
87 save(['Cake-Cutting_', num2str(n), '_matriz'], 'CakeCutting', '-v7.3')
88
89 % Generación y almacenamiento de la matriz 'Descendente'
90 load(['Descendente_', num2str(n), '_indices']); % Cargamos el vector de índices del orden
    Descendente
91 load(['Natural_', num2str(n), '_pats']); %Cargamos los patrones del orden natural
92 Patrones=zeros(m,m,n);
93 for i=1:n
94     Patrones(:, :, i)=Natural(:, :, indices_emp(i));
95 end
96 save([Ordenamientos{9}, '_', num2str(n), '_pats'], 'Patrones', '-v7.3')
97 Descendente = zeros(n,n);
98 for i = 1:n
99     Descendente(i, :) = reshape(Patrones(:, :, i)', n, 1);
100 end
101 save([Ordenamientos{9}, '_', num2str(n), '_matriz'], 'Descendente', '-v7.3')

```

### B.3 Función “hadamard2graycode” para generar la matriz secuencial de Hadamard.

```

1
2 function rHd = hadamard2graycode(N)
3 % creates a Hadamard matrix ordered in a gray code permutation format
4 % N is a number in power of 2^N

```

```

5 % (r)2018, Roger Chiu, University of Guadalajara-CuLagos
6 %% National Biophotonic Network, University of Guadalajara-INAOE
7 % 2018/09/25
8 %% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9 % example usage
10 % rHd = hadamard2graycode(4)
11 % result  rHd =
12 %      1      1      1      1
13 %      1      1     -1     -1
14 %      1     -1     -1      1
15 %      1     -1      1     -1
16
17 HD = hadamard(N); %creates a Hadamard matrix
18 rHd = zeros(N);
19 for i = 1:N
20     p = 0; %permutation factor
21     p = sum(abs(diff(HD(:,i)')))/2;
22     rHd(:,p+1) =HD(:,i)';
23 end
24 end

```

#### B.4 Función “Walsh\_Paley\_Transform” para generar la matriz Walsh-Paley de Hadamard.

```

1 function w = Walsh_Paley_Transform(n)
2     % Walsh-Paley transform
3     Pk = [1];
4     B1 = [1 1];
5     B2 = [1 -1];
6
7     for k=1:n
8         pk1 = kron(Pk,B1);
9         pk2 = kron(Pk,B2);
10        Pk = [pk1; pk2];
11    end
12
13    w = Pk;
14 end

```

#### B.5 Función “ZigZagScan” para realizar un escaneo en zigzag de una matriz.

```

1
2 function Vect=ZigZagscan(X)
3 % ZigZagscan Transform an matrix to a vector using Zig Zag Scan.
4 % VECT = ZIGZAGSCAN(MATRIX) reorganize the input Matrix and output it as a vector.
5 % Example:
6 %      X=[1 2 3
7 %          4 5 6
8 %          7 8 9]
9 %

```

```

10 %      X =
11 %      1  2  3
12 %      4  5  6
13 %      7  8  9
14 %
15 %      ZigZagscan(X)=
16 %      1  2  4  7  5  3  6  8  9
17 %
18 %*****
19 % Autors : Said BOUREZG
20 % Engineer on Electronics  option: Communication
21 %*****
22 [~, N]=size(X);
23 Vect=zeros(1,N*N);
24 Vect(1)=X(1,1);
25 v=1;
26 for k=1:2*N-1
27     if k<=N
28         if mod(k,2)==0
29             j=k;
30             for i=1:k
31                 Vect(v)=X(i, j);
32                 v=v+1; j=j-1;
33             end
34         else
35             i=k;
36             for j=1:k
37                 Vect(v)=X(i, j);
38                 v=v+1; i=i-1;
39             end
40         end
41     else
42         if mod(k,2)==0
43             p=mod(k, N); j=N;
44             for i=p+1:N
45                 Vect(v)=X(i, j);
46                 v=v+1; j=j-1;
47             end
48         else
49             p=mod(k, N); i=N;
50             for j=p+1:N
51                 Vect(v)=X(i, j);
52                 v=v+1; i=i-1;
53             end
54         end
55     end
56 end

```

## B.6 Función “Cake\_Cutting” para generar la matriz del orden Cake cutting.

