



Universidad Tecnológica de la Mixteca

Diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional de alto rendimiento dinámico basado en una red mecánica con inersor conectado a una estructura tipo viga.

Tesis

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico Automotriz

Presenta:

Montserrat Pérez Martínez

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Huajuapán de León, Oaxaca, Febrero 2024

Dedicatoria

Dedicada a mis padres Silvano y Verónica, por motivarme y por su apoyo incondicional a lo largo de mis estudios.

Agradecimientos

- *A Dios por permitirme el haber llegado hasta este momento de mi formación profesional.*
- *A mi tía Guadalupe por su apoyo y consejos.*
- *Agradezco la confianza y tiempo brindado a quienes formaron parte de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios y Dr. Eduardo Barredo Hernández. De igual forma a mis sinodales, Dr. Mario Márquez Miranda, M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez y al Ing. José Eduardo Cruz Mayo.*
- *Y a todas las personas que de una y otra forma me apoyaron para el logro de mis objetivos.*

Montserrat Pérez Martínez

Febrero 2024

Resumen

En el vehículo, el sistema de suspensión se encarga de mitigar las vibraciones originadas por los movimientos independientes del chasis y de las ruedas, y, por lo tanto, influye en el comportamiento dinámico de todo el vehículo. Las vibraciones que se experimentan en la cabina, el movimiento de la llanta cuando se toma una curva y como estas se adhieren al suelo y en general los comportamientos dinámicos y cinemáticos del chasis y rueda, dependen en gran medida del rendimiento del sistema de suspensión. Por tal motivo, para minimizar las vibraciones causadas se han implementado sistemas de amortiguamiento. Estas vibraciones se pueden reducir acoplando una o más masas secundarias mediante muelles y amortiguadores correctamente sintonizados.

Dentro de estos se encuentran los amortiguadores dinámicos de vibraciones (DVAs), dispositivo pasivo que se fija a una estructura mecánica sometida a espectros de potencia de banda ancha. Este dispositivo resulta muy útil en los campos de la ingeniería civil y mecánica por su diseño sencillo y alta confiabilidad.

Más tarde se introdujo el dispositivo llamado inersor y su principal ventaja es que se puede conseguir un alto nivel de aislamiento de las vibraciones con poca masa física añadida. Es importante mencionar que, diferentes estudios han demostrado que al optimizar los parámetros físicos de los sistemas basados en inersores se logra un rendimiento de control superior en comparación con su contraparte. Por esta razón, en este trabajo se presenta el proceso de calibración y evaluación del rendimiento dinámico de un DVA basado en inersor conectado a una estructura tipo viga. Para evaluar el rendimiento dinámico del dispositivo propuesto, se utiliza la Técnica de los Puntos Fijos Extendida (EFPT) y el criterio de H_{∞} . También se realiza una comparación de ambos métodos, con lo cual se podrá demostrar si el sistema propuesto trabaja adecuadamente en la minimización de la vibración del sistema excitado armónicamente.

Índice general

Dedicatoria.....	I
Agradecimientos	II
Resumen.....	IV
Nomenclatura	VII
Índice de figuras.....	X
Índice de tablas	XII
I. Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Justificación.....	2
1.3 Hipótesis.....	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo general.....	4
1.4.2 Objetivos específicos.....	4
1.5 Metas	4
1.6 Metodología.....	4
1.7 Estructura de la tesis.....	7
II. Estado del arte	9
2.1 Absorbedores dinámicos de vibraciones	9
2.2 Analogía fuerza-corriente	13
2.3 Inersores.....	14
2.3.1 Redes mecánicas con inersores	18
2.3.2 Aplicación del inersor.....	20
III. Marco teórico.....	24
3.1 Análisis dimensional.....	24
3.1.1 Teorema Pi de Buckingham.....	25
3.2 Sistema con excitación armónica.....	27
3.3 Ecuaciones diferenciales parciales para vigas.....	29
3.3.1 Condiciones límite de la viga.....	32
3.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange	33
3.4.1 Función de disipación de Rayleigh	34
3.5 Análisis modal	35
3.6 Teorema de Vieta.....	37

3.7	Matriz de Jacobi	39
3.8	Optimización	40
3.8.1	Matriz Hessiana	41
3.9	Técnica de los puntos fijos	42
3.10	Técnica de los puntos fijos extendida	44
3.11	Criterio H_∞	46
3.11.1	Método de Nishihara	47
IV.	Modelo matemático.....	51
4.1	Respuesta en frecuencia	51
V.	Resultados	57
5.1	Técnica de los puntos fijos extendida	57
5.2	Criterio H_∞	63
VI.	Conclusiones	72
6.1	Trabajos futuros	72
	Apéndice A	75
	Apéndice B	80
	Apéndice C	81
	Bibliografía	83

Nomenclatura

J	Jacobiano
$y_1(t)$	Desplazamiento correspondiente a m del DVA
$y_2(t)$	Desplazamiento correspondiente al inersor
$y(x, t)$	Desplazamiento transversal de la viga
$\frac{\partial \omega}{\partial x}$	Variación en la pendiente entre dos secciones transversales de una viga
\dot{v}	Aceleración
H_f	Hessiano
\mathcal{L}	Lagrangiano
N_{um}	Numerador
D_{en}	Denominador
A	Área de la sección transversal de la viga
b	Inertancia
c	Coefficiente de amortiguamiento
c_1	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente al DVA
c_2	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente a m y al inersor
\mathcal{F}	Función de las velocidades generalizadas o función de disipación de Rayleigh
E	Módulo de elasticidad
$E_{inersor}$	Energía cinética del inersor
F	Magnitud escalar de la fuerza aplicada a las terminales del inersor
$f(x)$	Función espacial
$f(x)g(t)$	Carga distribuida
$f(x, t)$	Fuerza externa por unidad de longitud
F_0	Amplitud de excitación

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	Funciones matemáticas no lineales
Q_k	Fuerzas no-conservativas generalizadas
$g(t)$	Función temporal determinística
h	Aproximación a la norma H_∞ , denotada con doble barra o función propuesta por Nishihara
$H(s)$	Función de transferencia del sistema o respuesta del sistema
I	Momento de inercia centroidal
j	Unidad imaginaria
k	Coefficiente de rigidez
k_1	Rigidez correspondiente al DVA
k_2	Rigidez correspondiente a m y al inersor
L	Longitud total de la viga
M	Momento flexionante
m	Masa asociada al DVA
P_{opt}	Parámetros a optimizar del sistema
q	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA
$Q_i(\omega)$	Frecuencia de la viga
q_k	Coordenadas generalizadas
$R(s)$	Respuesta en frecuencia adimensional del sistema
T	Energía cinética
U	Energía potencial
V	Fuerza cortante
v	Velocidad
V_{adim}	Variables adimensionales
W	Watt, unidad de potencia eléctrica
$Y(s)$	Impedancia mecánica

DVA	Absorbedor dinámico de vibración
FRF	Función de respuesta en frecuencia
IDVA	Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor
ISDVA	Absorbedor dinámico de vibración en serie basado en inersor
LTI	Sistema lineal invariante en el tiempo
NDVA	Absorbedor de vibración dinámico no tradicional
RIDTMD	Amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional
RMS	Valor cuadrático medio
SQP	Programación cuadrática secuencial
TID	Amortiguador de inercia sintonizado
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersor
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado
NIDVA	Absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor

Índice de figuras

Figura 1.1: Metodología de la investigación planteada en esta tesis [5].....	5
Figura 2.1: Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado [39].	9
Figura 2.2: Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional [39].	12
Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto par fuerza-velocidad (F, v), donde $v = v_2 - v_1$ [1].....	13
Figura 2.4: Símbolo del inersor [32].....	15
Figura 2.5: Elementos de analogía fuerza-corriente [33].	15
Figura 2.6: Inersor de husillo de bolas.	16
Figura 2.7: Inersor piñón-cremallera.	16
Figura 2.8: Modelo mecánico del inersor hidráulico [33].....	17
Figura 2.9: Modelo mecánico del inersor rotacional [33].....	17
Figura 2.10: Inersor basado en tubería configurada helicoidalmente.....	17
Figura 2.11: Las redes basadas en inersor empleadas como $Y(s)$ [28].....	18
Figura 2.12: Inersor en serie con amortiguador con resortes de centrado. (a) Diagrama del circuito y (b) realización mecánica [23].	19
Figura 2.13: McLaren MP4-20, ganador del Gran premio de España 2005 conducido por Kimi Raikkonen. LAT Photographic [23].....	20
Figura 2.14: Prototipo de compensador de dirección de motocicleta [36].....	22
Figura 3.1. Péndulo simple [42].	26
Figura 3.2. Sistema masa-resorte-amortiguador.	28
Figura 3.3. Tipos de desplazamientos (o fuerzas): (a) periódico armónico simple; (b) periódico, no armónico; (c) no periódico, transitorio; (d) no periódico, aleatorio [45].	29
Figura 3.4. Viga sometida a vibración transversal [46].	30
Figura 3.5. DCL de un elemento diferencial arbitrario de la viga en un instante de tiempo arbitrario [46].	31
Figura 3.6. Condiciones de frontera comunes para la vibración transversal de una viga [47].....	33
Figura 3.7. Máximos y mínimos de una función arbitraria [61].....	41
Figura 3.8. Gráfica de un DVA clásico en donde se muestran los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de las dos condiciones del sistema (amortiguamiento 0 e infinito) [39].	42
Figura 3.9. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Todas las líneas pasan por los puntos fijos P y Q [39].	43

Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre de la estructura tipo viga acoplada al NIDVA-C4.	51
Figura 5.1. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al NIDVA-C4 vs la relación de frecuencia Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.	60
Figura 5.2. Gráfica de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.....	62
Figura 5.3. Gráfica para los diferentes valores de β obtenidos por la técnica de los puntos fijos extendida.	63
Figura 5.4. Gráfica de $H(\Omega)$ utilizando los parámetros óptimos.....	66
Figura 5.5. Comparación de los resultados obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT) y el criterio H_∞	67
Figura 5.6. Gráfica para los distintos valores de β obtenidos mediante el criterio H_∞	68
Figura 5.7. Comparación de las curvas FRF del NIDVA-C4 y el DVA clásico.	69

Índice de tablas

Tabla 2.1 Analogía fuerza-corriente entre redes eléctricas y mecánicas [1,32].	14
Tabla 3.1: Análisis dimensional de algunos parámetros utilizados en física.	24
Tabla 5.1: Valores planteados para cada variable independiente.	58
Tabla 5.2: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional.	59
Tabla 5.3: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.	61
Tabla 5.4: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .	62
Tabla 5.5. Resultados numéricos de los parámetros óptimos obtenidos mediante el método de Nishihara.	66
Tabla 5.6: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .	67
Tabla 5.7: Resumen de los valores numéricos para los parámetros óptimos al modificar el valor de β .	68

Capítulo I

I. Introducción

Una viga es un elemento estructural que normalmente se coloca en posición horizontal, aunque dependiendo de la aplicación, también se puede utilizar en configuraciones inclinadas. La función principal de una viga es la de soportar cargas transversales. La viga se emplea generalmente en maquinaria pesada, vehículos, así como en construcciones. Es evidente que la estructura tipo viga es un elemento típico en ingeniería mecánica y civil, que también es uno de los modelos más simples de estructuras continuas.

Las máquinas generan vibraciones debido a las actividades que realizan. Estas están formadas por diversas piezas que trabajan en conjunto para lograr un propósito, y la vibración es la respuesta de un sistema mecánico a la acción de una perturbación de fuerza armónica o aleatoria. Debido a que cada componente de la máquina produce vibraciones con una determinada frecuencia y amplitud, se puede hacer un diagnóstico de las vibraciones en el sistema para determinar el componente defectuoso y predecir si un componente se encuentra a punto de sufrir una falla.

Los autos están constituidos por muchas partes mecánicas, como por ejemplo el sistema de dirección, tren de velocidades, mecanismos de sujeción del sistema de suspensión, elementos mecánicos móviles y fijos, etc. Cuando el motor genera vibraciones que coinciden con alguna de sus frecuencias naturales sucede el fenómeno de resonancia; es por ello que los diseñadores de las carrocerías deben tener en cuenta que la fuerza desarrollada en el motor se encuentre alejada de las frecuencias naturales de los diversos componentes de los automotores.

Por lo tanto, las vibraciones en los vehículos pueden causar fatiga en toda la máquina o en solo una parte de ella ocasionando fracturas al igual que en los edificios. Por otro lado, las vibraciones también pueden ser perjudiciales para el cuerpo humano, sobre todo por sus efectos nocivos sobre el sistema nervioso. Para el obrero que trabaja cotidianamente en un ambiente sujeto a vibraciones, los efectos nocivos se presentan bajo la forma de fatiga, disminución de la productividad y a la larga una enfermedad. Cuando se transmite vibración mecánica al sistema humano, supone riesgos para la salud, en particular, problemas vasculares, de huesos o articulaciones, nerviosos o musculares.

Cuando un sistema mecánico, como máquinas y construcciones civiles están bajo la acción de alguna fuerza externa, se pueden emplear distintos dispositivos de absorción o disipación de energía para

controlar y disminuir las variaciones no deseadas de un movimiento periódico. Los DVAs (absorbedores dinámicos de vibración) es uno de los dispositivos que se utilizan para controlar las vibraciones.

Entre estos dispositivos, se encuentra el inersor, que de acuerdo con Smith [1], se define como un dispositivo mecánico que almacena energía cinética por medio de volantes de inercia (discos inerciales) modificando las frecuencias naturales de los sistemas, y su fuerza de reacción es proporcional al producto de la constante de inercia rotacional por la diferencia de aceleración de sus terminales.

1.1 Planteamiento del problema

Los DVAs son sistemas anti-vibratorios importantes en el campo de la absorción de vibración estructural, y en el desarrollo de modelos matemáticos que permiten el estudio y análisis de sistemas vibratorios tales como estructuras metálicas, motores, máquinas rotativas, turbinas, automóviles, etc.

Los amortiguadores suelen convertir la energía cinética en energía térmica, lo que significa que la función de un amortiguador es producir un mecanismo de disipación de energía mecánica. Cuanto mejor sea la amortiguación, menor será la respuesta estructural del sistema. De esta manera la suspensión en los automóviles, que es el sistema que conecta el chasis del automóvil a las ruedas, se encarga de hacer que el automóvil se mueva con suavidad y fluidez, ya que es el sistema encargado de absorber la vibración producida por los baches del camino. La eficiencia con la que realiza esta tarea se refleja en el movimiento del coche, ya sea suave o rígido.

En este trabajo se propone un novedoso absorbedor de vibraciones dinámico basado en inersor no tradicional (NIDVA) de alto rendimiento, que se obtiene analizando las propiedades dinámicas de los DVA en serie basados en inersor (ISDVAs). Los ISDVAs está constituido por dos DVAs en serie y un inersor que se conecta entre el segundo DVA y la tierra mecánica. Para estudiar el comportamiento dinámico de los NIDVAs, se obtienen modelos matemáticos no-dimensionales.

1.2 Justificación

Las máquinas en operación vibran o producen un movimiento oscilatorio de baja amplitud por naturaleza. Esto se debe a las fuerzas inerciales que se generan en su interior, ocasionando daños por fatiga en los ejes de las máquinas rotatorias, el desajuste paramétrico de sus elementos móviles, entre otros. Es posible supervisar este comportamiento de forma continua a través de sistemas de

monitoreo de vibración, que permiten detectar cuando se producen perturbaciones nocivas en la máquina, para efectivamente mitigarlas y evitar un daño estructural. La frecuencia es una característica simple y significativa en este análisis, se define como el número de ciclos completos de vibración en un periodo de tiempo. La amplitud de la vibración indica la importancia y gravedad del problema, que proporciona información adecuada para describir la condición de operación de la máquina. Para mitigar las vibraciones se utilizan los DVAs que se dividen en tres tipos: pasivos, activos y semi-activos. El DVA pasivo funciona bajo parámetros físicos fijos y correctamente sintonizados. En él no se pueden modificar las características de sus elementos mecánicos (resorte y amortiguador). Estos funcionan bien a baja frecuencia de excitación. El DVA semi-activo puede generalmente modificar solo la característica de amortiguamiento del amortiguador de fluido viscoso con los mínimos requerimientos de energía. A pesar de que el rendimiento de control de los actuadores semi-activos se ve comprometido por el efecto de saturación, ellos pueden emular el comportamiento dinámico de un actuador activo. El DVA activo puede funcionar tanto a baja como a alta frecuencia, ya que pueden modificar las características de rigidez y amortiguamiento del sistema. Sin embargo, se requiere de mayor energía para lograr ambos objetivos. En la actualidad se ha agregado un nuevo dispositivo llamado inersor el cual tiene un mejor rendimiento de absorción de vibración.

Por lo consiguiente, en este trabajo se presenta un análisis para el control de vibraciones de una estructura tipo viga sometida a excitación armónica acoplada a un NIDVA-C4. Se obtuvieron ecuaciones simplificadas para los parámetros de diseño óptimo del NIDVA, a partir de la técnica de los puntos fijos. También, se implementó la optimización del índice de rendimiento H_{∞} y mediante el método de Nishihara se obtuvieron los parámetros de diseño óptimos del NIDVA-C4 de forma numérica. De hecho, ninguna de las ecuaciones que se desarrollaron en la tesis se han reportado en la literatura. Adicionalmente, se presenta la ampliación de supresión de vibración que provee el NIDVA-C4 en comparación con el DVA clásico.

1.3 Hipótesis

Utilizando las técnicas de optimización EFPT y el criterio de rendimiento H_{∞} se obtendrá la minimización de las amplitudes de vibración, y un incremento en el ancho de banda de la supresión de vibración en estructuras tipo viga cuando se utiliza el NIDVA-C4 en comparación con el DVA clásico.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar teóricamente un absorbedor de vibración no tradicional de alto rendimiento para disminuir la vibración de una estructura tipo viga.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Obtener el modelo dinámico adimensional de la estructura tipo viga con el absorbedor de vibración no tradicional NIDVA-C4.
2. Aplicar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto.
3. Obtener numéricamente soluciones óptimas para el criterio de rendimiento H_∞ con el propósito de minimizar los picos resonantes de la respuesta dinámica de la estructura tipo viga.
4. Comparar los resultados obtenidos a partir de las técnicas de optimización empleadas.

1.5 Metas

- i. Desarrollo del modelo matemático del sistema a estudiar mediante la implementación del formulismo Euler-Lagrange.
- ii. Mediante la implementación de las técnicas de EFPT y H_∞ se pretende lograr un diseño teórico de un sistema absorbedor de vibraciones de alto rendimiento dinámico.
- iii. Realizar una comparación de los resultados obtenidos a partir de la implementación de las técnicas de optimización, mediante gráficas de la función de respuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor.

1.6 Metodología

Se utilizará la metodología del método de investigación tecnológica presentada por Canales et. al [5]. En la Figura 2 se presenta el bosquejo de las fases a seguir:



Figura 1.1: Metodología de la investigación planteada en esta tesis [5].

- i. **Documentación.** Esta etapa tiene gran importancia debido a que considera la búsqueda, recolección y clasificación de la información sobre un tema en concreto, consecutivamente se utilizará de sustento para el desarrollo de un producto o tema de investigación. La información obtenida en esta fase servirá para la elaboración del estado del arte del tema de investigación, al igual para desarrollar el marco teórico el cual contendrá leyes físicas, técnicas y metodologías que servirán de base para el desarrollo de la tesis. En este trabajo de tesis se investigará y diseñará teóricamente un absorbedor de vibración no tradicional de alto rendimiento para mitigar vibración de banda ancha. Al mismo tiempo, es necesario conocer las técnicas de optimización disponibles en la literatura para el diseño óptimo de los absorbedores de vibración no tradicional de alto rendimiento.
- ii. **Determinación del problema.** Es una tarea mediante la cual se especifica claramente y de un modo concreto sobre qué se va a realizar la investigación. En el caso de este trabajo, el problema es el control de la vibración de una estructura tipo viga, esto se consigue con la implementación de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor (NIDVA). Del mismo modo, para el diseño óptimo del absorbedor de vibración se necesita de la aplicación de técnicas de optimización para obtener los parámetros óptimos con los cuales se minimicen las máximas amplitudes de vibración del sistema.
- iii. **Creación de la hipótesis.** Es la parte en la que el investigador genera una suposición que consecutivamente será confirmada o rechazada una vez que la investigación pase por el estudio de los resultados. Además, esta permite someter a prueba los hechos

mediante técnicas matemáticas y físicas, y de esa manera pueden surgir nuevas teorías, las cuales se basan en el marco teórico. Al mismo tiempo la hipótesis indica que hay que partir de lo existente para llegar a algo ignorado. Para este trabajo de tesis la hipótesis planteada es la siguiente:

- Utilizando las técnicas de optimización EFPT y el criterio de rendimiento H_{∞} se obtendrá la minimización de las amplitudes de vibración, y un incremento en el ancho de banda de la supresión de vibración en estructuras tipo viga cuando se utiliza el NIDVA-C4 en comparación con el DVA clásico.

