



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

**Modelo de transmisión de COVID-19 en Huajuapán de León
usando derivada fraccionaria de Caputo**

TESIS

que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas
presenta

Favio Alfonso Enríquez Sánchez

Director de tesis:
Dr. Emmanuel Abdías Romano Castillo

Huajuapán de León, Oaxaca

Junio del 2024

Dedicatoria

Este proyecto de tesis está dedicado a mi familia, a los que están y a los que ya se fueron.

A mis primos, para motivarlos.

A Galileo y Sócrates, por siempre mantenerme alerta.

A mis mascotas, por su alegre compañía.

A mi padre, mi madre y mi hermana, por su amor y cariño.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia, en especial a mi madre por su apoyo y confianza, así como a mi padre por su paciencia y comprensión y a mi hermana por el apoyo durante los momentos difíciles mientras se realizaba este proyecto de tesis.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Emmanuel Abdías Romano Castillo, por su orientación, paciencia y valiosas sugerencias a lo largo de todo el proceso. Su experiencia y conocimiento han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Agradezco profundamente a los doctores Alejandro Iván Aguirre Salado, Virgilio Vásquez Hipólito y Tomás Pérez Becerra, así como a la Licenciada Ana Isabel Enriquez Sánchez, por sus consejos y apoyo durante las distintas etapas de esta investigación. Sus comentarios y críticas constructivas han enriquecido significativamente este proyecto.

A mis compañeros de estudio que se volvieron grandes amigos, Cecilia, Jazmín, Ludwig, José, Juan, Roberto y Viridiana, gracias por su compañía, apoyo moral y por ser una fuente constante de motivación y ánimo. Sus palabras de aliento y momentos compartidos han sido invaluable.

A mis amigos, en especial a Carlos, Evelyn, Gustavo, Isaac, Josué, Juan y Obed por su compañía y por hacer más amena la estancia de la universidad.

Introducción

La epidemiología es el estudio de los procesos de salud y enfermedad en la población. Su objetivo es identificar necesidades y problemas relevantes en la salud, determinar las causas de una nueva enfermedad, medir los riesgos asociados con exposiciones peligrosas, y evaluar la efectividad de medidas de prevención y tratamiento. La epidemiología a menudo utiliza modelos matemáticos para pronosticar el comportamiento de las enfermedades y mitigar sus efectos.

Existen dos tipos de modelos matemáticos epidemiológicos: estocásticos y determinísticos. Los estocásticos consideran a los individuos de manera puntual, mientras que los determinísticos tratan a los individuos como un conjunto, por lo que se suelen emplear en poblaciones grandes ([40]). El objetivo principal de estos modelos es comprender el comportamiento de las enfermedades infecciosas, su prevalencia, duración e impacto en la población. Los modelos matemáticos son una herramienta fundamental para las autoridades de la salud, ya que les permiten elegir las estrategias adecuadas para hacer frente al contagio.

Los modelos matemáticos de enfermedades infecciosas se dividen en compartimentos, cada uno de los cuales representa un estado en relación con la enfermedad (susceptibles, infectados, recuperados, vacunados, etc.) y los cambios que ocurren en cada compartimento se describen a través de la derivada. Estos modelos son fundamentales para comprender la dinámica de las enfermedades infecciosas y para tomar decisiones informadas sobre su prevención y tratamiento.

Uno de los modelos más simples comportamentales en epidemiología es el de Kermack y MacKendrick, propuesto en 1927 ([30]), con el que abordaron por primera vez el problema estudiando el desarrollo de una enfermedad infecciosa dentro de un grupo de personas sanas al interactuar con un individuo infeccioso, esto, bajo las suposiciones de que la población es homogénea y se mantiene constante considerando que, en un momento dado,

cada individuo pertenece solo a uno de los conjuntos: susceptibles (S), infectados (I) o recuperados o inmunes (R) a la enfermedad. Con el avance del tiempo se han propuesto diferentes modelos epidemiológicos según la complejidad y singularidad de la epidemia ([40]).

Las incidencias de infección, es decir, la probabilidad de que un individuo susceptible se encuentre con un individuo infectado, se encuentran modeladas por la ley de acción de masas, donde esta probabilidad es proporcional al producto SI de la población susceptible e infectada. Cuando la dinámica de la población es la inmigración y muertes, se encuentran umbrales que determinan si la enfermedad desaparece o se aproxima a un equilibrio endémico.

En este proyecto de tesis se analizará el comportamiento de la derivada fraccionaria de tipo Caputo para el modelo de tipo $SIRS$ formulado en derivada entera por Anderson y May (1979) para modelar dos enfermedades de transmisión directa en una población de ratones de laboratorio. Este sistema se encuentra modelado por la incidencia estándar, esto se refiere a la tasa de incidencia estándar de una enfermedad en una población específica durante un período de tiempo determinado ([36]).

Un reto personal en este trabajo de tesis es estudiar el concepto de derivada fraccionaria, aplicaciones en diversos campos, en particular la derivada de tipo Caputo orientada a la epidemiología, muy concretamente el modelo $SIRS$. Para alcanzar este objetivo se realizan las siguientes tareas: conversión de modelo tipo $SIRS$ de orden entero a orden fraccionario, teorema de existencia y unicidad de solución, cálculo de número reproductivo, análisis de estabilidad y solución numérica de sistemas de EDO's de orden fraccionario.

Para llevar a cabo las simulaciones del modelo $SIRS$ en derivada fraccionaria de tipo Caputo, la condición inicial se elige del primer infectado en la Cd. de Huajuapán de León, Oaxaca, (12 de abril del 2020) y hasta la aplicación de las vacunas de los datos oficiales de la Secretaría de Salud (7 de mayo del 2021) ([64]), además de la evolución de la pandemia en caso de un retraso de la aplicación de las vacunas.

Un PVI de orden entero o fraccionario, se le asocia una condición inicial, en este caso el modelo $SIRS$ de orden fraccionario y de tipo Caputo hereda la misma condición ([18], [24]), cosa que no ocurre con otro tipo de derivada fraccionaria.

En la figura 1 podemos visualizar el diagrama de transferencias del modelo $SIRS$:

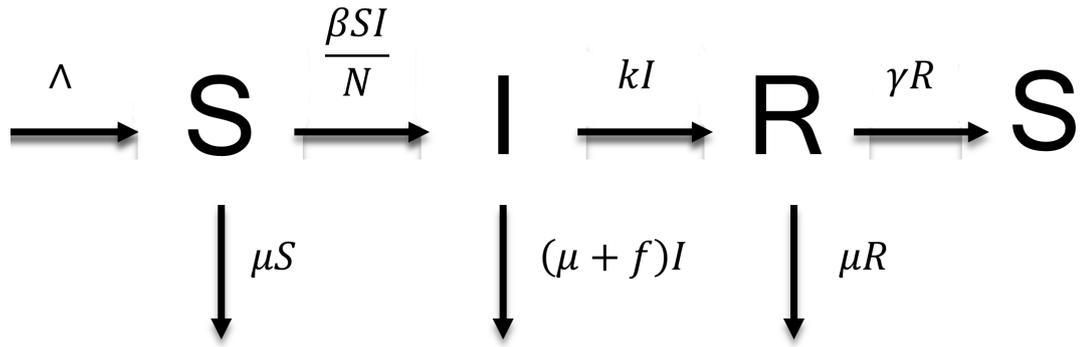


Figura 1: Diagrama de Flujo de un modelo *SIRS* formulado por Anderson y May (1979)

Los parámetros se encuentran definidos en la siguiente tabla:

| Parámetro | Definición | Valor |
|-----------|--|-------------|
| Λ | Tasa promedio de inmigración | Positivo |
| β | Tasa de contagio | Positivo |
| μ | Tasa promedio de defunciones | No negativo |
| κ | Tasa de recuperación de los infectados | Positivo |
| γ | Tasa de pérdida de inmunidad | No negativo |
| f | Tasa de Mortalidad | No negativo |

Tabla 0.0.1: Descripción de los parámetros.

El modelo que se presenta tiene como base las siguientes suposiciones ([36]):

- Denotaremos a la población con N de tal forma que $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. La población se considerará abierta, esto ya que consideraremos las migraciones de la población. La dinámica de la población que se considera en este modelo varía a través del tiempo.
- La población esta homogéneamente mezclada, es decir, el contacto entre dos individuos cualesquiera de una población se produce aleatoriamente con igual probabili-

dad. El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la tasa de incidencia estándar.

- El periodo de latencia desde el momento de la exposición hasta aquel en que el individuo comienza a ser infeccioso es lo suficientemente pequeño como para tomarlo en cuenta; esto es, un individuo susceptible que contrae la enfermedad se convierte inmediatamente en infeccioso.
- Los individuos susceptibles (S) dejarán su clase a una tasa constante β para pertenecer a la clase de infecciosos.
- Los individuos infecciosos (I) dejarán su clase a una tasa constante κ para pertenecer a la clase de recuperados.
- Los individuos recuperados (R) dejarán su clase a una tasa constante γ para pertenecer a la clase de susceptibles.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I, \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I - (\mu + \gamma)R. \end{array} \right. \quad (0.0.1)$$

Dado estas suposiciones, tenemos que el modelo se encuentra formulado en derivada entera por el sistema de ecuaciones 0.0.1. En el transcurso de este proyecto de tesis veremos la formulación del modelo *SIRS* en derivada fraccionaria de Caputo.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | V |
| 1. Epidemiología | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 1 |
| 1.2. Conceptos básicos en epidemiología | 2 |
| 1.3. Primeros modelos matemáticos | 4 |
| 1.3.1. El modelo Kermack-McKendrick | 5 |
| 1.4. Modelo <i>SIRS</i> | 7 |
| 1.5. Número reproductivo básico (R_0) | 11 |
| 2. Conceptos básicos | 13 |
| 2.1. Sistemas dinámicos | 13 |
| 2.1.1. Existencia y unicidad | 16 |
| 2.1.2. Criterio de estabilidad | 21 |
| 2.2. Derivadas de orden fraccionario | 24 |
| 2.2.1. Antecedentes | 24 |
| 2.2.2. Conceptos básicos | 25 |
| 2.2.3. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville | 28 |
| 2.2.4. Derivada fraccionaria de Caputo | 31 |
| 2.2.5. Transformada de Laplace | 34 |
| 2.2.6. Conversión de la derivada de orden entero a orden fraccionario | 37 |
| 2.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias | 40 |
| 2.3.1. Existencia y unicidad | 41 |
| 2.3.2. Criterio de estabilidad | 42 |
| 2.3.3. Conversión de sistemas | 46 |
| 3. Análisis del modelo <i>SIRS</i> | 49 |
| 3.1. Análisis del modelo <i>SIRS</i> en derivada de orden entero | 49 |
| 3.1.1. Número reproductivo básico (R_0) | 51 |
| 3.1.2. Análisis de sensibilidad de R_0 | 53 |
| 3.1.3. Estabilidad local del modelo <i>SIRS</i> | 54 |

| | |
|---|-----------|
| 3.2. Análisis del Modelo <i>SIRS</i> en derivada de orden fraccionaria | 57 |
| 3.2.1. Número reproductivo básico (R_0^α) del sistema <i>SIRS</i> fraccionario . . | 59 |
| 3.2.2. Estabilidad local del modelo <i>SIRS</i> fraccionario | 61 |
| 4. Simulación del modelo <i>SIRS</i> | 65 |
| 4.1. Obtención de parámetros del sistema <i>SIRS</i> | 65 |
| 4.1.1. Caso 1 | 66 |
| 4.1.2. Caso 2 | 70 |
| 4.2. Simulación | 72 |
| Conclusiones | 81 |
| Referencias | 83 |

Modelo de transmisión de COVID-19 en Huajuapán de León usando derivada fraccionaria de Caputo

Favio Alfonso Enríquez Sánchez

Junio 2024

Capítulo 1

Epidemiología

1.1. Antecedentes

La palabra epidemiología proviene del griego *epi* (sobre), *demos* (pueblo) y *logos* (estudio), la cual se encarga del estudio relacionado con el proceso salud-enfermedad respecto a una población. En la antigüedad comenzó el uso de la epidemiología para poder comprender las características, así como las causas de las enfermedades infecciosas que llegaban a aparecer y ponían en riesgo la estabilidad económica y social de la población.

El estudio de las epidemias ha sido todo un reto para la humanidad, desde la antigüedad Aristóteles (384 d.C-322 d.C) había tenido la idea sobre la existencia de pequeñas criaturas invisibles (microorganismos) y como estas podrían llegar a transmitir enfermedades. La existencia de los microorganismos fue demostrado por Leeuwenhoek (1632-1723) gracias a los primeros microscopios. La primera teoría de los gérmenes de la enfermedad de Jacob Henle (1809-1885) se produjo en 1840 y fue desarrollada por Robert Koch (1843-1910), Joseph Lister (1827-1912) y Louis Pasteur (1822-1875) a finales del siglo XIX y principios del siglo XX .

Las primeras referencias sobre el estudio de las enfermedades infecciosas con un enfoque preventivo, fue en el libro chino sobre acupuntura titulado *Nei King* el cual fue escrito en el año 2650 a.c. El uso de las palabras *epidemia* y *endemia* fueron utilizadas por primera vez por Hipócrates, además de que en su tratado Hipocrático sobre *Aire, Aguas y Lugares*, menciona la influencia del medio ambiente sobre los humanos para producir enfermedades. En el año de 1546, Girolamo Fracastoro fue el primero en describir las enfermedades contagiosas y estableció por lo menos tres formas de infección: contacto directo, fómites y respiración del aire. Fracastoro estableció que enfermedades específicas resultan de contagios específicos y por esto es considerado como el padre de la epidemiología moderna ([26]).

Las epidemias en México han estado presentes desde el México prehispánico, antes de la llegada de los españoles, con enfermedades tales como difteria, tifus exantemático, causadas por bacterias, así como algunas enfermedades respiratorias. Sin embargo ante la llegada de los españoles se empezaron a conocer enfermedades virulentas como es el caso de la viruela y el sarampión.

Entre el siglo XVI y XIX, en México se presentaban enfermedades como la salmonela, la cual mató al 80% de la población (alrededor de 15 millones de personas), también surgieron enfermedades como las paperas, tabardillo, diarrea, disentería, neumonía, paludismo, fiebre amarilla, amebiasis, lepra, sífilis, tripanosomiasis y cólera, esta última matando alrededor de 324 000 personas en todo el país.

A principios del siglo XX, México se enfrentó a la epidemia de la peste negra de la variedad *Bubónica*, donde se aplicaron acciones como desinfectar hogares, la aislación de personas, así como la eliminación de las ratas que portaban el virus. En 1918 la influenza española dejaba 500 000 muertos, se aplicaron medidas preventivas como evitar lugares mal ventilados, estornudar o toser con un pañuelo, usar el saludo higiénico, realizar 20 respiraciones profundas por la nariz y hacer ejercicio 3 horas a la semana para destruir gérmenes.

En el siglo XXI, en el 2009 surgió la influenza AH1N1, virus de origen porcino, tuvo presencia de casos en Oaxaca, San Luis Potosí y el Estado de México, esparciéndose en Estados Unidos, Canadá, España, Inglaterra y Nueva Zelanda, el 11 de junio del 2009, la OMS declaró que la influenza AH1N1 era una pandemia. En México hubo 67 395 casos de infectados, matando a 398 según fuentes oficiales de la secretaria de salud de México.

1.2. Conceptos básicos en epidemiología

A continuación se presentaran algunas definiciones básicas utilizadas en la jerga epidemiológica ya que serán de ayuda para describir o definir algunos parámetros en el modelo ([7], [11], [55]).

Definición 1.2.1. *La **epidemiología** es la rama de las ciencias de la salud que estudia la difusión de las enfermedades transmisibles, especialmente las que se presentan por brotes epidémicos.*

Definición 1.2.2. *Un **brote epidémico** es una clasificación usada en la epidemiología para denominar la aparición repentina de una enfermedad debida a una infección en un lugar específico y en un momento determinado.*

Definición 1.2.3. *Una **epidemia** es un aumento importante del número de personas afectadas por la enfermedad infecciosa, en un área geográfica concreta y momento determinado.*

Definición 1.2.4. *Una **pandemia** es una epidemia de una enfermedad infecciosa que se ha propagado en un área geográficamente extensa, por ejemplo, en varios continentes o en todo el mundo, afectando a un número considerable de personas.*

Definición 1.2.5. *Se dice que una enfermedad es **endémica** si persiste todo el tiempo en una zona geográfica.*

Para medir la frecuencia de una enfermedad se usan diversas medidas basadas en dos conceptos fundamentales: incidencia y prevalencia.

Definición 1.2.6. *La **incidencia** de una enfermedad mide la velocidad a la que se producen casos nuevos durante un periodo determinado en una población especificada.*

Definición 1.2.7. *La **prevalencia** es la frecuencia de casos de enfermedad en una población y en un momento dado.*

Definición 1.2.8. *La **inmunidad** es un conjunto de mecanismos de defensa de los seres vivos frente a un agente extraño y externo al organismo.*

Definición 1.2.9. *El **periodo de latencia o exposición** es el tiempo que requiere el individuo infectado para pasar a ser un individuo infeccioso.*

Definición 1.2.10. *El **periodo de incubación** es el tiempo que transcurre desde el momento en el que el individuo fue infectado hasta el momento en que aparecen los primeros síntomas.*

Definición 1.2.11. *La **ley de acción de masas** de la epidemiología, dice que la tasa a la cual una enfermedad se propaga es proporcional al número de individuos susceptibles por el número de individuos infecciosos.*

Algunos de los parámetros involucrados en el modelo tipo *SIRS*, pueden llegar a corresponder a la combinación de una o más de las definiciones previamente mostradas, por ejemplo a través de la definición 1.2.11, podemos llegar a conocer el comportamiento con el cual un individuo del compartimiento de susceptibles es transferido al compartimiento de la clase de infectados, esto a una tasa de infección constante (β).