```

2 % Compute the cake cutting ordering of a Hadamard matrix
3 % The parameter type can be either 'blocks' or 'lblocks'. In the first
4 % case, it obtains an ordering based on the number of blocks, and in the
5 % second case, it obtains an ordering based on the largest block size
6 function [H_new, I, blocks] = Cake_Cutting(H, dim, type)
7
8     len = 2^(2*dim);
9     blocks = zeros(1,len);
10
11     for ii=1:len
12         p = reshape(H(ii,:), [2^dim 2^dim]);
13         [b0, b1, lbs]=count_regions(p, 2^dim);
14         if strcmp(type,'blocks')
15             blocks(ii) = b0+b1;
16         elseif strcmp(type,'lblocks')
17             blocks(ii) = lbs;
18         end
19     end
20
21     % sort from larger to lower number of blocks
22     if strcmp(type,'blocks')
23         [~, I] = sort(blocks,'ascend');
24     elseif strcmp(type,'lblocks')
25         [~, I] = sort(blocks,'descend');
26     end
27
28     H_new = zeros(size(H));
29     for i=1:size(H,1)
30         H_new(i,:) = H(I(i), :);
31     end

```

## B.7 Código para obtener el vector de índices del orden Descendente de la matriz de Hadamard.

```

1
2 clear; clc;
3 % Definir el tamaño de la imagen
4 m=128;
5 n=m*m;
6 %/////Generar los coeficientes del orden natural.////////
7 % Leer la imagen original
8 Imagen=imread('cameraman.tif');
9 H=hadamard(m);
10 % Redimensionar la imagen a un tamaño n x n
11 Imagen_resized=imresize(Imagen,[m m]);
12 % Convertir la imagen redimensionada a una matriz de doble precisión
13 Imagen_double=double(Imagen_resized);
14 % Inicializar el vector de coeficientes
15 Coefs=zeros(m*m,1);
16

```