- iv. **Definición de método.** Para el trabajo de tesis a desarrollar se implementará el formulismo Euler-Lagrange para el desarrollo del modelo matemático que predice el comportamiento dinámico de la estructura tipo viga con el NIDVA-C4. Después se aplicará la técnica de optimización de los puntos fijos extendida con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto. Posteriormente, mediante la implementación del criterio de rendimiento H_{∞} , se pretende obtener soluciones óptimas para el diseño del NIDVA-C4 de forma numérica.
- v. **Resolución, validación y verificación.** Mediante el uso de herramientas matemáticas, el modelo matemático es sometido a diferentes consideraciones física y matemáticas, que demuestren la efectividad de los métodos empleados. En función de los resultados obtenidos se deberá determinar si el proceso o método estudiado es adecuado o no. Esta evaluación se debe comparar utilizando las técnicas de optimización EFPT y el criterio de rendimiento H_{∞} .
- vi. **Análisis de resultados y conclusiones.** Obtenidos los resultados analíticos y numéricos se comparan minuciosamente con los reportados en la literatura y se replantea la idea de si los resultados obtenidos confirman o niegan la hipótesis. Así mismo se evalúa si los objetivos y metas propuestos se cumplieron. Cuando no se cumplen por completo se recomienda posibles soluciones y se responde a la incógnita de por qué no fue posible su resolución completamente.

- vii. **Redacción del informe final.** Cuando se finaliza el desarrollo de la investigación, se elaborará la redacción de la tesis contemplando cuatro aspectos importantes: objetivo central del trabajo, descripción breve de la metodología empleada, resumen de los resultados obtenidos y conclusiones más relevantes.

1.7 Estructura de la tesis

La tesis está organizada por capítulos que se especifican a continuación:

- En el Capítulo I se introduce al tema de investigación, destacando la importancia de las vibraciones mecánicas. Así mismo, se muestra el planteamiento del problema, la justificación, la hipótesis, los objetivos, metas y metodología a seguir en el desarrollo del tema de investigación.
- En el Capítulo II se presenta la investigación reportada en la literatura y se puntualizan los hechos relacionados que dieron comienzo a las investigaciones de los absorbedores dinámicos de vibración. En segundo término, se añade información sobre los arreglos mecánicos y aplicaciones de los inersores.
- En el Capítulo III se presenta toda la teoría (teoremas, técnicas y leyes) en la que se basa el desarrollo de la tesis. Se desarrolla un estudio de los temas: análisis dimensional (teorema II de Buckingham), ecuaciones de Euler-Lagrange, análisis modal y teorema de Vieta. También, se utilizan las técnicas de optimización (EFPT y el criterio de rendimiento H_{∞}).
- En el Capítulo IV, se presenta el desarrollo matemático del modelo de la estructura tipo viga propuesta en el trabajo de tesis.
- En el Capítulo V se muestran los resultados analíticos y numéricos obtenidos a través de las técnicas de optimización.
- En el Capítulo VI, se presentan las conclusiones con base en los resultados adquiridos con la elaboración de la tesis. Así mismo, se construyen propuestas para futuros trabajos que se pueden llevar a cabo.

Capítulo II

II. Estado del arte

2.1 Absorbedores dinámicos de vibraciones

Una máquina o las partes móviles de ésta, sobre la cual actúa una fuerza alterna de frecuencia *constante*, puede experimentar vibraciones indeseables cuando está cerca de entrar en resonancia. Para mejorar esta situación, se intenta primero la eliminación de la fuerza. A menudo esto no es ni práctico ni posible. También, se puede cambiar la masa o la constante de resorte del sistema en un intento por alejarse de las condiciones de resonancia, aunque a veces esto tampoco resulta práctico. La tercera posibilidad consiste en la aplicación del absorbedor dinámico de vibraciones inventado por Frahm en 1909 [6]. Con lo cual se pretende que el absorbedor disminuya las amplitudes de vibración de la masa principal debido a un pequeño sistema masa-resorte que contrarresta la fuerza.

En diferentes campos de la ingeniería se pretende eliminar las vibraciones para lo cual se recurrió a la implementación de dispositivos mecánicos nombrados absorbedores dinámicos de vibración (DVAs, por sus siglas en inglés) o amortiguadores de masas sintonizadas (TMDs, por sus siglas en inglés). Así pues, estos dispositivos se forman a partir de un sistema que puede estar constituido de hasta tres elementos, es decir, una masa, un amortiguador de fluido viscoso y un resorte, tal y como se muestra en la Figura 2.1 [6].

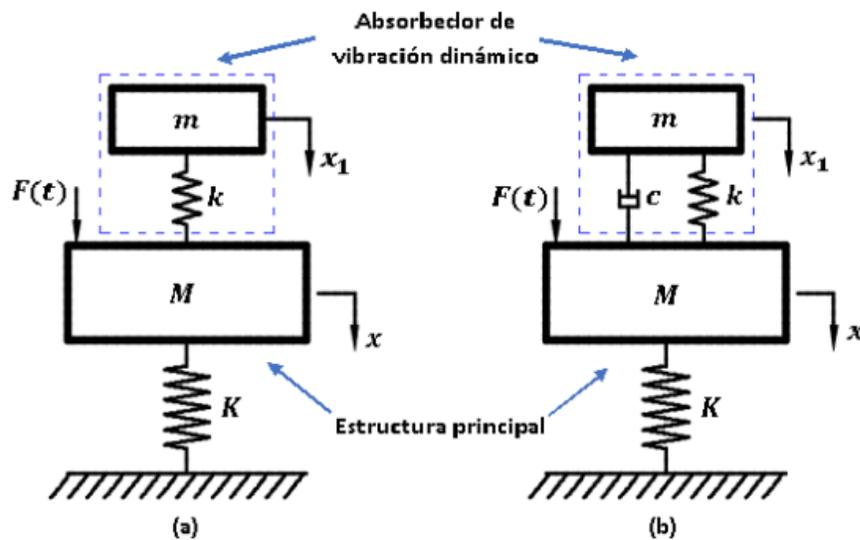


Figura 2.1: Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado [39].

Los absorbedores dinámicos de vibraciones (DVAs) son dispositivos utilizados para reducir las amplitudes de vibración de un sistema primario a determinadas frecuencias, especialmente cerca de la frecuencia de resonancia. El DVA se puede caracterizar como un sistema de masa-amortiguador-resorte que, cuando está correctamente sintonizado, reduce el movimiento en estado estacionario del sistema vibratorio primario [7].

Se encontró en [3] que los absorbedores dinámicos de vibración (DVAs) en arreglos en serie son más eficientes y robustos en comparación con los DVAs en paralelo. Además, que los DVAs en paralelo tienen un inconveniente en aplicaciones prácticas, el espacio destinado para su implementación es reducido.

En 1928, Ormondroyd y Den Hartog [7] trabajaron por primera vez en la óptima sintonización de un absorbedor por medio de la técnica de los puntos fijos. Además, demostraron que la introducción de un amortiguador no sólo disipa energía, sino que también aumenta el intervalo de frecuencias en el que el dispositivo es eficaz. Posteriormente en 2005, Ozer y Royston [8] extrapolaron esta práctica a sistemas mecánicos de múltiples grados de libertad.

La técnica de los puntos fijos sintoniza un DVA tal que los factores de magnificación de dos puntos fijos se igualan. La curva más favorable es la que pasa con su tangente horizontal a través del más alto de los dos puntos P o Q . La amplitud de resonancia mejor obtenible es la ordenada de ese punto [9].

Nishihara y Asami [10,11] utilizaron la medida de rendimiento H_∞ para encontrar la solución aproximada a través del método de perturbación y el teorema de Vieta para el desarrollo de soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. En la optimización H_∞ el DVA se diseña de forma que se minimice el factor de magnificación de amplitud máxima del sistema primario.

El TMD, es una forma eficaz de añadir amortiguación en estructuras y máquinas. El estudio analítico se lleva a cabo para el sistema primario no amortiguado, y se investiga numéricamente para el sistema primario amortiguado. Demostrando que, para aplicaciones prácticas, una sintonización adecuada del TMD permite conseguir una reducción en la respuesta en estado estacionario de alrededor del 20% respecto a la respuesta conseguida con un amortiguador clásico sintonizado [12]. Las vibraciones producen un movimiento relativo entre la estructura principal y la masa auxiliar, favoreciendo así la disipación de energía a través del amortiguador [13].

Krenk [14] demostró que cuando el amortiguamiento impuesto es inferior al valor límite, ambos modos tienen idéntica relación de amortiguamiento. La amortiguación óptima se determina mediante un análisis combinado de la amplificación dinámica del movimiento de la estructura primaria y del movimiento relativo de la masa del amortiguador. El parámetro de amortiguación óptimo resultante es aproximadamente un 15% superior al valor clásico, y da lugar a propiedades mejoradas para el movimiento de la masa del amortiguador.

La flexibilidad estructural desempeña un papel importante cuando el absorbedor de vibraciones está situado en un lugar en el que otros modos contribuyen considerablemente a los desplazamientos estructurales [15]. Por otro lado, Kren y Hogsberg [16] sugiere que los procedimientos clásicos de calibración suponen que la respuesta de la estructura puede representarse mediante un único modo de vibración. Sin embargo, para los modos de vibración superiores o para los absorbedores basados en inersores, que actúan sobre el movimiento estructural relativo, la influencia de los modos de vibración no resonantes suele ser lo suficientemente grande como para deteriorar significativamente el rendimiento del absorbedor. Debido a esto se obtiene una representación cuasi-dinámica de los modos no resonantes en términos de una flexibilidad de fondo y de un coeficiente de inercia de fondo. Esto se desarrolla en un procedimiento de dos pasos, en el que primero se obtiene un conjunto de parámetros equivalentes del absorbedor y posteriormente, se modifican en función de la flexibilidad y la inercia de fondo. La precisión de la estrategia de calibración unificada se ilustra mediante ejemplos numéricos, que demuestran que se alcanza efectivamente el nivel deseado de amortiguación.

Ren [17], Liu y Liu [18], propusieron otra forma variante del DVA clásico. Donde el elemento amortiguador no está conectado a la estructura primaria, sino a la tierra (una estructura de base) ver Figura 2.2. Este dispositivo se conoce como absorbedor de vibración dinámico no tradicional (NDVA, por sus siglas en inglés), no es de uso común, pero en algunos casos resulta ser ventajoso debido a que la vibración de la estructura primaria se puede suprimir más efectivamente que utilizando un DVA de similar relación de masas. Por otro lado, Wong y Cheung [19,20] utilizaron la técnica de los puntos fijos (FPT) para obtener los parámetros óptimos del NDVA para suprimir la vibración de la masa de la estructura debida al movimiento del suelo (vibración armónica). Además, Cheung y Wong [21,22] mostraron soluciones para los parámetros óptimos de NDVA utilizando los criterios de H_∞ y H_2 .

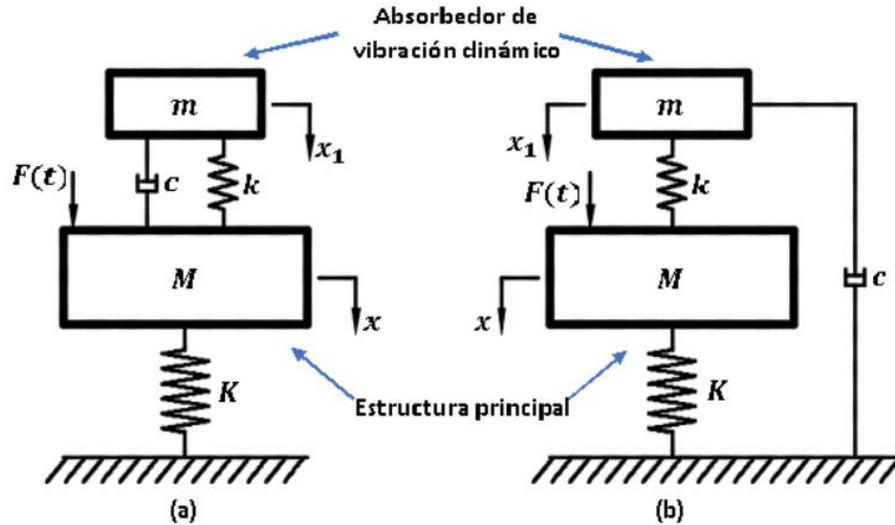


Figura 2.2: Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional [39].

Actualmente, se tiene un nuevo dispositivo mecánico para el control de vibración debido al éxito que tuvo en la aplicación de la Fórmula 1, denominado como inersor [1,16,23,24]. Se ha demostrado teóricamente que el inersor mejora la respuesta dinámica y el ancho de banda efectivo del DVA cuando se acopla en serie o paralelo con resortes y amortiguadores [25]. De hecho, en 2012 Ikago et al. [26] presentaron un nuevo dispositivo para el control de vibración sísmica llamado amortiguador de masas viscosas sintonizado (TVMD), el cual resultó ser más eficaz que el DVA. Después, Lazar et al. [27] propusieron el amortiguador inercial sintonizado (TID) para el control de vibración en estructuras de ingeniería civil sometidas a excitación en la base.

Por otro lado, Hu y Chen [28] demostraron que la adición de un solo inersor al TDVA (absorbedor dinámico de vibraciones tradicional) no aporta beneficio para el rendimiento H_{∞} . Por lo cual se tiene la necesidad de introducir otro elemento junto con el inersor en el TDVA. Por consiguiente, expusieron tres configuraciones que mejoran el desempeño dinámico de los absorbedores de vibraciones dinámicos basados en inersor (IDVAs): la configuración C3 (conexión en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador), la configuración C4 (conexión de un inersor conectado en serie a un arreglo en paralelo de resorte-amortiguador) y la configuración C6 (conexión de un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de amortiguador-inersor).

Más tarde, Barredo et al. [29] propusieron la técnica de los puntos fijos extendida. Además, se demostró que la técnica de Den Hartog no es adecuada para calcular el factor de amortiguamiento óptimo que aplanan la curva de respuesta en frecuencia de los IDVAs.

2.2 Analogía fuerza-corriente

La analogía fuerza- corriente respeta la forma de conexión (es decir, serie, paralelo, etc.) de modo que los diagramas eléctricos y mecánicos son idénticos [1], esto significa que el inersor permite trasladar los circuitos eléctricos a los mecánicos de forma análoga.

Una red mecánica (idealizada) consiste en elementos mecánicos (como resortes, masas, amortiguadores y palancas) que están interconectados de manera rígida. Es habitual restringir el movimiento para que sea paralelo a un eje fijo y relativo a un punto de referencia fijo en un marco inercial llamado suelo. El par de puntos finales del resorte y el amortiguador se denominan nodos (o terminales). Para la masa, una terminal es la posición de su centro de gravedad, mientras que la otra terminal es el suelo [1].

Un puerto es un par de nodos (o terminales) en un sistema mecánico al que se le aplica una fuerza F igual y opuesta y que experimenta una velocidad relativa v . Alternativamente, se puede aplicar una velocidad que da como resultado una fuerza [1].

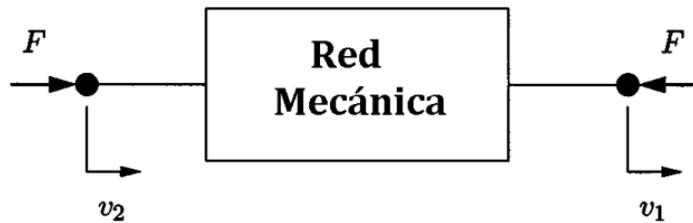


Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto por fuerza-velocidad (F, v) , donde $v = v_2 - v_1$ [1].

La Figura 2.3 es un diagrama de cuerpo libre de una red mecánica de un puerto (dos terminales) que ilustra la convención de signos por la cual F positiva da una fuerza de compresión y una $v = v_2 - v_1$ positiva ($v_2 > v_1$) corresponde a los nodos que se mueven juntos. El producto de F y v tiene unidades de potencia $[W]$ y se denomina por fuerza-velocidad F, v . En general, no es necesario que ninguno de los nodos de un puerto esté conectado a tierra [1].

También la analogía fuerza-corriente se le conoce como *movilidad* entre redes eléctricas y mecánicas, y se puede representar como sigue en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Analogía fuerza-corriente entre redes eléctricas y mecánicas [1,32].

Sistema mecánico	Equivalencia	Sistema eléctrico
Fuerza	↔	Corriente
Velocidad	↔	Voltaje
Tierra mecánica	↔	Tierra eléctrica
Resorte	↔	Inductor
Amortiguador	↔	Resistencia
Energía cinética	↔	Energía eléctrica
Energía potencial	↔	Energía magnética
Masa	↔	Capacitor a tierra

La analogía fuerza corriente es más profunda que las correspondencias presentadas en la Tabla 2.1 debido al concepto de variables transversales. En esencia, una variable pasante (como fuerza o corriente) implica un único punto de medición y requiere que el sistema se corte en ese punto para realizar la medición. Por el contrario, una variable transversal (como la velocidad o el voltaje) se puede medir sin entrar en el sistema y la cantidad relevante para el análisis de la red es la diferencia de la variable entre dos puntos, incluso si un punto es el suelo. En [30] se proporciona un enfoque general para el análisis de redes basado en dicho formalismo. Una consecuencia es que los métodos de análisis de mallas y nodos se pueden aplicar a redes mecánicas.

Históricamente, la masa es vista como el elemento mecánico correspondiente al capacitor en los sistemas eléctricos. Sin embargo, de la Segunda ley de Newton, la aceleración de la masa es relativa en un punto fijo en el marco de inercia. Esto significa que una de las terminales de la masa es el suelo y la otra terminal es el centro de la masa [32].

2.3 Inersores

Firestone [31], considera que cada masa en un sistema mecánico lineal tiene dos terminales, uno fijo en la masa y otro fijo en el marco de referencia, todo sistema mecánico lineal se reduce a una multiplicidad de circuitos mecánicos cerrados a los que se relacionan fuerzas y velocidades similares a las que se pueden aplicar las leyes de Kirchhoff. Esta nueva analogía entre sistemas mecánicos y eléctricos condujo a un nuevo dispositivo el *inersor*.

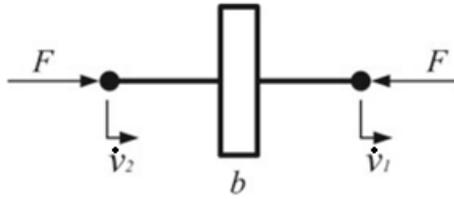


Figura 2.4: Símbolo del inersor [32].

El inersor fue propuesto por el profesor Malcolm C. Smith de la universidad de Cambridge, dispositivo mecánico de dos terminales, el cual se distingue por almacenar energía cinética rotacional.

La fuerza que se desarrolla en un inersor se escribe como [32]:

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (2.1)$$

Donde $v_2 > v_1$ y la constante de proporcionalidad b es la inercia.

La energía almacenada en el inersor se puede cuantificar como [32]:

$$E_{inersor} = \frac{1}{2}b(v_2 - v_1)^2 \quad (2.2)$$

El inersor es el dispositivo faltante entre la analogía de los sistemas mecánicos y eléctricos, en donde su semejante es el capacitor como se puede ver en la Figura 2.5.

Mecánico	Eléctrico
<p>Resorte</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	<p>Inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$
<p>Masa</p> $F = m \frac{dv_2}{dt}$	<p>Capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$
<p>Amortiguador</p> $F = c(v_2 - v_1)$	<p>Resistor</p> $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$

Figura 2.5: Elementos de analogía fuerza-corriente [33].

Un inersor puede estar compuesto por un conjunto de elementos mecánicos tales como piñón, cremallera, engranajes y volantes de inercia [3,23,32,33].

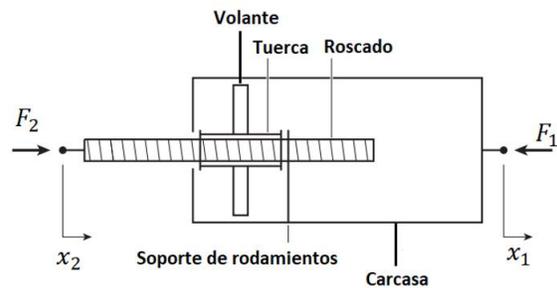
Smith [1] establece una serie de condiciones prácticas que se deben cumplir para que el inersor ofrezca un rendimiento satisfactorio. Lo más importante es que el dispositivo debe tener una masa física limitada, independiente de la cantidad de inercia necesaria, y debe funcionar en cualquier orientación espacial y movimiento.