1.3. Primeros modelos matemáticos

La modelación matemática en la epidemiología permite entender los mecanismos que llegan a influir para que una enfermedad se llegue a transmitir y en el proceso poder sugerir estrategias para controlar la enfermedad. Además de que los modelos matemáticos llegan a identificar comportamientos que no están claros al momento de utilizar datos experimentales, esto se debe a que los datos son limitados y sujetos a errores de medición.

La modelación matemática de transmisión de enfermedades, cuenta con el problema, como la mayoría de modelos matemáticos, de que mientras más simple sea el modelo matemático se omiten detalles y están diseñados solo para resaltar el comportamiento cualitativo general. En cambio, mientras más detallado sea el modelo matemático, por lo general diseñado para situaciones específicas, incluyendo a corto plazo predicciones cuantitativas, será más difícil de resolverlo analíticamente. En la mayoría de las ocasiones, los expertos en salud necesitan estrategias para combatir una enfermedad específica, por lo cual los modelos matemáticos simples no son de gran ayuda, necesitando de la simulación numérica de los modelos matemáticos más detallados.

1.3.1. El modelo Kermack-McKendrick

En el año de 1927, Kermack y McKendrick propusieron un modelo matemático simple epidemiológico que contaba con predicciones similares al comportamiento de las enfermedades que habían ocurrido hasta esa fecha ([30], [31], [32]).

El modelo matemático clásico de Kermack-McKendrick es un modelo compartimental, en el cual se busca simplificar la modelización matemática, dividiendo a la población a estudiar en clases, las cuales varían con el tiempo t , suponiendo que cada individuo dentro de una misma clase cuentan con las mismas características. ([12]).

En el modelo matemático de Kermack-McKendrick se divide a la población en tres clases, las cuales se etiquetaran con S , I y R .

La clase $S(t)$ es aquella clase que denota al número de los individuos que son *susceptibles* a la enfermedad, es decir, que no se han llegado a contagiar por la enfermedad en un tiempo t .

La clase $I(t)$ es la clase que denota al número de individuos que se encuentran *infectados* y que pueden transmitir la enfermedad a los susceptibles.

Por último, la clase $R(t)$ denota al número de individuos que han sido infectados y se han *removido* de la posibilidad de volver a ser infectados o de esparcir la enfermedad. La remoción de un individuo se lleva a cabo, ya sea por aislamiento del resto de la población, a través de la inmunización contra la infección, a través de la recuperación de la enfermedad con inmunidad total contra la reinfección, o por muerte causada por la enfermedad. Podemos ver el diagrama de transferencias del sistema SIR en la figura 1.1.

Se usará la terminología SIR para describir el comportamiento de una enfermedad que confiere inmunidad contra la reinfección. La variable independiente en este modelo compartimental es el tiempo t y la tasa de transferencia entre compartimientos o clases está expresado matemáticamente como derivadas con respecto al tiempo, por lo que el modelo se encuentra formulado con *ecuaciones diferenciales*.



Figura 1.1: Diagrama de Flujo de un modelo SIR

Este sistema cuenta con los siguientes parámetros:

| Parámetro | Definición | Valor |
|-----------|--|----------|
| β | Tasa de contagio | Positivo |
| γ | Tasa de recuperación de los infectados | Positivo |

Tabla 1.3.1: Descripción de los parámetros del modelo *SIR*.

El modelo *SIR* tiene como base las siguientes suposiciones:

- (a) La población a considerar es constante y de tamaño igual a N . No se consideran nacimientos y muertes en el proceso de difusión de la enfermedad.
- (b) La población es cerrada, esto es, no hay inmigración ni emigración.
- (c) La población se encuentra homogéneamente mezclada. El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas.
- (d) El periodo de latencia desde el momento de la exposición hasta aquel en el que el individuo comienza a ser infeccioso, es lo suficientemente pequeño como para tomarlo en cuenta.
- (e) Los individuos susceptibles abandonarán su clase a una tasa constante β para pertenecer a la clase de infecciosos.

- (f) Los individuos infecciosos abandonarán su clase a una tasa constante γ para pertenecer a la clase de removidos.

El modelo clásico de Kermack y McKendrick ([7], [30], [31], [32], [55]) corresponde al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} S' = -\beta SI, \\ I' = \beta SI - \gamma I, \\ R' = \gamma I. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

De las hipótesis (a) y (b), dado que la población (N) se ha dividido en compartimientos se puede observar que $N = S + I + R$.

Por la hipótesis (c) se postula que los susceptibles se convierten en infecciosos a una tasa proporcional al producto del número de individuos de ambas clases, con constante de proporcionalidad I , esto es que la tasa de pérdida de personas susceptibles y la ganancia de infecciosas es igual a βSI y γI indica la salida de la clase infecciosa.

La solución analítica del modelo clásico de Kermack y McKendrick se puede encontrar en ([7], [12], [55]) así como su aplicación en diversos escenarios.

1.4. Modelo *SIRS*

En el modelo *SIR* se ha supuesto que la inmunidad recibida al tener una enfermedad es permanente, la cual muchas veces puede no ser cierta, esto debido a que puede haber una pérdida de inmunidad gradual a través del tiempo. Además de que en muchas ocasiones pueden encontrarse mutaciones en los virus haciendo que la cepa activa de la enfermedad sea lo suficientemente diferente de la cepa de la que se ha recuperado un individuo, por lo que la inmunidad recibida puede disminuir.

Este comportamiento de inmunidad temporal se puede describir a través de un modelo *SIRS*, modelo en el cual una tasa de transferencia de los removidos (R) a los susceptibles

(S) se agrega a un modelo SIR ([12]). Podemos ver en la figura 1.2 el diagrama de transferencias del modelo clásico $SIRS$.

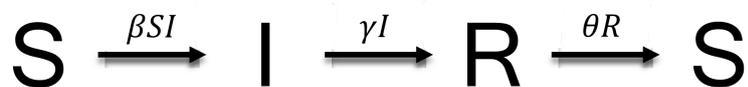


Figura 1.2: Diagrama de Flujo de un modelo $SIRS$.

El modelo clásico $SIRS$ cuenta con los siguientes parámetros:

| Parámetro | Definición | Valor |
|-----------|--|----------|
| β | Tasa de contagio | Positivo |
| γ | Tasa de recuperación de los infectados | Positivo |
| θ | Tasa de pérdida de inmunidad | Positivo |

Tabla 1.4.1: Descripción de los parámetros del modelo $SIRS$.

El modelo clásico $SIRS$ se encuentra modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \theta R, \\ I' = \beta SI - \gamma I, \\ R' = \gamma I - \theta R. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Dado que el modelo $SIRS$ es una expansión del modelo SIR contará con las siguientes hipótesis:

- (a) La población a considerar es constante y de tamaño igual a N . No se consideran nacimientos y muertes en el proceso de difusión de la enfermedad.
- (b) La población es cerrada, esto es, no hay inmigración ni emigración.
- (c) La población se encuentra homogéneamente mezclada. El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la ley de acción de masas.
- (d) El periodo de latencia desde el momento de la exposición hasta aquel en el que el individuo comienza a ser infeccioso, es lo suficientemente pequeño como para tomarlo en cuenta.
- (e) Los individuos susceptibles abandonarán su clase a una tasa constante β para pertenecer a la clase de infecciosos.
- (f) Los individuos infecciosos abandonarán su clase a una tasa constante γ para pertenecer a la clase de removidos.
- (g) Los individuos de la clase de removidos abandonarán su clase a una tasa constante θ para pertenecer a la clase de susceptibles.

De manera similar la solución analítica de este modelo *SIRS* se puede encontrar en([12]).

En la presente tesis, retomamos el modelo *SIRS* en derivada entera propuesto en ([36] y más tarde convertiremos a derivada fraccionaria de tipo Caputo. Este modelo tiene la particularidad de utilizar la tasa de incidencia estándar. La tasa de incidencia estándar generalmente se calcula dividiendo el número de nuevos casos de la enfermedad durante un período de tiempo determinado por el tamaño de la población en riesgo en ese mismo período. El diagrama de transferencias lo podemos encontrar en la figura 1.3. El modelo *SIRS* cuenta con las siguientes hipótesis:

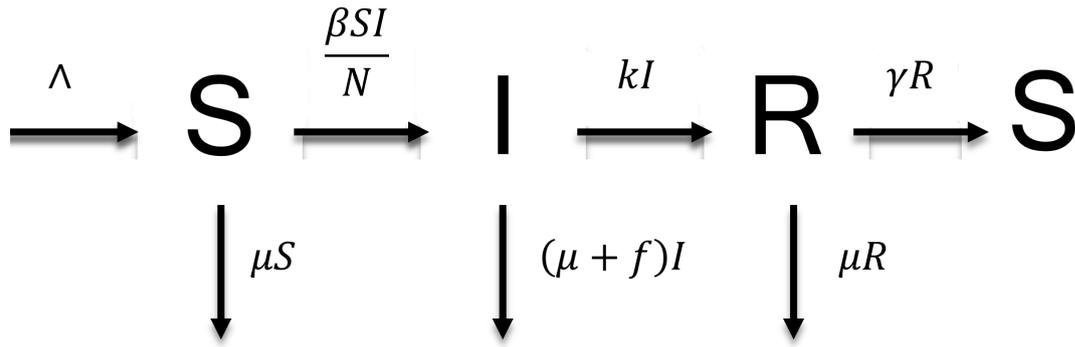


Figura 1.3: Diagrama de transferencias del modelo *SIRS* formulado por Anderson y May (1979).

- Denotaremos a la población con N de tal forma que $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. La población se considerará abierta, esto ya que consideraremos las migraciones de la población. La dinámica de la población que se considera en este modelo varía a través del tiempo.
- La población está homogéneamente mezclada, es decir, el contacto entre dos individuos cualesquiera de una población se produce aleatoriamente con igual probabilidad. El proceso de transmisión de la enfermedad está regido por la tasa de incidencia estándar.
- El periodo de latencia desde el momento de la exposición hasta aquel en que el individuo comienza a ser infeccioso, es lo suficientemente pequeño como para tomarlo en cuenta; esto es, un individuo susceptible que contrae la enfermedad se convierte inmediatamente en infeccioso.
- Los individuos susceptibles (S) dejarán su clase a una tasa constante β para pertenecer a la clase de infecciosos.
- Los individuos infecciosos (I) dejarán su clase a una tasa constante k para pertenecer a la clase de recuperados.
- Los individuos recuperados (R) dejarán su clase a una tasa constante γ para pertenecer a la clase de susceptibles.

Los parámetros se encuentran definidos en la siguiente tabla:

| Parámetro | Definición | Valor |
|-----------|--|-------------|
| Λ | Tasa promedio de inmigración | Positivo |
| β | Tasa de contagio | Positivo |
| μ | Tasa promedio de defunciones | No negativo |
| κ | Tasa de recuperación de los infectados | Positivo |
| γ | Tasa de pérdida de inmunidad | No negativo |
| f | Tasa de Mortalidad | No negativo |

Tabla 1.4.2: Descripción de los parámetros del modelo *SIRS* formulado por Anderson y May (1979).

Este modelo se encuentra formulado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ I' = \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I, \\ R' = \kappa I - (\mu + \gamma)R. \end{array} \right. \quad (1.4.2)$$

1.5. Número reproductivo básico (R_0)

Un umbral epidémico indica el nivel de incidencia a partir del cual una enfermedad requiere una respuesta urgente. Cada enfermedad tiene un umbral específico que depende de su infecciosidad, de otros factores determinantes de la transmisión y del grado de endemia local.

El umbral para varios modelos epidemiológicos es el número reproductivo básico R_0 , el cual se define como el número promedio de infecciones secundarias producidas cuando un individuo que cuenta con la enfermedad es introducido a una población susceptible

Es importante el uso de R_0 ya que en base a él podemos observar el comportamiento de un brote epidémico en una población dada. Si $R_0 > 1$ podemos decir que habrá un brote epidémico, en cambio si $R_0 \leq 1$, entonces no habrá un brote epidémico ([7], [11], [12], [36], [55], [62]).

Para las autoridades sanitarias o control de enfermedades, estudiar el valor R_0 , les permite identificar estrategias para controlar la propagación de la enfermedad en la población. También, se trata de obtener medidas de control que puedan prevenir nuevas epidemias en caso de que se puedan volver a generar.

En la mayoría de las veces, en la práctica, el número reproductivo básico se calcula en base a los datos arrojados durante el desarrollo de una epidemia, en este trabajo utilizaremos la matriz de siguiente generación para poder encontrar el número reproductivo básico para el modelo *SIRS* 1.4.2 en base al desarrollo analítico de las ecuaciones diferenciales, en cambio, en los capítulos posteriores veremos un método para encontrar el número reproductivo básico en base al modelo SIRS con derivada fraccionaria de Caputo.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un conjunto de reglas o ecuaciones que describen cómo evolucionan ciertas variables en función del tiempo. Está compuesto por variables que representan cantidades o propiedades que cambian con el tiempo y está definido por reglas de evolución que pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales, en diferencias o algoritmos [68]. El comportamiento dinámico del sistema describe cómo las variables cambian en respuesta a estas reglas, pudiendo ser oscilatorio, convergente, divergente, caótico o estable. La estabilidad de puntos de equilibrio es importante para comprender el comportamiento a largo plazo del sistema. Los sistemas dinámicos se aplican en una variedad de campos científicos y sociales para modelar y comprender fenómenos complejos en la naturaleza y la sociedad.

Los sistemas dinámicos son categorizados de acuerdo a las propiedades de sus *retratos fase*, su *regla de evolución* y de el *tiempo* en sí. La regla de evolución puede ser *determinista* o *estocástico*. Un sistema determinista es un sistema en el cual el estado futuro del sistema está completamente determinado por su estado actual y las reglas o leyes que gobiernan su evolución. En otras palabras, si conocemos el estado inicial del sistema y las reglas que rigen su comportamiento, podemos predecir con certeza cómo evolucionará en el futuro. No hay incertidumbre inherente en la evolución del sistema una vez que se conocen todas las variables y las leyes que las gobiernan.

Por otro lado, un sistema estocástico es un sistema en el que el estado futuro del sistema está sujeto a cierto grado de incertidumbre o aleatoriedad. A diferencia de los sistemas deterministas, en los sistemas estocásticos, el estado futuro del sistema no se determina completamente por su estado actual y las reglas de evolución, sino que está influenciado por factores aleatorios o probabilísticos. En otras palabras, en un sistema estocástico, las

predicciones futuras no son deterministas, sino que están sujetas a cierta probabilidad o distribución de probabilidad. Los sistemas estocásticos son comunes en la modelización de fenómenos en los cuales hay variabilidad inherente o factores aleatorios involucrados, como la evolución de poblaciones, el comportamiento del mercado financiero, la difusión de partículas, entre otros. ([42]).

Dentro del ámbito de los sistemas deterministas, se pueden distinguir entre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Los sistemas lineales se caracterizan por tener ecuaciones de evolución que son lineales en las variables de estado y sus derivadas, lo que simplifica su análisis y comprensión. Por otro lado, los sistemas no lineales presentan términos no lineales en sus ecuaciones de evolución, lo que puede generar comportamientos dinámicos más complejos y difíciles de predecir. En lo que sigue de este capítulo, se presentarán conceptos básicos de sistemas diferenciales, tanto lineales como no lineales, que serán útiles para llevar a cabo un análisis analítico de nuestro sistema *SIRS*. Varias de estas definiciones y teoremas se pueden encontrar en las siguientes referencias ([21], [42], [52], [68]).

La mayoría de los sistemas deterministas se expresan comúnmente mediante sistemas de ecuaciones diferenciales en la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{2.1.1}$$

donde \mathbf{x} es el vector de variables del sistema y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una función que describe cómo evoluciona el sistema en función de \mathbf{x} .

Definición 2.1.1. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto de equilibrio o punto crítico del sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{2.1.2}$$

si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Un punto crítico es un estado del sistema donde las tasas de cambio de las variables son nulas, lo que significa que es un estado de equilibrio en el que las condiciones del sistema permanecen constantes con el tiempo. En un sistema dinámico, como un modelo *SIRS*

que describe la propagación de una enfermedad, un punto crítico indica un momento en el que no hay cambios netos en el número de personas susceptibles, infectadas y recuperadas.

Un punto de equilibrio es fundamental en el análisis de sistemas dinámicos, ya que proporciona información sobre la estabilidad del sistema y sus posibles comportamientos a largo plazo. Los puntos críticos pueden ser estables o inestables, lo que significa que el sistema puede regresar a este estado de equilibrio después de una perturbación o alejarse de él con el tiempo, respectivamente. Además, los puntos críticos pueden variar dependiendo de los parámetros del sistema, lo que permite estudiar cómo diferentes condiciones afectan la dinámica de la enfermedad.

Ejemplo 2.1.2. *Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - z^2, \\ \dot{z} = z^2 - x - y. \end{cases}$$

Para encontrar el punto de equilibrio igualamos a cero cada una de las ecuaciones diferenciales, es decir

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0, \\ x^2 - y^2 - z^2 &= 0, \\ z^2 - x - y &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema obtenemos que los puntos de equilibrio son,

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0), \\ P_2 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

2.1.1. Existencia y unicidad

Un aspecto crucial en el análisis de sistemas dinámicos es comprender la existencia y unicidad de las soluciones que describen su evolución a través del tiempo. Antes de adentrarnos en el teorema correspondiente, es necesario presentar algunas definiciones que servirán como base para entender el concepto en su totalidad. Estas definiciones y teoremas así como sus demostraciones pueden ser consultadas en ([52]).

