



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**DISEÑO DE ELEMENTOS MECÁNICOS EN  
ANSYS**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

PRESENTA:

**ULISES JUÁREZ RUIZ**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS

CODIRECTOR DE TESIS:

M.C. VÍCTOR MANUEL CRUZ MARTÍNEZ

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO

MARZO DE 2024.



## Dedicatoria

*A mi madre Guadalupe Ruiz Bautista, que es el ser más maravilloso de todo el mundo. Por el apoyo moral, cariño y comprensión que siempre me has brindado, por guiar mi camino y estar junto a mí en los momentos más difíciles.*

*A mi padre Aurelio Marcelo Juárez Vázquez, que se adelantó en este camino, porque desde pequeño ha sido para mí un gran ejemplo y un maravilloso ser al que siempre he admirado.*

*A mis hermanas: Sayuri Reyes Ruiz y Montserrat Fernanda Juárez Ruiz con cariño. También dedico a mi sobrina Diana, quien ha sido mi motivación para salir adelante y poder llegar a ser un buen ejemplo para ella.*

*A todos mis familiares y amigos, con amor, admiración y respeto.*



## Agradecimientos

*El principal agradecimiento a Dios, a quien debo mi existencia, por permitirme culminar una etapa más de mi vida y por la fortaleza que me ha dado para salir adelante.*

*A mi madre, por la motivación, comprensión y apoyo incondicional en los momentos más difíciles durante mi trayectoria universitaria. Por confiar y apoyar incondicionalmente cada una de mis decisiones.*

*A mi familia y a Bingo por la motivación y apoyo incondicional en situaciones difíciles.*

*A mis amigos (as) de verdad, por los buenos momentos, consejos y experiencias inolvidables que marcaron y que hicieron más llevadera esta etapa.*

*Al Dr. José Gabriel Mendoza Larios que dirigió este trabajo de tesis y al M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez, por el tiempo, consejos y seguimiento brindado para poder realizar este proyecto. De igual forma a mis sinodales; Dra. Esther Lugo González, Dr. Álvaro Jesús Mendoza Jasso y Dr. Miguel Alberto Domínguez Gurría. Así como al Dr. Eduardo Barredo Hernández por los consejos y conocimientos brindados.*

*A quienes fueron mis docentes durante mi estancia en la universidad, por todo el conocimiento que de ellos recibí.*

*Ulises Juárez Ruiz*

*Marzo 2024*



# Resumen

El presente trabajo de tesis fue creado con el objetivo de crear una relación entre las materias de diseño de elementos de máquinas y el análisis de los elementos finitos, mediante el análisis de caso de un eje, mismo en el que se abordan temas como diseño de elementos de máquinas, teoría de falla y análisis de los elementos finitos por medio del software de Ansys Workbench y su modelador SpaceClaim en su versión para estudiantes.

El análisis de los elementos finitos es una técnica de simulación por computadora comúnmente empleada en ingeniería para el diseño de elementos mecánicos, teoría de falla, mejora de productos, aplicaciones industriales y en la simulación de sistemas físicos o biológicos complejos. Esta técnica tiene la capacidad de predecir el comportamiento de un elemento, cuerpo o sistema ante ciertas perturbaciones que inciden sobre él mediante simulaciones por computadora sin la necesidad de realizar pruebas reales, lo que se traduce en reducción de costos derivados de pruebas físicas.

El análisis de los elementos finitos y teoría de falla son herramientas indispensables para el diseño de elementos de máquinas, razón por la cual son fundamentales en la formación del Ingeniero Mecánico Automotriz. Estas herramientas son utilizadas para delimitar la solución de un problema, con el objetivo de crear diseños óptimos de elementos, estructuras o sistemas que cumplan con requerimientos específicos ante ciertas condiciones de funcionamiento. Las bases fundamentales para diseñar cualquier elemento mecánico se rigen por las propiedades mecánicas de los materiales, procesos de fabricación y montaje de estos. Por lo que, en este trabajo de tesis se presenta el estudio de caso de un eje, además de una pequeña recopilación de la literatura disponible sobre el diseño de ejes, aplicando la teoría de falla mediante la teoría de Von Mises y complementada con un análisis de los elementos finitos en el software de Ansys Workbench para la respectiva comprobación y justificación del eje propuesto como resultado final de este estudio. En cada apartado respectivo al desarrollo de este trabajo, se describe cada uno de los pasos realizados así como las herramientas empleadas, al igual que recomendaciones derivadas de la investigación previa y como resultado de la experiencia generada en este trabajo de tesis para que el lector pueda comprender esto de forma didáctica y autónoma.



# Índice general

Dedicatoria.....	I
Agradecimientos.....	III
Resumen.....	V
Nomenclatura.....	XI
Alfabeto griego.....	XIII
Índice de figuras.....	XV
Índice de tablas.....	XXI
1 Introducción.....	1
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Justificación.....	3
1.3 Hipótesis.....	4
1.4 Objetivos.....	4
1.4.1 Objetivo general.....	4
1.4.2 Objetivos específicos.....	4
1.5 Metas.....	5
1.6 Metodología.....	6
1.7 Estructura de la tesis.....	7
2 Estado del arte.....	9
2.1 Antecedentes del Elemento Finito.....	9
2.2 Ansys para el diseño de elementos de máquinas aplicado en el automóvil.....	9
2.3 Diseño de elementos de máquinas.....	11
2.4 Diseño de ejes.....	12
2.5 Historia de la fatiga (Teoría de Falla).....	14
3 Marco teórico.....	19
3.1 Procedimiento general para el diseño de un eje.....	19
3.2 Materiales para ejes.....	20
3.3 Configuración del eje.....	23
3.4 Fuerzas ejercidas sobre un eje debido a los elementos que inciden sobre él.....	23
3.4.1 Engranés rectos.....	23
3.4.2 Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos.....	25

3.4.3	Engranés helicoidales .....	26
3.4.4	Engranés cónicos rectos.....	28
3.4.5	Tornillos sin fin y coronas .....	29
3.4.6	Catarinas .....	31
3.4.7	Poleas para bandas en V .....	32
3.4.8	Poleas para bandas planas.....	34
3.4.9	Acoplamientos rígidos.....	34
3.4.10	Acoplamientos flexibles .....	35
3.5	Concentraciones de esfuerzos en el eje.....	35
3.5.1	Valores preliminares de diseño para los factores de concentración de esfuerzo $K_t$ 35	
3.5.2	Factor de concentración de esfuerzo por fatiga $K_f$ .....	38
3.6	Factor de Diseño ( $n_d$ ) y Factor de Seguridad ( $n$ ó $SF$ ) .....	39
3.7	Factor de confiabilidad .....	41
3.8	Factor de tamaño (secciones circulares) .....	42
3.9	Resistencia a la fatiga $S_n$ .....	43
3.10	Resistencia a la fatiga real o modificada $S'_n$ .....	44
3.11	Teoría del esfuerzo cortante máximo (Tresca) .....	44
3.12	Teoría de la energía de distorsión máxima (Von Mises) .....	46
3.13	Esfuerzos de diseño para ejes .....	50
3.13.1	Esfuerzo cortante de diseño – par torsional constante.....	51
3.13.2	Esfuerzo cortante de diseño – esfuerzo cortante vertical invertido .....	51
3.13.3	Esfuerzo normal de diseño – carga por fatiga .....	54
3.14	Ejes únicamente sometidos a flexión y a torsión.....	54
3.15	Análisis de elementos finitos en Ansys .....	56
3.16	Elemento mecánico.....	57
3.17	Mallado en Ansys .....	58
3.17.1	Mallas adaptativas .....	60
3.17.2	Métodos de mallado en Ansys.....	61
3.17.3	Calidad del mallado .....	64
4	Desarrollo del análisis de caso .....	67
4.1	Solución analítica.....	68
4.2	Análisis de elementos finitos en Ansys Workbench.....	77

5	Resultados .....	95
5.1	Resultados solución analítica.....	95
5.1.1	Selección de rodamientos (cojinetes) .....	96
5.1.2	Diseño de cuñas .....	98
5.1.3	Selección de anillos de retención.....	99
5.2	Resultados de elementos finitos en Ansys .....	100
6	Conclusiones .....	105
	Bibliografía.....	107
	<b>A. Estimaciones de la resistencia a la fatiga .....</b>	<b>110</b>
	<b>B. Propiedades del acero AISI 1050 estirado en frío.....</b>	<b>112</b>
	<b>C. Dimensiones estándares para asiento de rodamiento y tamaños básicos para secciones circulares .....</b>	<b>114</b>
	<b>D. Gráficas de factores teóricos de concentración del esfuerzo .....</b>	<b>117</b>
	<b>E. Selección de cuñas .....</b>	<b>120</b>
	<b>F. Planteamiento del estudio de caso y definición de engranes .....</b>	<b>121</b>
	<b>G. Especificaciones del eje intermedio diseñado para el estudio de caso desarrollado en este trabajo de investigación.....</b>	<b>135</b>
	<b>H. Refinamiento manual de mallado en Ansys Workbench.....</b>	<b>136</b>



# Nomenclatura

$S'_e$	Límite de resistencia a la fatiga
$S'_n$	Resistencia a la fatiga real
$S'_{sn}$	Resistencia a la fatiga en cortante
$n_G$	Velocidad de salida del eje
$C_R$	Factor de confiabilidad
$C_m$	Factor de material
$C_s$	Factor de tamaño
$C_{st}$	Factor de tipo de esfuerzo
$F_B$	Fuerza de flexión
$F_N$	Fuerza impulsora neta
$F_c$	Fuerza de la cadena
$K_t$	Factor de concentración de esfuerzo
$L_d$	Número de revoluciones / ciclos de diseño
$P_O$	Potencia de salida
$S_n$	Resistencia a la fatiga
$S_{sy}$	Resistencia a la fluencia en cortante
$S_u$	Resistencia última a la tensión
$S_y$	Resistencia a la fluencia
$T_O$	Par torsional de salida
$W_N$	Fuerza normal
$W_r$	Fuerza radial
$W_{rG}$	Fuerza radial del engrane (corona)
$W_{rP}$	Fuerza radial del piñón
$W_{rW}$	Fuerza radial del tornillo sin fin
$W_t$	Fuerza tangencial, carga transmitida
$W_{tG}$	Fuerza tangencial del engrane (corona)
$W_{tP}$	Fuerza tangencial del piñón
$W_{tW}$	Fuerza tangencial del tornillo sin fin

$W_x$	Fuerza axial
$W_{xG}$	Fuerza axial del engrane (corona)
$W_{xP}$	Fuerza axial del piñón
$W_{xW}$	Fuerza axial del tornillo sin fin
$Z_p$	Módulo de sección polar
$n_d$	Factor de diseño
$r_m$	Radio promedio
$u_d$	Energía de distorsión
$u_v$	Energía de deformación para producir cambio de volumen
$v_t$	Velocidad de línea de paso
$A$	Área
$C$	Capacidad de carga dinámica básica
$d$	Diámetro de paso
$D$	Diámetro de paso del engrane, diámetro del eje
ECM	Esfuerzo cortante máximo (Tresca)
ED	Energía de distorsión máxima (Von Mises)
$F$	Fuerza o carga
$M$	Momento flexionante
$n$	Velocidad de giro
$N$	Número de ciclos de esfuerzo
$P$	Potencia
$R$	Radio, radio de paso del engrane
$S$	Resistencia
$S$	Módulo de sección rectangular
$T$	Par torsional
$V$	Fuerza cortante vertical
$x, y, z$	Coordenadas generales
$E$	Módulo de elasticidad
$SF$ ó $n$	Factor de seguridad
$u$	Energía de deformación por unidad de volumen
$v$	Volumen

## Alfabeto griego

$\gamma$	Ángulo de hélice
$\varepsilon$	Deformación real
$\epsilon$	Deformación unitaria (normal)
$\theta$	Ángulo de inclinación
$\lambda$	Ángulo de avance
$\pi$	Número pi
$\sigma$	Esfuerzo normal
$\sigma_1$	Esfuerzo principal
$\sigma_2$	Esfuerzo principal
$\sigma_3$	Esfuerzo principal
$\sigma_A$	Esfuerzo plano
$\sigma_B$	Esfuerzo plano
$\sigma_d$	Esfuerzo de diseño
$\sigma'$	Esfuerzo de Von Mises
$\tau$	Esfuerzo cortante
$\tau_{m\acute{a}x}$	Esfuerzo cortante máximo
$\tau_{xy}$	Esfuerzo cortante puro
$\tau_d$	Esfuerzo cortante de diseño
$\phi$	Ángulo de presión
$\phi_n$	Ángulo de presión normal
$\phi_t$	Ángulo de presión transversal
$\psi$	Ángulo de hélice
$\omega$	Velocidad angular



## Índice de figuras

Figura 1.1. Metodología de la investigación empleada para este trabajo de tesis [3].	6
Figura 2.1. Proceso de diseño mediante retroalimentación e iteración [6].	12
Figura 2.2. Eje montado en cojinetes [6].	13
Figura 2.3. Sección de un árbol que ha fallado por fatiga [9].	14
Figura 2.4. Esfuerzos variables en un eje que rota, sometido a un esfuerzo flexionante cortante [9].	15
Figura 2.5. Diagrama $S - N$ o diagrama de Wohler [9].	16
Figura 3.1. Diagrama esfuerzo - deformación de un material frágil vs uno dúctil.	22
Figura 3.2. Diagrama de flujo para la selección de teorías de falla [6].	22
Figura 3.3. Eje convencional escalonado como sistema de sujeción o retención y con cuñero o chavetero como medio para transmitir potencia.	23
Figura 3.4. Fuerza ejercida sobre los dientes de un engrane impulsado [7].	24
Figura 3.5. Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos acoplados [7].	25
Figura 3.6. Engranes helicoidales con un ángulo de hélice de $45^\circ$ [7].	26
Figura 3.7. Geometría y fuerzas de los engranes helicoidales [7].	27
Figura 3.8. Engrane y piñón cónicos rectos acoplados [41].	28
Figura 3.9. Fuerzas sobre engranes cónicos [7].	28
Figura 3.10. Engranaje sin fin de envolvente simple consistente en un tornillo sin fin y un engrane envolvente [6].	29
Figura 3.11. Fuerzas sobre un tornillo sin fin y una corona [7].	30
Figura 3.12. Fuerzas ejercidas sobre las catarinas [7].	31
Figura 3.13. Fuerzas sobre poleas [7].	32
Figura 3.14. Acoplamiento rígido [7].	34
Figura 3.15. Cuñero de perfil y en trineo [7].	36
Figura 3.16. Chaflán en un eje [7].	37
Figura 3.17. Sensibilidad a la muesca para aceros y aleaciones de aluminio forjado UNS A92024-T, sometidos a flexión inversa [6].	38
Figura 3.18. Sensibilidad a la muesca de materiales sometidos a torsión inversa [6].	39
Figura 3.19. Gráfico para el factor de tamaño $C_S$ para secciones circulares [7].	42
Figura 3.20. Gráfico de resistencia a la fatiga (Diagrama $S - N$ ) [7].	43

Figura 3.21. Teoría del esfuerzo cortante máximo de esfuerzo plano, para $\sigma_A$ y $\sigma_B$ diferentes de cero [6].	46
Figura 3.22. a) Elemento con esfuerzos triaxiales que experimenta cambio de volumen y distorsión angular. b) Elemento sometido a tensión hidrostática que solo experimenta cambio de volumen. c) Elemento con distorsión angular sin cambio de volumen [6].	47
Figura 3.23. Comparativa de las teorías de ED y ECM [6].	49
Figura 3.24. Esfuerzo repetido e invertido [7].	51
Figura 3.25. Esfuerzo fluctuante [7].	51
Figura 3.26. Distribución de esfuerzos cortantes en un eje giratorio [7].	52
Figura 3.27. Gráfico base para la ecuación del diseño de ejes, con esfuerzo flexionante invertido repetido y esfuerzo cortante torsional constante [7].	54
Figura 3.28. Malla fina con alto nivel de precisión.	59
Figura 3.29. Malla gruesa con baja precisión.	59
Figura 3.30. Buje mallado con elementos hexaédricos.	61
Figura 3.31. Eje seccionado y mallado mediante barrido, donde se define una cara inicial y final.	62
Figura 3.32. Geometría compleja mallada con elementos tetraédricos.	62
Figura 3.33. Sección de un eje mallado mediante el método multi-zona (manual).	63
Figura 3.34. Geometría compleja mallada mediante elementos hexaédricos y tetraédricos.	63
Figura 3.35. Escala paramétrica para asimetría u oblicuidad [15].	64
Figura 3.36. Representación de ángulos máximos y mínimos en elementos tetraédricos [16].	65
Figura 3.37. Escala paramétrica para ortogonalidad.	65
Figura 3.38. Ortogonalidad, a) ortogonalidad entre elementos y b) ortogonalidad en la cara [16].	65
Figura 3.39. Relaciones de aspecto [15].	66
Figura 4.1. Configuración del eje del ejemplo 7-2 [6]. Dimensiones en pulgadas.	67
Figura 4.2. Fuerzas ejercidas sobre el eje.	69
Figura 4.3. Selección de análisis a emplear y edición de material en Ansys Workbench.	78
Figura 4.4. Definición de nuevo material.	78
Figura 4.5. Propiedades del acero AISI 1050 estirado en frío.	79
Figura 4.6. Selección de modelador y nueva geometría.	79
Figura 4.7. Definición de geometría tipo viga, mediante secciones lineales que indican cambios de sección transversal o puntos de interés (A, G, J y B).	79
Figura 4.8. Modificación del modelo (Mechanical Structural).	80

Figura 4.9. Ventana de mecánica estructural (Mechanical Structural).....	80
Figura 4.10. Controlador global de tamaño del cuerpo (Body Sizing).....	80
Figura 4.11. Aplicación del tamaño del cuerpo a todos los elementos, el tamaño óptimo para el análisis es de 0.1 pulgadas, como resultado de repetidas iteraciones de mallado manual. ....	81
Figura 4.12. Selección de método de mallado automático. ....	81
Figura 4.13. Elección de todos los elementos y aplicación del método. ....	81
Figura 4.14. Discretización del cuerpo (generación de malla). ....	81
Figura 4.15. Selección de condición de desplazamiento para los cojinetes A y B.....	82
Figura 4.16. Definición de las restricciones de desplazamiento (mismo procedimiento para el cojinete B). ....	82
Figura 4.17. Selección de condición de rotación fija para los cojinetes A y B. ....	82
Figura 4.18. Definición de las restricciones de rotación fija (mismo procedimiento para el cojinete B). ....	83
Figura 4.19. Restricciones en los cojinetes A y B. ....	83
Figura 4.20. Definición de las fuerzas en los engranes G y J (puntos G y J). ....	83
Figura 4.21. Definición de fuerza radial y tangencial que el engrane G transmite al eje (punto G). ....	84
Figura 4.22. Definición de fuerza radial y tangencial que el engrane J transmite al eje (punto J). ....	84
Figura 4.23. Visualización de las restricciones y fuerzas que inciden sobre el eje. ....	84
Figura 4.24. Insertar trayectoria (Path).....	85
Figura 4.25. Definición de trayectoria, seleccionando todas las secciones del eje borde (del inglés Edge). ....	85
Figura 4.26. Selección de deformación total como variable de interés. ....	85
Figura 4.27. Selección de diagrama de fuerza cortante y momento flexionante como variables de interés. ....	85
Figura 4.28. Selección de herramienta de viga.....	86
Figura 4.29. Ejecución de la simulación (procesamiento).....	86
Figura 4.30. Insertar un nuevo módulo de análisis estático estructural e importación del material previamente definido. ....	87
Figura 4.31. Modelado el eje en 3D, delimitado por las zonas de interés y compartir la topología del cuerpo. ....	87
Figura 4.32. importación de la solución del módulo A al módulo B. ....	88
Figura 4.33. Verificación y asignación de material al cuerpo (eje).....	88

Figura 4.34. Herramienta de Cut Boundary Remote Constrain (cortar la restricción remota de límites).....	89
Figura 4.35. Delimitación de las condiciones en las extremidades del eje, mismas que delimitan los puntos de interés del eje.....	89
Figura 4.36. Selección de un método de mallado.....	90
Figura 4.37. Selección de la geometría, aplicación del método y especificación del método tetraédrico. ....	90
Figura 4.38. Elección de un controlador global de tamaño.....	90
Figura 4.39. Selección de la geometría y especificaciones del controlador global de tamaño. ....	90
Figura 4.40. Estadística del mallado (nodos y elementos generados).....	91
Figura 4.41. Calidad de los elementos (entre 0.50 – 1).....	91
Figura 4.42. Oblicuidad de los elementos (entre 0.5 – 1).....	92
Figura 4.43. Relación de aspecto (entre 1 y 3).....	92
Figura 4.44. Selección de la herramienta de fatiga.....	93
Figura 4.45. Selección de vida como variable de interés. ....	93
Figura 4.46. Selección de factor de seguridad como variable de interés.....	93
Figura 5.1. Diagrama resultante de fuerza cortante y momento flexionante del estudio de caso desarrollado. ....	96
Figura 5.2. Rodamientos de una hilera de rodillos cilíndricos [15]. ....	97
Figura 5.3. Especificaciones del anillo de retención externo y su ensamblaje [16]. ....	99
Figura 5.4. Resultados obtenidos de deformación total. ....	100
Figura 5.5. Gráfico resultante de fuerza cortante y momento flexionante. ....	100
Figura 5.6. Gráfico de fuerza cortante y momento flexionante en el punto G. ....	101
Figura 5.7. Gráfico de fuerza cortante y momento flexionante en el punto J. ....	101
Figura 5.8. Esfuerzo máximo de flexión en el eje.....	101
Figura 5.9. Vida del eje resultante.....	102
Figura 5.10. Factor de seguridad resultante.....	102
Figura A. Resistencia a la fatiga $S_n$ en función de la resistencia a la tensión, para acero forjado con varias condiciones de superficie [7].....	110
Figura B. Eje redondo con filete en el hombro en torsión. $\tau_0 = \frac{Tc}{J}$ , donde $c = \frac{d}{2}$ y $J = \frac{\pi d^4}{32}$ [6]. .....	117
Figura C. Eje redondo con filete en el hombro en flexión. $\sigma_0 = \frac{Mc}{I}$ , donde $c = \frac{d}{2}$ e $I = \frac{\pi d^4}{64}$ [6]. .....	117

Figura D. Barra redonda ranurada en flexión. $\sigma_0 = \frac{Mc}{I}$ , donde $c = \frac{d}{2}$ e $I = \frac{pd^4}{64}$ [6].....	118
Figura E. Barra redonda ranurada en torsión. $\tau_0 = \frac{Tc}{J}$ , donde $c = \frac{d}{2}$ y $J = \frac{pd^4}{32}$ [6].....	118
Figura F. Eje redondo con ranura de fondo plano en flexión y/o tensión. $\sigma_0 = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}$ [6]. .....	119
Figura G. Eje redondo con ranura de fondo plano en torsión. $\tau_0 = \frac{16T}{\pi d^3}$ [6].....	119
Figura H. Cuñas paralelas [7].....	120
Figura I. Tren de engranes compuesto invertido [6]. .....	123
Figura J. Gráfica para determinar el factor dinámico $K_v$ [6].....	126
Figura K. Gráfico de Factor de alineación del acoplamiento $C_{ma}$ [6]. .....	128
Figura L. Factores geométricos J de engranes rectos [6]. .....	130
Figura M. Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la picadura $Z_N$ [6]. .....	132
Figura N. Especificaciones del eje intermedio diseñado para el estudio de caso desarrollado en este trabajo de investigación.....	135



## Índice de tablas

Tabla 3.1. Procedimiento para el diseño de un eje recomendado por Mott [7].	19
Tabla 3.2. Principales usos de algunos aceros comunes [7].	21
Tabla 3.3. Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos engranados [7].	26
Tabla 3.4. Factores de diseño recomendados en [11] y propuestos por Vidosic [12].	40
Tabla 3.5. Factores de confiabilidad $C_R$ aproximados [7].	41
Tabla 3.6. Ecuaciones para determinar el factor de tamaño $C_S$ para secciones transversales circulares [7].	42
Tabla 3.7. Valores para el factor de material [7].	44
Tabla 3.8. Clasificación de las geometrías según el elemento [13].	57
Tabla 4.1. Datos recabados del apéndice F como requisitos de diseño para el estudio de caso desarrollado en este trabajo de investigación.	68
Tabla 4.2. Diagramas de carga cortante y flexionante para la Figura 4.2.	69
Tabla 5.1. Diámetros mínimos calculados para el eje de la Figura 4.1.	95
Tabla 5.2. Diámetros ajustados y recomendados para el eje de la Figura 4.1.	95
Tabla 5.3. Resultados obtenidos del análisis de los elementos finitos del eje diseñado (modelo tipo viga y 3D).	103
Tabla 5.4. Requisitos de diseño y resultados analíticos obtenidos.	103
Tabla A. Cálculo de resistencia a la fatiga para acero AISI 1144 QT 1000 con interpolación por cerchas cúbicas.	111
Tabla B. Propiedades de diseño para los aceros al carbón y aleados [7].	112
Tabla C. Datos para seleccionar rodamientos de una hilera de bolas y ranura profunda, tipo Conrad [7].	114
Tabla D. Tamaños básicos preferidos para elementos con sección transversal circular [7].	116
Tabla E. Estimaciones de los factores de concentración de esfuerzos [6].	118
Tabla F. Tamaño de la cuña en función del diámetro del eje [7].	120
Tabla G. Resistencia de contacto repetidamente aplicada $S_c$ a $10^7$ ciclos y confiabilidad de 0.99 para engranes rectos [6].	129
Tabla H. Resistencia a la flexión aplicada de manera repetida $S_c$ a $10^7$ ciclos y confiabilidad de 0.99 para engranes de acero [6].	131
Tabla I. Refinamiento manual de mallado para diferentes tamaños de elementos.	136



## 1 Introducción

El diseño de elementos de máquinas es parte integral en el área del diseño mecánico. Un ingeniero de diseño es el encargado de elaborar elementos, aparatos o sistemas con la finalidad de satisfacer necesidades específicas o como solución a un problema en particular.

Una máquina puede definirse como un aparato formado por unidades interrelacionadas llamadas elementos de máquinas, con el objetivo de transformar movimientos y fuerzas. La relación entre fuerzas y movimientos distingue el diseño de máquinas del estructural, un diseño estructural solo considera fuerzas estáticas, mientras que el diseño de máquinas incluye además el análisis de las cargas dinámicas asociadas al movimiento, masa y geometría de cada elemento [1].

Los principales usos del diseño mecánico son:

- Para la manufactura: procesos para la creación de máquinas o partes mecánicas.
- Para el ensamble: conjunción de piezas para la creación de una máquina.
- Rediseño ergonómico: actualización de piezas con finalidad de comodidad.
- Programas de mantenimiento: procedimientos, frecuencias, parámetros, reemplazos con fines de eficiencia.

El análisis de elementos finitos FEA (por sus siglas en inglés) es la técnica de simulación por computadora empleada en ingeniería, comúnmente utilizada para el diseño de elementos, teoría de falla, mejora de productos, aplicaciones industriales y en la simulación de sistemas físicos o biológicos complejos para predecir el comportamiento de cada elemento.

Este análisis emplea el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual consiste en la aproximación de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales complejas mediante una técnica computacional empleada para dar soluciones aproximadas a problemas matemáticos con valores límite en los diversos campos de la ingeniería. Un problema matemático con valores límite, es aquel, donde una o más variables dependientes deben satisfacer el dominio conocido de variables independientes y las condiciones específicas en el límite del dominio de una ecuación diferencial, según la definición del problema [2].

Los elementos finitos son la división de un cuerpo, estructura o dominio en un número finito de subdominios no-intersectantes entre sí. Dentro de estos elementos se encuentra una serie de puntos denominados nodos, los cuales son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes. Dependiendo del tipo de relación de adyacencia entre un conjunto de nodos este se denomina malla, así el conjunto de elementos finitos se define como discretización.

El procedimiento general para la formulación de un análisis de elemento finito que da solución a un problema físico mediante software especializado es común en los diferentes análisis que requieren una discretización, sea un análisis estructural, transmisión de calor, flujo de fluidos, entre otros. Este procedimiento consiste en tres pasos: pre-procesamiento, procesamiento o solución y post-procesamiento, mismos procesos que serán descritos más adelante [2].

Para la solución de problemas, el CAD (por sus siglas en inglés) es un medio para la creación fácil de modelos para FEA, es así que existen diversos softwares comerciales para la simulación de FEA como lo son: SolidWorks Simulation, Algor, AutoFEM, NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, LS-DYNA, etc.

Como software de estudio en este trabajo de tesis se eligió Ansys Workbench, ya que es un software diseñado para ser una plataforma amigable para el usuario y así mismo se integra adecuadamente a la simulación de ingeniería avanzada para diversas aplicaciones en los diferentes campos de la ingeniería. Es un software muy confiable y preciso debido a los métodos numéricos y ecuaciones complejas que emplea, además de ofrecer una conexión con diversos softwares de CAD y emplea como base los procesos generales antes mencionados.

Con esto se realiza el diseño de elementos mecánicos en Ansys, específicamente en el diseño de ejes, mediante el estudio de caso de un eje de forma analítica y un análisis de elementos finitos llevado a cabo mediante el Software ANSYS Workbench, con la finalidad de comparar los resultados y comprender el desarrollo de los métodos de solución aplicados a los elementos.

## 1.1 Planteamiento del problema

Es de suma importancia que el Ingeniero Mecánico Automotriz egresado de la Universidad Tecnológica de la Mixteca tenga un amplio panorama y conocimiento del diseño de elementos mecánicos, ya que los autos, máquinas o estructuras están compuestas de diversos elementos mecánicos que cumplen con requerimientos (esfuerzos, resistencia de materiales, deformaciones, etc.) y funciones específicas.

Con base en el temario de otras carreras se puede observar que para cubrir los temas de estas materias de forma satisfactoria se emplean dos años y para cubrir los mismos en la carrera de Ingeniería Mecánica Automotriz solo es la mitad de tiempo. Por lo que se define como problemática la falta de tiempo y material complementario para cubrir el temario de forma satisfactoria en las materias de diseño mecánico y elemento finito; específicamente el diseño de elementos mecánicos, teoría de falla y análisis de elementos finitos, debido a la complejidad e importancia de las materias para la correcta formación del Ingeniero Mecánico Automotriz.

Por lo anterior, este trabajo de tesis pretende desarrollar el estudio de caso para el diseño de ejes, con la finalidad de aplicar el análisis de los elementos finitos y teoría de falla. A este estudio de

caso se aplica la metodología de análisis para el diseño de ejes como solución analítica para posteriormente comprobar la solución numérica como parte del análisis de los elementos finitos.

De acuerdo con la literatura, para el diseño de elementos de máquinas se emplean ecuaciones lineales simples, para así dar soluciones a estas cuando la geometría lo permita (elementos lineales o tipo viga), en caso de geometrías complejas se emplea el MEF, que hace la simplificación de las ecuaciones, lo que implica cierto error. Es por esto por lo que los elementos de geometría compleja son solucionados mediante software especializado, este divide (discretiza) el elemento en tetraedros, hexaedros o pirámides según el método de solución empleado para que mediante iteraciones se llegue a una solución aproximada, la cual depende del refinamiento de malla que aproxima cada vez más la solución.

Una vez comprendido el método analítico requerido para el diseño de ejes, se realiza el diseño del elemento en el CAD SpaceClaim para posteriormente realizar la simulación del análisis de elementos finitos con el objetivo de comparar resultados y plantear el desarrollo empleado en este trabajo de tesis, donde se describan claramente los pasos para llevar a cabo el análisis mediante software.

## 1.2 Justificación

Es importante que en la vida laboral o en la etapa profesional, el Ingeniero Mecánico Automotriz comprenda la importancia que tiene el diseño de elementos de máquinas, con la finalidad de que éste cuente con las herramientas y conocimientos necesarios para ser capaz de proponer el diseño de elementos mecánicos en el automóvil, la industria o en cualquier área de la ingeniería con el objetivo de mejorar los elementos ya existentes que presenten fallas o crear diseños completamente nuevos que sean más eficientes.

La materia de diseño de elementos de máquinas se basa en estudiar el comportamiento de un elemento u objeto para así predecir sus comportamientos ante ciertas perturbaciones que inciden sobre él. Este trabajo de tesis tiene como objetivo crear un vínculo específicamente entre el diseño de elementos mecánicos y el análisis de elementos finitos para el estudio de ejes, mediante la comprobación de la parte numérica respecto a la parte analítica. El método de los elementos finitos es un método numérico empleado para dar solución a problemas de ingeniería y física, estos se pueden resolver mediante análisis estructurales, potenciales magnéticos, de transferencia de calor o flujo de fluidos.

Según el tipo de sistema a analizar y dependiendo de su geometría o condiciones complejas que lo rigen es posible no obtener soluciones matemáticas analíticas para simular la respuesta del sistema físico. Una solución matemática analítica es aquella dada por una expresión matemática que da solución a valores desconocidos en cualquier parte del elemento o sistema.

Por tanto, este tipo de análisis es resuelto por métodos numéricos como lo es, el método de elementos finitos ya que este puede aproximar la solución a estas ecuaciones. Esta solución se da mediante la discretización del elemento, dando como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas en lugar de ecuaciones diferenciales como la solución analítica. Es decir, el método produce valores aproximados a las incógnitas en números discretos según los nodos.

En función de las observaciones anteriores, para este trabajo de tesis se implementa la teoría de falla para dar solución al diseño de ejes de forma analítica y complementaria con su análisis de elementos finitos en Ansys Workbench, con la finalidad de plasmar el desarrollo que conlleva cada una de estas soluciones, dejando evidencia de lo realizado en el desarrollo de este trabajo de tesis, mismo que servirá como material de consulta en la materia de diseño de elementos mecánicos y elementos finitos, ya que incita y motiva al lector dándole las herramientas y conocimientos necesarios para comprender el método de una manera autodidacta.

## 1.3 Hipótesis

Con la implementación del software Ansys Workbench se desarrollará una metodología para el diseño de elementos mecánicos, misma que será validada analíticamente para el caso de diseño de ejes.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo general

Describir el proceso de diseño de ejes mediante teoría de falla y el análisis de los elementos finitos en el software de Ansys Workbench, para corroborar los resultados numéricos con la parte analítica.

### 1.4.2 Objetivos específicos

- I. Documentar información sobre el diseño de ejes y la metodología que se aplicará en este trabajo de tesis.

- II. Elegir un estudio de caso de ejes en el que se pueda aplicar el diseño desde la fase inicial.
- III. Aplicar la teoría de falla para dar solución analítica al estudio de caso elegido y plantear las diversas consideraciones de diseño tomadas.
- IV. Proponer dimensiones finales y estandarizadas para la geometría que rige al eje como resultados de la solución analítica, tomando en cuenta los requerimientos establecidos por el estudio de caso.
- V. Realizar un análisis de los elementos finitos en el software de Ansys Workbench, aplicando la metodología general para la elaboración de este.
- VI. Interpretar los resultados obtenidos y analizar el comportamiento del eje.
- VII. Documentar en el desarrollo de este trabajo de investigación la metodología empleada para el diseño de ejes.

## 1.5 Metas

- I. Conocer e identificar la importancia del análisis de elementos finitos en la actualidad.
- II. Aplicar el análisis de los elementos finitos y teoría de falla en el diseño de elementos de máquinas (específicamente en ejes).
- III. Identificar las características de los diferentes elementos que inciden en un eje (engranes, poleas, catarinas, cuñas y ranuras), con la finalidad de determinar las fuerzas que estos ejercen y la distribución de par torsional en ejes.
- IV. Documentar la metodología empleada en este trabajo de tesis, así como plantear las diversas consideraciones de diseño tomadas con base en diversos autores y como experiencia adquirida en el desarrollo del estudio de caso elegido.
- V. Corroborar los resultados numéricos obtenidos del análisis de los elementos finitos con los resultados analíticos obtenidos mediante la teoría de falla, para definir si las consideraciones de diseño tomadas y si los requerimientos establecidos por el estudio de caso son válidos.

## 1.6 Metodología

Para la elaboración de este trabajo de tesis se emplea el método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica desarrollada por Canales [3].

En la Figura 1.1 se presenta el esquema que consta de 7 etapas.

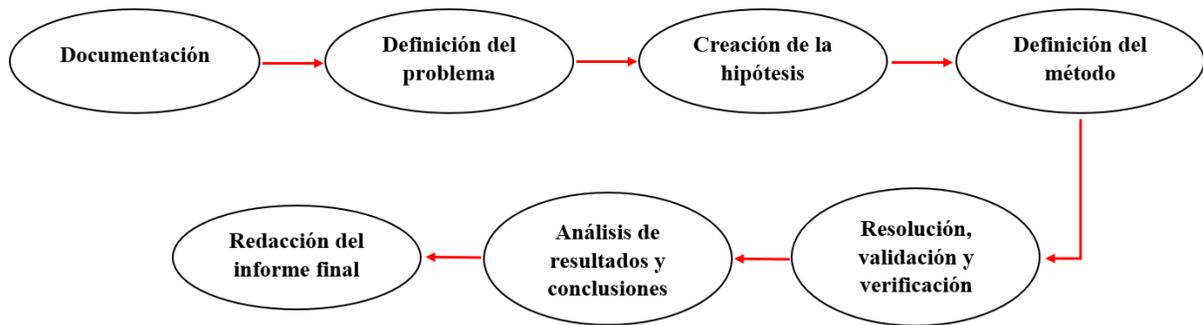


Figura 1.1. Metodología de la investigación empleada para este trabajo de tesis [3].

Estas fases de la metodología de la investigación elegida consisten en:

- I. *Documentación*. Consiste en realizar la búsqueda, recolección y clasificación de información sobre: teoría de falla, método de los elementos finitos, manuales de mallado, diseño de ejes y manuales de introducción al análisis de los elementos finitos mediante el software Ansys Workbench. La información recabada es utilizada para desarrollar el marco teórico, estado del arte, así como aclarar y definir las bases para el desarrollo de la tesis, con la finalidad de crear un panorama general sobre los métodos y pasos empleados en dichos temas.
- II. *Determinación del problema*. Se determina específicamente como problema de investigación la falta de tiempo y material complementario para cubrir el temario de forma satisfactoria en las materias de diseño mecánico y elemento finito; específicamente el diseño de elementos mecánicos, teoría de falla y elementos finitos, debido a la complejidad e importancia de las materias para la correcta formación del Ingeniero Mecánico Automotriz.
- III. *Creación de la hipótesis*. Para este trabajo de tesis la hipótesis planteada es la siguiente:
  - Con la implementación del software Ansys Workbench se podrá desarrollar una metodología para el diseño de elementos mecánicos, misma que será validada analíticamente para el caso de diseño de ejes.
- IV. *Definición del método*. Se emplea la teoría de falla para el diseño de elementos de máquinas, así como FEA, la técnica de simulación por computadora empleada en ingeniería, comúnmente utilizada para el diseño de elementos, mejora de productos,

aplicaciones industriales y en la simulación de sistemas físicos o biológicos complejos para predecir el comportamiento de cada elemento. Este análisis emplea el Método de los Elementos Finitos, el cual consiste en la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales complejas mediante una técnica computacional empleada para dar soluciones aproximadas a problemas matemáticos con valores límite en los diversos campos de la ingeniería.

- V. *Resolución, validación y verificación.* El estudio de caso elegido para ejes se soluciona analíticamente aplicando la teoría de falla y dichos resultados validarán la parte numérica derivada del análisis de los elementos finitos mediante el software de Ansys Workbench, donde, el elemento a analizar es sometido a diferentes perturbaciones que inciden sobre él según los requerimientos del problema, para así conocer el comportamiento del elemento ante dichas perturbaciones.
- VI. *Análisis de resultados y conclusiones.* Una vez analizados los resultados obtenidos se describe el desarrollo empleado para el diseño de elementos mecánicos en Ansys Workbench. Si un objetivo o meta no se cumple en su totalidad se plantean posibles soluciones al problema o justificaciones al por qué no fue posible su resolución total. Brevemente, se formulan ideas que enriquecen el tema de investigación para simplificar pasos o hacer más efectiva la solución.
- VII. *Redacción del informe final.* Una vez concluido el proceso del análisis de investigación se realiza la redacción del documento de tesis. Este debe cumplir con el objetivo fundamental de comunicar con la mayor claridad y coherencia posible los resultados, descubrimientos, comprobaciones o análisis logrados a lo largo de todo el proceso de investigación mediante el análisis de caso para el diseño de elementos mecánicos (ejes) en Ansys Workbench, como resultado final.

## 1.7 Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está conformado por seis capítulos, los cuales se especifican brevemente a continuación:

- *Capítulo 1.* Introducción al tema de investigación, enfatizando la importancia del diseño de elementos mecánicos en la formación académica del Ingeniero Mecánico Automotriz. También se presenta el planteamiento del problema, justificación de este, hipótesis, objetivos, metas y la metodología a seguir para el desarrollo de este trabajo de tesis.

- *Capítulo 2.* En este capítulo se expone la investigación documental y se detallan los hechos correlacionados que dieron origen al diseño de elementos de máquinas, así como la importancia del análisis de elementos finitos. Además, se incorpora información sobre la teoría de falla y el software de Ansys, mismo que será empleado para el desarrollo de este trabajo de tesis.
- *Capítulo 3.* En este capítulo se presenta toda la teoría (leyes, teoremas, definiciones y conceptos) e información en la que se fundamenta el desarrollo de la tesis. Se efectúa un repaso a temas como: procedimiento general para el diseño de ejes, materiales para ejes, fuerzas ejercidas sobre un eje, la teoría de falla de Von Mises y las ecuaciones necesarias para realizar el diseño de un eje. Asimismo, se describen los pasos que se deben realizar para el análisis de los elementos finitos en Ansys y como corroborar los resultados de este mediante técnicas de mallado adecuado y valores preliminares que garanticen que el análisis es el correcto.
- *Capítulo 4.* En este capítulo se encuentra el desarrollo matemático del estudio de caso para ejes y su respectivo desarrollo descriptivo para realizar el análisis de los elementos finitos en Ansys Workbench.
- *Capítulo 5.* En este capítulo se muestran los resultados analíticos, gráficos y numéricos obtenidos a través de la teoría de falla para el diseño de ejes y el análisis de los elementos finitos.
- *Capítulo 6.* Finalmente, en este capítulo se exponen las conclusiones de acuerdo con los resultados obtenidos con la elaboración de la tesis. También, se establecen propuestas y recomendaciones para hacer más eficiente el proceso de diseño.

## 2 Estado del arte

### 2.1 Antecedentes del Elemento Finito

El elemento finito no es el principal origen de la representación de un dominio dado, como la discretización de un elemento. El valor de  $\pi$  fue estimado por los antiguos matemáticos, considerando que el perímetro de un polígono inscrito en un círculo se aproxima a la circunferencia del último. Ellos predijeron el valor de  $\pi$  con aproximación de casi 40 dígitos, representando al círculo como un polígono de un número finitamente grande de lados. En los tiempos modernos, la idea encontró aplicación en el análisis estructural de aeronaves, donde, por ejemplo, alas y fuselaje son tratados como ensambles de largueros, revestimiento y paneles de corte [4]. Los descubrimientos que dieron pie al método del elemento finito se debieron a los avances en el análisis estructural de las aeronaves [5].

En 1941, Hrenikoff introdujo el llamado método armazón o método de trabajo de marco, como solución a problemas de elasticidad, en el cual un medio elástico plano se representó como un conjunto de barras y vigas. En 1943 Courant empleó un ensamble de elementos triangulares, el principio de mínima energía potencial total para ensamble de elementos triangulares y el principio de mínima energía potencial total para estudiar el problema de torsión de St. Venant. Aunque ciertas características del elemento finito fueron encontradas en los trabajos de Hrenikoff en 1941 y Courant en 1943, su primera presentación se atribuye a Kelsey en 1960 y a Turner, Clough, Martin y Topp en 1956 [4]. Clough fue el primero en emplear la terminología de elemento finito en 1960 y a finales de esta década, el análisis por elementos finitos se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. Así mismo, en 1972 se publicó el libro de Oden sobre problemas continuos no lineales [5].

### 2.2 Ansys para el diseño de elementos de máquinas aplicado en el automóvil

Ansys es un software para el análisis de diversos sistemas mediante simulaciones, con un gran impacto en la ingeniería. En versiones antiguas de modelado y análisis, Ansys no disponía de

un entorno muy amigable, ya que, exigía conocimientos de lenguajes de programación para la elaboración de los modelos y para la ejecución del análisis.

Con el paso del tiempo, Ansys ha desarrollado una plataforma muy cómoda y amigable para el desarrollo de proyectos, esta plataforma es Ansys Workbench, en la cual se encuentran contenidos todos los módulos que componen este software, mismos que son de fácil comprensión y ejecución. Esta plataforma se encuentra disponible a partir de la versión 12.1 de Ansys.

Actualmente, uno de los retos que enfrenta la industria automotriz, es la optimización de los componentes que integran un vehículo con el objetivo de incrementar su eficiencia, una reducción de emisiones de  $CO_2$  a la atmósfera y reducción de sistemas en vehículos eléctricos, esto mediante la reducción de peso de los componentes de tal modo que las propiedades mecánicas de estos no se vean afectados. La optimización de estos componentes se lleva a cabo mediante el rediseño o creación de los elementos que componen el automóvil. Un software de diseño tiene un alto impacto en la industria automotriz, debido a que estos permiten acelerar el tiempo y reducir costos que derivan de pruebas de resistencia. Las herramientas de Ansys tienen la capacidad de analizar y simular sistemas o elementos completos ante condiciones de trabajo específicas.

El análisis más común empleado en Ansys Workbench para el diseño de elementos de máquinas se describe brevemente a continuación.

Análisis de esfuerzos en Ansys Workbench:

Para analizar esfuerzos se deben tener materiales con características propias, para esto, Ansys Workbench cuenta con una librería (Engineering Data) que contiene algunos materiales y sus características.

Una vez que se define el material a utilizar en el proyecto, el modelo y la geometría, el siguiente paso es ubicar la fuerza o fuerzas necesarias que provocan esfuerzos y deformaciones en el mecanismo.

- Definición del modelo: en este paso se elabora el modelo mediante CAD, según los requerimientos y especificaciones de diseño, en Ansys Workbench se puede modelar el elemento mediante su modelador SpaceClaim o en su defecto, importar el modelo desde algún otro modelador CAD, como SolidWorks.
- Asignación de condiciones de frontera y/o sujeciones: se definen las condiciones que rigen al modelo.
- Asignación de materiales: se seleccionan los materiales requeridos.
- Mallado: un análisis de cuerpos deformables implica realizar un mallado adecuado ya que es muy importante para que los resultados sean más confiables y se pueda observar claramente el comportamiento del cuerpo. Aquí se debe tener en cuenta que un mallado grueso no tendrá resultados tan buenos y el mallado fino dará una solución más exacta.

- Aplicación de fuerzas: las fuerzas que inciden sobre el cuerpo son especificadas como requisito para el análisis.
- Solución: para dar solución se deben de cumplir todos los pasos anteriores y especificar las variables de interés, para posteriormente ejecutar el análisis mediante el icono de solución “solve” para que el programa realice el análisis y así obtener los resultados.

## 2.3 Diseño de elementos de máquinas

En la ingeniería el diseño abarca varios campos (diseño mecánico, eléctrico, aeroespacial, industrial, etc.), entre ellos el diseño de elementos de máquinas particularmente para este trabajo de investigación. Una máquina puede definirse como un aparato formado de unidades interrelacionadas entre sí, llamadas elementos de máquina, que están conectadas con el objetivo de transformar movimientos y fuerzas. Esta relación entre fuerzas y movimiento distingue el diseño de máquinas del de estructuras; en este último sólo se consideran fuerzas estáticas, mientras que para el primero, se incluye además el análisis de las cargas dinámicas asociadas al movimiento, masa y geometría de cada elemento; de aquí la importancia de los prerrequisitos de la materia [1].

El diseño tiene como principal objetivo el satisfacer una necesidad, donde para garantizar un diseño óptimo este debe ser planeado. Según la necesidad a satisfacer se toman decisiones en cuanto a materiales, geometrías, dimensiones, tratamientos termoquímicos y superficiales, método de manufactura y el costo que implica la fabricación del elemento o dispositivo. La vida útil de un componente mecánico se relaciona con el esfuerzo y la resistencia.

Un ingeniero encargado del diseño de elementos de máquinas es aquel que como consecuencia de una necesidad rediseña o crea elementos con funciones y requerimientos específicos, con la finalidad de crear una nueva máquina o simplemente mejorar sus elementos. Todo esto se logra mediante un análisis estático o dinámico del elemento, en la actualidad existen diversos softwares que facilitan y ayudan a comprender de manera gráfica los diversos comportamientos que sufre un elemento sometido a diversas perturbaciones o factores que inciden sobre él.

Las principales consideraciones para el diseño de un elemento son: resistencia, deflexión, peso, dimensiones, forma, desgaste, lubricación, corrosión, costo, vida útil, fricción, etc. Según Budynas y Nisbett [6], existen fases e interacciones para el proceso de diseño.

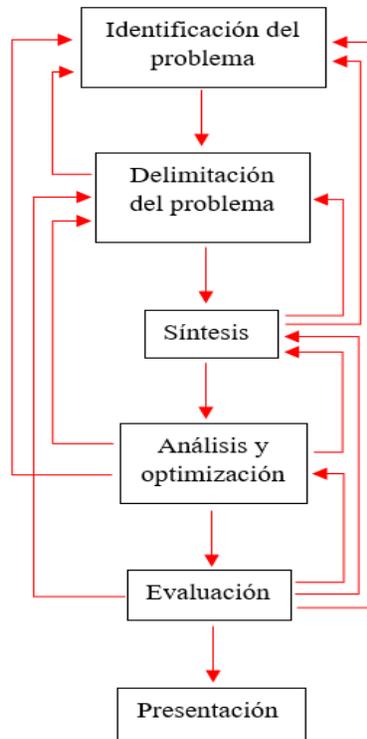


Figura 2.1. Proceso de diseño mediante retroalimentación e iteración [6].

La delimitación del problema es más específica y debe incluir todas las especificaciones del objeto a diseñar. En ciertos casos la resistencia requerida por un elemento es una limitante para determinar su geometría y dimensiones. En consecuencia, las tolerancias cubren variaciones dimensionales e intervalos de rugosidad superficial, así como la variación de propiedades mecánicas como consecuencia de tratamientos térmico u otras operaciones de procesamiento. Una vez delimitado el problema y en la síntesis del problema es necesario crear planos de diseño, cálculos de diseño, pruebas, etc., que son los puntos por evaluar en el proceso para que mediante iteraciones sucesivas se garantice que la necesidad junto con sus limitaciones sean cumplidas y así finalmente presentar el diseño. Es muy importante que este diseño sea con base en una buena teoría, para proporcionar bases racionales.

## 2.4 Diseño de ejes

El diseño de ejes es uno de los temas importantes en la industria automotriz, ya que consiste en calcular el diámetro y la geometría de un eje con la finalidad de garantizar rigidez y resistencia óptima cuando se transmite potencia bajo ciertas condiciones de carga. En el diseño de ejes se consideran los ejes y flechas ya que son barras sometidas a cargas de flexión, tensión, compresión, esfuerzos o torsión.

Una flecha es un elemento rotatorio, comúnmente de sección transversal circular con la finalidad de transmitir potencia o movimiento rotacional, constituye el eje de rotación u oscilación de elementos mecánicos como engranes, poleas, volantes de inercia, manivelas, catarinas, entre otros [6].