Existen diferentes tipos de diseño de inersores, entre los cuales se encuentran:

1. Inersor de husillo de bolas



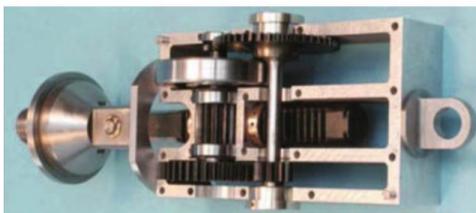
(a) Implementación física elaborada en el Departamento de ingeniería de la Universidad de Cambridge [23].



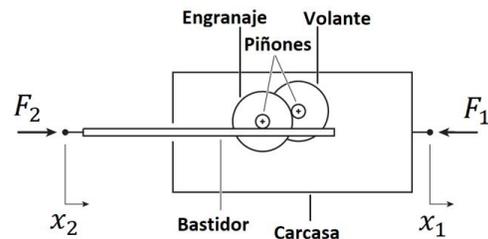
(b) Modelo mecánico del inersor husillo de bolas [33].

Figura 2.6: Inersor de husillo de bolas.

2. Inersor de piñón-cremallera



(a) Realización física fabricado en los talleres del Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [32].



(b) Modelo mecánico del inersor piñón-cremallera [33].

Figura 2.7: Inersor piñón-cremallera.

3. Inersor hidráulico

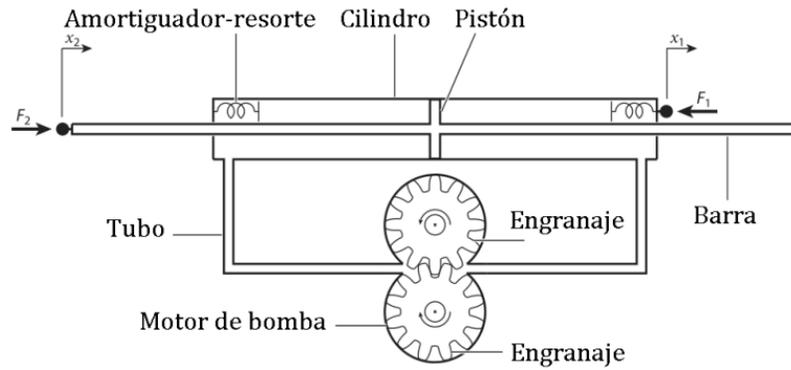


Figura 2.8: Modelo mecánico del inersor hidráulico [33].

4. Inersor rotacional

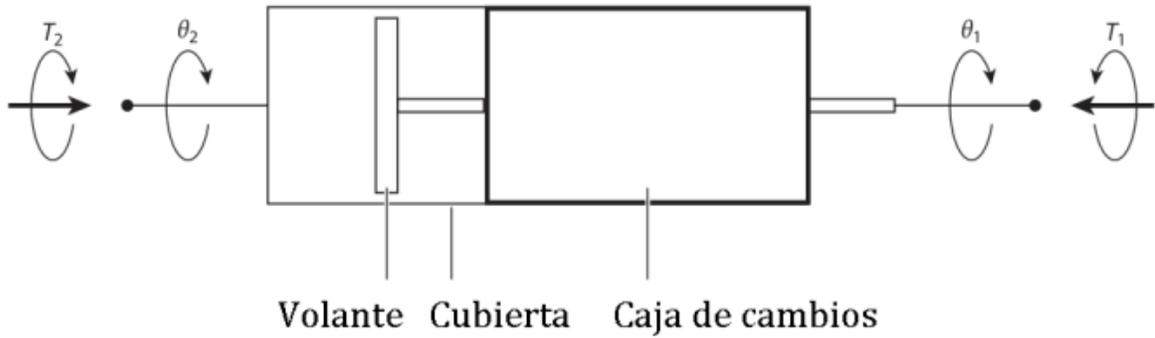
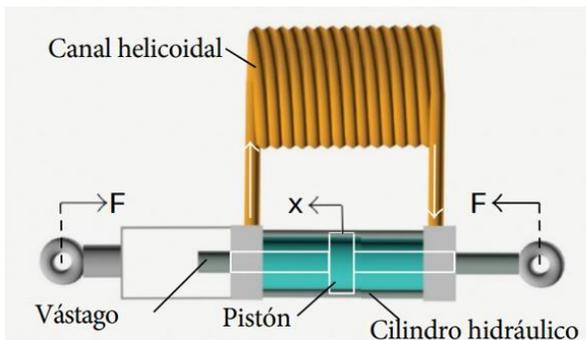


Figura 2.9: Modelo mecánico del inersor rotacional [33].

5. Inersor helicoidal



(a) Modelo mecánico del inersor de fluido [34].



(b) Implementación del inersor de fluido magnetoreológico [3].

Figura 2.10: Inersor basado en tubería configurada helicoidalmente.

2.3.1 Redes mecánicas con inersores

Una red mecánica está formada por componentes mecánicos conectados entre sí, como resortes, masas y amortiguadores. El movimiento frecuentemente está restringido y fijado a un punto de referencia. El enfoque principal es optimizar algunas redes mecánicas basadas en inersor que poseen estructuras más complejas que las redes convencionales. Las redes mecánicas propuestas se pueden obtener utilizando la síntesis de redes o dando algunas redes de estructura fija [32].

Entre los arreglos se encuentran:

- ◆ C_1 : arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.
- ◆ C_2 : arreglo en serie de un inersor y un amortiguador.
- ◆ C_3 : arreglo en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador.
- ◆ C_4 : arreglo en serie de un inersor con un arreglo en paralelo de un resorte y un amortiguador.
- ◆ C_5 : arreglo en serie de un amortiguador con un arreglo en paralelo de un resorte y un inersor.
- ◆ C_6 : arreglo en serie de un resorte con un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.

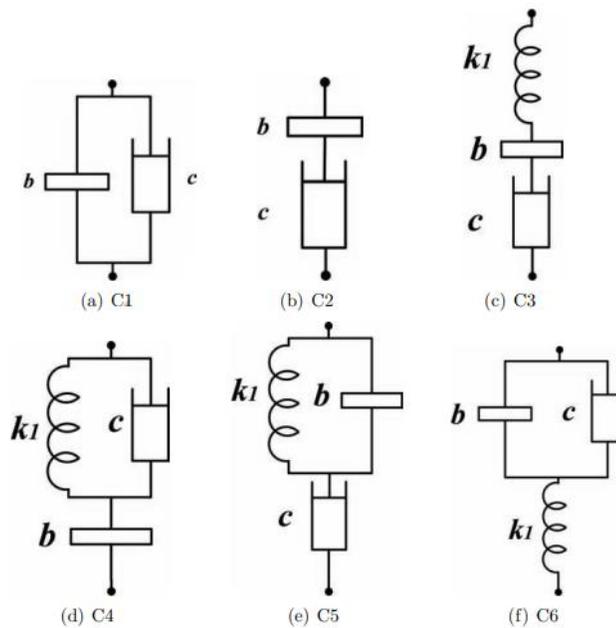


Figura 2.11: Las redes basadas en inersor empleadas como $Y(s)$ [28].

La Figura 2.12 muestra una red mecánica específica junto con una realización física construida en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [23].

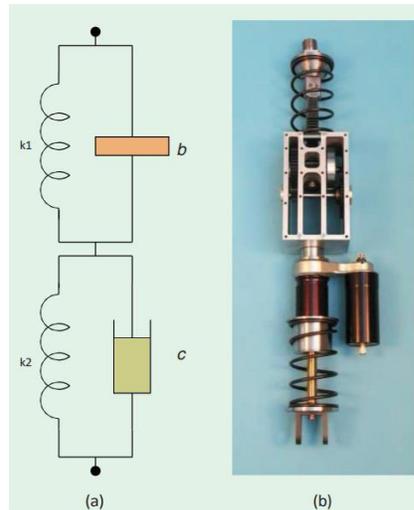


Figura 2.12: Inersor en serie con amortiguador con resortes de centrado. (a) Diagrama del circuito y (b) realización mecánica [23].

Además, los DVAs basados en redes mecánicas con inersor han tenido un buen desempeño en el control del modo dominante de las estructuras SDOF. Hu y Chen evaluaron el rendimiento dinámico de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor (IDVAs) a través de los índices de rendimiento H_∞ y H_2 y encontraron que las redes mecánicas etiquetadas como C_3 , C_4 y C_6 mejoraron el rendimiento en más de un 10 y un 20 % en comparación con el DVA clásico [28,69].

En [2], se encontró que considerando el rango de relación de masa del NIDVA-C4 en comparación con el amortiguador de vibraciones dinámico (IDVA-C6), los amortiguadores de vibraciones inerciales de masa dual y el DVA clásico, el NIDVA-C4 es mejor, cuando las estructuras SDOF están sujetas a vibraciones armónicas y aleatorias. Comparando el rendimiento del NIDVA-C4 y el NIDVA-C3 con el del IDVA-C6, se obtienen mejoras del 2-15% y el 1-6% de reducción de vibraciones para el NIDVA-C4 y el NIDVA-C3, respectivamente, y 16 % en comparación con el NIDVA-C6. Cuando se trata del caso de aceleración aleatoria en la base de la estructura SDOF, el NIDVA-C4 tiene mejor rendimiento en comparación con el IDVA-C6 y el clásico amortiguador dinámico de vibraciones (DVA). Este dispositivo solo se puede utilizar para la amortiguación de vibraciones en edificios o sistemas mecánicos fijos.

Siguiendo estas consideraciones, se encontró en [2] que los absorbedores de vibraciones dinámicas (DVA) conectados en serie son más eficientes que los DVA conectados en paralelo. Además del hecho de que los DVA paralelos carecen de aplicaciones prácticas, la ubicación dada para su implementación se reduce.

2.3.2 Aplicación del inersor

Ya que estas redes mecánicas ofrecen una buena robustez para suprimir vibraciones aleatorias de banda ancha. Se han utilizado en diferentes aplicaciones de ingeniería, como sistemas de suspensión de automóviles que utilizan un TID, en cables, estructuras de ingeniería civil, estructuras de vigas tipo Euler- Bernoulli, turbinas eólicas, etc.

El “J-damper” un dispositivo que se desarrolló inicialmente para las suspensiones de alto rendimiento de los coches de carreras de la Fórmula 1, como se observa en la Figura 2.13 y su historia se remonta a trabajos académicos sobre circuitos mecánicos y eléctricos [23,34]. El objetivo final del dispositivo es mantener en todo momento el máximo contacto de las gomas con el asfalto. Corrió por primera vez con McLaren en 2005, cuando Kimi Raikkonen logró una victoria para el equipo en el Gran Premio de España.



Figura 2.13: McLaren MP4-20, ganador del Gran premio de España 2005 conducido por Kimi Raikkonen. LAT Photographic [23].

Ramakrishnan et al. [35] investigan las suspensiones pasivas de vehículos con inersores teniendo en cuenta múltiples requisitos de rendimiento, como el confort de marcha, la deflexión de la

suspensión y el agarre de los neumáticos. El inersor se ha aplicado a diversos sistemas mecánicos, como las suspensiones de vehículos, los sistemas de dirección de motocicletas, las suspensiones de trenes y el control de vibraciones en edificios [24, 38].

De acuerdo con Yujie et al. [4], la suspensión ISD puede suprimir significativamente la vibración de la entrada de la carretera. El RMS de la aceleración de la carrocería se puede reducir en un 4% como máximo, el RMS de la deflexión de la suspensión se puede reducir en un 16% como máximo y el RMS de la carga dinámica de los neumáticos se puede reducir en un 6% como máximo. Al mismo tiempo, los valores de la PSD de la aceleración de la carrocería, la deflexión de la suspensión y la carga dinámica de los neumáticos disminuyen en comparación con la suspensión pasiva tradicional.

La configuración C4 (el resorte está en paralelo con el amortiguador y en serie con el inersor) se puede tomar como base para el diseño de la suspensión del vehículo. En la nueva suspensión ISD, la estructura TID sustituye al amortiguador frente a la suspensión pasiva.

Establecer los ajustes del amortiguador que proporcionen un compromiso óptimo entre la amortiguación de los modos de cabeceo y serpenteo es una cuestión de considerable interés. Las características dinámicas de las motocicletas de alto rendimiento pueden mejorarse sustituyendo el amortiguador de dirección convencional por un compensador de dirección mecánico pasivo. Los compensadores de dirección son redes mecánicas formadas por muelles, amortiguadores e inersores. Los compensadores muestran el potencial de mejorar significativamente la amortiguación de los modos de cabeceo y serpenteo [36].

Este dispositivo rotacional emplea una caja de engranajes epicicloidal conectada a un volante de inercia a través de un acoplamiento de fluido para realizar un resorte-amortiguador-inersor en serie, que correspondería a la red mecánica C-3.



Figura 2.14: Prototipo de compensador de dirección de motocicleta [36].

Wang et al. [37], revelaron las ventajas de rendimiento de los sistemas de suspensión de trenes que emplean inersores. El estudio se llevó a cabo en tres fases. En primer lugar, se aplicaron estructuras de suspensión fijas a los sistemas de suspensión de trenes y se optimizaron dos medidas de rendimiento. En segundo lugar, esta optimización se llevó a cabo utilizando enfoques de desigualdad matricial lineal para analizar el rendimiento alcanzable de las redes pasivas. Por último, se analizaron las propiedades no lineales de los modelos de inersores y su repercusión en el rendimiento del sistema. Se considera que los inersores son eficaces para mejorar el rendimiento de la suspensión del tren.

Capítulo III

III. Marco teórico

3.1 Análisis dimensional

Las “dimensiones” de una cantidad física (mecánica) son su expresión en términos de las cantidades elementales de longitud, masa y tiempo, abreviadas como L , M y T . El principio empleado en el análisis dimensional se basa en el requisito de que las dimensiones finales en los dos lados de una ecuación deben de corresponder [40].

En el desarrollo del sistema analizado no se puede dar advertencia sobre constantes adimensionales y por consiguiente debemos asumir la posibilidad de su presencia en las ecuaciones obtenidas por el análisis dimensional.

A finales de la década de los sesenta del siglo pasado, los científicos se reunieron para acordar un sistema de unidad de medidas *universales* que permitiera a todos hablar el mismo idioma en cuanto a experimentos, investigación y avances tecnológicos se refiere. De esta manera nació el llamado *Sistema Internacional SI* de medidas, en el cual se definen siete magnitudes físicas fundamentales y en términos de éstas se construyen todas las demás que se llamarán magnitudes físicas derivadas. El mecanismo que permite construir magnitudes derivadas a partir de las fundamentales, es la *dimensión física* [41].

En la Tabla 3.1 se muestra magnitudes físicas tales como; la velocidad, la fuerza, la aceleración, entre otras, las cuales se especifican en términos de las magnitudes físicas fundamentales.

Tabla 3.1: Análisis dimensional de algunos parámetros utilizados en física.

Magnitud	Símbolo	Dimensión	Abreviatura
Velocidad	v	$\frac{\textit{longitud}}{\textit{tiempo}}$	LT^{-1}
Aceleración	a	$\frac{\textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	LT^{-2}
Fuerza	F	$\frac{\textit{masa} \cdot \textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	MLT^{-2}
Trabajo	W	$\frac{\textit{masa} \cdot \textit{longitud}^2}{(\textit{tiempo})^2}$	ML^2T^{-2}

Densidad	ρ	$\frac{\text{masa}}{(\text{longitud})^3}$	ML^{-3}
Amortiguamiento	c	$\frac{\text{masa}}{\text{tiempo}}$	MT^{-1}
Rigidez	K	$\frac{\text{masa}}{(\text{tiempo})^2}$	MT^{-2}

3.1.1 Teorema Pi de Buckingham

El procedimiento para encontrar los factores adimensionales Π 's de cualquier problema, es conocido como el *método de repetición de variables* y fue publicado inicialmente por el científico ruso Dimitri Riabouchinski en 1911 y un año después se hizo popular por su inclusión en los trabajos del ingeniero Edgar Buckingham [41]. El teorema de Buckingham es un teorema clave en el análisis dimensional y es una formalización del método de análisis dimensional de Rayleigh [42].

El teorema Pi de Buckingham establece que si q_1, q_2, \dots, q_n son variables físicas involucradas en un problema particular y si existe entre estas una relación funcional de la forma:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (3.1)$$

Entonces, las n variables siempre se pueden combinar para formar exactamente $(n - j)$ variables adimensionales independientes, donde j es el rango de la matriz adimensional. El símbolo Π es usado porque las variables adimensionales se pueden escribir como un producto de las variables q_1, q_2, \dots, q_n elevadas a alguna potencia [41].

Así, la ecuación (3.1) se puede escribir como la relación funcional:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (3.2)$$

Así es posible encontrar los Π_i por medio de la siguiente ecuación:

$$\Pi_i = V_{Di} \prod_{k=1}^j V_{Fk}^{a_k} \quad \text{con: } i = 1, 2, \dots, n - j \quad (3.3)$$

Donde V_D son las variables físicas relevantes en el problema y V_F son las variables fundamentales y los a_k se escogen de manera tal que cada Π_i sea adimensional. Finalmente, se puede establecer una relación entre los Π_i de la forma:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-j}) \quad (3.4)$$

El teorema solo ayuda a descubrir una forma de generar conjuntos de variables adimensionales, sin embargo, el método no deduce las variables físicas específicas que se necesitan para resolver el problema [41].

Ejemplo:

Para establecer el periodo T de pequeñas oscilaciones en un péndulo simple. Se supondrá que es función de la longitud L , la masa M y la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra g , que tiene unidades de longitud divididas por el tiempo al cuadrado [42,43]. El modelo es como se observa en la Figura 3.1:

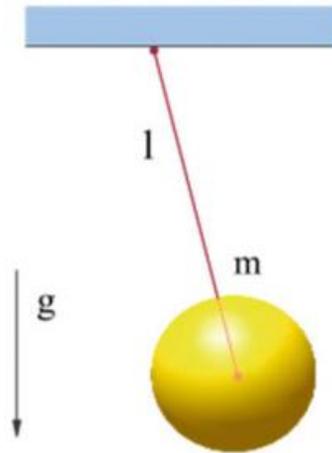


Figura 3.1. Péndulo simple [42].

Se tiene: $T = f(m, l, g)$ o también: $f(T, m, l, g) = 0$

Las unidades de las cantidades dimensionales son:

$$[t] = T, [m] = M, [l] = [L], [g] = LT^{-2}$$

Se determinan los grupos Π : $m = 4, n = 3$

$m - n = 1$ Un grupo Π

Hay tres unidades físicas fundamentales que son tiempo, masa y longitud y cuatro variables adimensionales T, M, L , y g .

	T	m	l	g
M	0	1	0	0
L	0	0	1	1
T	1	0	0	-2

Como el periodo (T) es la variable dependiente su exponente es 1, entonces se tiene:

$$\Pi_1 = T \cdot m^a \cdot l^b \cdot g^c \quad (3.5)$$

Haciendo uso de las ecuaciones adimensionales:

$$1 = T \cdot M^a \cdot L^b \cdot (LT^{-2})^c \quad (3.6)$$

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = M^a \cdot L^{b+c} \cdot T^{1-2c} \quad (3.7)$$

Igualando las bases se obtiene lo siguiente:

$$a = 0 \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

Así mismo

$$\Pi_1 = T \cdot l^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} = T \cdot \frac{g^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}}} \quad (3.9)$$

$$T = \Pi_1 \cdot \frac{l^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} \quad (3.10)$$

Lo que da como resultado:

$$T = c \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.11)$$

3.2 Sistema con excitación armónica

Para analizar el comportamiento dinámico de este fenómeno se utiliza un modelo de un solo grado de libertad, es decir, su movimiento está restringido en una sola dirección y los parámetros pasivos (elasticidad, masa y amortiguación) están concentrados y son independientes entre sí, conocido como sistema masa-resorte-amortiguador, el cual se muestra en la Figura 3.2.

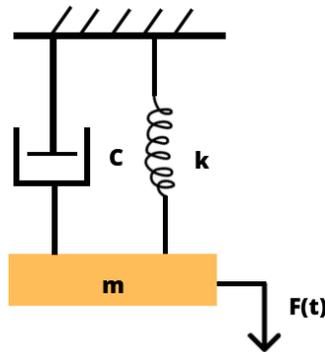


Figura 3.2. Sistema masa-resorte-amortiguador.

El modelo matemático de un sistema dinámico lineal es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.12)$$

En el sistema masa–resorte-amortiguador propuesto para modelar el comportamiento dinámico de un equipo que vibra, actúan varias fuerzas inducidas por los elementos que lo conforman, como son:

- Fuerza elástica: $F_k = kx$, efecto lineal del resorte que cumple la ley de Hook.
- Fuerza de amortiguamiento: $F_c = c\dot{x}$.
- Fuerza de inercia: $F_I = m\ddot{x}$, oposición a la variación del movimiento, que se resiste al cambio de velocidad y se rige por las leyes de Newton, la aceleración va en sentido contrario a esta fuerza.
- Fuerza de excitación: $F_{eq} = F(t)$, función del tiempo que actúa sobre el sistema para producir el movimiento.