Definición 2.1.3. *La función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, si existe una transformación lineal $J(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ que satisface*

$$\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - J(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Donde $L(\mathbb{R}^n)$ se refiere a todas las transformaciones lineales que van de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n . La transformación lineal $J(\mathbf{x}_0)$ se le llama la derivada de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 .

El siguiente teorema, nos da un método para calcular las derivadas en coordenadas.

Teorema 2.1.4. *Si $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es diferenciable en \mathbf{x}_0 , entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, existen en \mathbf{x}_0 y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

De este modo, si \mathbf{f} es una función diferenciable, la derivada J esta dada por la matriz jacobiana de tamaño $n \times n$,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.5. *Encontremos la derivada de la función*

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix},$$

en el punto $\mathbf{x}_0 = (a, b)^T$. La matriz jacobiana de \mathbf{f} es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

donde $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ y $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Calculando las derivadas parciales y evaluando en el punto \mathbf{x}_0 , obtenemos:

$$J(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Definición 2.1.6. Sean V_1 y V_2 dos espacios normados con respectivas normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente. La función

$$\mathbf{F} : V_1 \rightarrow V_2,$$

es continua en el punto \mathbf{x}_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in V_1$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_1 < \delta$, entonces,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|_2 < \epsilon$$

y se dice que \mathbf{F} es continua sobre el conjunto $E \subset V_1$ si es continua en cada punto $\mathbf{x} \in E$. Si \mathbf{F} es continua sobre $E \subset V_1$ escribimos $\mathbf{F} \in C(E)$.

Definición 2.1.7. Supongamos que $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable sobre E . Entonces $\mathbf{f} \in C^1(E)$ si la derivada $J : E \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ es continua sobre E .

El siguiente teorema, nos da una simple prueba para determinar cuando una función $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertenece (o no) a $C^1(E)$.

Teorema 2.1.8. *Supongamos que E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbf{f} \in C^1(E)$ si y solo si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ existen y son continuas sobre E .*

Ejemplo 2.1.9. *Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, xy)$. Queremos determinar si $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.*

Para ello, verificamos si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas en \mathbb{R}^2 . Calculemos las derivadas parciales de \mathbf{f} :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x.$$

Las derivadas parciales son continuas en \mathbb{R}^2 , por lo que, según el teorema 2.1.8, la función $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

A continuación, se presentará el teorema fundamental de existencia y unicidad para sistemas autónomos no lineales de ecuaciones diferenciales de la forma 2.1.1.

Bajo las hipótesis que $\mathbf{f} \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . El método de aproximaciones sucesivas de Picard es usado para probar dicho teorema ([52]).

Definición 2.1.10. *Sea $\mathbf{f} \in C(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . $\mathbf{x}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial 2.1.1 sobre un intervalo I si $\mathbf{x}(t)$ es diferenciable sobre*

I y para todo $t \in I$, $\mathbf{x}(t)$ y

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Además dado $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{x}(t)$ es una solución del problema con valores iniciales

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

sobre un intervalo I , si $t_0 \in I$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial 2.1.1 sobre el intervalo I .

Para poder aplicar el método de aproximaciones sucesivas, para establecer la existencia de la solución de 2.1.1 se presentaran las definiciones de la condición de Lipschitz y cuando las funciones $\mathbf{f} \in C^1$ son localmente Lipschitz.

Definición 2.1.11. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Decimos que una función $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz sobre E si existe una constante positiva K de tal forma que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

La función \mathbf{f} se dice que es localmente Lipschitz sobre E si para cada punto $\mathbf{x}_0 \in E$ existe una ϵ -vecindad de \mathbf{x}_0 , $N_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$ y una constante K_0 tal que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_\epsilon(\mathbf{x}_0)$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq K_0|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

donde

$$N_\epsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \epsilon\},$$

con $\epsilon > 0$.

Lema 2.1.12. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{f} \in C^1(E)$, entonces \mathbf{f} es localmente Lipschitz sobre E .

Ejemplo 2.1.13. Retomando con el ejemplo 2.1.9 y utilizando el lema 2.1.12, podemos argumentar que \mathbf{f} es localmente Lipschitz ya que las derivadas parciales existen sobre \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.1.14. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Sea $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Entonces existe $a > 0$ de tal forma que el problema con valor inicial,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

tiene única solución $\mathbf{x}(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$.

Al teorema anterior se le conoce como teorema fundamental de existencia y unicidad, este establece que para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con un conjunto abierto como dominio, y bajo ciertas condiciones de continuidad de las funciones involucradas, existe un intervalo alrededor del punto inicial donde el problema de valor inicial tiene una solución única.

Teorema 2.1.15. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Sea $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{F} \in C^1(E)$. Supongamos que el problema con valor inicial 2.1.3 tiene una solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un $\delta > 0$ y una constante K positiva tal que para todo $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ el problema con valores iniciales,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{y}, \end{aligned}$$

tiene una única solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ definida sobre $[a, b]$ la cual satisface

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| e^{K|t|}$$

y

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),$$

uniformemente para todo $t \in [a, b]$.

El teorema presentado es una extensión del teorema fundamental de existencia y unicidad 2.1.14 para problemas con valor inicial en sistemas de ecuaciones diferenciales. Establece que si un problema tiene una solución definida en un intervalo cerrado, entonces para condiciones iniciales cercanas, las soluciones también estarán cercanas y se mantendrán cercanas en todo el intervalo, siempre que se cumplan ciertas condiciones de continuidad.

2.1.2. Criterio de estabilidad

Para determinar la estabilidad local asintótica de un sistema no lineal, existen varios métodos disponibles. En este proyecto, optamos por utilizar el método de linealización, que nos permite aproximarnos al comportamiento del sistema alrededor de un punto de equilibrio mediante la transformación de las ecuaciones no lineales en ecuaciones lineales, para conocer más sobre este método, se puede consultar la siguiente referencia ([52]).

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{2.1.4}$$

con $A = J(\mathbf{x}_0)$. El sistema lineal $A\mathbf{x} = J(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$ se le llama la parte lineal de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 .

Definición 2.1.16. *Un punto de equilibrio (crítico), $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama punto de equilibrio hiperbólico de 2.1.1 si los eigenvalores de la matriz $J(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real distinta de cero. El sistema lineal 2.1.4 con la matriz $A = J(\mathbf{x}_0)$ se le conoce como la linealización de 2.1.1 en el punto \mathbf{x}_0 .*

Definición 2.1.17. Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 se le llama sumidero si todos los eigenvalores de $J(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa; se le llama fuente si todos los eigenvalores de $J(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real positiva; y se llama silla si es un punto de equilibrio hiperbólico y $J(\mathbf{x}_0)$ tiene al menos un eigenvalor con parte positiva y al menos uno con parte real negativa.

Ejemplo 2.1.18. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Calculamos la matriz jacobiana $J(\mathbf{x})$ y evaluamos en el punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$:

$$J(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos los eigenvalores de $J(\mathbf{x}_0)$:

$$\det(J(\mathbf{x}_0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Esto nos da $\lambda = \pm 1$. Ambos tienen parte real no nula, lo que significa que el punto $(0, 0)$ no es ni sumidero ni fuente. Entonces, es un punto de silla.

Realizaremos este proceso (linealización) ya que nos facilita el uso del criterio de Routh-Hurwitz, una herramienta fundamental para analizar la estabilidad de sistemas lineales. El criterio de Routh-Hurwitz nos permite evaluar la estabilidad de un sistema lineal mediante la inspección de los coeficientes de su polinomio característico, proporcionando criterios claros y concisos para determinar la estabilidad del sistema en función de

sus parámetros.

Así, el criterio de Routh-Hurwitz para un polinomio característico de grado 3 se puede enunciar mediante el siguiente teorema 2.1.19. La demostración de este resultado para un polinomio de grado n se puede encontrar en las siguientes referencias ([46], [48]).

Teorema 2.1.19. *Consideremos el polinomio característico de grado 3 del sistema 2.1.4 de la siguiente manera:*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0,$$

con coeficientes en \mathbb{R} . Sea \mathbf{x}_0 un punto crítico del sistema 2.1.4. Diremos que \mathbf{x}_0 es estable si y solo si los coeficientes del polinomio característico cumplen:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ y } a_2a_1 > a_0.$$

Ejemplo 2.1.20. *Retomando con el sistema del ejemplo anterior (2.1.2), examinaremos su estabilidad. Para ello calcularemos la matriz jacobiana del sistema, esto es*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2x & -2y & 0 \\ -1 & -1 & 2z \end{bmatrix}.$$

Evaluando en el punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$, se tiene,

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para obtener el polinomio característico debemos calcular $\det(J(P_1) - \lambda I)$, obteniendo así,

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2.$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz (2.1.19), se sigue que el punto de equilibrio es inestable, ya que uno de los coeficientes no es mayor a cero ($a_2 = -1$).

2.2. Derivadas de orden fraccionario

2.2.1. Antecedentes

El origen del cálculo fraccional se remonta poco después de que se desarrollaran los fundamentos del cálculo diferencial e integral que desarrollaron Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 - 1717). Esto fue debido a la notación que utilizaba Leibniz,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

para denotar la n -ésima derivada de la función f , donde $n \in \mathbb{N}$. En septiembre de 1695, L'Hôpital envió una carta a Leibniz preguntando sobre el significado de $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ si $n = \frac{1}{2}$. Esta carta se considera la primera mención conocida de lo que hoy se llama *derivada fraccional*. El hecho de que L'Hôpital preguntara por $\frac{1}{2}$, una fracción, es lo que dio origen al nombre de esta rama de las matemáticas. Actualmente, n no está restringido a números racionales, pudiendo ser cualquier número real, e incluso se pueden considerar números complejos ([16]).

El uso de la derivada fraccionaria ha sido crucial en la comprensión de diversos fenómenos y su aplicación en una amplia gama de campos. Por ejemplo, se ha empleado en la modelación de materiales visco elásticos ([65]), el procesamiento de imágenes ([13]), la bioingeniería ([39]), y la propagación del calor ([57]). Además, ha encontrado aplicación en áreas como la psicología matemática, donde los sistemas de orden fraccional son útiles para modelar el comportamiento humano ([2], [67]). Estas son solo algunas de las numerosas aplicaciones de la derivada fraccionaria en diversos campos de estudio ([16], [66]).

2.2.2. Conceptos básicos

En esta sección, mostraremos las definiciones y herramientas correspondientes sobre la derivada fraccionaria, para eso veremos algunas definiciones como son la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y su importancia dentro de la derivada fraccionaria de tipo Caputo. También se mostraran algunas funciones especiales que llegan a aparecer en la definiciones indicadas anteriormente. Estas definiciones, teoremas, así como sus demostraciones fueron consultadas y extraídas de las siguientes referencias ([14], [16] [17], [29], [33], [44], [56], [60], [66]).

La primera función especial que vamos a definir es la función Gamma denotada por $\Gamma(z)$, es una función especial en matemáticas que generaliza el concepto de factorial a números complejos y reales.

Definición 2.2.1. *La función $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se le conoce como la función Gamma, Se define mediante la integral:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Esta integral converge para todos los números complejos $x \in (0, \infty)$. La función Gamma es continua y tiene propiedades interesantes, como la fórmula de recurrencia $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

La función Gamma converge en el intervalo $(0, \infty)$ debido a que la función e^{-t} disminuye rápidamente y t^{x-1} crece de manera controlada para valores de x en $(0, \infty)$. Esta combinación asegura que la integral definida que define la función Gamma tenga un comportamiento convergente en dicho intervalo para todos los valores reales positivos de x .

El siguiente resultado será de utilidad mas adelante,

Teorema 2.2.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$(n - 1)! = \Gamma(n).$$

El teorema anterior 2.2.2 nos muestra como la función Γ puede ser vista como una extensión del factorial.

Ejemplo 2.2.3. A continuación se muestran algunos ejemplos donde se ocupa la función Γ :

1. **Factorial:**

$$\Gamma(5) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

2. **Fracciones:**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \approx \sqrt{\pi}.$$

3. **Función de error:**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right).$$

4. **Distribución Chi-cuadrado:**

$$f(x; k) = \frac{x^{k/2-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}.$$

Otra función especial de gran importancia en el ámbito de las ecuaciones diferenciales fraccionarias es la función de Mittag-Leffler. Esta función juega un papel análogo al de la función exponencial (e) en muchas aplicaciones.

Definición 2.2.4. Sean $n_1, n_2 > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. La función E_{n_1, n_2} definida por

$$E_{n_1, n_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(n_1 k + n_2)},$$

cuando la serie converge es llamada función de Mittag-Leffler con parámetros n_1 y n_2 .

Notemos que cuando $n_1 = 1$ y $n_2 = 1$ y utilizando el teorema 2.2.2, la función Mittag-Leffler toma la forma

$$E_{n_1, n_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Es decir que $E_{1,1}(z)$ es la función exponencial.

Antes de ver la definición respecto a la derivada fraccionaria, definiremos la notación que se estará utilizando para el operador diferencial y operador integral.

Definición 2.2.5. *El operador diferencial D se define como la aplicación que asigna a cada función diferenciable f en el conjunto de números reales \mathbb{R} su derivada, es decir,*

$$Df(x) = f'(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.2.6. *Sea f una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$. Denotaremos por J_a al operador que mapea una función f sobre su primitiva centrada en a , es decir,*

$$J_a = \int_a^x f(t)dt,$$

para $a \leq x \leq b$.

A continuación se ofrecerá una breve definición sobre las funciones medibles que servirá como base para comprender un poco más las derivadas fraccionarias.

Definición 2.2.7. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Sea p un número real positivo. Diremos que f pertenece al espacio $L_p[a, b]$ si,*

$$\int_a^b |f|^p dx < \infty.$$

No profundizaremos más en este tema respecto a los espacios L_p , ya que nuestro interés se centra en el espacio de funciones medibles $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f pertenezca a L_1 , es decir, que sean integrables en el sentido de Lebesgue, donde su integral absoluta es finita. Para que f sea medible, basta con que sea continua ([16], [61]).

Definición 2.2.8. Denotaremos por A^n o $A^n[a, b]$ al conjunto de funciones con una derivada $(n - 1)$ -ésima absolutamente continua.

Una función es absolutamente continua en un intervalo si su derivada es integrable en dicho intervalo.

2.2.3. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

A continuación presentaremos la definición de la integral fraccional y derivada fraccional de Riemann-Liouville utilizando los operadores anteriormente vistos en 2.2.5 y 2.2.6. Estos conceptos son extensiones importantes de la integral y derivada clásicas, respectivamente, que permiten operar con funciones no enteras o fraccionarias.

La integral fraccional de Riemann-Liouville generaliza el concepto de integración, permitiendo integrar funciones no enteras o fraccionarias. Por otro lado, la derivada fraccional de Riemann-Liouville generaliza el concepto de derivación, permitiendo calcular derivadas de orden fraccionario.

Definición 2.2.9. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. El operador J_a^α definido en $L_1[a, b]$ por:

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

para $a \leq x \leq b$ es llamado el operador integral fraccional de Riemann-Liouville de grado α .

Si $\alpha = 0$, definimos $J_a^0 = I$, el operador identidad.

El siguiente teorema nos muestra que el operador $J_a^\alpha f(x)$ se encuentra en $L_1[a, b]$, la demostración de este teorema se puede encontrar en ([16]).

Teorema 2.2.10. Sea $f \in L_1[a, b]$, $\alpha > 0$. Entonces la integral $J_a^\alpha f(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$. Además la función $J_a^\alpha f$ en sí misma también es un elemento de $L_1[a, b]$.

Este teorema establece que si una función f es integrable en el sentido de Lebesgue en el intervalo $[a, b]$, entonces su integral fraccional $J_a^\alpha f(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$, es decir que, excepto en un conjunto de medida cero, la integral fraccional de f está bien definida en el intervalo $[a, b]$ para cada x .

Definición 2.2.11. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m = [\alpha]$. El operador D_a^α definido por:

$$D_a^\alpha f = D^m J_a^{m-\alpha} f,$$

es llamado el operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville de grado α .

Para $n = 0$, definimos $D_a^0 = I$, el operador identidad.

Notemos que en la definición anterior aparece $m = [\alpha]$, el cual es el entero más cercano a α es decir,

$$[\alpha] = \begin{cases} \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq \alpha\} & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \text{mín}\{m \in \mathbb{Z} : m > \alpha\} - 1 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Observemos que si $0 < \alpha < 1$, entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville toma la forma ([16], [33])

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt.$$

Ejemplo 2.2.12. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) = c$, es decir la función constante. Calculemos la derivada de Riemann-Liouville de la función $f(x)$:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{c}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Calculemos la integral:

$$\int_a^x \frac{c}{(x-t)^\alpha} dt = c \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

y luego la derivada con respecto a x :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = (x-a)^{-\alpha}.$$

Por lo tanto, la derivada fraccionaria de tipo Riemann-Liouville es:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

El siguiente resultado contiene una condición suficiente para la existencia del operador.

Proposición 2.2.13. Sea $f \in A^1[a, b]$ y $0 < \alpha < 1$. entonces D_a^α existe casi en todas partes en $[a, b]$.

Teorema 2.2.14. *Sea $\alpha \geq 0$, entonces para cada $f \in L_1[a, b]$, se cumple:*

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f = f,$$

casi en todas partes.

La demostración de estos últimos resultados se pueden encontrar con más detalle en [16].