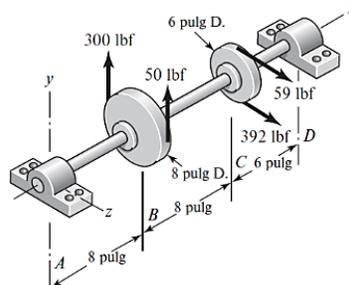


Figura 2.2. Eje montado en cojinetes [6].

Un eje (o árbol) es un componente en el que inciden dispositivos mecánicos con la finalidad de transmitir movimiento rotatorio y potencia o simplemente funcionar como un elemento tipo barra (estático), generalmente esta potencia se transmite desde un motor (eléctrico o de combustión interna) a otras partes del sistema que requieran movimiento rotatorio. En la industria existen diversos diseños de ejes, ya que estos se realizan para cumplir un propósito específico, por lo que la geometría de este depende de los elementos acoplados como los son; cojinetes, engranes, rodamientos, catarinas u otros elementos de transmisión de potencia o como sujeción. Por otra parte, el método recomendado para diseñar y analizar ejes de material dúctil es la teoría de falla por energía de distorsión máxima (Von Mises), ya que no predice falla bajo presión hidrostática y concuerda con el comportamiento dúctil. Por lo que, es la teoría más empleada cuando se involucran materiales dúctiles, a menos que se especifique otra cosa [7].

Según Norton [8] para el diseño de ejes existen las siguientes condiciones generales:

1. Para garantizar deflexiones y esfuerzos mínimos, la longitud de los ejes debe mantenerse lo más corta posible, así como minimizar los voladizos.
2. Una viga o eje en voladizo presenta mayor deflexión que una simplemente soportada (montada sobre silletas) aun con las mismas longitudes, cargas y secciones transversales, por lo que deben utilizarse montajes sobre silletas a menos que los requerimientos de diseño exijan un eje en voladizo.
3. Un eje hueco presenta una mejor rigidez específica, así como mayores frecuencias naturales que un eje sólido, pero con mayor costo y diámetro.
4. Se recomienda ubicar los incrementos de esfuerzos alejados de las regiones con momentos de flexión altos, minimizar sus efectos con radios y alivios generosos.
5. Si se necesita minimizar la deflexión, el material indicado sería un acero al bajo carbono, puesto que su rigidez es tan alta como la de aceros más costosos, mientras que un eje para bajas deflexiones suele tener esfuerzos mínimos.

6. Las deflexiones en los engranes contenidos sobre el eje no deberán exceder 0.005 in aproximadamente, en tanto que la pendiente relativa entre los ejes de los engranes debe ser menor de  $0.03^\circ$  aproximadamente.
7. Si se emplean cojinetes de manguito simple, la deflexión a través de la longitud del cojinete debe ser menor al espesor de la película de aceite requerida en el cojinete.
8. Si se emplean cojinetes con elementos giratorios excéntricos y no de autocierre, la pendiente del eje en el cojinete debe ser menor que  $0.04^\circ$ .
9. Si hay cargas axiales, deberán transferirse a tierra por medio de un solo cojinete de empuje por cada dirección de carga. No se deben dividir las cargas axiales entre varios cojinetes de empuje, ya que la expansión térmica puede sobrecargar dichos cojinetes.
10. La primera frecuencia natural del eje debe ser por lo menos tres veces la frecuencia de la fuerza más grande esperada durante el servicio. Para estos casos es preferible, un factor mínimo de 10 o más, pero frecuentemente es difícil lograrlo en sistemas mecánicos.

## 2.5 Historia de la fatiga (Teoría de Falla)

La fatiga es la falla de un material bajo cargas variables después de un cierto número de ciclos de carga. La falla por fatiga se puede dividir en tres etapas. Aparición de grietas, en la que el esfuerzo variable sobre algún punto genera una grieta después de cierto tiempo [9]. Propagación de grietas, punto en el que se da el crecimiento gradual de la grieta. Fractura súbita, es el crecimiento inestable de la grieta. Como consecuencia a esto, los elementos sometidos a cargas variables son diseñados mediante teorías de falla, debido a que estas teorías toman en cuenta los diversos factores que propician que el elemento falle después de ciertos ciclos de esfuerzo [9].

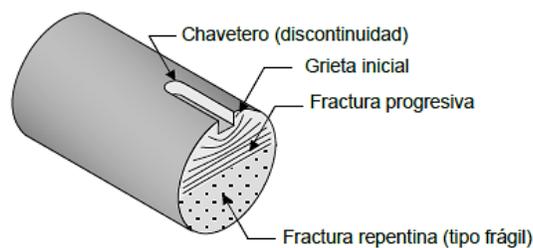


Figura 2.3. Sección de un árbol que ha fallado por fatiga [9].

En la Figura 2.3 se ilustra la sección de un elemento que ha fallado por fatiga. La falla comienza alrededor de un punto de gran esfuerzo, en el chavetero (o cuñero), desde donde se extiende paulatinamente formando ralladuras denominadas marcas de playa. Durante la fractura progresiva del material, ocurre fricción entre las caras de la sección, produciéndose una superficie lisa y brillante (pulida). Finalmente, el elemento falla súbitamente dejando una superficie áspera (irregular y rugosa) como si fuera un material frágil. El tipo de fractura producido por fatiga se le denomina comúnmente progresiva, debido a la forma paulatina en

que ocurre, frágil debido a que la fractura ocurre sin deformación plástica apreciable, y súbita porque la falla final ocurre muy rápidamente [9].

Este tipo de falla fue observada por primera vez en el siglo XIX, cuando los ejes de los carros de ferrocarril comenzaron a fallar después de un corto tiempo de servicio. A pesar de haber sido construidos con acero dúctil, se observó una falla súbita de tipo frágil [9]. Los ejes están sometidos a cargas transversales que generan flexión, tal como se ilustra en la Figura 2.4(a). Debido al giro del eje, cualquier punto de la periferia pasará por el punto  $t_1$  (Figura 2.4(b)) (tiempo  $t_1$  en la Figura 2.4(c), soportando un esfuerzo de tracción máximo. Luego pasará por el eje neutro (en  $t_2$ ) soportando cero esfuerzos. Cuando haya girado un cuarto de vuelta más soportará un esfuerzo máximo de compresión (en  $t_3$ ) (ya que estará al otro lado del eje neutro). Un cuarto de vuelta después, el punto pasará nuevamente por el eje neutro (en  $t_4$ ). Finalmente, el punto regresará a su posición inicial completando un ciclo de esfuerzo, donde comenzará el siguiente ciclo. Por lo tanto, este tipo de ejes está sometido a esfuerzos normales cíclicos [9].

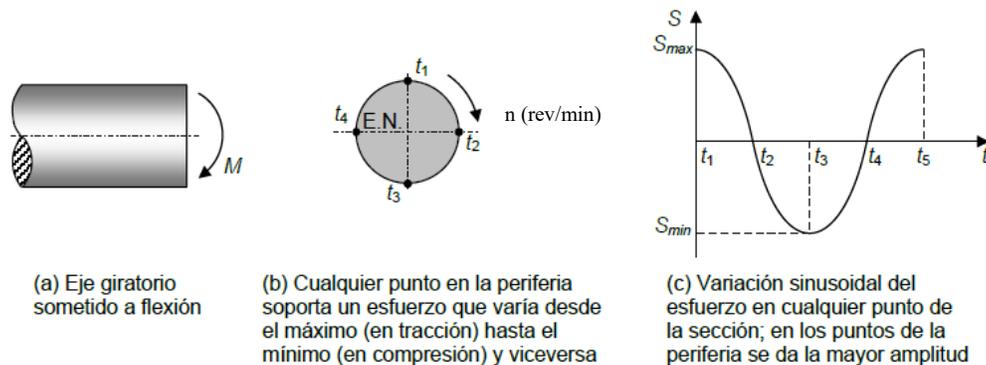


Figura 2.4. Esfuerzos variables en un eje que rota, sometido a un esfuerzo flexionante cortante [9].

En 1839 Poncelet empleó el término “fatiga”, como descripción a la falla presentada en los materiales sometidos a cargas variables. El desgaste producido tiene una apariencia frágil después de soportar cierto número de fluctuaciones de esfuerzo. En 1843 Rankine publicó un estudio sobre las causas de la ruptura inesperada de los muñones de los ejes de ferrocarril, en el cual decía que el material dúctil se había cristalizado y hecho frágil debido a la fluctuación de los esfuerzos [9].

Después de 20 años de investigación sobre las fallas por fatiga, en 1871 el ingeniero alemán August Wohler publicó los resultados de su estudio, donde dichos resultados mostraban como culpable de la falla por fatiga al número de ciclos de esfuerzo. Al realizar pruebas sobre los ejes que habían fallado por fatiga, observó que el material conservaba la misma resistencia y ductilidad bajo carga de tensión que el material original, por lo que dijo que el material no se había cansado ni fragilizado como se creía [9].

En el estudio realizado encontró la existencia de un límite de resistencia a la fatiga (límite de fatiga) para los aceros. Wohler realizó pruebas sobre probetas de acero sometidas a flexión giratoria; es decir, el tipo de carga que se genera en un elemento que gira sometido a un momento

flector constante. En dichas pruebas se pretendía relacionar los niveles de esfuerzo a los cuales se sometían las probetas, con el número de ciclos de carga que soportaban hasta la falla. Wohler obtuvo un diagrama como el de la Figura 2.5, el cual es conocido como diagrama  $[S - N]$  (esfuerzo - número de ciclos) o diagrama de vida-resistencia de Wohler. El esfuerzo (o resistencia),  $S$ , corresponde al valor del esfuerzo máximo (ver Figura 2.5) al cual se somete la probeta, y  $N$  es el número de ciclos de esfuerzo. Las líneas del diagrama representan aproximaciones a los puntos reales de falla obtenidos en los ensayos [9].

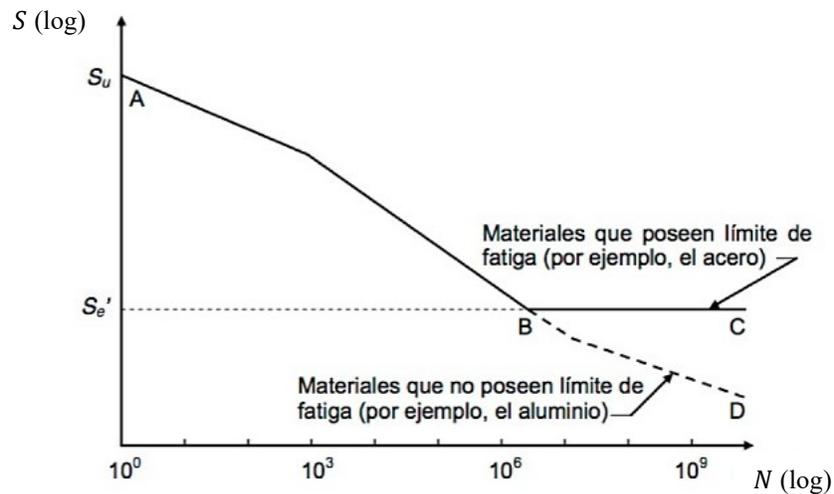


Figura 2.5. Diagrama  $S - N$  o diagrama de Wohler [9].

En la Figura 2.5 se observa que para el rango donde la pendiente de la curva continua es negativa, entre menor sea el esfuerzo al cual se somete la probeta, mayor es su duración. Al someter una probeta a resistencia última,  $S_u$ , esta sólo soporta la primera aplicación de carga máxima. Para esfuerzos menores se tendrán mayores duraciones.

El diagrama para muchos aceros es como el dado por la curva ABC. La curva tiene un codo en  $[S = S'_e]$  y  $N = 10^6$  ciclos, a partir del cual el esfuerzo que produce la falla permanece constante. Esto indica que, si la probeta se somete a un esfuerzo menor que  $S'_e$ , ésta no fallará; es decir, la probeta tendrá una vida infinita. A niveles superiores de esfuerzo, la probeta fallará después de un cierto número de ciclos de carga y como consecuencia tendrá una vida finita o limitada a ciertos ciclos de carga. Como  $S'_e$  es el límite por debajo del cual no se produce falla, se le conoce como límite de fatiga.

Muchos aceros al carbono y aleados, algunos aceros inoxidables, hierros, aleaciones de molibdeno, aleaciones de titanio y algunos polímeros poseen un codo a partir del cual la pendiente de la curva es nula. Otros materiales como “aluminio, magnesio, cobre, aleaciones de níquel y algunos aceros inoxidables, así como aleaciones de aceros al carbono y de alta resistencia” no poseen límite de fatiga, teniendo comportamientos similares al dado por la curva ABD de la Figura 2.5. A pesar de que la pendiente de la curva puede ser “menor” para  $N$  mayor de aproximadamente  $10^7$  ciclos, teóricamente no existe un nivel de esfuerzo, por pequeño que éste sea, que nunca produzca la falla en la probeta.

La prueba de flexión giratoria, que arroja los datos de la curva  $[S - N]$ , se convirtió en estándar. Para muchos materiales de ingeniería se han desarrollado estas pruebas con el fin de determinar sus comportamientos cuando se someten a cargas variables y, específicamente, para encontrar los límites de fatiga o la resistencia a la fatiga para un número de ciclos determinado.

En 1953 y 1954, muchos años después del descubrimiento del fenómeno de la fatiga, tres aviones Comet Británicos (primeras aeronaves comerciales de reacción para pasajeros) se desintegraron debido a fallas por fatiga causadas por ciclos de presurización y despresurización del fuselaje. Después, en 1988, un Boeing 737 (vuelo 243 de Aloha Airlines) perdió un tercio de la parte superior de la cabina en pleno vuelo; aterrizó con pérdidas mínimas de vidas. Éstos, sin embargo, no son los únicos ejemplos recientes de falla por fatiga de tipo catastrófico [9].



## 3 Marco teórico

### 3.1 Procedimiento general para el diseño de un eje

Un eje con sección transversal circular generalmente se emplea en equipos mecánicos o maquinaria, puesto que pueden estar sometidos a esfuerzos cíclicos o fatiga, como consecuencia de la flexión combinada y las cargas de torsión que deben transmitir o soportar [10]. Por lo general, en un eje inciden elementos con la finalidad de transmitir potencia, como engranes, catarinas para cadenas o poleas para bandas, mismos que ejercen fuerzas transversales sobre el eje (perpendiculares a este). Estas fuerzas provocan momentos flexionantes en el eje, por lo que requieren un análisis del esfuerzo debido a la flexión, motivo por el cual en el diseño de ejes se deben analizar los esfuerzos combinados en la mayoría de los ejes [7].

El método recomendado para diseñar y analizar ejes es la teoría de falla por energía de distorsión máxima (Von Mises), presentada y descrita brevemente en la sección 3.12. Sin embargo, pueden presentarse esfuerzos cortantes verticales y esfuerzos normales directos, estos dominan principalmente en ejes de longitudes cortas o secciones donde no se presenta flexión ni torsión [6].

Según Mott [7], las tareas específicas que deben desarrollarse en el diseño y análisis de un eje dependen de su diseño propuesto. Por lo que, se recomienda el procedimiento descrito en la Tabla 3.1 para el diseño de un eje [7] y las recomendaciones de la sección 2.4.

Tabla 3.1. Procedimiento para el diseño de un eje recomendado por Mott [7].

<b>Procedimiento para diseñar un eje</b>	
1.	Definir la velocidad de giro del eje.
2.	Definir la potencia o el par torsional que debe transmitir el eje.
3.	Determinar el diseño de los elementos transmisores de potencia o demás piezas que se montan sobre el eje y especificar el lugar requerido para cada uno.
4.	Determinar la ubicación de los cojinetes en el eje, comúnmente para sostener un eje se emplean únicamente dos cojinetes. Se recomienda colocar los cojinetes a cada lado de los elementos transmisores de potencia para minimizar los momentos flexionantes, con la finalidad de obtener un soporte estable del eje y crear un balance de las cargas en los cojinetes. También con el objetivo de mantener las deflexiones dentro de valores razonables y seguros, la longitud general del eje debe ser lo más pequeña posible.

5.	Proponer los detalles geométricos del eje de forma general, considerando la forma en que se transmite la potencia de cada elemento al eje, la posición axial en que se mantendrá cada elemento y la sujeción de cada elemento en el eje.
6.	Determinar el par torsional en cada punto del eje mediante diagramas de par torsional.
7.	Indicar las fuerzas que inciden sobre el eje, en dirección radial y axial.
8.	Determinar las componentes vertical y horizontal de las fuerzas radiales.
9.	Calcular la fuerza de reacción en cada punto, específicamente en los cojinetes de soporte.
10.	Determinar la distribución de momentos flexionantes en el eje, mediante los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
11.	Determinar el material con el que se fabricará el eje y sus características (estirado en frío y con tratamiento térmico, etc.) para determinar la resistencia última, la resistencia a la fluencia y el porcentaje de elongación del material elegido.
12.	Definir el factor de diseño óptimo, tomando en cuenta la forma en que se aplica la carga (uniforme, choque, impactos inusuales, etc.).
13.	Analizar los puntos críticos del eje para determinar el diámetro mínimo aceptable en ese punto, para garantizar que el eje sea capaz de soportar las cargas que inciden en ese punto. Los principales puntos críticos son donde se presentan cambios de diámetro, concentraciones de esfuerzos, valores máximos de par torsional y de momento flexionante.
14.	Especificar los diámetros finales para cada punto en el eje, tomando en cuenta los resultados obtenidos en el paso 13 y medidas estándares según las normas. También deben especificarse los detalles del diseño, es decir, tolerancias, radios de chaflán, altura de los escalones, dimensiones de cuñeros, entre otros según sea el caso.

### 3.2 Materiales para ejes

La elección de un material es uno de los factores que garantizan el correcto funcionamiento de un elemento respecto a ciertas condiciones de carga o ciclos de vida. Los requerimientos de diseño para un eje son parte imprescindible en el proceso de diseño, ya que, la resistencia mínima requerida para garantizar la tolerancia de esfuerzos de carga afecta directamente a la elección de los materiales y su tratamiento.

Con la finalidad de reducir deflexiones en ejes, el material más común es el acero, debido a su alto módulo de elasticidad. Por otra parte, el hierro colado o nodular son empleados pocas veces o en casos específicos en los que los engranes u otros elementos se funden íntegramente con el eje, también se emplea el bronce o acero inoxidable para ambientes marinos o corrosivos [8].

Al iniciar el diseño de un eje y no contar con alguna referencia del material a emplear, una buena práctica o indicio es comenzar el análisis con un acero de bajo o medio carbono de bajo costo. Cuando las condiciones de resistencia predominan a las de deflexión, entonces debe probarse un material con mayor resistencia, misma que permite que las dimensiones del eje disminuyan hasta que el exceso de deflexión adquiera importancia. Generalmente, los ejes maquinados se fabrican con aceros de bajo o medio carbono, ya sea que estos sean laminados en frío o caliente y se tienen las siguientes consideraciones: el acero estirado en frío es empleado para diámetros menores a 3in y el acero laminado en caliente debe maquinarse por completo [6].

Por otra parte, Mott [7] recomienda emplear aceros con una buena ductilidad (capacidad de un material para sufrir deformaciones sin fracturarse) y que el porcentaje de elongación sea mayor al 12%, así como las sugerencias de aplicaciones descritas en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Principales usos de algunos aceros comunes [7].

Número UNS <sup>1</sup>	Número AISI <sup>2</sup>	Aplicaciones
G10150	1015	Piezas moldeadas en lámina; partes maquinadas (se pueden cementar).
G10300	1030	Piezas de uso general, en forma de barra, palancas, eslabones, cuñas.
G10400	1040	Ejes, engranes.
G10800	1080	Resortes; piezas para equipo agrícola sometidas a abrasión (dientes de rastrillo, discos, rejas de arado, dientes de cortacéspedes).
G11120	1112	Piezas de máquinas con tornillo.
G12144	12L14	Piezas que requieran buena capacidad de maquinado.
G41400	4140	Engranes, ejes, piezas forjadas.
G43400	4340	Engranes, ejes, piezas que requieran buen endurecimiento en interior.
G46400	4640	Engranes, ejes, levas.
G51500	5150	Ejes para trabajo pesado, resortes, engranes.
G51601	51B60	Ejes, resortes, engranes con mejor templabilidad.
G52986	E52100	Pistas de rodamientos, bolas, rodillos (acero para rodamientos).
G61500	6150	Engranes, piezas forjadas, ejes, resortes.
G86500	8650	Engranes, ejes.
G92600	9260	Resortes.

<sup>1</sup> Sistema Unificado de Numeración.

<sup>2</sup> Instituto Americano del Hierro y el Acero.

En la Figura 3.1 se ilustra el diagrama de esfuerzo – deformación, donde se puede observar que los materiales dúctiles (como: hierro, acero de bajo o medio carbono, latón, cobre o aluminio) presentan esfuerzo de cedencia y esfuerzo último, mientras que los materiales frágiles (como: aceros con alto contenido de carbono, vidrio, cerámica o porcelana) solo se fracturan respecto a una carga que no cambia a través del tiempo.

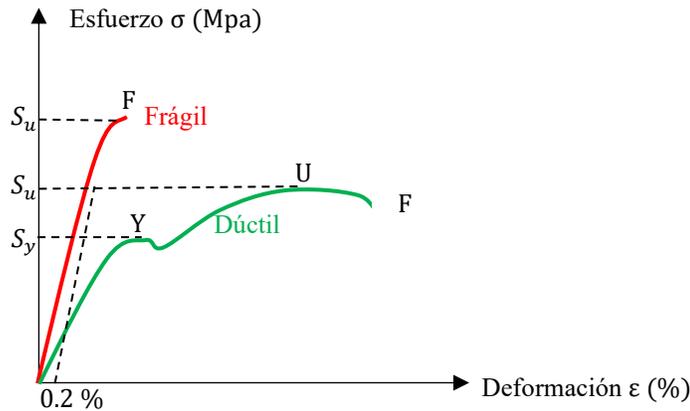


Figura 3.1. Diagrama esfuerzo - deformación de un material frágil vs uno dúctil.

También se observa que el comportamiento frágil carece de zona de deformación plástica en su diagrama de esfuerzo deformación a diferencia del comportamiento dúctil que si lo considera, por lo que este último es el material más empleado para el diseño de ejes por sus características.

Por otra parte, en la Figura 3.2 se ilustra como dependiendo del comportamiento del material (frágil o dúctil) es como se aplican las diversas teorías de falla, para el diseño de ejes o de diversos elementos que comprende el diseño de elementos de máquinas o el diseño mecánico.

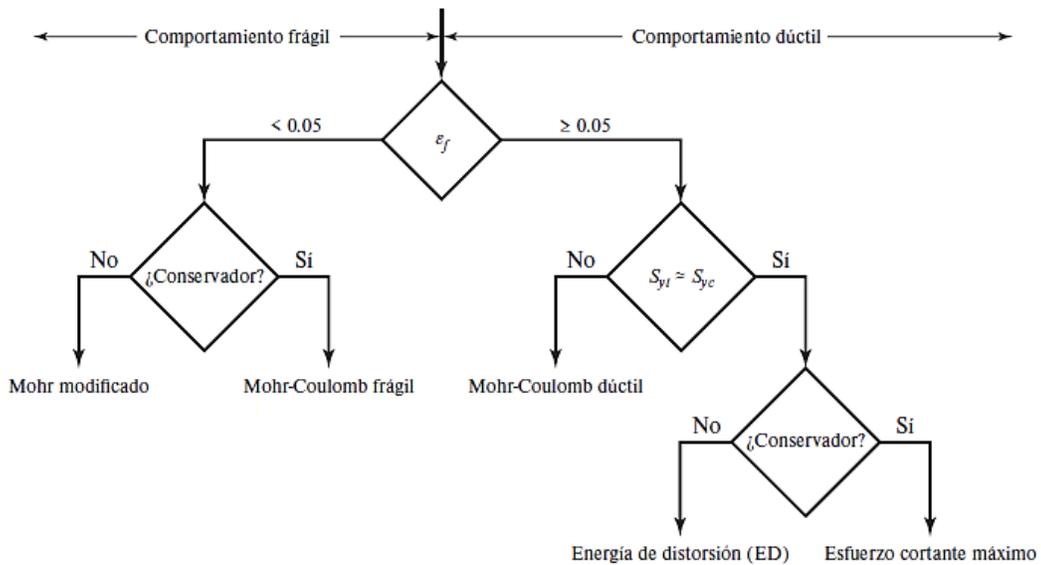


Figura 3.2. Diagrama de flujo para la selección de teorías de falla [6].

### 3.3 Configuración del eje

La configuración general de un eje para posicionar los elementos que lo conforman (engranes, poleas, cojinetes, etc.), debe ser especificado en los primeros pasos del proceso de diseño, con la finalidad de elaborar un análisis de fuerzas de cuerpo libre y obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Generalmente, la geometría de un eje es la de un cilindro escalonado como el que se muestra en la Figura 3.3, ya que el uso de escalones (hombros o resaltos) crean un medio excelente para localizar en forma axial los elementos del eje y para ejecutar cualquier carga de empuje necesaria [6].

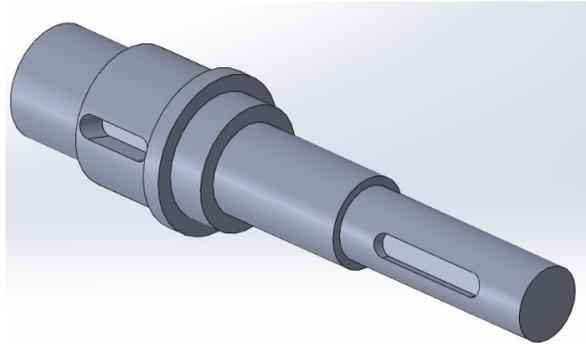


Figura 3.3. Eje convencional escalonado como sistema de sujeción o retención y con cuñero o chavetero como medio para transmitir potencia.

El posicionamiento axial de los componentes está determinado por la configuración de la carcasa y demás componentes del engranaje. Generalmente los componentes que soportan carga son colocados entre cojinetes y las poleas o ruedas dentadas deben montarse por fuera, con la finalidad de facilitar la instalación de la banda o cadena. Por lo que la longitud de los voladizos debe ser lo más corta posible con la finalidad de reducir la deflexión [6].

### 3.4 Fuerzas ejercidas sobre un eje debido a los elementos que inciden sobre él

#### 3.4.1 Engranés rectos

Durante la transmisión de potencia, la fuerza ejercida sobre un diente de engrane, actúa en dirección normal (perpendicular) al perfil de involuta del diente. En la Figura 3.4 se pueden observar las fuerzas que actúan sobre un diente de engrane recto, por lo que para el análisis de un eje se consideran las componentes rectangulares de esta fuerza, mismos que actúan en dirección radial y tangencial [7].

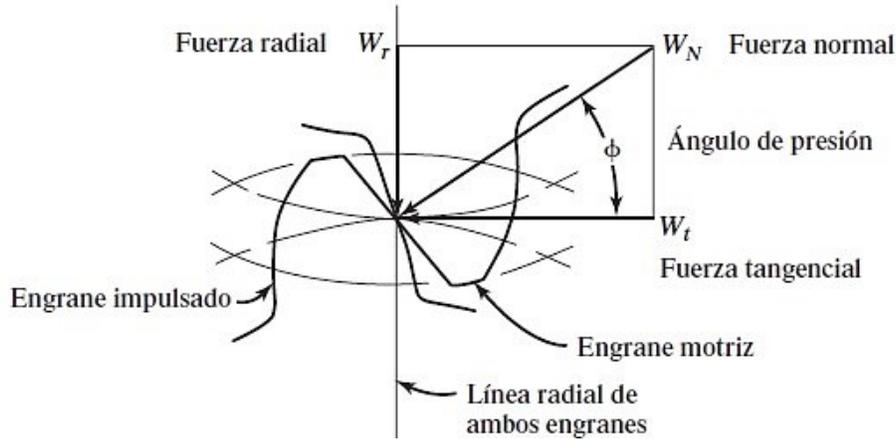


Figura 3.4. Fuerza ejercida sobre los dientes de un engrane impulsado [7].

Por concepto se tiene que el par torsional es el producto de la carga transmitida  $W_t$  por el radio de paso del engrane  $R$  o también:

$$T = \frac{P}{\omega} \quad (3.1)$$

Donde,  $P$  es la potencia que se transmite (hp) y  $\omega$  es la velocidad angular (rev/seg).

Calculando la fuerza tangencial  $W_t$ , directamente con el par torsional conocido que transmite el engrane, se tiene que el par torsional esta dado por:

$$T = W_t \left( \frac{D}{2} \right) = \frac{P}{n} \quad (3.2)$$

Trabajando el par torsional en unidades inglesas, se hace la conversión de unidades de la ecuación (3.2) como sigue:

$$T = \frac{P \text{ (hp)}}{n \left( \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right)} \cdot \frac{550 \text{ lb} \cdot \frac{\text{ft}}{\text{s}}}{1 \text{ hp}} \cdot \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}} \quad (3.3)$$

Por lo que el par torsional en  $\text{lb} \cdot \text{in}$  queda como:

$$T = 63000 \frac{P}{n} \quad (3.4)$$

Donde,  $n$  es la velocidad de giro en rpm.

Para calcular la fuerza tangencial, esta se despeja de la ecuación (3.2) como sigue:

$$W_t = \frac{T}{(D/2)} \quad (3.5)$$

Donde,  $D$  es el diámetro de paso del engrane en pulgadas (in).

Finalmente, la fuerza normal  $W_N$ , y la fuerza radial  $W_r$ , se pueden calcular a partir de  $W_t$  conocida, relacionando mediante las condiciones de triángulo rectángulo, como las que se aprecian en la Figura 3.4 se tiene

$$W_N = \frac{W_t}{\cos \phi} \quad (3.6)$$

$$W_r = W_t \tan \phi \quad (3.7)$$

Donde  $\phi$  es el ángulo de presión del perfil del diente, el ángulo de presión típico es de  $14\frac{1}{2}^\circ$ ,  $20^\circ$  o  $25^\circ$  [7].

### 3.4.2 Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos

Con el objetivo de realizar un análisis correcto de fuerzas y esfuerzos de los ejes que sostienen a los engranes, se deben representar las direcciones correctas de las fuerzas sobre los engranes.

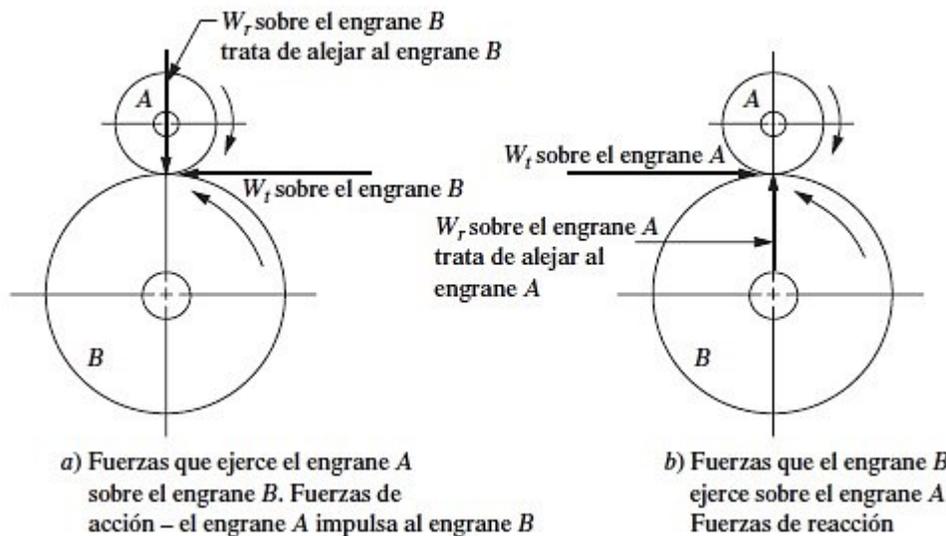


Figura 3.5. Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos acoplados [7].

Para determinar las fuerzas que actúan sobre un determinado engrane, se debe identificar si se trata de un engrane impulsor o impulsado. Después se visualizan las fuerzas de acción del engrane impulsor. Si el engrane de interés es el engrane impulsado, son las fuerzas que actúan sobre él. Si el engrane de interés es el impulsor, las fuerzas actúan sobre él en direcciones opuestas a las de las fuerzas de acción [7].

Como se puede observar, en la Figura 3.5(a) se ilustra la acción del engrane impulsor A sobre el engrane B, que reacciona como engrane impulsado. La fuerza tangencial  $W_t$  actúa perpendicularmente a la fuerza radial, misma acción que causa el giro del engrane

B, por otra parte, la fuerza radial  $W_r$  ejercida por el engrane A, actúa a lo largo de la línea radial y por consecuencia, tiende a alejar al engrane B.

En el caso de la Figura 3.5(b), se ilustra la reacción del engrane B (impulsado) respecto al engrane A (impulsor), es decir, el engrane B devuelve el empuje al engrane A como reacción, mediante una fuerza tangencial que se opone a la del engrane A y una fuerza radial que tiende a alejarlo. En la Tabla 3.3 se muestra la dirección de las fuerzas para los engranes de la Figura 3.5.

Tabla 3.3. Dirección de las fuerzas sobre engranes rectos engranados [7].

	<b>Acción:</b> El engrane impulsor empuja al engrane impulsado.	<b>Reacción:</b> El engrane impulsado regresa el empuje al engrane impulsor.
$W_t$	←	→
$W_r$	↓	↑

### 3.4.3 Engranes helicoidales

Los engranes helicoidales además de producir fuerzas tangenciales, normales y radiales, también producen una fuerza axial. En la Figura 3.6 se muestran dos engranes helicoidales acoplados, diseñados para montarse sobre ejes paralelos y en la Figura 3.7 se ilustra el sistema de fuerzas que se presenta entre los dientes de dos engranes helicoidales acoplados.

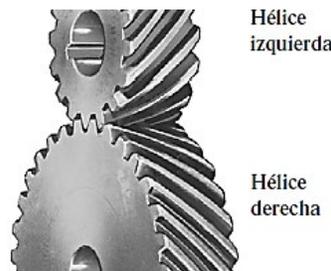


Figura 3.6. Engranes helicoidales con un ángulo de hélice de  $45^\circ$  [7].

La fuerza normal verdadera  $W_N$ , actúa en dirección perpendicular a la cara del diente, en el plano normal (Figura 3.7(d)) a la superficie del diente. Esta fuerza  $W_N$  no es muy necesaria, ya que sus tres componentes individuales son empleadas para los análisis de los engranes helicoidales. Las componentes ortogonales dependen de los siguientes ángulos: ángulo de presión normal ( $\phi_n$ ), ángulo de presión transversal ( $\phi_t$ ), y ángulo de hélice ( $\psi$ ). Mismos ángulos que definen la geometría de los dientes de los engranajes

helicoidales. Como dato conocido se tiene el ángulo de hélice y alguno de los otros dos y para calcular el tercero se tiene la siguiente relación [7].

$$\tan \phi_n = \tan \phi_t \cos \psi \quad (3.8)$$

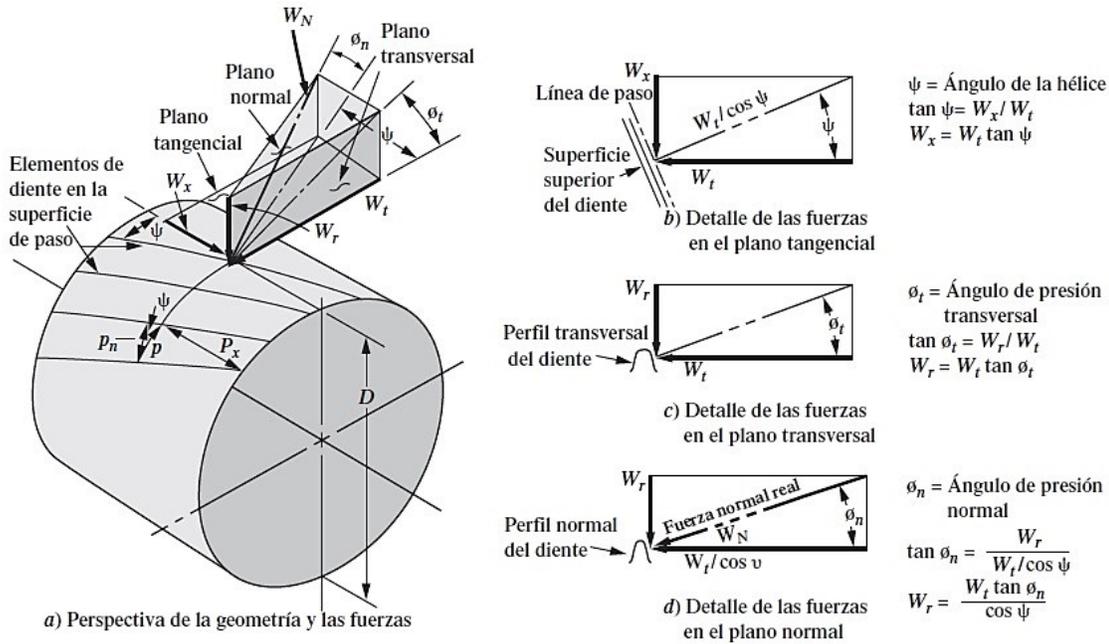


Figura 3.7. Geometría y fuerzas de los engranes helicoidales [7].

La fuerza tangencial  $W_t$ , se calcula mediante las ecuaciones (3.4) y (3.5), o sustituyendo la ecuación (3.4) en la ecuación (3.5) se tiene:

$$W_t = 126000 \frac{P}{nD} \quad (3.9)$$

En el caso de conocer la velocidad de la línea de paso ( $v_t$ ) en ft/min y la potencia transmitida  $P$  en HP, la carga tangencial se define como:

$$W_t = 33000 \frac{P}{v_t} \quad (3.10)$$

Para el caso de la fuerza radial  $W_r$ , esta actúa hacia el centro del engrane, perpendicular al círculo de paso y a la fuerza tangencial. Esta fuerza tiende a separar a los dos engranes como se observa en la Figura 3.7(c) y se calcula como sigue [7]:

$$W_r = W_t \tan \phi_t \quad (3.11)$$

Finalmente, la fuerza axial  $W_x$ , actúa paralela al eje del engrane y causa una carga de empuje que deben de resistir los cojinetes que soportan al eje [7]. Conociendo la fuerza tangencial, la fuerza axial se calcula como:

$$W_x = W_t \tan \psi \quad (3.12)$$

### 3.4.4 Engranés cónicos rectos

Los engranes cónicos rectos (Figura 3.8) presentan un conjunto de fuerzas con tres componentes debido a su forma cónica y a la forma de involuta del diente. En estos engranes las fuerzas (tangencial, radial y axial) obran de forma concurrente aproximadamente a la mitad de la cara de los dientes y en el cono de paso como se muestra en la Figura 3.9.



Figura 3.8. Engrane y piñón cónicos rectos acoplados [41].

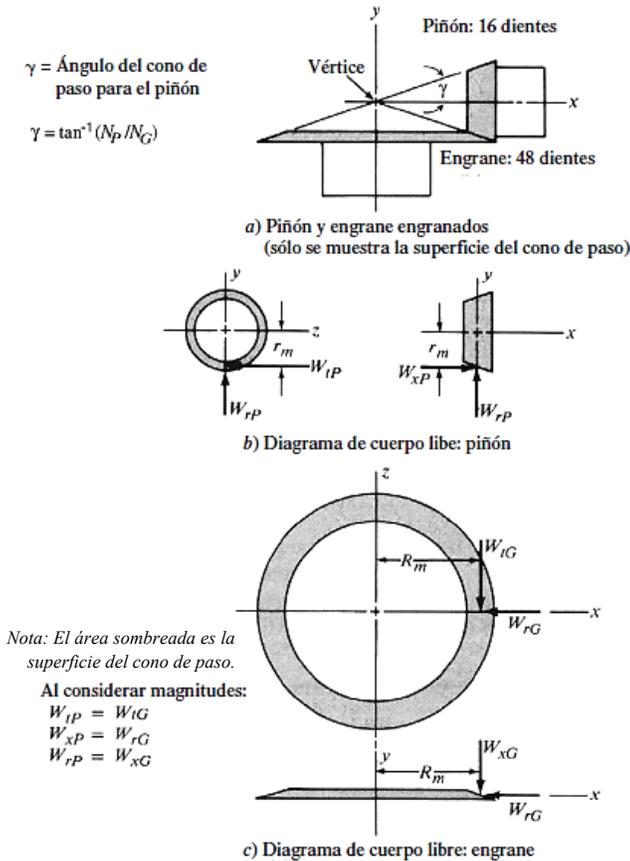


Figura 3.9. Fuerzas sobre engranes cónicos [7].

Para este caso, para el cono de paso se tiene la fuerza tangencial que produce el par torsional sobre el piñón y sobre el engrane. Este par torsional se calcula con la ecuación (3.4). Definiendo el radio promedio del piñón como:

$$r_m = \frac{d}{2} - \left(\frac{F}{2}\right) \sin \gamma \quad (3.13)$$

Donde,  $d$  es el diámetro de paso del piñón,  $\gamma$  es el ángulo del cono de paso para el piñón (Figura 3.9(a)). Entonces la carga transmitida o fuerza tangencial del piñón es:

$$W_{tP} = \frac{T}{r_m} \quad (3.14)$$

Como la carga radial actúa hacia el centro del piñón y perpendicular a su eje, esta causa flexión en el eje del piñón, por lo que la fuerza radial del piñón está dada por:

$$W_{rP} = W_{tP} \tan \phi \cos \gamma \quad (3.15)$$

Donde,  $\phi$  es el ángulo de presión para los dientes. Para la carga axial se tiene que, esta actúa paralela al eje del piñón y tiende a alejarlo del engrane acoplado, misma situación por la que se ocasiona una fuerza de empuje sobre los cojinetes [7]. Como la carga actúa a una distancia igual al radio promedio del engrane respecto al eje, se produce un momento flexionante, así la fuerza axial en el piñón está dada por:

$$W_{xP} = W_{tP} \tan \phi \sin \gamma \quad (3.16)$$

Para el caso de las fuerzas ejercidas sobre el engrane  $W_{tG}$ ,  $W_{rG}$  y  $W_{xG}$ , estas se pueden calcular con las mismas ecuaciones presentadas para el caso del piñón, solo debe remplazarse la geometría del piñón por la del engrane ilustradas en la Figura 3.9.

### 3.4.5 Tornillos sin fin y coronas

Al conjunto de tornillos sin fin y coronas también se les conoce como engranajes sin fin, observe la Figura 3.10.



Figura 3.10. Engranaje sin fin de envoltente simple consistente en un tornillo sin fin y un engrane envoltente [6].

Estos conectan ejes que no se intersecan y que no son paralelos, generalmente están dispuestos en ángulos rectos. En el acoplamiento de un engranaje sin fin existe una condición de carga tridimensional, es decir, sobre cada elemento actúan las componentes tangenciales  $W_t$ , radial  $W_r$  y axial  $W_x$  [6], observe la Figura 3.11.

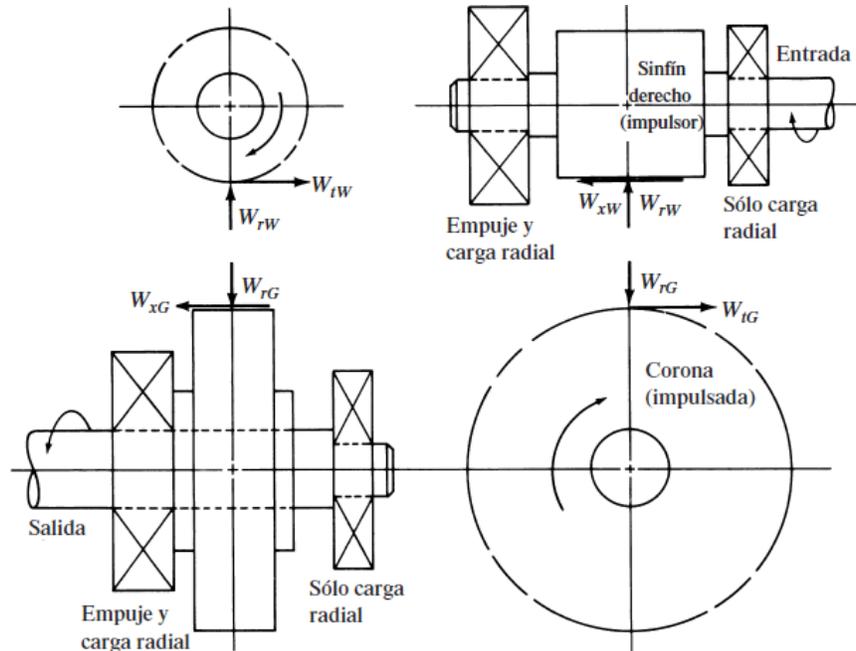


Figura 3.11. Fuerzas sobre un tornillo sin fin y una corona [7].

Debido al ángulo (típico) de  $90^\circ$  entre el eje de un tornillo sin fin y el eje de la corona, la magnitud de la fuerza tangencial del engranaje sin fin (corona)  $W_{tG}$  es igual a la fuerza axial del tornillo sin fin  $W_{tW}$  y viceversa [6]. Observe que debido a la orientación de los ejes las direcciones de las fuerzas apareadas son opuestas, por el principio de acción y reacción [7] y denotando con el subíndice  $W$  y  $G$  al tornillo sin fin y la corona respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} W_{tG} &= W_{xW} \\ W_{xG} &= W_{tW} \\ W_{rG} &= W_{rW} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Inicialmente se calcula la fuerza tangencial sobre la corona, tomando en cuenta las condiciones requeridas para el par torsional, potencia y velocidad del eje de salida [7]. Para calcular esta fuerza, primero se define el par torsional de salida de la corona  $T_O$  como sigue:

$$T_O = 63000 \frac{P_O}{n_G} \quad (3.18)$$

Donde,  $P_O$  es la potencia de salida y  $n_G$  es la velocidad de giro del eje de salida en rpm, ya que generalmente estos datos son conocidos por los requisitos de la máquina

impulsada [7]. Analizando la Figura 3.11 se deduce que el par torsional de salida se encuentra como:

$$T_O = W_{tG} \cdot r_G \quad (3.19)$$

Donde  $r_G$  es el radio de paso de la corona (in), por lo que de la referencia [7] se deducen las fuerzas como sigue:

$$W_{tG} = \frac{T_O}{r_G} \quad (3.20)$$

$$W_{xG} = W_{tG} \left( \frac{\cos \phi_n \sin \lambda + \mu \cos \lambda}{\cos \phi_n \cos \lambda - \mu \sin \lambda} \right) \quad (3.21)$$

$$W_{rG} = \frac{W_{tG} \sin \phi_n}{\cos \phi_n \cos \lambda - \mu \sin \lambda} \quad (3.22)$$

Definiendo el par torsional  $T_O$  (lb·in), el ángulo de avance  $\lambda$  y el ángulo de presión normal  $\phi_n$  como datos conocidos.

### 3.4.6 Catarinas

Una catarina es un par de ruedas dentadas y acopladas a una cadena, con la finalidad de transmitir potencia. Como se muestra en la Figura 3.12, la parte superior de la cadena se encuentra tensa con la finalidad de producir par torsional en cada catarina. Esta acción tiene como consecuencia que la resultante de la fuerza flexionante ejercida sobre el eje que sostiene la catarina sea igual a la tensión en el lado tenso de la cadena [7].

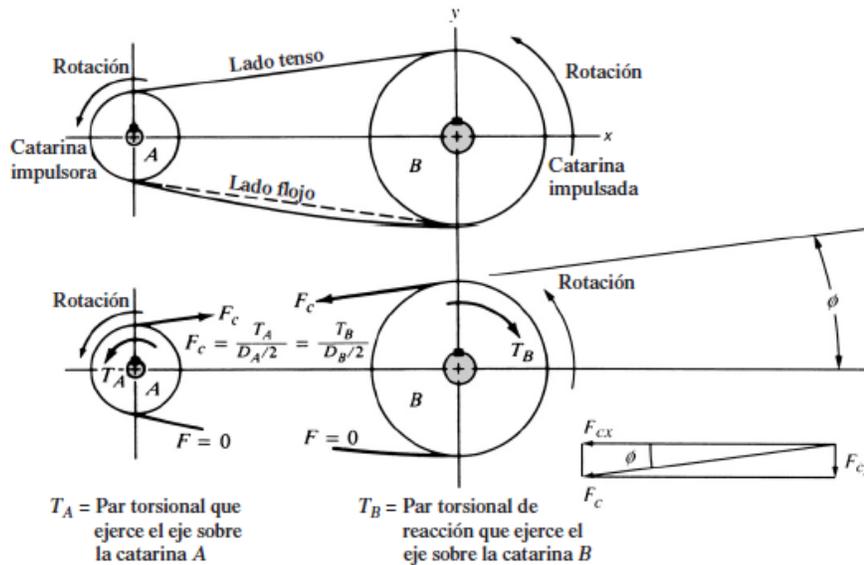


Figura 3.12. Fuerzas ejercidas sobre las catarinas [7].

Teniendo el par torsional  $T$  ejercido y el diámetro de paso  $D$  de la misma catarina, la fuerza en la cadena  $F_c$  se puede calcular como sigue:

$$F_c = \frac{2T}{D} \quad (3.23)$$

Por diseño, una catarina debe ser de mayor diámetro que la otra, por lo que la resultante de la fuerza en la cadena genera un ángulo respecto a la línea entre los centros de las catarinas o ejes. Es por esto por lo que la componente horizontal  $F_{cx}$  y vertical  $F_{cy}$  de la fuerza en la cadena  $F_c$ , están dadas por:

$$F_{cx} = F_c \cos \theta \quad (3.24)$$

$$F_{cy} = F_c \sin \theta \quad (3.25)$$

Donde,  $\theta$  es el ángulo de inclinación del lado tenso de la cadena con respecto al eje x (horizontal). Si el ángulo  $\theta$  es muy pequeño, se causa un error mínimo si se supone que toda la fuerza  $F_c$  actúa en dirección de x, a menos que se diga otra cosa [7].

### 3.4.7 Poleas para bandas en V

El funcionamiento de las poleas para bandas en V es similar al de las catarinas, la diferencia entre estos métodos de transmisión de potencia es que en las poleas para bandas en V, la banda está en tensión por sus dos lados como se muestra en la Figura 3.13, mientras que en la catarina la cadena solo lo está de un lado, lado superior.

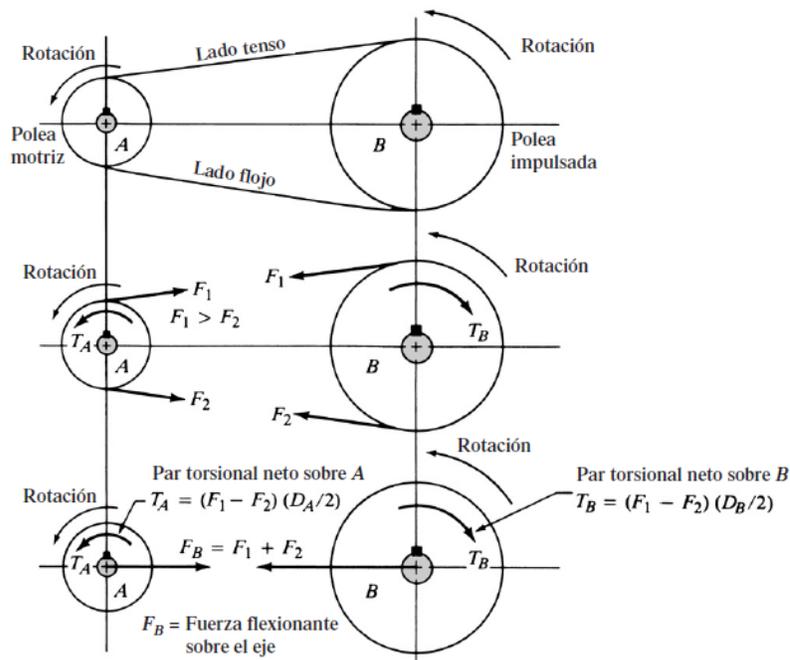


Figura 3.13. Fuerzas sobre poleas [7].