```

17 s=1;
18 for j=1:m
19     for i=1:m
20         h=H(:,j)*H(i,:); % Generación de patrones (producto diádico)
21         Coefs(s)=sum(sum(h.*Imagen_double));
22         s=s+1;
23     end
24 end
25
26 %%
27 %//////////////////// Orden Descendete //////////////////////
28 f_abs=abs(Coefs);
29 ord=zeros(n,1);
30 indices_emp=zeros(n,1);
31 cont=1;
32 [mx,ind]=max(f_abs(:));
33 while mx~=0
34     f_abs(ind)=0;
35     ord(cont)=Coefs(ind);
36     indices_emp(cont)=ind;
37     cont=cont+1;
38     [mx,ind]=max(f_abs(:));
39 end
40 for i=cont:n
41     indices_emp(i)=i;
42 end
43 save(['Descendente_',num2str(n),'_indices'],'indices_emp'); % Guardamos el vector de indices del
orden descendente

```

# Índice de figuras

1	Configuraciones de la cámara de un solo pixel. a) Configuración de detección estructurada. b) Configuración de iluminación estructurada [43]. . . . .	7
2	a) Fotografía de un microespejo colocado en la posición de “encendido”,o “apagado” [44]. b) Ángulos de inclinación de un par de microespejos en la unidad DMD [45]. c) Fotografía del arreglo de microespejos en el DMD [44]. d) Fotografía de la pantalla de un DMD [46]. . . . .	8
3	Matrices de Hadamard de orden 2 (a) y 4 (b). Los cuadrados negros corresponden al valor de $-1$ , y los cuadrados blancos corresponden al valor de $+1$ . . . . .	12
4	a) Patrones de Hadamard obtenidos con $H_2$ . b) Patrones de Hadamard obtenidos con $H_4$ . . . . .	14
5	Orden natural de una matriz Hadamard de orden 16. . . . .	16
6	Secuencia para ordenar la matriz de Hadamard $H_8$ [53]. . . . .	18
7	Comparación entre $H_{16}$ y $S_{16}$ . (a) orden natural la matriz de Hadamard; (b) orden secuencial de la matriz de Hadamard. . . . .	19
8	Matrices Walsh-Paley de órdenes a) 4, b) 8, c) 16. . . . .	20
9	a) Patrones del ordenamiento GCS+ obtenidos a través de la matriz Secuencial, b) Matriz CGS+ generada a partir de los patrones, c) Patrones del ordenamiento GCS-, d) Matriz GCS- generada a partir de los patrones respectivos. . . . .	21
10	Ejemplo de una indexación y un recorrido a) transversal zigzag b) cuadrado [56]. . . . .	22
11	Método GCS+S a) recorrido en zigzag de patrones del orden Frecuencial, b) patrones ordenados en zigzag, c) matriz del orden GCS+S . . . . .	22
12	Método GCS - S a) recorrido en zigzag de patrones del orden Frecuencial, b) patrones ordenados en zigzag c) matriz del orden GCS-S . . . . .	23
13	a) Patrones base de $H_{16}$ en el orden natural, b) patrones base de $H_{16}$ en el orden optimizado “Cake-cutting” [57]. . . . .	24
14	Gráficas de intensidad la señal medida ordenada en forma a) descendente, usando ordenamiento b) Walsh-Paley y c) Cake-cutting [40]. . . . .	25
15	Ejemplo de una señal de voz [58] . . . . .	26
16	Partes básicas de un convertidor analógico-digital (A/D) [58] . . . . .	26
17	Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido de la conversión a una secuencia en tiempo discreto. (a) Sistema completo. (b) $x_s(t)$ para dos frecuencias de muestreo. (c) La secuencia de salida para las dos frecuencias de muestreo [59]. . . . .	28

18	(a) Proceso de medición en sentido comprimido con una matriz de medición aleatoria $\Phi$ . El vector de mediciones $\mathbf{s}$ es esparcido con $K = 4$ . (b) Proceso de medición con $\Theta = \Phi\Psi$ . Hay 4 columnas que corresponden a los coeficientes $s_i$ no cero; el vector de medición $\mathbf{y}$ es una combinación lineal de esas columnas [33] . . . . .	30
19	Esferas unitarias en $\mathbb{R}^2$ para las normas $\ell_p$ con $p = 1, 2, \infty$ , y para la cuasinorma $\ell_p$ con $p = \frac{1}{2}$ [61].	31
20	Mejor aproximación de un punto en $\mathbb{R}^2$ por un subespacio unidimensional usando la norma $\ell_p$ para $p = 1, 2, \infty$ , y de la cuasinorma con $p = \frac{1}{2}$ [61]. . . . .	32