2.2.4. Derivada fraccionaria de Caputo

En el estudio de fenómenos físicos y sistemas dinámicos complejos, la derivada fraccionaria de Caputo emerge como una herramienta poderosa y versátil para modelar y comprender una amplia gama de comportamientos no enteros en estos sistemas. A diferencia de la derivada clásica, que se limita a describir cambios instantáneos en el tiempo, la derivada fraccionaria de Caputo captura efectos de memoria a largo plazo y fenómenos no locales que son comunes en muchos sistemas reales. Este enfoque se ha vuelto esencial en campos como la física, la ingeniería, la biología y la economía, donde los fenómenos de escala temporal no entera son la norma más que la excepción ([27], [56]).

Antes de definir la derivada fraccionaria de Caputo definiremos el siguiente operador que nos será de gran utilidad.

Definición 2.2.15. *Sea $\alpha \geq 0$ y $m = [\alpha]$. Definimos al operador \hat{D}_a^α por:*

$$\hat{D}_a^\alpha = J_a^{m-\alpha} D^m f,$$

siempre que $D^m f \in L_1[a, b]$.

Definición 2.2.16. Denotaremos por $T_{m-1}[f; a]$ como el polinomio de Taylor de grado $m - 1$ para la función f centrada en a , es decir,

$$T_{m-1}[f; a](x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k,$$

en el caso $m = 0$ definimos $T_{m-1}[f; a] = 0$.

Definición 2.2.17. Sea $\alpha \geq 0$ y f de tal forma que $D_a^\alpha[f - T_{m-1}[f; a]]$ exista, donde $m = [\alpha]$, definimos a la función D_{*a}^α por:

$$D_{*a}^\alpha = D_a^\alpha[f - T_{m-1}[f; a]].$$

El operador D_{*a}^α es llamado como el operador diferencial de Caputo de orden α .

El siguiente resultado nos permite asociar las definiciones 2.2.15 y 2.2.17.

Teorema 2.2.18. Sea $\alpha \geq 0$ y $m = [\alpha]$. Supongamos que $f \in A^m[a, b]$, entonces

$$D_{*a}^\alpha = D_a^\alpha[f - T_{m-1}[f; a]] = \hat{D}_a^\alpha.$$

En este trabajo de tesis trabajaremos únicamente cuando $0 < \alpha < 1$, por lo que $m = 1$. Además utilizando el teorema 2.2.18, tendremos la siguiente definición de la derivada fraccionaria de Caputo.

Definición 2.2.19. La derivada fraccionaria de Caputo para $0 < \alpha < 1$, esta dada por:

$$D_{*a}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \frac{d}{dt}f(t)dt.$$

Ejemplo 2.2.20. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$. Calculemos la derivada fraccionaria de $f(x)$:

$$D_{*a}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{0}{(x-t)^{\alpha}} dt = 0,$$

así,

$$D_{*a}^{\alpha}f(x) = 0.$$

Observemos que, a diferencia de la derivada de Riemann-Liouville 2.2.12, la derivada de Caputo de una función constante es cero. Esta particularidad coincide con el comportamiento de la derivada de orden entero para funciones constantes. Además, esta propiedad es fundamental ya que permite establecer condiciones iniciales bien definidas para las ecuaciones diferenciales fraccionarias de Caputo.

Los siguientes teoremas nos permiten relacionar la importancia de la función Mittag-Leffler 2.2.4 con la derivada fraccionaria de Caputo.

Teorema 2.2.21. Sea $n_1 > 0$, $n_2 = 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definamos

$$f(x) = E_{n_1,1}(\lambda x^{n_1}), \quad x \geq 0.$$

Se cumple,

$$D_{*0}^{n_1}f(x) = \lambda f(x).$$

Teorema 2.2.22. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ y $m = [\alpha]$. La solución del problema con valor inicial,

$$D_{*0}^{\alpha} f(x) = \lambda f(x) + g(x), \quad y(0) = y_0, \quad (2.2.1)$$

donde $g(x) \in C[0, h]$, puede ser expresada en la forma

$$f(x) = y_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}) + \alpha \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}] g(t) dt.$$

2.2.5. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una gran herramienta que sirve para resolver problemas con valores iniciales (PVI) formulados en términos de EDO's, no obstante, veremos que la transformada de Laplace también será de utilidad al momento de resolver PVI en derivada fraccionaria de tipo Caputo .

Definición 2.2.23. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{C}$. Definiremos a la función F :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (2.2.2)$$

como la transformada de Laplace de $f(t)$ siempre que la integral exista.

Para asegurar la existencia de la integral 2.2.2, la función $f(t)$ sea de orden exponencial c , es decir, existen constantes positivas M y T de tal forma que,

$$|f(t)| \leq Me^{ct},$$

para todo $t > T$ ([56]).

A continuación, se presentarán algunas propiedades básicas de la transformada de Laplace ([16], [56]).

1. **Linealidad:**

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)],$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

2. **Transformada de la derivada:**

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

3. **Transformada de la integral:**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)].$$

4. **Desplazamiento en el dominio del tiempo:**

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-as}F(s).$$

5. **Teorema de la convolución:**

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s).$$

En este proyecto de tesis, es de interés para nosotros comprender la relación entre la derivada de Caputo y la transformada de Laplace. A continuación se presenta un resultado que ilustra esta relación, ([16], [17], [56]).

Proposición 2.2.24. *Sea $0 < \alpha \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f(x) \in C^n(\mathbb{R}^+)$ además $f^{(n)}(x) \in L_1(a, b)$. La transformada de Laplace ($F(s)$) y $\mathcal{L}[D^n f(t)]$ existe y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (D^k y)(x) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, n - 1$, entonces la siguiente relación se cumple:*

$$\mathcal{L}\left[D_{*a}^\alpha f\right](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

En particular, si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\mathcal{L}\left[D_{*a}^\alpha f\right](s) = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (2.2.3)$$

Observemos que en 2.2.3 si $\alpha = 1$, entonces obtenemos la definición 2.2.23.

Por último el siguiente resultado describe la conexión entre la función Mittag-Leffler de dos parámetros y la transformada de Laplace, este resultado es una herramienta de gran ayuda para la solución de ciertas clases de ecuaciones diferenciales fraccionarias ([16],[33]).

Teorema 2.2.25. *Sean $p, q > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $f(t) = t^{q-1} E_{p,q}(\lambda t^p)$, entonces la transformada de Laplace de f está dada por:*

$$\mathcal{L}\left[t^{q-1} E_{p,q}(\lambda t^p)\right] = \frac{s^{p-q}}{s^p - \lambda}.$$

En la siguiente sección veremos algunos ejemplos de como utilizar los teoremas anteriores.

2.2.6. Conversión de la derivada de orden entero a orden fraccionario

Como se ha mencionado previamente, algunas aplicaciones ya están modeladas utilizando la derivada fraccionaria de tipo Caputo ([13], [14], [16], [27], [53], [54]). Sin embargo, en otras ocasiones, se lleva a cabo una conversión de ecuaciones de derivadas enteras a ecuaciones de derivadas fraccionarias de tipo Caputo.

Para este propósito, emplearemos un método que convierte ecuaciones de derivadas enteras a ecuaciones de derivadas fraccionarias de Caputo, utilizando el enfoque propuesto por García ([23]). Este método consiste en introducir un parámetro σ con dimensiones apropiadas. Este método será aplicado a los siguientes problemas con condiciones iniciales: el crecimiento bacteriano y la ley de enfriamiento-calentamiento de Newton, los cuales ya están formulados en términos de derivadas de orden entero ([70]).

Crecimiento de bacterias

Para modelar el crecimiento de bacterias se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$DP(t) - kP(t) = 0, \quad (2.2.4)$$

con condición inicial $P(0) = P_0$ y k es la tasa de crecimiento de las bacterias (positiva).

Sea $\sigma = \frac{1}{k}$, $k > 0$.

Luego, haciendo

$$D \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} D_{*0}^\alpha \rightarrow k^{1-\alpha} D_{*0}^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Sustituyendo en 2.2.4, tenemos que

$$k^{1-\alpha} D_{*0}^\alpha P(t) - kP(t) = 0,$$

$$D_{*0}^\alpha P(t) - \frac{k}{k^{1-\alpha}} P(t) = 0,$$

$$D_{*0}^\alpha P(t) - k^\alpha P(t) = 0.$$

Así la ecuación en derivada fraccionaria de tipo Caputo de orden α que modela el crecimiento de bacterias es

$$D_{*0}^{\alpha}P(t) - k^{\alpha}P(t) = 0, \quad (2.2.5)$$

con $0 < \alpha < 1$ y con condición inicial $P(0) = P_0$.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 2.2.5 tenemos que,

$$\mathcal{L}\left[D_{*0}^{\alpha}P(t)\right] - k^{\alpha}\mathcal{L}\left[P(t)\right] = 0$$

Utilizando la proposición 2.2.24 se tiene,

$$\mathcal{L}\left[D_{*0}^{\alpha}P\right] = s^{\alpha}F(s) - s^{\alpha-1}f(0).$$

Luego,

$$\begin{aligned} s^{\alpha}F(s) - s^{\alpha-1}P(0) - k^{\alpha}F(s) &= 0, \\ F(s)(s^{\alpha} - k^{\alpha}) &= s^{\alpha-1}P_0, \\ F(s) &= \frac{s^{\alpha-1}P_0}{s^{\alpha} - k^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Así

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}P_0}{s^{\alpha} - k^{\alpha}}\right].$$

Utilizando el teorema 2.2.25, se tiene que $\beta = 1$ y $\lambda = k^{\alpha}$, por lo tanto

$$P(t) = P_0 E_{\alpha,1}(k^\alpha t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.2.6)$$

donde $E_{\alpha,1}$ es la función Mittag-Leffler.

Si $\alpha = 1$ en 2.2.6, entonces

$$P(t) = P_0 E_{1,1}(kt),$$

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

lo cual es la solución de 2.2.4.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

La ley de enfriamiento/calentamiento está dada por la ecuación diferencial

$$DT(t) = k(T(t) - T_m), \quad (2.2.7)$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ y T_m constante.

Haciendo el mismo procedimiento y suponiendo que T_m es constante se tiene que la ecuación diferencial fraccionaria es:

$$D_{*0}^\alpha T(t) = k^\alpha (T(t) - T_m), \quad (2.2.8)$$

con $0 < \alpha < 1$ y con condición inicial $T(0) = T_0$.

Observemos que la ecuación diferencial 2.2.8 se presenta en la misma forma que se describe en el Teorema 2.2.1, al hacer $f(t) = T(t)$, $g(t) = -k^\alpha T_m$, y $\lambda = k^\alpha$. De esta manera, podemos aplicar el Teorema 2.2.22, obteniendo la siguiente solución:

$$T(t) = T_0 E_{\alpha,1}(k^\alpha t^\alpha) - \alpha k^\alpha T_m \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[k^\alpha (t-s)^\alpha], \quad (2.2.9)$$

con $0 < \alpha \leq 1$.

Observemos que si $\alpha = 1$ en 2.2.9, se tiene:

$$\begin{aligned} T(t) &= T_0 e^{kt} - k T_m \int_0^t e^{k(t-s)} ds, \\ &\vdots = T_0 e^{kt} - k T_m, \left[\frac{e^{kt} - 1}{k} \right], \\ &\vdots = T_m + (T_0 - T_m) e^{kt}, \end{aligned}$$

la cual es la solución en orden entero de 2.2.7.

2.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias

En este proyecto de tesis, nuestro objetivo principal es explorar las definiciones y algunos resultados relacionados con la formulación de sistemas de ecuaciones fraccionarias, específicamente del tipo Caputo. Varios de los autores hacen uso del sistema fraccionario de tipo Caputo para modelar diferentes aplicaciones ([2], [5], [4], [8], [9], [19], [22], [25], [37], [38], [45], [69]). Nos centraremos en un sistema definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_{*0}^\alpha \mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Donde \mathbf{f} es un campo vectorial, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y \mathbf{f} cumple con las propiedades de la definición 2.2.19.

Los puntos de equilibrio y la matriz jacobiana son conceptos clave en el análisis de sistemas dinámicos fraccionarios, proporcionando una base fundamental para comprender la estabilidad y el comportamiento local de estos sistemas complejos y persistentes en el tiempo. A continuación presentaremos la definición de punto de equilibrio ([50], [51]).

Definición 2.3.1. Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto de equilibrio o punto crítico del sistema

$$D_{*0}^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.3.2)$$

si,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

En cambio para la definición de matriz jacobiana la definición es similar a la mostrada en 2.1.16 ([3], [8], [49], [59]).

2.3.1. Existencia y unicidad

En esta sección se mostrara un resultado ([8], [35]) que asegura la existencia y unicidad de soluciones para problemas con condiciones iniciales formulados en términos de la derivada fraccional de Caputo, según se describe en el sistema fraccional 2.3.1.

Teorema 2.3.2. Sea B un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n . Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que $\mathbf{f} \in C^1(B)$. Además $\mathbf{f} \in L_1([t_0 - a, t_0 + a])$ y

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq w + v\|\mathbf{x}\|,$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $w > 0$ y $v > 0$, entonces existe una función $\mathbf{x}(t)$ en $(-\infty, +\infty)$ que resuelve el problema con valor inicial 2.3.1.

Observación 2.3.3. Además de las hipótesis hechas en el teorema 2.3.2, se supone además que $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es continua respecto a cada elemento de \mathbf{x} . Entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ en \mathbb{R}^n que resuelve el problema con valor inicial 2.3.1, no solo existe, sino que además es única.

Observemos que, a diferencia del teorema de existencia y unicidad para el caso entero 2.1.14, el cual garantiza la existencia y unicidad local de la solución, el teorema anterior

nos permite afirmar la existencia y unicidad global de la solución del sistema fraccionario. La demostración de este teorema se puede encontrar en ([35]).

2.3.2. Criterio de estabilidad

Al momento de realizar un análisis cualitativo de un sistema de orden entero la mayoría de las veces requerimos conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema a nivel local, para esto muchas veces se requiere del criterio de Routh-Hurwitz el cual se mostró anteriormente 2.1.19, en esta parte de la tesis, se mostrará una generalización del criterio de Routh-Hurwitz propuesto por Ahmed ([4], [49]) para sistemas de orden fraccionario de tipo Caputo.

Antes de mostrar este resultado definiremos el sistema lineal referente al sistema 2.3.1, es decir,

$$D_{*0}^{\alpha} \mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad (2.3.3)$$

con $0 < \alpha < 1$ y $A = J(\mathbf{x}_0)$. Donde J es la matriz jacobiana definida en 2.1.16 ([3],[8], [49]). Observemos que el sistema lineal fraccionario 2.3.3 es similar definido para derivada de orden entera 2.1.4. Una vez definido el sistema lineal fraccionario se presentara un teorema para mostrar la estabilidad local de dicho sistema ([41]).

Teorema 2.3.4. *El sistema 2.3.3 es localmente asintóticamente estable si y solo si*

$$|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2},$$

donde λ corresponde a los valores propios de la matriz A .

El resultado anterior nos da una condición importante para conocer la estabilidad de un sistema, pero nos hace preguntarnos sobre cuales son las condiciones para que todas

las raíces del polinomio característico de

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + a_0 = 0,$$

cumplan $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, donde los coeficientes del polinomio característico sean reales.

Notemos que para $\alpha = 1$ obtenemos la estabilidad asintótica por el criterio de Routh-Hurwitz visto en [2.1.2]. Pero para $\alpha \in (0, 1)$ estas condiciones pueden llegar a ser suficientes, pero no del todo necesarias ([4]).

Para lograr esto se mostrara un criterio de Routh-Hurwitz para sistemas de orden fraccionario, a continuación daremos la definición de discriminante de un polinomio que utilizaremos más adelante.

Definición 2.3.5. Sea $f(x)$ un polinomio de la forma,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0,$$

y

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \cdots + a_1,$$

su derivada. Definimos por Δ al discriminante del polinomio $f(x)$ de la siguiente manera:

$$\Delta = \frac{(-1)^{n(\frac{n-1}{2})}}{a_n} R(f, f'),$$

donde $R(f, f')$ es el determinante de la matriz de Sylvester ([6]) de tamaño $(2n-1) \times$

$(2n - 1)$.

La matriz de Sylvester es una matriz de dimensiones $(m + n) \times (m + n)$ esta matriz se construye comenzando desde la esquina superior izquierda con los coeficientes de $f(x)$, luego desplazándose hacia abajo una fila y una columna hacia la derecha y llenando los coeficientes a partir de allí hasta llegar al lado derecho. Luego, el proceso se repite para los coeficientes de $f'(x)$, su notación es $S(f, f')$ ([6]).

El uso del discriminante es de mucha ayuda ya que en base a él podemos conocer si las raíces de nuestro polinomio son reales o complejas, es decir, si $\Delta > 0$ ($\Delta < 0$), entonces hay un número par (impar) de raíces reales para la ecuación $f(x) = 0$ ([4],[34]).

En los siguientes ejemplos obtendremos la matriz de Sylvester, así como su discriminante para un polinomio de grado 2 y 3 respectivamente.

Ejemplo 2.3.6. Sea $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio de grado 2 con coeficientes reales, la matriz de Sylvester correspondiente a $p(x)$ y $p'(x)$ es:

$$S(p, p') = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

el discriminante de este polinomio está dado por:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0.$$

- Si $\Delta > 0$, entonces tiene dos raíces reales.

- Si $\Delta < 0$, entonces tiene dos raíces complejas.