Como se puede observar en la Figura 3.13, la tensión en el lado tenso es mayor que en el lado flojo, es decir,  $F_1 > F_2$ . Por esta razón existe una fuerza impulsora neta  $F_N$  sobre las poleas, que al conocer el par torsional transmitido se calcula como sigue:

$$F_N = \frac{2T}{D} \quad (3.26)$$

Tomando en cuenta las tensiones en las poleas,  $F_N$  es igual a:

$$F_N = F_1 - F_2 \quad (3.27)$$

La fuerza de flexión  $F_B$  sobre el eje que sostiene la polea depende de la suma de  $F_1 + F_2 = F_B$ . Con la finalidad de resultados precisos, se deben emplear las componentes de  $F_1$  y  $F_2$  paralelas a la línea entre centros de las poleas. Si las poleas tiene diámetros radicalmente distintos, el error disminuye si se supone que  $F_B = F_1 + F_2$  [7].

Suponiendo una relación de la tensión en el lado tenso y en el lado flojo, para transmisiones con bandas en V y en un caso normal [7], se supone la siguiente relación:

$$\frac{F_1}{F_2} = 5 \quad (3.28)$$

Con la finalidad de calcular una constante de relación  $C$ , directamente con  $F_N$  y  $F_B$ , se tiene:

$$F_B = C \cdot F_N \quad (3.29)$$

Donde, despejando a la constante  $C$  la relación queda como sigue:

$$C = \frac{F_B}{F_N} \quad (3.30)$$

Es decir:

$$C = \frac{F_1 + F_2}{F_1 - F_2} \quad (3.31)$$

Y despejando a  $F_1$  de la ecuación (3.28), queda:

$$F_1 = 5F_2 \quad (3.32)$$

Sustituyendo la ecuación (3.32) en (3.31), entonces:

$$C = \frac{5F_2 + F_2}{5F_2 - F_2} = \frac{6F_2}{4F_2} = 1.5 \quad (3.33)$$

Sustituyendo el valor de la constante  $C$  en la ecuación (3.29), Se tiene que la fuerza flexionante es igual a:

$$F_B = 1.5 F_N \quad (3.34)$$

Se recomienda considerar que la fuerza flexionante  $F_B$  actúa como una sola fuerza en la línea entre centros de las dos poleas como se indica en la Figura 3.13 [7].

### 3.4.8 Poleas para bandas planas

El análisis de la fuerza flexionante que ejercen las poleas para bandas planas es igual al de las poleas para bandas en V. El único dato que cambia es la relación entre las tensiones del lado tenso y el lado flojo, es decir, esta relación ya no es igual a 5, sino que toma el valor igual 3. Así, la ecuación (3.32) se modifica y queda como:

$$F_1 = 3F_2 \quad (3.35)$$

Y sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación (3.31) se tiene:

$$C = \frac{3F_2 + F_2}{3F_2 - F_2} = \frac{4F_2}{2F_2} = 2 \quad (3.36)$$

Por lo que, Sustituyendo el valor de la constante  $C$  en la ecuación (3.29), Se tiene que la fuerza flexionante es igual a:

$$F_B = 2 F_N \quad (3.37)$$

### 3.4.9 Acoplamientos rígidos

Un acoplamiento rígido (como el que se observa en la Figura 3.14) está diseñado para unir firmemente dos ejes entre sí, es decir, que no exista movimiento relativo entre ellos. Este elemento se emplea donde se necesita y se puede asegurar un alineamiento preciso entre dos ejes.



Figura 3.14. Acoplamiento rígido [7].

### 3.4.10 Acoplamientos flexibles

Un acoplamiento flexible sirve para transmitir potencia entre ejes, adaptándose a pequeños desalineamientos en las direcciones radiales, angulares o axiales. Por esto, los ejes adyacentes a los acoplamientos están sometidos a torsión, pero los desalineamientos no causan cargas axiales o de flexión [7].

## 3.5 Concentraciones de esfuerzos en el eje

No es necesario evaluar los esfuerzos en todos los puntos de un eje, es suficiente con evaluar las ubicaciones potencialmente críticas [6]. Generalmente estas ubicaciones se encuentran en la superficie exterior del eje, en ubicaciones axiales donde el momento flexionante es máximo o de interés, donde existe par torsional y donde se encuentran concentraciones de esfuerzo [8].

Comúnmente un eje transmite par torsional a través de una parte de él, típicamente el par torsional entra al eje mediante un engrane y sale por otro engrane. Es por esto que para determinar el par torsional en cualquier sección del eje se emplean diagramas de cuerpo libre. Para el caso de los momentos flexionantes sobre un eje, estos suelen determinarse mediante diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Un esfuerzo axial sobre el eje debido a componentes axiales, generalmente es despreciable respecto a un esfuerzo por momento flexionante, ya que contribuyen mínimamente a la fatiga, por lo que es aceptable despreciar los momentos axiales debido a engranes y cojinetes cuando hay flexión en un eje, pero, si la carga axial es aplicada al eje de alguna otra forma, no es seguro suponer que esta sea despreciable sin verificar su magnitud [6].

Al iniciar un proceso de diseño, es común desconocer los factores de concentración de esfuerzo  $K_t$ , ya que estos dependen de los diámetros del eje, de la geometría de los chaflanes y ranuras, como objetivos de diseño. Por lo que el ingeniero mecánico encargado del diseño, debe establecer valores preliminares empleados con más frecuencia, mismos que se emplean para llegar a estimaciones iniciales de los diámetros mínimos aceptables para los ejes [7].

### 3.5.1 Valores preliminares de diseño para los factores de concentración de esfuerzo $K_t$

Considerando las discontinuidades geométricas comunes de un eje de transmisión de potencia (cuñeros, escalones y ranuras para anillos de retención). Para obtener un

resultado conservador, el valor final debe ser menor que el valor del diseño original, de lo contrario, debe revisarse nuevamente el análisis de esfuerzos.

### 3.5.1.1 Cuñeros

Un cuñero o chavetero es una ranura longitudinal que se corta en el eje, para montar una cuña o chaveta que permita la transferencia de par torsional del eje al elemento transmisor de potencia, o viceversa. Siendo los más empleados; el cuñero de perfil y el cuñero de trineo ilustrados en la Figura 3.15. El cuñero de trineo se crea con una fresa circular igual al ancho de la cuña, produciendo un radio uniforme [7].

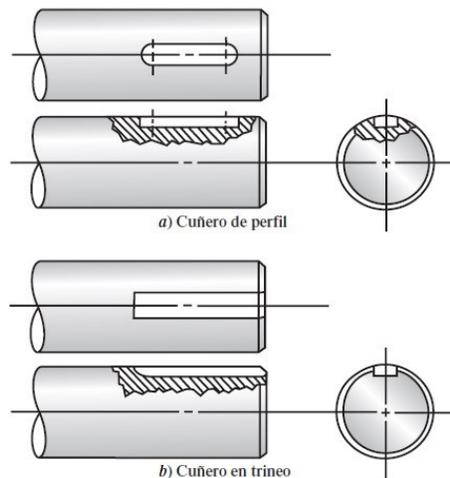


Figura 3.15. Cuñero de perfil y en trineo [7].

Los valores comunes empleados en el diseño son:

$$K_t = 2.0 \text{ y } \frac{r}{d} = 0.02 \text{ (Cuñero de perfil)}$$

$$K_t = 1.6 \text{ (cuñero en trineo)}$$

### 3.5.1.2 Chaflanes en escalones

Los chaflanes se presentan durante un cambio de diámetro en la geometría del eje, con la finalidad de formar un escalón contra el cual ubicar un elemento de máquina, mismo punto donde se produce una concentración de esfuerzos, que depende de la relación entre los diámetros y el radio del chaflán como se puede observar en la Figura 3.16 [7].

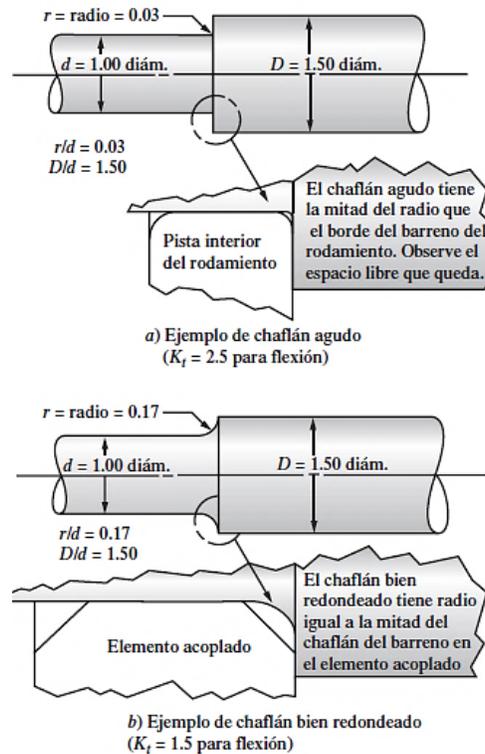


Figura 3.16. Chaflán en un eje [7].

Es recomendado que el radio del chaflán (radio de tangencia) sea lo mayor posible, con la finalidad de minimizar la concentración de esfuerzos en este punto. Para fines de diseño, los chaflanes se clasifican en dos categorías; agudos y bien redondeados, usando los siguientes valores en diseños para flexión establecidos en [7].

$$K_t = 2.5 \text{ (chaflán agudo)}$$

$$K_t = 1.5 \text{ (chaflán bien redondeado)}$$

### 3.5.1.3 Ranuras para anillos de retención

Los anillos de retención son empleados para retener en un cierto lugar diversos elementos de máquinas por medio de ranuras en el eje. La geometría de la ranura está determinada por el fabricante del anillo. Para un diseño convencional, se aplica  $K_t = 3$  al esfuerzo flexionante en una ranura para un anillo de retención, para considerar los radios de chaflanes demasiado agudos. El factor de concentración de esfuerzos no se aplica al esfuerzo cortante torsional, si es continuo en una dirección [7].

Nota: El valor estimado calculado del diámetro mínimo requerido en una ranura para anillo es el de la base de la ranura. El diseñador debe aumentar este valor en 6%, aproximadamente, para considerar la profundidad característica de las ranuras, y

determinar el tamaño nominal del eje. Aplique un factor por ranura para anillo igual a 1.06, al diámetro requerido calculado [7].

### 3.5.2 Factor de concentración de esfuerzo por fatiga $K_f$

El factor de concentración de esfuerzo por fatiga  $K_f$ , es un factor de esfuerzo reducido de  $K_t$ , debido a la disminución de la sensibilidad a la muesca [6]. El factor resultante está definido por:

$$K_f = \frac{\text{esfuerzo máximo en la pieza de prueba con muesca}}{\text{esfuerzo en la pieza de prueba sin muesca}} \quad (3.38)$$

Donde, la sensibilidad a la muesca  $q$  es:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{ó} \quad q_{cortante} = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1} \quad (3.39)$$

Usualmente el valor de  $q$ , se encuentra entre 0 y 1, por lo que si en la ecuación (3.39) se presenta;  $q = 0$ , entonces  $K_f = 1$  por lo que el material no presenta sensibilidad a la muesca, pero si  $q = 1$ , entonces  $K_f = K_t$  por lo que el material tiene sensibilidad total a la muesca [6]. Empleando estas condiciones se tiene:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad \text{ó} \quad K_{fs} = 1 + q_{cortante}(K_{ts} - 1) \quad (3.40)$$

La sensibilidad a la muesca para diversos materiales son obtenidas de forma experimental, en las Figuras 3.17 y 3.18 se muestran algunas tendencias de la sensibilidad a la muesca como función del radio de la muesca y la resistencia última [6].

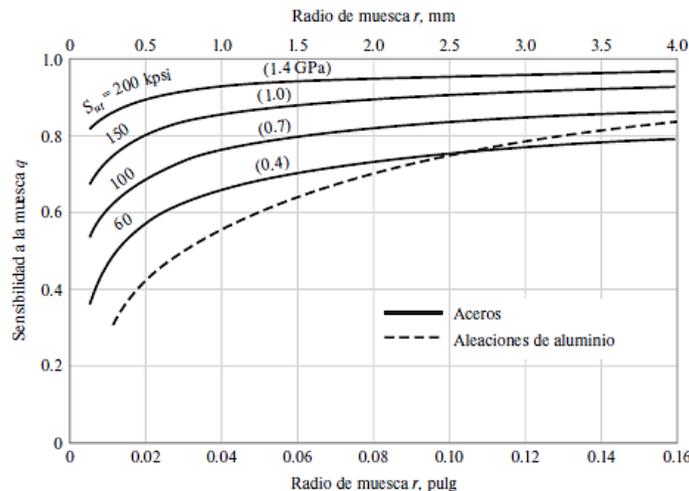


Figura 3.17. Sensibilidad a la muesca para aceros y aleaciones de aluminio forjado UNS A92024-T, sometidos a flexión inversa [6].

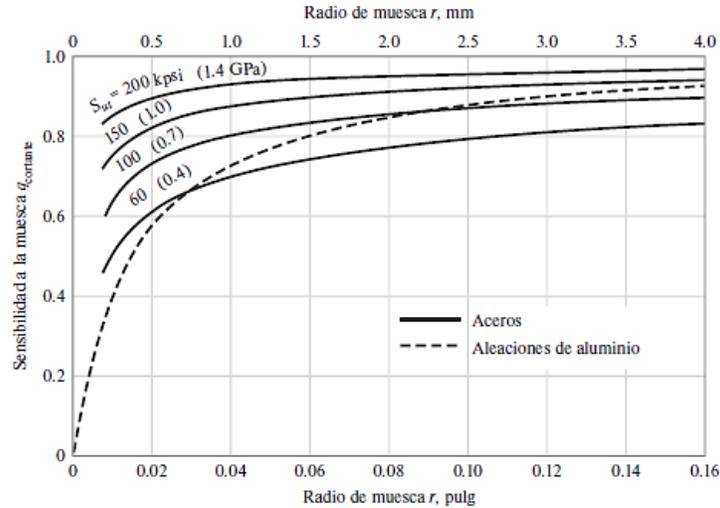


Figura 3.18. Sensibilidad a la muesca de materiales sometidos a torsión inversa [6].

### 3.6 Factor de Diseño ( $n_d$ ) y Factor de Seguridad ( $n$ ó $SF$ )

El factor de diseño es aquel número (mayor a 1) como requisito de diseño que establece que un elemento o diseño sea seguro. Es decir, la resistencia del material es mayor que los esfuerzos aplicados al elemento, ya que un elemento mecánico debe diseñarse para soportar una “sobrecarga de diseño”. Se plantea como un enfoque general del problema la pérdida de función sobre la carga permisible, es decir, el factor de diseño es la medida de seguridad relativa de un elemento bajo condiciones de carga. Este dato es necesario y propuesto por el diseñador como aproximación inicial para realizar los cálculos.

El factor de diseño, también se define como:

$$n_d = \frac{\text{parámetro de pérdida de función}}{\text{Esfuerzo permisible}} \quad (3.41)$$

Es decir;

$$n_d = \frac{S}{\sigma \text{ ó } \tau \text{ (esfuerzo normal o cortante)}} \quad (3.42)$$

La selección del factor de diseño  $n_d$  se reduce al criterio de ingeniería basado en la experiencia, generalmente estos factores se formalizan como un código de especificaciones de diseño para condiciones específicas, como: los códigos de la ASME para recipientes a presión, diversos códigos de construcción, valores estipulados en contratos legales para diseño y valores definidos en máquinas especiales. Por lo que estos factores de diseño comúnmente son incorporados en programas computacionales o software para el diseño de elementos de máquinas, por lo que el

ingeniero de diseño que emplea estas herramientas debe cerciorarse de que los valores establecidos sean los apropiados para la aplicación en particular [11].

Existen diversas recomendaciones sobre los valores del factor de diseño generalizados o que son empleados como guía. En [11] se sugieren las recomendaciones realizadas por el profesor Joseph Vidosic, donde estos factores de diseño se basan en la resistencia a la cedencia y se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Factores de diseño recomendados en [11] y propuestos por Vidosic [12].

<b>Factor de Diseño (<math>n_d</math>)</b>	<b>Casos</b>
1.25 a 1.5	Materiales excepcionalmente confiables que se emplean bajo condiciones controladas y sometidas a cargas y esfuerzos que pueden determinarse con certeza; usados casi invariablemente en casos en que el bajo peso es una consideración particularmente importante
1.5 a 2	Para materiales bien conocidos, bajo condiciones ambientales constantes, sometidos a cargas y esfuerzos que pueden determinarse fácilmente.
2 a 2.5	Para materiales promedio que operan en ambientes comunes y sometidos a cargas y esfuerzos que pueden determinarse.
2.5 a 3	Para materiales frágiles o para los que no han sido examinados bajo condiciones ambientales, de carga y esfuerzo.
3 a 4	Para materiales que no se han examinado y en condiciones ambientales, de carga y esfuerzo promedio.
3 a 4	Debe usarse también con materiales mejor conocidos que se usarán en ambientes inciertos o que estarán sometidos a esfuerzos desconocidos.

De igual manera se tienen las siguientes consideraciones:

- Cargas repetidas: los factores entre 1.25 y 4 son aceptables, pero deben aplicarse al límite de la resistencia a la fatiga y no a la resistencia a la cedencia del material.
- Fuerzas de impacto: los factores entre 2 y 4 son aceptables, pero se debe incluir un factor de impacto.
- Materiales frágiles: si la resistencia última se usa como el máximo teórico, los factores entre 1.25 y 4 se deben casi duplicar.
- Cuando se consideran prudentes factores más altos, se debe realizar un análisis más detallado del problema antes de decidir su empleo.

Por otro lado, el factor de seguridad ( $n$ ) es el factor de diseño real, debido a que este puede variar como consecuencia del redondeo a un tamaño estándar de alguna sección transversal o de cambios realizados respecto al factor de diseño inicial propuesto, es decir, este factor se puede determinar a partir de los esfuerzos reales aplicados y de la resistencia del material. El factor de

seguridad, tiene la misma definición del factor de diseño (ecuación (3.42)), pero pueden o no diferir en su valor numérico, ya que el factor de seguridad es calculado al final de todo el análisis de diseño y emplea los valores reales, debido a que algunas medidas son ajustadas a estándares establecidos conforme se desarrolla el diseño del elemento. Así el factor de seguridad queda definido como sigue.

$$n = \frac{S_{real}}{(\sigma \text{ ó } \tau)_{real}} \quad (3.43)$$

El factor de seguridad se basa en la resistencia significativa del material y no solo en la resistencia estática a la tensión ya que, si los esfuerzos significativos implican fatiga el factor de seguridad se basa en la resistencia a la fatiga, si la fractura frágil es el modo de falla esperado el factor de seguridad se basa en la resistencia a la tensión, según las condiciones por las que es ocasionada la fatiga [11].

### 3.7 Factor de confiabilidad

El factor de confiabilidad  $C_R$  considera las distribuciones estadísticas de las fallas por fatiga de un material. Existe una gran dispersión en múltiples pruebas del mismo material bajo las mismas condiciones de prueba [8].

En la Figura A del apéndice A, se muestran los datos de la resistencia a la fatiga para el acero, estos son valores promedio obtenidos de diversas pruebas específicas respecto a la resistencia última y las condiciones superficiales adecuadas [7]. Para la selección de este factor de confiabilidad se recomienda diseñar para altos niveles de confiabilidad, es decir más cercanos al 100%. Para realizar un diseño con una mayor confiabilidad, puede ser empleado un factor para estimar un nivel menor de la resistencia a la fatiga que la utilizada. Para el desarrollo de este trabajo de investigación, se emplean los valores del factor de confiabilidad proporcionados por Mott [7] y Norton [8], ilustrados en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5. Factores de confiabilidad  $C_R$  aproximados [7].

Confiabilidad deseada	$C_R$
0.50	1.0
0.90	0.90
0.99	0.81
0.999	0.75

### 3.8 Factor de tamaño (secciones circulares)

Las primeras aproximaciones realizadas para definir el factor de tamaño, resultaron de hacer pruebas para encontrar los datos de resistencia a la fatiga básica mediante muestras de sección transversal circular relativamente pequeñas (0.3 in ó 7.6 mm), las cuales se sometieron a flexión repetida e invertida mientras giraban. Como consecuencia a esto, se definió que cada punto de la superficie está sujeta al esfuerzo flexionante máximo de tensión, en cada revolución, por lo que el punto más crítico en el que se puede iniciar una falla es donde se encuentra el esfuerzo máximo de tensión, muy cerca de la superficie exterior [7].

Para este trabajo de investigación, se emplean los factores de tamaño  $C_S$  establecidos por Mott [7], mismos valores que se muestran en la Figura 3.19 y la Tabla 3.6. Cuando el diámetro de la sección transversal del elemento aumenta y este se encuentra en flexión giratoria, disminuye la resistencia a la fatiga, debido a que el gradiente de esfuerzo (cambio de esfuerzo en función del radio) aumenta la proporción del material en la región con más esfuerzo [7].

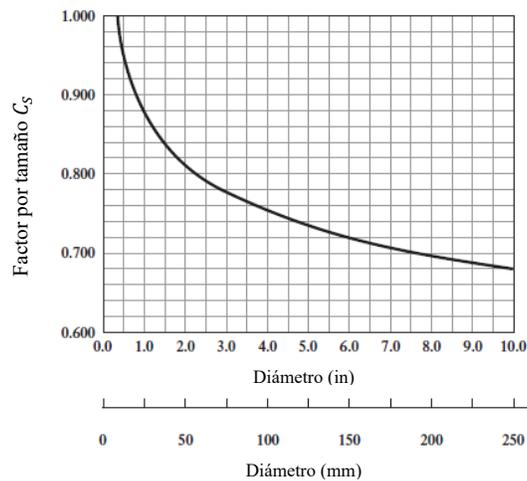


Figura 3.19. Gráfico para el factor de tamaño  $C_S$  para secciones circulares [7].

Tabla 3.6. Ecuaciones para determinar el factor de tamaño  $C_S$  para secciones transversales circulares [7].

Unidades del Sistema Estadounidense Tradicional	
Rango de tamaño (in)	$C_S$
$D \leq 0.30$	$C_S = 1.0$
$0.30 < D \leq 2.0$	$C_S = (D/0.3)^{-0.11}$
$2.0 < D < 10.0$	$C_S = 0.859 - 0.02125 \cdot D$
Unidades SI	
Rango de tamaño (mm)	$C_S$
$D \leq 7.62$	$C_S = 1.0$
$7.62 < D \leq 50.0$	$C_S = (D/7.62)^{-0.11}$
$50.0 < D < 250.0$	$C_S = 0.859 - 0.000837 \cdot D$

### 3.9 Resistencia a la fatiga $S_n$

A la capacidad de un material para resistir cargas de fatiga se le conoce como resistencia a la fatiga. En otras palabras, la resistencia a la fatiga es el esfuerzo que puede resistir un material durante cierta cantidad conocida de ciclos de carga, si la cantidad de ciclos de carga es infinita, entonces el esfuerzo se llama límite de fatiga [7].

En la Figura 3.20 se muestra una gráfica común de la resistencia a la fatiga o mejor conocida como diagrama  $S - N$  (diagrama esfuerzo-ciclos), también consulte la sección 2.5.

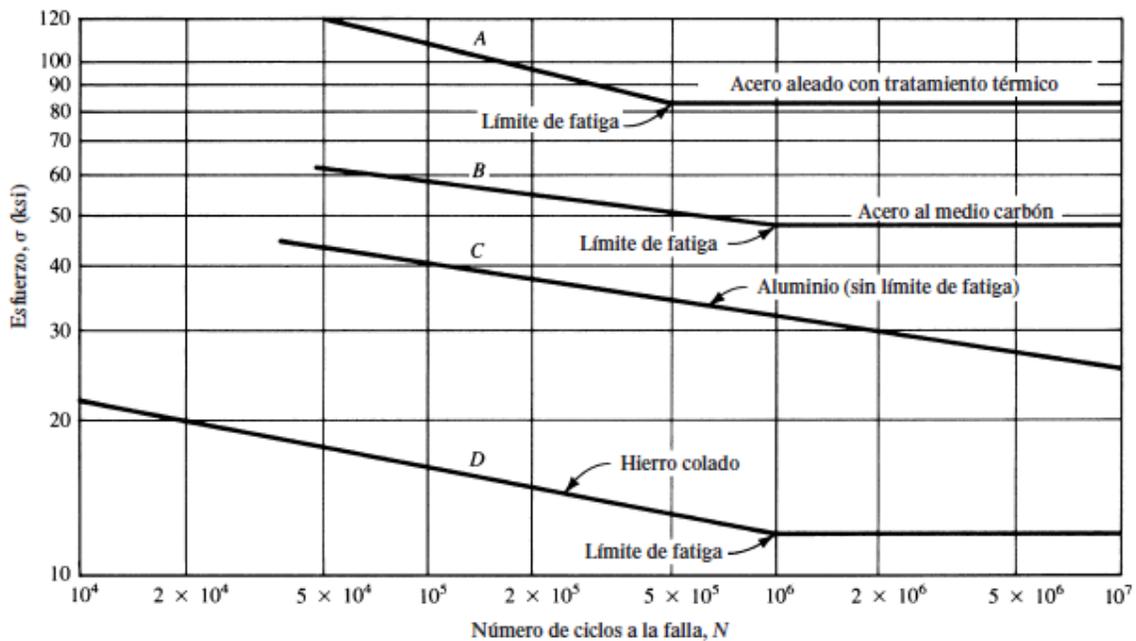


Figura 3.20. Gráfico de resistencia a la fatiga (Diagrama  $S - N$ ) [7].

Como se puede observar en la Figura 3.20, las curvas  $A, B$  y  $D$  representan materiales que sí tienen un límite de fatiga y la curva  $C$  muestra materiales que no poseen un límite de fatiga como lo es la mayor parte de los materiales no ferrosos. En la referencia [7] se sugiere emplear la siguiente aproximación básica para la resistencia a la fatiga para acero forjado cuando no se cuenta con los datos del material obtenidos de pruebas o como datos fiables publicados.

$$S_n = 0.50 S_u \quad (3.44)$$

Donde,  $S_u$  es la resistencia última a la tensión. Esta aproximación se refiere al caso especial de esfuerzo repetido e invertido flexionante para un acero pulido con sección transversal circular de 0.3 in de diámetro [7]. Para este trabajo de investigación, se emplea la resistencia última a la tensión para definir el valor de la resistencia a la fatiga como se explica en el apéndice A.

### 3.10 Resistencia a la fatiga real o modificada $S'_n$

Los valores de la resistencia a la fatiga, son calculados con base en pruebas de laboratorio bajo condiciones estrictamente controladas, por lo que no es posible que la resistencia a la fatiga de un elemento mecánico o estructural iguale los valores obtenidos en laboratorio [6]. Los valores que disminuyen la resistencia a la fatiga son conocidos como factores, ya que estos influyen en el material según las condiciones en las que este se empleará. La influencia de estos factores y condiciones en las que se emplea un material modifican al valor de la resistencia a la fatiga  $S_n$ , para obtener un nuevo valor bajo condiciones reales llamado resistencia a la fatiga real o modificada  $S'_n$ .

La resistencia a la fatiga real se define como:

$$S'_n = S_n C_m C_{st} C_R C_S \quad (3.45)$$

Donde,  $S_n$  es la resistencia a la fatiga (véase la sección 3.9),  $C_R$  es el factor de confiabilidad (sección 3.7) y  $C_S$  es el factor de tamaño (sección 3.8). Para el factor de tipo de esfuerzo  $C_{st}$  aplique:  $C_{st} = 1.0$  para esfuerzo flexionante y  $C_{st} = 0.80$  para tensión axial, y finalmente para el factor de material  $C_m$  véase la Tabla 3.7.

Tabla 3.7. Valores para el factor de material [7].

Material	Factor de material ( $C_m$ )
Acero forjado	1.00
Acero colado	0.80
Acero pulverizado	0.76
Hierro colado maleable	0.80
Hierro colado gris	0.70
Hierro colado dúctil	0.66

### 3.11 Teoría del esfuerzo cortante máximo (Tresca)

Esta teoría es un criterio de resistencia estática aplicada a materiales dúctiles, la cual determina que la fluencia se da cuando el esfuerzo cortante máximo de un elemento iguala al esfuerzo cortante máximo de una pieza de ensayo a tensión del mismo material cuando esta comienza a fluir. Si una tira de un material dúctil es sometida a tensión, se forma un patrón de líneas de desplazamiento (líneas de Lüder) aproximadamente a  $45^\circ$  de los ejes de la tira. Estas líneas de

desplazamiento indican el inicio de la fluencia, y cuando se llega a este punto (fractura), se presentan líneas de fractura en ángulos aproximados a 45° con los ejes de tensión [6].

Partiendo de que el esfuerzo en tensión simple está dado por  $\sigma = F/A$ , y tomando en cuenta que el esfuerzo cortante máximo ocurre a 45° de la superficie en tensión se define como  $\tau_{m\acute{a}x} = \sigma/2$ . Considerando un estado de esfuerzo general, se pueden denotar y ordenar tres esfuerzos principales tales que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , definiendo  $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ . Por lo tanto, para un estado general de esfuerzo, se tiene que, el esfuerzo cortante máximo produce la fluencia cuando:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad \therefore \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y \quad (3.46)$$

Donde se define que la resistencia a la fluencia en cortante es:

$$S_{sy} = 0.5 S_y \quad (3.47)$$

Incorporando un factor de seguridad en la ecuación (3.46), se tiene:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{S_y}{2n} \quad (3.48)$$

Recordando que el esfuerzo plano es un estado de esfuerzo tridimensional, y que para este caso el tercer esfuerzo principal siempre es cero, significa que al emplear la convención  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  no es posible llamar arbitrariamente a los esfuerzos principales en el plano  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , ya que debe relacionarse el tercer esfuerzo principal con valor cero. Es por esto por lo que para la teoría del esfuerzo cortante máximo en el esfuerzo plano se etiquetan los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  como  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$ , y siguiendo la convención de  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  para ordenarlos con el esfuerzo principal de valor cero, existen tres casos a considerar como resultado de la ecuación (3.46) para el esfuerzo plano [6]:

Caso 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ , con  $\sigma_1 = \sigma_A$  y  $\sigma_3 = 0$  en la ecuación (3.46). La condición de fluencia es:

$$\sigma_A \geq S_y \quad (3.49)$$

Caso 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ , donde,  $\sigma_1 = \sigma_A$  y  $\sigma_3 = \sigma_B$  en la ecuación (3.46), se tiene:

$$\sigma_A - \sigma_B \geq S_y \quad (3.50)$$

Caso 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ , donde,  $\sigma_1 = 0$  y  $\sigma_3 = \sigma_B$ , la ecuación (3.46) da:

$$\sigma_B \leq -S_y \quad (3.51)$$

Representado de una manera más gráfica lo realizado, las ecuaciones (3.49), (3.50) y (3.51) se representan en la Figura 3.21 mediante líneas en el plano  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$ . Las líneas no indicadas son casos para  $\sigma_A \leq \sigma_B$ , mismas que normalmente no se usan, pero completan la envolvente del esfuerzo a la fluencia. La teoría del esfuerzo cortante máximo predice la fluencia si un estado de esfuerzo está fuera de la región sombreada limitada por la envolvente del esfuerzo a la

fluencia [6]. En la Figura 3.21 el punto  $a$  representa el estado de esfuerzo de un componente de esfuerzo crítico en un elemento. Si la carga se incrementa, se supone que los esfuerzos principales incrementarán proporcionalmente a lo largo de la línea  $O-a$  (línea de carga). Si el esfuerzo aumenta a lo largo de la línea de carga, tal que cruce la envolvente del esfuerzo de fluencia (punto  $b$ ), la teoría del esfuerzo cortante máximo predice que el elemento en esfuerzo cederá. Para el punto  $a$  el factor de seguridad contra la fluencia esta dado por la razón de resistencia (distancia  $O-b$ ) sobre el esfuerzo ( $O-a$ ), o  $n = \overline{Ob}/\overline{Oa}$  [6].

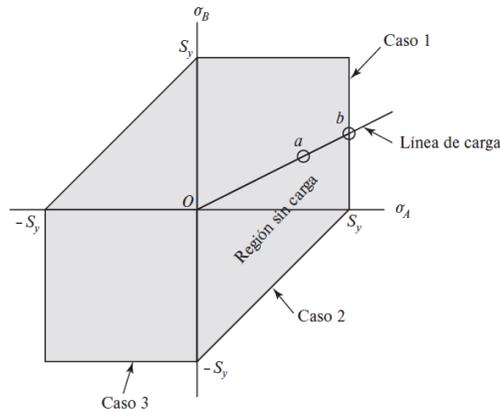


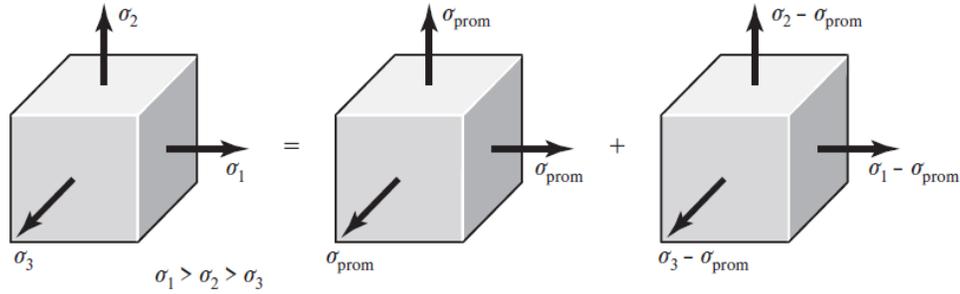
Figura 3.21. Teoría del esfuerzo cortante máximo de esfuerzo plano, para  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$  diferentes de cero [6].

Esta teoría permite analizar principalmente problemas relacionados con diseño de ejes ya que cuentan con esfuerzos normales a partir de cargas en flexión o axiales, lo que provoca esfuerzos cortantes a partir de la torsión [6].

### 3.12 Teoría de la energía de distorsión máxima (Von Mises)

La teoría de la energía de distorsión máxima surgió debido a que, cuando un material dúctil es sometido a esfuerzos hidrostáticos (esfuerzos principales iguales) estos presentan resistencia a la fluencia que exceden considerablemente los valores que resultan del ensayo de tensión simple. Por consecuencia, esta teoría predice que la falla por fluencia se da cuando la energía de deformación total por unidad de volumen es igual o mayor que la energía de deformación por unidad de volumen correspondiente a la resistencia a la fluencia del mismo material, ya sea que este se encuentre en tensión o compresión [6].

Para desarrollar la teoría se plantea la Figura 3.22:



a) Esfuerzos triaxiales      b) Componente hidrostático      c) Componente de distorsión

Figura 3.22. a) Elemento con esfuerzos triaxiales que experimenta cambio de volumen y distorsión angular. b) Elemento sometido a tensión hidrostática que solo experimenta cambio de volumen. c) Elemento con distorsión angular sin cambio de volumen [6].

Donde para cada uno de los casos de la Figura 3.22 se tiene:

- El volumen unitario es sometido a estado de esfuerzos tridimensionales cualesquiera  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ .
- El estado de esfuerzos es de tensión hidrostática debida al promedio de los esfuerzos tridimensionales que actúan en cada una de las direcciones principales  $\sigma_{prom}$ , por lo cual el elemento experimenta un cambio de volumen puro (sin distorsión angular).
- Si se considera  $\sigma_{prom}$  como un componente de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , entonces este componente puede restarse a cada uno de ellos. Por consiguiente, se dice que este elemento está sometido a distorsión angular pura ya que no hay cambios de volumen.

Recordando que la energía de deformación por unidad de volumen de la tensión simple está dada por  $u = \frac{1}{2} \epsilon \sigma$ , entonces para el elemento de la Figura 3.22(a), la energía de deformación por volumen unitario es:

$$u = \frac{1}{2} [\epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 \sigma_2 + \epsilon_3 \sigma_3] \quad (3.52)$$

Donde se tienen las siguientes ecuaciones para las deformaciones normales:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Y sustituyendo la ecuación (3.53) para las deformaciones principales se tiene:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (3.54)$$

Si se desea la energía de deformación para producir únicamente cambio de volumen, se sustituye  $\sigma_{prom} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  para los esfuerzos en la ecuación (3.54). Se obtiene la siguiente ecuación:

$$u_v = \frac{3\sigma_{prom}^2}{2E} (1 - 2\nu) \quad (3.55)$$

Y sustituyendo el cuadrado de  $\sigma_{prom}$  en la ecuación (3.55) y reduciendo la expresión se tiene:

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (3.56)$$

Por lo que la energía de distorsión es el resultado de restar la ecuación (3.56) de la ecuación (3.54), el resultado es:

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] \quad (3.57)$$

Donde si los esfuerzos principales son iguales, entonces la energía de distorsión es igual a cero. Para el ensayo de tensión simple en la fluencia, si  $\sigma_1 = S_y$  y  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , entonces la energía de distorsión resultante de la ecuación (3.57) es:

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y \quad (3.58)$$

Para el caso del estado general de esfuerzo, la fluencia se predice si la ecuación (3.57) es igual o mayor que la ecuación (3.58), resultando la ecuación de la fluencia como:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \geq S_y \quad (3.59)$$

El esfuerzo de Von Mises surge de un caso simple de tensión  $\sigma$ , ya que la fluencia puede ocurrir cuando  $\sigma \geq S_y$ . Razón por la que el lado izquierdo de la ecuación (3.59) se considera como un esfuerzo simple, equivalente o efectivo del estado general total del esfuerzo dado por  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Así, el esfuerzo de Von Mises es:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (3.60)$$

Relacionando para el esfuerzo plano, los dos esfuerzos principales  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$  son diferentes de cero para  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente, y el esfuerzo  $\sigma_3$  igual con cero. Sustituyendo estas condiciones en la ecuación (3.60), la expresión se reduce a:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2} \quad (3.61)$$

En la Figura 3.23 se representa la ecuación (3.61), la cual es una elipse rotada en el plano  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  y  $\sigma' = S_y$ . Observe que en la Figura 3.23, se compara la energía de distorsión máxima (ED) y el esfuerzo cortante máximo (ECM), donde esta última se muestra más restrictiva y, por tanto, más conservadora.

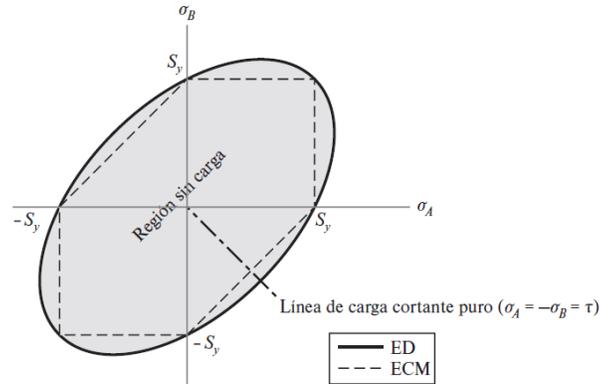


Figura 3.23. Comparativa de las teorías de ED y ECM [6].

Sustituyendo las componentes  $(x,y,z)$  del esfuerzo tridimensional en la ecuación (3.60), el esfuerzo de Von Mises se define como:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

Y sustituyendo las componentes principales  $(x,y)$  para el esfuerzo plano se tiene:

$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

La principal diferencia entre la teoría del esfuerzo cortante máximo y la teoría de distorsión máxima es que, la primera teoría no toma en cuenta la contribución de los esfuerzos normales sobre las superficies a  $45^\circ$  del elemento sometido a tensión, ya que estos esfuerzos son  $F/2A$ , y no los esfuerzos hidrostáticos dados por  $F/3A$ .

Para términos de diseño, la ecuación (3.59) puede expresarse como:

$$\sigma' = \frac{S_y}{n} \quad (3.64)$$

La teoría de la energía de distorsión máxima es la teoría más empleada para materiales dúctiles en problemas de diseño, porque no predice falla bajo presión hidrostática y cumple con los requerimientos del comportamiento dúctil ((3.59) a (3.63)).

Considerando el caso de cortante puro  $\tau_{xy}$  para la resistencia a la fluencia cortante, donde  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Para la fluencia en la ecuación (3.59) con la ecuación (3.63) se tiene:

$$(3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = S_y \quad \therefore \quad \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y \quad (3.65)$$

Por lo tanto, la resistencia a la fluencia en cortante calculada por la teoría de la energía de distorsión es:

$$S_{sy} = 0.577 S_y \quad (3.66)$$

Lo que resulta en aproximadamente un 15% mayor al  $0.5S_y$  predicho por la teoría del esfuerzo cortante máximo [6]. Por otro lado, considerando  $\sigma_x = \sigma$ , el esfuerzo flexionante  $\sigma_y = 0$  y el esfuerzo cortante debido a torsión  $\tau_{xy} = \tau$  en la ecuación (3.63), se obtienen los esfuerzos fluctuantes de Von Mises (alternantes y medios) para ejes giratorios, redondos y sólidos, sin tomar en cuenta las cargas axiales [6].  $\sigma' = [(\sigma'_a + \sigma'_m)^2 + 3(\tau_a + \tau_m)^2]^{1/2}$ .

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2) = \left[ \left( \frac{32 K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16 K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.67)$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2) = \left[ \left( \frac{32 K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16 K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.68)$$

### 3.13 Esfuerzos de diseño para ejes

Al momento de diseñar un eje, deben tenerse en cuenta que pueden estar presentes diversas condiciones de esfuerzo al mismo tiempo, es decir, el esfuerzo cortante torsional estará presente en cualquier sección en la que un eje transmite potencia, mientras que en el caso normal existirá un esfuerzo flexionante sobre esa misma sección. Puede ser que en algunas secciones del eje solo exista esfuerzo flexionante, puntos donde no existe flexión ni torsión, pero si esfuerzo cortante (vertical). En conclusión, los esfuerzos de flexión, torsión o axiales pueden estar sobrepuestos en una misma sección o puede que no se desarrolle esfuerzo alguno según la geometría y requerimientos de diseño para el eje.

Para determinar los esfuerzos, al diseñar un eje es necesario conocer los factores de diseño  $n_d$ . El material más común para el diseño de ejes, son los materiales dúctiles como se explicó en la sección 3.2, debido a que un material dúctil funciona mejor bajo condiciones de carga y se supondrá que los esfuerzos flexionantes son totalmente invertidos y repetidos [7]. Donde, los esfuerzos invertidos y repetidos (Figura 3.24) se dan cuando un cuerpo es sometido a un esfuerzo de tracción y continuamente se somete a otro esfuerzo de compresión de la misma magnitud.

Para el análisis, es suficiente combinar los diferentes tipos de esfuerzos en esfuerzos de Von Mises alternantes y medios (esfuerzos fluctuantes Figura 3.25) [6]. Donde los esfuerzos fluctuantes se presentan cuando el eje está sometido a una precarga inicial, y sobre éste se aplicará el esfuerzo variable, es decir, todos los esfuerzos variables cuyo promedio sea distinto de cero.

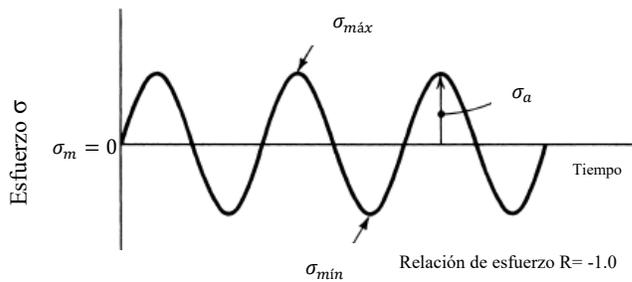


Figura 3.24. Esfuerzo repetido e invertido [7].

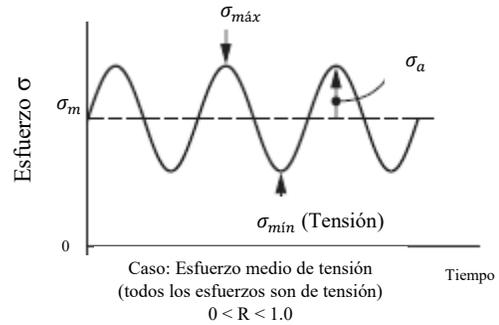


Figura 3.25. Esfuerzo fluctuante [7].

### 3.13.1 Esfuerzo cortante de diseño – par torsional constante

El mejor indicador de falla en materiales dúctiles debido a esfuerzo cortante y constante, es la teoría de energía de distorsión máxima (Von Mises), por lo que, despejando de la ecuación (3.43) al esfuerzo cortante se tiene

$$\tau_d = \frac{S_{sy}}{n} \quad (3.69)$$

Sustituyendo la ecuación (3.66) de la resistencia a la fluencia cortante por la teoría de la energía de distorsión en la ecuación (3.69), el esfuerzo cortante de diseño es:

$$\tau_d = \frac{0.577 S_y}{n} \quad (3.70)$$

Nota: este valor se usará para el esfuerzo cortante por torsión continua, esfuerzo cortante vertical o esfuerzo cortante directo en un eje [7].

### 3.13.2 Esfuerzo cortante de diseño – esfuerzo cortante vertical invertido

Cuando un cojinete soporta un extremo de un eje y en esa sección no existe transmisión de par torsional alguno, y los momentos flexionantes son igual a cero o muy pequeños, se establece que están sujetos a fuerzas cortantes verticales, por lo que estas fuerzas gobiernan el análisis de diseño.

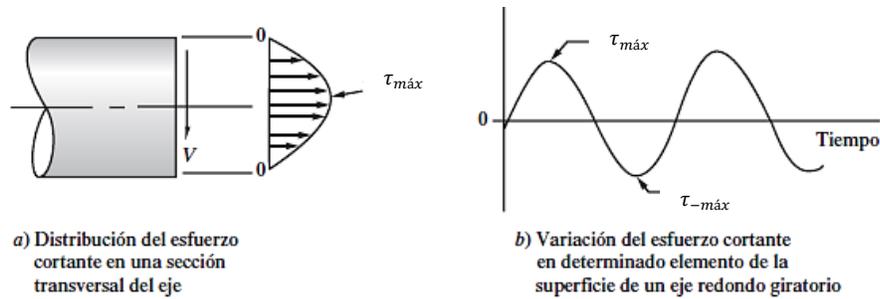


Figura 3.26. Distribución de esfuerzos cortantes en un eje giratorio [7].

En la Figura 3.26 se puede observar una parte de un eje con una sección transversal circular, en donde se muestra la distribución de esfuerzos cortantes verticales. Como se puede observar, el esfuerzo disminuye gradualmente en forma parabólica hasta cero en la superficie externa del eje [7].

Según la resistencia de materiales, el esfuerzo cortante vertical máximo para una sección transversal circular está definido por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{4V}{3A} \quad (3.71)$$

Donde,  $V$  y  $A$  son la fuerza cortante vertical y el área de la sección transversal respectivamente. Considerando los factores de concentración de esfuerzos, el esfuerzo cortante vertical máximo se define como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = (K_t) \left( \frac{4V}{3A} \right) \quad (3.72)$$

Como se observa en la Figura 3.26, la rotación del eje provoca en la superficie exterior de la sección transversal un esfuerzo cortante reversible, mismo que oscila entre  $+\tau_{m\acute{a}x}$  y  $-\tau_{m\acute{a}x}$ , pasando por cero en cada revolución. Para diseñar se puede aplicar el factor de diseño  $n$  a la resistencia a la fluencia y entonces se puede emplear  $\sigma' < \sigma_d = S_y/n$  [7]. Como se trata de un esfuerzo cortante invertido y repetido, se puede emplear la teoría de la energía de distorsión máxima, donde estimando la resistencia a la fatiga en cortante se tiene:

$$S'_{sn} = 0.577 S'_n \quad (3.73)$$

Y calculando el esfuerzo cortante máximo repetido  $\tau_{m\acute{a}x}$  e incluyendo el factor de concentración de esfuerzo se tiene:

$$K_t \tau_{m\acute{a}x} < \tau_d = \frac{S'_{sn}}{n} = 0.577 S'_n \quad (3.74)$$

Con estas consideraciones, la ecuación (3.43), se puede definir como:

$$n = \frac{S'_n}{\tau_{m\acute{a}x}} \quad (3.75)$$

Y sustituyendo la ecuación (3.73) en la ecuación (3.75), se tiene:

$$n = \frac{0.577 S'_n}{\tau_{m\acute{a}x}} \quad (3.76)$$

Expresando esta ecuación como esfuerzo cortante de dise\u00f1o.

$$\tau_d = \frac{0.577 S'_n}{n} \quad (3.77)$$

Haciendo  $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_d$ , es decir, se sustituye la ecuaci\u00f3n (3.72) en la ecuaci\u00f3n (3.77):

$$(K_t) \left( \frac{4V}{3A} \right) = \frac{0.577 S'_n}{n} \quad (3.78)$$

Creando una relaci\u00f3n con el objetivo de determinar el di\u00e1metro requerido  $D$ , se despeja el \u00e1rea como sigue:

$$A = \frac{2.31nK_tV}{S'_n} \quad (3.79)$$

Y definiendo el \u00e1rea para la secci\u00f3n transversal de un c\u00edrculo como:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (3.80)$$

Sustituyendo la ecuaci\u00f3n (3.80) en la ecuaci\u00f3n (3.79) se tiene:

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{2.31nK_tV}{S'_n} \quad (3.81)$$

Y finalmente despejando  $D$ , el di\u00e1metro requerido del eje es:

$$D = \sqrt{\frac{2.94nK_tV}{S'_n}} \quad (3.82)$$

Nota: esta ecuaci\u00f3n solo se emplea para calcular el di\u00e1metro necesario de un eje cuando una fuerza cortante vertical  $V$  es la \u00fanica carga importante presente. Generalmente el di\u00e1metro obtenido ser\u00e1 mucho menor que el que se requiere en otras partes del eje, donde se encuentran valores importantes de momento de par torsional y flexionante. Por estandarizaci\u00f3n, es normal que se requiera que el eje sea mayor que el m\u00ednimo calculado, con el objetivo de adaptarse a un cojinete en el lugar donde la fuerza cortante sea igual a la carga radial sobre el cojinete [7].

### 3.13.3 Esfuerzo normal de diseño – carga por fatiga

Para la flexión repetida e invertida en un eje como consecuencia de cargas transversales aplicadas a un eje giratorio, el esfuerzo de diseño se relaciona con la resistencia del material a la fatiga del eje. Al especificar el esfuerzo de diseño se deben considerar las condiciones reales bajo las cuales se fabrica y funciona el eje [7].

Para las secciones del eje sometidas sólo a flexión invertida, el esfuerzo de diseño se define como sigue [7].

$$\sigma_d = \frac{S'_n}{n} \quad (3.83)$$

### 3.14 Ejes únicamente sometidos a flexión y a torsión

La potencia transmitida a un eje causa torsión y las fuerzas transversales sobre los elementos causan flexión. Generalmente los ejes que son sometidos simplemente a flexión y a torsión, son aquellos que sostienen engranes rectos, poleas para bandas en V o catarinas (ruedas dentadas).

Con base en la hipótesis planteada por Mott [7], se deduce una ecuación para el diseño. Esta hipótesis indica que el esfuerzo cortante en un eje es repetido y este se invierte cuando el eje comienza a girar, pero que el esfuerzo cortante por torsión es casi uniforme. La ecuación de diseño se basa en el principio representado en el gráfico de la Figura 3.27.