21	Patrones positivos de Hadamard de tamaño $4 \times 4$ en una disposición de $1920 \times 1080$ píxeles en formato .png. . . . .	39
22	Interfaz de control del sistema de la cámara de un solo pixel. . . . .	41
23	Imagen del DMD utilizado modelo VIALUX V-9501. a) Vista frontal b) Vista en perspectiva. . . .	42
24	Sensor de luz utilizado como único pixel, Thorlabs DET36A. . . . .	42
25	Dispositivo para adquisición de la señal NI USB-6003. . . . .	43
26	Objeto de prueba, transparencia del logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca . . . . .	43
27	Esquema del arreglo óptico de la cámara de un solo píxel utilizado en el desarrollo experimental. .	44
28	Montaje del arreglo experimental en el laboratorio. a) Vista en perspectiva, b) Vista superior, c) Acercamiento al DMD . . . . .	45
29	Diagrama de flujo para obtener los coeficientes de correlación. . . . .	47
30	Gráfica de las primeras 1000 muestras de la señal. Se aprecia que las primeras intensidades tienen valores cercanos a cero. . . . .	49
31	Gráfica de las primeras 1000 muestras de la señal. La señal ha sido desplazada a las muestras correspondientes a la intensidades de luz del primer patrón. . . . .	50
32	Coefficientes asociados a cada patrón obtenidos al promediar la ventana de valores, se ubican sobre las crestas de la señal. . . . .	50
33	Acercamiento a una cresta de la señal, se puede apreciar que el coeficiente obtenido cae dentro de los valores de la ventana o intervalo elegido. . . . .	51
34	Gráfica de los primeros 200 coeficientes de correlación para el orden Natural. Se muestran las mediciones de los patrones negativos, positivos y su resta. . . . .	51
35	Imagen de prueba “Cameraman”, a) Imagen original, b) Imagen redimensionada a un tamaño de $128 \times 128$ . . . . .	53
36	Reconstrucción de la imagen “cameraman” utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %. . . . .	54
37	Reconstrucción de la imagen “cameraman” utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %. . . . .	55

38	Imagen de prueba “Pout”, a) Imagen original, b) Imagen redimensionada a un tamaño de $128 \times 128$ .	56
39	Reconstrucción de la imagen “pout” utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	57
40	Reconstrucción de la imagen “pout” utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	58
41	Conjunto de imágenes recuperadas en el laboratorio con ayuda de una fuente de luz láser. a) Imagen con letras del nombre Uziel, b) Logo del SUNEО, c) Logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, d),e),f) Imágenes aleatorias de internet.	60
42	Conjunto de imágenes recuperadas utilizando una fuente de luz LED. a) Imagen con letras del nombre Uziel, b) Logo del SUNEО, c) Logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, d),e),f) Imágenes aleatorias de internet.	61
43	Secuencia de imágenes del mismo objeto, reconstruidas con distinto número de patrones obteniendo resoluciones de: a) $4 \times 4$ , b) $16 \times 16$ , c) $32 \times 32$ , d) $64 \times 64$ , e) $128 \times 128$	61
44	Imagen de prueba logo de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. a) Imagen original, b) Versión editada del logo original, c) Imagen objetivo obtenida con el 100 % de las mediciones en un tamaño de $128 \times 128$ .	62
45	Reconstrucción del logo de la UTM utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	63
46	Reconstrucción del logo de la UTM utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	64
47	Imagen de prueba del USAF 1951, a) Imagen original, b) Imagen simplificada de la versión original, c) Imagen objetivo obtenida con el 100 % de las mediciones en un tamaño de $128 \times 128$ .	65