Ejemplo 2.3.7. Sea $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio de grado 3 con coeficientes reales, la matriz de Sylvester correspondiente a $p(x)$ y $p'(x)$ es:

$$S(p, p') = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

el discriminante de este polinomio está dado por:

$$\Delta = a_2^2 a_1^2 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 a_0 - 27a_3^2 a_0^2 + 18a_3 a_2 a_1 a_0.$$

- Si $\Delta > 0$, entonces tiene tres raíces reales.
- Si $\Delta < 0$, entonces tiene una raíz real y dos raíces complejas.

Dada la definición anterior podemos presentar la siguiente proposición, en el cual se nos darán mas condiciones para asegurar la estabilidad local del sistema 2.3.3, esta proposición puede encontrarse en ([4], [49]).

Proposición 2.3.8. *Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de grado $n > 3$ del sistema 2.3.3, sea \mathbf{x}_0 un punto de equilibrio del sistema 2.3.1. Sea $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *Para $n = 3$, si el discriminante Δ es positivo, entonces las condiciones del criterio de Routh-Hurwitz 2.1.19 son necesarias y suficientes, entonces \mathbf{x}_0 es asintóticamente localmente estable.*
2. *Si $\Delta < 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_0 > 0$ y $\alpha < \frac{2}{3}$, entonces \mathbf{x}_0 es asintóticamente localmente estable.*

3. Si $\Delta < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$, $\alpha > \frac{2}{3}$, entonces todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ satisfacen la condición de estabilidad $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
4. Si $\Delta < 0$, $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ y $a_2 a_1 = a_0$ entonces \mathbf{x}_0 es asintóticamente localmente estable. para todo $\alpha \in (0, 1)$.
5. Para n en general, una condición necesaria para que \mathbf{x}_0 sea asintóticamente localmente estable es $a_n > 0$.

La demostración de esta proposición la podemos encontrar en ([4]), el uso de esta proposición va a ser de gran ayuda para cuando se quiera verificar la estabilidad del sistema *SIRS* que se encuentra modelado en derivadas de orden fraccionario de tipo Caputo, además que nos permite saber si el sistema es estable para todo $\alpha \in (0, 1)$ o para un valor específico de α .

2.3.3. Conversión de sistemas

En esta sección daremos un primer enfoque respecto a la conversión de derivada de orden entera a derivada fraccionaria de tipo Caputo de nuestro modelo *SIRS* (1.4.2) y trataremos de resolver un problema de dimensionalidad a través de dos métodos.

En una primera instancia al momento de realizar una conversión pensaríamos que basta con solo cambiar los operadores diferenciales de orden entero al operador diferencial de tipo Caputo, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{*0}^\alpha S = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ D_{*0}^\alpha I = \beta \frac{SI}{N} - (k + \mu + f)I, \\ D_{*0}^\alpha R = kI - (\mu + \gamma)R. \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

Podemos notar que el sistema 2.3.4 es técnicamente inconsistente, esto debido a que las dimensiones del lado izquierdo de las ecuaciones tienen dimensión $(tiempo)^{-\alpha}$, mientras que en el lado derecho tienen la dimensión $tiempo^{-1}$, para resolver este problema de dimensiones, veremos dos métodos que nos ayudarán a dimensionar el sistema.

Para el primer método ([8],[15]) reemplazaremos cada derivada de orden entero en el sistema por la derivada fraccionaria de tipo Caputo de orden α . A continuación para conservar la dimensionalidad de ambos lados de las ecuaciones reemplazaremos cada parámetro $*$ por $*^\alpha$. Por lo que el sistema *SIRS* en derivada fraccionaria de Caputo está dado por el siguiente sistema no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{*0}^\alpha S = \Lambda^\alpha - \beta^\alpha \frac{SI}{N} - \mu^\alpha S + \gamma^\alpha R, \\ D_{*0}^\alpha I = \beta^\alpha \frac{SI}{N} - (k^\alpha + \mu^\alpha + f^\alpha)I, \\ D_{*0}^\alpha R = k^\alpha I - (\mu^\alpha + \gamma^\alpha)R. \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

Para el segundo método ([8], [59]), resolveremos el problema de inconsistencia de las dimensiones de ambos lados de las ecuaciones del sistema, primero reemplazaremos cada derivada de orden entero por la derivada fraccionaria de tipo Caputo, después multiplicaremos en el lado izquierdo de la ecuación por $\tau^{\alpha-1}$, donde τ es una constante de tiempo utilizada para balancear las unidades. Por lo que el sistema se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{\alpha-1} D_{*0}^\alpha S = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ \tau^{\alpha-1} D_{*0}^\alpha I = \beta \frac{SI}{N} - (k + \mu + f)I, \\ \tau^{\alpha-1} D_{*0}^\alpha R = kI - (\mu + \gamma)R. \end{array} \right. \quad (2.3.6)$$

En este proyecto de tesis utilizaremos y estudiaremos en la siguiente sección el modelo 2.3.6, ya que en ([49]) se ha estudiado el modelo 2.3.5.

Capítulo 3

Análisis del modelo *SIRS*

En este capítulo realizaremos el análisis de los puntos críticos del sistema *SIRS* en derivada de orden entero 1.4.2 como en derivada de orden fraccionaria de tipo Caputo 2.3.6, así como su comportamiento y estabilidad. Además de que los conceptos de epidemiología y matemáticas de los capítulos 1 y 2 se utilizan ampliamente en este capítulo.

3.1. Análisis del modelo *SIRS* en derivada de orden entero

El modelo *SIRS* a trabajar se encuentra modelado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ I' = \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I, \\ R' = \kappa I - (\mu + \gamma)R. \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Con $N = S + I + R$. y con condiciones iniciales $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$.

Veamos la dinámica de la población

$$\begin{aligned}
 N' &= (S + I + R)', \\
 &= S' + I' + R', \\
 &= \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R + \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I + kI - (\mu + \gamma)R, \\
 &\vdots \\
 &= \kappa I - (\mu + \gamma)R.
 \end{aligned}$$

Dado que $N = S + I + R$, entonces se tiene:

$$N' = \Lambda - \mu N - fI. \quad (3.1.2)$$

Notemos que en la parte derecha de la ecuación 3.1.2 no es cero, por lo que la población puede ir variando a través del tiempo. Además la existencia y unicidad de la solución viene dada por el teorema 2.1.14, debido a que las funciones son continuas y diferenciables sobre (S, I, R) .

Para la obtención de los puntos críticos, se iguala a cero cada una de las ecuaciones del sistema 3.1.1.

$$\begin{aligned}
 \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R &= 0, \\
 \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I &= 0, \\
 \kappa I - (\mu + \gamma)R &= 0.
 \end{aligned}$$

Obteniendo así, los siguientes puntos críticos:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right), \\
 E_1 &= (S^*, I^*, R^*).
 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

donde

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\Lambda(f + \kappa + \mu)(\gamma + \kappa + \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}, \\
I^* &= \frac{\Lambda(\gamma + \mu)(\beta - f - \kappa - \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}, \\
R^* &= \frac{\Lambda\kappa(\beta - f - \kappa - \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}.
\end{aligned}$$

Observación 3.1.1. *Observemos que E_0 es un punto crítico libre de enfermedad, ya que la segunda componente es cero, mientras que E_1 es un punto crítico endémico, pues la segunda y tercera componente son distintas de la trivial.*

Observación 3.1.2. *Notemos que el criterio de positividad de las coordenadas del punto crítico E_1 es:*

- $S^* > 0$:

$$\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) > f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu).$$

- $I^* > 0$ y $R^* > 0$:

$$\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) > f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu),$$

$$\beta > f + \kappa + \mu.$$

3.1.1. Número reproductivo básico (R_0)

Ocuparemos el método de la matriz de siguiente generación utilizado en ([12]) para obtener el número reproductivo básico del modelo *SIRS* del sistema 3.1.1.

Escogemos el compartimiento de los infectados del sistema *SIRS*

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (k + \mu + f)I. \quad (3.1.4)$$

Se obtienen los siguientes vectores \mathcal{F} y \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left[\beta \frac{SI}{N} \right], \\ \mathcal{V} &= \left[(\kappa + \mu + f)I \right], \end{aligned}$$

dado que $N = S + I + R$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left[\beta \frac{SI}{S + I + R} \right], \\ \mathcal{V} &= \left[(\kappa + \mu + f)I \right], \end{aligned}$$

derivamos respecto a I y obtenemos:

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{\beta S(S + R)}{(S + I + R)^2} \right], \\ V &= \left[\kappa + \mu + f \right]. \end{aligned}$$

Evaluamos en el punto crítico donde la población se encuentre libre de la enfermedad, en este caso es el punto $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$. Luego,

$$\begin{aligned} F &= \beta, \\ V &= \kappa + \mu + f. \end{aligned}$$

Así, el número reproductivo básico respecto al sistema 3.1.1 es

$$R_0 = FV^{-1} = \frac{\beta}{\kappa + \mu + f}. \quad (3.1.5)$$

3.1.2. Análisis de sensibilidad de R_0

El análisis de sensibilidad estudia la variación de las salidas de un modelo en base a los datos de entrada ([43]). Además investiga la dependencia de los resultados en los valores de los parámetros, así como sus condiciones iniciales ([1]).

Para conocer la sensibilidad del número reproductivo R_0 , haremos un análisis de sensibilidad local en el cual calcularemos el índice de sensibilidad de cada parámetro P en función a cada variable de estado.

Definición 3.1.3. ([1], [58]) *El análisis de sensibilidad se realiza por medio del método de coeficientes de sensibilidad local normalizados, el cual consiste en calcular el Índice de sensibilidad (Índice de eficacia) Ω de cada parámetro P en función a cada variable del estado R_0 . El índice mencionado anteriormente está dado por:*

$$\Omega_P^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial P} \cdot \frac{P}{R_0}, \quad (3.1.6)$$

donde R_0 es la variable a analizar y P es el parámetro.

El índice de sensibilidad se utilizará para determinar el impacto de cada parámetro en la epidemia de una enfermedad permitiendo tomar medidas para controlar su propagación. El índice de sensibilidad de cada parámetro se deriva desde R_0 3.1.5 usando la definición 3.1.3 anterior. En la siguiente tabla 3.1.1 podemos encontrar el índice de sensibilidad de

cada parámetro.

| Parámetro | Índice de sensibilidad |
|-----------|--|
| β | $\Omega_{\beta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \cdot \frac{\beta}{R_0} = 1$ |
| κ | $\Omega_{\kappa}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \kappa} \cdot \frac{\kappa}{R_0} = -\frac{\kappa}{\kappa + \mu + f}$ |
| μ | $\Omega_{\mu}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu}{R_0} = -\frac{\mu}{\kappa + \mu + f}$ |
| f | $\Omega_f^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial f} \cdot \frac{f}{R_0} = -\frac{f}{\kappa + \mu + f}$ |

Tabla 3.1.1: Índice de sensibilidad de cada parámetro respecto R_0

Dada las hipótesis de los parámetros 1.4.2, se tiene que el parámetro β tienen un índice de sensibilidad positivo, mientras que los parámetros μ, κ y f tienen un índice de sensibilidad negativo. El índice de sensibilidad positivo indica que el aumento en el número reproductivo básico es significativo, como resultado aumentar (o disminuir) el valor del parámetro, mientras se mantienen constantes el valor de los otros parámetros conducirá a un aumento de R_0 . Los índices de sensibilidad negativo indican que el aumento en el número reproductivo básico tiene un significado negativo, es decir, incrementar (o reducir) el valor de los parámetros, mientras los otros parámetros permanecen constantes resultará en disminuciones (o aumentos) en R_0 .

3.1.3. Estabilidad local del modelo *SIRS*

En esta sección vamos a conocer la estabilidad de los puntos críticos del sistema *SIRS* encontrados anteriormente 3.1.3, además de la relación del número reproductivo básico con el punto de equilibrio libre de enfermedad.

Teorema 3.1.4. *El punto de equilibrio E_0 (libre de enfermedad) del modelo SIRS 3.1.1 es localmente asintóticamente estable si $R_0 < 1$.*

Demostración. Para conocer la estabilidad del punto crítico E_0 , linealizaremos el sistema 3.1.1. La matriz jacobiana del sistema $SIRS$ está dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I(I+R)}{(S+I+R)^2} & -\frac{\beta S(S+R)}{(S+I+R)^2} & \gamma + \frac{\beta SI}{(S+I+R)^2} \\ \frac{\beta I(I+R)}{(S+I+R)^2} & \frac{\beta S(S+R)}{(S+I+R)^2} - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}, \quad (3.1.7)$$

evaluando en el punto crítico E_0 , obtenemos

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & \gamma \\ 0 & \beta - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}. \quad (3.1.8)$$

El polinomio característico respecto a la matriz $J(E_0)$ es

$$p(\lambda) = (\mu + \lambda)((\mu + \gamma) + \lambda)(\beta - (\kappa + \mu + f) - \lambda).$$

Para obtener los valores propios igualamos a cero el polinomio anterior obteniendo así las siguientes raíces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= -(\mu + \gamma). \end{aligned}$$

Observemos que en base a las descripciones de los valores de los parámetros del modelo mostradas en la tabla 1.4.2, los dos valores propios de la matriz 3.1.8 son menores que cero, mientras que para el tercer valor propio de la matriz se tiene:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \beta - (\kappa + \mu + f), \\
&= (\kappa + \mu + f) \left(\frac{\beta}{\kappa + \mu + f} - 1 \right), \\
&= (\kappa + \mu + f) (R_0 - 1).
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$ si $R_0 < 1$. Por lo tanto E_0 es localmente asintóticamente estable. ■

A continuación, revisemos la estabilidad local del punto de equilibrio E_1 . La matriz jacobiana del sistema 3.1.1 evaluado en E_1 , se da de la siguiente manera:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & -\frac{\beta S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \gamma + \frac{\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\ \frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \frac{\beta S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz $J(E_1)$ es el siguiente:

$$\lambda^3 + s_1 \lambda^2 + s_2 \lambda + s_3 = 0, \quad (3.1.9)$$

donde,

$$s_1 = \frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + 2\mu + \gamma,$$

$$\begin{aligned}
s_2 &= \frac{\beta^2 I^* S^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\beta^2 S^* I^{*2} (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{f \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\
&+ \frac{\mu \beta I^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{2\mu \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\gamma \beta (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\
&+ \frac{\gamma \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \mu \gamma + \mu^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{\mu \beta^2 S^* I^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\gamma \beta^2 S^* I^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} \\
&+ \frac{\mu \beta^2 I^{*2} S^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\gamma \beta^2 I^{*2} S^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} \\
&+ \frac{f \mu \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\gamma \mu \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\
&- \frac{f \gamma \beta I^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\mu^2 \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz 2.1.19, podemos verificar que el punto crítico (E_1) es localmente asintóticamente estable si $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$ y $s_1 \cdot s_2 > s_3$.

3.2. Análisis del Modelo *SIRS* en derivada de orden fraccionaria

En esta sección, llevaremos a cabo un análisis análogo al modelo *SIRS* 3.1 formulado en derivada de orden entero, con el propósito de identificar el número reproductivo básico (R_0), los puntos críticos y conocer la estabilidad local del sistema *SIRS* expresado mediante la derivada fraccionaria de Caputo. Este estudio se basará en el modelo formulado

en la sección 2.3.6, ya que el modelo presentado en la sección 2.3.5 ha sido previamente analizado en referencia ([49]). El modelo *SIRS* viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} S = \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R, \\ \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} I = \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f) I, \\ \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} R = \kappa I - (\mu + \gamma) R. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Con $N = S + I + R$, $\tau \in (0, 1)$ y $\alpha \in (0, 1)$ y con condiciones iniciales $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$.

A continuación, realizaremos un análisis para conocer la dinámica del sistema 3.2.1.

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} N &= \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} (S + I + R), \\ &= \tau^{\alpha-1} (D_{*0}^{\alpha} S + D_{*0}^{\alpha} I + D_{*0}^{\alpha} R), \\ &= (\tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} S + \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} I + \tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} R), \\ &= \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \gamma R + \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f) I + \kappa I - (\mu + \gamma) R, \quad (3.2.2) \\ &\vdots \\ &= \Lambda - \mu(S + I + R) - fI. \end{aligned}$$

Dado que $N = S + I + R$, se sigue que,

$$\tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} N = \Lambda - \mu N - fI.$$

Notemos que la parte derecha de la ecuación anterior no es cero, por lo que la población puede variar conforme pasa el tiempo. La existencia y unicidad de la solución del sistema

esta dado por el teorema 2.3.2.

Para determinar los puntos de equilibrio del sistema 3.2.1, resolveremos las siguientes ecuaciones:

$$\tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}S = \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I = \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}R = 0.$$

Notemos que los puntos críticos son los mismos que en el caso de orden entero, es decir,

$$\begin{aligned} E_0^* &= \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right), \\ E_1^* &= (S^*, I^*, R^*). \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda(f + \kappa + \mu)(\gamma + \kappa + \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}, \\ I^* &= \frac{\Lambda(\gamma + \mu)(\beta - f - \kappa - \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}, \\ R^* &= \frac{\Lambda\kappa(\beta - f - \kappa - \mu)}{\beta(f(\gamma + \mu) + \mu(\gamma + \kappa + \mu)) - f(\gamma + \mu)(f + \kappa + \mu)}. \end{aligned}$$

3.2.1. Número reproductivo básico (R_0^α) del sistema *SIRS* fraccionario

Para obtener el número reproductivo básico para el sistema *SIRS* fraccionario se adoptará un enfoque diferente al descrito en la sección 3.1.1. Abordaremos una metodología alternativa para calcular este parámetro clave dentro de este nuevo contexto fraccionario.