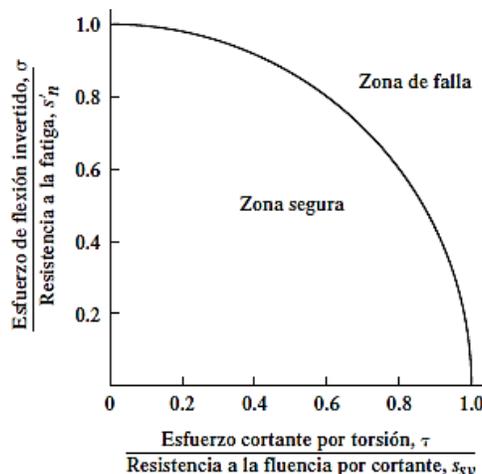


Figura 3.27. Gráfico base para la ecuación del diseño de ejes, con esfuerzo flexionante invertido repetido y esfuerzo cortante torsional constante [7].

En el gráfico de la Figura 3.27 se puede observar que en el eje vertical corresponde a la relación entre el esfuerzo flexionante invertido y la resistencia a la fatiga del material, para el eje horizontal se tiene la relación entre el esfuerzo cortante torsional y la resistencia a la cedencia

por cortante del material. El punto máximo en ambos ejes tiene el valor de 1.0, mismo valor que indica la falla inminente en flexión pura o en torsión pura respectivamente [7]. Para este caso, la falla bajo combinaciones de flexión y torsión, está gobernada por el arco mostrado en la Figura 3.27, cuya ecuación es:

$$\left(\frac{\sigma}{S'_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{S_{sy}}\right)^2 = 1 \quad (3.84)$$

Donde se define  $S_{sy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}}$ , de la teoría de la energía de distorsión (Von Mises), ecuación (3.66). Incorporando el factor de diseño en cada término del primer miembro de la ecuación (3.84), se obtiene la siguiente expresión basada en esfuerzos de diseño [7].

$$\left(\frac{n\sigma}{S'_n}\right)^2 + \left(\frac{n\tau}{S_y}\right)^2 = 1 \quad (3.85)$$

Como el primer término de la ecuación (3.85) es un esfuerzo repetitivo, entonces se puede introducir el factor de concentración de esfuerzos para flexión, mientras que para el esfuerzo cortante torsional no se necesita este factor por considerarse constante, así se obtiene:

$$\left(\frac{n\sigma K_t}{S'_n}\right)^2 + \left(\frac{n\tau}{S_y}\right)^2 = 1 \quad (3.86)$$

Ahora, el esfuerzo flexionante debido a un momento flexionante  $M$ , para ejes redondos sólidos y giratorios es:

$$\sigma = \frac{M}{S} \quad (3.87)$$

Y el esfuerzo cortante torsional está definido por:

$$\tau = \frac{T}{Z_p} \quad (3.88)$$

Donde  $S = \pi D^3/32$  es el módulo de sección rectangular y  $Z_p = \pi D^3/16$  es el módulo de sección polar, para una sección transversal circular

Con estas consideraciones la ecuación (3.88) puede definirse como:

$$\tau = \frac{T}{2S} \quad (3.89)$$

Y sustituyendo estas relaciones en la ecuación (3.86) se tiene:

$$\left(\frac{nMK_t}{S S'_n}\right)^2 + \left(\frac{nT\sqrt{3}}{2S S_y}\right)^2 = 1 \quad (3.90)$$

Reduciendo y agrupando términos resulta:

$$\frac{n}{S} \sqrt{\left(\frac{MK_t}{S'_n}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2} = 1 \quad (3.91)$$

Ahora, sustituyendo el valor del módulo de sección rectangular, considerando que se trata de un eje con sección transversal sólida se tiene:

$$\frac{32n}{\pi D^3} \sqrt{\left(\frac{MK_t}{S'_n}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2} = 1 \quad (3.92)$$

Y despejando el diámetro se obtiene la siguiente ecuación de diseño para ejes [7].

$$D = \left[ \frac{32n}{\pi} \sqrt{\left(\frac{MK_t}{S'_n}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.93)$$

### 3.15 Análisis de elementos finitos en Ansys

Como se comentó en las secciones 1 y 2.2, Ansys es un software especializado para dar solución a diversos sistemas físicos y biológicos. Este es el software elegido para el desarrollo de este trabajo de tesis, debido a que es uno de los softwares más confiables y empleados en la industria debido a los métodos numéricos que emplea para dar solución a estos sistemas. Inicialmente el eje es modelado en el CAD de SpaceClaim, para posteriormente describir el proceso necesario para llevar a cabo un análisis de elementos finitos mediante Ansys Workbench.

Los elementos finitos son la división de un cuerpo, estructura o dominio en un número finito de subdominios no-intersectantes entre sí. Dentro de estos elementos se encuentra una serie de puntos denominados nodos, los cuales son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes. Dependiendo del tipo de relación de adyacencia entre un conjunto de nodos este se denomina malla, así el conjunto de elementos finitos se define como discretización.

El procedimiento general para la formulación de un análisis de elemento finito que da solución a un problema físico mediante software especializado es común en los diferentes análisis que requieren una discretización, sea un análisis estructural, transmisión de calor, flujo de fluidos, entre otros. Este procedimiento consiste en tres pasos [2]:

- Pre-procesamiento: en este paso se define el modelo a analizar para así, ordenadamente definir; el dominio geométrico del problema, tipo de elemento a emplear (línea,

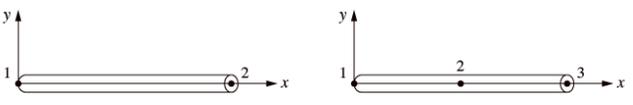
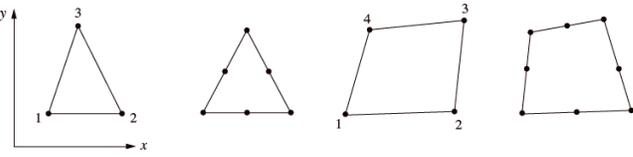
superficie, sólido o de propósito especial), propiedades del elemento (materiales), propiedades geométricas del elemento (área, dimensión, etc.), tipo de la malla (generación manual, semiautomática, automática), condiciones de frontera (restricciones físicas) y las cargas o perturbaciones que son generadas por medios externos.

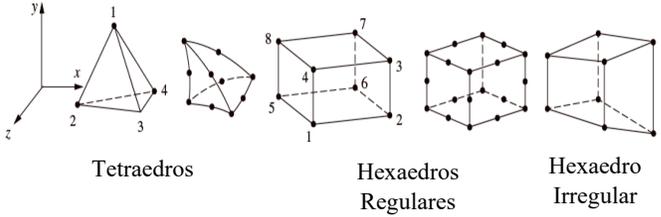
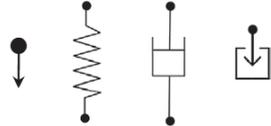
- **Procesamiento o solución:** en este paso el software ensambla las ecuaciones que rigen al sistema de forma matricial y se calculan los valores desconocidos de las variables de campo mediante una sustitución regresiva donde se evalúan las variables adimensionales o derivadas, esfuerzos, aceleraciones, velocidades, etc.
- **Post-procesamiento:** en esta etapa final, el software muestra los resultados obtenidos del análisis de diferentes formas según la solución deseada; esfuerzos, deformaciones, equilibrio estático, factores de seguridad, animaciones, respuesta del modelo en modelos dinámicos, gráficos de desplazamiento o cualquier factor físico deseado, etc.

### 3.16 Elemento mecánico

Un elemento mecánico se define como una estructura continua donde, dependiendo de la geometría del elemento este se clasifica en: elemento tipo línea, elemento de superficie, elemento sólido y elementos de propósito específico, como se observa en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8. Clasificación de las geometrías según el elemento [13].

Tipo de elemento	Geometría	Aplicaciones
1 D (Tipo línea)		Elementos lineales simples de dos nodos; barras, vigas, armazones. Estos trabajan bajo compresión, tensión, flexión, torsión con o sin rigidez de carga.
2 D (Superficies)	 <p style="text-align: center;">Triangulares                      Cuadriláteros</p>	Elementos bidimensionales o superficies con nodos en las esquinas. Generalmente utilizados para representar esfuerzos o deformación plana.

<p>3 D (Elementos sólidos)</p>	 <p>Tetraedros      Hexaedros Regulares      Hexaedro Irregular</p>	<p>Elementos tridimensionales o sólidos con nodos en las esquinas. Generalmente son empleados como sólidos o placas gruesas y empleados para transiciones (pirámide).</p>
<p>Otros (Propósitos específicos)</p>		<p>Elementos de propósito especial, estos elementos son complejos debido a los desplazamientos que ofrecen: brecha, gancho, conexión y rígido. Generalmente empleados para desplazamientos libres en espacios preestablecidos o para restricciones rígidas entre nodos.</p>

Nota: los elementos de orden superior presentan nodos intermedios a lo largo de su geometría [13].

### 3.17 Mallado en Ansys

Inicialmente el método de los elementos finitos se creó basado en analizar un cuerpo (estructura, o sistema) de geometría compleja mediante una red o rejilla de elementos lineales según Hrennikoff, McHenry y Newmark con el objetivo de simplificar el análisis del mismo, Clough presentó un sistema de ecuaciones de rigidez en forma matricial de diversos elementos [6], es así que en los diferentes software estos métodos son empleados para obtener mejores resultados al analizar un modelo, ya que este se debe discretizar (dividir) en un número finito de partes, donde, una malla (red o rejilla) más fina implica una mayor cantidad de elementos a analizar (observe las Figuras 3.28 y 3.29) y por tanto nodos regulares (uniones uniformes entre elementos), dando lugar a elementos de buena calidad y, logrando niveles de precisión mayores.

Una malla se define como el conjunto de elementos finitos y nodos que discretizan un cuerpo. La técnica de mallado es la parte fundamental de los elementos finitos, ya que los resultados mejoran cuando la densidad de malla se incrementa en áreas de gradientes de esfuerzo máximos o cuando las zonas de transición geométrica se mullan de manera uniforme. La selección de una malla adecuada es un factor importante, ya que el refinamiento constante de esta provoca que el

FEA converja a la solución matemática que rige el problema, se dice que la solución converge cuando la variación de los resultados es mínima o tiende a cero en cada iteración [6].

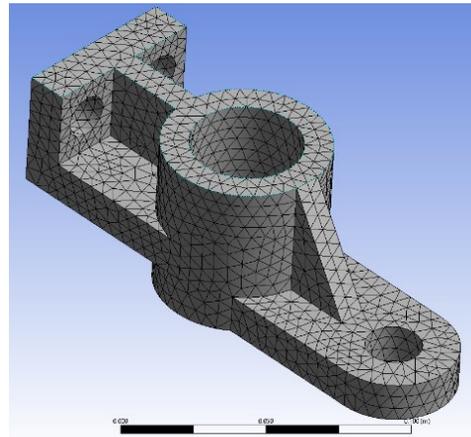
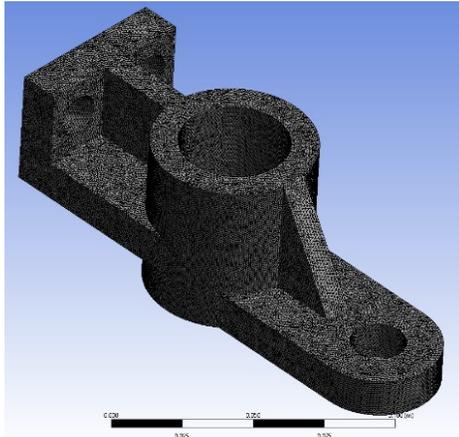


Figura 3.28. Malla fina con alto nivel de precisión. Figura 3.29. Malla gruesa con baja precisión.

Existen tres formas generales para generar un mallado:

- Generación manual: se realiza mediante la modificación del archivo de texto de entrada y generalmente se realiza en modificaciones rápidas de un modelo.
- Generación semiautomática: este proceso de mallado es generado automáticamente por algoritmos computacionales que permiten al software mallar automáticamente las regiones del cuerpo o estructura a discretizar, mediante el uso de límites (regiones) perfectamente definidos por el usuario.
- Generación automática: este proceso de mallado es generado automáticamente por algoritmos computacionales que permiten al software mallar automáticamente las regiones del cuerpo o estructura según la geometría de este.

Recomendaciones generales para generar una malla:

- Emplear el elemento más simple que describa el fenómeno a estudiar.
- Emplear el mínimo refinamiento que englobe el fenómeno físico dominante.
- Hacer refinamientos específicamente en regiones donde se presenten grandes gradientes de esfuerzo/deformación o posibles puntos críticos (grietas, cargas concentradas, contactos, aperturas, uniones, soldaduras, anclajes, surcos, interfaz entre distintos materiales y cambios abruptos de área de sección transversal).
- Los elementos triangulares o piramidales son empleados entre la transición de elementos.

Una de las posibles limitantes para las refinaciones de malla en análisis estructurales, es el número de nodos que permite la licencia para estudiantes de Ansys, ya que solo se dispone de 128 mil nodos/elementos, esto puede minimizarse al emplear mallas adaptativas, es decir,

identificar los puntos donde se concentra la mayor cantidad de esfuerzos en el cuerpo para poder definir en esta zona un refinamiento específico de malla mayor, y en las partes del cuerpo donde no existen puntos críticos o estos no afecten al resultado se puede limitar la región con una malla menos refinada.

### 3.17.1 Mallas adaptativas

El mallado generado a partir del dominio de un cuerpo es la discretización (interior y exterior) del mismo, en polígonos simples en 2D y poliedros en 3D, con la finalidad de que el dominio quede cubierto en su totalidad y evitar que se traslapen distintos elementos en la malla, al menos que estos compartan un arista, nodo o cara en común [14]. Los polígonos simples (2D) son triángulos o cuadriláteros y los poliedros simples (3D) son tetraedros, hexaedros, pentaedros y pirámides. El objetivo de realizar el refinamiento adaptativo de mallas es refinar aquellas zonas del dominio donde se requiere, es decir, zonas críticas o de interés.

Una malla para FEA, es una malla de soporte para cálculos numéricos, misma que según Daniel [14] debe cumplir con los siguientes aspectos:

- Una malla para FEA debe ser compatible, es decir, una arista en 2D y una cara en 3D solo pueden compartirse por dos elementos, a excepción de casos especiales.
- Las cualidades de forma de los elementos se deben optimizar para reducir el porcentaje de error en la discretización, no se aceptan elementos invertidos o deformados.
- El tamaño y forma de los elementos debe ser ajustada a la función o métrica de espaciado entre nodos.
- La orientación y numeración de nodos debe ser coherente.
- Algunos puntos nodales, aristas y caras deben ser generados en posiciones específicas.

Una malla recibe el nombre de estructurada si la continuidad de cada elemento sigue un patrón reticular periódico. Para elementos en 2D, se presentan mallas o rejillas rectangulares estructuradas y mallados triangulares a partir de una malla regular. Para el caso 3D se presentan mallas hexaédricas regulares o mallas tetraédricas, donde, para el caso de mallas no estructuradas, los patrones de conectividad entre elementos no son periódicos, es decir, la conexión de los elementos en un nodo es aleatoria, por lo que el tamaño de los elementos puede variar considerablemente en toda la malla [14].

Una malla adaptativa se encarga de distribuir de forma óptima los grados de libertad a lo largo del dominio del problema, esto se logra mediante la creación de una malla inicial

(manual o automática) que generalmente consta de pocos elementos como una primera aproximación a la solución del problema (observe la Figura 3.29) y así estimar el error aproximado con el menor número de incógnitas. Una vez analizado el problema e identificando puntos críticos como primera aproximación a la solución de interés, o zonas en las que los elementos son deformados, se procede a añadir incógnitas en las zonas donde el error es mayor para posteriormente realizar un nuevo análisis, y así consecutivamente hasta que los resultados converjan a la solución o hasta cumplir con un número de grados de libertad aceptable para el caso.

### 3.17.2 Métodos de mallado en Ansys

En Ansys, existen varios tipos de mallas que se utilizan para discretizar un cuerpo (sistema o estructura) con diferentes enfoques y propósitos, la elección de esta depende de la geometría del cuerpo y recursos disponibles. A continuación, se mencionan los principales tipos de mallas presentes en Ansys y una breve descripción:

- Malla hexaédrica: este método emplea elementos hexaédricos (poliedros de seis caras) para generar el mallado, mismo que requiere una menor cantidad de celdas para abarcar un volumen, presentan una menor calidad de los elementos debido a una reducción de los elementos para un número determinado de nodos, por lo que es comúnmente empleada para cuerpos de geometría sencilla [15].

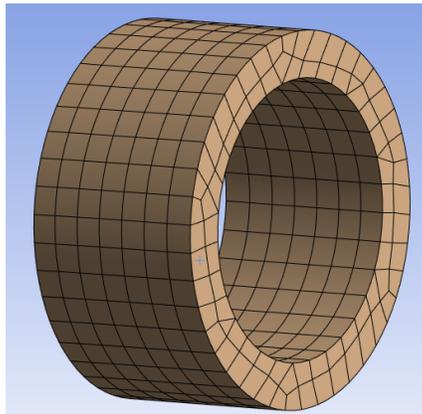


Figura 3.30. Buje mallado con elementos hexaédricos.

- Malla tetraédrica: este método emplea elementos tetraédricos (poliedros de cuatro caras), mismos que requieren una mayor cantidad de celdas para abarcar un volumen en comparación del mallado hexaédrico, lo que implica más ecuaciones y por tanto tiempo computacional, aumenta la calidad de los elementos y comúnmente es empleado para geometrías complejas [15].

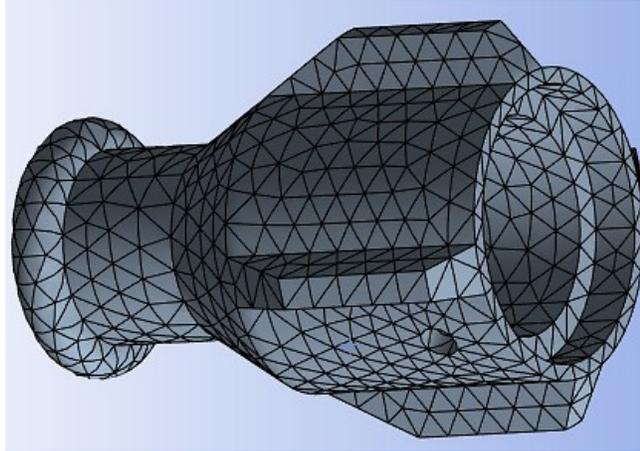


Figura 3.32. Geometría compleja mallada con elementos tetraédricos.

- Método sweep (barrido): este método es empleado para geometrías sencillas o uniformes (simétricas o de formas regulares), en las que es fácil emplear un barrido a lo largo de una trayectoria definida (cara inicial a cara final). Este método es uno de los más eficientes, por lo que es recomendable emplearlo como aproximación inicial siempre y cuando la geometría lo permita [15].

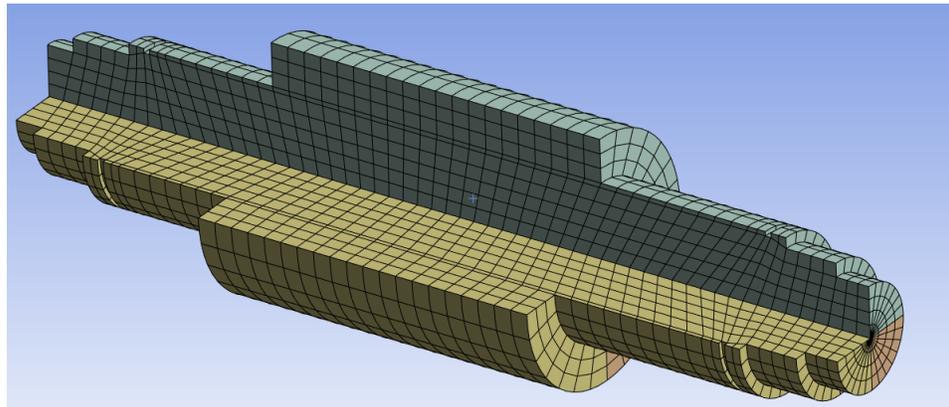


Figura 3.31. Eje seccionado y mallado mediante barrido, donde se define una cara inicial y final.

- Método multizone (multi-zona): este método consta de descomponer (fraccionar) una geometría compleja (de forma manual o automática) según la complejidad de la geometría, con la finalidad de combinar diferentes tipos de mallado a lo largo de la geometría para obtener resultados más precisos en diversas zonas de interés, según las necesidades específicas de cada región. Este método es empleado en geometrías complejas que contienen ciertas irregularidades en las que un solo mallado es deficiente [15].

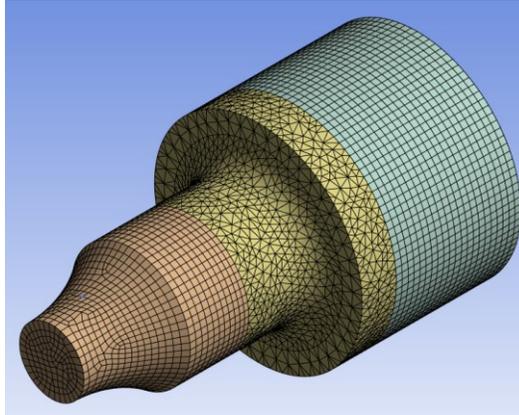


Figura 3.33. Sección de un eje mallado mediante el método multi-zona (manual).

- Método Hexa-dominante: este método es considerado como híbrido, mismo en el que dominan elementos hexaédricos, aproximadamente en un 60% hexaedros, 30% tetraedros y el 10% restante es una combinación de estos (prismas y pirámides para la transición entre elementos hexaédricos y tetraédricos). Sin embargo, este método es poco confiable ya que puede aparentar elementos de buena calidad en la superficie exterior, pero interiormente la calidad de estos puede ser muy mala. Este método de mallado no es recomendable para análisis de dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés), y para análisis estructurales no es recomendable en paredes planas, pero si es recomendable para geometrías con grandes volúmenes [15].

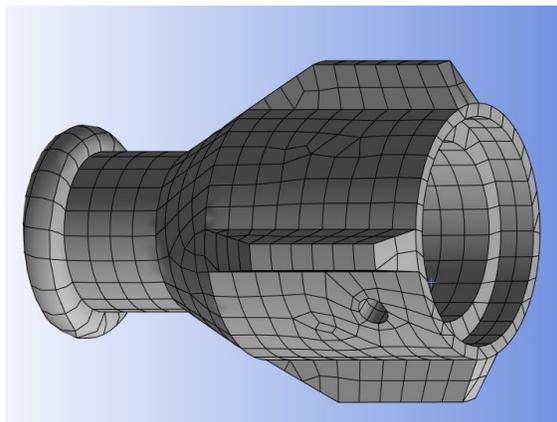


Figura 3.34. Geometría compleja mallada mediante elementos hexaédricos y tetraédricos.

Por otra parte, el software cuenta con controladores globales y locales, mismos que permiten modificar o asignar diversos aspectos de mallado, con el objetivo de lograr una mejor precisión para el análisis. Los controladores globales permiten modificar o asignar características a todos los componentes que se encuentren en el análisis, es decir, si se desea analizar un ensamble, los controladores globales serán aplicados a todos los cuerpos (componentes) del ensamble. Mientras que los controladores locales simplemente se aplicarán a los cuerpos especificados [15].

### 3.17.3 Calidad del mallado

Ansys contiene herramientas que permiten analizar la calidad de los elementos en una malla. Un mallado es considerado como bueno/excelente, si cumple con los parámetros establecidos, algunos de los más importantes y que garantizan que los resultados del sistema converjan a la solución son:

Calidad del elemento: se examina la calidad de los elementos considerando su geometría, proporciones, alineación perpendicular, relación de aspecto, entre otras, con el objetivo de asegurar que se encuentren dentro de los parámetros aceptables.

- Oblicuidad o asimetría (del inglés skewness): es una comparación entre la distorsión relativa y la cara ideal de un elemento, es decir, determina que tan cerca estamos de una cara ideal, donde, una cara ideal para un elemento triangular o tetraedro es un triángulo equilátero, para el caso de elementos hexaedros lo ideal es tener caras equiángulas (ángulos iguales), sin embargo, en elementos deformados se encuentran caras oblicuas y se escala de 0 (excelente) a 1 (inaceptable) [15].

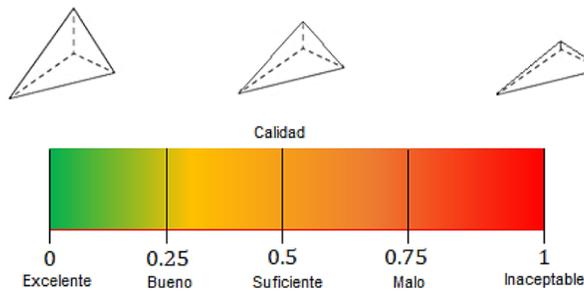


Figura 3.35. Escala paramétrica para asimetría u oblicuidad [15].

Los valores recomendados de asimetría para un mallado deben ser lo más cercanos a 0, sin embargo, los valores mínimos para aceptar la malla son de 0.5 ya que se considera un valor de asimetría suficiente entre los elementos.

1.- Desviación de volumen equilátero (aplicable a triángulos y tetraedros):

$$Oblicuidad = \frac{\text{tamaño de celda óptimo} - \text{tamaño de celda}}{\text{tamaño de celda óptimo}} \quad (3.94)$$

2.- Desviación de ángulo normalizado (empleado para hexaedros y prismas):

$$Asimetría = \max \left[ \frac{\theta_{\text{máx}} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \left[ \frac{\theta_e - \theta_{\text{mín}}}{\theta_e} \right] \right] \quad (3.95)$$

Donde,  $\theta_e$ : cara/celda equiangular ( $60^\circ$  para tetraedros y prismas, y  $90^\circ$  para cuadriláteros y hexaedros) [15].



Figura 3.36. Representación de ángulos máximos y mínimos en elementos tetraédricos [16].

- Ortogonalidad (valor entre 0 y 1): los elementos deben ser lo más ortogonales posible entre sí para evitar ángulos agudos que puedan afectar la precisión del análisis, lo que se traduce a la relación de empate entre un elemento y otro, garantizando que los vectores de cada elemento se encuentren lo más alineados entre sí [16].

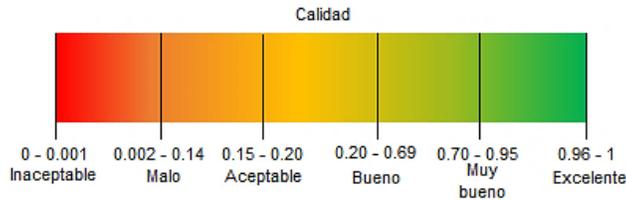


Figura 3.37. Escala paramétrica para ortogonalidad.

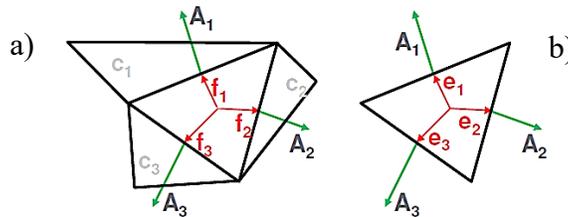


Figura 3.38. Ortogonalidad, a) ortogonalidad entre elementos y b) ortogonalidad en la cara [16].

Los valores recomendados de ortogonalidad para un mallado deben ser lo más cercanos a 1, sin embargo, los valores mínimos para aceptar la malla son de 0.15 ya que se considera un valor de ortogonalidad aceptable entre los elementos.

En la Figura 3.38 a) se tiene; el vector normal de la cara ( $A_i$ ), el vector desde el centroide de la celda al centroide de la cara ( $f_i$ ), el centroide de la celda al centroide de la celda adyacente ( $c_i$ ) y en la Figura 3.38 b); el vector desde el centroide de la cara al centroide de la arista ( $e_i$ ) [16]. El producto punto se define respectivamente como sigue:

$$\frac{A_i \cdot f_i}{|A_i| |f_i|}, \frac{A_i \cdot c_i}{|A_i| |c_i|} \text{ y } \frac{A_i \cdot e_i}{|A_i| |e_i|} \quad (3.96)$$

Donde, si el producto punto de los vectores tiende a cero, indica que los vectores están a  $90^\circ$  entre ellos (perpendiculares u ortogonales) y si tiende a uno quiere decir

que son paralelos y están alineados uno sobre otro, indicando que los elementos son de buena calidad.

- Relación de aspecto (del inglés aspect ratio): se encarga de analizar que tan deformado está un elemento, ya que es importante que los elementos no estén demasiado alargados o deformados, debido a que puede afectar la precisión de los resultados. Una relación de aspecto alta puede indicar una mala calidad [15].

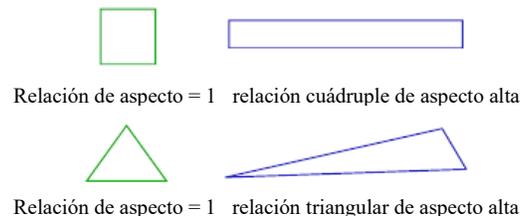


Figura 3.39. Relaciones de aspecto [15].

Los valores recomendables de la relación de aspecto deben ser lo más cercanos a 1, ya que indican una distribución uniforme de los elementos, sin embargo, este valor puede ser mayor y dependerá de los requisitos específicos de la aplicación y del análisis de ingeniería o científico que se esté llevando a cabo.

## 4 Desarrollo del análisis de caso

Como estudio de caso para este trabajo de investigación, se eligió el ejemplo 7-2 “diseño de ejes para esfuerzos” debido a las características que describen y rigen al problema como parte complementaria (fases de diseño), lo que implica abarcar diversas consideraciones de diseño. Este problema fue propuesto y desarrollado por Budynas y Nisbett [6]:

El diseño de una caja de engranes con doble reducción se ha desarrollado hasta el punto en que se ha propuesto la configuración general y las dimensiones axiales del contraeje que carga dos engranes rectos como se muestra en la Figura 4.1 (consultar apéndice F). Los engranes y cojinetes están localizados y soportados mediante hombros (escalones), y se mantienen en su lugar por medio de anillos de retención. Los engranes transmiten par de torsión a través de cuñas. Los engranes se especifican en la Figura 4.1 y los demás datos conocidos se presentan en la Tabla 4.1, donde los subíndices  $t$  y  $r$  representan las direcciones tangencial y radial, respectivamente, y los subíndices 23 y 54 las fuerzas ejercidas por los engranes 2 y 5 (que no se muestran) sobre los engranes 3 y 4, respectivamente.

Se procede con la siguiente fase de diseño, en la que se selecciona un material apropiado y se estiman los diámetros adecuados para cada sección del eje, con base en la provisión de suficiente capacidad de esfuerzo estático y fatiga para la vida infinita del eje, con factor de seguridad mínimo de 1.5.

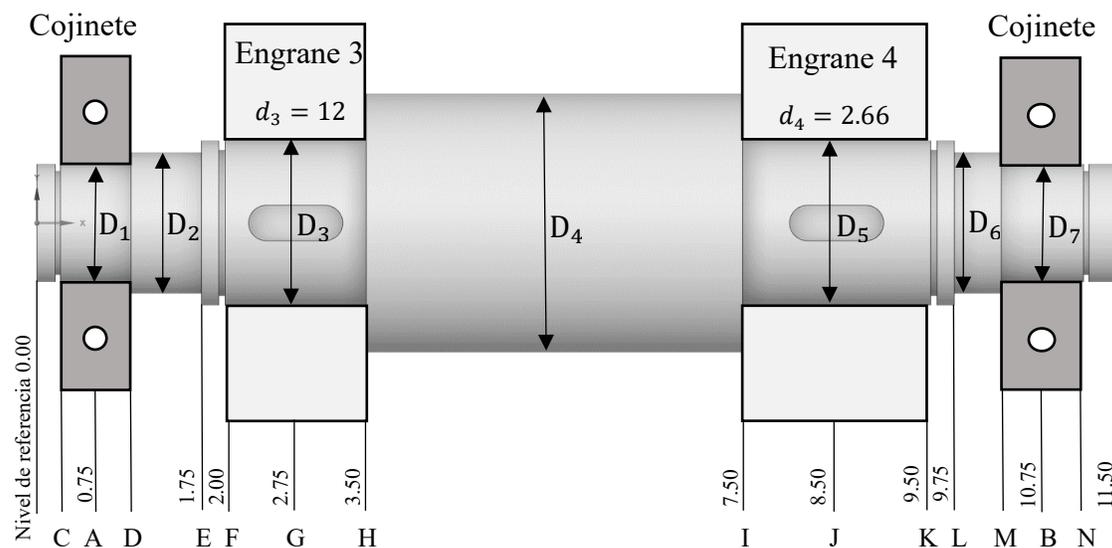


Figura 4.1. Configuración del eje del ejemplo 7-2 [6]. Dimensiones en pulgadas.

Tabla 4.1. Datos recabados del apéndice F como requisitos de diseño para el estudio de caso desarrollado en este trabajo de investigación.

<b>Datos conocidos y recabados del apéndice F.</b>	
Diámetro de paso engrane 2 y 4	$d_2 = d_4 = 2.66 \text{ in}$
Diámetro de paso engrane 3 y 5	$d_3 = d_5 = 12 \text{ in}$
Ángulo de presión	$\phi = 20^\circ$
Potencia	20 HP
Par torsional en el eje	$T_{34} = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in}$
Fuerzas tangencial y radial 23	$W_{t,23} = 541.35 \text{ lb}$ , $W_{r,23} = 197.03 \text{ lb}$
Fuerzas tangencial y radial 54	$W_{t,54} = 2429.99 \text{ lb}$ , $W_{r,54} = 884.44 \text{ lb}$
Factor de seguridad mínimo	$n = 1.5$

## 4.1 Solución analítica

Como primer paso y decisión de diseño, se definió el material del eje como acero AISI 1050 estirado en frío, debido a que es un acero convencional y de costo promedio [6], por lo tanto, del apéndice B se tienen los siguientes datos:

- Resistencia a la fluencia =  $S_y = 84\ 000 \text{ psi}$
- Resistencia última a la tensión =  $S_u = 100\ 000 \text{ psi}$
- Porcentaje de elongación  $\varepsilon = 10 \%$
- Dureza Brinell  $HB = 200$

Como  $\varepsilon_f = 0.10 > 0.05$ , se determinó que el material es dúctil (véase la sección 3.2) y teniendo en cuenta que el material es estirado en frío, del apéndice A se tiene que:

- Resistencia a la fatiga =  $S_n = 37\ 000 \text{ psi}$

Buscando una confiabilidad alta, se propuso 0.99 como decisión de diseño, por lo que de la sección 3.7 se tiene el factor de confiabilidad  $C_R = 0.81$ . Como decisión de diseño se propone un diámetro de eje considerable para transmitir los 20 HP, se propuso un diámetro de 2 in provisionalmente para los cálculos y de la Tabla 3.6 (sección 3.8) se obtuvo un factor de tamaño  $C_S = 0.81$ . Por otra parte, tomando en cuenta los requisitos de diseño, se define un factor de diseño mínimo de  $n_d = 1.5$ .

Una vez definidos estos datos, se propuso  $C_{st} = 1$  y  $C_m = 1$  (sección 3.10) para calcular la resistencia a la fatiga modificada, definida por la ecuación (3.45) se tiene:

$$S'_n = (37\ 000)(1)(1)(0.81)(0.81) = 24\ 275.7 \text{ psi} \quad (4.1)$$

Con el objetivo de ilustrar las fuerzas que inciden sobre el eje, así como las fuerzas de reacción en los cojinetes, se muestra la Figura 4.2.

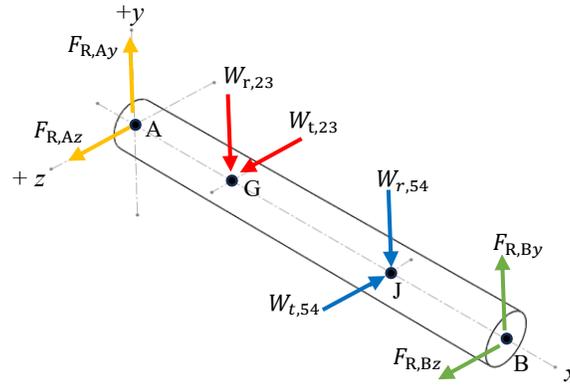
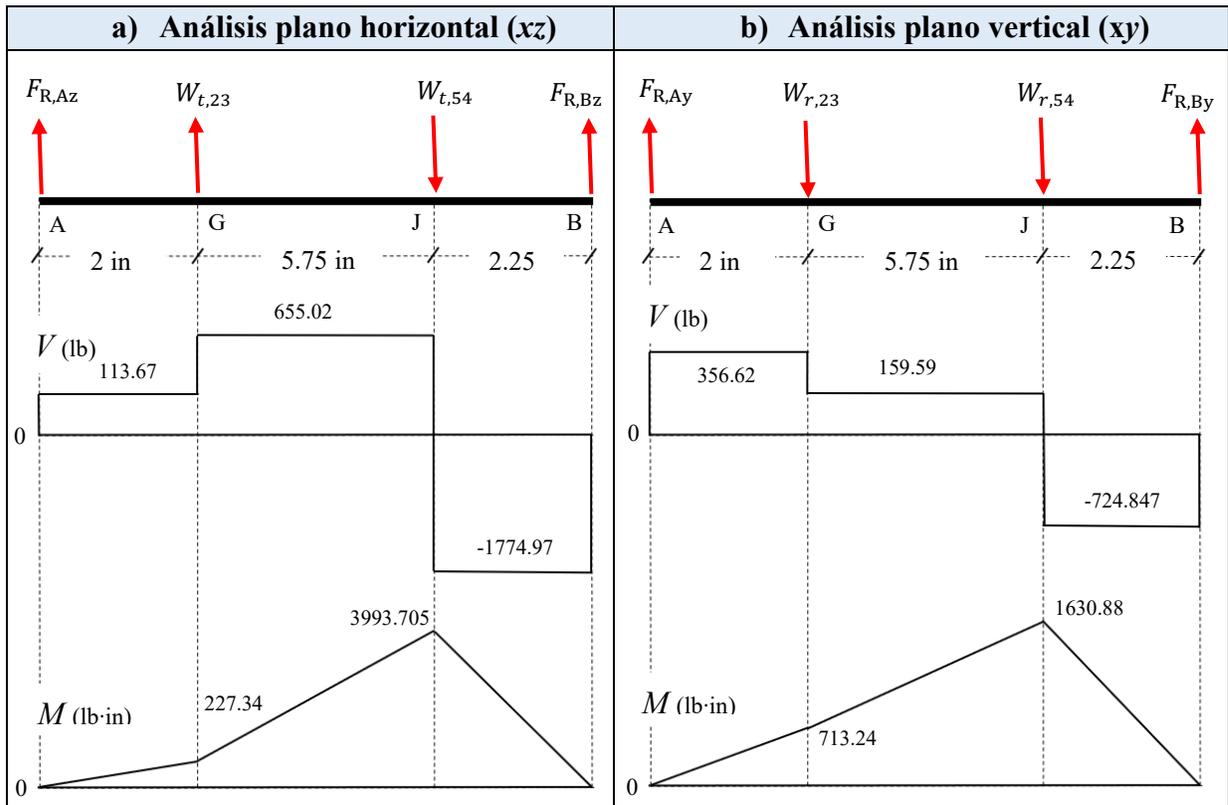


Figura 4.2. Fuerzas ejercidas sobre el eje.

Una vez conocidas las fuerzas que inciden sobre el eje y por medio del equilibrio estático se determinan las fuerzas de reacción ejercida por los cojinetes y transmitidas al eje (Tabla 4.2), para obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante (método de áreas) para el eje (Tabla 4.2), según los planos de acción y direcciones correctas ilustradas en la Figura 4.2.

Tabla 4.2. Diagramas de carga cortante y flexionante para la Figura 4.2.



Nota: en el diagrama de momento flexionante se pueden identificar los puntos en los que se tienen los momentos máximos (puntos donde se aplican los pares de torsión G y J), sin embargo, los puntos próximos a estos deben tomarse en cuenta para determinar el diámetro mínimo requerido por el eje en esa sección.

$\sum F_z = 0$ $F_{R,Az} + W_{t,23} - W_{t,54} + F_{R,Bz} = 0$ $F_{R,Az} + 541.35 - 2429.99 + F_{R,Bz} = 0$ $F_{R,Az} + F_{R,Bz} = 1888.64$	$\sum F_y = 0$ $F_{R,Ay} - W_{r,23} - W_{r,54} + F_{R,By} = 0$ $F_{R,Ay} - 197.03 - 884.44 + F_{R,By} = 0$ $F_{R,Ay} + F_{R,By} = 1081.47$
$\sum M_{Az} = 0$ $541.35(2) - 2429.99(7.75) + F_{R,Bz}(10) = 0$ $F_{R,Bz}(10) = 17749.72$ $F_{R,Bz} = 1774.97 \text{ lb}$ $F_{R,Az} = 113.67 \text{ lb}$	$\sum M_{Ay} = 0$ $-197.03(2) - 884.44(7.75) + F_{R,By}(10) = 0$ $F_{R,By}(10) = 7248.47$ $F_{R,By} = 724.847 \text{ lb}$ $F_{R,Ay} = 356.62 \text{ lb}$

Calculando la magnitud de las fuerzas de reacción en los cojinetes se obtiene:

$$F_{R,A} = \sqrt{(113.67)^2 + (356.62)^2} = 374.30 \text{ lb} \quad (4.2)$$

$$F_{R,B} = \sqrt{(1774.97)^2 + (724.847)^2} = 1917.27 \text{ lb} \quad (4.3)$$

Asimismo, el momento flexionante total en los puntos G y J es:

$$M_G = \sqrt{(227.34)^2 + (713.24)^2} = 748.60 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.4)$$

$$M_J = \sqrt{(3993.705)^2 + (1630.88)^2} = 4313.86 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.5)$$

Como se puede observar en el diagrama de momento flexionante, el engrane 4 transfiere el mayor momento flexionante al eje (punto J), por lo que es recomendable analizar los puntos K e I, ya que existe una concentración de esfuerzo considerable en el punto donde se encuentra el escalón (hombro) y existe un par de torsión para el punto I, así como también debe revisarse la ranura que se encuentra en K y es recomendable hacer las mismas consideraciones para el punto M (estos puntos se identifican en la Figura 4.1).

Así, para el punto I se tiene:

$$M_{Iz} = 227.34 + 655.02(4.75) = 3338.685 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.6)$$

$$M_{Iy} = 713.24 + 159.59(4.75) = 1471.392 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.7)$$

$$M_I = \sqrt{(3338.685)^2 + (1471.392)^2} = 3648.53 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.8)$$

$$T_I = W_{t,23} * \left(\frac{d_3}{2}\right) = 541.35 \left(\frac{12}{2}\right) = 3248.1 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.9)$$

En el punto K:

$$M_{Kz} = 3993.705 - 1774.97(1) = 2218.735 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.10)$$

$$M_{Ky} = 1630.88 - 724.847(1) = 906.033 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.11)$$

$$M_K = \sqrt{(2218.735)^2 + (906.033)^2} = 2396.597 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.12)$$

$$T_K = 0 \quad (4.13)$$

Para el punto M:

$$M_{Mz} = 3993.705 - 1774.97(2.75) = -887.46 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.14)$$

$$M_{My} = 1630.88 - 724.847(2.75) = -362.45 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.15)$$

$$M_M = \sqrt{(-887.46)^2 + (-362.45)^2} = 958.62 \text{ lb} \cdot \text{in} \quad (4.16)$$

$$T_M = 0 \quad (4.17)$$

Como consideraciones de diseño, para los cojinetes se define un chaflán agudo  $K_t = 2.5$  y para el resto de la transición de escalones se define un chaflán bien redondeado con  $K_t = 1.5$  (sección 3.5.1). Tomando en cuenta que la torsión se presenta entre el engrane 3 y 4 (punto G y J), es recomendable calcular como dato inicial el diámetro para la sección derecha del eje, ya que es donde se encuentra la mayor concentración de esfuerzos. Con el objetivo de usar estos diámetros como referencia y así determinar el diámetro óptimo para cada sección como sigue.

- **Análisis en la sección del engrane 4:** para analizar esta sección del eje se analizan los diversos factores que inciden en esta, para determinar el diámetro mínimo requerido adecuado.

Para el punto J se tiene:  $K_t = 2$  (cuñero de perfil),  $T = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ,  $M_J = 4313.86 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , por lo que con la ecuación (3.93) se tiene:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(4313.86)(2)}{24\,275.7} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{3240.07}{84\,000} \right)^2} \right]^{1/3} = 1.75 \text{ in} \quad (4.18)$$

En el punto I se define:  $K_t = 1.5$  (chaflán bien redondeado),  $T = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ,  $M_I = 3648.53 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y con la misma ecuación se tiene:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(3648.53)(1.5)}{24\,275.7} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{3240.07}{84\,000} \right)^2} \right]^{1/3} = 1.51 \text{ in} \quad (4.19)$$

Finalmente, para el punto K se tiene:  $K_t = 3$  (anillo de retención),  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ,  $M_K = 2396.597 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , se tiene:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(2396.597)(3)}{24\,275.7} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{0}{84\,000} \right)^2} \right]^{1/3} = 1.65 \text{ in} \quad (4.20)$$

Y aplicando el factor de ranura (sección 3.5.1.3) se tiene  $D = 1.65 \times 1.06 = 1.75 \text{ in}$

Por lo tanto, se definió  $D_5 = 1.75 \text{ in}$  como diámetro mínimo requerido en esta sección y eligiendo el siguiente diámetro estándar para secciones circulares de la Tabla D (apéndice C), se mantiene  $D_5 = 1\frac{3}{4} = 1.750 \text{ in}$ . Empleando la relación para redondeos de la sección 3.5.1.2, el diámetro mayor puede definirse como sigue:

$$\frac{D}{d} = \frac{D_4}{D_5} = 1.5 \quad (4.21)$$

Donde, despejando  $D_4$  de la ecuación (4.21), se tiene

$$D_4 = D_5(1.5) = 2.625 \text{ in} \quad (4.22)$$

Ahora, se realiza un análisis de esfuerzos en este punto para verificar el factor de seguridad en el punto I, con ayuda de los esfuerzos fluctuantes de Von Mises (sección 3.12). Definiendo así, las siguientes ecuaciones:

$$\sigma'_a = \frac{32 K_f M_I}{\pi d^3} \quad (4.23)$$

$$\sigma'_m = \left[ 3 \left( \frac{16 K_{fs} T}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

Una vez definidos el esfuerzo alternante y medio de Von Mises, para el punto I se define  $\frac{r}{d} = 0.17$  y  $\frac{D}{d} = 1.5$  para obtener los siguientes valores con ayuda de la Figura C (apéndice D) y de la Figura 3.17 (sección 3.5.2);  $K_t = 1.56$  y  $q = 0.83$ . Por lo que, empleando la ecuación (3.40), el factor de concentración de esfuerzo por fatiga  $K_f$  queda como sigue:

$$K_f = 1 + 0.83(1.56 - 1) = 1.4648 \quad (4.25)$$

Y con ayuda de la Figura B (apéndice D) y de la Figura 3.18 (sección 3.5.2) para el factor de concentración de esfuerzo por fatiga en cortante se define;  $K_{ts} = 1.3$  y  $q_s = 0.88$ . Por lo que empleando la ecuación (3.40), resulta:

$$K_{fs} = 1 + 0.88(1.3 - 1) = 1.264 \quad (4.26)$$

Calculando el factor por tamaño real para  $D_5 = 1.750 \text{ in}$ , en la sección 3.8 se define:

$$C_S = (1.750/0.3)^{-0.11} = 0.8236 \quad (4.27)$$

Así, la resistencia a la fatiga real para este diámetro es:

$$S'_n = (37\,000)(1)(1)(0.8236)(0.81) = 24\,683.29 \text{ psi} \quad (4.28)$$

Resolviendo para la ecuación (4.23) y (4.24), resulta:

$$\sigma'_a = \frac{32(1.4648)(3648.53)}{\pi(1.750)^3} = 10\,157.39 \text{ psi} \quad (4.29)$$

$$\sigma'_m = \left[ 3 \left( \frac{16(1.264)(3240.07)}{\pi(1.750)^3} \right)^2 \right]^{1/2} = 6740.90 \text{ psi} \quad (4.30)$$

Para verificar que el factor mínimo de seguridad  $n = 1.5$  se cumpla, se emplea el criterio de falla por fatiga de la línea de Goodman definido por:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma'_a}{S'_n} + \frac{\sigma'_m}{S_u} \quad (4.31)$$

Resolviendo la ecuación (4.31) para el factor de seguridad se tiene:

$$n = \left( \frac{10\,157.39}{24\,683.29} + \frac{6740.90}{100\,000} \right)^{-1} = 2.08 \quad (4.32)$$

Por lo tanto, como  $n = 2.08 > 1.5$ , se dice que el diámetro es aceptable, sin embargo, comprobando la fluencia, resulta:

$$n = \frac{S_y}{\sigma'_{m\acute{a}x}} > \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{84\,000}{10\,157.39 + 6740.90} = 4.97 \quad (4.33)$$

Lo que indica que el diámetro elegido cumple con el requerimiento del factor de seguridad. Verificando el diámetro en los diversos puntos de esta sección, se analiza el diámetro en el extremo del cuñero, es decir, a la derecha del punto I, donde se puede suponer  $M = 3800 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , de la Tabla F (apéndice E) se elige un cuñero con ancho  $t = W = \frac{3}{8} \text{ in}$  para un diámetro  $D_5 = 1.750 \text{ in}$ , y de la sección 3.5.1.1 se define  $\frac{r}{d} = 0.02$ , donde  $r = 0.02 \times D_5 = 0.035 \text{ in}$  (para la parte baja del cuñero).

Realizando el mismo procedimiento que para el punto I, y con ayuda de la Tabla E (apéndice D) se tiene:  $K_t = 2.14$  y  $q = 0.66$ . Por lo que, el factor de concentración de esfuerzo por fatiga  $K_f$ , queda como:

$$K_f = 1 + 0.66(2.14 - 1) = 1.7524 \quad (4.34)$$

Para el factor de concentración de esfuerzo por fatiga en cortante con  $K_{ts} = 3.0$  y  $q_s = 0.71$ , se tiene:

$$K_{fs} = 1 + 0.71(3.0 - 1) = 2.42 \quad (4.35)$$

Resolviendo para la ecuación (4.23) y (4.24) resulta:

$$\sigma'_a = \frac{32 (1.7524)(3800)}{\pi(1.750)^3} = 12\,656.18 \text{ psi} \quad (4.36)$$

$$\sigma'_m = \left[ 3 \left( \frac{16(2.42)(3240.07)}{\pi(1.750)^3} \right)^2 \right]^{1/2} = 12\,905.84 \text{ psi} \quad (4.37)$$

Resolviendo la ecuación (4.31) para el factor de seguridad se tiene:

$$n = \left( \frac{12\,656.18}{24\,683.29} + \frac{12\,905.84}{100\,000} \right)^{-1} = 1.558 \quad (4.38)$$

Por lo tanto, como  $n = 1.558 > 1.5$ , se dice que el diámetro es aceptable para este punto, y comprobando la fluencia:

$$n = \frac{S_y}{\sigma'_{m\acute{a}x}} > \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{84\,000}{12\,656.18 + 12\,905.84} = 3.28 \quad (4.39)$$

Lo que comprueba que el diámetro elegido para esta sección cumple con el requerimiento del factor de seguridad mínimo.