Nótese que, $F_{eq} = F(t)$ es la entrada o conducción del sistema. La salida o respuesta del sistema es una solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales del problema [44].

El movimiento oscilatorio que se muestra en la Figura 3.3 (a) se llama movimiento armónico y se denota como:

$$x(t) = X \cos \omega t \quad (3.13)$$

Donde X representa la amplitud del movimiento, ω es la frecuencia del movimiento y t es el tiempo. En la Figura 3.3 se pueden observar los tipos de desplazamientos.

La fuerza armónica es el tipo más simple de fuerza a la que puede estar sometido un sistema vibratorio. Cualquier función periódica del tiempo se puede representar como una suma infinita de términos seno y coseno mediante series de Fourier. Además, cualquier fuerza no periódica se puede describir (considerando que su periodo se aproxima al infinito) en términos de fuerzas armónicas mediante la integral de Fourier [45].

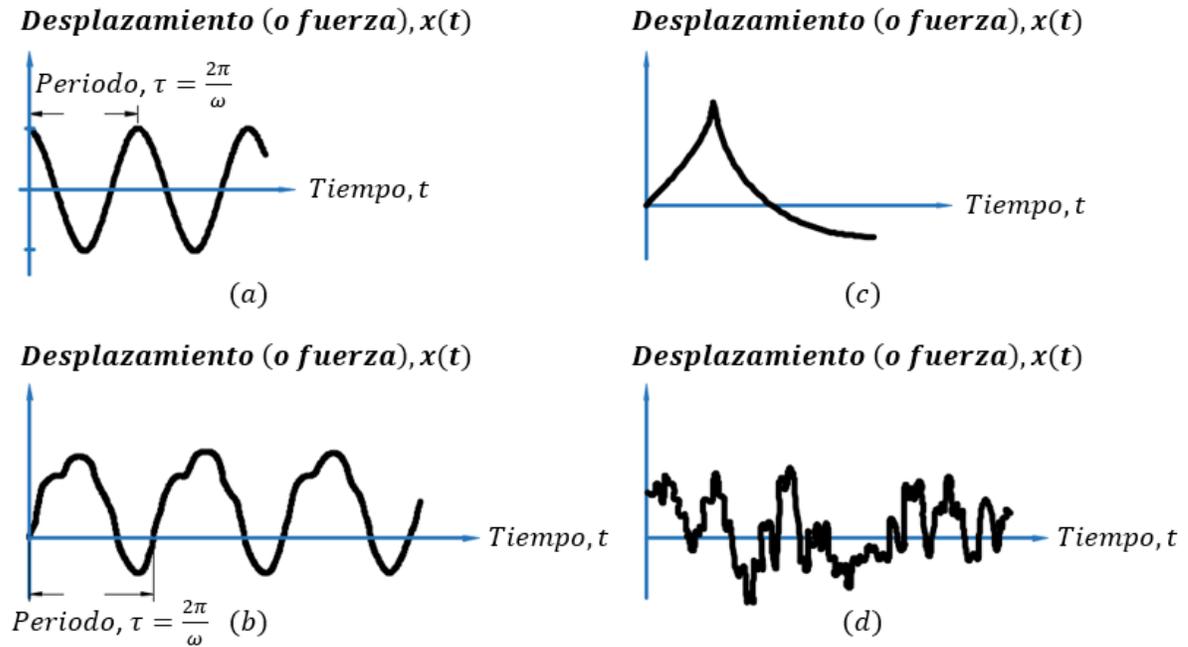


Figura 3.3. Tipos de desplazamientos (o fuerzas): (a) periódico armónico simple; (b) periódico, no armónico; (c) no periódico, transitorio; (d) no periódico, aleatorio [45].

La fuerza armónica que actúa sobre el sistema se denota en forma compleja, la vibración forzada se representa matemáticamente como:

$$F_{eq} = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

En el que F_0 es la amplitud de excitación y ω es la frecuencia de excitación externa.

3.3 Ecuaciones diferenciales parciales para vigas

Mientras que las ecuaciones de movimiento de sistemas discretos aparecen en la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias, las de los sistemas continuos y distribuidos aparecen en la forma de ecuaciones diferenciales parciales. Existen numerosas estructuras que están constituidas a base de vigas y columnas, todas ellas sufren distorsiones debido a su propio peso o por algún

agente externo como fuerzas externas. El método de separación de variables es una de las formas menos complejas, la cual sirve para modelar matemáticamente sistemas físicos vibratorios, tales como cuerdas, barras, vigas y membranas. El método de separación de variables se presenta para la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

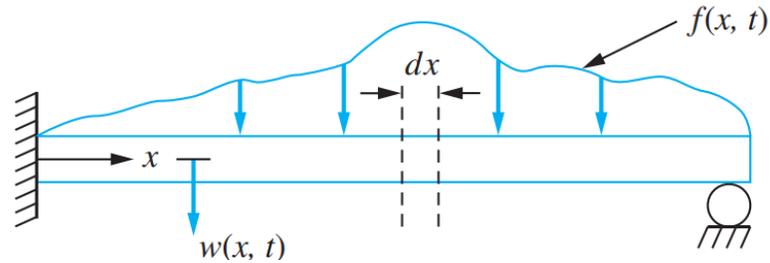


Figura 3.4. Viga sometida a vibración transversal [46].

La viga uniforme de la Figura 3.4 está hecha de un material de densidad másica ρ y módulo de elasticidad E y tiene una longitud L , un área transversal A y un momento de inercia centroidal I . Sea x una coordenada a lo largo del eje neutro de la viga, medida desde su extremo izquierdo. La viga tiene una carga externa por unidad de longitud, $f(x, t)$. Sea $w(x, t)$ la deformación transversal de la viga, medida a partir de su posición de equilibrio.

Las fuerzas externas mostradas son la carga externa, el momento flector interno que es el momento resultante de la normal, y el esfuerzo cortante interno, que es la resultante de la distribución de esfuerzos cortantes. La fuerza efectiva es la masa del elemento multiplicada por su aceleración.

Las fuerzas sumadas en dirección vertical son:

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + \int_x^{x+dx} f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \quad (3.15)$$

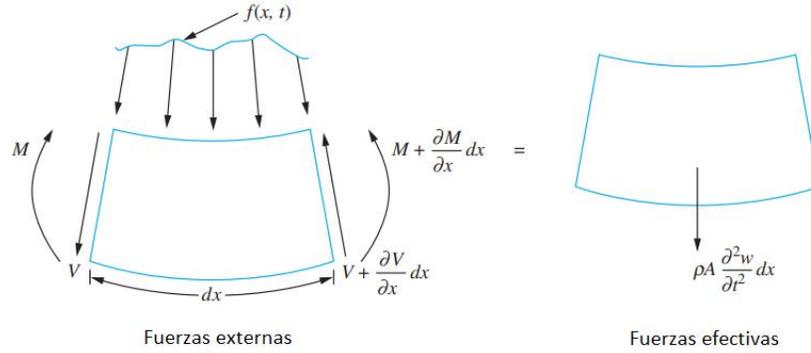


Figura 3.5. DCL de un elemento diferencial arbitrario de la viga en un instante de tiempo arbitrario [46].

Al aplicar el teorema de valor medio, se obtiene:

$$f(x, t) - \frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

La ecuación de movimiento producido por el momento con respecto al eje neutro de la cara izquierda es:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + \int_x^{x+dx} (\xi - x) f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \left(\frac{dx}{2} \right) \quad (3.17)$$

Como dx es infinitesimal, los términos de orden dx^2 son despreciables frente a los términos de orden dx . Cuando se aplica el teorema del valor medio a la integral, y puesto que $\xi - x$ es menor que dx en todo el intervalo de integración. La ecuación (3.17) se simplifica a:

$$V = - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.18)$$

De acuerdo con la teoría elemental de flexión de vigas (también conocida como teoría de vigas delgadas o de Euler-Bernoulli), la relación entre el momento de flexión y la deflexión se expresa como:

$$M = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

Esta ecuación representa la dinámica vibratoria de una viga sujeta a una fuerza externa. Suponiendo propiedades uniformes se obtiene:

$$EI \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.20)$$

3.3.1 Condiciones límite de la viga

Las condiciones de frontera para vibraciones transversales de la viga más utilizadas son [39,47]:

I. Extremo libre:

$$\diamond \text{ Momento de flexión} \quad EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.21)$$

$$\diamond \text{ Fuerza cortante} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.22)$$

II. Extremo simplemente apoyado (de pasador)

$$\diamond \text{ Deflexión} \quad \omega = 0 \quad (3.23)$$

$$\diamond \text{ Momento de flexión} \quad EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (3.24)$$

III. Extremo fijo (empotrado)

$$\diamond \text{ Deflexión} \quad \omega = 0 \quad (3.25)$$

$$\diamond \text{ Pendiente} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.26)$$

IV. Corredizo (deslizándose)

$$\diamond \text{ Pendiente} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

$$\diamond \text{ Fuerza cortante} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Las ecuaciones de frecuencia, los modos y las frecuencias naturales para vigas con condiciones límite se presentan en la Figura 3.6.

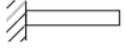
Condiciones en los extremos de la viga	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Valor de $\beta_n l$
Ambos extremos articulados 	$\text{sen } \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Ambos extremos libres 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)
Ambos extremos empotrados 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{senh } \beta_n x - \text{sen } \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{senh } \beta_n l - \text{sen } \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Un extremo empotrado y el otro libre 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l + \text{senh } \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Un extremo empotrado y el otro articulado 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Un extremo articulado y el otro libre 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \alpha_n \text{senh } \beta_n x]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l}{\text{senh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)

Figura 3.6. Condiciones de frontera comunes para la vibración transversal de una viga [47].

3.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange

El principio de Hamilton establece en forma muy general, que la evolución dinámica de un sistema con n coordenadas generalizadas desde un estado inicial $\vec{q}_I(t_1)$ y un estado final $\vec{q}_F(t_2)$ corresponde a un extremo (mínimo, máximo o punto estacionario) del funcional de acción $S[\vec{q}]$. Esta función L contiene información sobre las variables del sistema y las fuerzas que actúan sobre él [48].

Un sistema potencial newtoniano es un caso particular de un sistema lagrangiano (el espacio de configuración en este caso es euclidiano, y la función lagrangiana es la diferencia entre energías cinética y potencial). El punto de vista lagrangiano permite resolver completamente una serie de

importantes problemas mecánicos, incluyendo problemas en la teoría de pequeñas oscilaciones y en la dinámica de un cuerpo rígido [49]. Las ecuaciones de restricción se utilizan de forma natural o implícita en la teoría, lo que reduce simultáneamente el número de ecuaciones necesarias para describir la dinámica del sistema.

Sea (q_1, \dots, q_{3n}) cualquier coordenada en el espacio de configuración de un sistema de n puntos de masa. Entonces la evolución de q con el tiempo está sujeta a las ecuaciones de Euler-Lagrange [49]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{donde } \mathcal{L} = T - U \quad (3.29)$$

Dónde: T es la energía cinética, U es la energía potencial y q_k son las coordenadas generalizadas.

La energía cinética y la energía potencial tienen la forma funcional general:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Y

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Cabe señalar que la función lagrangiana no es única, es decir, un sistema físico puede tener diferentes funciones lagrangianas, lo que finalmente conduce al mismo conjunto de ecuaciones de movimiento para el sistema dinámico. Específicamente, el Lagrangiano no es único, pero las ecuaciones de movimiento sí lo son [39].

3.4.1 Función de disipación de Rayleigh

Cuando existen fuerzas *no conservativas* que si hacen trabajo las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden escribirse de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

Donde \mathcal{L} es el lagrangiano conteniendo el potencial debido a las fuerzas conservativas, y Q_k representa a las fuerzas que no se derivan de un potencial. Un caso de este tipo es el de la fuerza de fricción viscosa, proporcional a la *velocidad*:

$$F = -\mu v.$$

Las fuerzas de este tipo se pueden derivar de una función de disipación de Rayleigh (función de las velocidades generalizadas) de la forma [51]:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mu|v|^2$$

Las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden describir explícitamente en el contexto de las ecuaciones de Lagrange expresándolas en la forma

$$Q_{kvisc} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Por lo tanto, suponiendo que las fuerzas generalizadas Q_k incluyen todas las fuerzas no conservativas con la excepción de las fuerzas viscosas, las ecuaciones de Lagrange se pueden reescribir como [50]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.31)$$

La cual aplica para sistemas con amortiguamiento viscoso, en términos del Lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se emplean para sistemas no conservativos y deben cumplir con la condición que las fuerzas no conservativas sean proporcionales a la velocidad de las partículas y opuestas a su movimiento. Es decir, son fuerzas disipativas porque el sistema pierde energía por su acción [52].

3.5 Análisis modal

Para abordar las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes variables y de orden mayor a uno, probablemente el método más frecuente y efectivo sea uno que está basado en el uso de series de potencias. Cada vez que se tenga una ecuación diferencial parcial lineal y homogénea en u y sus derivadas, una suma de las soluciones también será una solución. Por lo tanto, a partir de las soluciones conocidas $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ se pueden construir otras. Dadas ciertas condiciones de convergencia lo suficientemente fuertes, es cierto que [53]:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (3.33)$$

Un conjunto de funciones como $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ se dice que es *ortogonal con respecto a la función de peso* $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ si:

$$\int_a^b \omega(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \neq 0, & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.34)$$

A menudo se hace uso de la representación de funciones en series de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (3.35)$$

Las c_n son coeficientes numéricos y $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal.

Una versión sencilla de un teorema sobre funciones ortogonales se puede enunciar como sigue: dado un conjunto de funciones:

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}, \quad (3.36)$$

Linealmente independientes y continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, y dada una función de peso $\omega(x)$ positiva y continua en el mismo intervalo, se tendrá un conjunto de funciones:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad (3.37)$$

Con las propiedades siguientes:

- (a) Cada $f_n(x)$ es una combinación lineal de las ϕ .
- (b) Las $f_n(x)$ son linealmente independientes en el intervalo $a \leq x \leq b$.
- (c) $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal con respecto a la función de peso $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Para sistemas discretos, existen varios métodos que se pueden usar para determinar la respuesta forzada de un sistema continuo. Estos incluyen la aplicación del método de coeficiente indeterminado de excitación armónica, el método de transformada de Laplace y el método de análisis modal. El análisis modal es el más potente y ampliamente utilizado [46].

Sea $y(x, t)$ el término no homogéneo adimensional que surge en la ecuación diferencial parcial como resultado del forzamiento externo. Los términos no homogéneos también pueden ocurrir en

las condiciones de contorno. Al usar el método de análisis modal, el desplazamiento de la vibración transversal de la viga se puede expandir aproximadamente en una serie como [54]:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\phi_n(x) \quad (3.38)$$

Donde:

$$f_n(t) = (y(x, t), \phi_n(x)) \quad (3.39)$$

$\phi_n(x)$ es la i -ésima función modal y se puede determinar mediante el problema de valores propios con cierta condición de frontera.

Para el caso de una viga empotrada, las ecuaciones que satisfacen dichas condiciones, son las siguientes [54]:

$$\int_0^L f_i(x)f_j(x)dx = L\delta_{ij} \quad y \quad \frac{d^4 f_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 f_i(x) \quad (3.40)$$

β_i es el eigenvalor de la ecuación característica de la viga, L es la longitud total de la viga y δ_{ij} es el delta de Kronecker definido como [46]:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.41)$$

El método más útil para determinar la respuesta de vibración forzada de un sistema de MDOF lineal es el análisis modal, que se basa en el uso de las coordenadas principales para desacoplar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un sistema no amortiguado o proporcionalmente amortiguado.

3.6 Teorema de Vieta

La contribución de Francisco Vieta (1540-1603) al desarrollo del algebra por haber sido el primero en introducir una notación mucho más adecuada para el análisis algebraico. Ese método, al cual llamó logística simbólica le permitió a Vieta representar por medio de las letras del alfabeto las variables en una ecuación esto trajo una ventaja, las operaciones presentes en la resolución de una ecuación se hicieron más visibles, lo cual permitió al algebra consolidarse como una rama independiente dentro de las matemáticas [57]. El problema principal en álgebra es resolver ecuaciones algebraicas, y es importante tener una comprensión clara de lo que esto significa.

Resolver una ecuación requiere encontrar todas sus raíces, tanto reales como imaginarias, ya sea de forma exacta o aproximada [55].

Cuando se trata con situaciones relacionadas a las raíces de un polinomio es común tratar de pensar en factorizaciones que permitan obtener cada una de las raíces del polinomio en cuestión, sin embargo, no siempre se tiene una factorización con la cual se logre la obtención de estas raíces de forma simple, las fórmulas de Vieta permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar los coeficientes en ese polinomio [58].

Normalmente, cuando se trabaja con las fórmulas de Vieta se considera un polinomio mónico, es decir, consideremos el siguiente polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.42)$$

En el caso que se tiene que $a_n = 1$ se dice que el polinomio es mónico.

La ecuación (3.42) contiene n raíces x_1, x_2, \dots, x_n . Estas raíces se pueden calcular con base en los términos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ independientes del polinomio.

Generalizando las ecuaciones que produce el teorema de Vieta al aplicarse al polinomio mónico de la ecuación (3.42) y relacionándolas con los términos independientes se tiene [56, 58].

$$a_{n-1} = -(x_1 + \dots + x_n) \quad (3.43)$$

$$a_{n-2} = (x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \quad (3.44)$$

⋮

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j} \quad (3.45)$$

⋮

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \quad (3.46)$$

Para el caso de una ecuación cuártica, es decir, con $n = 4$.

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.47)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.42) se pueden expresar en términos de las sumas y productos de sus raíces x_1, x_2, x_3, x_4 las cuales se pueden expresar como:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.48)$$

$$a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \quad (3.49)$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \quad (3.50)$$

$$a_0 = x_1x_2x_3x_4 \quad (3.51)$$

Para los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersores (IDVAs), Barredo et al. [29] plantearon la Técnica de los puntos fijos extendida apoyándose de las fórmulas de Vieta para la obtención de los parámetros óptimos de los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersores.

3.7 Matriz de Jacobi

El jacobiano debe su nombre al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero en emplear estos determinantes especiales que implican derivadas parciales, Jacobi las convirtió en un método para evaluar integrales múltiples [59].

Sea T la transformación que convierte una región S en el espacio uvw en una región R en el espacio xyz por medio de las ecuaciones

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w) \quad y \quad z = h(u, v, w)$$

El jacobiano de T es el determinante 3×3 siguiente:

$$J(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el jacobiano representa la derivada de una función multivariable.

Considerar que: $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ que va del espacio euclidiano n -dimensional a otro espacio euclidiano m -dimensional. En donde F está determinada por:

$$p_i = F_i(q_1, \dots, q_n), \quad p = F(q) = (F_1(q), \dots, F_m(q)) \quad (3.53)$$

Cuando la función anterior es diferenciable, entonces las derivadas parciales de estas m funciones pueden ser organizadas en una matriz m por n , la matriz jacobiana de F :

$$J(q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial(p_1, \dots, p_m)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

3.8 Optimización

Las técnicas de optimización se enfocan en determinar un conjunto de valores que toman los factores que podemos controlar a fin de que exista una o más soluciones óptimas, es decir, aquellas que, además de cumplir con todas las restricciones, maximizan o minimizan, según sea el problema a resolver el valor de la función objetivo [60]. Se clasifican en algoritmos lineales y no lineales.

Resumiendo, un problema de optimización está compuesto de los siguientes elementos:

- ❖ Un conjunto de restricciones
- ❖ Un conjunto de soluciones factibles, el cual contiene todas las posibles combinaciones de valores de variables independientes que satisfacen las restricciones anteriores.
- ❖ Una función objetivo, que vincula las soluciones factibles con el rendimiento del sistema.

Teorema A Teorema de existencia de máximos y mínimos

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo [59].

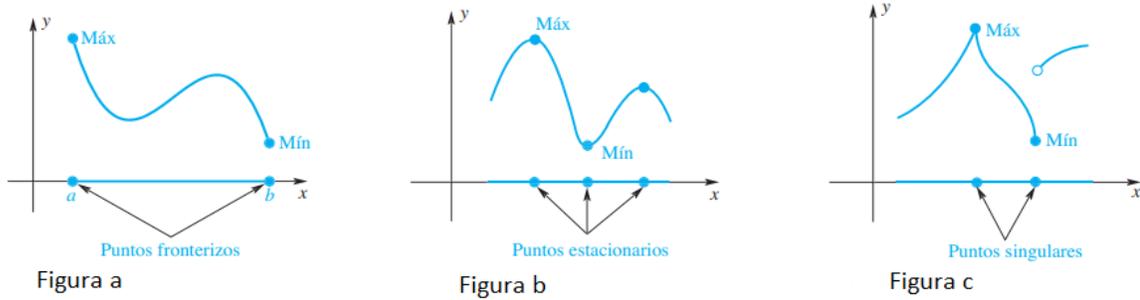


Figura 3.7. Máximos y mínimos de una función arbitraria [61].