48	Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	66
49	Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 50 %.	67
50	Visualización del espectro de la Transformada de Fourier aplicada a la imagen <i>cameraman</i> .	71
51	Visualización de los espectros de la Transformada de Hadamard para cada uno de los métodos de ordenamiento aplicada a la imagen <i>cameraman</i> .	72
52	Reconstrucción del logo de la UTM utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 10 %.	75
53	Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando suma de patrones de los 9 ordenamientos, se muestran para una tasa de compresión del 10 %.	76

54	Reconstrucción del logo de la UTM utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 10 % . . . . .	77
55	Reconstrucción de la imagen de prueba USAF utilizando las matrices de los 9 ordenamientos y el algoritmo TVAL3, se muestran para una tasa de compresión del 10 % . . . . .	78
56	Comparación gráfica de los coeficientes de correlación obtenidos de los 9 métodos de ordenamiento para la reconstrucción de la imagen del logo UTM. . . . .	79
57	Comparación de los métodos de ordenamiento Natural, Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, GCS-, GCS+S, GCS-S, Cake-cutting y descendente bajo la prueba de evaluación SSIM en la reconstrucción de las imágenes con suma de patrones. a) Cameraman, b) Pout, c) UTM, d) USAF. . . . .	82
58	Comparación de los métodos de ordenamiento Natural, Secuencial, Walsh-Paley, GCS+, GCS-, GCS+S, GCS-S, Cake-cutting y descendente bajo la prueba de evaluación SSIM en la reconstrucción de las imágenes con ayuda del algoritmo TVAL3. a) Cameraman, b) Pout, c) UTM, d) USAF . . . . .	83
59	Inconsistencia entre los valores de PSNR/SSIM y la calidad perceptual en algoritmos de súper-resolución, comparación extraída de [67]. . . . .	84
60	Comparación de algoritmos de sensado comprimido utilizados para reconstruir la imagen <i>cameraman</i> de un tamaño de $64 \times 64$ con una tasa de compresión del 50 %. (a) L1-magic, (b) TVAL3. . . . .	85
61	Comparación de los tiempos de cómputo de las técnicas de reconstrucción de imágenes en Single-Pixel Imaging. (a) Para una misma resolución $128 \times 128$ . (b) Para distintas resoluciones, $32 \times 32$ , $64 \times 64$ y $128 \times 128$ . . . . .	88
62	Comparación de los tiempos de cómputo en la reconstrucción de la imagen <i>cameraman</i> utilizando los algoritmos de sensado comprimido, TVAL3 y L1-magic, para la reconstrucción del “cameraman” de $64 \times 64$ píxeles. . . . .	88
63	Curva de respuesta del detector DET36A. . . . .	95

## Referencias

- [1] V. G. Díaz, “La fotografía científica.” <https://www.revista.unam.mx/vol.18/num5/art36/index.html>. Accessed: 2022-12-15.
- [2] P. Dizikes, “The writing on the wall.” <https://news.mit.edu/2018/humans-speak-through-cave-art-0221>. Accessed: 2022-12-15.
- [3] M. Vestola, “MVnet :: Tutkielmat :: Yliopisto :: Image compression.” [http://www.mvnet.fi/index.php?osio=Tutkielmat&luokka=Yliopisto&sivu=Image\\_compression](http://www.mvnet.fi/index.php?osio=Tutkielmat&luokka=Yliopisto&sivu=Image_compression). Accessed: 2024-5-6.
- [4] V. R. Bustamante, “Sensores CMOS y CCD.” Authorea. July 11, 2022.
- [5] G. M. Gibson, S. D. Johnson, and M. J. Padgett, “Single-pixel imaging 12 years on: a review,” *Opt. Express*, vol. 28, no. 19, pp. 28190–28208, 2020.
- [6] T. Lu, Z. Qiu, Z. Zhang, and J. Zhong, “Comprehensive comparison of single-pixel imaging methods,” *Opt. Lasers Eng.*, vol. 134, no. 106301, p. 106301, 2020.
- [7] Z. Li, J. Suo, X. Hu, C. Deng, J. Fan, and Q. Dai, “Efficient single-pixel multispectral imaging via non-mechanical spatio-spectral modulation,” *Sci. Rep.*, vol. 7, p. 41435, 2017.