Finalmente, para corroborar que el diámetro mínimo calculado es verdaderamente satisfactorio, se verifica el punto K, ya que en él se presenta una ranura para un anillo de retención, definiendo  $K_t = K_f = 3.0$ ,  $M_K = 2396.597 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ . Como no se presenta torsión en este punto, se tiene:

$$\sigma'_a = \frac{32 (3)(2396.597)}{\pi(1.750)^3} = 13\,664.76 \text{ psi} \quad (4.40)$$

Y así:

$$n = \left( \frac{\sigma'_a}{S'_n} \right)^{-1} = \left( \frac{13\,664.76}{24\,683.29} \right)^{-1} = 1.80 \quad (4.41)$$

Por lo que se comprueba que el diámetro en esta sección es aceptable y cumple con los requisitos de diseño.

- **Análisis en la sección del cojinete B:**

A la derecha del cojinete B se tiene, una ranura para anillo de retención con  $K_t = 3.0$ ,  $F_{R,B} = V = 1917.27 \text{ lb}$  y  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ . Así, con la ecuación (3.82) se tiene:

$$D = \sqrt{\frac{2.94(3)(1.5)(1917.27)}{24 \ 275.7}} = 1.02 \text{ in} \quad (4.42)$$

Y aplicando el factor de ranura para anillos de retención se define:  $D_7 = D \times 1.06 = 1.08 \text{ in}$ , como diámetro mínimo requerido para esta sección, por lo que buscando el siguiente diámetro estándar de la Tabla C (apéndice C), se elige  $D_7 = 1.1811 \text{ in}$ .

Del lado izquierdo del cojinete B, se tiene un chaflán agudo con  $K_t = 2.5$ ,  $M_M = 958.62 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , así, con la ecuación (3.93), el diámetro mínimo requerido es:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(958.62)(2.5)}{24 \ 275.7} \right)^2 + 0} \right]^{\frac{1}{3}} = 1.14 \text{ in} \quad (4.43)$$

Y eligiendo el siguiente diámetro estándar para secciones circulares de la Tabla D (apéndice C), se elige  $D_6 = 1 \frac{1}{2} = 1.5 \text{ in}$ , con el objetivo de crear un escalón respecto a los diámetros  $D_5$  y  $D_7$ .

Ahora, verificando si el punto M podría ser un punto crítico, con  $\frac{r}{d} = 0.03$ ,  $\frac{D}{d} = 1.5$  y  $K_t = 2.5$ , de la Figura 3.17 (sección 3.5.2) se tiene  $q = 0.75$ .

Por lo que, empleando la ecuación (3.40) el factor de concentración de esfuerzo por fatiga  $K_f$ , es:

$$K_f = 1 + 0.75(2.5 - 1) = 2.125 \quad (4.44)$$

Entonces:

$$\sigma'_a = \frac{32 (2.125)(958.62)}{\pi(1.1811)^3} = 12 \ 593.47 \text{ psi} \quad (4.45)$$

Y calculando el factor por tamaño para  $D_7 = 1.1811 \text{ in}$ , se define:

$$C_S = \left( \frac{1.1811}{0.3} \right)^{-0.11} = 0.86 \quad (4.46)$$

Así, la resistencia a la fatiga real para este diámetro es:

$$S'_n = (37 \ 000)(1)(1)(0.86)(0.81) = 25 \ 774.2 \text{ psi} \quad (4.47)$$

Y el factor de seguridad es:

$$n = \left( \frac{\sigma'_a}{S'_n} \right)^{-1} = \left( \frac{12\,593.47}{24\,774.2} \right)^{-1} = 1.96 \quad (4.48)$$

Por lo que se comprueba que el diámetro en esta sección es aceptable y cumple con los requisitos de diseño.

- **Análisis para la sección del engrane 3:**

Para el punto G (engrane 3) se tiene:  $K_t = 2$  (cuñero de perfil),  $T = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y  $M_G = 748.60 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , por lo que con la ecuación (3.93) se tiene:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(748.60)(2)}{24\,275.7} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{3240.07}{84\,000} \right)^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 1.02 \text{ in} \quad (4.49)$$

Para el punto F, a la izquierda del punto G se tiene:  $K_t = 3$  (anillo de retención),  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y  $M_G = 748.60 \text{ lb} \cdot \text{in}$ , se tiene:

$$D = \left[ \frac{32(1.5)}{\pi} \sqrt{\left( \frac{(748.60)(3)}{24\,275.7} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{0}{84\,000} \right)^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 1.12 \text{ in} \quad (4.50)$$

Y aplicando el factor de ranura (sección 3.5.1.3) se tiene  $D = 1.12 \times 1.06 = 1.18 \text{ in}$ , estos valores son los diámetros mínimos requeridos para  $D_3$ , sin embargo, con el objetivo de crear un escalón apropiado entre  $D_3$  y  $D_4$ , se emplea la relación siguiente:

$$\frac{D}{d} = \frac{D_4}{D_3} = 1.5 \quad (4.51)$$

Donde, despejando  $D_3$  de la ecuación, se tiene:

$$D_3 = \frac{D_{4,min}}{1.5} = \frac{2.625}{1.5} = 1.75 \text{ in} \quad (4.52)$$

Este valor se toma como válido, ya que del lado izquierdo de  $D_4$  los valores de fuerza cortante y momento flexionante son más bajos que los obtenidos del lado derecho, además de crear escalones apropiados y crear simetría en el eje.

- **Análisis para la sección del cojinete A:**

Analizando el lado izquierdo del cojinete A (punto C), se define:  $K_t = 3$  (anillo de retención),  $T = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ,  $M_A = 0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ,  $V = F_{R,A} = 374.30 \text{ lb}$  y con la ecuación (3.82) se tiene:

$$D = \sqrt{\frac{2.94(3)(1.5)(374.30)}{24 \cdot 275.7}} = 0.45 \text{ in} \quad (4.53)$$

Y aplicando el factor de ranura (sección 3.5.1.3), se tiene  $D_1 = 0.45 \times 1.06 = 0.48 \text{ in}$  como diámetro mínimo requerido para esta sección del eje, por lo que, este diámetro puede ajustarse a  $D_7$ , con el objetivo de garantizar la transición del escalón. Es decir,  $D_1 = D_7 = 1.1811 \text{ in}$ .

De igual forma, se puede ajustar  $D_2$  con la relación de la ecuación (4.51) como sigue:

$$\frac{D}{d} = \frac{D_3}{D_2} = 1.5 \quad (4.54)$$

Y resolviendo para  $D_2$ , resulta:

$$D_2 = \frac{D_3}{1.5} = \frac{1.75}{1.5} = 1.16 \text{ in} \quad (4.55)$$

Por lo que, ajustando este diámetro se define  $D_2 = D_6 = 1.50 \text{ in}$ .

## 4.2 Análisis de elementos finitos en Ansys Workbench

Se realiza el análisis de los elementos finitos y se corrobora con los resultados obtenidos analíticamente, con el objetivo de describir detalladamente el desarrollo de este. En el software de Ansys el modelado del cuerpo debe ser definido de la forma más simple posible con el objetivo de simplificar el análisis, ya que la correcta simplificación de un cuerpo (estructura o sistema) reduce la cantidad de recursos a utilizar y por tanto costos computacionales.

El modelado del eje se realiza en el modelador SpaceClaim de Ansys, definiendo inicialmente este como un elemento tipo viga, es decir, se definen los elementos lineales que rigen al eje, respetando las especificaciones de diseño (sistema inglés) como resultado de la solución analítica y definidas en la Figura N del apéndice G.

Como primer paso, se crea un archivo nuevo en Ansys Workbench, luego se elige el módulo de Static Structural (análisis estático estructural por su traducción del inglés) en la caja de

herramientas (del inglés toolbox), arrastrándolo hacia la hoja de trabajo y se edita el material a emplear con clic derecho como se muestra en la Figura 4.3.

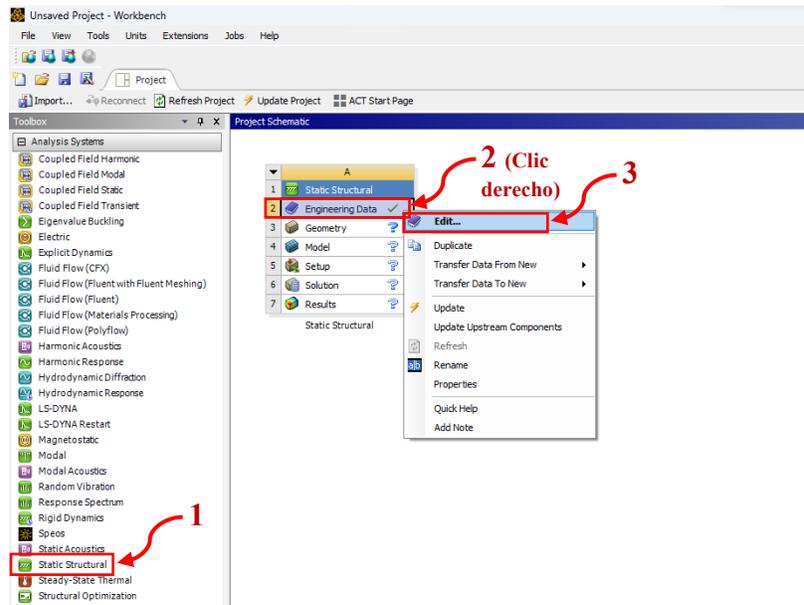


Figura 4.3. Selección de análisis a emplear y edición de material en Ansys Workbench.

Una vez en el menú de materiales, se elimina el material establecido por defecto (clic derecho y eliminar) y se elige la opción de crear un nuevo material como se muestra en la Figura 4.4.

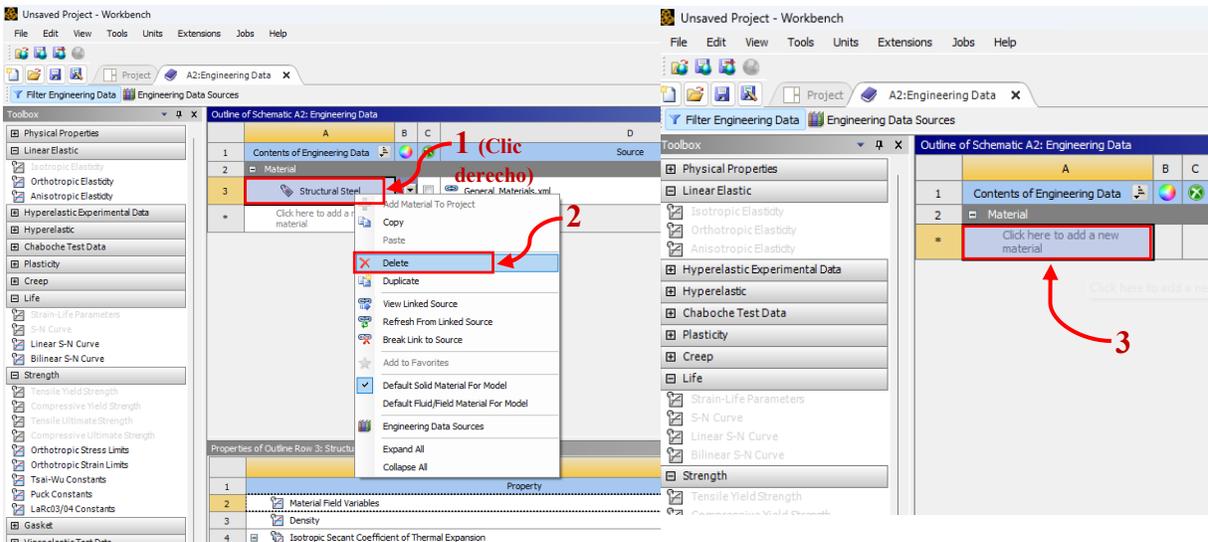


Figura 4.4. Definición de nuevo material.

Posteriormente se definen las características del acero AISI 1050 estirado en frío y establecidas en el apéndice B, así como para la curva de esfuerzo-ciclos de vida y parámetros de esfuerzo-vida del material se toman como referencia los datos establecidos para el acero estructural, estos módulos se agregan desde la caja de herramientas (con doble clic) para posteriormente rellenar los campos con los datos correspondientes al material como se muestra en la Figura 4.4.

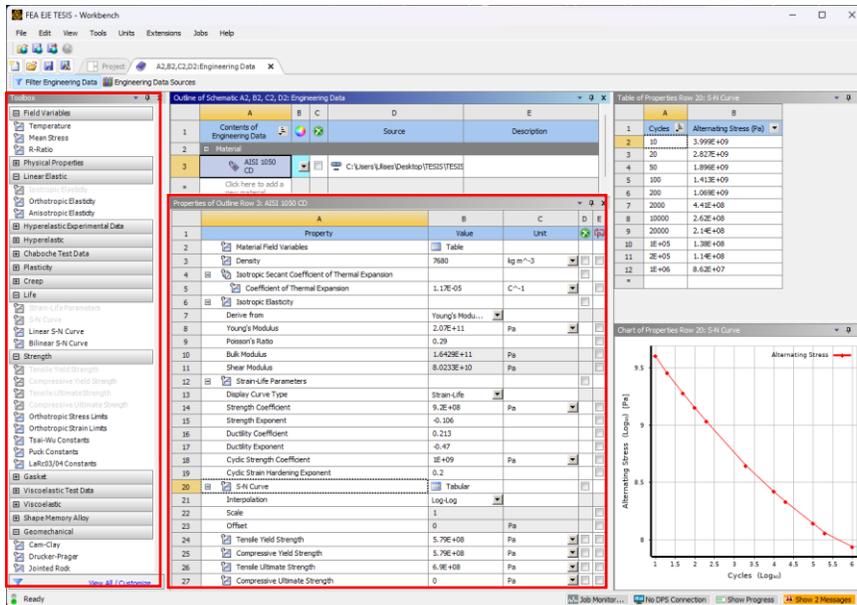


Figura 4.5. Propiedades del acero AISI 1050 estirado en frío

Posteriormente a la definición del material, se regresa a la hoja de trabajo y se define la geometría del eje en el modelador SpaceClaim mediante un elemento tipo viga y sus respectivas secciones transversales según las especificaciones del eje como se muestra a continuación. Por otra parte, se debe compartir la topología del cuerpo desde las propiedades de este.

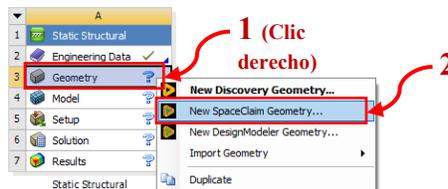


Figura 4.6. Selección de modelador y nueva geometría.

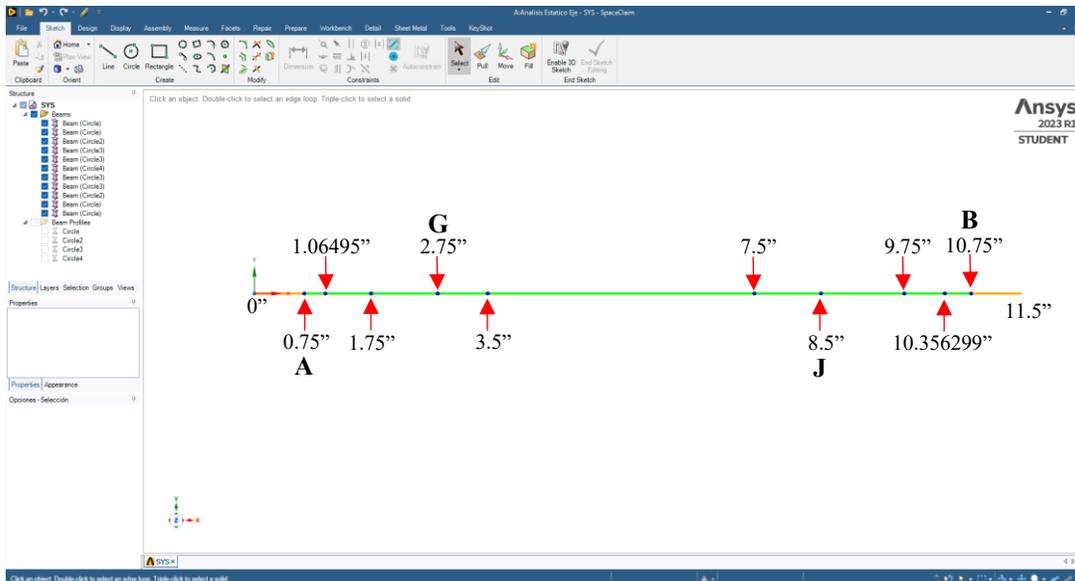


Figura 4.7. Definición de geometría tipo viga, mediante secciones lineales que indican cambios de sección transversal o puntos de interés (A, G, J y B).

Una vez definida la geometría del eje, se procede a realizar la especificación de las condiciones de frontera, generación de malla y especificación de los datos de interés como parte del pre-procesamiento en Mechanical Structural como sigue.

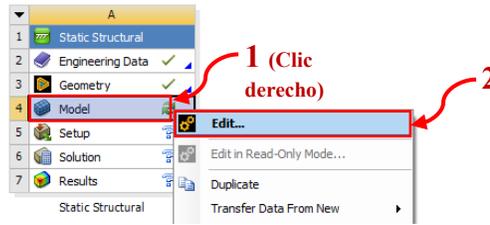


Figura 4.8. Modificación del modelo (Mechanical Structural).

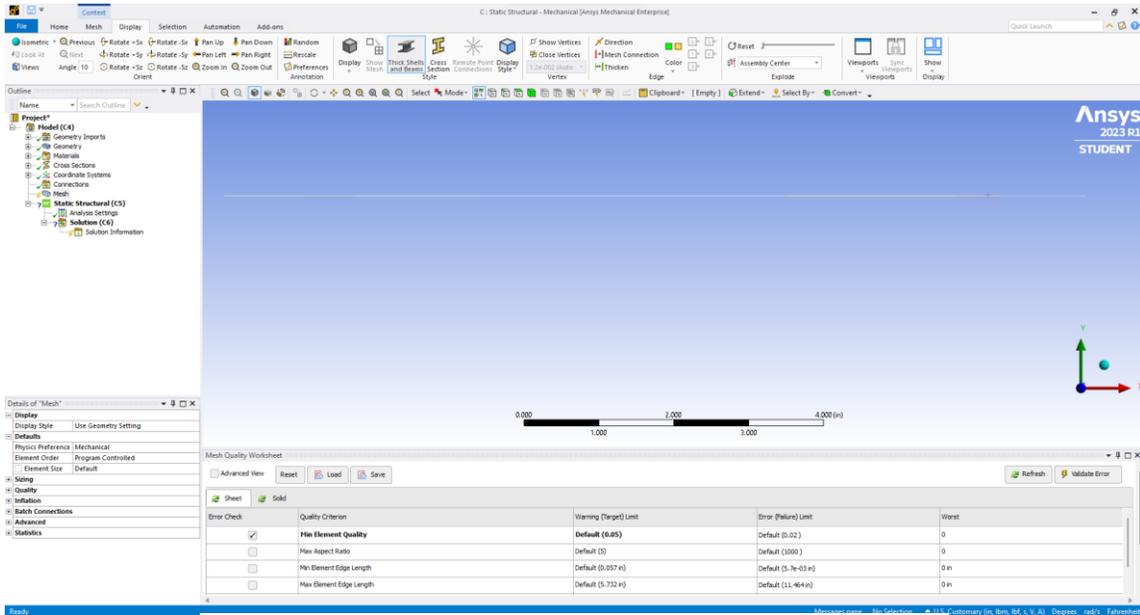


Figura 4.9. Ventana de mecánica estructural (Mechanical Structural).

Como se puede observar en la Figura 4.9, la simplificación del modelo (eje) es la composición de los elementos lineales definidos, ya que un elemento lineal es el elemento más simple y fácil de analizar. Para la generación del mallado, se elige un controlador global de tamaño del cuerpo (body sizing) y al tratarse de un elemento lineal se elige un método de mallado automático, debido a que el controlador global elegido se encargará de discretizar cada elemento del cuerpo en el número de divisiones definido, como se muestra a continuación.

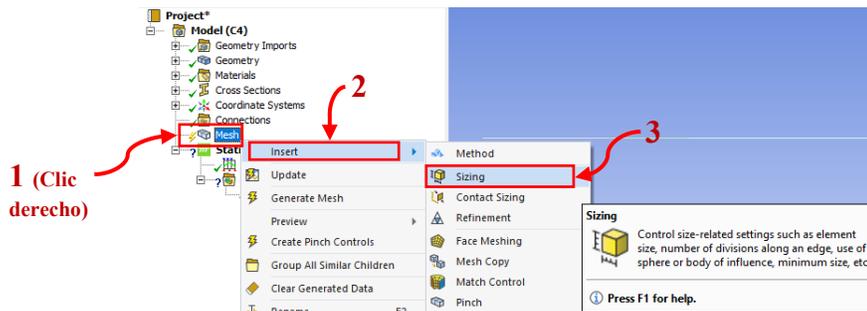


Figura 4.10. Controlador global de tamaño del cuerpo (Body Sizing).

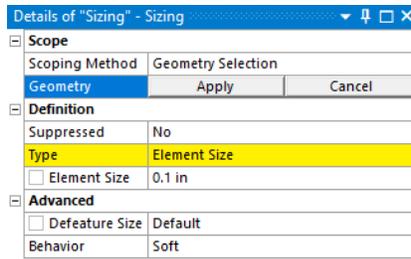


Figura 4.11. Aplicación del tamaño del cuerpo a todos los elementos, el tamaño óptimo para el análisis es de 0.1 pulgadas, como resultado de repetidas iteraciones de mallado manual.

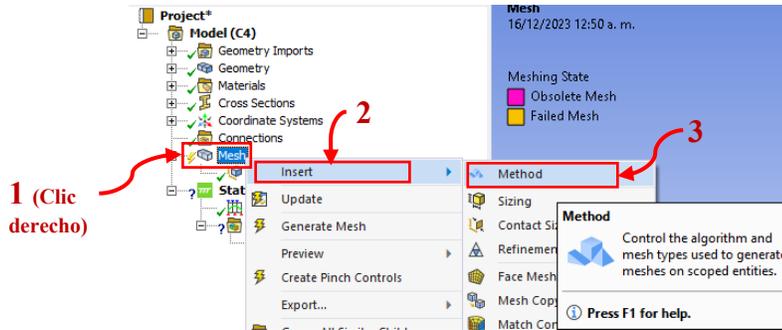


Figura 4.12. Selección de método de mallado automático.

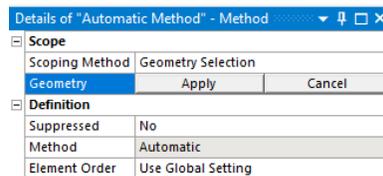


Figura 4.13. Elección de todos los elementos y aplicación del método.

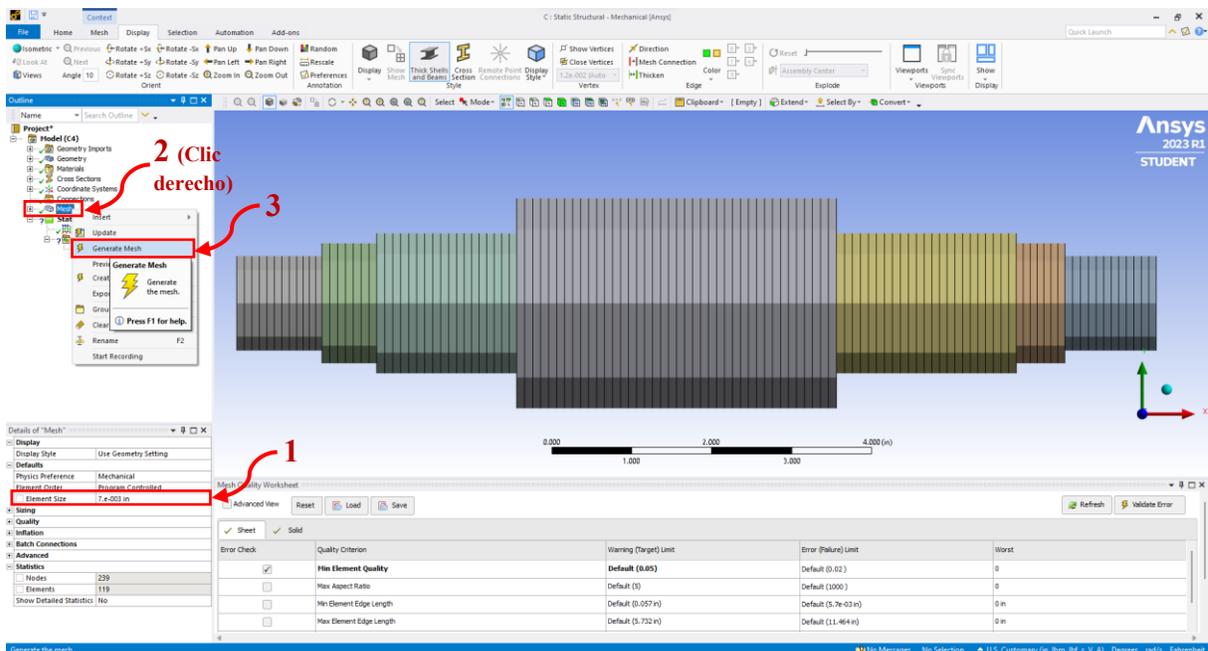


Figura 4.14. Discretización del cuerpo (generación de malla).

Una vez realizada la discretización del cuerpo, se procede a restringir el cuerpo mediante las condiciones de frontera que lo rigen, para este caso el eje presenta dos cojinetes (A y B) que restringen sus movimientos, por lo que no presenta desplazamiento en ninguna dirección, pero si presenta rotación respecto al eje X, de igual forma, en la ubicación de los engranes (G y J) inciden las fuerzas radiales y tangenciales respectivas, mismas que se encuentran especificadas en la Tabla 4.1, la definición de estas condiciones se muestra a continuación.

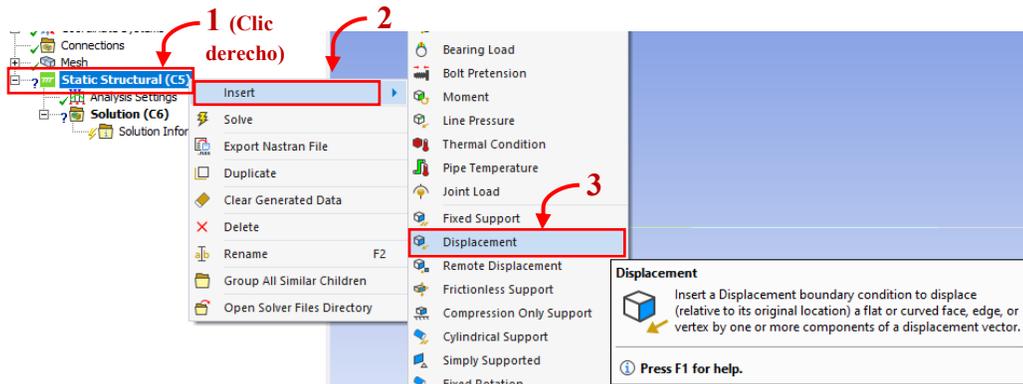


Figura 4.15. Selección de condición de desplazamiento para los cojinetes A y B.

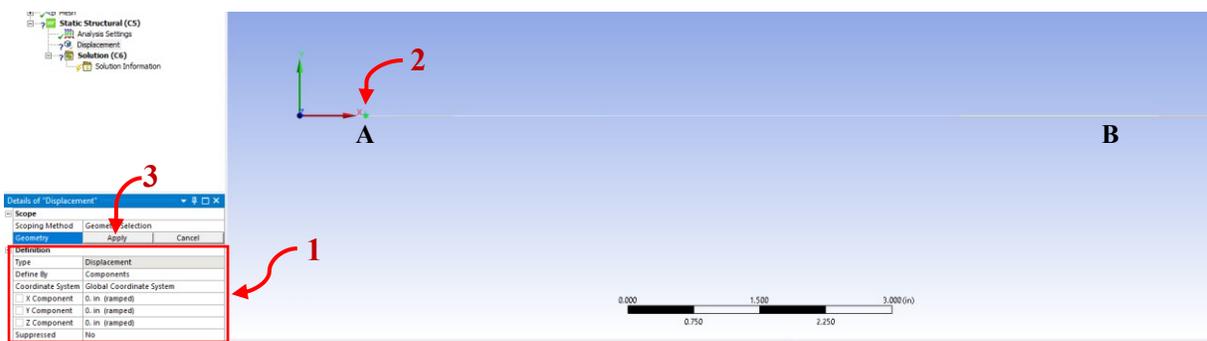


Figura 4.16. Definición de las restricciones de desplazamiento (mismo procedimiento para el cojinete B).

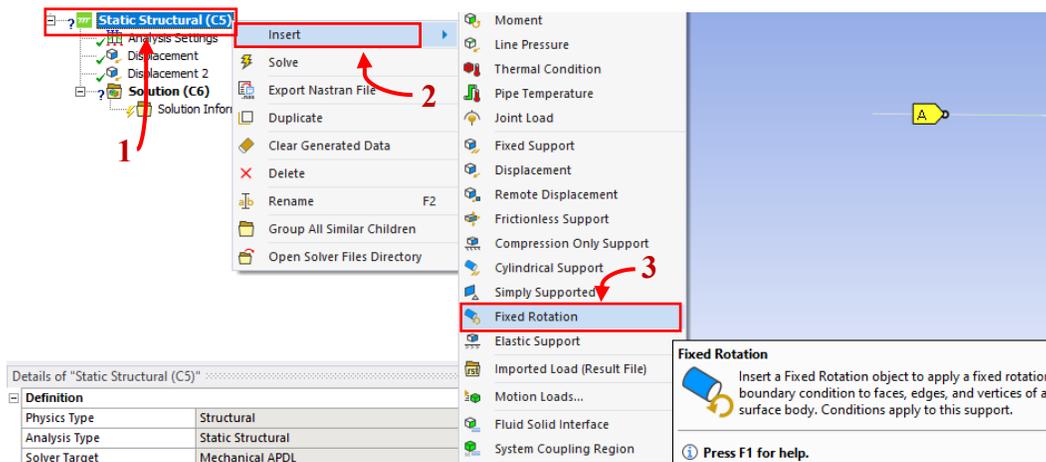


Figura 4.17. Selección de condición de rotación fija para los cojinetes A y B.

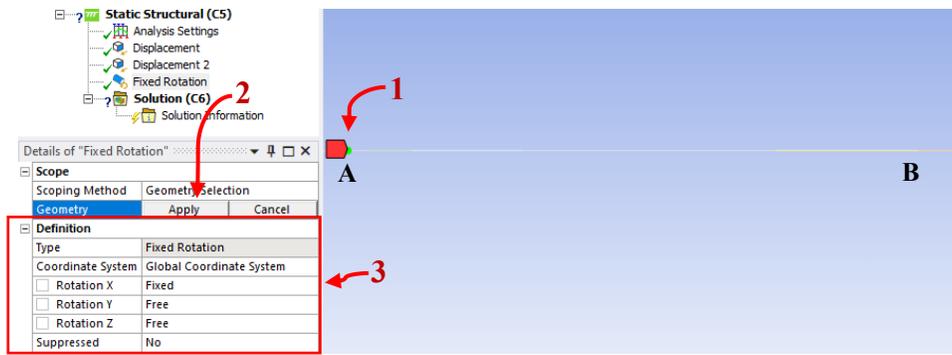


Figura 4.18. Definición de las restricciones de rotación fija (mismo procedimiento para el cojinete B).

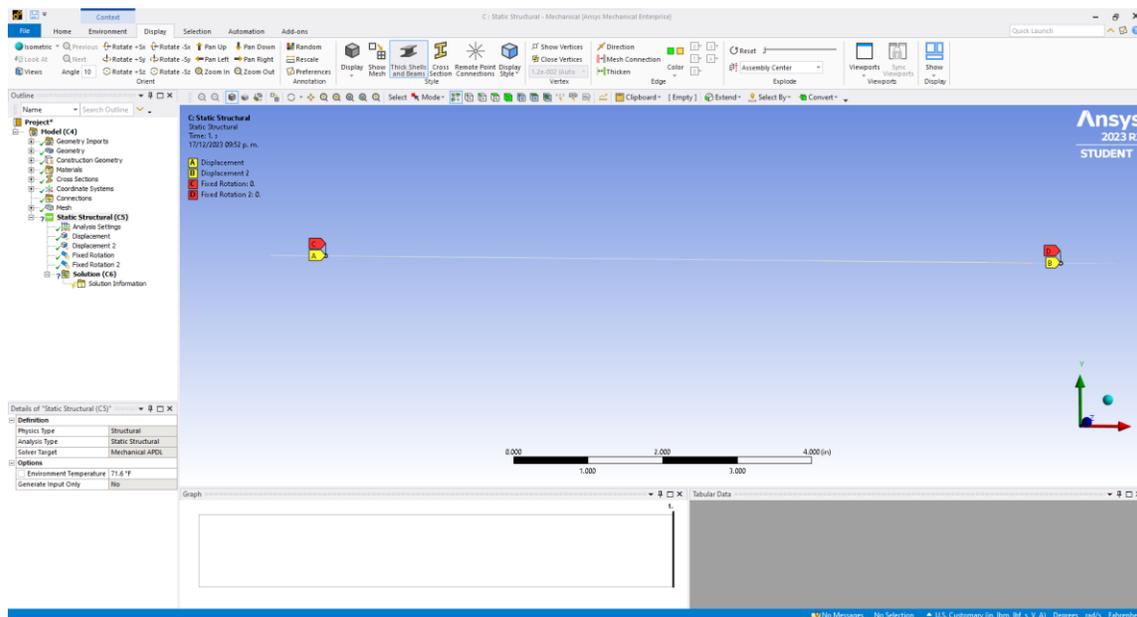


Figura 4.19. Restricciones en los cojinetes A y B.

Para la definición de las fuerzas que inciden sobre el eje, se tiene.

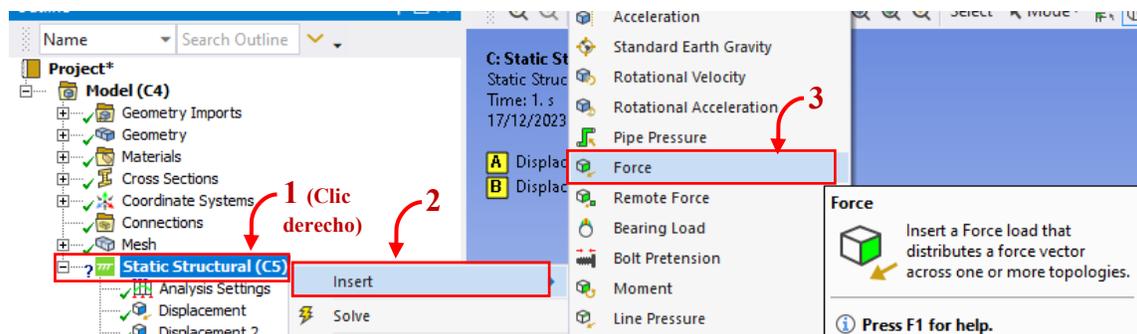


Figura 4.20. Definición de las fuerzas en los engranes G y J (puntos G y J).

Estas fuerzas se encuentran en la Tabla 4.1 y respetando las coordenadas, estas se definen como.

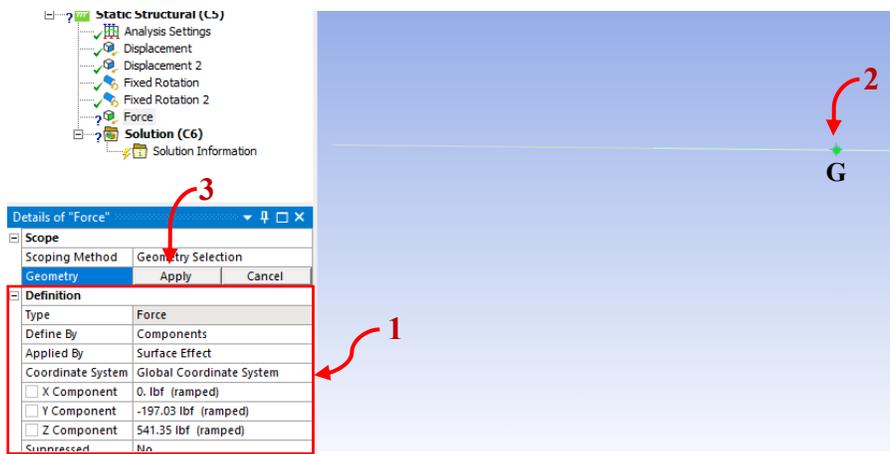


Figura 4.21. Definición de fuerza radial y tangencial que el engrane G transmite al eje (punto G).

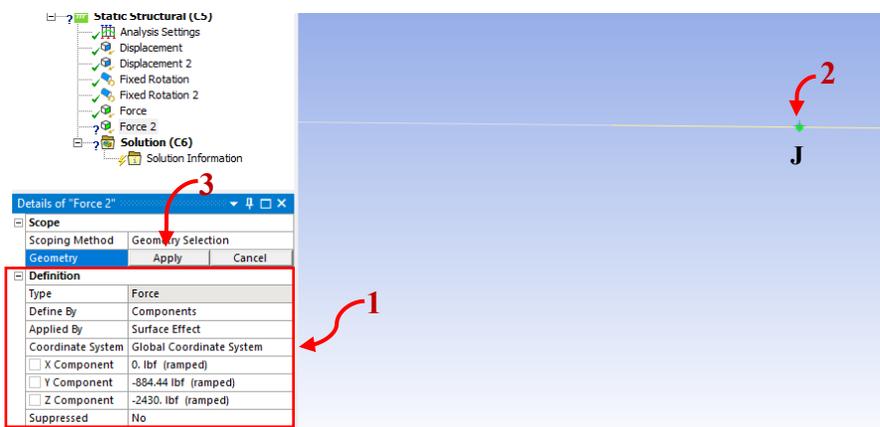


Figura 4.22. Definición de fuerza radial y tangencial que el engrane J transmite al eje (punto J).

Una vez definidas estas condiciones, se puede seleccionar la casilla de estático estructural (static structural) para visualizar todas las condiciones en conjunto como se muestra en la Figura 4.23.

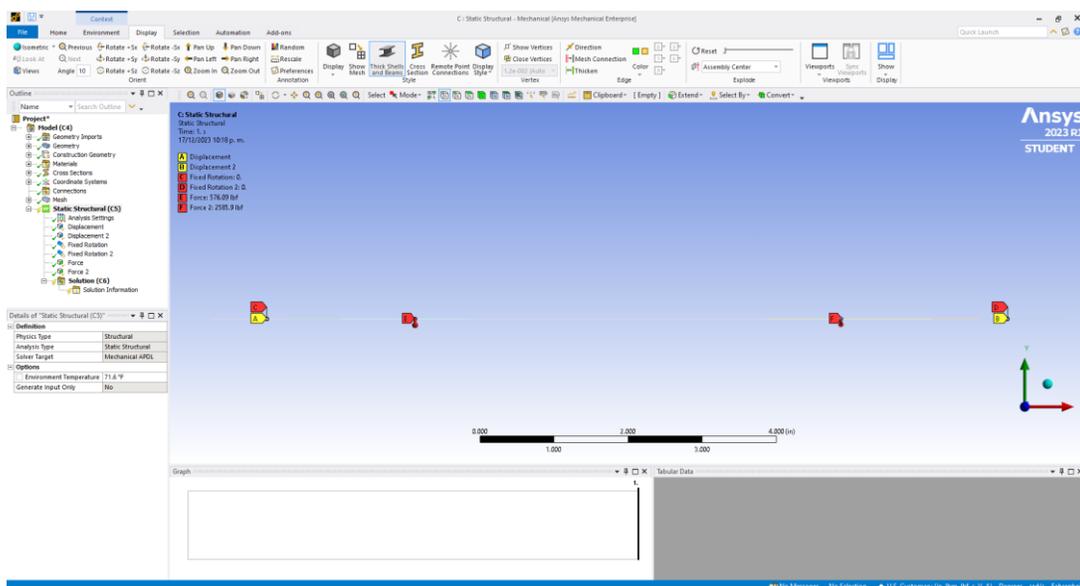


Figura 4.23. Visualización de las restricciones y fuerzas que inciden sobre el eje.

Al tratarse de un elemento lineal, se debe definir una trayectoria (del inglés Path) a la cual aplicar los resultados, esta consta en seleccionar las secciones consecuentemente con la finalidad de crear una trayectoria como se ilustra a continuación.

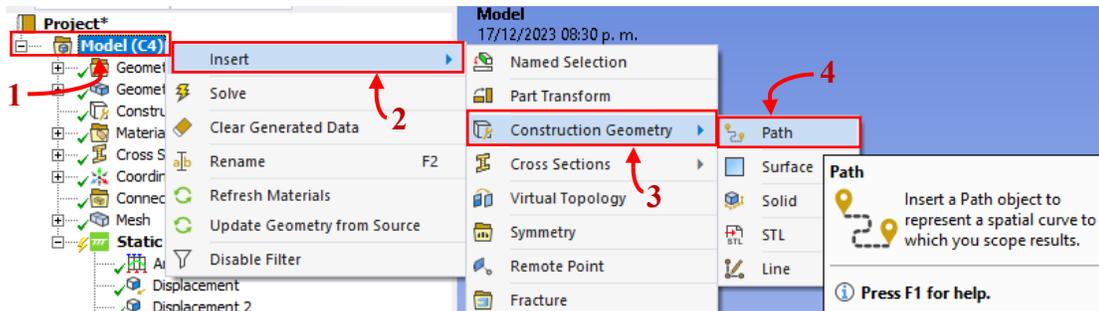


Figura 4.24. Insertar trayectoria (Path).

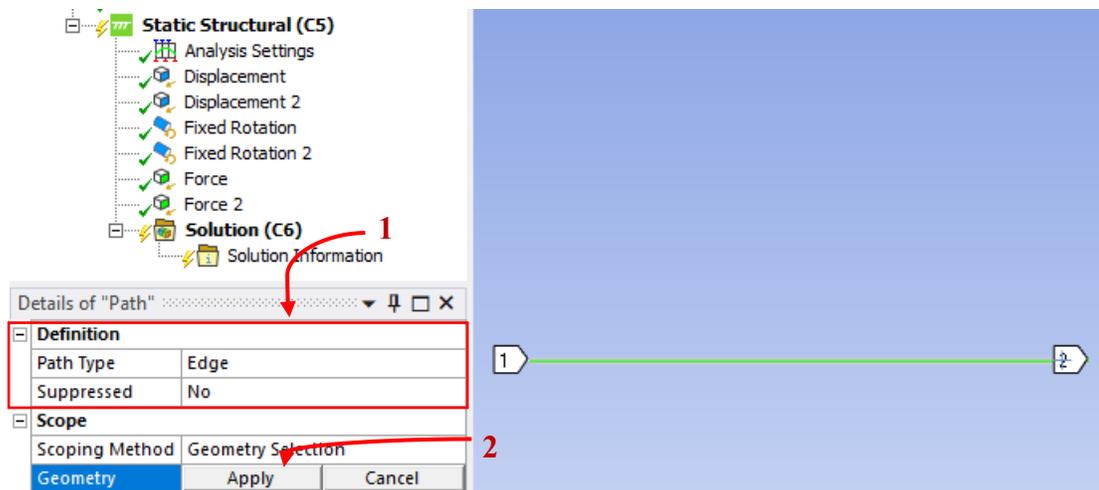


Figura 4.25. Definición de trayectoria, seleccionando todas las secciones del eje borde (del inglés Edge).

Posteriormente, se definen las variables de interés como sigue.

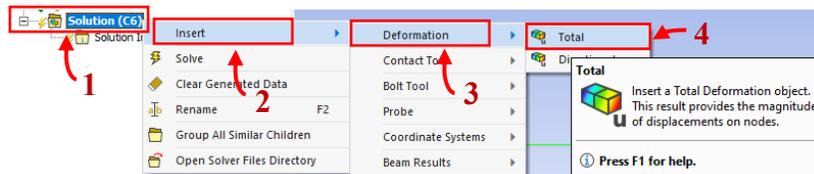


Figura 4.26. Selección de deformación total como variable de interés.

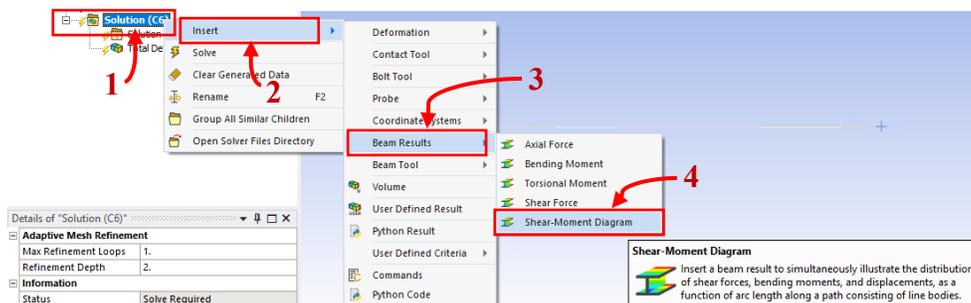


Figura 4.27. Selección de diagrama de fuerza cortante y momento flexionante como variables de interés.

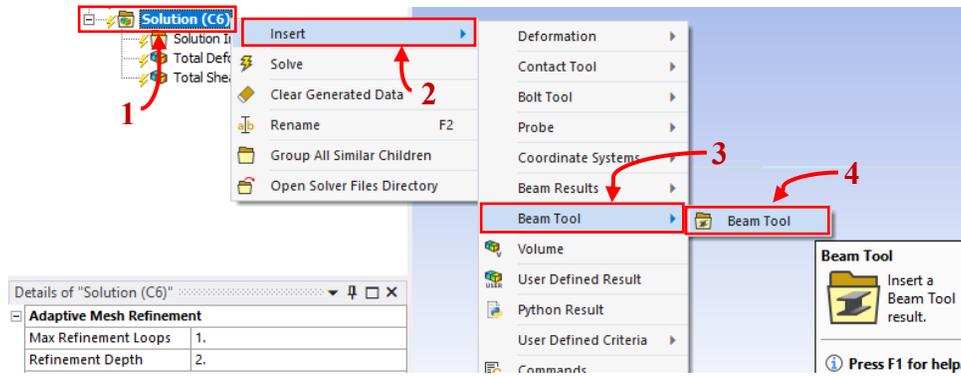


Figura 4.28. Selección de herramienta de viga.

Finalmente, se elige la casilla de resolver para que el software realice la simulación y proporcione los resultados deseados para posteriormente corroborar estos con la solución analítica respectiva.

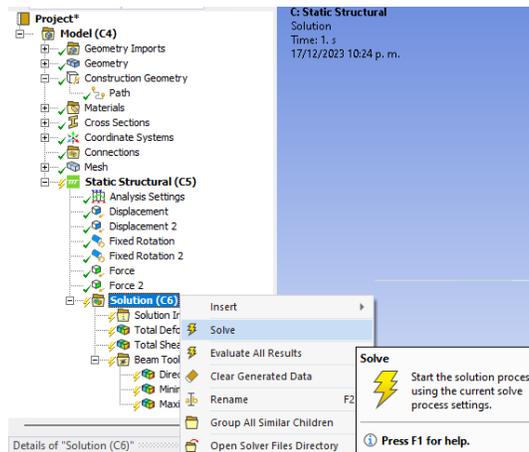


Figura 4.29. Ejecución de la simulación (procesamiento).

Con esto se finaliza la etapa de pre-procesamiento y se da paso al procesamiento (sección 3.15), los resultados obtenidos de este análisis se muestran en la sección 5.2 para su respectivo post-procesamiento como parte del análisis de los elementos finitos (sección 3.15).

Por otra parte, con el objetivo de comprobar la vida del eje y el factor mínimo de seguridad, se procede a realizar un segundo análisis, donde se crea el modelo del eje en 3D conforme las especificaciones de la Figura N del apéndice G.

Como nota para este caso, se realiza el modelo 3D del eje desde el cojinete A al cojinete B (considerando sus respectivos anchos ya que delimitan la sección de interés para el análisis) y sin considerar los redondeos y cuñeros, con el objetivo de simplificar el cuerpo. El emplear el modelo en 3D del eje implica mayores recursos computacionales (que en la industria se traducen en mayores costos), mismos que se verán reflejados en la cantidad de elementos y nodos empleados para dar solución a las incógnitas de interés, por otra parte se deben considerar la cantidad de nodos y elementos proporcionados para el análisis estático de la licencia para estudiantes, por lo que estos deben ajustarse a una calidad de malla adecuada.

Con el objetivo de emplear el material definido en el primer análisis, se procede a añadir un nuevo módulo para un análisis estático en la misma hoja de trabajo de Ansys Workbench, para posteriormente seleccionar la casilla del material del análisis A y arrastrarlo a la casilla del análisis B y así compartir el material definido previamente como se muestra a continuación.

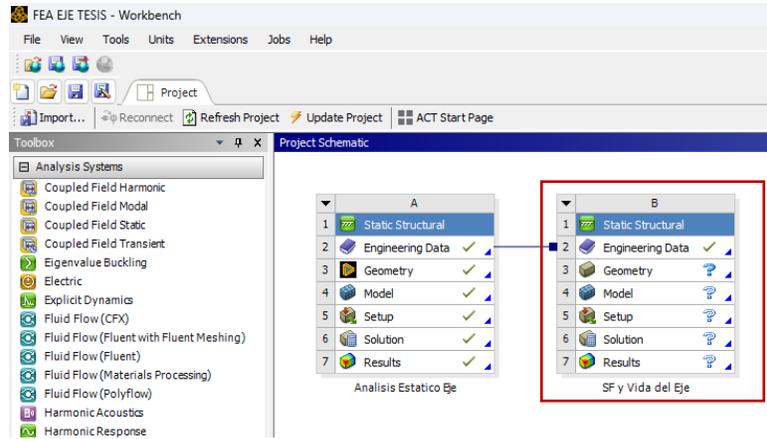


Figura 4.30. Insertar un nuevo módulo de análisis estático estructural e importación del material previamente definido.

A continuación se define el modelo en 3D del eje en el modelador de SpaceClaim como se muestra en la Figura 4.6 y creando el modelo 3D del eje como se muestra a continuación (para este caso se respeta el origen y a partir de este se realiza el modelado del eje desde el punto A hasta el punto B, considerando los anchos respectivos de los cojinetes que delimitan la sección de interés).