La primera derivada $f'(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x . Por lo tanto, si $f'(x) > 0$ entonces la recta tangente asciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es creciente. De manera análoga, si $f'(x) < 0$, la recta tangente desciende hacia la izquierda, lo cual sugiere que f es decreciente [61].

La segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad y los valores máximos y mínimos. Suponga que f'' es continua cerca de c . Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c . Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c [59].

3.8.1 Matriz Hessiana

La **matriz hessiana** organiza todas las derivadas parciales de segundo orden en una matriz.

Sea $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ un campo escalar cuyas derivadas parciales de segundo orden existen.

La matriz Hessiana de f , denotada por $H_f(x)$, es una matriz cuadrada $n \times n$ definida como:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Teorema B Puntos críticos por medio de la matriz hessiana

Sea $f \in C^2(D)$, donde D es un subconjunto convexo de \mathfrak{R}^n , y sea a un punto interior de D tal que $f'(a) = 0_n$ [62].

- ❖ Si $f''(a) > 0$, entonces a es un punto de mínimo local de f .
- ❖ Si $f''(a) < 0$, entonces a es un punto de máximo local de f .
- ❖ Si $f''(a) = 0$, entonces a no es un punto extremo local de f (no concluyente).

Los valores característicos de la matriz hessiana $H_f(x)$ dan la desviación de la respuesta a la frecuencia invariable de los parámetros óptimos del sistema en términos de la relación entre la masa de la estructura principal y la de la estructura DVA [39].

3.9 Técnica de los puntos fijos

Un método de optimización usualmente visto en la literatura es la *Teoría de los puntos fijos* propuesta por Den Hartog [63] para la optimización de los DVAs en términos de disminuir la respuesta de la amplitud máxima del sistema primario.

Esta técnica se basa especialmente en dos condiciones de operación del amortiguador del DVA, cuando el:

1. El amortiguamiento es cero ($\zeta \rightarrow 0$) la cresta es infinita.
2. El amortiguamiento tiende a infinito ($\zeta \rightarrow \infty$).

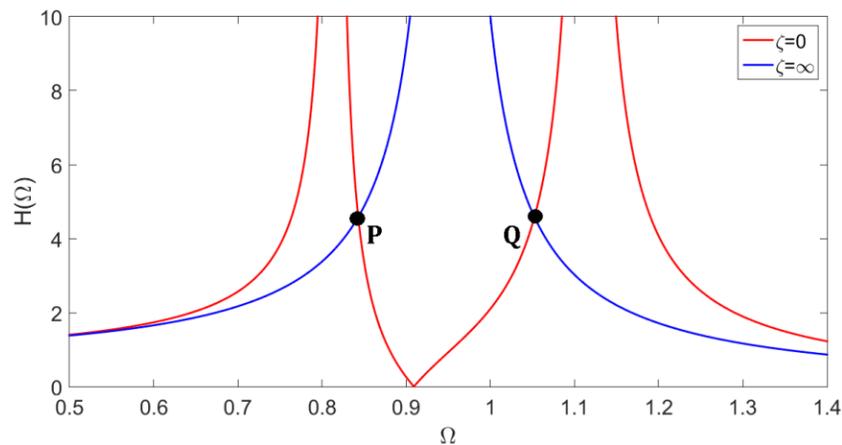


Figura 3.8. Gráfica de un DVA clásico en donde se muestran los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de las dos condiciones del sistema (amortiguamiento 0 e infinito) [39].

Estas dos condiciones conducen a los *puntos fijos* o *puntos invariantes* los cuales son independientes del factor de amortiguamiento del sistema como se observa en la Figura 3.8. En algún lugar entre estos dos valores deberá existir un valor de amortiguamiento, en el que la cresta resulte mínima. Si

se calcula su posición, el problema quedará prácticamente resuelto, ya que la curva más favorable es la que pasa con su tangente horizontal a través de los puntos fijos P y Q .

En algún lugar entre las dos condiciones de operación límite del DVA ($\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$) existe un amortiguamiento tal que el producto de la fuerza de amortiguamiento por el desplazamiento resulta máximo y entonces la amplitud de resonancia será pequeña, a esto se le conoce como amortiguamiento óptimo.

Nota 1 Todas las curvas pasan a través de los puntos fijos P y Q independientemente del amortiguamiento del sistema [63].

En la Figura 3.9 se ilustra la definición anterior y se muestra el comportamiento cuando la relación de amortiguamiento toma valores arbitrarios incluyendo las dos condiciones fundamentales del DVA.

En otras palabras, la FPT se basa en considerar dos estados de operación del sistema, amortiguamiento cero y amortiguamiento infinito, donde las amplitudes de vibración (FRF de la estructura primaria) del sistema son iguales. Esta consideración y procedimiento matemático determinan los parámetros óptimos del sistema.

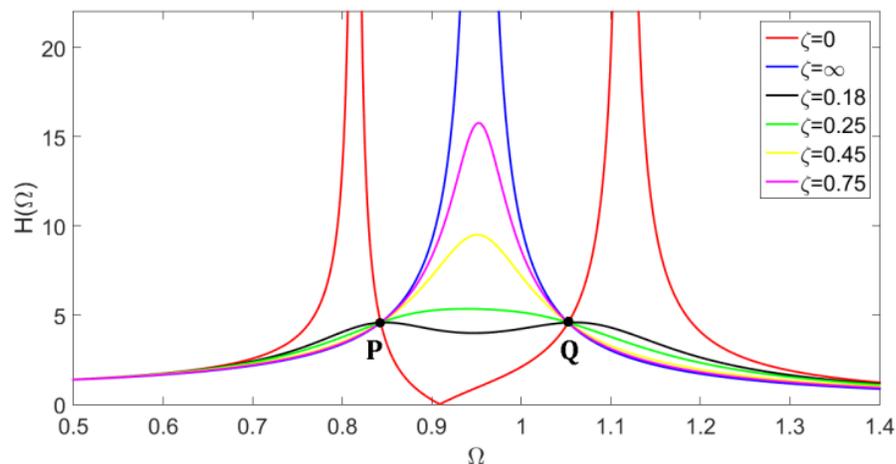


Figura 3.9. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Todas las líneas pasan por los puntos fijos P y Q [39].

Todas las curvas pasan por los puntos fijos P y Q , y tienen amplitudes diferentes, lo que resulta en cambios abruptos en la respuesta cuando el sistema entra en resonancia. El propósito del criterio

H_∞ y la técnica de calibración de frecuencia FPT es encontrar la respuesta óptima entre los puntos fijos para extender el rango de mitigación de vibración del DVA.

Nota 2 *El mejor balance dinámico del sistema primario se obtendrá cuando su curva FRF óptima sea más plana en todo el rango de frecuencias de excitación [39].*

3.10 Técnica de los puntos fijos extendida

Barredo et al. [29] presenta el desarrollo de soluciones novedosas de la teoría de Den Hartog que se puede implementar en el desarrollo de fórmulas algebraicas cerradas para el diseño óptimo de absorbedores dinámicos basados en inersor.

La técnica extendida de calibración de frecuencias de los puntos fijos consiste en cambiar los puntos invariantes del sistema para obtener las variables óptimas asociadas a la respuesta del sistema $R(S)$ y su norma euclidiana $\|H\|$. Se representa como:

$$R(S) = \|H\| \quad (3.56)$$

La técnica de los puntos fijos extendida se explica mediante los siguientes pasos:

1. Obtener el modelo matemático del sistema, aquí la ecuación de movimiento resultante estará en el dominio s de Laplace.
2. Obtener la función de transferencia $H(s)$ del sistema, también conocida como la respuesta $R(s)$ del sistema, ver ecuación (3.56).
3. Sustituir la expresión $s = j\omega$.

j es la unidad imaginaria. Esta expresión es válida debido a que el sistema dinámico es causal y oscilante establemente si y solo si, todos los polos de la función de transferencia $H(s)$ están en el semiplano izquierdo. Así que, la región de convergencia para $H(s)$ incluye el eje $j\omega$ [66].

4. Reescribir la función de transferencia $H(s)$ de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (3.57)$$

5. Sustituir los parámetros adimensionales correspondientes coligados al teorema Pi de Buckingham.

6. Obtener el módulo de $H(s)$ a través de la multiplicación del conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.58)$$

7. Emplear las dos condiciones esenciales de la técnica de los puntos fijos de la sección 3.9.

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.59)$$

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.60)$$

8. Igualar las ecuaciones cuando el amortiguamiento tiende a cero e infinito.

9. Realizar un cambio de variable $\lambda = \Omega^2$ para reducir de grado la ecuación resultante.

10. Convertir la ecuación obtenida en un polinomio mónico.

11. Obtener soluciones óptimas utilizando el teorema de Vieta. A partir de este teorema, se igualan las sumas y los productos de las raíces de ambas ecuaciones obtenidas al aplicar las dos condiciones de la técnica de puntos fijos.

12. Se obtienen los parámetros óptimos [39].

13. Sustituir los parámetros óptimos. Al sustituir esto se obtiene una aproximación de la norma H_∞ [29] y es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes, esto es, $\|H_\infty\|$.

14. Obtener la solución óptima para el factor de amortiguamiento ζ_{opt} a partir de la teoría de Krenk [14].

La teoría de Krenk se utiliza para aplanar la curva de respuesta de frecuencia de la estructura primaria y determinar el coeficiente de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} . La aplicación de la teoría de Krenk sugiere que se generan tres frecuencias resonantes no amortiguadas también conocidas como frecuencias invariantes Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 para lograr el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} del sistema.

Por consiguiente, para calcular Ω_1 y Ω_2 se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.60). Posteriormente, se sustituyen los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y se resuelve la ecuación resultante en términos de Ω . Las raíces obtenidas serán las frecuencias resonantes no amortiguadas Ω_1 y Ω_2 .

Para calcular la frecuencia resonante no amortiguada Ω_0 se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.59). Consecutivamente, se sustituyen los parámetros óptimos $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}$ y se resuelve la ecuación resultante en términos de Ω .

3.11 Criterio H_∞

La medida de rendimiento H_∞ tiene como objetivo minimizar la magnitud máxima de la respuesta en frecuencia basándose en la teoría del punto fijo, que se ha utilizado ampliamente para ajustar los parámetros de los amortiguadores dinámicos de vibraciones (DVA) (o amortiguadores de masa sintonizada (TMD)). En otras palabras, minimizar las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia de la respuesta en frecuencia $R(s)$ de la masa primaria, conocida como la norma $\|H_\infty\|$ [32,64,67].

Esta técnica de optimización ha sido ampliamente utilizada en la teoría de la minimización de la respuesta vibratoria de estructuras mecánicas excitadas armónicamente, la cual se puede utilizar también para minimizar el rendimiento dinámico de la carga dinámica sobre el sistema de suspensión (J_5). La minimización de la norma H_∞ conduce a producir un equilibrio dinámico entre las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia del sistema. Lo que conlleva a formular un problema de optimización de la siguiente manera [32,39,68]:

$$\min \left(\max_{P_{opt}} |H_{NIDVA}(\Omega)| \right) = \max (|H_{NIDVA}(P_{opt}, \beta, \Omega)|) \quad (3.61)$$

$\{P_{opt} \geq 0\}$ representa los parámetros a optimizar del sistema y se limita a que sean soluciones reales y positivas de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial |H_{NIDVA}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (3.62)$$

La idea del problema *min* – *max* ecuaciones (3.61) y (3.62) es, en lugar de utilizar los puntos fijos para minimizar aproximadamente la norma $\|H_\infty\|$ como se hace en el método de punto fijo (Den Hartog 1985), aquí las frecuencias de resonancia se utilizan directamente para minimizar exactamente la norma $\|H_\infty\|$ [32]. Esto se inspira en el método de Nishihara donde las dos frecuencias de resonancia se emplearon para derivar las soluciones exactas para el TDVA.

3.11.1 Método de Nishihara

Nishihara y Asami (2002) mostraron una metodología analítica para la solución exacta de los parámetros óptimos para el DVA. Esta metodología solo funcionaba para sistemas de dos grados de libertad [9]. Sin embargo, en años posteriores la metodología fue implementada para sistemas de más de dos grados de libertad [65].

Nishihara introdujo un artificio matemático novedoso con el objetivo de minimizar la FRF de la estructura principal de los absorbedores de vibración conectados en serie a través de la función:

$$h_{max} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (3.63)$$

Para lo cual el índice de rendimiento H_∞ se puede minimizar mediante la incógnita r [68].

Asimismo, introdujo una función representada como:

$$f_n = \text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h_{max}^2} \quad (3.64)$$

La ecuación (3.64) se utiliza para minimizar el valor máximo h_{max} de la función de transferencia referente a la norma $\|H_\infty\|$.

Se describe el procedimiento de la metodología de optimización de Nishihara como sigue:

- I. Obtener el módulo de $H(s)$ a través de la multiplicación de su conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.65)$$

- II. Especificar las variables numerador y denominador, de la siguiente forma:

$$N_{um} = A^2 + B^2 \quad y \quad D_{en} = C^2 + D^2 \quad (3.66)$$

- III. Se propone la función descrita por Nishihara para determinar el valor mínimo h_{min} de la amplitud máxima h_{max} se plantea la función descrita por Nishihara mediante la siguiente ecuación:

$$h = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \quad (3.67)$$

IV. Reescribir la ecuación (3.64) de la siguiente manera:

$$D_{en} - \frac{N_{um}}{h^2} = 0 \quad (3.68)$$

V. Sustituir los términos adecuados.

VI. Convertir en un polinomio mónico, le ecuación resultante tiene la forma:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (3.69)$$

VII. La suma y productos de las raíces de la ecuación (3.69), se expresan mediante el siguiente sistema de ecuaciones en términos de los coeficientes c_n .

$$f_1 \rightarrow (4c_2 - c_1^2)\sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (3.70)$$

$$f_2 \rightarrow c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} = 0 \quad (3.71)$$

$$f_3 \rightarrow 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (3.72)$$

Las ecuaciones f_1, f_2 y f_3 están expresados en términos de los parámetros a optimizar (η, q, μ y ζ_2) y del parámetro h .

VIII. Sustituir los coeficientes c_n en las ecuaciones para f_1, f_2 y f_3 .

IX. Encontrar la matriz jacobiana utilizando los parámetros a optimizar.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

La matriz jacobiana es de tamaño 3×4 y se satisface para cualquier determinante menor o igual a 3×3 .

X. Para obtener f_4 y f_5 se desarrollan los determinantes de las siguientes matrices jacobianas.

$$f_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad y \quad f_5 = \begin{vmatrix} D_1 & A_1 & B_1 \\ D_2 & A_2 & B_2 \\ D_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (3.74)$$

- XI. Proponer un valor arbitrario para β y sustituirlo en las ecuaciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 .
- XII. Resolver el sistema de ecuaciones no lineales de 5×5 utilizando el método de Newton-Raphson. Estableciendo valores iniciales, tomando los parámetros óptimos obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida.

Capítulo IV

IV. Modelo matemático

En este apartado se describe el comportamiento dinámico del sistema, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange y la teoría de la vibración lateral de vigas. Para obtener la solución de la vibración forzada de la viga se empleará el análisis modal. Con lo cual se encuentran las respuestas en función de la frecuencia de la viga y las amplitudes en frecuencia asociadas al desplazamiento del DVA.

4.1 Respuesta en frecuencia

El modelo presentado en la Figura 4.1 es una configuración de una estructura tipo viga doblemente empotrada (viga Euler-Bernoulli) de longitud L sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$, donde $f(x)$ es una función espacial y $g(t)$ una función temporal determinística. Para determinar el comportamiento dinámico del inersor, se plantea una fuerza de excitación externa de tipo armónica. La viga se encuentra en serie conectada a un absorbedor dinámico de vibración amortiguado; a su vez, el absorbedor se conecta en serie a la red mecánica denominada $C - 4$ con conexión a tierra. Así mismo, la red mecánica $C - 4$ está formada por una conexión en paralelo de resorte amortiguador viscoso conectado en serie a un inersor. Cabe señalar que a esta configuración de absorbedor de vibración definida anteriormente se le conoce en la literatura como NIDVA-C4. El DVA está compuesto por un amortiguador y un resorte. La configuración del sistema atenuador de vibraciones se encuentra localizado en el punto $x = a$.

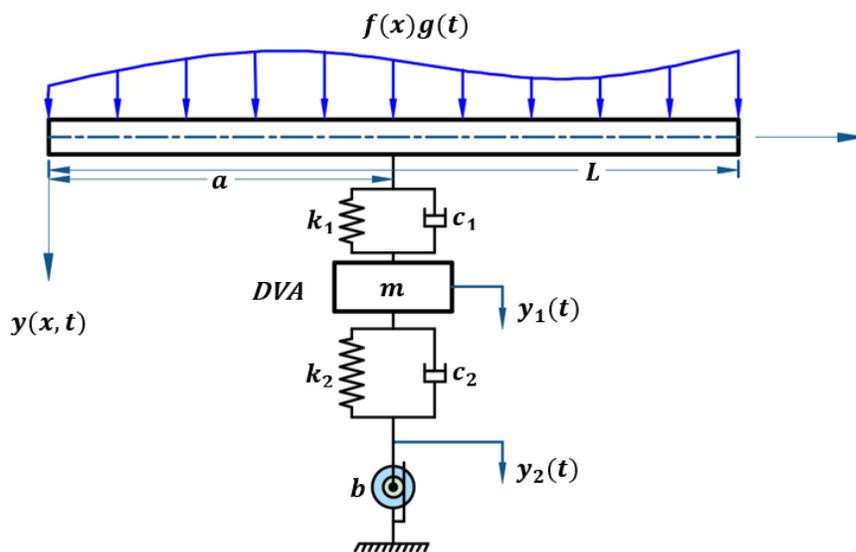


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre de la estructura tipo viga acoplada al NIDVA-C4.

Donde:

$f(x)g(t)$ Carga distribuida

$y(x, t)$ Desplazamiento transversal de la viga

L Longitud de la viga

m Masa asociada al DVA

k_1 Rigidez correspondiente al DVA

c_1 Amortiguamiento correspondiente al DVA

$y_1(t)$ Desplazamiento correspondiente a m del DVA

k_2 Rigidez correspondiente a m y al inersor

c_2 Amortiguamiento correspondiente a m y al inersor

$y_2(t)$ Desplazamiento correspondiente al inersor

b Inertancia

En el apéndice A se muestra el análisis y proceso matemático de la estructura.

Para describir el comportamiento dinámico del sistema, se recurre a las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma generalizada y la teoría de la vibración lateral de vigas. De acuerdo con la Figura 4.1, la ecuación que rige el comportamiento dinámico de la viga es:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) + \{-m\ddot{y}_1(t) - b\ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (4.1)$$

Donde:

A Es el área de la sección transversal

I Momento de inercia

ρ Es la densidad de masa

E Es el módulo de elasticidad

$\delta(x - a)$ Es la función delta de Dirac

Para obtener la solución de la vibración forzada de la viga, se emplea el principio de superposición de modos (análisis modal). Para esto, la deflexión de la viga y sus condiciones de frontera se expresan como:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad y \quad \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (4.2)$$

Donde: β_i es el valor característico (eigenvalor) de la ecuación característica de la viga y ϕ_i es el i -ésimo modo de vibración de la viga.