- [8] M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, “Single-pixel imaging via compressive sampling,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 25, no. 2, pp. 83–91, 2008.
- [9] S. S. Welsh, M. P. Edgar, R. Bowman, P. Jonathan, B. Sun, and M. J. Padgett, “Fast full-color computational imaging with single-pixel detectors,” *Opt. Express*, vol. 21, no. 20, pp. 23068–23074, 2013.
- [10] L. Bian, J. Suo, G. Situ, Z. Li, J. Fan, F. Chen, and Q. Dai, “Multispectral imaging using a single bucket detector,” *Sci. Rep.*, vol. 6, no. 1, p. 24752, 2016.
- [11] F. Rousset, N. Ducros, F. Peyrin, G. Valentini, C. D’Andrea, and A. Farina, “Time-resolved multispectral imaging based on an adaptive single-pixel camera,” *Opt. Express*, vol. 26, no. 8, pp. 10550–10558, 2018.
- [12] V. Studer, J. Bobin, M. Chahid, H. S. Mousavi, E. Candes, and M. Dahan, “Compressive fluorescence microscopy for biological and hyperspectral imaging,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 109, no. 26, pp. E1679–87, 2012.

- [13] J. Hahn, C. Debes, M. Leigsnering, and A. M. Zoubir, “Compressive sensing and adaptive direct sampling in hyperspectral imaging,” *Digit. Signal Process.*, vol. 26, pp. 113–126, 2014.
- [14] M. P. Edgar, G. M. Gibson, R. W. Bowman, B. Sun, N. Radwell, K. J. Mitchell, S. S. Welsh, and M. J. Padgett, “Simultaneous real-time visible and infrared video with single-pixel detectors,” *Sci. Rep.*, vol. 5, no. 1, p. 10669, 2015.
- [15] W. L. Chan, K. Charan, D. Takhar, K. F. Kelly, R. G. Baraniuk, and D. M. Mittleman, “A single-pixel terahertz imaging system based on compressed sensing,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 93, no. 12, p. 121105, 2008.
- [16] R. I. Stantchev, B. Sun, S. M. Hornett, P. A. Hobson, G. M. Gibson, M. J. Padgett, and E. Hendry, “Noninvasive, near-field terahertz imaging of hidden objects using a single-pixel detector,” *Sci. Adv.*, vol. 2, no. 6, p. e1600190, 2016.
- [17] G. M. Gibson, B. Sun, M. P. Edgar, D. B. Phillips, N. Hempler, G. T. Maker, G. P. A. Malcolm, and M. J. Padgett, “Real-time imaging of methane gas leaks using a single-pixel camera,” *Opt. Express*, vol. 25, no. 4, p. 2998, 2017.
- [18] Y. Zhang, M. P. Edgar, B. Sun, N. Radwell, G. M. Gibson, and M. J. Padgett, “3D single-pixel video,” *J. Opt.*, vol. 18, no. 3, p. 035203, 2016.
- [19] C. F. Higham, R. Murray-Smith, M. J. Padgett, and M. P. Edgar, “Deep learning for real-time single-pixel video,” *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 1, p. 2369, 2018.
- [20] N. Radwell, K. J. Mitchell, G. M. Gibson, M. P. Edgar, R. Bowman, and M. J. Padgett, “Single-pixel infrared and visible microscope,” *Optica*, vol. 1, no. 5, p. 285, 2014.
- [21] B. Sun, M. P. Edgar, R. Bowman, L. E. Vittert, S. Welsh, A. Bowman, and M. J. Padgett, “3D computational imaging with single-pixel detectors,” *Science*, vol. 340, no. 6134, pp. 844–847, 2013.
- [22] G. A. Howland, P. B. Dixon, and J. C. Howell, “Photon-counting compressive sensing laser radar for 3D imaging,” *Appl. Opt.*, vol. 50, no. 31, pp. 5917–5920, 2011.
- [23] M. P. Edgar, M.-J. Sun, G. M. Gibson, G. C. Spalding, D. B. Phillips, and M. J. Padgett, “Real-time 3D video utilizing a compressed sensing time-of-flight single-pixel camera,” in *Optical Trapping and Optical Micromanipulation XIII* (K. Dholakia and G. C. Spalding, eds.), SPIE, 2016.

- [24] Z. Zhang and J. Zhong, “Three-dimensional single-pixel imaging with far fewer measurements than effective image pixels,” *Opt. Lett.*, vol. 41, no. 11, pp. 2497–2500, 2016.