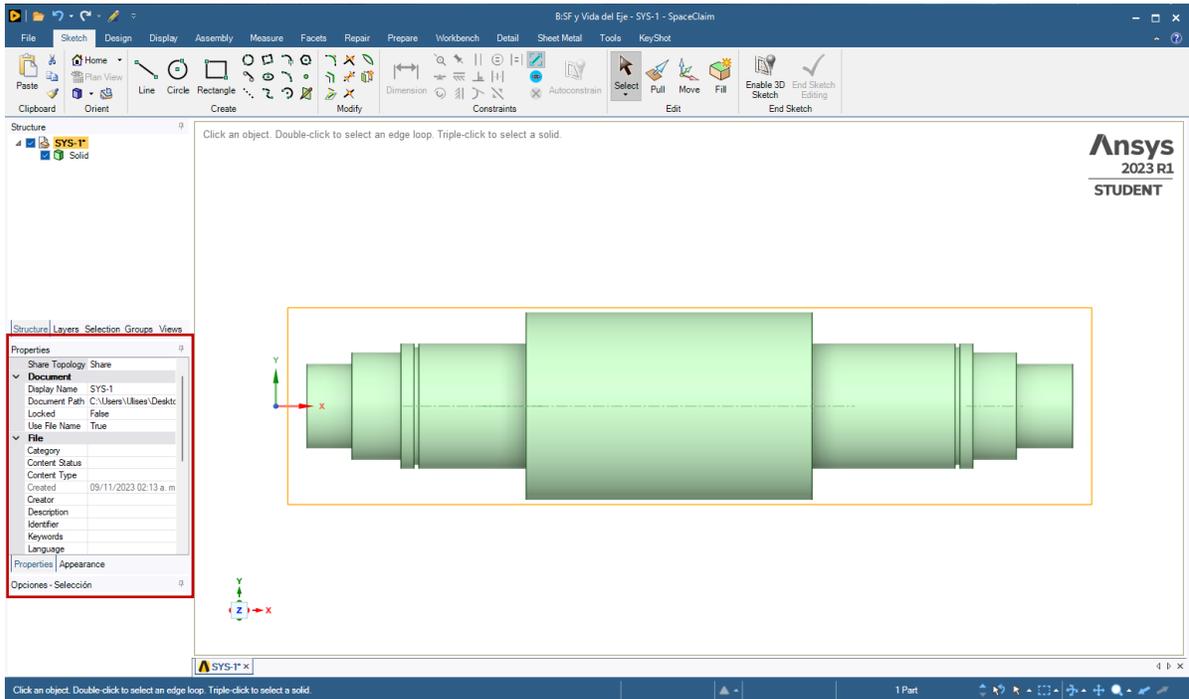


Figura 4.31. Modelado el eje en 3D, delimitado por las zonas de interés y compartir la topología del cuerpo.

A continuación se importan la solución obtenida del primer análisis (simplificación del eje a un elemento tipo viga) para emplearse como condición de frontera en el análisis del modelo en 3D.

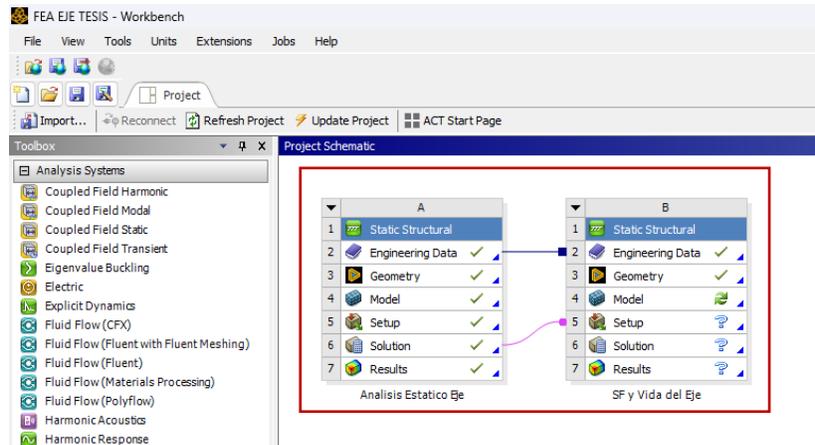


Figura 4.32. importación de la solución del módulo A al módulo B.

Se procede a realizar la delimitación de las condiciones de frontera, generación de malla y especificación de los datos de interés como parte del pre-procesamiento en Mechanical Structural como en la Figura 4.8.

Una vez abierta la ventana de Mechanical Structural, se procede a confirmar el material del eje que se encuentra cargado debido a que se empleó el mismo material que para el primer análisis, por lo que este se selecciona como se muestra a continuación.

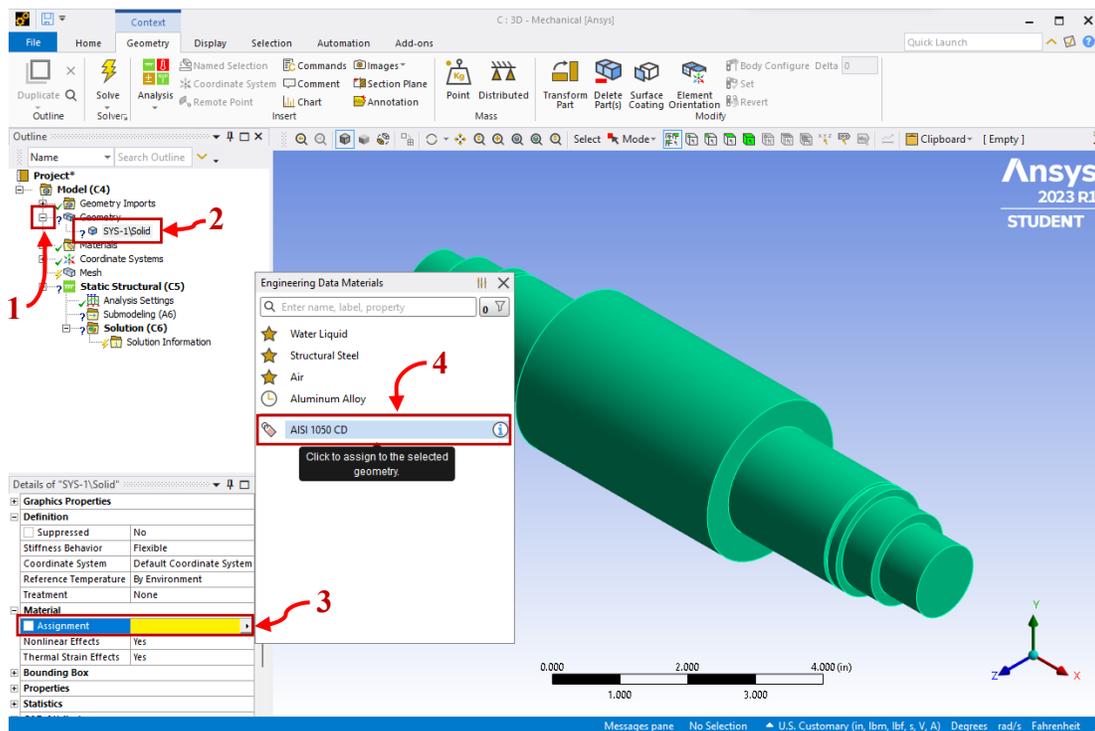


Figura 4.33. Verificación y asignación de material al cuerpo (eje).

Para este caso, las condiciones de frontera son las importadas de la solución del primer análisis, por lo que con la herramienta de Cut Boundary Remote Constrain (cortar la restricción remota de límites por su traducción del inglés) se delimita la zona en la que se aplican estas condiciones como se muestra a continuación.

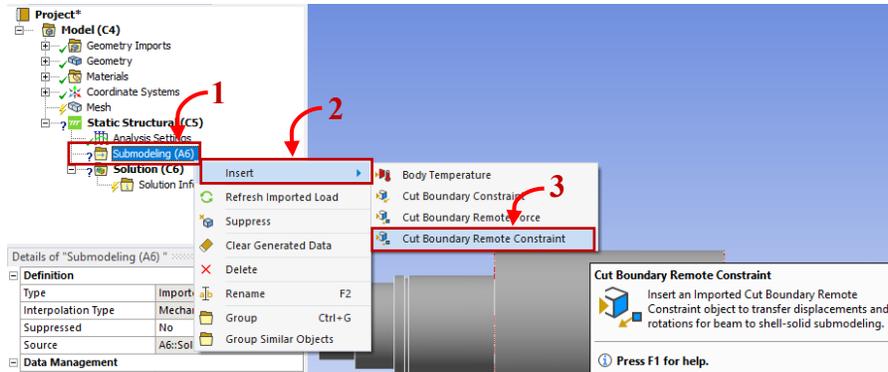


Figura 4.34. Herramienta de Cut Boundary Remote Constrain (cortar la restricción remota de límites).

Estas condiciones son definidas en las extremidades del eje con el objetivo de delimitar este, el procedimiento es el mismo, por lo que este se ilustra en la Figura 4.35.

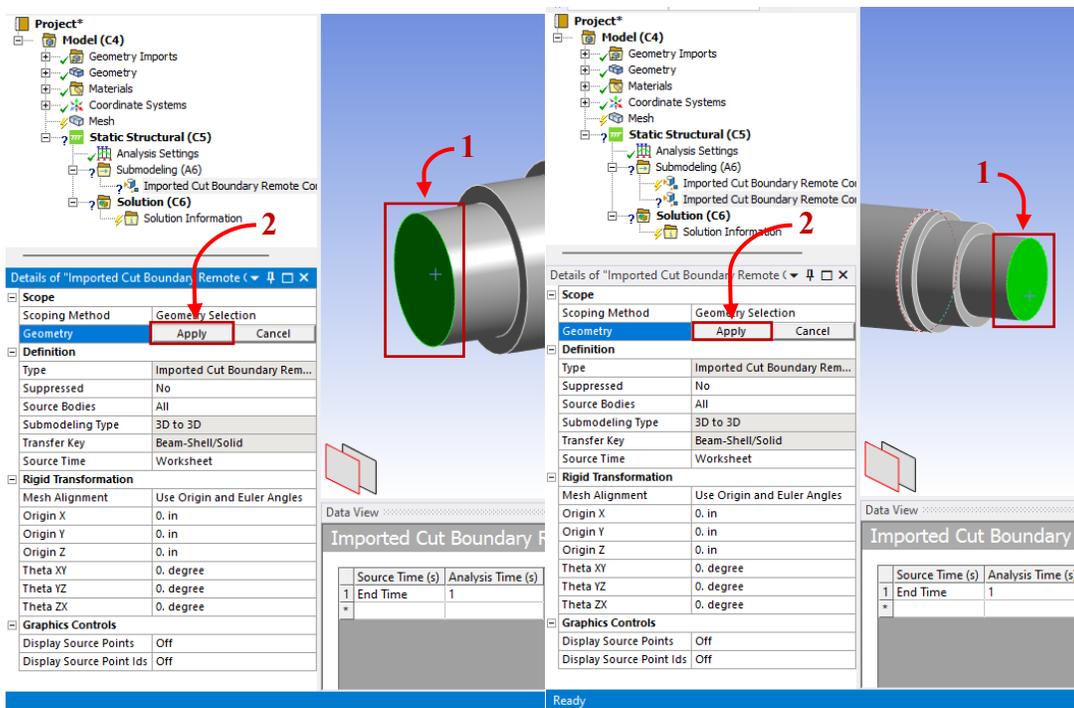


Figura 4.35. Delimitación de las condiciones en las extremidades del eje, mismas que delimitan los puntos de interés del eje.

Posteriormente se realiza la especificación del mallado, donde los valores que se ilustran en las siguientes figuras fueron obtenidos como resultado de diversas iteraciones ajustadas manualmente (revisar apéndice H), con el objetivo de lograr la mayor cantidad de nodos y elemento que permita la licencia de Ansys para estudiantes y que estos cumplan con los parámetros óptimos descritos en la sección 3.17.3 como sigue.

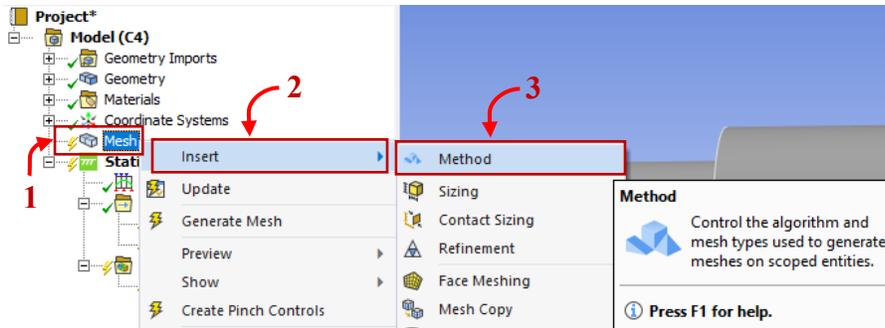


Figura 4.36. Selección de un método de mallado.

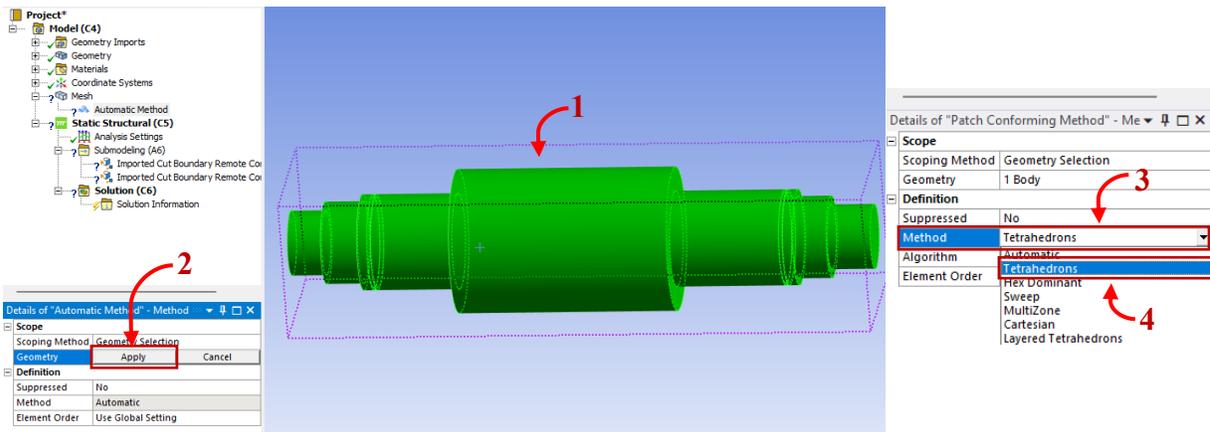


Figura 4.37. Selección de la geometría, aplicación del método y especificación del método tetraédrico.

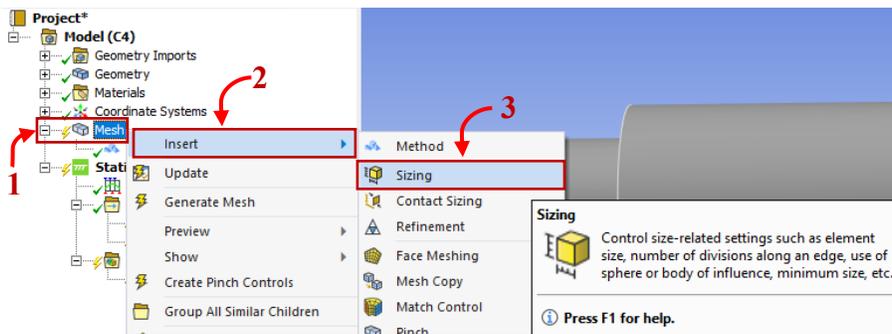


Figura 4.38. Elección de un controlador global de tamaño.

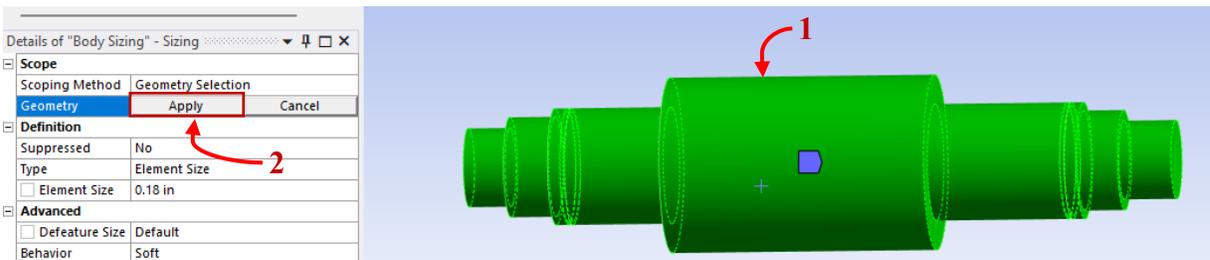


Figura 4.39. Selección de la geometría y especificaciones del controlador global de tamaño.

Para comprobar la calidad del mallado se realiza el siguiente procedimiento; como primer paso se verifica el número de nodos y elementos generados por la malla (128 000 permitidos por la licencia para estudiantes), donde, en la Figura 4.40 se tienen 76 193 nodos y 52 624 elementos, lo que da como resultado 128 817 nodos y elementos, por lo que se tiene el número máximo permitido y a simple vista se identifican elementos de buena calidad.

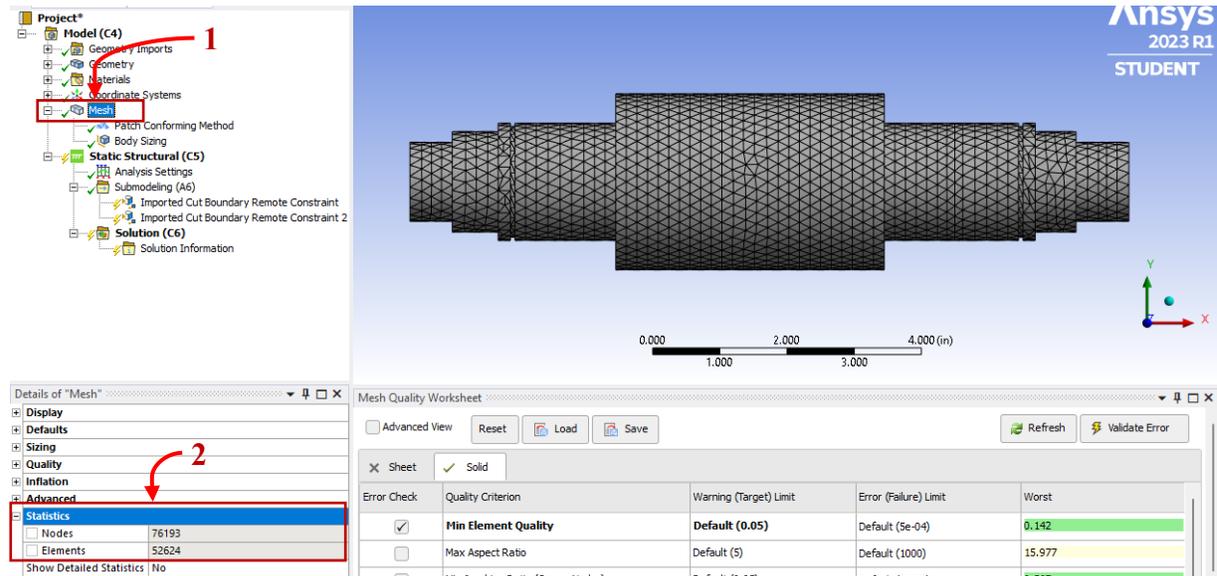


Figura 4.40. Estadística del mallado (nodos y elementos generados).

Sin embargo, para asegurar una buena calidad de los elementos, se procede a comprobar las condiciones mencionadas en la sección 3.17.3 como sigue.

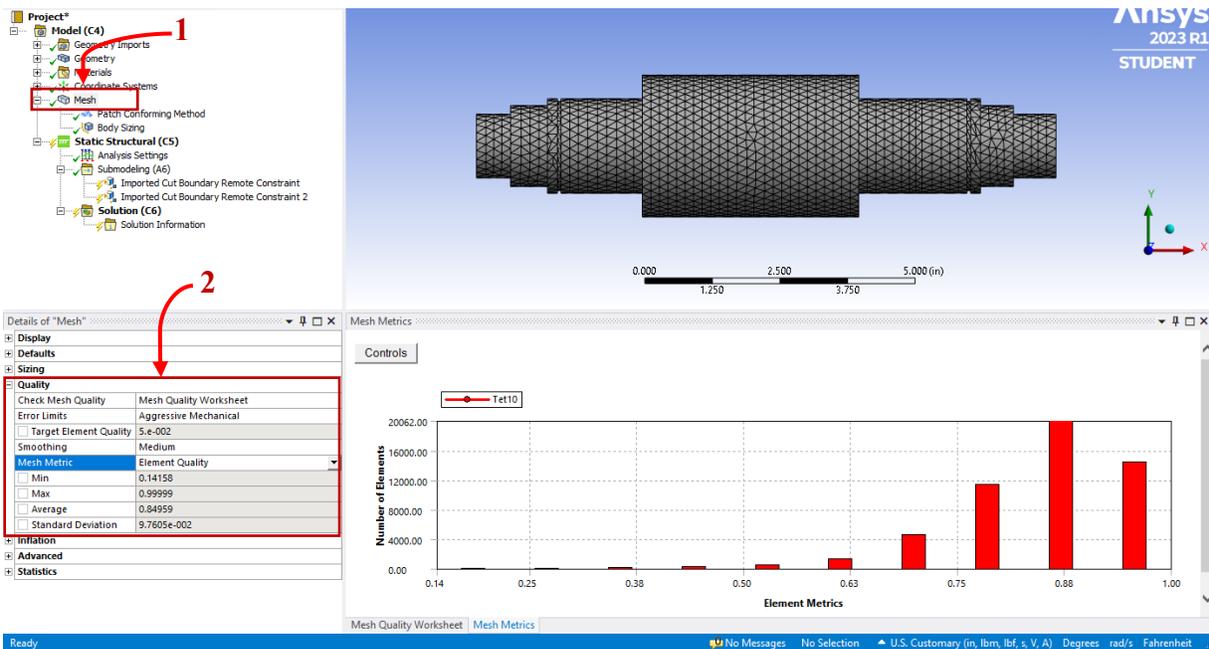


Figura 4.41. Calidad de los elementos (entre 0.50 – 1).

Como se puede observar en la Figura 4.41, la calidad de los elementos es buena y aceptable, debido a que la mayor cantidad de los elementos se encuentra próxima a 1, otros parámetros para comprobar la calidad de los elementos es la oblicuidad y la relación de aspecto que se muestran a continuación.

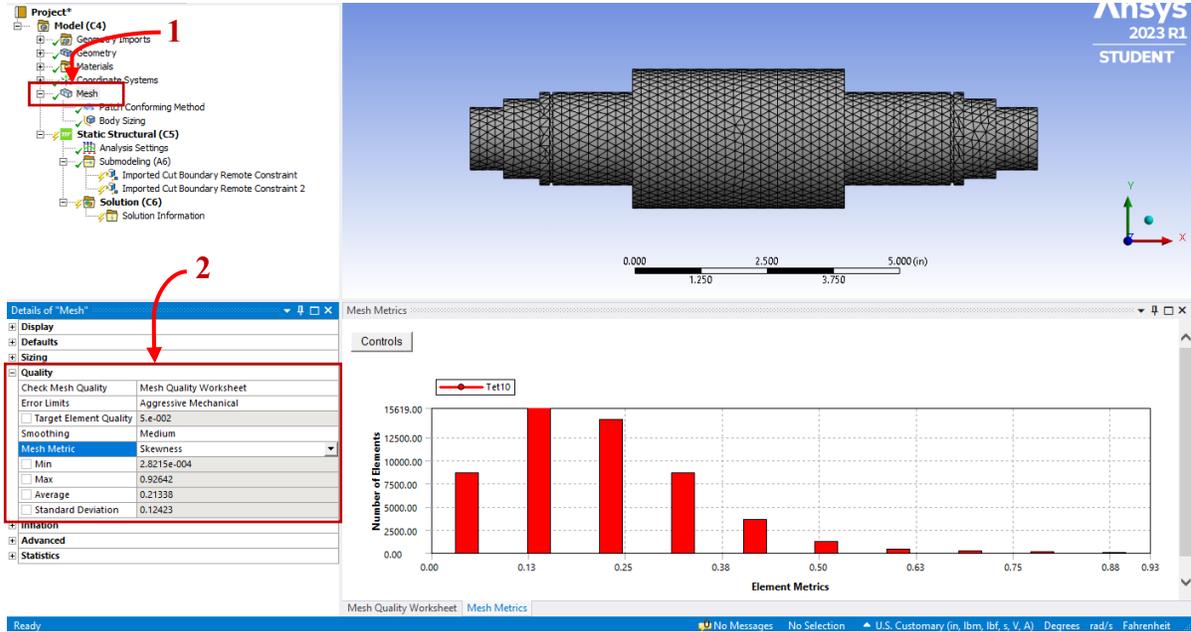


Figura 4.42. Oblicuidad de los elementos (entre 0.5 – 1).

La mayoría de los elementos tiene una calidad buena y aceptable, ya que estos valores son más cercanos a cero como se menciona en la sección 3.17.3.

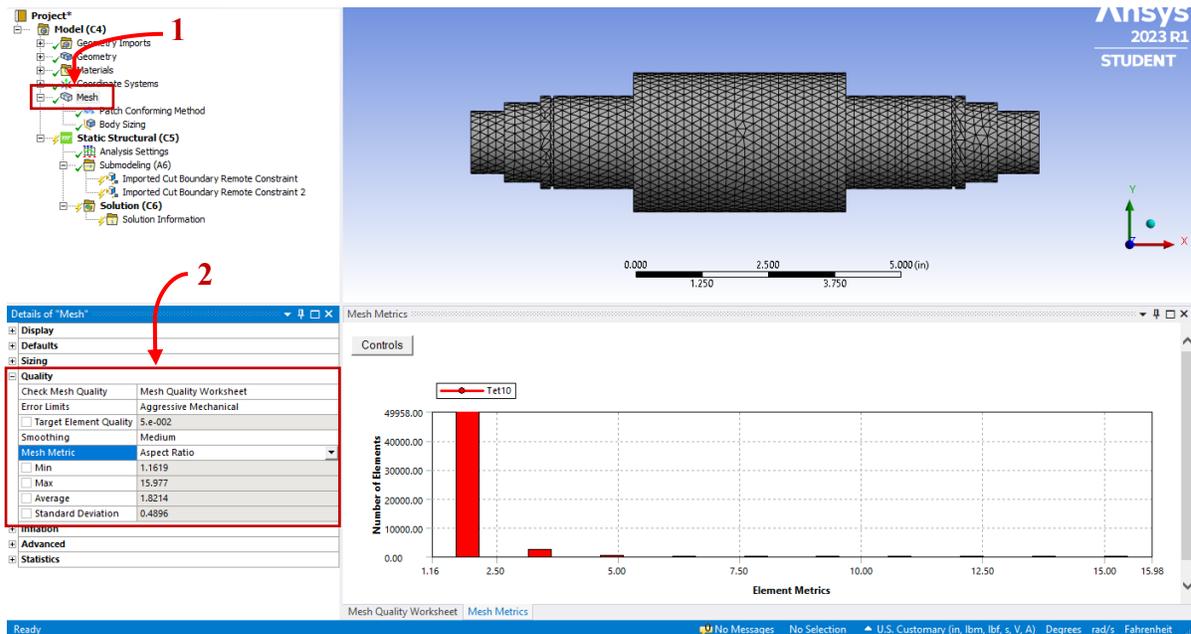


Figura 4.43. Relación de aspecto (entre 1 y 3).

Posteriormente se comprueba la relación de aspecto de los elementos, mismo valor promedio igual a 1.8214, valor cercano a 1 y que indica que los elementos son simétricamente aceptables. Por otra parte, se puede garantizar que la solución es correcta si al realizar iteraciones consecutivas manualmente el valor converge, es decir, si los valores obtenidos se estabilizan o aproximan a un valor constante a medida que se mejora la precisión del análisis (refinamiento del mallado). Finalmente, se eligen las variables de interés que se mencionaron al inicio de este análisis para corroborar los resultados en el post-procesamiento (como se ilustra en las Figuras 4.44 a 4.46).

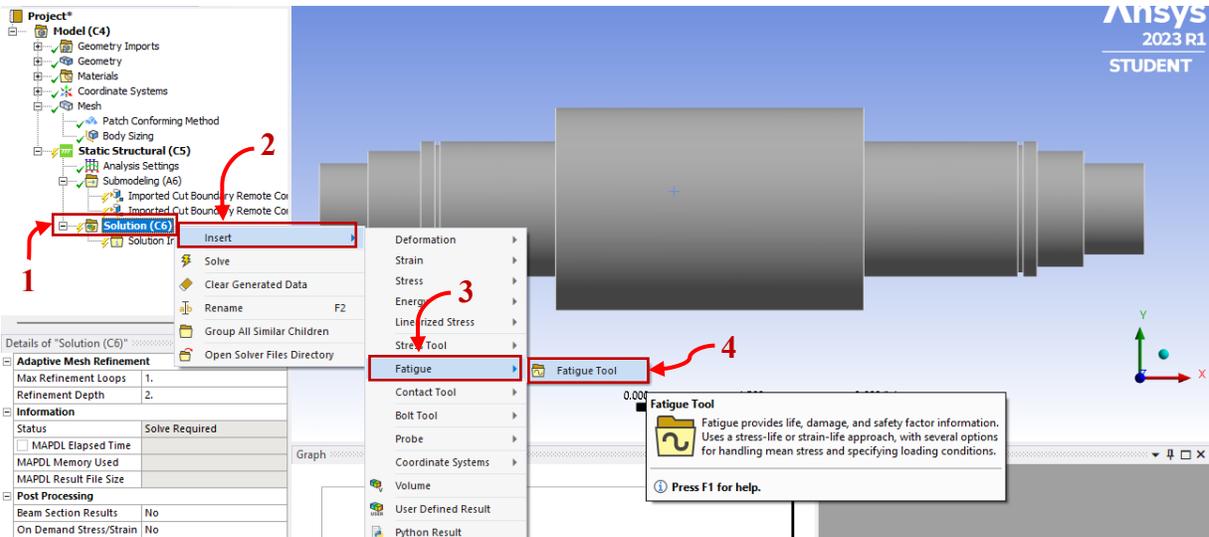


Figura 4.44. Selección de la herramienta de fatiga.

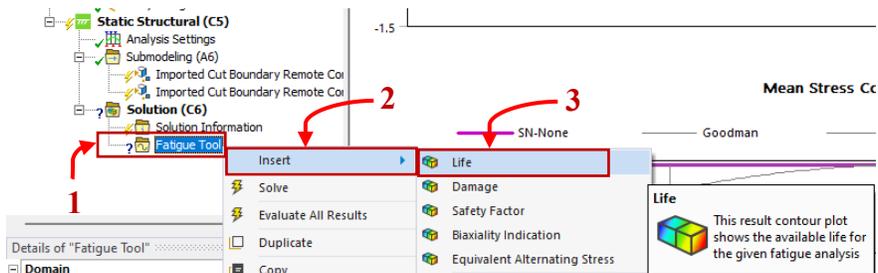


Figura 4.45. Selección de vida como variable de interés.

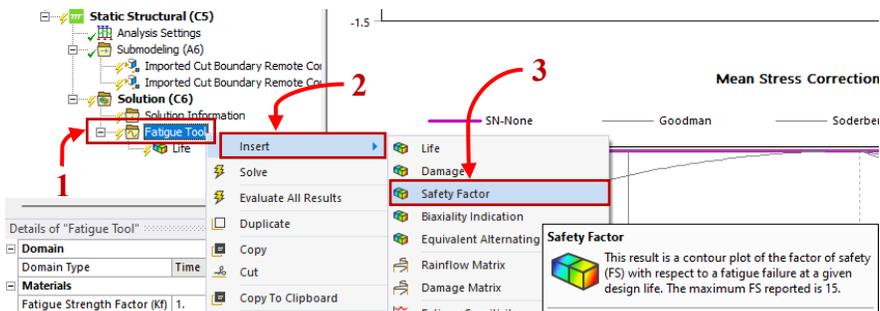


Figura 4.46. Selección de factor de seguridad como variable de interés.



## 5 Resultados

### 5.1 Resultados solución analítica

Los diámetros mínimos obtenidos para los escalones (secciones) del eje diseñado se encuentran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Diámetros mínimos calculados para el eje de la Figura 4.1.

<b>Diámetros mínimos calculados para el eje de la Figura 4.1.</b>	
$D_1$	0.48 in
$D_2$	1.16 in
$D_3$	1.18 in
$D_4$	2.625 in
$D_5$	1.51 in
$D_6$	1.14 in
$D_7$	1.08 in

Una vez obtenidos estos resultados, se empleó el apéndice C, para elegir las medidas estándares para asientos de rodamientos y demás recomendaciones del fabricante acerca de los tamaños básicos y tolerancias, dando como resultado los diámetros especificados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2. Diámetros ajustados y recomendados para el eje de la Figura 4.1.

<b>Diámetros ajustados y recomendados para el eje de la Figura 4.1.</b>			
<b>Parte acoplada</b>	<b>Nomenclatura</b>	<b>Diámetro mínimo calculado</b>	<b>Diámetro especificado (tamaño básico)</b>
Cojinete A / Rodamiento	$D_1$	0.48 in	1.1811 in
Ninguno	$D_2$	1.16 in	1.50 in
Engrane	$D_3$	1.18 in	1.75 in
Ninguno	$D_4$	2.625 in	2.625 in
Engrane	$D_5$	1.51 in	1.75 in
Ninguno	$D_6$	1.14 in	1.50 in
Cojinete B / Rodamiento	$D_7$	1.08 in	1.1811 in

Realizando los diagramas resultantes de fuerza cortante y momento flexionante con los datos obtenidos en la Tabla 4.2, los diagramas mostrados en la Figura 5.1 muestran que el punto de mayor deformación y posible punto crítico se encuentra en la ubicación del engrane J.

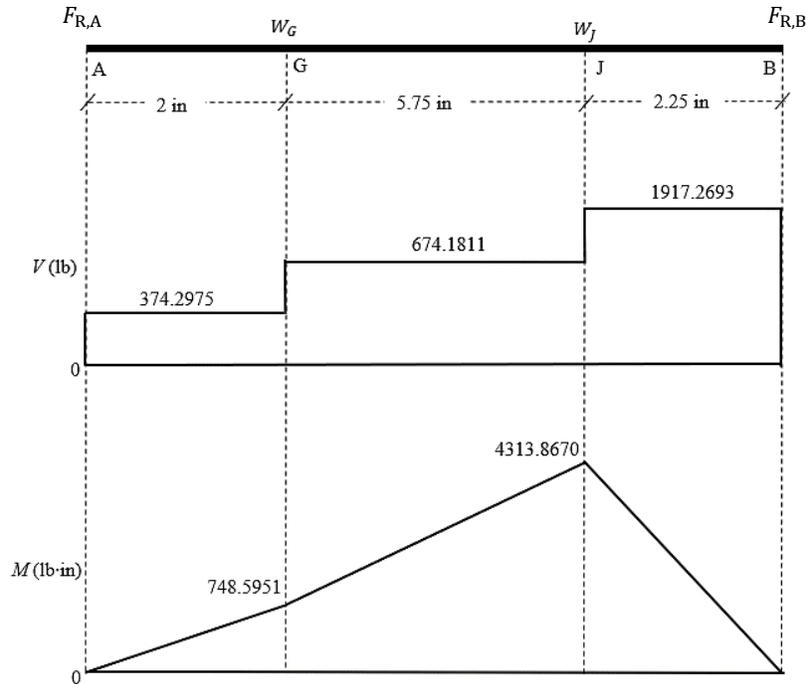


Figura 5.1. Diagrama resultante de fuerza cortante y momento flexionante del estudio de caso desarrollado.

Una vez estimados los diámetros para las diversas secciones del eje y el diagrama de fuerzas y momentos resultantes, se procede a la selección de los rodamientos, cuñas y anillos de retención como sigue.

### 5.1.1 Selección de rodamientos (cojinetes)

Como parte de los requisitos de diseño, se seleccionan los cojinetes apropiados para el eje intermedio, con una confiabilidad de 99% (probabilidad estadística de que los sistemas y componentes de una máquina desempeñarán su función satisfactoriamente sin falla). El problema especifica una vida de diseño de 12 000 horas. La velocidad del eje intermedio es de  $\omega_{34} = 388.88$  rpm. El tamaño del diámetro interior estimado es de  $D = 1.250$  in y el ancho estimado del cojinete es de  $1$  in = 31.75 mm.

Para la selección de un cojinete respecto a la duración de diseño, en [7] el número de revoluciones de diseño para un cojinete esta dado por:

$$L_d = (h)(\text{rpm}) \left( \frac{60 \text{ min}}{h} \right) \tag{5.1}$$

Según Mott [7], la capacidad de carga dinámica básica (C), requerida para una determinada carga y duración determinada es:

$$C = P_d \left( \frac{L_d}{10^6} \right)^{1/k} \quad (5.2)$$

Donde,  $P_d$  es la carga dada de diseño, el factor  $k = 3$  para rodamientos de bolas y  $k = 3.33$  para rodamientos de rodillos.

Por lo tanto, para el cojinete B se tiene:

$$L_d = (12\,000 \text{ hr})(388.88 \text{ rpm}) \left( \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \right) = 279.99 \times 10^6 \text{ rev} \quad (5.3)$$

Para una carga  $P_d = F_{R,B}$  y probando  $k = 3$  para rodamientos de bolas se tiene:

$$C = 1917.27 \left( \frac{279.99 \times 10^6}{10^6} \right)^{1/3} = 12\,542.88 \text{ lb ó } 55.79 \text{ kN} \quad (5.4)$$

Buscando un rodamiento estándar en la Tabla C (apéndice B), se observa que este valor es muy grande para un rodamiento de bolas con diámetro interno de 1.25 in ó 31.75 mm, por lo que se decide proponer un cojinete de rodillos.

Por lo que, probando  $k = 3.33$  para rodamientos de rodillos se tiene:

$$C = 1917.27 \left( \frac{279.99 \times 10^6}{10^6} \right)^{1/3.33} = 10\,412.64 \text{ lb ó } 46.31 \text{ kN} \quad (5.5)$$

Para definir las especificaciones de diseño, para este caso se elige un cojinete de rodillos estándar del catálogo SKF 17000 [17], donde se obtienen los siguientes datos:

Rodamiento con jaula estándar NJ 2206 ECP con:  $d = 1.1811 \text{ in} = 30 \text{ mm}$ ,  $B = 0.787402 \text{ in} = 20 \text{ mm}$ ,  $C = 12364.49 \text{ lb} = 55 \text{ kN}$ ,  $D = 2.44 \text{ in} = 62 \text{ mm}$ , ilustrado en la Figura 5.2.

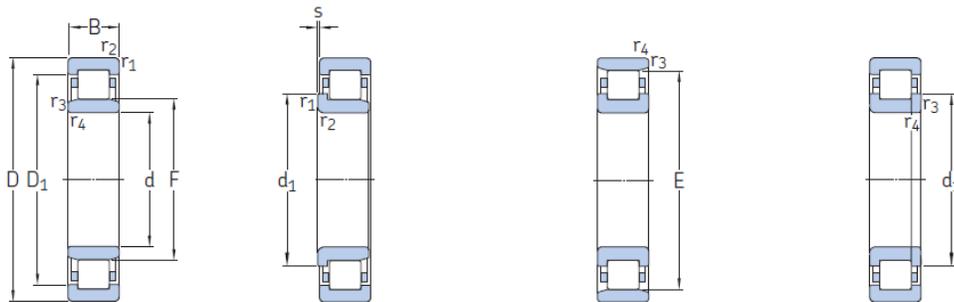


Figura 5.2. Rodamientos de una hilera de rodillos cilíndricos [15].

Para el cojinete A, se selecciona un cojinete de bolas, una carga  $P_d = F_{R,A}$  y probando  $k = 3$  :

$$C = 374.30 \left( \frac{279.99 \times 10^6}{10^6} \right)^{1/3} = 2448.69 \text{ lb ó } 10.89 \text{ kN} \quad (5.6)$$

Por lo tanto, de la Tabla C (apéndice C) se elige un rodamiento de bolas 6206 con:  $d = 1.1811 \text{ in} = 30 \text{ mm}$ ,  $B = 0.6299 \text{ in} = 20 \text{ mm}$ ,  $C = 3350 \text{ lb} = 55 \text{ kN}$ ,  $D = 2.4409 \text{ in} = 62 \text{ mm}$ ,  $r_{m\acute{a}x} = 0.039 \text{ in}$ .

### 5.1.2 Diseño de cuñas

Ahora se especifican las cuñas apropiadas para los dos engranes del eje intermedio, para proporcionar un factor de seguridad de 2. Los engranes se adecuarán al diámetro interior y las cuñas a las especificaciones requeridas. Para el diseño se tienen los siguientes datos:  $D_3 = D_5 = 1.75 \text{ in}$ ,  $T = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y longitudes de centro del eje  $l_3 = 1.5 \text{ in}$  y  $l_4 = 2 \text{ in}$  (caras de los engranes 3 y 4).

De la Tabla F (apéndice E), para un diámetro de eje igual a 1.75 in, debe elegirse una cuña con dimensión lateral (ancho)  $t = W = \frac{3}{8} \text{ in}$  para un diámetro  $D = 1.750 \text{ in}$ , de igual forma, para la cuña se elige el acero AISI 1020 CD con  $S_y = 57 \text{ kpsi}$ , así, la fuerza sobre la cuña en la superficie del eje, está dada por:

$$F = \frac{T}{r} = \frac{T}{D/2} = \frac{3240.07}{1.75/2} = 3702.93 \text{ lb} \quad (5.7)$$

Analizando las fallas debido a aplastamiento se tiene:

$$n = \frac{S_y}{\sigma} ; \sigma = \frac{F}{tl/2} \quad (5.8)$$

Resolviendo para la longitud de la cuña  $l$ , resulta:

$$l = \frac{2Fn}{S_y t} = \frac{2(3702.93)(2)}{(57\ 000)(3/8)} = 0.6929 \text{ in} \quad (5.9)$$

Se define  $l = 1 \text{ in}$ , para que la longitud sea más grande el ancho de la cuña y como ambos engranes tienen el mismo diámetro interior y transmiten el mismo par de torsión, se puede emplear la misma cuña y sus especificaciones para ambos engranes.

### 5.1.3 Selección de anillos de retención

Para la elección de anillos de retención, se proponen anillos de retención externos, elegidos del catálogo en línea para anillos de retención externos [18], con el objetivo de definir medidas estándar.

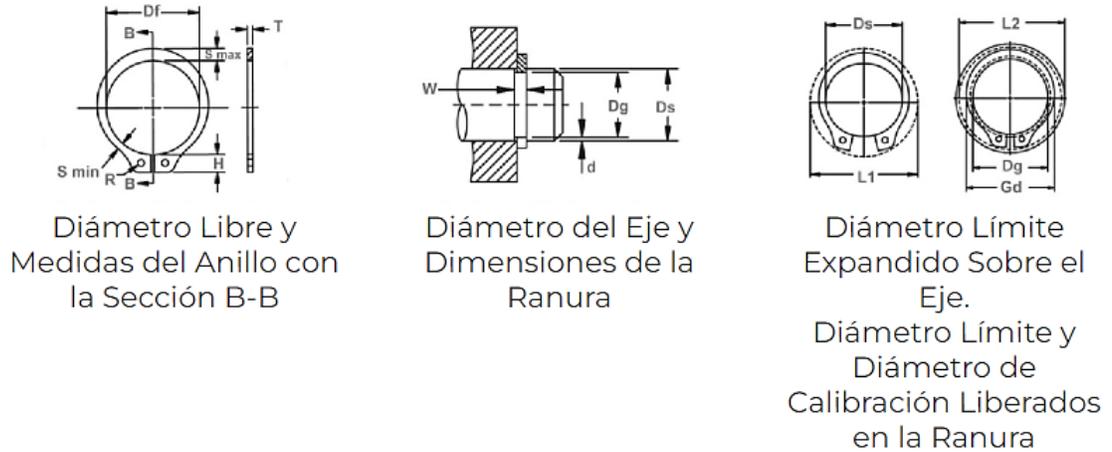


Figura 5.3. Especificaciones del anillo de retención externo y su ensamblaje [16].

Para los cojinetes A y B se define un anillo de retención externo SH-118 con:  $D_S = 1.188$  in,  $D_G = 1.118$  in  $\pm 0.004 - 0.005$ ,  $W = a = 0.056$  in  $\pm 0.004 - 0.000$  y  $d = (D_S - D_G)/2 = 0.035$  in.

Finalmente, para los engranes 3 y 4 se define el anillo de retención externo SH-175 con:  $D_S = 1.750$  in,  $D_G = 1.650$  in  $\pm 0.005 - 0.005$ ,  $W = a = 0.068$  in  $\pm 0.004$  y  $d = (D_S - D_G)/2 = 0.5$  in.

Para los redondeos en las zonas donde se encuentra un escalón, se define un chaflán agudo para los puntos D y M, y un chaflán bien redondeado para los puntos E, H, I, L.

La sección 3.5.1.2 define  $\frac{r}{d} = 0.03$  para un chaflán agudo, así, para los puntos D y M se tiene:

$$r_D = r_M = 0.03 \times D_1 = 0.0354 \text{ in} \quad (5.10)$$

Y para un chaflán bien redondeado  $\frac{r}{d} = 0.17$ , lo que resulta:

$$r_E = r_L = 0.17 \times D_2 = 0.255 \text{ in} \quad (5.11)$$

$$r_H = r_I = 0.17 \times D_3 = 0.2975 \text{ in} \quad (5.12)$$

El redondeo para  $r_H$  y  $r_I$  puede ser reducido a la mitad, con el objetivo de lograr un mejor empalme entre el eje y los engranes. Una vez definidas las características del eje, el diseño final del eje y sus especificaciones se muestran en la Figura N (apéndice G).

## 5.2 Resultados de elementos finitos en Ansys

Como parte del post-procesamiento, los resultados obtenidos del análisis de elementos finitos para el eje se muestran simplemente seleccionando la variable de interés, por lo tanto, los resultados obtenidos se ilustran a continuación en las Figuras 5.4 a 5.10, mismos resultados que serán comparados y discutidos más adelante.

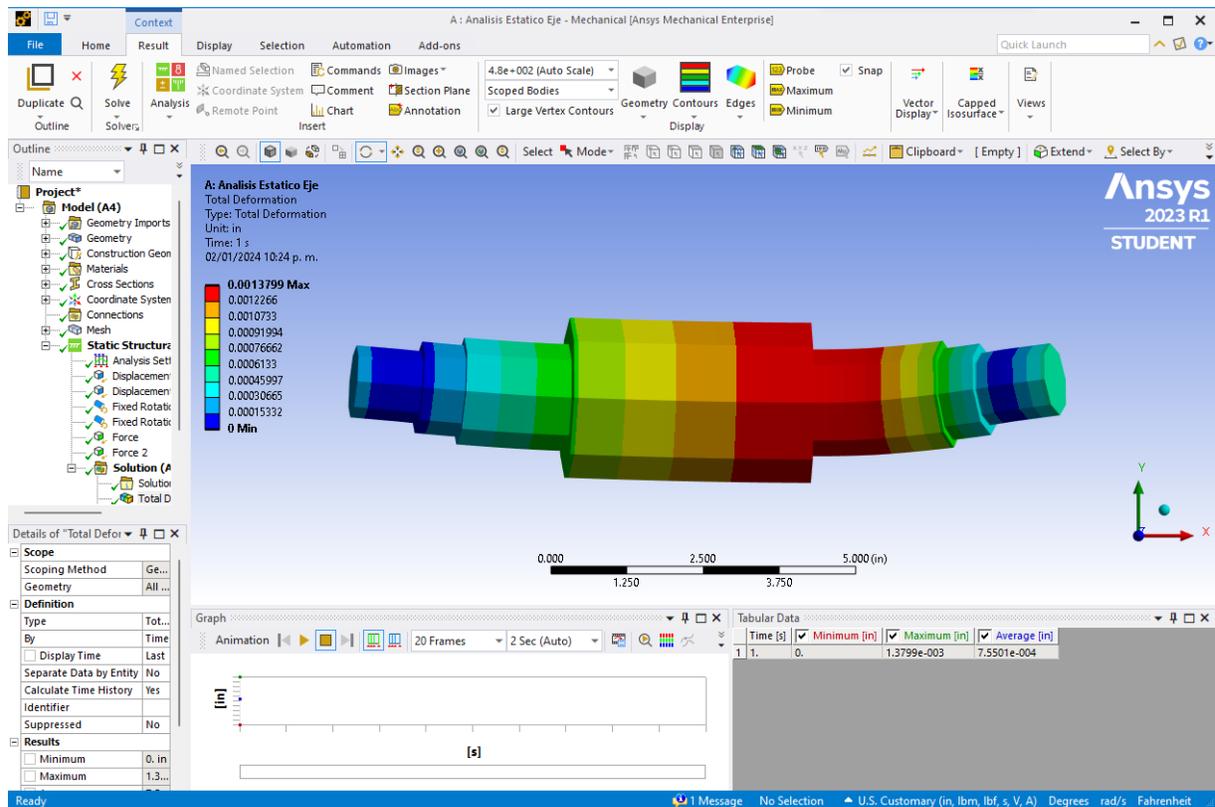


Figura 5.4. Resultados obtenidos de deformación total.

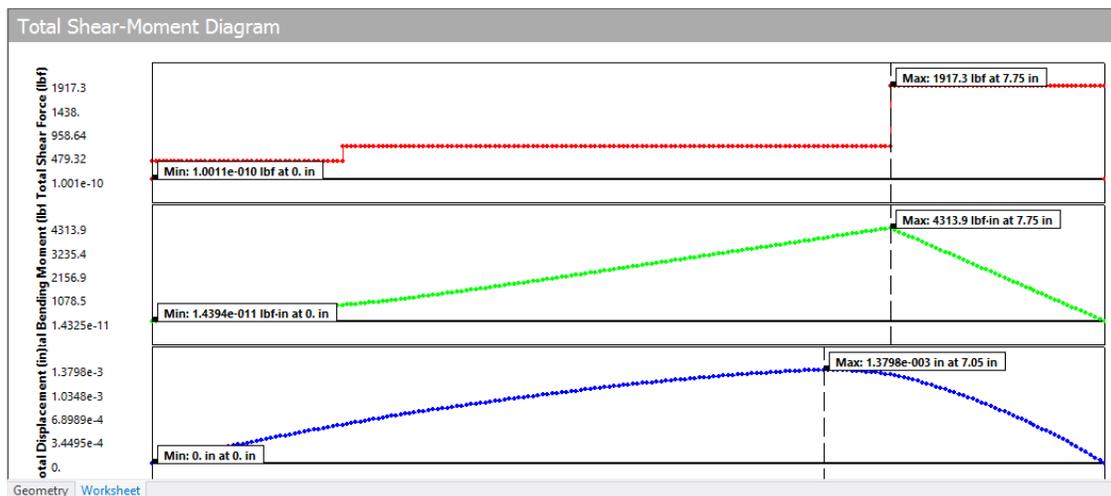


Figura 5.5. Gráfico resultante de fuerza cortante y momento flexionante.

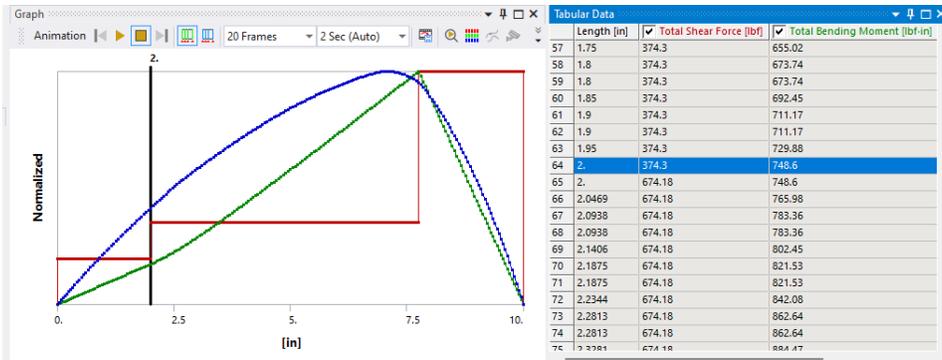


Figura 5.6. Gráfico de fuerza cortante y momento flexionante en el punto G.