Al sustituir la ecuación (4.2) en (4.1) y suponiendo una fuerza de excitación armónica, la variable $f(x, t)$ se expresa como $f(x, t) = f(x)g(t)$ con $g(t) = e^{i\omega t}$, resultando en un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo (LTI). Por lo cual, se encuentran las respuestas en función de la frecuencia de la viga $Q_i(\omega)$ y de las amplitudes en frecuencia asociadas al desplazamiento del DVA, $Y_1(\omega)$ y $Y_2(\omega)$. Al multiplicar por la función modal $\phi_i(x)$ y aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, se consigue:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2] \phi_i(x) = f(x) \phi_i(x) + \omega^2 \{mY_1(\omega) + bY_2(\omega)\} \phi_i(a) \quad (4.3)$$

Para obtener la repuesta general en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga, se supone que la excitación armónica afecta al DVA. Por lo cual se representa como:

$$Y(x, \omega) = G_2(x, \omega) - H(\omega)G_1(x, \omega)Y(a, \omega) \quad (4.4)$$

Donde:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x) \phi_i(x) dx \quad (4.5)$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x) \phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.6)$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.7)$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2 (-b\omega^2 m + I(b+m)c_2\omega + k_2(b+m))k_1}{-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_1+k_2)b + k_2 m)\omega^2 - I\omega c_2 k_1 - k_1 k_2} \quad (4.8)$$

Al evaluar la posición del NIDVA en la posición $x = a$, se obtiene la expresión en términos de $Y(a, \omega)$. Por lo cual $H(\omega)$ se reescribe como:

$$H(\omega) = m\omega^2 J \quad (4.9)$$

Donde J es:

$$J = \frac{(-b\omega^2 m + I(b+m)c_2\omega + k_2(b+m))k_1}{m(-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_1+k_2)b + k_2 m)\omega^2 - I\omega c_2 k_1 - k_1 k_2)} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es la función dimensional de respuesta en frecuencia del DVA. Al introducir las siguientes variables se tendrá la misma función, pero en forma adimensional, con las cuales se relacionan las propiedades físicas de la estructura tipo viga con el sistema absorbedor de vibraciones.

$$\omega_A^2 = \frac{k_1}{m} \quad \omega_C^2 = \frac{k_2}{b} \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m\omega_A} \quad (4.11)$$

$$\mu = \frac{b}{m} \quad q = \frac{\omega_A}{\omega_1} \quad \eta = \frac{\omega_C}{\omega_A} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (4.12)$$

Donde:

ω_A^2 Frecuencia natural al cuadrado relacionado al DVA

ω_C^2 Frecuencia natural al cuadrado relacionado al inersor

ζ_2 Factor de amortiguamiento relacionado al DVA

μ Relación de masas entre la inercia y el DVA

q Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA

η Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre la inercia y el DVA

Ω Relación de frecuencias forzadas

Por lo cual, la respuesta dinámica de la ecuación (4.10) en el dominio de la frecuencia en su forma adimensional es:

$$J = - \frac{2 \left(\frac{1}{2} \mu q^2 \eta^2 (\mu + 1) + I \Omega \zeta_2 (\mu + 1) q - \frac{1}{2} \Omega^2 \mu \right) q^2}{q^4 \mu \eta^2 + 2 I \zeta_2 q^3 \Omega - q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + 1) \Omega^2 - 2 I \Omega^3 \zeta_2 (\mu + 1) q + \Omega^4 \mu} \quad (4.13)$$

De manera que al sustituir la frecuencia de excitación del sistema $H(\omega)$ se reescribe como:

$$H(\omega) = m \omega_1^2 J_1 \quad (4.14)$$

Donde: $J_1 = J \Omega^2$

Así pues, la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando ejerce una fuerza de excitación armónica, es:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL \omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot \left\{ \frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\frac{1}{J_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}} \right] \right\} \quad (4.15)$$

La ecuación (4.15) representa la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se tiene una excitación armónica. Considerando el primer modo de vibración la ecuación (4.15), se reescribe como:

$$S(a, \Omega) = \frac{\phi_1 a_1}{(\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + \gamma_1^2) \rho AL \omega_1^2} \quad (4.16)$$

Capítulo V

V. Resultados

5.1 Técnica de los puntos fijos extendida

En esta sección, se presentan los resultados numéricos de la estructura utilizando la metodología de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo et al. [29] al considerar la respuesta de estado estable del sistema.

Se comienza con la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la estructura tipo viga con el NIDVA-C4 para la implementación de la técnica de puntos fijos extendida. De modo que, al considerar el modo principal de vibración $\gamma_i = 1$ y al evaluar en el punto $x = a$, se consigue:

$$S(a, \Omega) = \frac{1}{J_1 \beta \phi_1^2(a) + (\gamma_i^2 - \Omega^2)} \quad (5.1)$$

Con el propósito de conseguir la magnitud de la ecuación (5.1), se reescribe como el cociente entre dos números complejos, así pues,

$$H(s) = \frac{A + Bi}{C + Di} \quad (5.2)$$

Los coeficientes A, B, C y D se describen en el apéndice B.

Para conseguir la norma de $H(s)$ en el espacio euclidiano, el numerador y denominador de la ecuación (5.2) se multiplica por el conjugado del denominador de dicha ecuación, es decir:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (5.3)$$

Al aplicar la primera condición de la técnica de los puntos fijos (sección 3.9) a la ecuación (5.3), se consigue:

$$|H|_{\zeta_2 \rightarrow 0}^2 = \frac{(\theta_1(\Omega, \mu, \eta, q))^2}{(\theta_2(\Omega, \mu, \eta, \beta, \phi, q) + \theta_3(q, \eta, \beta, \mu, \phi, \Omega))^2} \quad (5.4)$$

Las funciones θ_i se describen en el apéndice B.

De igual manera al aplicar la segunda condición de la técnica de los puntos fijos (sección 3.9) a la ecuación (5.3), se obtiene:

$$|H|_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^2 = \frac{((-\mu - 1)\Omega^2 + q^2)^2}{\left((- \mu - 1)\Omega^4 + ((\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + \mu + 1)\Omega^2 - q^2\right)^2} \quad (5.5)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.10, se obtiene el polinomio mónico de cuarto grado independiente del factor de amortiguamiento. Se continúa con la metodología de la técnica de los puntos fijos extendida hasta llegar a obtener los parámetros óptimos que se muestran a continuación:

$$\mu_{opt} = -\frac{2\beta\phi_1^2}{2\beta\phi_1^2 - 1} \quad (5.6)$$

$$\eta_{opt} = -2\beta\phi_1^2 + 1 \quad (5.7)$$

$$q_{opt} = \sqrt{-\frac{1}{\beta\phi_1^2 - 1}} \quad (5.8)$$

$$R(s) = \sqrt{-\frac{\beta\phi_1^2 - 1}{\beta\phi_1^2}} \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) representa la amplitud de vibración del sistema en los puntos invariantes, que también es la amplitud mínima de vibración de la estructura tipo viga con el dispositivo NIDVA-C4.

Dado que el conjunto de ecuaciones (5.6)-(5.8) se encuentra en términos de β y $\phi_1(a)$, se establecen valores fijos para estas variables con el objetivo de encontrar soluciones numéricas para los parámetros óptimos del sistema y de esta forma poder visualizar los resultados obtenidos. Los valores numéricos planteados se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Valores planteados para cada variable independiente.

Variable	Valor
β	0.1
$\phi_1(a)$	$\sqrt{2}$

Con la ayuda de una herramienta computacional se sustituye el conjunto de valores de la Tabla 5.1 en los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y $R(s)$ (ecuación (5.6)-(5.9)). Los resultados se muestran en la Tabla 5.2 considerando 6 cifras significativas.

Tabla 5.2: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional.

Parámetro	Valor
μ_{opt}	0.66667
η_{opt}	0.60000
q_{opt}	1.11803
H	2.00000

Después de sustituir los valores numéricos de la Tabla 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.4), se obtiene la FRF del sistema considerando $\zeta_2 \rightarrow 0$ (amortiguamiento igual a cero).

$$H_{\zeta_2 \rightarrow 0}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(\Omega^4 - 2.000000002\Omega^2 + 0.5625000004)^2}{(\Omega^6 - 3.250000002\Omega^4 + 2.750000002\Omega^2 - 0.5625000004)^2}} \quad (5.10)$$

De igual forma, al sustituir los valores numéricos de la Tabla 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.5), se obtiene la FRF del sistema considerando $\zeta_2 \rightarrow \infty$ (amortiguamiento infinito).

$$H_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{(-1.666666667\Omega^2 + 1.250000001)^2}{(-1.666666667\Omega^4 + 3.333333335\Omega^2 - 1.250000001)^2}} \quad (5.11)$$

Asimismo, se propone un amortiguamiento $\zeta_2 = 0.1$ para observar el comportamiento de la función de respuesta en frecuencia (FRF) cuando se tiene un valor arbitrario. Al sustituir los valores numéricos de la Tabla 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.3), se obtiene:

$$H_{\zeta_2=0.1}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{0.44(\Omega^4 - 2.00\Omega^2 + 0.56)^2 + 0.05(-1.66\Omega^2 + 1.25)^2\Omega^2}{0.44(\Omega^6 - 3.25\Omega^4 + 2.75\Omega^2 - 0.56)^2 + 0.05\Omega^2(-1.66\Omega^4 + 3.33\Omega^2 - 1.25)^2}} \quad (5.12)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.10)-(5.12) se muestran en la Figura 5.1. Para determinar las coordenadas rectangulares de los puntos fijos P_1, P_2, P_3 y P_4 , se sabe que $h \approx \|H\|^2$. Por lo tanto, al igualar las ecuaciones (5.10) y (5.11) se resuelve para Ω , obteniendo:

$$P_1 = (0.5630, 2.00), \quad P_2 = (0.7672, 2.00), \quad P_3 = (1.0877, 2.00) \quad y \quad P_4 = (1.3826, 2.00)$$

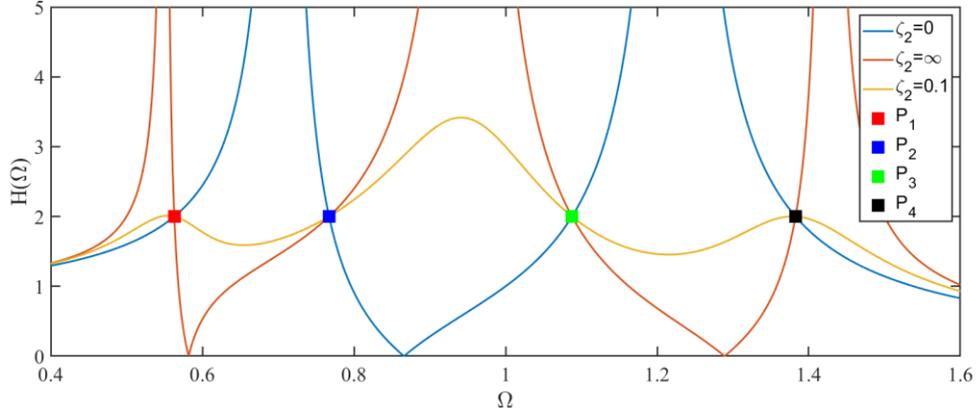


Figura 5.1. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al NIDVA-C4 vs la relación de frecuencia Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.

Como se había mencionado antes, todas las curvas pasan por los puntos fijos o invariantes que son independientes de la relación de amortiguamiento como se puede observar en la Figura 5.1.

El conjunto de soluciones óptimas μ_{opt} , η_{opt} y q_{opt} crean los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del NIDVA-C4. No obstante, para aplanar la curva de respuesta en frecuencia del NIDVA-C4 en todas las frecuencias de excitación, estos parámetros no son suficientes y es necesario encontrar la relación de amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} .

Al aplicar la teoría de Krenk para obtener el amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} del NIDVA-C4, se producen tres frecuencias resonantes no amortiguadas: Ω_1, Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$ y Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$.

Para Ω_1 y Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$, se tiene:

$$-1.666666667\Omega^4 + 3.333333333\Omega^2 - 1.25 = 0 \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) se resuelve de la forma numérica y se consideran las 2 soluciones positivas:

$$\Omega_1 = 1.224777871, \quad \Omega_2 = 0.7071067812 \quad (5.14)$$

Para Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$, se tiene:

$$\Omega_6 - 3.250000000\Omega^4 + 2.750000000\Omega^2 - 0.562500000 = 0 \quad (5.15)$$

Como el valor de Ω_0 es una expresión bastante extensa se toma como

$$\Omega_0 = 1 \quad (5.16)$$

Para obtener de manera numérica la relación de amortiguamiento óptimo, la cual aplanar la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, se sustituyen las soluciones óptimas $\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}, \|H\|$ (ecuaciones (5.6)-(5.9)), Ω_1 y Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$ (ecuación (5.14)) y Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$ (ecuación (5.16)), en la ecuación (5.3). Esto producirá tres valores de amortiguamiento en cada frecuencia resonante no amortiguada, como se muestra en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.

Amortiguamiento	Valor numérico
ζ_{2A}	0.14142
ζ_{2B}	0.16733
ζ_{2C}	0.17321

El factor de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor cuadrático medio de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia resonante no amortiguada.

$$\zeta_{2opt} = \frac{1}{3} \sqrt{3\zeta_{2A}^2 + 3\zeta_{2B}^2 + 3\zeta_{2C}^2} = 0.1612451549 \quad (5.17)$$

De modo que, al sustituir los valores de las Tablas 5.1-5.2 y el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} (ecuación (5.17)) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$H_{\zeta_{2opt}}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{0.44(\Omega^4 - 2\Omega^2 + 0.56)^2 + 0.13(-1.66\Omega^2 + 1.25)^2\Omega^2}{0.44(\Omega^6 - 3.25\Omega^4 + 2.75\Omega^2 - 0.56)^2 + 0.13\Omega^2(-1.66\Omega^4 + 3.33\Omega^2 - 1.25)^2}} \quad (5.18)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.12) y (5.18) se muestra en la Figura 5.2.

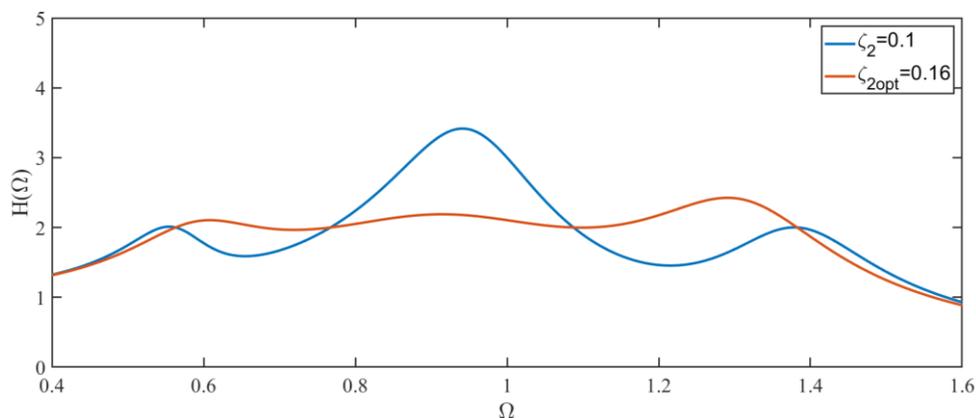


Figura 5.2. Gráfica de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.

En la Figura 5.2, se observa la respuesta de la estructura tipo viga en el NIDVA-C4 con dos valores de amortiguamiento, en donde se aprecia una disminución de la amplitud de vibración considerable debido al amortiguamiento óptimo de los parámetros adimensionales asociados al teorema Pi de Buckingham sujeta a la fuerza de excitación armónica. Esta respuesta se compara con la respuesta obtenida para diferentes valores de relación de amortiguamiento ζ_2 . Nótese que, el comportamiento vibratorio del sistema se estabiliza (curva roja) conforme a los puntos invariantes y a la relación de amortiguamiento óptima ζ_{2opt} , es decir, la amplitud de vibración de la curva roja reduce notablemente.

En la Tabla 5.4 se muestran los valores numéricos de los parámetros óptimos del sistema μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y ζ_{2opt} al variar la relación de masas β conforme al 5%, 8% y 10%. De la misma manera, en la Figura 5.3 se muestra la representación gráfica donde se observa que al incrementar el porcentaje de relación de masas, la amplitud de vibración reduce.

Tabla 5.4: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .

Puntos fijos extendida					
$\phi_1 = \sqrt{2}$					
β	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}	$\ H_\infty\ $
0.05	0.25	0.80	1.054092553	0.05741338083	3.00
0.08	0.4705882352	0.68	1.091089451	0.1157292955	2.291287847
0.10	0.6666666668	0.60	1.118033989	0.1612451550	2.00

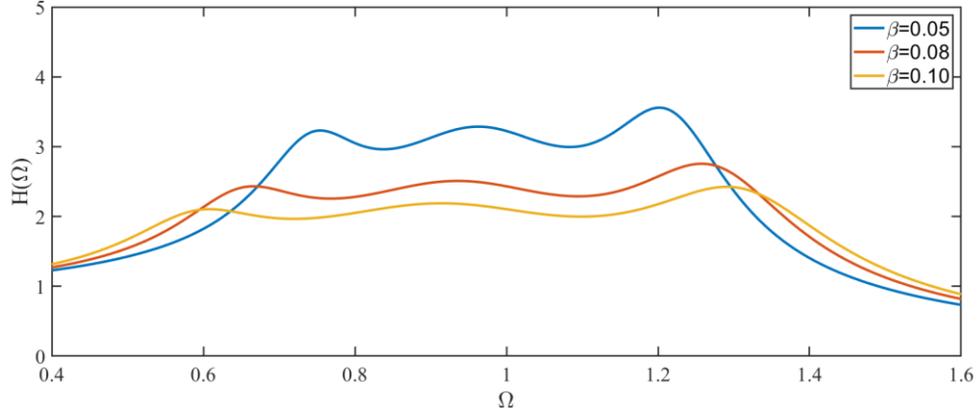


Figura 5.3. Gráfica para los diferentes valores de β obtenidos por la técnica de los puntos fijos extendida.

5.2 Criterio H_∞

En esta sección se utiliza el método de Nishihara descrito en [65], con el propósito de obtener soluciones precisas para completamente balancear la respuesta vibratoria del sistema.

Se empieza con la función de respuesta en frecuencia dimensional $H(s)$ de la viga con el NIDVA-C4 (ecuación (5.3)) y se definen las siguientes variables:

$$N_{um} = (-\Omega^4 \mu + (\eta^2 \mu^2 q^2 + \eta^2 \mu q^2 + \mu q^2) \Omega^2 - \eta^2 \mu q^4)^2 + ((2\mu q \zeta_2 + 2q \zeta_2) \Omega^3 - 2\zeta_2 q^3 \Omega)^2 \quad (5.19)$$

$$D_{en} = (\Omega^6 \mu - (\beta \mu q^2 \phi_1^2 + \eta^2 \mu^2 q^2 + \eta^2 \mu q^2 + \mu q^2 + \mu) \Omega^4 - (-\beta \eta^2 \mu^2 q^4 \phi_1^2 - \beta \eta^2 \mu q^4 \phi_1^2 - \eta^2 \mu q^4 - \eta^2 \mu^2 q^2 - \eta^2 \mu q^2 - \mu q^2) \Omega^2 - \eta^2 \mu q^4)^2 + ((-2\mu q \zeta_2 + 2q \zeta_2) \Omega^5 - (-2\beta \mu q^3 \zeta_2 \phi_1^2 - 2\beta q^3 \zeta_2 \phi_1^2 - 2q^3 \zeta_2 - 2\mu q \zeta_2 - 2q \zeta_2) \Omega^3 - 2\zeta_2 q^3 \Omega)^2 \quad (5.20)$$

En donde N_{um} y D_{en} corresponden al numerador y denominador de la ecuación (5.3) respectivamente.

Por lo tanto, se emplea la ecuación (3.63) propuesta por Nishihara:

$$h = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \quad (5.21)$$

De la ecuación (3.64) se define:

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} \quad (5.22)$$

Al sustituir el conjunto de ecuaciones (5.19)-(5.21) en la ecuación (5.22), se obtiene una ecuación de grado 12 en Ω . A continuación, se convierte en un polinomio mónico.

La ecuación resultante tiene la siguiente forma:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (5.23)$$

Donde los coeficientes c_n se escriben en el Apéndice C.

Al realizar el cambio de variable $\lambda = \Omega^2$ para reducir la ecuación (5.23) a grado 6 respecto de λ .

Se encuentra que la ecuación correspondiente a f_n es:

$$f_n \rightarrow \lambda^6 + c_1\lambda^5 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^2 + c_5\lambda + c_6 = 0 \quad (5.24)$$

$$f_n \rightarrow (\lambda - \lambda A)^2(\lambda - \lambda B)^2(\lambda - \lambda C)^2 = 0 \quad (5.25)$$

Al expandir la ecuación (5.25) y comparar los términos correspondientes con los coeficientes c_n de la ecuación (5.24) se obtiene el sistema de ecuaciones (3.70) - (3.72) correspondientes a f_1, f_2 y f_3 .

$$f_1(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = G_4 + \frac{1}{2}G_2 + \frac{1}{4}G_3 - \frac{1}{4}G_1 \quad (5.26)$$

$$f_2(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = 2G_7G_8 + G_5G_6 \quad (5.27)$$

$$f_3(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = G_9 - 2G_{10} \quad (5.28)$$

Las funciones $f_n(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2)$ para $n = 1, \dots, 5$ son expresiones muy extensas y se expresan por $G_i(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2)$. Por lo cual, la matriz jacobiana J_N asociada al sistema es:

$$J_N = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Para determinar las ecuaciones f_4 y f_5 , se consideran los determinantes de 3×3 más simples asociados a la matriz jacobiana, con la finalidad de ahorrar memoria de cómputo para su solución. Por lo tanto, los determinantes f_4 y f_5 son:

$$f_4(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(q, \eta, \zeta_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$f_5(\beta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, q, \zeta_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

De este modo, se obtiene un sistema de 5 ecuaciones no lineales (f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5) con 5 incógnitas (μ, η, q, r y ζ_2). Para solucionar el sistema de ecuaciones se utiliza el método de Newton-Raphson tomando como valores iniciales las soluciones obtenidas en la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida, ver Tabla 5.3.