- [25] E. Tajahuerce, V. Durán, P. Clemente, E. Irlés, F. Soldevila, P. Andrés, and J. Lancis, “Image transmission through dynamic scattering media by single-pixel photodetection,” *Opt. Express*, vol. 22, no. 14, pp. 16945–16955, 2014.
- [26] V. Durán, F. Soldevila, E. Irlés, P. Clemente, E. Tajahuerce, P. Andrés, and J. Lancis, “Compressive imaging in scattering media,” *Opt. Express*, vol. 23, no. 11, pp. 14424–14433, 2015.
- [27] J. Greenberg, K. Krishnamurthy, and D. Brady, “Compressive single-pixel snapshot x-ray diffraction imaging,” *Opt. Lett.*, vol. 39, no. 1, pp. 111–114, 2014.
- [28] W.-K. Yu, X.-F. Liu, X.-R. Yao, C. Wang, Y. Zhai, and G.-J. Zhai, “Complementary compressive imaging for the telescopic system,” *Sci. Rep.*, vol. 4, no. 1, p. 5834, 2014.
- [29] E. J. Candès, J. K. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223, 2006.
- [30] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [31] M. B. Wakin, J. N. Laska, M. F. Duarte, D. Baron, S. Sarvotham, D. Takhar, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, “An architecture for compressive imaging,” in *2006 International Conference on Image Processing*, IEEE, 2006.
- [32] Y. C. Eldar, “Compressed sensing,” in *Sampling Theory*, pp. 390–471, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [33] R. Baraniuk, “Compressive sensing [lecture notes],” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, 2007.
- [34] L. Tan, *Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications*. San Diego, CA, Estados Unidos de América: Academic Press, 2007.
- [35] A. Santos-Amador, M. Araiza-Esquivel, H. González, A. Rodríguez-Cobos, E. Tajahuerce, L. Martínez-León, G. Ramírez-Flores, and R. E. Balderas-Navarro, “Phase and amplitude reconstruction in single-pixel transmission microscopy: a comparison of hadamard, cosine, and noiselet bases,” *Appl. Opt.*, vol. 60, no. 23, pp. 6935–6942, 2021.

- [36] Z. Zhang, X. Wang, G. Zheng, and J. Zhong, “Hadamard single-pixel imaging versus fourier single-pixel imaging,” *Opt. Express*, vol. 25, no. 16, p. 19619, 2017.
- [37] F. Rousset, N. Ducros, A. Farina, G. Valentini, C. D’Andrea, and F. Peyrin, “Adaptive basis scan by wavelet prediction for single-pixel imaging,” *IEEE Trans. Comput. Imaging*, vol. 3, no. 1, pp. 36–46, 2017.
- [38] K. M. Czajkowski, A. Pastuszczak, and R. Kotyński, “Single-pixel imaging with morlet wavelet correlated random patterns,” *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 1, 2018.
- [39] E. Toninelli, D. Stellinga, B. Sephton, A. Forbes, and M. J. Padgett, “Single-pixel imaging using caustic patterns,” *Sci. Rep.*, vol. 10, no. 1, p. 2281, 2020.
- [40] X. Yu, R. I. Stantchev, F. Yang, and E. Pickwell-MacPherson, “Super sub-nyquist single-pixel imaging by total variation ascending ordering of the hadamard basis,” *Sci. Rep.*, vol. 10, no. 1, p. 9338, 2020.
- [41] L. López-García, W. Cruz-Santos, A. García-Arellano, P. Filio-Aguilar, J. A. Cisneros-Martínez, and R. Ramos-García, “Efficient ordering of the hadamard basis for single pixel imaging,” *Opt. Express*, vol. 30, no. 8, pp. 13714–13732, 2022.
- [42] P. G. Vaz, D. Amaral, L. F. Requicha Ferreira, M. Morgado, and J. Cardoso, “Image quality of compressive single-pixel imaging using different hadamard orderings,” *Opt. Express*, vol. 28, no. 8, pp. 11666–11681, 2020.
- [43] S. Camacho-López, N. Davoodzadeh, D. L. Halaney, J. A. Hernández-Cordero, G. Aguilar, G. R. Castillo, A. Cisneros-Martínez, B. Coyotl-Ocelotl, R. Chiu, J. C. Ramírez-San-Juan, and R. Ramos-García, *Transparent Polycrystalline Ceramic Cranial Implant with Photonic Functionality in the SWIR*. SPIE PRESS, 2022.