Para ello utilizaremos la ecuación que describe el comportamiento de los infectados del sistema *SIRS* fraccionario, dicha ecuación se presenta de la siguiente manera:

$$\tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I = \beta\frac{SI}{N} - (\kappa + \mu + f)I.$$

Dado que queremos conocer el comportamiento del número reproductivo básico, vamos a analizar las condiciones iniciales al comienzo de la pandemia, tomando como condición inicial $I(0) = I_0 = 1$. Así, observemos que, $N \approx S$, lo que nos lleva a obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I(0) &= \beta\frac{S}{N} - (\kappa + \mu + f), \\ \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I_0 &= \beta\frac{N}{N} - (\kappa + \mu + f), \\ \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I_0 &= \beta - (\kappa + \mu + f), \\ \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I_0 &= (\kappa + \mu + f)\left(\frac{\beta}{\kappa + \mu + f} - 1\right), \\ \tau^{\alpha-1}D_{*0}^{\alpha}I_0 &= (\kappa + \mu + f)\left(\frac{\beta}{\kappa + \mu + f} - 1\right), \\ D_{*0}^{\alpha}I_0 &= \tau^{1-\alpha}(\kappa + \mu + f)(R_0^{\alpha} - 1),\end{aligned}$$

donde

$$R_0^{\alpha} = \tau^{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{\kappa + \mu + f}\right),$$

es el número reproductivo básico para el sistema *SIRS* fraccionario. Observemos que cuando α es igual a 1 el número reproductivo básico fraccionario es igual al número reproductivo básico encontrado anteriormente 3.1.5, es decir:

$$R_0^1 = R_0.$$

3.2.2. Estabilidad local del modelo *SIRS* fraccionario

De manera análoga a la sección 3.1.3, vamos a estudiar la estabilidad local de los puntos críticos del sistema *SIRS* fraccionario, además que se mostrará un resultado similar al teorema para conocer el comportamiento de la estabilidad del punto crítico E_0^* con el número reproductivo básico fraccionario.

Teorema 3.2.1. *El punto de equilibrio E_0^* (libre de enfermedad) del modelo SIRS 3.2.1 es localmente asintóticamente estable si $R_0 < \tau^{(1-\alpha)}$.*

Demostración. El método a ocupar es similar al visto en el teorema, en base a eso, la matriz jacobiana del sistema *SIRS* fraccionario es:

$$J = \tau^{(1-\alpha)} \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I(I+R)}{(S+I+R)^2} & -\frac{\beta S(S+R)}{(S+I+R)^2} & \gamma + \frac{\beta SI}{(S+I+R)^2} \\ \frac{\beta I(I+R)}{(S+I+R)^2} & \frac{\beta S(S+R)}{(S+I+R)^2} - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Evaluando en el punto crítico E_0^* , se obtiene

$$J(E_0) = \tau^{(1-\alpha)} \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & \gamma \\ 0 & \beta - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

El polinomio característico respecto a la matriz $J(E_0^*)$ es:

$$p(\lambda) = (\tau^{(1-\alpha)}\mu + \lambda)(\tau^{(1-\alpha)}(\mu + \gamma) + \lambda)(\tau^{(1-\alpha)}(\beta - (\kappa + \mu + f)) - \lambda).$$

Para obtener los valores propios igualamos a cero el polinomio anterior obteniendo así las siguientes raíces:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\tau^{(1-\alpha)}\mu, \\ \lambda_2 &= -\tau^{(1-\alpha)}(\mu + \gamma).\end{aligned}$$

Observemos que, dado las hipótesis del modelo 1.4.2, los dos valores propios de la matriz 3.2.4 son menores que cero, mientras que para el tercer valor propio de la matriz se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \tau^{(1-\alpha)}[\beta - (\kappa + \mu + f)], \\ &= \tau^{(1-\alpha)}\left[(\kappa + \mu + f)\left(\frac{\beta}{\kappa + \mu + f} - 1\right)\right], \\ &= \tau^{(1-\alpha)}(\kappa + \mu + f)\left(R_0^\alpha - \tau^{(1-\alpha)}\right).\end{aligned}$$

Observemos que los valores propios $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ cumplen 2.3.4, siempre que se cumplan las condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de la matriz $J(E_0^*)$ ([49]). De lo anterior se concluye que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$ si $R_0 < \tau^{(1-\alpha)}$. Por lo tanto E_0^* es localmente asintóticamente estable. ■

A continuación, revisemos la estabilidad local del punto de equilibrio E_1^* . La matriz jacobiana del sistema 3.2.1 evaluado en E_1^* , se da de la siguiente manera:

$$J(E_1^*) = \tau^{(1-\alpha)} \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & -\frac{\beta S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \gamma + \frac{\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\ \frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \frac{\beta S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} - (\kappa + \mu + f) & 0 \\ 0 & \kappa & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz $J(E_1^*)$ es el siguiente:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + s_1 \lambda^2 + s_2 \lambda + s_3 = 0, \quad (3.2.5)$$

donde,

$$s_1 = \tau^{1-\alpha} \left[\frac{\beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + 2\mu + \gamma \right],$$

$$s_2 = \tau^{2(1-\alpha)} \left[\frac{\beta^2 I^* S^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\beta^2 S^* I^{*2} (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{f \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \right. \\ \left. + \frac{\mu \beta I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{2\mu \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\gamma \beta (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} \right. \\ \left. + \frac{\gamma \beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \mu \gamma + \mu^2 \right],$$

$$\begin{aligned}
s_3 = & \tau^{3(1-\alpha)} \left[\frac{\mu\beta^2 S^* I^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\gamma\beta^2 S^* I^* (I^* + R^*) (S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} \right. \\
& + \frac{\mu\beta^2 I^{*2} S^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} + \frac{\gamma\beta^2 I^{*2} S^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^4} \\
& + \frac{f\mu\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\gamma\mu\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\
& \left. - \frac{f\gamma\beta I^* (I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \frac{\mu^2\beta S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \right].
\end{aligned}$$

Sea Δ el discriminante de una función polinómica q dada por:

$$q(x) = x^3 + s_1 x^2 + s_2 x + s_3,$$

por el ejemplo 2.3.7 sabemos que su discriminante es:

$$\Delta = 18s_1 s_2 s_3 + (s_1 s_2)^2 - 4s_3 s_1^2 - 4s_2^2 - 27s_3^2.$$

Para determinar la estabilidad del punto crítico E_1^* , haremos uso de la proposición 2.3.8 previamente estudiada en ([4], [49]), la cual se basa en el uso del discriminante Δ y el polinomio característico 3.2.5. Esta proposición nos brinda un enfoque sólido para evaluar la estabilidad del sistema fraccionario en relación con el punto crítico.

Capítulo 4

Simulación del modelo *SIRS*

En este capítulo, llevaremos a cabo una simulación del modelo *SIRS* con derivada fraccionaria de Caputo, contrastándolo con la simulación clásica del modelo *SIRS* específicamente aplicado a la región de la Heroica Ciudad de Huajuapán de León en el estado de Oaxaca. Para lograr esto, emplearemos un método numérico centrado en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, el método de Euler ([10], [47]). Nuestro propósito será obtener una aproximación numérica del modelo *SIRS*.

Para realizar dicho análisis, se emplearán datos obtenidos de la Secretaría de Salud de México como fuente de consulta ([64]), los cuales serán utilizados en este estudio. Específicamente, se considerarán los datos recopilados antes del inicio de la campaña de vacunación aplicada en la región seleccionada. Este período abarca desde el 12 de abril de 2020 hasta el 7 de mayo de 2021 ([28]). La información recolectada se encuentra detallada y estructurada en semanas en la tabla 4.0.1, siendo fundamental para el análisis y la modelización de este estudio.

4.1. Obtención de parámetros del sistema *SIRS*

Para llevar a cabo este estudio, se llevarán a cabo dos análisis fundamentales. En primer lugar, se realizará una búsqueda y análisis exhaustivo de los valores de los parámetros proporcionados por las autoridades correspondientes, tales como la Organización Mundial de la Salud (OMS), el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), entre otros referente a la COVID-19. Este enfoque permitirá una evaluación de los datos oficiales y su impacto en el modelo *SIRS* que estamos considerando.

En segundo lugar, se llevará a cabo un análisis más detallado, centrado en la búsqueda

| Semana | Casos | Semana | Casos | Semana | Casos | Semana | Casos |
|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| 1 | 1 | 15 | 48 | 29 | 53 | 43 | 72 |
| 2 | 4 | 16 | 46 | 30 | 24 | 44 | 66 |
| 3 | 3 | 17 | 28 | 31 | 37 | 45 | 25 |
| 4 | 5 | 18 | 25 | 32 | 14 | 46 | 51 |
| 5 | 3 | 19 | 39 | 33 | 9 | 47 | 82 |
| 6 | 16 | 20 | 27 | 34 | 20 | 48 | 58 |
| 7 | 3 | 21 | 42 | 35 | 34 | 49 | 43 |
| 8 | 10 | 22 | 20 | 36 | 46 | 50 | 19 |
| 9 | 30 | 23 | 37 | 37 | 17 | 51 | 23 |
| 10 | 23 | 24 | 31 | 38 | 19 | 52 | 24 |
| 11 | 29 | 25 | 52 | 39 | 84 | 53 | 15 |
| 12 | 47 | 26 | 34 | 40 | 78 | 54 | 5 |
| 13 | 47 | 27 | 22 | 41 | 123 | 55 | 4 |
| 14 | 31 | 28 | 29 | 42 | 87 | 56 | 7 |

Tabla 4.0.1: Datos de casos confirmados (infectados) para la región de Huajuapán de León en Semanas.

de parámetros que se ajusten de manera óptima al sistema *SIRS*. Este enfoque implica la identificación de valores específicos que proporcionen una representación precisa y efectiva del comportamiento del modelo en la región estudiada. La combinación de ambos análisis busca ofrecer una perspectiva integral y robusta sobre la dinámica del sistema *SIRS* en relación con los datos proporcionados por las autoridades competentes.

4.1.1. Caso 1

La población de Huajuapán de León, Oaxaca, en el año 2020 ascendía a 78,313 habitantes, según datos proporcionados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Tomando como referencia la información de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se establece que el tiempo de recuperación para una persona infectada con COVID-19 es de 14 días, el periodo de pérdida de inmunidad es de 8 meses, y la tasa de mortalidad en Huajuapán de León, Oaxaca se sitúa en 4.92 por cada 1,000 personas.

Para determinar los parámetros restantes, hemos empleado el método `minimize` del módulo `scipy.optimize` del software libre Python, la cual implementa el algoritmo de optimización Nelder-Mead ([20], [63]). La función objetivo se basa en la técnica de mínimos cuadrados, buscando minimizar el error con respecto a los datos reales. A través de este método, hemos obtenido los siguientes valores para los parámetros, los cuales minimizan la discrepancia entre el modelo y los datos observados.

Un resumen de estos datos se presenta en la siguiente tabla 4.1.1. Este enfoque nos permite ajustar los parámetros del modelo SIRS de manera precisa, proporcionando una representación más acertada de la dinámica epidemiológica en Huajuapán de León con respecto al COVID-19.

| Parámetro | Descripción del parámetro | Valor |
|-----------|--|--|
| Λ | Tasa promedio de inmigración | $0.09349 \text{ semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| β | Tasa de contagio | $0.74238 \text{ semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| γ | Tasa de pérdida de inmunidad | $0.02887 \text{ semanas}^{-1}$ |
| κ | Tasa de recuperación de los infectados | 0.5 semanas^{-1} |
| μ | Tasa promedio de defunciones | $0.00977 \text{ semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| f | Tasa de Mortalidad | $0.00492 \text{ semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |

Tabla 4.1.1: Valores de los parámetros.

En base a los valores de los parámetros obtenidos podemos calcular el índice de sensibilidad de cada uno de los parámetros respecto a R_0 3.1.1.

A través del análisis de sensibilidad local, identificamos que los parámetros que ejercen una mayor influencia en el comportamiento del número reproductivo son la tasa de contagio (β) y la tasa de recuperación de los infectados (κ). Al aumentar la tasa de contagio,

| Parámetro | Índice de sensibilidad |
|-----------|-------------------------------------|
| β | $\Omega_{\beta}^{R_0} = 1$ |
| κ | $\Omega_{\kappa}^{R_0} = -0.971458$ |
| μ | $\Omega_{\mu}^{R_0} = -0.018982$ |
| f | $\Omega_f^{R_0} = -0.009559$ |

Tabla 4.1.2: Índice de sensibilidad de cada parámetro respecto R_0 .

observamos un incremento en el número reproductivo básico, indicando una mayor capacidad de propagación de la infección. Por otro lado, al incrementar la tasa de recuperación de los infectados, observamos una disminución en el número reproductivo básico, lo que sugiere una reducción en la capacidad de transmisión de la enfermedad. Por otro lado la tasa promedio de defunciones (μ) y la tasa de mortalidad (f) no influyen significativamente en el comportamiento de R_0 , su aumento conlleva una disminución en el mismo.

Ahora procederemos a calcular el número reproductivo básico tanto para el orden entero como para el orden fraccional. En este análisis, hemos seleccionado un valor de $\tau = 0.99$ y diferentes valores de α en el caso fraccional. Estos valores se pueden consultar en la tabla 4.1.3.

Observemos que, el número reproductivo básico (R_0) es mayor que 1 y para el caso fraccional (R_0^α) es mayor que $\tau^{1-\alpha}$. Esta situación implica que, en términos promedio, cada persona infectada está contribuyendo a la transmisión de la enfermedad a más de un individuo. Este escenario señala la capacidad de la enfermedad para propagarse dentro de la población (Heroica Ciudad de Huajuapán de León). Es importante resaltar que, a medida que el valor de R_0 y R_0^α aumenta, existe un riesgo incrementado de que el brote se propague de manera más rápida y extensa, lo que subraya la importancia de implementar medidas de control y prevención eficaces para mitigar su impacto.

| α | R_0^α |
|----------|--------------|
| 0.80 | 1.43948 |
| 0.90 | 1.44092 |
| 0.95 | 1.44164 |
| 0.99 | 1.44222 |
| 1.00 | 1.44238 |

Tabla 4.1.3: Número reproductivo básico para valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$.

4.1.2. Caso 2

En este segundo caso, emplearemos el método de optimización utilizado previamente en el caso 1 4.1.1, Nelder-Mead, para encontrar a todos los parámetros que optimicen el ajuste al comportamiento de los individuos infectados. A partir de estos parámetros, realizaremos un análisis similar al observado en el caso anterior. En la tabla 4.1.4 se muestran los valores de los parámetros obtenidos.

| Parámetro | Descripción del parámetro | Valor |
|-----------|--|---|
| Λ | Tasa promedio de inmigración | 0.14061 $\text{semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| β | Tasa de contagio | 0.44373 $\text{semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| γ | Tasa de pérdida de inmunidad | 0.12929 semanas^{-1} |
| κ | Tasa de recuperación de los infectados | 0.07610 semanas^{-1} |
| μ | Tasa promedio de defunciones | 0.02344 $\text{semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |
| f | Tasa de Mortalidad | 0.09051 $\text{semanas}^{-1} \cdot \text{población}^{-1}$ |

Tabla 4.1.4: Valores de los parámetros.

Notemos que, en base a este ajuste podemos determinar que el tiempo de recuperación de una persona infectada es aproximadamente de 13 semanas, mientras que la pérdida de inmunidad se extiende por alrededor de 8 semanas. En la tabla 4.1.5, podemos ver los valores del análisis de sensibilidad del número reproductivo para los nuevos valores de los parámetros.

| Parámetro | Índice de sensibilidad |
|-----------|------------------------------------|
| β | $\Omega_{\beta}^{R_0} = 1$ |
| κ | $\Omega_{\kappa}^{R_0} = -0.40042$ |
| μ | $\Omega_{\mu}^{R_0} = -0.12333$ |
| f | $\Omega_f^{R_0} = -0.47624$ |

Tabla 4.1.5: Índice de sensibilidad de cada parámetro respecto R_0 .

Observemos que, los parámetros que tienen una mayor influencia en el comportamiento del número reproductivo en este caso son la tasa de contagio (β), la tasa de recuperación de los infectados (κ) y la tasa de mortalidad (f). Es importante resaltar que estos dos últimos afectan el comportamiento del número reproductivo básico de la siguiente manera: a medida que aumentan, contribuyen a reducir el valor del número reproductivo básico.

Por último, veamos los valores del número reproductivo básico para distintos valores de α y $\tau = 0.99$.

| α | R_0^α |
|----------|--------------|
| 0.80 | 2.33010 |
| 0.90 | 2.33244 |
| 0.95 | 2.33361 |
| 0.99 | 2.33454 |
| 1.00 | 2.33480 |

Tabla 4.1.6: Número reproductivo básico para valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$.

Notemos que, en base a la obtención de todos los parámetros, obtenemos un número reproductivo básico de 2.33480, indicando un alto potencial de propagación de la enfermedad con cada persona infectada, en promedio, capaz de transmitir la enfermedad a más de dos personas susceptibles. Este valor sugiere un riesgo significativo de un crecimiento exponencial de la enfermedad en ausencia de intervenciones, además de que es necesario implementar medidas de control como vacunación y prácticas de higiene para reducir la transmisión. Además, pequeños cambios en las tasas de transmisión pueden tener un impacto significativo en la propagación de la enfermedad, En resumen, un R_0 de 2.33480 resalta la importancia de la acción rápida y efectiva para contener la propagación de la enfermedad y proteger la salud pública.

4.2. Simulación

A continuación, se mostrará el método de Euler fraccionario ([47], [59]) aplicado a nuestro sistema *SIRS*. Consideremos el sistema 3.2.1 en su forma compacta de la siguiente manera:

$$\tau^{\alpha-1} D_{*0}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t > 0, \quad (4.2.1)$$

donde $y = (S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3$, $y_0 = (S_0, I_0, R_0)$ es el vector inicial y $y(t) \in \mathbb{R}$.