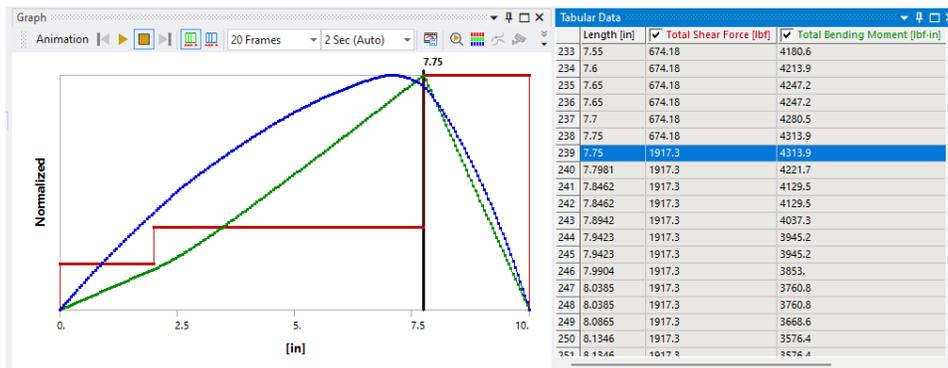


Figura 5.7. Gráfico de fuerza cortante y momento flexionante en el punto J.

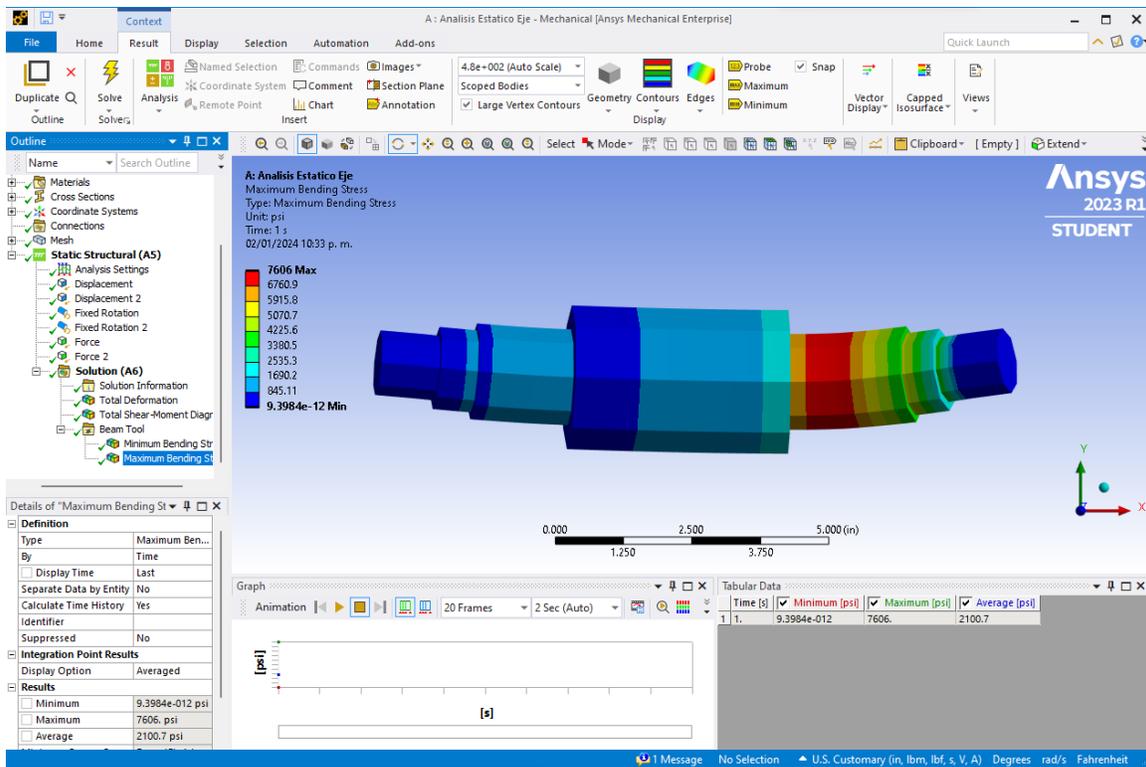


Figura 5.8. Esfuerzo máximo de flexión en el eje.

Para el post-procesamiento del análisis del eje modelado y analizado en 3D se obtuvieron los siguientes resultados.

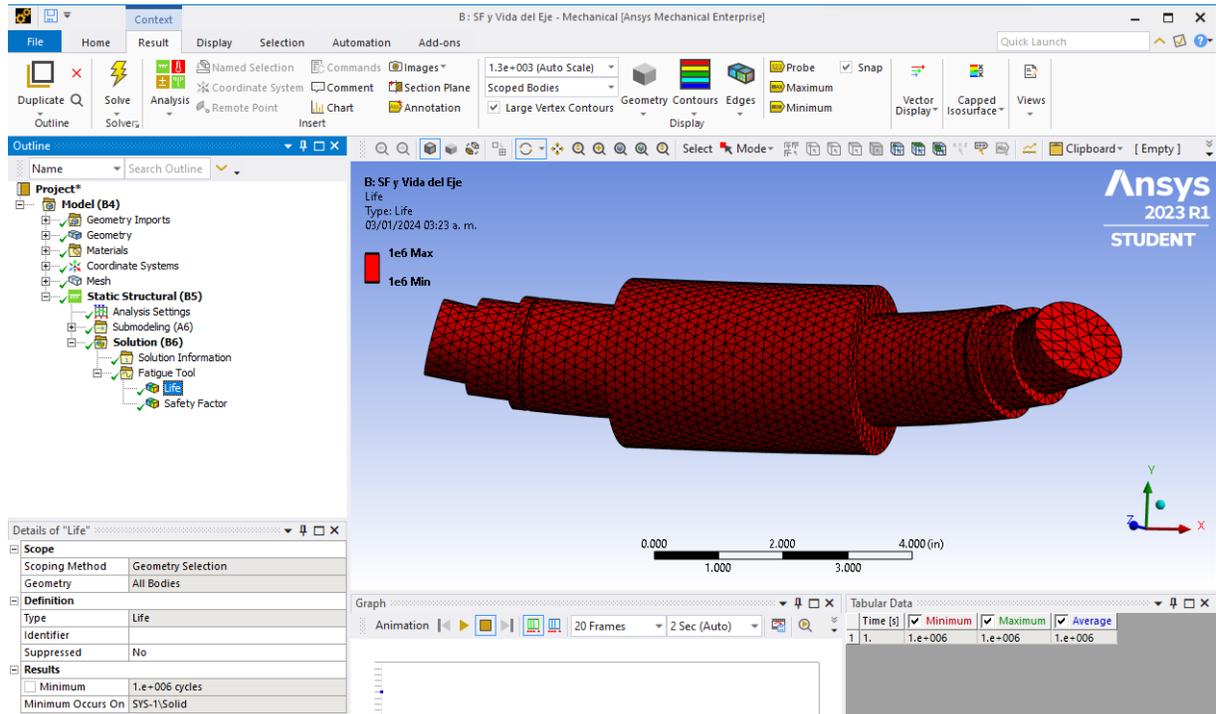


Figura 5.9. Vida del eje resultante.

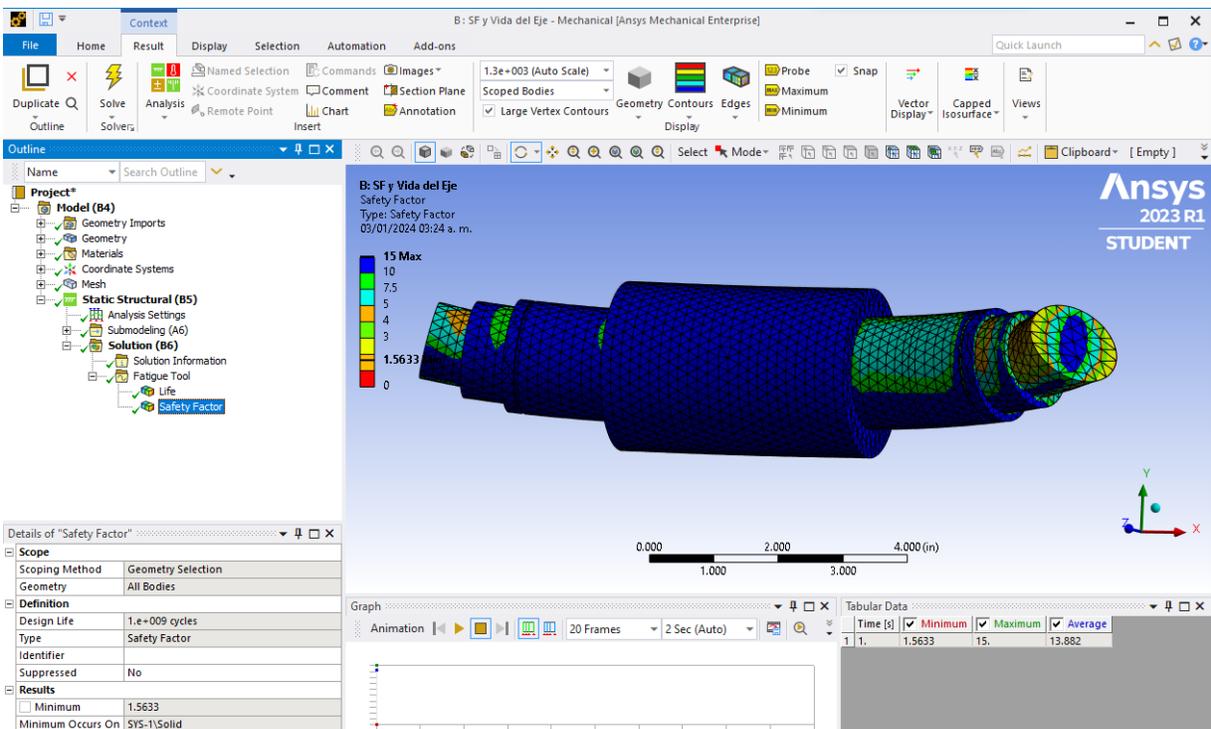


Figura 5.10. Factor de seguridad resultante.

Los resultados obtenidos analíticamente y del análisis de los elementos finitos se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 5.3. Resultados obtenidos del análisis de los elementos finitos del eje diseñado (modelo tipo viga y 3D).

<b>Resultados obtenidos del análisis de los elementos finitos.</b>	
<b>Variable</b>	<b>Resultado</b>
Deformación máxima	0.001379 in (0.035 mm)
Fuerza de reacción en el cojinete A (fuerza cortante en el punto A)	374.3 lb
Fuerza de reacción en el cojinete B (fuerza cortante en el punto B)	1917.3 lb
Momento flexionante en el punto G	748.6 lb·in
Momento flexionante en el punto J	4313.9 lb·in
Esfuerzo máximo de flexión en el eje (punto J)	7606 psi
Vida del eje resultante	$1 \times 10^6$ (vida infinita Figura 3.20)
Factor de seguridad mínimo	1.5633

Tabla 5.4. Requisitos de diseño y resultados analíticos obtenidos.

<b>Requisitos de diseño, resultados analíticos</b>	
<b>Variable</b>	<b>Resultado</b>
Deformación máxima permitida	0.005 in (0.13 mm) (sección 2.4)
Fuerza de reacción en el cojinete A (fuerza cortante en el punto A)	374.2975 lb
Fuerza de reacción en el cojinete B (fuerza cortante en el punto B)	1917.2693 lb
Momento flexionante en el punto G	748.5951 lb·in
Momento flexionante en el punto J	4313.8670 lb·in
Esfuerzo máximo de flexión en el eje (punto J)	7590.43 psi
Vida del eje requerida	$1 \times 10^6$ (vida infinita Figura 3.20)
Factor de seguridad mínimo requerido	1.5

Los datos mostrados en la Tabla 5.3 del análisis de los elementos finitos se pueden comparar con los de la Tabla 5.4 como resultados de la solución analítica y los requerimientos establecidos en este estudio de caso (sección 4), donde, la vida infinita del eje se presenta a partir de un límite de fatiga mayor a  $10^6$  ciclos, como se muestra en la Figura 3.20 para el acero al medio carbón.

Por otra parte, los resultados obtenidos del diagrama de fuerza cortante y momento flexionante resultantes mediante el análisis de los elementos finitos (Figura 3.1) convergen a la solución obtenida mediante la solución analítica (Figura 5.1), como parte del desarrollo necesario para la

propuesta final del eje. Con la finalidad de comprobar el esfuerzo máximo de flexión en el eje obtenido en la simulación (Figura 5.8), este puede calcularse matemáticamente identificando el momento máximo en cada componente (Tabla 4.2), donde el punto J es en dónde se encuentra el mayor momento flexionante al igual que el mostrado en la simulación (Figura 5.8), por lo que, empleando la ecuación (3.87) para  $M_{Jz} = 3993.705 \text{ lb} \cdot \text{in}$  y  $D_3 = 1.75 \text{ in}$  se tiene.

$$\sigma_{Jz} = \frac{32M_{Jz}}{\pi(D_3)^3} = \frac{32(3993.705 \text{ lb} \cdot \text{in})}{\pi(1.75 \text{ in})^3} = 7590.43 \text{ psi} \quad (5.13)$$

Resultado que muestra un error de 0.2 % respecto al obtenido en la simulación de 7606 psi, por lo que la solución analítica es tomada como válida y así mismo la propuesta del eje realizada (admisibilidad ingenieril de hasta 5% [6]).

## 6 Conclusiones

A partir del desarrollo analítico generado en este trabajo de investigación se pudo proponer la geometría del eje requerido para satisfacer las necesidades del estudio de caso. El análisis matemático se efectúa simplificando el eje al elemento más simple de analizar que es un elemento lineal tipo viga. Este elemento representa un eje, mismo que se interpreta como una viga con diversas secciones transversales circulares, con el objetivo de crear escalones para retener dos engranes y dos cojinetes como parte del sistema de transmisión de potencia y sujeción requeridos.

Inicialmente se realizó un análisis estático para definir las fuerzas cortantes y momentos flexionantes que inciden sobre el eje, para posteriormente obtener el diámetro mínimo necesario en cada sección transversal del eje por medio de la Teoría de Von Mises y los diversos factores de concentración de esfuerzos necesarios en cada sección, así como la comprobación del factor mínimo de seguridad en cada sección del eje mediante la resistencia a la fatiga real y modificada, para finalmente realizar la propuesta de la geometría del eje, donde se definen especificaciones y componentes propuestos según catálogos existentes con medidas estándar. Posteriormente a la solución analítica se elaboró el análisis de los elementos finitos en el software de Ansys para corroborar los datos requeridos por el problema y para comprobar la parte numérica del análisis de los elementos finitos con la parte analítica. A futuro este trabajo de tesis puede servir como material de apoyo para que los alumnos de ingeniería sean capaces de replicar o emplear este como material de apoyo y realizar de forma autónoma futuros análisis, ya que, este procedimiento fue descrito paso a paso para que quien consulte este material comprenda de forma clara y precisa la información

Por lo tanto, al comparar los resultados obtenidos de la solución analítica y de la simulación en Ansys Workbench, se puede corroborar que el eje cumple con los requerimientos definidos en el problema y que las consideraciones empleadas para la propuesta de la geometría son correctas. En el caso del análisis de los elementos finitos se encontraron limitaciones respecto al número de nodos y elementos que proporciona la licencia para estudiantes, por lo que con el objetivo de aprovechar estos óptimamente se elaboraron diversas refinaciones del mallado de forma manual hasta ajustar estos para obtener una buena calidad de los elementos de la malla, garantizando la convergencia de los resultados a la solución.

Concluyendo así la importancia de estos temas en la formación del Ingeniero Mecánico, donde, la relación directa entre estos garantiza una mejor comprensión, proporcionando así las

herramientas para que el estudiante sea capaz de proponer y comprobar diseños óptimos que satisfagan necesidades y requerimientos específicos. De esta manera, la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación ha sido satisfecha exitosamente.

# Bibliografía

- [1] F. Diaz del Castillo Rodríguez, Diseño de Elementos de Máquinas, Cuautitlán Izcalli, Mexico.: Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, 2011.
- [2] J. G. Molina P., Fundamentos del Método de Elemento Finito, U.M.S.A., 2010.
- [3] M. Canales, W. Paucar y N. Juipa, «Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica,» *Investigación y Amazonía*, pp. 5-9, Diciembre 2017.
- [4] T. N. Martínez Perez, El método del Elemento Finito Aplicado, San Nicolás de los Garza, N. L.: Universidad Autónoma de Nuevo León, 1998.
- [5] D. Ferrari Mora y F. Díaz Del Castillo Rodríguez, «Método del Elemento Finito y AutoFEM®,» *UNAM Cuautitlán*, p. 44, 2018.
- [6] R. G. Budynas y J. Keith Nisbett, Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, Décima Ed., México: Mc Graw Hill, 2018.
- [7] R. L. Mott, Diseño de Elementos de Máquinas, México: Pearson Educación, 2006.
- [8] R. L. Norton, Diseño de Máquinas, Un Enfoque Integrado, 4ed., México: Pearson Educación, 2011.
- [9] L. V. Venegas Useche, Diseño de Elementos de Máquinas, Pereira: Editorial Universidad Tecnológica de Pereira, 2018.
- [10] R. C. Hibbeler, Mecánica de materiales, 9 Ed., México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2017.
- [11] R. C. Juvinall y K. M. Marshek, Diseño de Elementos de Máquinas, 2a Edición, México: LIMUSA, 2013.
- [12] J. P. Vidosic, «Machine Desing Proyects,» Nueva York, Ronald Press.
- [13] V. K. Goyal y K. G. Vijay, Solution to Engineering Problems Using Finite Element Methods, Georgia, USA: Selft-Publishing Company, 2021.
- [14] D. S. Lo, Finite Element Mesh Generation, New York: CRC Press, 2015, p. 641.
- [15] Ansys Corporation, «Introduction to Ansys Meshing,» de *Introduction to Ansys Meshing*, C. T. Material, Ed., Ansys Inc., 2010, pp. 2-32.

- [16] Ansys Corporation, «Lecture 8, Mesh Quality,» de *Introduction to Ansys Meshing*, Ansys Inc., 2014, pp. 2-31.
- [17] SKF, «Catálogo de SKF Rodamientos 17000,» SKF, Enero 2019. [En línea]. Available: [https://cdn.skfmediahub.skf.com/api/public/0901d19680416953/pdf\\_preview\\_medium/0901d19680416953\\_pdf\\_preview\\_medium.pdf](https://cdn.skfmediahub.skf.com/api/public/0901d19680416953/pdf_preview_medium/0901d19680416953_pdf_preview_medium.pdf).
- [18] S. A. d. C. V. Centro de Equipos y Materiales, «Anillos de Retención Externos,» cem, 2023. [En línea]. Available: <https://cem.com.mx/anillos-retencion-externo-pulgadas.php>.
- [19] Z. Bi, *Finite Element Analysis Applications*, London, United States: Elsevier Inc, 2018.
- [20] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, United States of America: Cengage Learning, 2012.
- [21] A. Meghre y M. K. Kadam, *Finite Element Method in Structural Analysis*, India: Khanna Publishers, 2014.
- [22] O. Leonidivna Naidiuk y P. Torres Jara, *Introducción al Análisis Térmico y de Fluidos Mediante Ansys*, Cuenca, Ecuador: Editorial Universitaria Abya-Yala, 2018.
- [23] S. W. Lee y P. W. Chung, *Finite Element Method For Solids and Structures*, United Kindom: Tj Books Limited for , 2021.
- [24] B. Zhu, *The Finite Element Method (Fundamentals and Applications in Civil, Hydraulic, Mechanical and Aeronautic Engineering)*, Singapore: Tsinghua University Press, 2018.
- [25] F. Virgil Moring, *Diseño de Elementos de Máquinas*, México: LIMUSA, 1998.
- [26] R. A. Mireles Palomares, *Teorías de Falla y sus Aplicaciones*, San Nicolas de Los Garza, N. L., México: Universidad Autónoma de Nuevo León, 1992.
- [27] J. Bermeo Vallejo, *Modelado y análisis en Ingeniería*, Cuenca, Ecuador: UPS, 2012.
- [28] R. Redondo Cremilde, *Análisis del Diseño Mecánico y la Fabricación de una Biela de Automovil*, Bilbao: Escuela de Ingeniería de Bilbao, 2019.
- [29] F. P. Beer, E. R. Johnston, J. T. DeWolf y D. F. Mazurek, *Mecánica de Materiales*, Séptima edición, Ciudad de México: McGraw-Hill Education, 2017.
- [30] R. G. Budynas y J. Keith Nisbett, *Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley*, 9a Ed., México DF: Mc Graw Hill, 2012.
- [31] D. A. Ponce Montenegro, *Programa Computacional Didáctico para el Aprendizaje del Diseño Estático y Dinámico en Ingeniería Mecánica*, Quito: Escuela Politécnica Nacional, 2011.

- [32] A. D. Deutschman, W. J. Michels y C. E. Wilson, *Diseño de Máquinas (Teoría y Práctica)*, New Jersey: Macmillan Publishing, 1987.
- [33] R. C. Juvinall y K. M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design*, 5th Edition, River Street, Hoboken: Wiley, 2012.
- [34] Martín Sprocket & Gear, Inc., «Martin (Engranés),» [En línea]. Available: [https://es.martinsprocket.com/docs//catalogs/power%20transmission/4\\_engranés/seccion%20g.pdf](https://es.martinsprocket.com/docs//catalogs/power%20transmission/4_engranés/seccion%20g.pdf). [Último acceso: 15 06 2023].
- [35] SpaceClaim Corporation, *Ansys SpaceClaim 2016, User's Guide*, [www.SpaceClaim.com](http://www.SpaceClaim.com), 2016.
- [36] «Ansys Innovation Spac,» Ansys, Inc., [En línea]. Available: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/numerically-accurate-results/>. [Último acceso: 06 2023].
- [37] H. L. Huei, *Finite Element SIMulations with Ansys Workbench 2021*, United States of America: SDC Publications, 2021.
- [38] L. Huei-Huang, *Finite Element Simulations With Ansys Workbench 16*, United States of America.: SDC Publications, 2015.
- [39] J. E. Matsson, Ph.D y P.E., *An Introduction to Ansys Fluent 2021*, 2021.
- [40] C. Xiaolin y L. Yijun, *Finite Element Modeling and Simulation with Ansys Workbench*, Broken Sound Parkway NW,,: Taylor & Francis Group, 2019.
- [41] DMCA, «Png Egg,» [En línea]. Available: <https://www.pngegg.com/es/png-zdbuf/download>.

## A. Estimaciones de la resistencia a la fatiga

En la Figura A se muestran estimaciones de la resistencia a la fatiga  $S_n$ , comparada con la resistencia última de tensión de aceros, para diversas condiciones prácticas en la superficie. Se emplean unidades del Sistema Inglés en los ejes izquierdo e inferior, y unidades del Sistema Internacional en los ejes superior y derecho. Se proyecta verticalmente desde el eje  $S_u$  hasta la curva adecuada, y después horizontalmente hasta el eje de la resistencia a la fatiga [7].

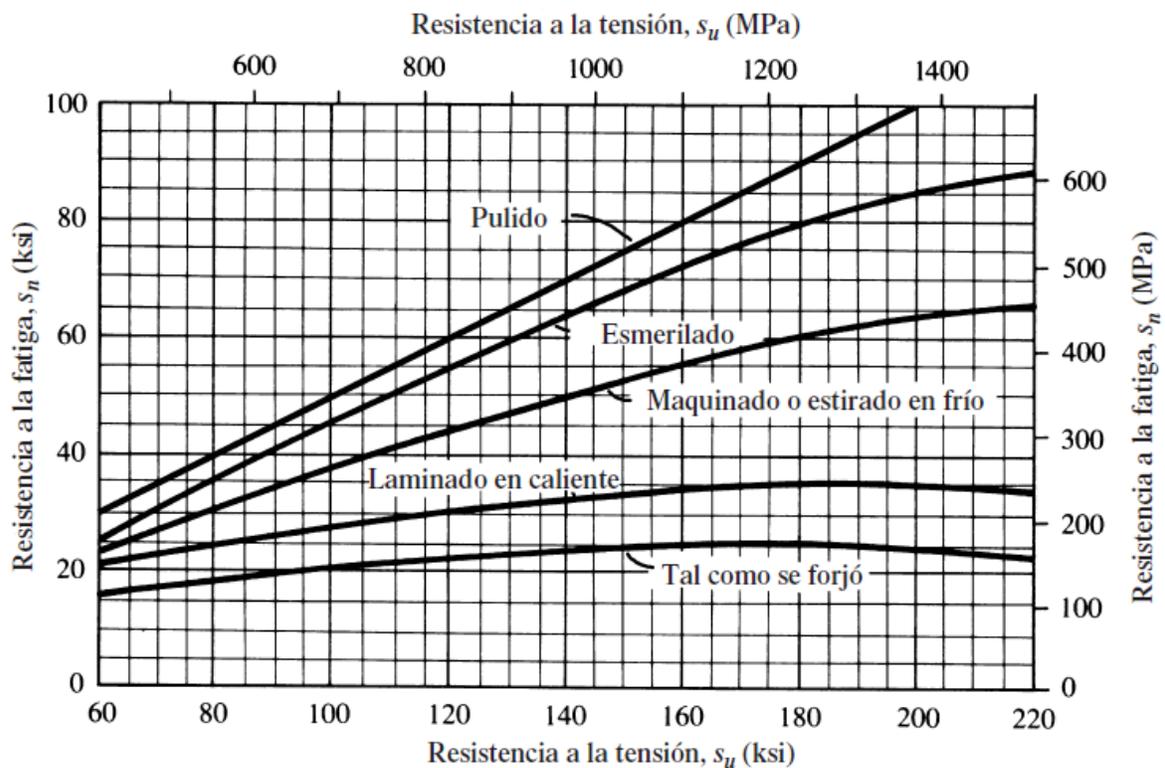


Figura A. Resistencia a la fatiga  $S_n$  en función de la resistencia a la tensión, para acero forjado con varias condiciones de superficie [7].

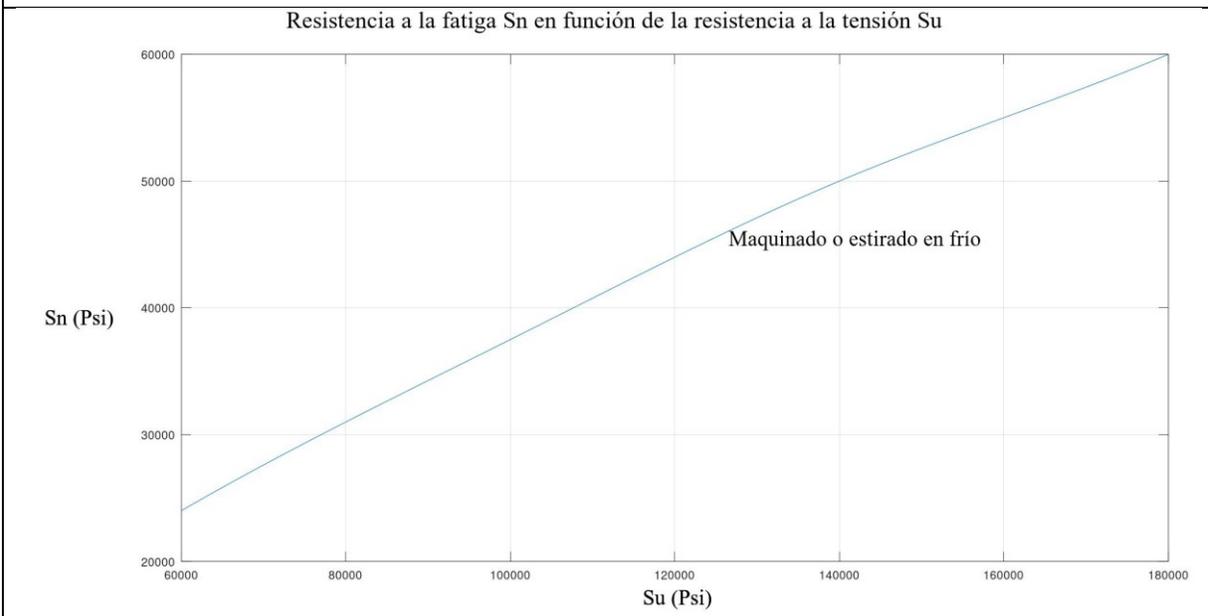
Por medio de los datos obtenidos en el gráfico de la Figura A para un maquinado y debido a que a simple vista no se pueden estimar con exactitud los valores requeridos para la resistencia a la fatiga, para dar solución al estudio de caso de este trabajo de investigación se determina este valor por medio de una serie de puntos aproximados para elaborar una interpolación por cerchas cúbicas en el programa de GNU Octave (versión 8.2.0) como se muestra en la Tabla A.

Tabla A. Cálculo de resistencia a la fatiga para acero AISI 1144 QT 1000 con interpolación por cerchas cúbicas.

```
>> format long
>> Su=[60000 80000 100000 120000 140000 160000 180000 200000]
Su =
    60000    80000   100000   120000   140000   160000   180000   200000

>> Sn=[22500 30500 37000 43000 49000 55000 60200 64000]
Sn =
    22500    30500    37000    43000    49000    55000    60200    64000

>> x=linspace(60000,180000,100);
>> plot(x,spline(Su,Sn,x))
>> spline(Su,Sn,100000)
ans = 37 000 psi
```



# Apéndice B

## B. Propiedades del acero AISI 1050 estirado en frío

A continuación, se muestra una lista de propiedades de diseño para los aceros al carbón y aleados, lista empleada por Mott [7]. Para el estudio de caso desarrollado en el capítulo 4.1, los datos de interés son respecto al acero AISI 1050 estirado en frío.

Tabla B. Propiedades de diseño para los aceros al carbón y aleados [7].

Designación del material (Número AISI)	Condición	Resistencia a la tensión		Resistencia de fluencia		Ductilidad (porcentaje de elongación en 2 pulgadas)	Dureza Brinell (HB)
		(ksi)	(MPa)	(ksi)	(MPa)		
1020	Laminado en caliente	55	379	30	207	25	111
1020	Estirado en frío	61	420	51	352	15	122
1020	Recocido	60	414	43	296	38	121
1040	Laminado en caliente	72	496	42	290	18	144
1040	Estirado en frío	80	552	71	490	12	160
1040	OQT 1300	88	607	61	421	33	183
1040	OQT 400	113	779	87	600	19	262
1050	Laminado en caliente	90	620	49	338	15	180
1050	Estirado en frío	100	690	84	579	10	200
1050	OQT 1300	96	662	61	421	30	192
1050	OQT 400	143	986	110	758	10	321
1117	Laminado en caliente	62	427	34	234	33	124
1117	Estirado en frío	69	476	51	352	20	138
1117	WQT 350	89	614	50	345	22	178
1137	Laminado en caliente	88	607	48	331	15	176
1137	Estirado en frío	98	676	82	565	10	196
1137	OQT 1300	87	600	60	414	28	174
1137	OQT 400	157	1083	136	938	5	352
1144	Laminado en caliente	94	648	51	352	15	188
1144	Estirado en frío	100	690	90	621	10	200
1144	OQT 1300	96	662	68	469	25	200
1144	OQT 400	127	876	91	627	16	277
1213	Laminado en caliente	55	379	33	228	25	110
1213	Estirado en frío	75	517	58	340	10	150
12L13	Laminado en caliente	57	393	34	234	22	114
12L13	Estirado en frío	70	483	60	414	10	140
1340	Recocido	102	703	63	434	26	207
1340	OQT 1300	100	690	75	517	25	235
1340	OQT 1000	144	993	132	910	17	363
1340	OQT 700	221	1520	197	1360	10	444
1340	OQT 400	285	1960	234	1610	8	578
3140	Recocido	95	655	67	462	25	187
3140	OQT 1300	115	792	94	648	23	233
3140	OQT 1000	152	1050	133	920	17	311
3140	OQT 700	220	1520	200	1380	13	461
3140	OQT 400	280	1930	248	1710	11	555

Designación del material (Número AISI)	Condición	Resistencia a la tensión		Resistencia de fluencia		Ductilidad (porcentaje de elongación en 2 pulgadas)	Dureza Brinell (HB)
		(ksi)	(MPa)	(ksi)	(MPa)		
4150	Recocido	106	731	55	379	20	197
4150	OQT 1300	127	880	116	800	20	262
4150	OQT 1000	197	1360	181	1250	11	401
4150	OQT 700	247	1700	229	1580	10	495
4150	OQT 400	300	2070	248	1710	10	578
4340	Recocido	108	745	68	469	22	217
4340	OQT 1300	140	965	120	827	23	280
4340	OQT 1000	171	1180	158	1090	16	363
4340	OQT 700	230	1590	206	1420	12	461
4340	OQT 400	283	1950	228	1570	11	555
5140	Recocido	83	572	42	290	29	167
5140	OQT 1300	104	717	83	572	27	207
5140	OQT 1000	145	1000	130	896	18	302
5140	OQT 700	220	1520	200	1380	11	429
5140	OQT 400	276	1900	226	1560	7	534
5150	Recocido	98	676	52	359	22	197
5150	OQT 1300	116	800	102	700	22	241
5150	OQT 1000	160	1100	149	1030	15	321
5150	OQT 700	240	1650	220	1520	10	461
5150	OQT 400	312	2150	250	1720	8	601
5160	Recocido	105	724	40	276	17	197
5160	OQT 1300	115	793	100	690	23	229
5160	OQT 1000	170	1170	151	1040	14	341
5160	OQT 700	263	1810	237	1630	9	514
5160	OQT 400	322	2220	260	1790	4	627
6150	Recocido	96	662	59	407	23	197
6150	OQT 1300	118	814	107	738	21	241
6150	OQT 1000	183	1260	173	1190	12	375
6150	OQT 700	247	1700	223	1540	10	495
6150	OQT 400	315	2170	270	1860	7	601
8650	Recocido	104	717	56	386	22	212
8650	OQT 1300	122	841	113	779	21	255
8650	OQT 1000	176	1210	155	1070	14	363
8650	OQT 700	240	1650	222	1530	12	495
8650	OQT 400	282	1940	250	1720	11	555
8740	Recocido	100	690	60	414	22	201
8740	OQT 1300	119	820	100	690	25	241
8740	OQT 1000	175	1210	167	1150	15	363
8740	OQT 700	228	1570	212	1460	12	461
8740	OQT 400	290	2000	240	1650	10	578
9255	Recocido	113	780	71	490	22	229
9255	Q&T 1300	130	896	102	703	21	262
9255	Q&T 1000	181	1250	160	1100	14	352
9255	Q&T 700	260	1790	240	1650	5	534
9255	Q&T 400	310	2140	287	1980	2	601

Nota: propiedades comunes a todos los aceros al carbón y aleados:

Relación de Poisson: 0.27 – 0.30

Módulo de cortante:  $11.5 \times 10^6$  psi; 80 GPa

Coefficiente de dilatación térmica:  $6.5 \times 10^{-6}$  °F<sup>-1</sup>

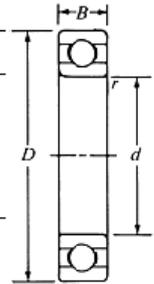
Densidad: 0.283 lb/pulg<sup>3</sup>; 7680 kg/m<sup>3</sup>

## C. Dimensiones estándares para asiento de rodamiento y tamaños básicos para secciones circulares

En las siguientes tablas se ilustran los tamaños y roscas básicos empleados en la industria, estas tablas se propusieron por Mott [7]. Estas tablas se emplearon para ajustar los diámetros del eje a valores estándares para rodamientos u otros elementos como engranes particularmente para este estudio de caso.

Tabla C. Datos para seleccionar rodamientos de una hilera de bolas y ranura profunda, tipo Conrad [7].

Número de rodamiento	Dimensiones nominales del rodamiento							Diámetro de escalón preferido		Peso del rodamiento	Capacidad básica de carga estática $C_o$	Capacidad básica de carga dinámica $C$
	$d$		$D$		$B$		$r^*$	Eje	Caja			
	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg	pulg	pulg	pulg			
6200	10	0.3937	30	1.1811	9	0.3543	0.024	0.500	0.984	0.07	520	885
6201	12	0.4724	32	1.2598	10	0.3937	0.024	0.578	1.063	0.08	675	1180
6202	15	0.5906	35	1.3780	11	0.4331	0.024	0.703	1.181	0.10	790	1320
6203	17	0.6693	40	1.5748	12	0.4724	0.024	0.787	1.380	0.14	1010	1660
6204	20	0.7874	47	1.8504	14	0.5512	0.039	0.969	1.614	0.23	1400	2210
6205	25	0.9843	52	2.0472	15	0.5906	0.039	1.172	1.811	0.29	1610	2430
6206	30	1.1811	62	2.4409	16	0.6299	0.039	1.406	2.205	0.44	2320	3350
6207	35	1.3780	72	2.8346	17	0.6693	0.039	1.614	2.559	0.64	3150	4450
6208	40	1.5748	80	3.1496	18	0.7087	0.039	1.811	2.874	0.82	3650	5050
6209	45	1.7717	85	3.3465	19	0.7480	0.039	2.008	3.071	0.89	4150	5650
6210	50	1.9685	90	3.5433	20	0.7874	0.039	2.205	3.268	1.02	4650	6050
6211	55	2.1654	100	3.9370	21	0.8268	0.059	2.441	3.602	1.36	5850	7500
6212	60	2.3622	110	4.3307	22	0.8661	0.059	2.717	3.996	1.73	7250	9050
6213	65	2.5591	120	4.7244	23	0.9055	0.059	2.913	4.390	2.18	8000	9900
6214	70	2.7559	125	4.9213	24	0.9449	0.059	3.110	4.587	2.31	8800	10 800
6215	75	2.9528	130	5.1181	25	0.9843	0.059	3.307	4.783	2.64	9700	11 400
6216	80	3.1496	140	5.5118	26	1.0236	0.079	3.504	5.118	3.09	10 500	12 600
6217	85	3.3465	150	5.9055	28	1.1024	0.079	3.740	5.512	3.97	12 300	14 600
6218	90	3.5433	160	6.2992	30	1.1811	0.079	3.937	5.906	4.74	14 200	16 600
6219	95	3.7402	170	6.6929	32	1.2598	0.079	4.213	6.220	5.73	16 300	18 800
6220	100	3.9370	180	7.0866	34	1.3386	0.079	4.409	6.614	6.94	18 600	21 100
6221	105	4.1339	190	7.4803	36	1.4173	0.079	4.606	7.008	8.15	20 900	23 000
6222	110	4.3307	200	7.8740	38	1.4961	0.079	4.803	7.402	9.59	23 400	24 900
6224	120	4.7244	215	8.4646	40	1.5748	0.079	5.197	7.992	11.4	26 200	26 900



A. Series 6200, continuación

Número de rodamiento	Dimensiones nominales del rodamiento							Diámetro de escalón preferido		Peso del rodamiento	Capacidad básica de carga estática $C_o$	Capacidad básica de carga dinámica $C$
	$d$		$D$		$B$		$r^*$	Eje	Caja			
	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg	pulg	pulg	pulg			
6226	130	5.1181	230	9.0551	40	1.5748	0.098	5.669	8.504	12.7	29 100	28 700
6228	140	5.5118	250	9.8425	42	1.6535	0.098	6.063	9.291	19.6	29 300	28 700
6230	150	5.9055	270	10.6299	45	1.7717	0.098	6.457	10.079	25.3	32 500	30 000
6232	160	6.2992	290	11.4173	48	1.8898	0.098	6.850	10.886	32.0	35 500	32 000
6234	170	6.6929	310	12.2047	52	2.0472	0.118	7.362	11.535	38.5	43 000	36 500
6236	180	7.0866	320	12.5984	52	2.0472	0.118	7.758	11.929	41.0	46 500	39 000
6238	190	7.4803	340	13.3858	55	2.1654	0.118	8.150	12.717	50.5	54 500	44 000
6240	200	7.8740	360	14.1732	58	2.2835	0.118	8.543	13.504	61.5	60 000	46 500

B. Series 6300

6300	10	0.3937	35	1.3780	11	0.4331	0.024	0.563	1.181	0.12	805	1400
6301	12	0.4724	37	1.4567	12	0.4724	0.039	0.656	1.220	0.13	990	1680
6302	15	0.5906	42	1.6535	13	0.5118	0.039	0.781	1.417	0.18	1200	1980
6303	17	0.6693	47	1.8504	14	0.5512	0.039	0.875	1.614	0.25	1460	2360
6304	20	0.7874	52	2.0472	15	0.5906	0.039	1.016	1.772	0.32	1730	2760
6305	25	0.9843	62	2.4409	17	0.6693	0.039	1.220	2.165	0.52	2370	3550
6306	30	1.1811	72	2.8346	19	0.7480	0.039	1.469	2.559	0.76	3150	4600
6307	35	1.3780	80	3.1496	21	0.8268	0.059	1.688	2.795	1.01	4050	5800
6308	40	1.5748	90	3.5433	23	0.9055	0.059	1.929	3.189	1.40	5050	7050
6309	45	1.7717	100	3.9370	25	0.9843	0.059	2.126	3.583	1.84	6800	9150
6310	50	1.9685	110	4.3307	27	1.0630	0.079	2.362	3.937	2.42	8100	10 700
6311	55	2.1654	120	4.7244	29	1.1417	0.079	2.559	4.331	2.98	9450	12 300
6312	60	2.3622	130	5.1181	31	1.2205	0.079	2.835	4.646	3.75	11 000	14 100
6313	65	2.5591	140	5.5118	33	1.2992	0.079	3.031	5.039	4.63	12 600	16 000
6314	70	2.7559	150	5.9055	35	1.3780	0.079	3.228	5.433	5.51	14 400	18 000
6315	75	2.9528	160	6.2992	37	1.4567	0.079	3.425	5.827	6.61	16 300	19 600
6316	80	3.1496	170	6.6929	39	1.5354	0.079	3.622	6.220	7.93	18 300	21 300
6317	85	3.3465	180	7.0866	41	1.6142	0.098	3.898	6.535	9.37	20 400	22 900
6318	90	3.5433	190	7.4803	43	1.6929	0.098	4.094	6.929	10.8	22 500	24 700
6319	95	3.7402	200	7.8740	45	1.7717	0.098	4.291	7.323	12.5	24 900	26 400
6320	100	3.9370	215	8.4646	47	1.8504	0.098	4.488	7.913	15.3	29 800	30 000
6321	105	4.1339	225	8.8583	49	1.9291	0.098	4.685	8.307	17.9	32 500	31 700
6322	110	4.3307	240	9.4488	50	1.9685	0.098	4.882	8.898	21.0	38 000	35 500
6324	120	4.7244	260	10.2362	55	2.1654	0.098	5.276	9.685	27.6	38 500	36 000
6326	130	5.1181	280	11.0236	58	2.2835	0.118	5.827	10.315	40.8	44 500	39 500
6328	140	5.5118	300	11.8110	62	2.4409	0.118	6.220	11.102	48.5	51 000	43 500
6330	150	5.9055	320	12.5984	65	2.5591	0.118	6.614	11.890	57.3	58 000	47 500
6332	160	6.2992	340	13.3858	68	2.6772	0.118	7.008	12.677	58	58 500	48 000
6334	170	6.6929	360	14.1732	72	2.8346	0.118	7.402	13.465	84	73 500	56 500
6336	180	7.0866	380	14.9606	75	2.9528	0.118	7.795	14.252	98	84 000	61 500
6338	190	7.4803	400	15.7480	78	3.0709	0.157	8.346	14.882	112	84 000	61 500
6340	200	7.8740	420	16.5354	80	3.1496	0.157	8.740	15.669	127	91 500	65 500

Fuente: NSK Corporation, Ann Arbor, MI.

\*Chañln máximo que rebasará el radio de la esquina.

Tabla D. Tamaños básicos preferidos para elementos con sección transversal circular [7].

Fracciones (pulg)				Decimales (pulg)			Métrico (mm)					
							Primero	Segundo	Primero	Segundo	Primero	Segundo
1/64	0.015 625	5 <sub>1</sub>	5.000	0.010	2.00	8.50	1		10		100	
1/32	0.031 25	5 <sub>2</sub>	5.250	0.012	2.20	9.00		1.1		11		110
1/16	0.0625	5 <sub>4</sub>	5.500	0.016	2.40	9.50	1.2		12		120	
3/32	0.093 75	5 <sub>8</sub>	5.750	0.020	2.60	10.00		1.4		14		140
1/8	0.1250	6 <sub>1</sub>	6.000	0.025	2.80	10.50	1.6		16		160	
5/32	0.156 25	6 <sub>2</sub>	6.500	0.032	3.00	11.00		1.8		18		180
3/16	0.1875	7	7.000	0.040	3.20	11.50	2		20		200	
1/4	0.2500	7 <sub>2</sub>	7.500	0.05	3.40	12.00		2.2		22		220
5/16	0.3125	8	8.000	0.06	3.60	12.50	2.5		25		250	
3/8	0.3750	8 <sub>2</sub>	8.500	0.08	3.80	13.00		2.8		28		280
7/16	0.4375	9	9.000	0.10	4.00	13.50	3		30		300	
1/2	0.5000	9 <sub>2</sub>	9.500	0.12	4.20	14.00		3.5		35		350
9/16	0.5625	10	10.000	0.16	4.40	14.50	4		40		400	
5/8	0.6250	10 <sub>2</sub>	10.500	0.20	4.60	15.00		4.5		45		450
11/16	0.6875	11	11.000	0.24	4.80	15.50	5		50		500	
3/4	0.7500	11 <sub>2</sub>	11.500	0.30	5.00	16.00		5.5		55		550
7/8	0.8750	12	12.000	0.40	5.20	16.50	6		60		600	
1	1.000	12 <sub>2</sub>	12.500	0.50	5.40	17.00		7		70		700
1 <sub>4</sub>	1.250	13	13.000	0.60	5.60	17.50	8		80		800	
1 <sub>2</sub>	1.500	13 <sub>2</sub>	13.500	0.80	5.80	18.00		9		90		900
1 <sub>4</sub>	1.750	14 <sub>1</sub>	14.000	1.00	6.00	18.50					1000	
2	2.000	14 <sub>2</sub>	14.500	1.20	6.50	19.00						
2 <sub>2</sub>	2.250	15	15.000	1.40	7.00	19.50						
2 <sub>2</sub>	2.500	15 <sub>2</sub>	15.500	1.60	7.50	20.00						
2 <sub>4</sub>	2.750	16	16.000	1.80	8.00							
3	3.000	16 <sub>2</sub>	16.500									
3 <sub>4</sub>	3.250	17	17.000									
3 <sub>2</sub>	3.500	17 <sub>2</sub>	17.500									
3 <sub>4</sub>	3.750	18	18.000									
4	4.000	18 <sub>2</sub>	18.500									
4 <sub>4</sub>	4.250	19	19.000									
4 <sub>2</sub>	4.500	19 <sub>2</sub>	19.500									
4 <sub>4</sub>	4.750	20	20.000									

Reimpreso de ASME B4.1-1967, con autorización de The American Society of Mechanical Engineers. Todos los derechos reservados.

## D. Gráficas de factores teóricos de concentración del esfuerzo

A continuación, se presentan gráficos para diversos factores de concentración de esfuerzos  $K_t$  empleados como referencia para este trabajo de investigación [6].

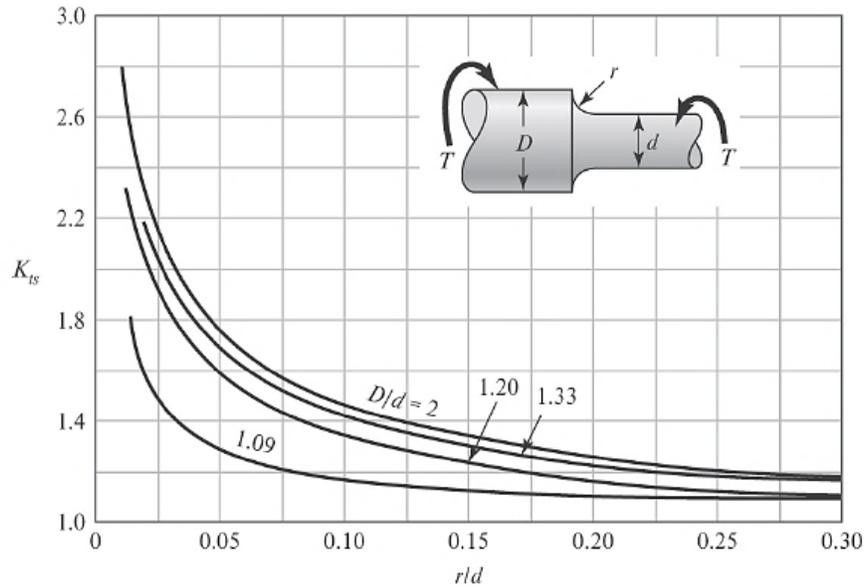


Figura B. Eje redondo con filete en el hombro en torsión.  $\tau_0 = \frac{Tc}{J}$ , donde  $c = \frac{d}{2}$  y  $J = \frac{\pi d^4}{32}$  [6].

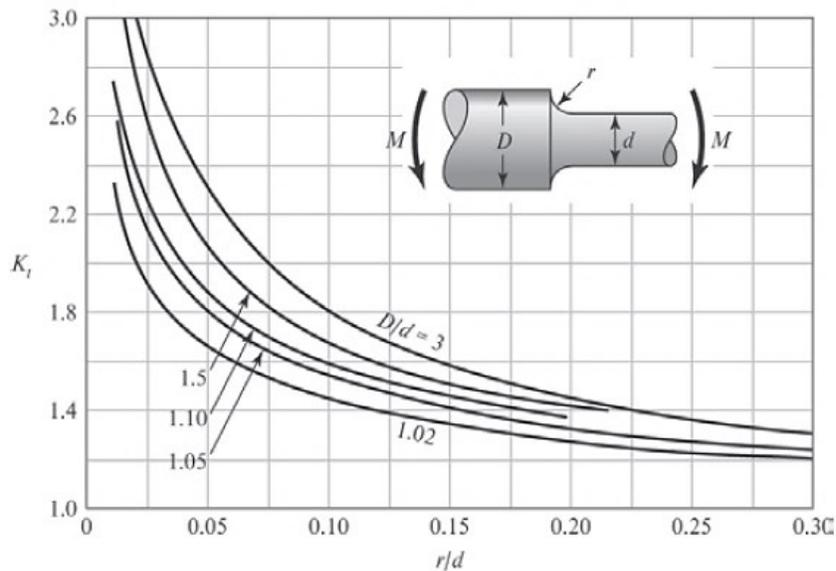


Figura C. Eje redondo con filete en el hombro en flexión.  $\sigma_0 = \frac{Mc}{I}$ , donde  $c = d/2$  e  $I = \pi d^4/64$  [6].

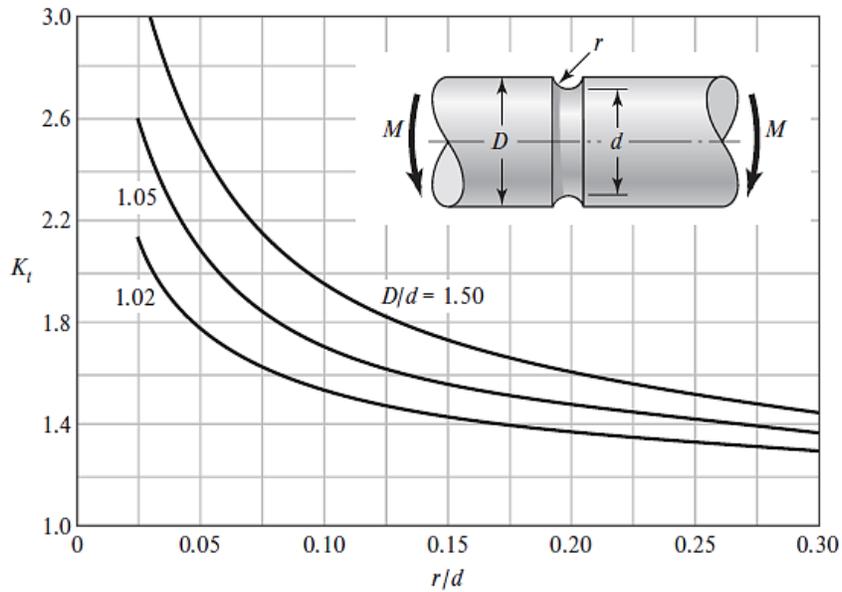


Figura D. Barra redonda ranurada en flexión.  $\sigma_0 = \frac{Mc}{I}$ , donde  $c = d/2$  e  $I = \pi d^4/64$  [6].