- [44] J. D. Jackson, “Visual analysis of a texas instruments digital micromirror device.” <http://www2.optics.rochester.edu/workgroups/cml/opt307/spr05/john/>.
- [45] Z. Zhuang and H. P. Ho, “Application of digital micromirror devices (DMD) in biomedical instruments,” *J. Innov. Opt. Health Sci.*, vol. 13, no. 06, p. 2030011, 2020.
- [46] P. Lozano, “Digital micromirror device.” <https://proyectoidis.org/digital-micromirror-device/>. Accessed: 2023-1-16.

- [47] L. Bian, J. Suo, Q. Dai, and F. Chen, “Experimental comparison of single-pixel imaging algorithms,” *J. Opt. Soc. Am. A Opt. Image Sci. Vis.*, vol. 35, no. 1, pp. 78–87, 2018.
- [48] S. I. Grossman, *Algebra lineal - 5b: Edición*. McGraw-Hill Companies, 1999.
- [49] W. K. Pratt, J. Kane, and H. C. Andrews, “Hadamard transform image coding,” *Proc. IEEE Inst. Electr. Electron. Eng.*, vol. 57, no. 1, pp. 58–68, 1969.
- [50] A. Papoulis, *Fourier Integral and Its Applications*. Nueva York, NY, Estados Unidos de América: McGraw-Hill, 1962.
- [51] H. C. Andrews, “Entropy considerations in the frequency domain,” *Proc. IEEE Inst. Electr. Electron. Eng.*, vol. 56, no. 1, pp. 113–114, 1968.
- [52] H. Harmuth, “A generalized concept of frequency and some applications,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 14, no. 3, pp. 375–382, 1968.
- [53] J. A. C. Martínez, “Formación de imágenes con un solo pixel,” Master’s thesis, Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla, July 2019.
- [54] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions,” *Amer. J. Math.*, vol. 45, no. 1, p. 5, 1923.
- [55] S. S. Agaian, H. G. Sarukhanyan, D. Fenton, and J. T. Astola, *Hadamard Transforms*. Bellingham, WA, Estados Unidos de América: SPIE Press, 2011.
- [56] H. Ma, A. Sang, C. Zhou, X. An, and L. Song, “A zigzag scanning ordering of four-dimensional walsh basis for single-pixel imaging,” *Opt. Commun.*, vol. 443, pp. 69–75, 2019.
- [57] W.-K. Yu, “Super sub-nyquist single-pixel imaging by means of cake-cutting hadamard basis sort,” *Sensors (Basel)*, vol. 19, no. 19, p. 4122, 2019.
- [58] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Tratamiento digital de señales*. Old Tappan, NJ, Estados Unidos de América: Prentice Hall, 2007.
- [59] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. Old Tappan, NJ, Estados Unidos de América: Prentice Hall, 2011.
- [60] E. J. Candes, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489–509, 2006.

- [61] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, eds., *Compressed sensing: Theory and applications*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2012.
- [62] C. Li, W. Yin, H. Jiang, and Y. Zhang, “An efficient augmented lagrangian method with applications to total variation minimization,” *Comput. Optim. Appl.*, vol. 56, no. 3, pp. 507–530, 2013.
- [63] C. Li, W. Yin, and Y. Zhang, “User’s guide for tval3: Tv minimization by augmented lagrangian and alternating direction algorithms,” 2011. Accessed: 12/11/2018.
- [64] “l1-magic.” <https://candes.su.domains/software/l1magic/>. Accessed: 2024-2-19.
- [65] Wikipedia contributors, “1951 USAF resolution test chart.” [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=1951\\_USAF\\_resolution\\_test\\_chart&oldid=1204828131](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=1951_USAF_resolution_test_chart&oldid=1204828131), Feb. 2024.
- [66] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli, “Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, no. 4, pp. 600–612, 2004.
- [67] Y. Blau, R. Mechrez, R. Timofte, T. Michaeli, and L. Zelnik-Manor, “The 2018 PIRM challenge on perceptual image super-resolution,” in *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 334–355, Cham: Springer International Publishing, 2019.