Aplicando el operador integral fraccionario correspondiente a la derivada de Caputo a la ecuación 4.2.1, se obtiene:

$$y(t) = \tau^{1-\alpha} [y_0 + I^{\alpha} f(y(t))], \quad t > 0.$$

Sea el intervalo $[0, b]$ sobre el cual queremos encontrar la solución del sistema 4.2.1. Usando el método de Euler fraccionario sobre este intervalo obtenemos:

$$y(t_{j+1}) = \tau^{1-\alpha} \left[y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(t_j, y_{t_j}) \right], \quad (4.2.2)$$

$$t_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Así la aproximación de la solución del sistema es:

$$S(t_{j+1}) = \tau^{1-\alpha} \left[S(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f_1(t_j, S_{t_j}) \right],$$

$$I(t_{j+1}) = \tau^{1-\alpha} \left[I(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f_2(t_j, I_{t_j}) \right],$$

$$R(t_{j+1}) = \tau^{1-\alpha} \left[R(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f_3(t_j, R_{t_j}) \right].$$

Para $\alpha \in (0, 1]$, donde $f_1 = \Lambda - \frac{\beta SI}{N} - \mu S + \gamma R$, $f_2 = \frac{\beta SI}{N} - (k + \mu + f)I$, $f_3 = kI - (\mu + \gamma)R$.

Para poder realizar la simulación escogeremos un valor de $\tau = 0.99$. Observemos que la elección del valor de τ es arbitraria; sin embargo, es posible mejorar la precisión del ajuste al sistema mediante la realización de una simulación para determinar el valor óptimo de τ . A continuación, se definen las condiciones iniciales del sistema de orden fraccionario de tipo Caputo, heredadas del sistema de orden entero como sigue, la población de Huajuapán en el 2020 era de 78313 habitantes, así $N(0) = S(0) + I(0) + R(0) = 78313$, además en el 12 de abril del 2020, fecha donde se registro el primer caso de COVID-19 en Huajuapán, entonces las condiciones iniciales del sistema quedarían $S(0) = 78312$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$. Al realizar la simulación con los parámetros 4.1.1, se generan las siguientes gráficas:

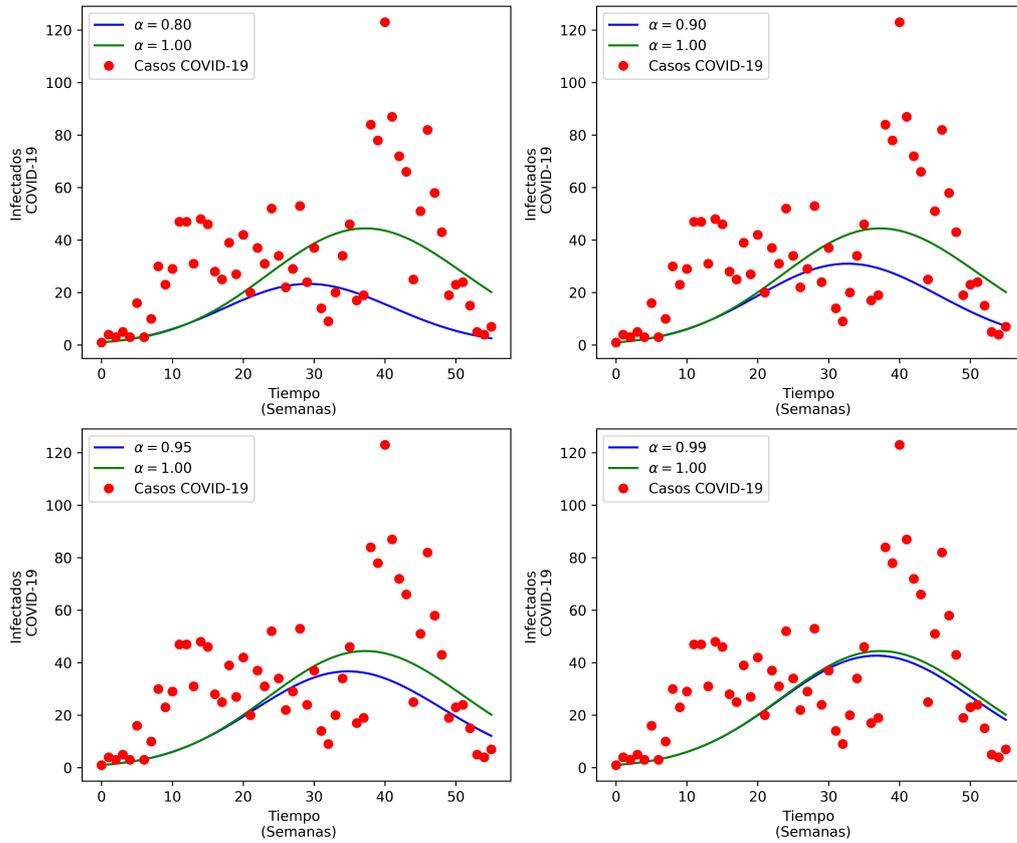


Figura 4.1: Comparación de resultados entre la derivada de orden entero ($\alpha = 1.00$) y la derivada de orden fraccional con $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$.

En la siguiente tabla 4.2.1, se detallan el error absoluto y la raíz del error cuadrático medio al comparar los casos confirmados de COVID-19 en la región de Huajuapán de León con los resultados de la simulación para distintos valores de α .

| α | Error Absoluto | RMSE |
|----------|----------------|----------|
| 0.80 | 22.23530 | 31.81196 |
| 0.90 | 19.76108 | 27.87307 |
| 0.95 | 18.59310 | 25.54893 |
| 0.99 | 18.28869 | 23.90676 |
| 1.00 | 18.338237 | 23.60099 |

Tabla 4.2.1: Error absoluto y RMSE entre casos confirmados y las simulaciones para $I(t)$.

Observamos que, cuando $\alpha = 0.99$, el error absoluto es inferior al obtenido cuando $\alpha = 1$ (solución en orden entero). Este resultado sugiere que, al considerar la magnitud absoluta de las discrepancias entre las predicciones del modelo y los valores reales, el error absoluto demuestra ser más pequeño cuando se utiliza $\alpha = 0.99$ en comparación con la solución en orden entero.

Es relevante señalar que, en contraste con el error absoluto, el menor error en el RMSE se produce cuando $\alpha = 1$, en comparación con otros valores de α . Esto implica que, al evaluar la penalización de las desviaciones más grandes, el RMSE favorece la solución con $\alpha = 1$.

Estas observaciones indican que la elección de α influye significativamente en la magnitud y penalización de los errores, y que diferentes métricas de evaluación pueden resaltar diferentes aspectos del rendimiento del modelo según los objetivos específicos del análisis.

En la figura 4.2 se han graficado los resultados del modelo para diferentes valores de α . En esta simulación el punto de equilibrio es,

$$E_1^* = (S^*, I^*, R^*) = (6.56152, 0.20822, 2.69448). \quad (4.2.3)$$

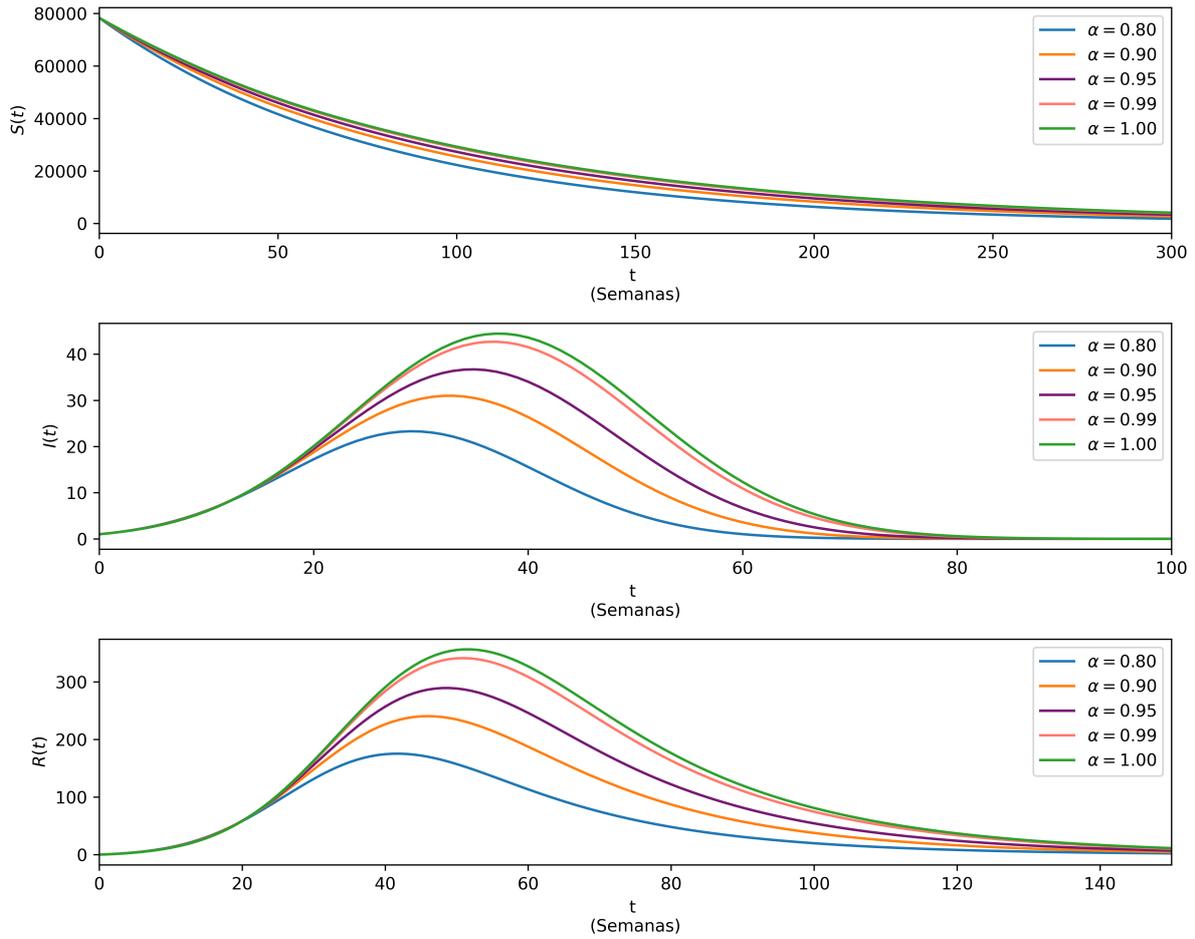


Figura 4.2: Comportamiento de $S(t), I(t), R(t)$ para distintos valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$.

La Figura 4.2 muestra que, para diversos valores de α , los resultados del modelo convergen al punto de equilibrio E_1^* . Además, los resultados de todos los órdenes ($\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$) son estables en este punto de equilibrio. Este se debe al hecho de que el polinomio característico del punto crítico E_1 3.2.5 es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 0.06474\lambda^2 + 0.00430\lambda + 0.00010.$$

Al aplicar el inciso 5 de la proposición 2.3.8, podemos afirmar que el punto crítico 4.2.3 es localmente asintóticamente estable. Es relevante observar que las figuras exhiben

distintos valores de α , pero comparten un comportamiento similar.

A continuación veremos la simulación para los valores de los parámetros de la tabla 4.1.4, escogiendo $\tau = 0.99$ y tomando diferentes valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$, obteniendo las siguientes graficas:

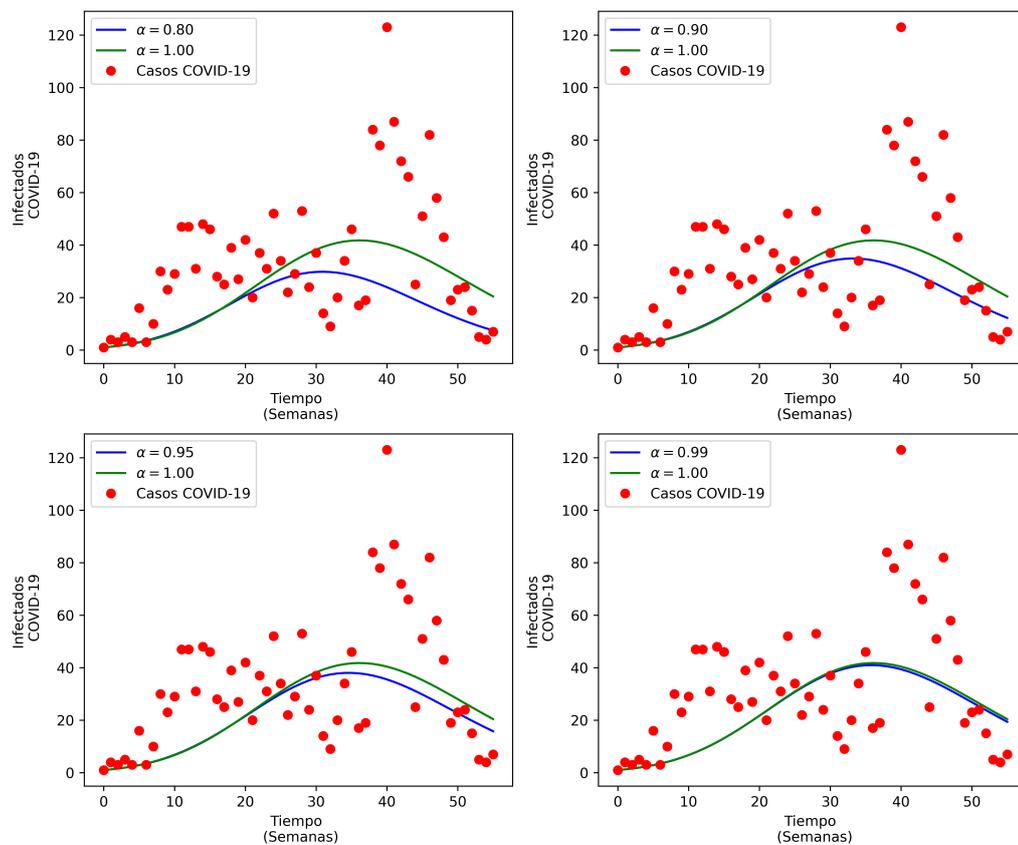


Figura 4.3: Comparación de resultados entre la derivada de orden entero ($\alpha = 1.00$) y la derivada de orden fraccional con $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$.

De manera similar, calculamos el error absoluto y el RMSE entre los casos confirmados de COVID-19 en la región de Huajuapán de León con los resultados de la simulación para distintos valores de α .

| α | Error Absoluto | RMSE |
|----------|----------------|----------|
| 0.80 | 19.70009 | 28.21920 |
| 0.90 | 18.46225 | 25.93482 |
| 0.95 | 18.19437 | 24.81149 |
| 0.99 | 18.17454 | 24.02911 |
| 1.00 | 18.21085 | 23.86251 |

Tabla 4.2.2: Error absoluto y RMSE entre casos confirmados y las simulaciones para $I(t)$.

Observamos una diferencia mínima al comparar la tabla 4.2.1 con los resultados obtenidos al buscar todos los parámetros del sistema. En particular, los errores absolutos muestran una disminución notable en esta última configuración. Por otro lado, al analizar el RMSE, notamos que los errores son más bajos específicamente para valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95$ en comparación con otros valores ($\alpha = 0.99, 1.00$).

Esta variación en los errores sugiere que, al buscar todos los parámetros del sistema, se logra una mejora sustancial en la precisión de las predicciones en términos absolutos. Sin embargo, al considerar el RMSE, observamos que ciertos valores de α , específicamente 0.80, 0.90 y 0.95, conducen a una mayor precisión en la estimación del modelo.

Estos hallazgos indican que la elección de la estrategia de búsqueda de parámetros y la elección de α y τ desempeñan un papel crucial en la calidad de las predicciones. En consecuencia, es fundamental evaluar detenidamente el rendimiento del modelo en función de los objetivos específicos del análisis y las características particulares de los datos.