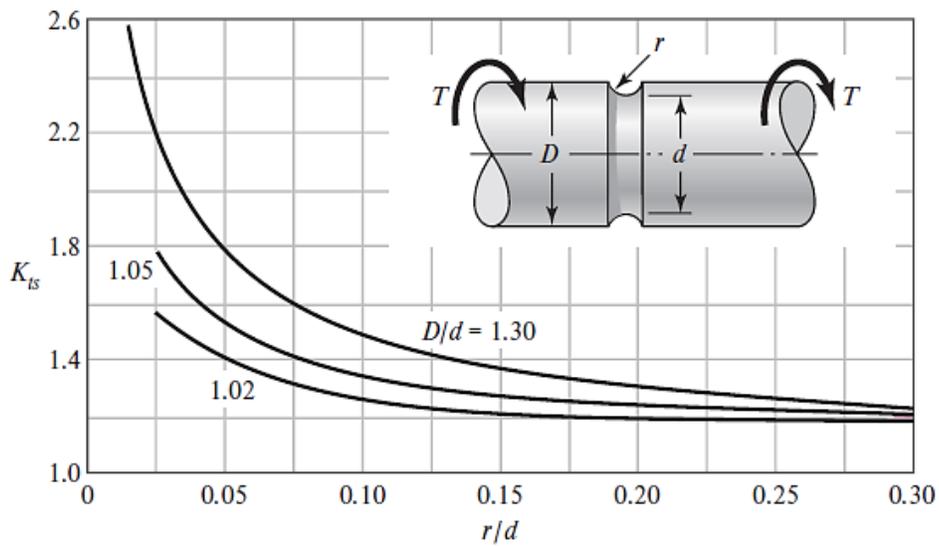


Figura E. Barra redonda ranurada en torsión.  $\tau_0 = \frac{Tc}{J}$ , donde  $c = d/2$  y  $J = \pi d^4/32$  [6].

Tabla E. Estimaciones de los factores de concentración de esfuerzos [6].

	Flexión	Torsión	Axial
Filete de hombro: agudo ( $r/d = 0.02$ )	2.7	2.2	3.0
Filete de hombro: bien redondeado ( $r/d = 0.1$ )	1.7	1.5	1.9
Cuñero fresado ( $r/d = 0.02$ )	2.14	3.0	—
Cuñero de patín o trapezoidal	1.7	—	—
Ranura para anillo de retención	5.0	3.0	5.0

Los valores faltantes en la tabla no pueden obtenerse con facilidad.

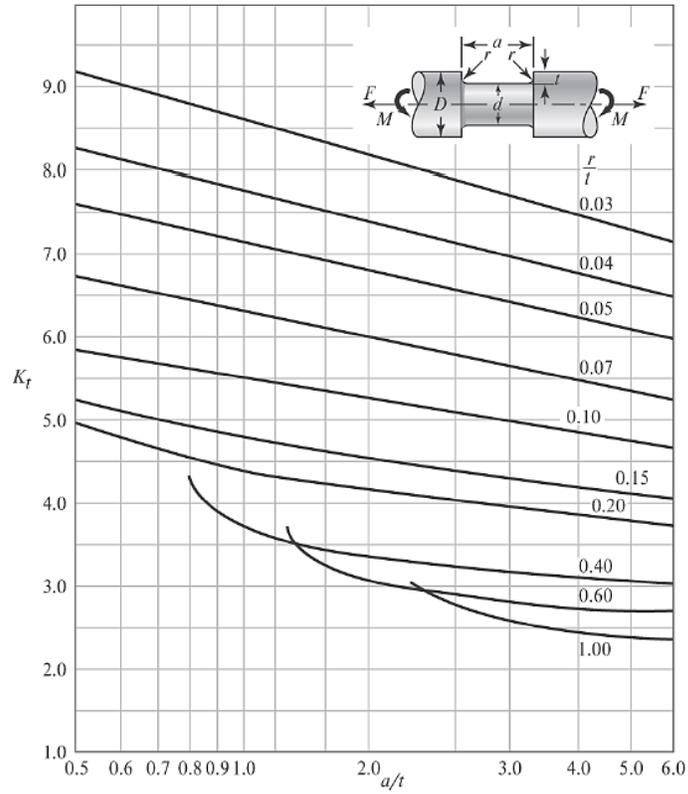


Figura F. Eje redondo con ranura de fondo plano en flexión y/o tensión.  $\sigma_0 = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}$  [6].

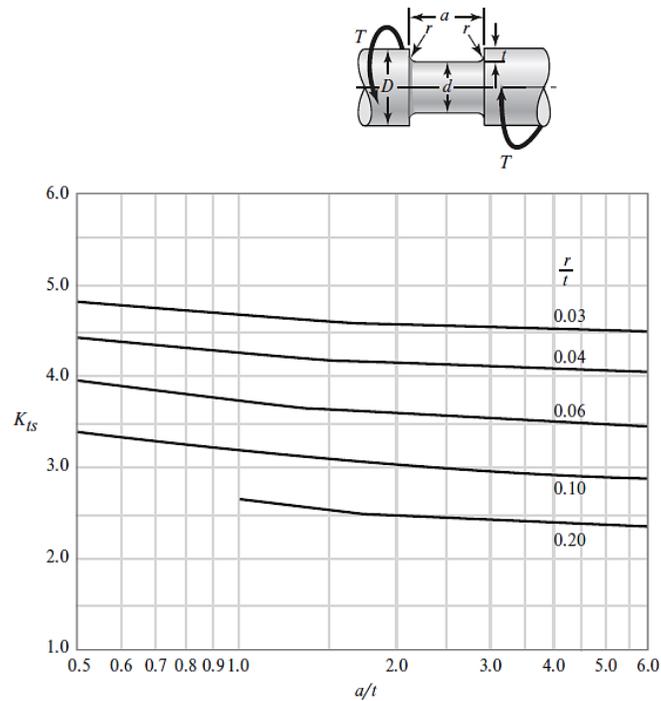


Figura G. Eje redondo con ranura de fondo plano en torsión.  $\tau_0 = \frac{16T}{\pi d^3}$  [6].

# Apéndice E

## E. Selección de cuñas

El tipo de cuñas más común empleado para ejes, hasta de  $6\frac{1}{2}$  pulgadas de diámetro, es la cuña cuadrada, misma que se muestra en la Figura H y que se empleó en este trabajo de investigación. Existen dos tipos de cuñas paralelas, estas son las cuñas cuadradas y rectangulares, debido a que sus caras inferiores, superiores y laterales son paralelas. En la Tabla F se ilustran las dimensiones estándar de cuñas paralelas en función del diámetro del eje, medidas especificadas por la norma ANSI B17.1-1967 [7].

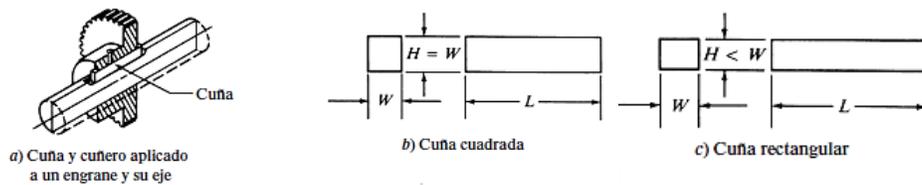


Figura H. Cuñas paralelas [7].

Tabla F. Tamaño de la cuña en función del diámetro del eje [7].

Tamaño nominal del eje		Tamaño nominal de la cuña		
Más de	Hasta (incl.)	Ancho, W	Altura, H	
			Cuadrada	Rectangular
5/16	7/16	3/32	3/32	
7/16	9/16	1/8	1/8	3/32
9/16	7/8	3/16	3/16	1/8
7/8	$\frac{1}{4}$	1/4	1/4	3/16
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	5/16	5/16	1/4
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	3/8	3/8	1/4
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1/2	1/2	3/8
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	5/8	5/8	7/16
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	3/4	3/4	1/2
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	7/8	7/8	5/8
$\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	1	1	3/4
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	7/8
$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$7\frac{1}{2}$	9	2	2	$1\frac{2}{3}$
9	11	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
11	13	3	3	2
13	15	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

Fuente: Reimpreso de la norma ANSI B17.1-1967 (R98) con autorización de la American Society of Mechanical Engineers. Todos los derechos reservados.

Nota: Se prefieren los valores en las áreas no sombreadas. Las dimensiones están en pulgadas.

## F. Planteamiento del estudio de caso y definición de engranes

Antecedentes del estudio de caso propuesto y desarrollado por Budynas y Nisbett [6]: transmisión de potencia.

Una compañía desea proporcionar reductores de velocidad fabricados en varias capacidades y relaciones de velocidad para ser vendidos con una amplia variedad de aplicaciones. El equipo de mercadotecnia ha determinado la necesidad de uno de estos reductores de velocidad para satisfacer los siguientes requerimientos del cliente.

Requisitos de diseño:

- Potencia que debe entregarse: 20 HP
- Velocidad de entrada: 1750 rev/min
- Velocidad de salida: 85 rev/min
- Para ser utilizado en aplicaciones que se cargan uniformemente, con bandas transportadoras, ventiladores y engranes
- Eje de entrada y salida en línea
- Base para montarse con 4 pernos
- Operación continua
- Vida de: 6 años, con 8 horas/día, 5 días/semana
- Poco mantenimiento
- Costo competitivo
- Condiciones de operación nominales de sitios industrializados
- Ejes de entrada y salida con tamaño estándar para coples típicos

La compañía quiere diseñar para todo un rango de relaciones de velocidad en cada capacidad de potencia, que puede obtenerse al intercambiar tamaños de engranes dentro del mismo diseño global. Para simplificar, en este estudio de caso se considera solo una relación de velocidad.

Con el propósito de disminuir las exigencias poco claras, un grupo de trabajo desarrollo aún más los requisitos del cliente hasta lograr un conjunto de especificaciones que puedan medirse. Las siguientes especificaciones de producto proporcionan un marco de trabajo apropiado para esta tarea de diseño.

Especificaciones de diseño:

- Potencia que debe entregarse: 20 HP
- Eficiencia de potencia: > 95%

- Velocidad de entrada de estado estable: 1750 rev/min
- Velocidad de entrada máxima: 2400 rev/min
- Velocidad de salida de estado estable: 82 – 88 rev/min
- Niveles de impacto usualmente bajos, impactos moderados ocasionales
- Los ejes de entrada y salida se extienden 4 in fuera de la caja de engranes
- Tolerancia en el diámetro de los ejes de entrada y salida  $\pm 0.001$  in
- Eje de salida y eje de entrada en línea: concentricidad  $\pm 0.005$  in, alineación  $\pm 0.001$  rad
- Cargas permisibles máximas sobre el eje de entrada: axial, 50 lbf; transversal, 100 lbf
- Cargas permisibles máximas sobre el eje de salida: axial, 50 lbf; transversal, 500 lbf
- Tamaño máximo de la caja de engranes: base 14 pulg  $\times$  14 pulg y altura de 22 pulg.
- Base montada sobre 4 pernos
- Orientación de montaje solo con base en la parte inferior
- Ciclo de operación 100%
- Programa de mantenimiento: revisión de lubricación cada 2000 horas; cambio de lubricante cada 8000 horas: vida del eje infinita; engranes, cojinetes y ejes reemplazables
- Accesos a la revisión, drenaje y rellenado de lubricante sin desensamblar o abrir las juntas empaquetadas
- Costo de manufactura por unidad: < 300 dólares norteamericanos
- Producción: 10 000 unidades por año
- Rango de temperatura de operación : -10° a 120°F
- Sellado contra agua y polvo ambiental
- Ruido: < 85 dB desde un metro

Parte 1: especificación del problema. Se diseñará un tren de engranes de inversión compuesto, de dos etapas, como el que se muestra en la Figura I. En este apéndice se presentará el diseño del eje intermedio y sus componentes, tomando en cuenta los demás ejes cuando sea necesario. A continuación, se presentará un subconjunto de las especificaciones pertinentes del diseño que se necesitarán para esta parte del estudio.

- Potencia que se entregará: 20 HP
- Velocidad de entrada: 1750 rpm
- Velocidad de salida: 82 – 88 rpm
- Habitualmente niveles bajos de impacto, a veces niveles moderados
- Ejes de entrada y salida extendidos 4 pulgadas fuera de la caja de cambios
- Dimensiones máximas de la caja de cambios: 22 in  $\times$  14 in  $\times$  14 in
- Ejes de entrada y salida en línea
- Vida de engranes y cojinetes > 12 000 horas; vida infinita del eje

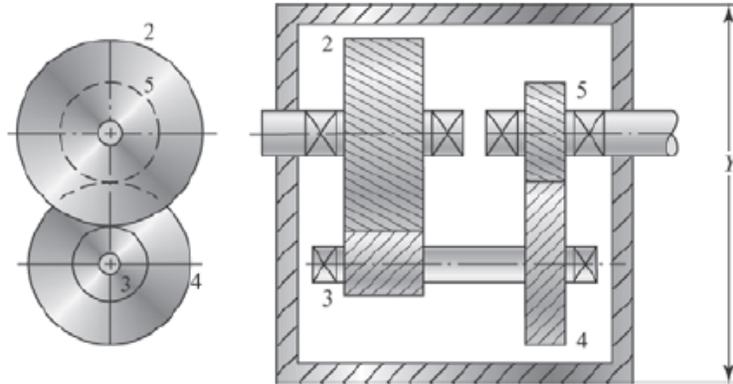


Figura I. Tren de engranes compuesto invertido [6].

Parte 2: relaciones de velocidad, par de torsión y engranes. Determine el número apropiado de dientes para reducir la velocidad de entrada de  $\omega_i = 1750$  rpm a una velocidad de salida dentro del intervalo  $82 \text{ rpm} < \omega_o < 88 \text{ rpm}$ .

Una vez especificado el número de dientes, determine:

- Velocidades de los ejes intermedios y de salida.
- Pares de torsión de los ejes de entrada, intermedio y salida para transmitir 20 HP.

Solución:

Empleando la nomenclatura de engranes de la Figura I, se define  $\omega_2 = \omega_i = 1750$  rpm, así como  $\omega_5 = \omega_o = \frac{82+88}{2} = 85$  rpm, para el diseño inicial.

Se define la relación de engranes para el tren de engranes como:

$$e = \frac{\omega_o}{\omega_i} = \frac{T_o}{T_i} = \quad (F.1)$$

sustituyendo datos y simplificando, se tiene:

$$e = \frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{85}{1750} = \frac{1}{20.5882} \quad (F.2)$$

Para el caso de un tren de engranes inverso compuesto, se define:

$$e = \frac{\text{producto del N de conductores}}{\text{producto del N de conducidos}} \quad (F.3)$$

Entonces,

$$e = \frac{1}{20.5882} = \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \quad (F.4)$$

Donde,  $N$  es el número de dientes del engrane. Con el objetivo de un menor tamaño de caja, se define la misma reducción para ambas etapas. Al hacer que las dos etapas sean idénticas, la condición en línea sobre el eje de entrada y salida se satisface automáticamente como:

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{N_4}{N_5} = \sqrt{\frac{1}{20.5882}} = \frac{1}{4.5374} \quad (\text{F.5})$$

Para esta relación, se define que el engrane conductor 2 (motriz) tiene más dientes que el engrane conducido 3 (piñón).

$$m_G = m_2 = \frac{N_G}{N_p} = \frac{N_3}{N_2} = m > 1 ; \frac{N_3}{N_2} = 4.5374 \quad (\text{F.6})$$

Definiendo  $m = 4.537$ , para un engrane recto se tiene: ángulo de presión  $\phi = 20^\circ$  y  $k = 1$  para dientes de profundidad completa o  $k = 0.8$  para dientes cortos, entonces, el número mínimo de dientes para el piñón sin interferencia esta dado por:

$$N_p = \frac{2k}{(1 + 2m) \sin^2 \phi} \left( m + \sqrt{m^2 + (1 + 2m) \sin^2 \phi} \right) \quad (\text{F.7})$$

$$N_p = \frac{2(1)}{(1 + 2(4.5374)) \sin^2(20^\circ)} \left( 4.5374 + \sqrt{(4.5374)^2 + (1 + 2(4.5374)) \sin^2(20^\circ)} \right) \quad (\text{F.8})$$

Lo que resulta como:  $N_p = N_2 = 15.6179 = 16$  dientes (redondeo a número siguiente entero).

Y despejando  $N_3$  de la ecuación (F.6), se tiene:

$$N_3 = m \cdot N_2 = 4.5374(16) = 72.59 \quad (\text{F.9})$$

Lo que resulta como:  $N_G = N_3 = 72.59 = 72$  dientes (redondeo a número entero anterior).

Ahora, para el inciso a), se calcula y verifica que  $\omega_5$  se encuentra dentro de los límites con:

$$\omega_5 = \left(\frac{16}{72}\right) \left(\frac{16}{72}\right) (1750) = 86.42 \text{ rpm} \quad (\text{F.10})$$

Como  $82 < 86.42 < 88$  rpm, la velocidad está dentro los límites, por lo que los números de dientes calculados para los engranes son aceptables.

Para el eje intermedio  $\omega_{34}$  se define la siguiente relación  $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_3}$  y despejando para  $\omega_3$  se tiene:

$$\omega_3 = \left(\frac{N_2}{N_3}\right) \omega_2 = \left(\frac{16}{72}\right) (1750) = 388.88 \text{ rpm} \quad (\text{F.11})$$

Es decir:  $\omega_3 = \omega_4 = \omega_{34} = 388.88$  rpm.

Resolviendo para el inciso b), se define:

$$P = T_2 \omega_2 = T_3 \omega_3 \quad (\text{F.12})$$

Con la ecuación (3.4), en la entrada se tiene:

$$T_2 = 63\,000 \left( \frac{20 \text{ HP}}{1750 \text{ rpm}} \right) = 720 \text{ lb} \cdot \text{in} = 60 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (\text{F.13})$$

De la ecuación (F.12), para el eje intermedio resulta:

$$T_3 = T_4 = T_{34} = T_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) = 720 \left( \frac{1750}{388.88} \right) = 3240.07 \text{ lb} \cdot \text{in} \text{ ó } 270 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (\text{F.14})$$

Y para la salida:

$$T_5 = T_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_5} \right) = 720 \left( \frac{1750}{86.42} \right) = 14\,579.95 \text{ lb} \cdot \text{in} \text{ ó } 1214.99 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (\text{F.15})$$

Parte 3: especificación de engranes. Especifique los engranes apropiados, contemplando el diámetro de paso, paso diametral, ancho de cara y material. Obtenga los factores de seguridad de por lo menos 1.2 para desgaste y flexión.

Solución:

Determinando el paso diametral mínimo, se tiene:

$$P_{d,\text{mín}} = \frac{\left( N_3 + \frac{N_2}{2} + \frac{N_5}{2} + 2 \right)}{\gamma - (\text{holguras y espesor de pared})} \quad (\text{F.16})$$

Para este estudio de caso, se definió 1.5 in para holguras y espesor de pared y la altura de la caja de engranes global  $\gamma = 22$  in, así, el paso diametral es:

$$P_{d,\text{mín}} = \frac{\left( 72 + \frac{16}{2} + \frac{72}{2} + 2 \right)}{22 - 1.5} = 5.75 \frac{\text{dientes}}{\text{in}} \quad (\text{F.17})$$

Redondeando se define:  $P_d = 6 \frac{\text{dientes}}{\text{in}}$ , por lo que los diámetros de paso son:

$$d_2 = d_4 = \frac{N_2}{P_d} = \frac{16}{6} = 2.66 \text{ in} \quad (\text{F.18})$$

$$d_3 = d_5 = \frac{N_3}{P_d} = \frac{72}{6} = 12 \text{ in} \quad (\text{F.19})$$

Para las velocidades de línea de paso y cargas transmitidas se define  $v_t = \pi d \omega$  y con la ecuación (3.5) respectivamente, se determinan las siguientes velocidades y cargas:

$$v_{t,23} = \pi d_2 \omega_2 = \pi (2.66) (1750) = 14\,624.11 \frac{\text{in}}{\text{min}} = 1218.67 \frac{\text{ft}}{\text{min}} \quad (\text{F.20})$$

$$v_{t,54} = \pi d_5 \omega_5 = \pi (12) (86.42) = 3257.95 \frac{\text{in}}{\text{min}} = 271.49 \frac{\text{ft}}{\text{min}} \quad (\text{F.21})$$

$$W_{t,23} = \frac{T_2}{d_2/2} = \frac{720}{2.66/2} = 541.35 \text{ lb} \quad (\text{F.22})$$

$$W_{t,54} = \frac{T_5}{d_5/2} = \frac{14\,579.95}{12/2} = 2429.99 \text{ lb} \quad (\text{F.23})$$

Ahora, se inicia el análisis para el engrane 4, ya que es el de menor tamaño y que transmite la carga máxima, donde probablemente se encuentre el punto más crítico. Se comienza con el desgaste por esfuerzo de contacto, debido a que comúnmente el factor es limitante.

Desgaste del engrane 4: para realizar este análisis se define el factor geométrico de resistencia a la picadura ( $I$ ) como:

$$I = \begin{cases} \frac{\cos \Phi \sin \Phi}{2m_N} \frac{m_G}{m_G + 1} \dots \text{engranes externos} \\ \frac{\cos \Phi \sin \Phi}{2m_N} \frac{m_G}{m_G - 1} \dots \text{engranes internos} \end{cases} \quad (\text{F.24})$$

Donde  $m_N = 1$  para engranes rectos, por lo tanto, para engranes externos se tiene:

$$I = \frac{\cos(20^\circ) \sin(20^\circ)}{2(1)} \frac{4.53}{4.53 + 1} = 0.1316 \quad (\text{F.25})$$

El factor dinámico se define de la Figura J, mediante la ecuación (F.26).

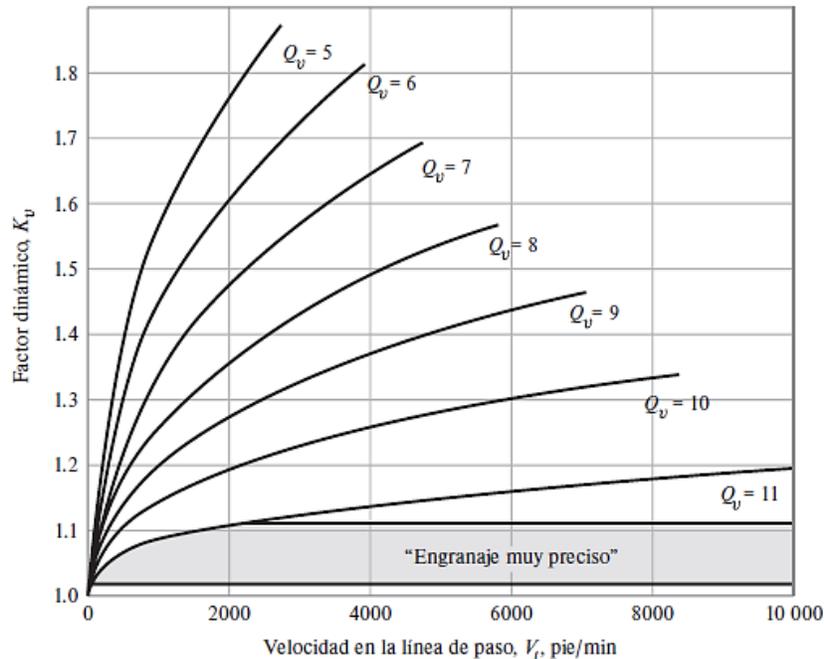


Figura J. Gráfica para determinar el factor dinámico  $K_v$  [6].

$$(v_t)_{\text{máx}} = \begin{cases} [A + (Q_v - 3)]^2 \text{ ft/min} \\ \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} \text{ m/seg} \end{cases} \quad (\text{F.26})$$

Suponiendo  $Q_v = 7$ ,  $B = 0.25(12 - Q_v)^{2/3} = 0.731$  y  $A = 50 + 56(1 - B) = 65.1$ , para el factor dinámico se tiene:

$$K_v = \begin{cases} \left( \frac{A + \sqrt{v}}{A} \right)^B & v \text{ en ft/min} \\ \left( \frac{A + \sqrt{200v}}{A} \right)^B & v \text{ en m/seg} \end{cases} \quad (\text{F.27})$$

Por lo que de la ecuación (F.27), se determina:

$$K_v = \left( \frac{65.1 + \sqrt{271.49}}{65.1} \right)^{0.731} = 1.18 \quad (\text{F.28})$$

Generalmente, el ancho de cara de un engrane es de 3 a 5 veces el paso circular, es decir:

$$F = 4 \frac{\pi}{P_d} = 4 \left( \frac{\pi}{6} \right) = 2.09 \text{ in} \quad (\text{F.29})$$

Buscando catálogos de engranes comerciales y de tamaño estándar en internet, para un  $P_d = 6$  dientes/in y  $d_p = 2.66$  in, tomando [18] como referencia, se encuentran engranes rectos con anchos de cara mínimo de 1.5 in y máximo de 2 in. De igual forma, para el engrane acoplado 5 con  $d_5 = 12$  in. Para el engrane 4 y 5 se elige  $F = 2$  in y para el engrane 2 y 3 se selecciona  $F = 1.5$  in. Una vez definido el ancho de cara del engrane, se establece el factor de distribución de carga  $K_m$ , como:

$$K_m = C_{mf} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e) \quad (\text{F.30})$$

Donde, el factor de corrección de carga  $C_{mc}$ , factor de proporción del piñón  $C_{pf}$ , el modificador de proporción del piñón  $C_{pm}$  y el factor de alineación del acoplamiento  $C_{ma}$ , son definidos por:

$$C_{mc} = \begin{cases} 1 & \text{para dientes sin coronar} \\ 0.8 & \text{para dientes coronados} \end{cases} \quad (\text{F.31})$$

$$C_{pf} = \begin{cases} (F/10d_p) - 0.025 & \text{para } F \leq 1 \text{ in} \\ (F/10d_p) - 0.0375 + 0.0125F & \text{para } 1 < F \leq 17 \text{ in} \\ (F/10d_p) - 0.1109 + 0.0207F - 0.000228F^2 & \text{para } 17 < F \leq 40 \text{ in} \end{cases} \quad (\text{F.32})$$

$$C_{pm} = \begin{cases} 1 & \text{para piñón montado separado con } S_1/S < 0.175 \\ 1.1 & \text{para piñón montado separado con } S_1/S \geq 0.175 \end{cases} \quad (\text{F.33})$$

$$C_{ma} = A + BF + CF^2 \quad (\text{F.34})$$

De igual forma, el factor de alineación de acoplamiento  $C_{ma}$  puede determinarse con el gráfico de la Figura K.

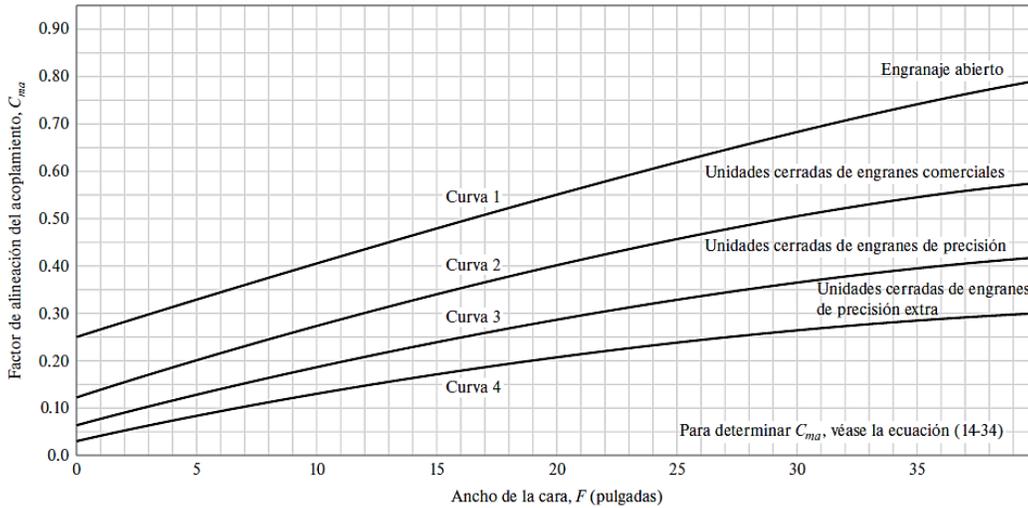


Figura K. Gráfico de Factor de alineación del acoplamiento  $C_{ma}$  [6].

Así, para una unidad cerrada de engranes comerciales con ancho de cara igual a 2 se tiene que  $C_{ma} = 0.15$ . Para  $d_p = d_4 = 2.66$  in se define el factor de proporción del piñón  $C_{pf}$  como:

$$C_{pf} = \left( \frac{2}{(10)(2.66)} \right) - 0.0375 + 0.0125(2) = 0.6268 \quad (\text{F.35})$$

Y aplicando  $C_{mc} = 1$ ,  $C_{pm} = 1$  y  $C_e = 1$  a la ecuación (F.30), el factor de carga  $K_m$  es:

$$K_m = 1 + 1[(0.06268)(1) + (0.15)(1)] = 0.21 \quad (\text{F.36})$$

Se define el coeficiente elástico  $C_p$ , para el acero como  $C_p = 2300$ . El esfuerzo de contacto o resistencia a la picadura  $\sigma_c$  esta dado por:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{W_t K_o K_v K_s \frac{K_m C_f}{d_p F I}} \quad (\text{F.37})$$

Donde, el factor de sobrecarga es igual al factor de tamaño y al factor de condición superficial, es decir  $K_o = K_s = C_f = 1$ , respectivamente.

$$\sigma_c = 2300 \sqrt{(2429.99)(1)(1.18)(1) \left[ \frac{1.21}{(2.66)(2)} \right] \left[ \frac{1}{0.1316} \right]} = 161\,912.36 \text{ psi} \quad (\text{F.38})$$

A continuación, se obtienen los factores del esfuerzo de contacto permisible  $\sigma_{c,perm}$ . Para el factor de vida  $Z_N$ , se debe obtener el número de ciclos para la vida especificada de 12 000 horas.

$$L_{d,4} = (12\,000 \text{ hr}) \left( \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hr}} \right) \left( 388.88 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) = 2.8 \times 10^8 \text{ rev} \quad (\text{F.39})$$

Una vez definido el número de ciclos de carga, el Factor de ciclos de esfuerzos de resistencia a la picadura  $Z_N$  esta dado por:

$$Z_N = 1.4488 L_d^{-0.0223} = 0.93 \quad (\text{F.40})$$

De igual forma, se definen los factores de confiabilidad, temperatura y relación de la dureza igual a uno, es decir,  $K_R = K_T = C_H = 1$ , respectivamente. Definiendo el factor de diseño mínimo de 1.2, se define el esfuerzo de contacto permisible como:

$$\sigma_{c,perm} = \sigma_c = \frac{S_c Z_N}{n_d} \quad (\text{F.41})$$

Y resolviendo para el número de esfuerzo de contacto permisible  $S_c$ , se tiene:

$$S_c = \frac{n_d \sigma_c}{Z_N} = \frac{(1.2)(161\,912.36)}{0.93} = 208\,919.17 \text{ psi} \quad (\text{F.42})$$

Mediante la Tabla G, se define que esta resistencia se cumple mediante un acero carburizado y revenido de grado 2, con  $S_c = 225\,000$  psi, por lo tanto, el factor de seguridad por contacto es:

$$n_c = \frac{\sigma_{c,perm}}{\sigma_c} = \frac{S_c Z_N}{\sigma_c} = \frac{(225\,000)(0.93)}{161\,912.36} = 1.29 \quad (\text{F.43})$$

Por lo tanto, los cálculos realizados son adecuados.

Tabla G. Resistencia de contacto repetidamente aplicada  $S_c$  a  $10^7$  ciclos y confiabilidad de 0.99 para engranes rectos [6].

Designación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima <sup>1</sup>	Número de esfuerzo de contacto permisible, <sup>2</sup> $S_c$ , psi		
			Grado 1	Grado 2	Grado 3
Acero <sup>3</sup>	Endurecido completamente <sup>4</sup>	Véase la figura 14-5	Véase la figura 14-5	Véase la figura 14-5	–
	Endurecido por flama <sup>5</sup> o por inducción <sup>5</sup>	50 HRC	170 000	190 000	–
		54 HRC	175 000	195 000	–
	Carburizado y endurecido <sup>5</sup>	Véase la tabla 9 <sup>7</sup>	180 000	225 000	275 000
	Nitruado <sup>5</sup> (aceros completamente endurecidos)	83.5 HR15N	150 000	163 000	175 000
		84.5 HR15N	155 000	168 000	180 000
2.5% de cromo (sin aluminio)	Nitruado <sup>5</sup>	87.5 HR15N	155 000	172 000	189 000
Nitralloy 135M	Nitruado <sup>5</sup>	90.0 HR15N	170 000	183 000	195 000
Nitralloy N	Nitruado <sup>5</sup>	90.0 HR15N	172 000	188 000	205 000
2.5% de cromo (sin aluminio)	Nitruado <sup>5</sup>	90.0 HR15N	176 000	196 000	216 000

Notas: Véase la norma ANSI/AGMA 2001-D04 para las referencias citadas en las notas 1-5.

<sup>1</sup> La dureza será equivalente a la del inicio del perfil activo en el centro del ancho de la cara.

<sup>2</sup> Véanse las tablas 7 a la 10 de los factores metalúrgicos principales de cada grado de esfuerzo en engranes de acero.

<sup>3</sup> El acero que se elija debe ser compatible con el proceso de tratamiento térmico que se seleccione y la dureza requerida.

<sup>4</sup> Estos materiales se deben recocer o normalizar como un mínimo.

<sup>5</sup> Los números de esfuerzo permisible que se indican se pueden utilizar con las profundidades de la superficie tratada prescritas en 16.1.

<sup>7</sup> La tabla 9 de la norma ANSI/AGMA 2001-D04 es una tabulación detallada de los factores metalúrgicos principales que afectan a  $S_t$  y  $S_c$  de engranes de acero carburizados y endurecidos.

### Flexión del engrane 4:

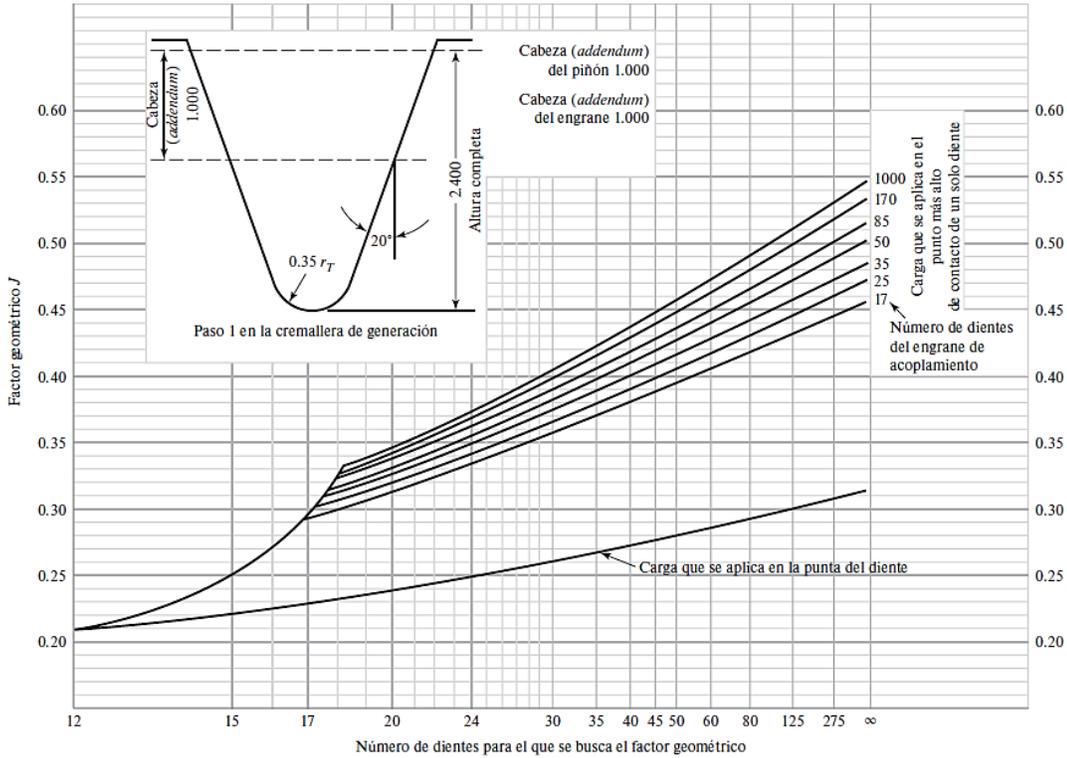


Figura L. Factores geométricos J de engranes rectos [6].

Mediante la Figura L, se determina el factor geométrico  $J = 0.27$  para el engrane 4 con 16 dientes y se define el factor de espesor del aro como:

$$K_B = \begin{cases} 1.6 \ln \frac{2.242}{m} & m < 1.2 \\ 1 & m \geq 1.2 \end{cases} \quad (F.44)$$

Mientras que los demás factores son los mismos. Entonces, el esfuerzo de flexión es:

$$\sigma = W_t K_v \frac{P_d K_m}{F J} = (2429.99)(1.18) \left(\frac{6}{2}\right) \left(\frac{1.21}{0.27}\right) = 38\,550.44 \text{ psi} \quad (F.45)$$

Considerando la ecuación (F.39), se define el factor de ciclos de esfuerzo repetidamente aplicados de resistencia a la flexión  $Y_N$  como:

$$Y_N = 1.3558 L_d^{-0.0178} = 0.95 \quad (F.46)$$

De la Tabla H, se define emplear un acero carburizado y endurecido de grado 2 con un número de esfuerzo de flexión permisible igual a  $S_t = 65\,000$  psi, así como para el desgaste.

Tabla H. Resistencia a la flexión aplicada de manera repetida  $S_t$  a  $10^7$  ciclos y confiabilidad de 0.99 para engranes de acero [6].

Designación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima <sup>1</sup>	Número de esfuerzo de flexión permisible $S_t$ , <sup>2</sup> psi		
			Grado 1	Grado 2	Grado 3
Acero <sup>3</sup>	Endurecido completamente	Véase la figura 14-2	Véase la figura 14-2	Véase la figura 14-2	–
	Endurecido <sup>4</sup> por flama o por inducción con patrón <sup>5</sup> del tipo A	Véase la tabla 8*	45 000	55 000	–
	Endurecido por flama o por inducción con patrón <sup>5</sup> tipo B	Véase la tabla 8*	22 000	22 000	–
	Carburizado y endurecido Nitruado <sup>4,7</sup> (aceros endurecidos completamente)	Véase la tabla 9* 83.5 HR15N	55 000 Véase la figura 14-3	65 000 o 70 000 <sup>6</sup> Véase la figura 14-3	75 000 –
Nitralloy 135M, Nitralloy N y 2.5% de cromo (sin aluminio)	Nitruado <sup>4,7</sup>	87.5 HR15N	Véase la figura 14-4	Véase la figura 14-4	Véase la figura 14-4

Notas: Véase la norma ANSI/AGMA 2001-D04 para referencias citadas en las notas 1-7.

El esfuerzo permisible de flexión esta dado por:

$$\sigma_{perm} = S_t Y_N = (65\ 000)(0.95) = 61\ 750\ \text{psi} \quad (\text{F.47})$$

Así, el factor de seguridad para flexión del engrane 4 es:

$$n = \frac{\sigma_{perm}}{\sigma} = \frac{61\ 750}{38\ 550.44} = 1.60 \quad (\text{F.48})$$

Flexión y desgaste del engrane 5: se conservan los valores empleados para el engrane 4, excepto  $J$ ,  $Y_N$  y  $Z_N$ . Mediante la Figura L, se determina el factor geométrico  $J = 0.41$  para el engrane 5 con 72 dientes. Para el factor de vida  $Z_N$ , se debe obtener el número de ciclos para la vida especificada de 12 000 horas.

$$L_{d,5} = (12\ 000\ \text{hr}) \left( \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{hr}} \right) \left( 86.42 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) = 6.2 \times 10^7\ \text{rev} \quad (\text{F.49})$$

Una vez definido el número de ciclos de carga, mediante la Figura M el factor de ciclos de esfuerzos de resistencia a la picadura es igual a  $Z_N = 1.0$ .

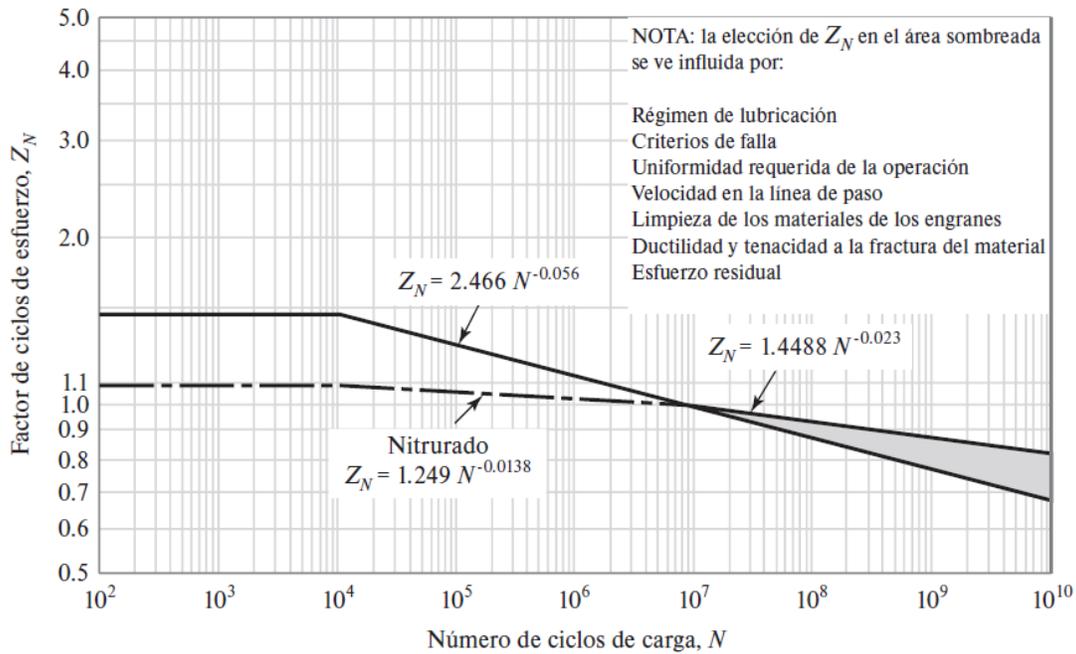


Figura M. Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la picadura  $Z_N$  [6].

De igual forma que para el engrane 4, se selecciona un acero grado 2 carburizado y endurecido. Por lo que, el factor de seguridad para los esfuerzos de contacto es:

$$n_c = \frac{\sigma_{c,perm}}{\sigma_c} = \frac{S_c Z_N}{\sigma_c} = \frac{(225\ 000)(1.0)}{161\ 912.36} = 1.38 \quad (F.50)$$

El factor de ciclos de esfuerzo repetidamente aplicados de resistencia a la flexión  $Y_N$  como:

$$Y_N = 1.3558 L_d^{-0.0178} = 0.98 \quad (F.51)$$

El esfuerzo permisible de flexión esta dado por:

$$\sigma_{perm} = S_t Y_N = (65\ 000)(0.98) = 63\ 700 \text{ psi} \quad (F.52)$$

Y el esfuerzo de flexión es:

$$\sigma = W_t K_v \frac{P_d K_m}{F J} = (2429.99)(1.18) \left(\frac{6}{2}\right) \left(\frac{1.21}{0.41}\right) = 25\ 386.87 \text{ psi} \quad (F.53)$$

Así, el factor de seguridad para flexión del engrane 5 es:

$$n = \frac{\sigma_{perm}}{\sigma} = \frac{63\ 700}{25\ 386.87} = 2.5 \quad (F.54)$$

Desgaste y flexión para el engrane 2: los engranes 2 y 3 se evalúan de forma similar que el engrane 4, excepto para los siguientes valores:

$$K_v = \left(\frac{65.1 + \sqrt{1218.67}}{65.1}\right)^{0.731} = 1.37 \quad (F.55)$$

$$C_{pf} = \left( \frac{1.5}{(10)(2.66)} \right) - 0.0375 + 0.0125(1.5) = 0.0376 \quad (\text{F.56})$$

Y aplicando  $C_{mc} = 1$ ,  $C_{pm} = 1$  y  $C_e = 1$  a la ecuación (F.30), el factor de carga  $K_m$  es:

$$K_m = 1 + 1[(0.0376)(1) + (0.15)(1)] = 0.1876 = 1.19 \quad (\text{F.57})$$

Y puesto que la carga en este punto es menor, se define  $F = 1.5$  in.

Así, se determina el esfuerzo por contacto como sigue:

$$\sigma_c = 2300 \sqrt{(541.35)(1)(1.37)(1) \left[ \frac{1.19}{(2.66)(1.5)} \right] \left[ \frac{1}{0.1316} \right]} = 94\,294.48 \text{ psi} \quad (\text{F.58})$$

$$L_{d,2} = (12\,000 \text{ hr}) \left( \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hr}} \right) \left( 1750 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) = 1.26 \times 10^9 \text{ rev} \quad (\text{F.59})$$

$$Z_N = 1.4488 L_d^{-0.0223} = 0.90 \quad (\text{F.60})$$

De la Tabla G, se elige un acero grado 1 y endurecido por flama con  $S_c = 170\,000$  psi. Por lo que el factor de seguridad por contacto es:

$$n_c = \frac{\sigma_{c,perm}}{\sigma_c} = \frac{S_c Z_N}{\sigma_c} = \frac{(170\,000)(0.90)}{94\,294.48} = 1.62 \quad (\text{F.61})$$

Para la flexión se define:

$$Y_N = 1.6831 L_d^{-0.0323} = 0.85 \quad (\text{F.62})$$

$$Z_N = 1.4488 L_d^{-0.0223} = 0.90 \quad (\text{F.63})$$

Así el esfuerzo de flexión, con  $J = 0.27$  es:

$$\sigma = W_t K_v \frac{P_d K_m}{F J} = (541.35)(1.37) \left( \frac{6}{1.5} \right) \left( \frac{1.19}{0.27} \right) = 13\,075 \text{ psi} \quad (\text{F.64})$$

De la Tabla H, para un acero grado 1 endurecido por flama se tiene  $S_t = 45\,000$  psi, el esfuerzo permisible de flexión es:

$$\sigma_{perm} = S_t Y_N = (45\,000)(0.85) = 38\,250 \text{ psi} \quad (\text{F.65})$$

Así, el factor de seguridad para flexión del engrane 5 es:

$$n = \frac{\sigma_{perm}}{\sigma} = \frac{38\,250}{13\,075} = 2.92 \quad (\text{F.66})$$

Desgaste y flexión para el engrane 3; para este análisis se definen los siguientes datos:

$$J = 0.41, Y_N = 0.9 \text{ y } Z_N = 0.9 \quad (\text{F.67})$$

Así, el esfuerzo por contacto en el engrane 3 es:

$$\sigma_c = 2300 \sqrt{(541.35)(1)(1.37)(1) \left[ \frac{1.19}{(2.66)(1.5)} \right] \left[ \frac{1}{0.1316} \right]} = 94\,294.48 \text{ psi} \quad (\text{F.68})$$

Y el esfuerzo por flexión:

$$\sigma = W_t K_v \frac{P_d K_m}{F J} = (541.35)(1.37) \left( \frac{6}{1.5} \right) \left( \frac{1.19}{0.41} \right) = 8610.37 \text{ psi} \quad (\text{F.69})$$

De la Tabla G y la Tabla H, se selecciona un acero grado 1 endurecido por completo a 500 HB, por lo que se define  $S_t = 36\,000$  psi y  $S_c = 126\,000$  psi. Así los factores de seguridad por contacto y por flexión son:

$$n_c = \frac{\sigma_{c,perm}}{\sigma_c} = \frac{S_c Z_N}{\sigma_c} = \frac{(126\,000)(0.90)}{94\,294.48} = 1.20 \quad (\text{F.70})$$

$$n = \frac{\sigma_{perm}}{\sigma} = \frac{S_t Y_N}{\sigma} = \frac{(36\,000)(0.90)}{8610.37} = 3.76 \quad (\text{F.71})$$

Finalmente, al corroborar que el factor mínimo de seguridad se cumple en todas las condiciones y para todos los engranes, se toman los cálculos realizados como válidos. A continuación, se muestran las especificaciones de los engranes.

Todos los engranes son rectos con paso diametral igual a 6 dientes/pulgada y con ángulo de presión de  $20^\circ$ .

- Engrane 2: acero grado 1 endurecido por flama,  $S_c = 170\,000$  psi y  $S_t = 45\,000$  psi,  $d_2 = 2.67$  in,  $F = 1.5$  in y  $N_2 = 16$  dientes.
- Engrane 3: acero grado 1 endurecido por completo hasta 300 HB,  $S_c = 126\,000$  psi y  $S_t = 36\,000$  psi,  $d_3 = 12$  in,  $F = 1.5$  in y  $N_3 = 72$  dientes.
- Engrane 4: acero grado 2 carburizado y endurecido,  $S_c = 225\,000$  psi y  $S_t = 65\,000$  psi,  $d_4 = 2.67$  in,  $F = 2.0$  in y  $N_4 = 16$  dientes.
- Engrane 5: acero grado 2 carburizado y endurecido,  $S_c = 225\,000$  psi y  $S_t = 65\,000$  psi,  $d_5 = 12$  in,  $F = 2.0$  in y  $N_5 = 72$  dientes.



## H. Refinamiento manual de mallado en Ansys Workbench

A continuación se muestra una tabla para diferentes tipos de mallados, misma que se utilizó para aproximar el mayor número de nodos/elementos a los permitidos por la licencia para estudiantes de Ansys (pasos descritos y empleados desde las Figuras 4.38 a 4.43).

Tabla I. Refinamiento manual de mallado para diferentes tamaños de elementos.

Tamaño de elemento (in)	# de nodos / elementos	Valores promedio		
		Calidad del elemento	Oblicuidad / asimetría	Relación de aspecto
1	3042	0.54275	0.60107	5.1454
0.75	4266	0.61831	0.52444	4.1306
0.5	7761	0.76232	0.33638	2.7977
0.25	49 867	0.84415	0.22314	1.8768
0.18	128 817	0.84959	0.21338	1.8214
<b>Valores deseables que aseguran un buen mallado del elemento</b>				
# de nodos / elementos máximos = 128 000		Cercano a 1	Cercano a 0	Cercano a 1

Revisando la Tabla I, se puede observar que el valor que se aproxima al número máximo de nodos/elementos permitidos por la licencia para estudiantes es el tamaño de elemento de 0.18 in, al igual que los valores que garantizan una buena calidad de mallado se aproximan satisfactoriamente a los valores mínimos recomendado (sección 3.17.3), por lo que este es el valor elegido para este trabajo de investigación.