Los resultados obtenidos para los parámetros óptimos a través del método de Nishihara con los valores de $\beta = 0.10$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$ (Tabla 5.1) se muestran en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Resultados numéricos de los parámetros óptimos obtenidos mediante el método de Nishihara.

Criterio H_∞	
Parámetros	Valor
μ_{opt}	1.29993
η_{opt}	0.43869
q_{opt}	1.30317
ζ_{2opt}	0.32174
r	0.97057

Al sustituir los valores numéricos de la Tabla 5.5, se obtiene:

$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{1.6898(\Omega^4 - 2.4499\Omega^2 + 0.5550)^2 + 0.7031(-2.2999\Omega^2 + 1.6982)^2\Omega^2}{1.68(\Omega^6 - 3.78\Omega^4 + 3.26\Omega^2 - 0.55)^2 + 0.70\Omega^2(-2.29\Omega^4 + 4.77\Omega^2 - 1.69)^2}} \quad (5.32)$$

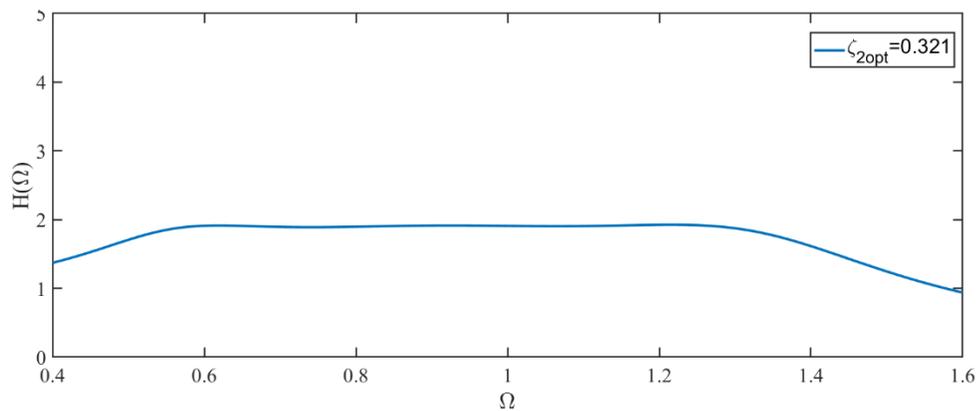


Figura 5.4. Gráfica de $H(\Omega)$ utilizando los parámetros óptimos.

El criterio H_∞ minimiza la amplitud máxima en las frecuencias del sistema al considerar un amortiguamiento óptimo como se aprecia en la Figura 5.4.

Finalmente, la comparación de las gráficas para los parámetros óptimos obtenidos por medio de la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida (ecuación (5.18)) y el criterio H_∞ (ecuación (5.32)) se muestra en la Figura 5.5. Donde se aprecia que al encontrar la respuesta óptima

de amortiguamiento entre los puntos invariantes se logra extender el rango de mitigación de vibración del NIDVA-C4.

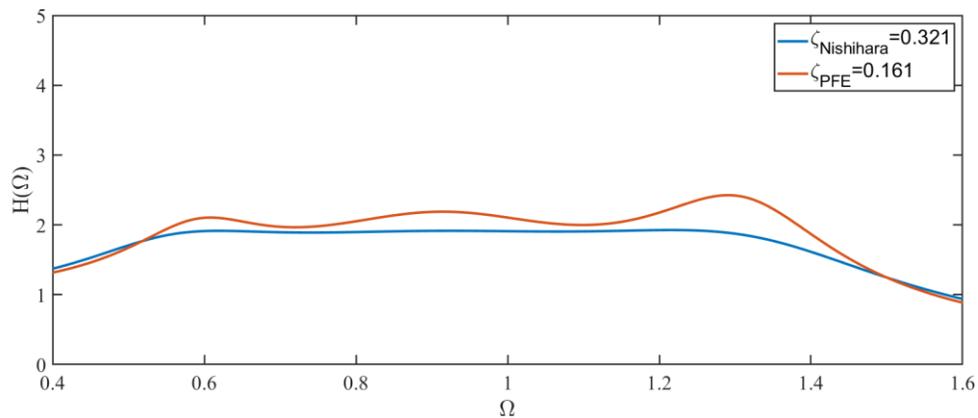


Figura 5.5. Comparación de los resultados obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT) y el criterio H_∞ .

Es posible deducir que el aplanamiento de la curva es mayor cuando se aplica el criterio H_∞ debido a que la técnica de los puntos fijos extendida solo es una aproximación al criterio H_∞ . En cambio, el beneficio de utilizar la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida es preferente porque existe un mayor ahorro en la capacidad de cómputo.

En la Tabla 5.6 se muestran los valores numéricos para los parámetros óptimos obtenidos a través del criterio de rendimiento H_∞ para diferentes valores de β correspondientes al 5%, 8% y 10%.

Tabla 5.6: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .

Criterio H_∞					
$\phi_1 = \sqrt{2}$					
β	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}	$\ H_\infty\ $
0.05	1.3	0.489124	1.49433	0.4	2.72364
0.08	1.3	0.445827	1.36923	0.346817	2.13772
0.10	1.29993	0.438693	1.30317	0.321739	1.91458

Tanto el criterio de H_∞ y la técnica de los puntos fijos extendida consiste en encontrar la respuesta óptima entre los puntos fijos para extender el rango de mitigación de vibración del NIDVA-C4. Lo

cual se traduce al área de ingeniería mecánica automotriz como que el conductor tendrá una trayectoria más suave y fluida, brindando un mayor confort.

En la Figura 5.6 se muestra la representación gráfica de la respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al NIDVA-C4 tomando en cuenta los parámetros óptimos de la Tabla 5.6, al cambiar el valor de β , con lo cual se aprecia que al utilizar el criterio de H_∞ la amplitud de vibración disminuye en comparación con EFPT (Figura 5.3) y teniendo en cuenta que entre mayor sea la relación de masas menor será el rango de amplitud de vibración.

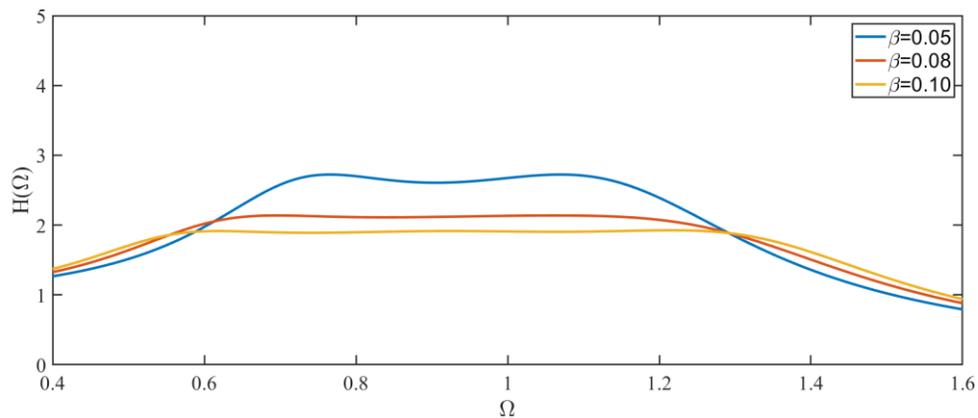


Figura 5.6. Gráfica para los distintos valores de β obtenidos mediante el criterio H_∞ .

Finalmente, en la Tabla 5.7 se hace una recopilación de las Tablas 5.4 y 5.6 de los parámetros óptimos obtenidos por medio de la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ , respectivamente.

Tabla 5.7: Resumen de los valores numéricos para los parámetros óptimos al modificar el valor de β .

Parámetros óptimos para el NIDVA-C4								
$\phi_1 = \sqrt{2}$								
EFPT					Criterio H_∞			
β	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}
0.05	0.25	0.80	1.054092	0.057413	1.3	0.489124	1.49433	0.4
0.08	0.470588	0.68	1.091089	0.115729	1.3	0.445827	1.36923	0.346817
0.10	0.666666	0.60	1.118033	0.161245	1.29993	0.438693	1.30317	0.321739

Para calcular el porcentaje de supresión de vibración, se calcula el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones $\%SB_i$. De esta forma, se considera la función de respuesta en frecuencia del sistema tipo viga con absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor (NIDVA-C4) y la FRF del sistema tipo viga con absorbedor dinámico de vibración clásico (DVA). Para contrastar ambos sistemas, se utiliza como referencia la FRF cuando no existe absorbedor dinámico de vibración en la estructura tipo viga (estructura sin control). En la Figura 5.7 se muestran las curvas mencionadas anteriormente.

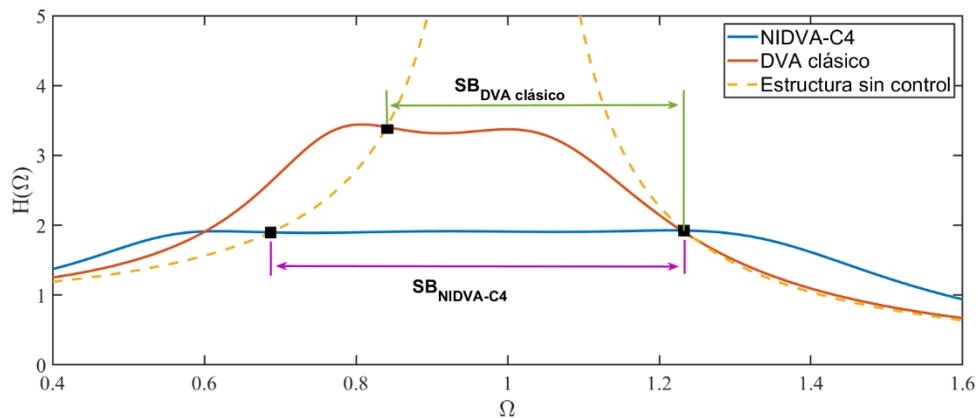


Figura 5.7. Comparación de las curvas FRF del NIDVA-C4 y el DVA clásico.

En la Figura anterior se observa que el rango de supresión de vibraciones y el ancho de banda operativo es mayor al utilizar el NIDVA-C4 en comparación con el DVA clásico. Traduciéndose en una manera más eficiente de aislar las vibraciones y reduciendo así su impacto, con lo cual se obtiene una mejora en la comodidad, estabilidad y la prolongación de la vida útil de los sistemas mecánicos.

Por lo cual, la ecuación para calcular el incremento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SB_{NIDVA-C4} = \frac{SB_{NIDVA-C4} - SB_{DVA \text{ clásico}}}{SB_{DVA \text{ clásico}}} \times 100 \quad (5.33)$$

De la misma manera, para calcular el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema ($\%SL$) del NIDVA-C4 con respecto al DVA clásico, se encuentran los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por lo tanto, la ecuación para el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema es:

$$\%SL_{NIDVA-C4} = \frac{SL_{DVA \text{ clásico}} - SL_{NIDVA-C4}}{SL_{DVA \text{ clásico}}} \times 100 \quad (5.34)$$

Al efectuar los respectivos cálculos para $\beta = 1\%$ y 10% , se obtiene que el $\%SB_{1\%,NIDVA-C4}$, $\%SB_{10\%,NIDVA-C4}$ para el NIDVA-C4 es del 23.03% y 34.39% y el $\%SL_{1\%,NIDVA-C4}$, $\%SL_{10\%,NIDVA-C4}$ es de 30.34% y 39.69% respectivamente, en comparación con la estructura tipo viga con DVA clásico. Por lo tanto, el NIDVA-C4 mejora y supera al DVA clásico. Así pues, el NIDVA-C4 produce un adecuado desempeño en la mitigación de vibraciones de la estructura tipo viga cuando se encuentra sujeta a una fuerza de excitación armónica.

Capítulo VI

VI. Conclusiones

A partir del desarrollo matemático empleado en este trabajo de investigación, se determinó un diseño óptimo de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersor conectado a una estructura tipo viga doblemente empotrada. Sobre la estructura tipo viga se ejerce una fuerza de excitación externa de tipo armónica.

Para abordar el análisis cinemático, fue necesario obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la teoría de Euler-Lagrange considerando fuerzas no conservativas generalizadas. Continuando con la obtención de los parámetros adimensionales, a partir del teorema II de Buckingham, lo que lleva a la respuesta en frecuencia adimensional del sistema. La validación del modelo matemático de forma numérica, se realizó mediante el uso de un sistema de cómputo numérico utilizando el criterio de optimización H_{∞} , basado en el método de Nishihara, siendo un método de alta precisión numérica de los parámetros óptimos del NIDVA-C4 y la técnica de los puntos fijos extendida, siendo una aproximación de la norma H_{∞} que considera el teorema de Vieta y la teoría de Steen Krenk.

Al comparar los resultados obtenidos para los parámetros óptimos correspondientes a la técnica de los puntos fijos extendida y el método de Nishihara, se demuestra que se logró minimizar las amplitudes de vibración del sistema relacionadas con la respuesta adimensional en frecuencia del sistema en un intervalo de frecuencias establecido. De lo que se concluye que al calcular el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones existe un rendimiento del 23.03 % cuando se utiliza el NIDVA-C4 propuesto, en comparación con el DVA clásico. De esta manera, la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación ha sido demostrada exitosamente.

Finalmente, es importante mencionar que el dispositivo propuesto quizás no sea de uso común de los absorbedores de vibraciones dinámicas basados en inersor, lo que significa que este dispositivo solo puede usarse para mitigar vibraciones en estructuras de ingeniería civil o estructuras mecánicas estacionarias.

6.1 Trabajos futuros

Para mejorar el trabajo desarrollado en esta tesis, se consideran los siguientes estudios para optimizar algunas de sus características y ampliar los resultados obtenidos.

- ◆ Obtener el modelo matemático de la estructura tipo viga doblemente empotrada considerando otros tipos de fuerzas de excitación, como fuerzas inerciales o aleatorias.
- ◆ De la estructura tipo viga con NIDVA-C4 realizar la implementación física.
- ◆ Comprobar los resultados obtenidos teóricamente comparándolos con resultados experimentales y probar la efectividad del sistema propuesto en este trabajo y su medida de incertidumbre para evaluar la validez de los datos obtenidos.

Apéndice A

Modelo Matemático

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las energías asociadas al sistema de la Figura 4.1.

$$T = \frac{1}{2} M_v [\dot{y}(x, t)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{y}_1(t)]^2 + \frac{1}{2} b [\dot{y}_2(t)]^2 \quad (\text{A.1})$$

$$U = \frac{1}{2} K_v [y(x, t)]^2 + \frac{1}{2} k_1 [y_1(t) - y(a, t)]^2 + \frac{1}{2} k_2 [y_2(t) - y_1(t)]^2 \quad (\text{A.2})$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)]^2 + \frac{1}{2} c_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)]^2 \quad (\text{A.3})$$

Donde M_v y K_v son la masa y la rigidez de la viga, respectivamente. Empleando la ecuación (3.31), se encontraron las tres ecuaciones de movimiento asociadas al sistema.

❖ Para la viga, cuyo desplazamiento es $y(x, t)$:

$$M_v \ddot{y}(x, t) + K_v y(x, t) = F(x, t) + k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] \quad (\text{A.4})$$

Dado que el lado izquierdo de la ecuación (A.4) está en términos de una función y que depende de la posición x y el tiempo t respecto a la viga, se sustituye la ecuación (3.20) en la ecuación (A.4).

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \\ = F(x, t) + \{k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)]\} \delta(x - a) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Donde $\delta(x - a)$ es la función delta de Dirac. La expresión entre corchetes puede ser aproximada por la función delta e indica que es válida cuando la distancia x es igual a la ubicación a del NIDVA-C4. En realidad, representa una distribución de carga infinitamente grande en el punto $x = a$.

❖ Para el DVA, cuyo desplazamiento es $y_1(t)$:

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1(t) + k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] \\ = k_2 [y_2(t) - y_1(t)] + c_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

❖ Para el inersor, cuyo desplazamiento es $y_2(t)$:

$$k_2[y_2(t) - y_1(t)] + c_2[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] = -b\ddot{y}_2(t) \quad (\text{A.7})$$

Igualando las ecuaciones (A.6) y (A.7), se tiene:

$$k_1[y_1(t) - y(a, t)] + c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] = -m\ddot{y}_1(t) - b\ddot{y}_2(t) \quad (\text{A.8})$$

El término del lado izquierdo de la ecuación (A.8) aparece del lado derecho de la ecuación (A.5). Así que, sustituyendo (A.8) en (A.5), se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) + \{-m\ddot{y}_1(t) - b\ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.9})$$

La solución de vibración forzada para la viga se puede determinar con el principio de superposición de modos. Para esto de las ecuaciones (3.38) y (3.40), la deflexión de la viga y sus condiciones de frontera se expresan como:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad y \quad \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo la ecuación (A.10) en (A.9), se tiene:

$$EI \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^4 \phi_i(x) q_i(t) \right] + \rho A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(x)}{dt^2} \right] = F + \{-m\ddot{y}_1(t) - b\ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.11})$$

Suponiendo una fuerza de excitación armónica, la variable F se expresa como:

$$F = F(x, t) = f(x)g(t)$$

Tal que,

$$EI \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^4 \phi_i(x) q_i(t) \right] + \rho A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(x)}{dt^2} \right] = f(x)g(t) + \{-m\ddot{y}_1(t) - b\ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.12})$$

Suponemos,

$$g(t) = e^{i\omega t}, \quad q_i(t) = Q_i(\omega)e^{i\omega t}, \quad y_1(t) = Y_1(\omega)e^{i\omega t}, \quad y_2(t) = Y_2(\omega)e^{i\omega t}$$

Obteniendo las segundas derivadas, sustituyendo y simplificando se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) Q_i(\omega) [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A] = f(x) + \{m\omega^2 Y_1(\omega) + b\omega^2 Y_2(\omega)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando por la función modal $\phi_i(x)$ y aplicando la propiedad fundamental de la función δ de Dirac:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) Q_i(\omega) [EI\beta_i^4 - \omega^2 \rho A] \phi_i(x) = f(x) \phi_i(x) + \{m\omega^2 Y_1(\omega) + b\omega^2 Y_2(\omega)\} \phi_i(a) \quad (\text{A.14})$$

Para determinar $y_1(t)$, que corresponde a la coordenada del movimiento del DVA, en términos de $Y_1(\omega)$. De la ecuación (A.6), considerando una fuerza de excitación armónica.

$$\begin{aligned} y_1(t) = Y_1(\omega) e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_1(t) = i\omega Y_1(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{y}_1(t) = -\omega^2 Y_1(\omega) e^{i\omega t} \\ y_2(t) = Y_2(\omega) e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_2(t) = i\omega Y_2(\omega) e^{i\omega t} \\ y(a, t) = Y(a, \omega) e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}(a, t) = i\omega Y(a, \omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.6) y resolviendo para $Y_1(\omega)$:

$$Y_1(\omega) = \frac{i\omega [c_2 Y_2(\omega) + c_1 Y(a, \omega)] + k_2 Y_2(\omega) + k_1 Y(a, \omega)}{-m\omega^2 + [c_1 + c_2]i\omega + k_1 + k_2} \quad (\text{A.15})$$

Para amortiguamientos estructurales bajos, es decir, considerando $c_1 = 0$.

$$Y_1(\omega) = \frac{[i\omega c_2 + k_2] Y_2(\omega) + k_1 Y(a, \omega)}{-m\omega^2 + c_2 i\omega + k_1 + k_2} \quad (\text{A.16})$$

De la misma manera, para determinar $y_2(t)$ en términos de $Y_2(\omega)$, correspondiente a la coordenada de movimiento del NIDVA. De la ecuación (A.7), consideramos una fuerza de excitación armónica.

$$\begin{aligned} y_1(t) = Y_1(\omega) e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_1(t) = i\omega Y_1(\omega) e^{i\omega t} \\ y_2(t) = Y_2(\omega) e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_2(t) = i\omega Y_2(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{y}_2(t) = -\omega^2 Y_2(\omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.7) y resolviendo para $Y_2(\omega)$:

$$Y_2(\omega) = \frac{k_2 Y_1(\omega) + c_2 Y_1(\omega) i\omega}{k_2 + c_2 i\omega - b\omega^2} \quad (\text{A.17})$$

Se tiene $Y_1(\omega)$ y $Y_2(\omega)$, sustituyendo (A.17) en (A.16) y resolviendo para $Y_1(\omega)$.

$$Y_1(\omega) = \frac{-(-b\omega^2 + c_2i\omega + k_2)k_1Y(a, \omega)}{-mb\omega^4 + (m + b)\omega^3c_2i + ((m + b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2i\omega k_1 - k_1k_2} \quad (\text{A.18})$$

De esta manera se tiene a $Y_1(\omega)$ en términos de $Y(a, \omega)$, que es la posición del DVA. Ahora, se pondrá a $Y_2(\omega)$ en términos de $Y(a, \omega)$. Sustituyendo la ecuación (A.16) en (A.17).