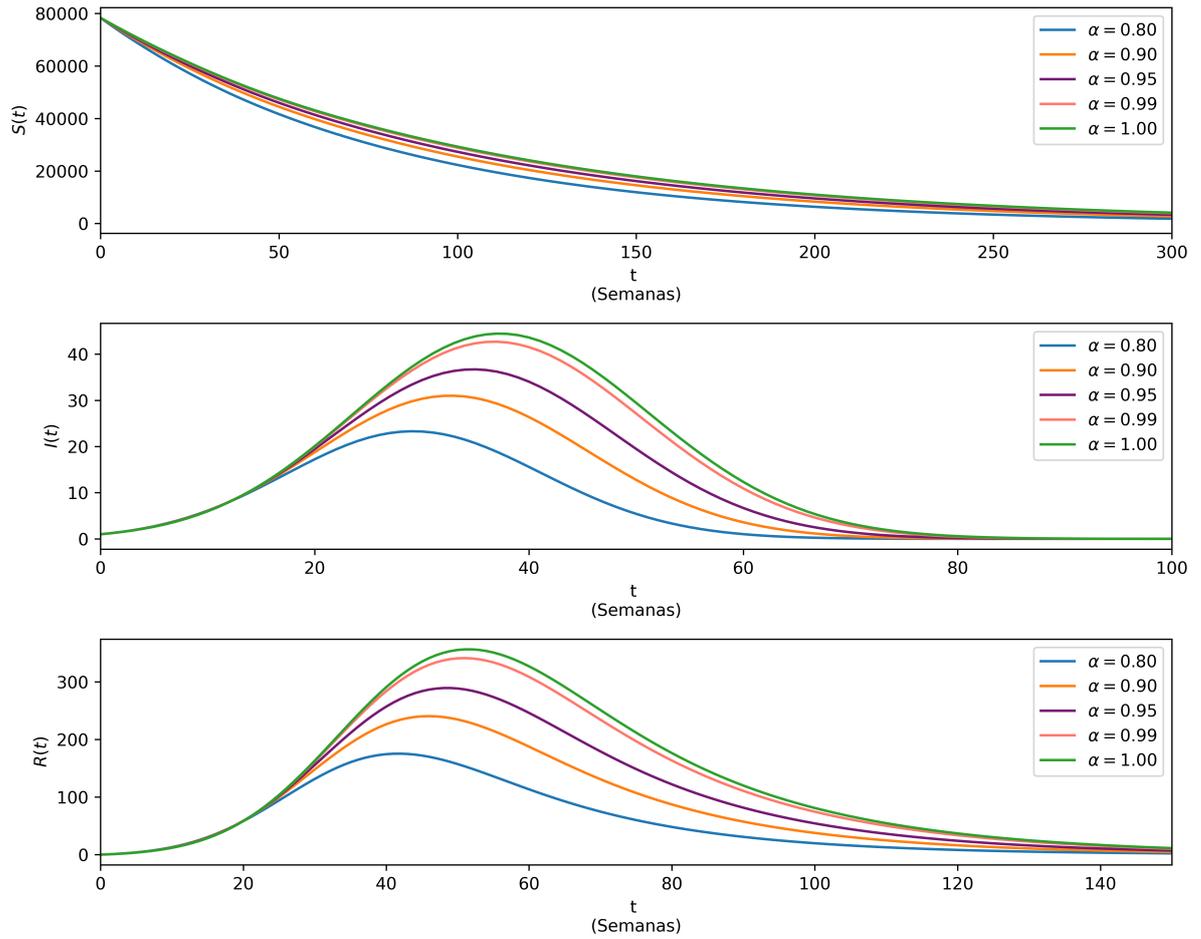


Figura 4.4: Comportamiento de $S(t), I(t), R(t)$ para distintos valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$.

En la figura 4.4 se han graficado los resultados del modelo para diferentes valores de α . En esta simulación el punto de equilibrio es:

$$E_1^* = (S^*, I^*, R^*) = (1.03872, 0.92543, 0.46111). \quad (4.2.4)$$

El polinomio característico respecto a este punto crítico es,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 0.34549\lambda^2 + 0.05711\lambda + 0.00209.$$

Utilizando el inciso 5 de la proposición 2.3.8, podemos asegurar que el punto crítico 4.2.4 es localmente asintóticamente estable y de manera similar, en las figuras se muestran diferentes valores de α , pero con un comportamiento similar. Además de que los resultados del modelo convergen al punto de equilibrio.

Observemos que en las gráficas de casos de COVID-19 4.2 y 4.4 en Huajuapán de León muestra un aumento hasta la semana 40, seguido de un descenso. Este patrón podría deberse a medidas de mitigación, inmunidad colectiva, cambios estacionales o la respuesta del sistema de salud.

Conclusiones

En este proyecto de tesis, se presentó una breve introducción histórica acerca de las epidemias que han afectado a la población de México desde tiempos prehispánicos hasta la aparición del COVID-19. Además, de la terminología básica utilizada en la epidemiología que a menudo se utiliza para explicar el comportamiento de las enfermedades que aparecen y que afectan al ser humano.

Además, se presentaron los conceptos básicos de las derivadas enteras y fraccionarias de Caputo, el cual correspondía a una generalización de la derivada de orden entero, dentro de las cuales pudimos conocer algunas de sus propiedades y funciones especiales que se relacionan con dichas derivadas fraccionarias como son la función Gamma, la función Mittag-Leffler y la función de Laplace, también la importancia de utilizar la derivada fraccionaria de Caputo para modelar y resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con una condición inicial.

Por otro lado, se mostraron los conceptos y teoremas básicos referentes a sistemas de ecuaciones de orden entero, así como también se buscaron y presentaron sus análogos en sistemas de ecuaciones fraccionarias de tipo Caputo entre las que destacan el teorema de existencia y unicidad de la solución y la estabilidad local del sistema fraccionario, los cuales resaltan por ser teoremas para casos particulares de sistemas fraccionarios dado que no hay suficiente teoría referente de sistemas dinámicos fraccionarios, en comparación de los sistemas dinámicos de orden entero.

También se realizó un análisis del sistema *SIRS* tanto en derivadas de orden entero como en derivadas fraccionarias de Caputo. Dado que se trabajó con un modelo *SIRS* se obtuvo el correspondiente número reproductivo básico, a través del método de la matriz de siguiente generación para el sistema de orden entero, mientras que para el sistema de orden fraccionario de tipo Caputo se utilizó un método en base a ciertas suposiciones para encontrar dicho número reproductivo básico. Se hizo un análisis del comportamiento del

R_0 a través de cada uno de sus parámetros. Mientras que para R_0^α no se realizó un análisis similar debido a la falta de teoría respecto a este tipo de análisis. Se obtuvieron los puntos críticos del sistema y se utilizaron los criterios de Routh-Hurwitz correspondientes para conocer la estabilidad local del sistema tanto de orden entero como de orden fraccionario.

Se presentaron dos simulaciones del modelo *SIRS* tanto en derivada de orden entero y fraccionario que examina el comportamiento del COVID-19 en la región de Huajuapán de León, Oaxaca, desde el inicio de la pandemia hasta el comienzo de la campaña de vacunación correspondiente (12 de abril del 2020 - 7 de mayo del 2021). Se utilizó el método `minimize` del módulo `scipy.optimize` de Python para obtener los valores numéricos de los parámetros que mejor se ajustan al modelo *SIRS* para después resolver el sistema *SIRS* a través del método de Euler fraccionario y valores de $\alpha = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00$. La primera simulación que se realizó fue en base a los datos de los parámetros otorgados por los organismos de salud, en el cual solo se buscaron los parámetros de la tasa de inmigración, tasa de contagio y tasa de defunciones, donde se obtuvo, por ejemplo, que la tasa de contagio para la región de Huajuapán es de 0.74 el cual nos refiere en promedio, que una persona infectada tiene una probabilidad del 74 % de transmitir la enfermedad a otra persona con la que entra en contacto.

Esta cifra representa la eficacia de la transmisión de la enfermedad entre individuos. Por otro lado, en la segunda simulación, en donde se buscaron todos los parámetros se obtuvo que la tasa de contagio es de 0.44, el cual nos dice que la probabilidad de que una persona con la enfermedad transmita es del 44 %, aquí podemos observar una diferencia entre las dos simulaciones. Así, se puede argumentar que el cambio entre estos parámetros se debe a que los organismos (OMS) hacen una recopilación de varias partes del mundo y la información que se entrega es en base a un promedio de estos datos, por lo cual para entender mejor el comportamiento de una zona en particular, nos conviene hacer una búsqueda de todos los parámetros.

Finalmente en base a este proyecto de tesis y la investigación que se realizó, quedan algunos temas sobre los cuales se podría seguir trabajando, entre los que resaltan, la teoría referente a los sistemas dinámicos fraccionarios, más específico los teoremas respecto a la existencia y unidad de las soluciones de un sistema fraccionario, así como el teorema de estabilidad local y global, el análisis del número reproductivo fraccionario y los métodos numéricos para resolver dichos sistemas fraccionarios que tengan una mejor aproximación a los datos reales.

Referencias

- [1] Acosta-Alvarado, A. J, Ibargüen-Mondragón, E, Cerón-Gómez, M. *El análisis de sensibilidad local de un modelo matemático sobre resistencia antibiótica*. Eco Matemático, **12(1)** , 6-13. (2021).
- [2] Ahmad, W.M., El-Khazali, R. *Fractional-order dynamical models of love*. Chaos Solitons Fractals **33**, 1367–1375. (2007).
- [3] Ahmed, E., El-Sayed A.M.A., Elsaka H.A.A., *Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models*, J. Math. Anal. Appl. (2005).
- [4] Ahmed, E., El-Sayed A. M. A., El-Saka H. A. A., *On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems*, Physics Letters A, **358**. (2006).
- [5] Ahmed, E., Hashish A. & Rihan F. A., *On fractional order cancer model* . Fract. Calc. Appl. Anal. **3** , 1-6. (2012).
- [6] A. G. *Sylvester's Forgotten Form of the Resultant*. Fib. Quart. **31**, 325-332. (1993).
- [7] Albornoz, S. F., & Garduño, F. P. S. M. *Clásicos de la biología matemática*. SIGLO XXI Editores. (2002).
- [8] Almeida, R., Brito da Cruz, A. M. C., Martins, N., & Monteiro, M. T. T. *An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative*. International Journal of Dynamics and Control, **7(2)**, 776-784. (2018). <https://doi.org/10.1007/s40435-018-0492-1>
- [9] Angstmann *A Fractional-Order Infectivity and Recovery SIR Model*. Fractal and Fractional **1(1)**, 11. (2017). <https://doi.org/10.3390/fractalfract1010011>
- [10] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., & Trujillo, J. J. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods: 3*. World Scientific Publishing Company. (2012).

- [11] Bonita, R., Beaglehole, R., Kjellström, T., Granados, J. A. T., & Organización Panamericana de la Salud. *Epidemiología básica*. Panamericana. (2008).
- [12] Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2011). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. (2012). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9>
- [13] Cuesta, E., Finat Codes, J. *Image processing by means of a linear integro-differential equation*. Hamza, M.H. (ed.) Visualization, Imaging, and Image Processing 2003, Paper **91**. ACTA Press, Calgary. (2003).
- [14] Das, S. *Kindergarten of Fractional Calculus*. Cambridge Scholars Publishing. (2020).
- [15] Diethelm, K. *A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever*. *Nonlinear Dyn* **71**, 613–619. (2013).
- [16] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer Publishing. (2010).
- [17] Diethelm, K., & Ford, N. J. *Analysis of Fractional Differential Equations. Journal Of Mathematical Analysis And Applications*. **265(2)**, 229-248. (2002). <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7194>.
- [18] Diethelm, K., Ford, N.J. & Freed, A.D. *Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations*. *Nonlinear Dynamics* **29**, 3–22. (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1016592219341>
- [19] El-Shahed. M. & Alsaed. A. i, *The fractional SIRC model and influenza*. *A. Math. Probl. Eng.* **3**. 378-387. (2011)
- [20] Gao, F. & Han, L. *Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters*. *Computational Optimization and Applications*. **51(1)**. 259-277. (2012).
- [21] Hirsch, M. W., & Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. (1974).
- [22] Huo, J. & Zhao. H. *Dynamical analysis of a fractional SIR model with birth and death on heterogeneous complex networks*. *Phys. A* **448**. 41-56. (2016).
- [23] García, M. & Rosales, J. *Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias y sus Aplicaciones a la Ingeniería*. Jóvenes en la Ciencia, Vol.3, 5p. Verano de la Investigación Científica. (2017).
- [24] Garrappa, R. *Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial*. *Mathematics*. **6**, **16**. (2018). <https://doi.org/10.3390/math6020016>

- [25] Ghanbari, B. *On the modeling of an eco-epidemiological model using a new fractional operator. Results in Physics*, **21**. (2021).
- [26] Guerrero, R. M. *Introducción a la epidemiología clínica y estadística*. Universidad de Colima. (2022).
- [27] Guía-Calderón, M., Rosales, J. J., Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., & Álvarez-Jaime, J. A. *The differential and integral fractional calculus and its applications*. Acta Universitaria, **25(2)**, 20-27. (2015). <https://doi.org/10.15174/au.2015.688>
- [28] IAIP. *Vacunación Oaxaca Covid-19*. https://iaipoaxaca.org.mx/vacunacion_oaxaca_covid19/municipios_proximos. (2021).
- [29] Herrmann, R. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. World Scientific. (2011).
- [30] Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. R. Soc. Lond. A. **115**. 700-721. (1927).
- [31] Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. *Contributions to the mathematical theory of epidemics, II - the problem of endemicity*. Proc. R. Soc. Lond. A **138**. 55-83. (1932).
- [32] Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. , *Contributions to the mathematical theory of epidemics, III - further studies of the problem of endemicity*. Proc. R. Soc. Lond. A **141**. 94-122. (1933).
- [33] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. . *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, **204**. Elsevier Science. (2006).
- [34] Kurosh, A. & George, Y. *Higher Algebra*. Macmillan Publishers. (1975).
- [35] Lin W. *Global existence theory and chaos control of fractional differential equations*. J. Math. Anal. Appl. **332**. 709-726. (2007).
- [36] Mena-Lorca J, Hethcote H. W. *Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes*. J Math Biol. **30(7)**. 693-716. (1992)
- [37] Latha, V. P., Rihan F. A., Rakkiyappan R. & Velmurugan G. *A fractional-order delay differential model for Ebola infection and CD8 T-cells response: stability analysis and Hopf bifurcation*. Int. J. Biomath. **10**. (2017). 1750111.
- [38] Latha. V. P., Rihan F. A., Rakkiyappan R. & Velmurugan G. *A fractional-order model for Ebola virus infection with delayed immune response on heterogeneous complex networks*. J. Comput. Appl. Math. **339**. 134-146. (2018).
- [39] Magin, R. *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House, Redding. (2006).

- [40] Manrique A. F., Agudelo C. C., González C. V., Gutiérrez L. O., Téllez P. C., Herrera A. G. *Modelo SIR de la pandemia de Covid-19 en Colombia*. Rev Salud Pública [Internet]. **22(1)** 1-9. (2020).
- [41] Matignon, D. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, in: *Computational Engineering in System Application*, vol. 2, Lille, France. p. 963. (1996)
- [42] Meiss, J. D. *Differential dynamical systems*. SIAM. (2007).
- [43] Mikucki, M. A. *Sensitivity analysis of the basic reproduction number and other quantities for infectious disease models* [Master of Science, Colorado State University]. (2012). <http://hdl.handle.net/10217/67317>.
- [44] Miller, K. S., & Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley-Interscience. (1993).
- [45] Mouaouine, A. Boukhouima, A., Hattaf, K. & Yousfi, N. *A fractional order SIR epidemic model with nonlinear incidence rate*. Adv. Diference Equ. **1**. 160. (2018).
- [46] Nise, N. S. *Control Systems Engineering*. Wiley. (2010).
- [47] Odibat, Zaid & Momani, Shaher. *An Algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order*. Journal of applied mathematics & informatics. **26**. (2008).
- [48] Ogata, K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall. (2010).
- [49] Okyere E., Oduro F. T. & Ackora-Prah J. *A Caputo based SIRS and SIS fractional order models with standard incidence rate and varying population*. British J. Math. Comput. Sci. **14** No 2 1-12. (2016).
- [50] Petráš, I. *Fractional Order Systems*. Van Haren Publishing. (2019).
- [51] Petráš, I. *Fractional-Order nonlinear systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer. (2011).
- [52] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Science & Business Media. (2008).
- [53] Pinto C. M. A. & Carvalho A. R. N. *A latency fractional order model for HIV dynamics*. J. Comput. Appl. Math. **312**. 240-256. (2017).
- [54] Pinto C. M. A. & Machado J. A. T. *Fractional model for malaria disease*. Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 01/2013, (2013).

- [55] Pliego Pliego, Emilene Carmelita. *Modelos Epidemiológicos de Enfermedades Virales Infecciosas*. [Tesis de Licenciatura]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Puebla, (2011).
- [56] Podlubny, I. *Fractional differential equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press. (1998).
- [57] Podlubny, I., Dorcak, L., Misanek, J. *Application of fractional-order derivatives to calculation of heat load intensity change in blast furnace walls*. Trans. Tech. Univ. Košice **5**, 137–144. (1995).
- [58] Rangkuti, Y.M., Firmansyah, Landong A. *Sensitivity analysis of SEIR epidemic model of Covid-19 spread in Indonesia*. J Phys Conf Ser 2022;2193:012092.
- [59] Rezapour, S., Mohammadi, H. & Samei, M.E. *SEIR epidemic model for COVID-19 transmission by Caputo derivative of fractional order*. Adv Differ Equ **2020**, 490. (2020).
- [60] Ross, B. *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven*, June 1974. Lecture Notes in Mathematics. (1975).
- [61] Royden, H. L. *Real analysis*. Prentice Hall. (1988).
- [62] Salcedo Varela, G.A. *Número Reproductivo Básico Para Sistemas Epidemiológicos: Una Aplicación al Estudio de la Rickettsiosis*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales. (2015)
- [63] SciPy Community. `scipy.optimize.minimize`. SciPy v1.8.1 Reference Guide. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>. (2022).
- [64] Secretaria de Salud. *Información referente a casos COVID-19 en México*, <https://datos.gob.mx/busca/dataset/informacion-referente-a-casos-covid-19-en-mexico>.
- [65] Shaw, S., Warby, M.K., Whiteman, J.R. *A comparison of hereditary integral and internal variable approaches to numerical linear solid elasticity*. Proceedings of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznan. (1997).
- [66] Singh, H., Srivastava, H. M., & Nieto, J. J. *Handbook of Fractional Calculus for Engineering and Science*. En Chapman and Hall/CRC eBooks. (2022). <https://doi.org/10.1201/9781003263517>.
- [67] Song, L., Xu, S.Y. & Yang, J.Y. *Dynamical models of happiness with fractional order*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **15**, 616–628. (2010).

- [68] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press. (2018).
- [69] Zafar, Z. U. A., Rehan K. & Mushtaq M. *HIV/AIDS epidemic fractional-order model*. J. Difference Equ. Appl. **23(7)**. 1298-1315. (2017).
- [70] Zill, D. G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 9e. Cengage Learning Editores S.A. de C.V. (2009).