$$Y_2(\omega) = \frac{-(c_2i\omega + k_2)k_1Y(a, \omega)}{-mb\omega^4 + (m + b)\omega^3c_2i + ((m + b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2i\omega k_1 - k_1k_2} \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.18) y (A.19) en la ecuación (A.14).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)Q_i(\omega)[EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A]\phi_i(x) = f(x)\phi_i(x) + \omega^2\phi_i(a)Y(a, \omega) \quad (\text{A.20})$$

$$\cdot \left[\frac{-(b\omega^2m + (b + m)ic_2\omega + k_2(b + m))k_1}{-mb\omega^4 + (m + b)\omega^3c_2i + ((m + b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2i\omega k_1 - k_1k_2} \right]$$

Integrando respecto a x . Se considera que ρ y A como constantes, tomando la propiedad de la integral de la ecuación (3.40) y multiplicando por la función modal $\phi_i(x)$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)Q_i(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x) \int_0^L \phi_i(x)f(x)dx}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right) + \omega^2Y(a, \omega) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\cdot \left[\frac{-(b\omega^2m + (b + m)ic_2\omega + k_2(b + m))k_1}{-mb\omega^4 + (m + b)\omega^3c_2i + ((m + b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2i\omega k_1 - k_1k_2} \right]$$

Definiendo:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x)\phi_i(x)dx \quad (\text{A.22})$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (\text{A.23})$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (\text{A.24})$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2 \left[-((b\omega^2m + (b + m)ic_2\omega + k_2(b + m))k_1) \right]}{-mb\omega^4 + (m + b)\omega^3c_2i + ((m + b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2i\omega k_1 - k_1k_2} \quad (\text{A.25})$$

Dado que:

$$Y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega) \phi_i(x)$$

Se describe la ecuación (A.21):

$$Y(x, \omega) = G_2(x, \omega) - G_1(x, \omega)H(\omega)Y(a, \omega) \quad (\text{A.26})$$

Para obtener la expresión $Y(a, \omega)$, se evalúa en la posición del NIDVA. Por lo que:

$$Y(a, \omega) = \frac{G_2(a, \omega)}{1 + G_1(a, \omega)H(\omega)} \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.26),

$$Y(x, \omega) = G_2(x, \omega) - \frac{G_1(x, \omega)G_2(a, \omega)}{H^{-1}(\omega)G_1(a, \omega)} \quad (\text{A.28})$$

Multiplicando y dividiendo por m_1 , la ecuación (A.25) se reescribe como:

$$H(\omega) = m\omega^2 J \quad (\text{A.29})$$

Donde J es:

$$J = \frac{-(b\omega^2 m + (b+m)ic_2\omega + k_2(b+m))k_1}{-mb\omega^4 + (m+b)\omega^3 c_2 i + ((m+b)k_2 + bk_1)\omega^2 - c_2 i \omega k_1 - k_1 k_2} \quad (\text{A.30})$$

Se definen las siguientes variables adimensionales como:

$$\omega_A^2 = \frac{k_1}{m} \quad \omega_C^2 = \frac{k_2}{b} \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m\omega_A} \quad (\text{A.31})$$

$$\mu = \frac{b}{m} \quad q = \frac{\omega_A}{\omega_1} \quad \eta = \frac{\omega_C}{\omega_A} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \quad \omega_i^2 = \frac{EI\beta_i^4}{\rho A} \quad (\text{A.33})$$

Así, la ecuación (A.30) en su forma adimensional queda expresada como:

$$J = -\frac{2\left(\frac{1}{2}\mu q^2 \eta^2 (\mu + 1) + i\Omega \zeta_2 (\mu + 1) q - \frac{1}{2}\Omega^2 \mu\right) q^2}{q^4 \mu \eta^2 + 2i\zeta_2 q^3 \Omega - q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + 1)\Omega^2 - 2i\Omega^3 \zeta_2 (\mu + 1) q + \Omega^4 \mu} \quad (\text{A.34})$$

De la ecuación (A.32), se tiene $\omega = \Omega\omega_1$. Sustituyendo en la ecuación (A.25):

$$H(\omega) = m\omega_1^2 J_1 \quad (\text{A.35})$$

Donde: $J_1 = \Omega^2 J$.

Sustituyendo (A.35) en (A.28) junto con las variables adimensionales correspondientes.

$$Y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} - \frac{\left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right] \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right]}{\frac{1}{m\omega_1^2 J_1} + \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right]} \quad (\text{A.36})$$

De las ecuaciones (A.32) y (A.33) se despeja para $\omega, EI\beta_i^4, \omega_i^2$ y m_1 y efectuando el desarrollo algebraico correspondiente se obtiene.

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL\omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot \left\{ \frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\frac{1}{J_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}} \right] \right\} \quad (\text{A.37})$$

Evaluando en $x = a$ y considerando el primer modo de vibración.

$$\frac{S(a, \Omega) \rho AL\omega_1^2}{a_1 \phi_1(a)} = \frac{1}{J_1 \mu \phi_1^2(a) + (\gamma_1^2 - \Omega^2)} \quad (\text{A.38})$$

Apéndice B

Puntos fijos extendida

$$A = \mu(\Omega^4 - (1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 + q^4\eta^2) \quad (\text{B.1})$$

$$B = 2\zeta_2((-\mu - 1)\Omega^2 + q^2)q\Omega \quad (\text{B.2})$$

$$C = -\left(\Omega^6 + (-1 + ((-\mu - 1)\eta^2 - \beta\phi_1^2 - 1)q^2)\Omega^4 + q^2(\eta^2(\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - q^4\eta^2\right)\mu \quad (\text{B.3})$$

$$D = -2\zeta_2\Omega \left((-\mu - 1)\Omega^4 + (\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + \mu + 1 \right) \Omega^2 - q^2 \Big) q \quad (\text{B.4})$$

$$\theta_1(\Omega, \mu, \eta, q) = \Omega^4 - (1 + (\mu + 1)\eta^2)q^2\Omega^2 + q^4\eta^2$$

$$\theta_2(\Omega, \mu, \eta, \beta, \phi, q) = \Omega^6 + \left(-1 + \left((-\mu - 1)\eta^2 - \beta\phi_1^2 - 1 \right) q^2 \right) \Omega^4 \quad (\text{B.5})$$

$$\theta_3(q, \eta, \beta, \mu, \phi, \Omega) = q^2(\eta^2(\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + 1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 - q^4\eta^2$$

Apéndice C

Método de Nishihara

$$c_1 = \frac{1}{\mu^2} \left((2(-\beta\mu q^2\phi_1^2 - \eta^2\mu^2 q^2 - \eta^2\mu q^2 - \mu q^2 - \mu)\mu + (-2\mu q\zeta_2 - 2q\zeta_2)^2) \right) \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{1}{\mu^2} & \left(2(\beta\eta^2\mu^2 q^4\phi_1^2 + \beta\eta^2\mu q^4\phi_1^2 + \eta^2\mu q^4 + \eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2)\mu \right. \\ & + (-\beta\mu q^2\phi_1^2 - \eta^2\mu^2 q^2 - \eta^2\mu q^2 - \mu q^2 - \mu)^2 \\ & + 2(2\beta\mu q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2\beta q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2q^3\zeta_2 + 2\mu q\zeta_2 + 2q\zeta_2)(-2\mu q\zeta_2 \\ & \left. - 2q\zeta_2) - \mu^2(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = \frac{1}{\mu^2} & \left(-2\eta^2\mu^2 q^4 \right. \\ & + 2(\beta\eta^2\mu^2 q^4\phi_1^2 + \beta\eta^2\mu q^4\phi_1^2 + \eta^2\mu q^4 + \eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 \\ & + \mu q^2)(-\beta\mu q^2\phi_1^2 - \eta^2\mu^2 q^2 - \eta^2\mu q^2 - \mu q^2 - \mu) \\ & - 4q^3\zeta_2(-2\mu q\zeta_2 - 2q\zeta_2) \\ & + (2\beta\mu q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2\beta q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2q^3\zeta_2 + 2\mu q\zeta_2 + 2q\zeta_2)^2 \\ & \left. - (-2(\eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2)\mu + (2\mu q\zeta_2 + 2q\zeta_2)^2)(-r^2 + 1) \right) \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = \frac{1}{\mu^2} & \left(-2\eta^2\mu q^4(-\beta\mu q^2\phi_1^2 - \eta^2\mu^2 q^2 - \eta^2\mu q^2 - \mu q^2 - \mu) \right. \\
& + (\beta\eta^2\mu^2 q^4\phi_1^2 + \beta\eta^2\mu q^4\phi_1^2 + \eta^2\mu q^4 + \eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2)^2 \\
& - 4q^3\zeta_2(2\beta\mu q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2\beta q^3\zeta_2\phi_1^2 + 2q^3\zeta_2 + 2\mu q\zeta_2 + 2q\zeta_2) \\
& - (2\eta^2\mu^2 q^2 + (\eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2)^2 \\
& \left. - 4q^3\zeta_2(2\mu q\zeta_2 + 2q\zeta_2))(-r^2 + 1) \right) \tag{C.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_5 = \frac{1}{\mu^2} & \left((-2\eta^2\mu q^4(\beta\eta^2\mu^2 q^4\phi_1^2 + \beta\eta^2\mu q^4\phi_1^2 + \eta^2\mu q^4 + \eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2) \right. \\
& + 4q^6\zeta_2^2 \\
& \left. - (-2\eta^2\mu q^4(\eta^2\mu^2 q^2 + \eta^2\mu q^2 + \mu q^2) + 4q^6\zeta_2^2)(-r^2 + 1) \right) \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$c_6 = \eta^4 q^8 r^2 \tag{C.6}$$

Bibliografía

- [1] Malcolm C Smith. "Synthesis of mechanical networks: the inerter". En: IEEE Transactions on automatic control 47.10 (2002), págs. 1648-1662. doi: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [2] Eduardo Barredo, J.G. Mendoza Larios, Jorge Colín, Jan Mayén, A.A. Flores-Hernández, M. Arias-Montiel, A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber, Journal of Sound and Vibration (2020), doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115583>
- [3] Cuauhtémoc Mazón. "Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico". Tesis de maestría. Tecnológico Nacional de México, 2019.
- [4] Shen, Yujie; Chen, Long; Yang, Xiaofeng; Shi, Dehua; Yang, Jun (2016). Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension. Journal of Sound and Vibration, 361(), 148–158. doi: 10.1016/j.jsv.2015.06.045
- [5] Marco Canales, William Paucar y Noel Juipa. "Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica". En: RevIA 7.4 (2020), págs. 5-9.
- [6] H. Frahm, Device for damping vibrations of bodies, U.S. Patent No. 989958, 1909.
- [7] J. Ormondroyd y Den Hartog J. P. "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber". En: Trans., ASME, Applied Mechanics 50 (1928), págs. 9-22.
- [8] Ozer, M. B., & Royston, T. J. (2005). Extending Den Hartog's Vibration Absorber Technique to Multi-Degree-of-Freedom Systems. Journal of Vibration and Acoustics, 127(4), 341. doi:10.1115/1.1924642
- [9] Osamu Nishihara y Toshihiko Asami. "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)". En: Journal of Vibration and Acoustics 124.4 (sep. de 2002), págs. 576-582. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1500335.
- [10] Toshihiko Asami y Osamu Nishihara. "Closed-Form Exact Solution to H_∞ Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems)". En: Journal of Vibration and Acoustics 125.3 (jun. de 2003), págs. 398-405. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1569514.

- [11] Toshihiko Asami, Osamu Nishihara y Amr M. Baz. "Analytical Solutions to H_∞ and H_2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems". En: Journal of Vibration and Acoustics 124.2 (mar. de 2002), págs. 284-295. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1456458.
- [12] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani. "A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing". En: Journal of Vibration and Acoustics 137.3 (jun. de 2015). 034501. issn: 1048-9002. doi: 10.1115 / 1.4029576.
- [13] Paolo Bisegna; Giovanni Caruso (2012). Closed-form formulas for the optimal pole-based design of tuned mass dampers., 331(10), 2291–2314. doi: 10.1016/j.jsv.2012.01.005.
- [14] Steen Krenk. "Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper". En: Journal of Applied Mechanics 72.6 (mayo de 2005), págs. 936-942. issn: 0021-8936. doi: 10.1115/1.2062867.
- [15] Steen Krenk y Jan Høgsberg. "Tuned mass absorber on a flexible structure". En: Journal of Sound and Vibration 333.6 (2014), págs. 1577-1595. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.029>.
- [16] Steen Krenk y Jan Høgsberg. "Tuned resonant mass or inerter-based absorbers: unified calibration with quasi-dynamic flexibility and inertia correction". En: Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 472.2185 (ene. de 2016), pág. 20150718. doi: 10.1098/rspa.2015.0718.
- [17] M.Z. Ren. "A variant design of the dynamic vibration absorber". En: Journal of Sound and Vibration 245.4 (2001), págs. 762-770. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3564>.
- [18] Kefu Liu y Jie Liu. "The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result". En: Journal of Sound and Vibration 284.3 (2005), págs. 1181-1189. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.002>.
- [19] W.O. Wong e Y.L. Cheung. "Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion". En: Engineering Structures 30.1 (2008), págs. 282-286. issn: 0141-0296. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.007>.
- [20] Y. L. Cheung y W. O. Wong. "Design of a non-traditional dynamic vibration absorber". En: The Journal of the Acoustical Society of America 126.2 (2009), págs. 564-567. doi: 10.1121/1.3158917.

- [21] Y.L. Cheung y W.O. Wong. "H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber—Revisited and new results". En: *Journal of Sound and Vibration* 330.16 (2011). *Computational Aero-Acoustics (CAA) for aircraft noise prediction - Part A*, págs. 3901-3912. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.027>.
- [22] Y.L. Cheung y W.O. Wong. "H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation". En: *Journal of Sound and Vibration* 330.6 (2011), págs. 1039-1044. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.031>.
- [23] Michael Z.Q. Chen y col. "The missing mechanical circuit element". En: *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9.1 (2009), págs. 10-26. doi: 10.1109/MCAS.2008.931738.
- [24] Yinlong Hu, Michael Z.Q. Chen y Zhan Shu. "Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements". En: *Journal of Sound and Vibration* 333.8 (2014), págs. 2212-2225. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.016>.
- [25] Toshihiko Asami. "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel". En: *Journal of Vibration and Acoustics* 139.1 (nov. de 2016). 011015. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.4034776.
- [26] Kohju Ikago, Kenji Saito y Norio Inoue. "Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper". En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3 (2012), págs. 453-474. doi: <https://doi.org/10.1002/eqe.1138>.
- [27] I. F. Lazar, S.A. Neild y D.J. Wagg. "Using an inerter-based device for structural vibration suppression". En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43.8 (2014), págs. 1129-1147. doi: <https://doi.org/10.1002/eqe.2390>.
- [28] Yinlong Hu y Michael Z.Q. Chen. "Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers". En: *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), págs. 297-307. issn: 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>.
- [29] Eduardo Barredo y col. "Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers". En: *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018), págs. 41-53. issn: 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>
- [30] H. M. Trent, "Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical systems," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 27, pp. 500–527, 1955.

- [31] Floyd A Firestone. "A new analogy between mechanical and electrical systems". En: The Journal of the Acoustical Society of America 4.3 (1933), págs. 249-267.
- [32] Michael ZQ Chen y Yinlong Hu. Inerter and Its Application in Vibration Control Systems. Springer, 2019.
- [33] Malcolm C. Smith. "The Inerter: A Retrospective". En: Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems 3.1 (2020), págs. 361-391. doi: 10.1146/annurev-control-053018-023917.
- [34] Yujie Shen y col. "Modeling and Optimization of Vehicle Suspension Employing a Nonlinear Fluid Inerter". En: Shock and Vibration 2016 (2016), págs. 1-9. doi: 10.1155/2016/2623017.
- [35] Kesavan Ramakrishnan y col. En: Multi-Objective Optimization of Road Vehicle Passive Suspensions With Inerter. Ago. de 2016, V003T01A007. doi: 10.1115/DETC2016-59864.
- [36] F.C. Wang, H.A. Chan, Vehicle suspensions with a mechatronic network strut, Vehicle System Dynamics 49 (5) (2011) 811–830.
- [37] F.C. Wang, M.K. Liao, B.H. Liao, W.J. Sue, H.A. Chan, The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters, Vehicle System Dynamics 47 (7) (2009) 805–830.
- [38] I. Takewaki y col. "Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers". En: Structural Control and Health Monitoring 19.6 (2012), págs. 590-608. doi: <https://doi.org/10.1002/stc.457>.
- [39] Gustavo López García. (2021). Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga (tesis de licenciatura). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.
- [40] David Carr Baird. Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Prentice-Hall Hispanoamericana Mexico. DF, 1991.
- [41] Miguel Angel Bernal Yermanos. "Teorema Π -construyendo ciencia en el aula". En: Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (2015).
- [42] Bahman Zohuri. Dimensional Analysis Beyond the Pi Theorem. Oct. de 2016. isbn: 978-3319457253. doi: 10.1007/978-3-319-45726-0.

- [43] Luis Quintanar Medina. "El teorema Pi y la modelación". En: Revista del Departamento de Matemáticas y Física (2006), págs. 1-6.
- [44] Dennis G. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. International Thomson, 1997. isbn: 9687529210,9789687529219.
- [45] Singiresu S. Rao. Vibration of Continuous Systems. English (US). John Wiley y Sons, mar. de 2007. isbn: 0471771716. doi: 10.1002/9780470117866.
- [46] S Graham Kelly. Mechanical vibrations: theory and applications. Cengage learning Stamford, CT, 2012.
- [47] Singiresu S. Rao. Vibraciones mecánicas. spa. 5^a. México: Pearson Educación, 2012. isbn: 978-607-32-0952-6.
- [48] Aliro Cordero Simunovic. "Mecánica". En: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (2013).
- [49] K. Vogtmann V. I. Arnold A. Weinstein. Mathematical Methods Of Classical Mechanics. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989. isbn: 9780387968902,0-387-96890-3,3-540-96890-3.
- [50] Leonard Meirovitch. Fundamentals of vibrations. Waveland Press, 2010.
- [51] Guillermo Abramson. Mecánica Clásica. UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO – CNEA, 2018.
- [52] Herbert Goldstein. Mecánica clásica. Reverté, 2018.
- [53] Earl D. Rainville V; Víctor Hugo Ibarra Mercado; Richard E. Bedient; Oscar Alfredo Palmas Velasco; Phillip E. Bedient. Ecuaciones diferenciales. 8.^a ed. Pearson Educación, 1998. isbn: 9789701700693,9701700694.
- [54] Xiaoling Jin, Michael ZQ Chen y Zhilong Huang. "Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations". En: International Journal of Mechanical Sciences 119 (2016), págs. 80-87.
- [55] James Victor Uspensky, JC Maquieira y JP Varela. Teoría de ecuaciones. Limusa, 1987.
- [56] Israel Gelfand y Vladimir Retakh. "Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions". En: The Gelfand Mathematical Seminars, 1993-1995. Springer. 1996, págs. 93-100.

- [57] Guillermo Dávila Rascón. EL DESARROLLO DEL ALGEBRA MODERNA. En: APUNTES DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS, 2 de mayo 2003. Págs. 38-52
- [58] Fórmulas de Vieta. (2015). http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A5_Vieta.pdf, págs 1-3.
- [59] James Stewart. Cálculo trascendentes tempranas. 8.^a ed. CENGAGE Learning, 2017. isbn: 9786075265490,607526549X.
- [60] Enrique Baquela y Andrés Redchuk. Optimización Matemática con R. Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de problemas. 2013.
- [61] Edwin Joseph Purcell, Steven E Rigdon y Dale E Varberg. Cálculo. Pearson Educación, 2007.
- [62] Antonia Gonzáles Gómez. Diferenciabilidad de funciones de varias variables II, v.2.1. (s.f). En: Dep. de Matematicas Aplicadas a los Recursos Naturales, ETSI de Montes, UPM, págs. 1-12.
- [63] Jacob Pieter Den Hartog. Mechanical vibrations. Courier Corporation, 1976.
- [64] Eduardo Barredo. “Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia”. Tesis de mtría. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2016.
- [65] Asami, Toshihiko; Mizukawa, Yoshito; Ise, Tomohiko (2018). Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function. Journal of Vibration and Acoustics, 140(6), 061012–. doi:10.1115/1.4040229.
- [66] B. P. Lathi. Signal Processing and Linear Systems. First Edition. Oxford University Press, USA, 2000. isbn: 9780941413350,0941413357.
- [67] Yinlong Hu y col. “Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution”. En: Journal of Sound and Vibration 346 (2015), págs. 17-36. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.02.041>.
- [68] Eduardo Barredo. “Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica”. Tesis doct. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2020.

[69] Hu, Yinlong; Chen, Michael Z.Q.; Shu, Zhan; Huang, Lixi (2015). Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of Sound and Vibration*, 346(), 17–36. doi: 10.1016/j.jsv.2015.02.041