



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**Instituto de Física y Matemáticas**  
**Licenciatura en Matemáticas Aplicadas**

**Modelación matemática para la identificación de fuentes  
bioeléctricas en el cerebro.**

**TESIS**  
que para obtener el título de  
**Licenciada en Matemáticas Aplicadas**  
presenta

**Lorena Martínez García**

Directora de tesis:  
Dra. Silvia Reyes Mora

*Huajuapán de León, Oaxaca*

*Noviembre de 2023*



*A mi familia.*



# Agradecimientos

Con este trabajo he avanzado tan sólo una pequeña parte de todo el camino que me queda por recorrer y quisiera agradecer a las personas que formaron parte de su elaboración.

A mis profesores, por su dedicación y el interés que muestran por sus estudiantes.

A mi directora de tesis: Dra. Silvia Reyes Mora, por sus enseñanzas y tiempo dedicado en la dirección de este trabajo, así como su apoyo en todo momento.

A mis sinodales: Dr. Sergio Palafox Delgado, Dr. Salvador Sánchez Perales y Dr. Tomás Pérez Becerra, por el tiempo que dedicaron en revisar mi trabajo y orientarme con sus observaciones para mejorarlo.

A mis padres, Florina Columba García Martínez y Adalberto Martínez García por ser mi apoyo y mi luz en los momentos difíciles, por hacer de mí la persona que soy e impulsarme a seguir adelante.

A mis amigos, por todo su apoyo, paciencia y motivación que me brindaron durante estos años.



---

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Funcionamiento del cerebro y su actividad eléctrica . . . . .	1
1.1.1. El cerebro: un sistema complejo . . . . .	1
1.1.2. La neurona y su fisiología . . . . .	2
1.1.3. Potencial de reposo y potencial de acción de la membrana . . . . .	3
1.1.4. La señal electroencefalográfica . . . . .	6
1.2. Definiciones y resultados matemáticos . . . . .	7
<b>2. Modelación matemática del problema inverso electroencefalográfico</b>	<b>14</b>
2.1. Leyes de Maxwell . . . . .	14
2.2. Modelo electroencefalográfico . . . . .	15
2.3. Planteamiento del problema en su forma discreta . . . . .	18
<b>3. Análisis del problema directo electroencefalográfico</b>	<b>23</b>
3.1. Solución débil del problema de contorno electroencefalográfico . . . . .	23
3.2. Existencia y unicidad de la solución débil del PCE . . . . .	26
<b>4. Análisis del problema inverso electroencefalográfico</b>	<b>37</b>
4.1. Solución mediante mínimos cuadrados . . . . .	37
4.2. Solución obtenida mediante la regularización de Tikhonov . . . . .	40
4.3. Experimentos numéricos . . . . .	48
4.3.1. Solución del problema directo . . . . .	48
4.3.2. Solución del problema directo cuando la fuente se representa como un dipolo eléctrico. . . . .	54
4.3.3. Solución del problema inverso . . . . .	59
<b>Conclusiones</b>	<b>60</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>61</b>

Referencias

63



---

## Introducción

---

La electroencefalografía es una técnica no invasiva que obtiene información sobre la actividad bioeléctrica cerebral, mediante un conjunto de datos que son captados por un conjunto de electrodos ubicados sobre la cabeza de una persona. A este conjunto de datos lo llamaremos electroencefalograma (EGG). El objetivo de la electroencefalografía consiste en entender el funcionamiento normal del cerebro sin necesidad de exponer al paciente, así como estudiar la fisiopatología de diversas enfermedades neurológicas.

Por estas razones, se han elaborado modelos matemáticos considerando al cerebro como un medio conductor, mediante el uso de las leyes de Maxwell. Los modelos obtenidos generalmente se plantean utilizando ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, en los que aparece una función que se desea conocer y que representa una anomalía dentro del cerebro, denominada fuente. Así, el problema inverso electroencefalográfico consiste en localizar la fuente en un modelo matemático, a partir de las lecturas obtenidas por los electrodos del electroencefalograma, colocados sobre el cuero cabelludo. Por otra parte, para validar los métodos de solución al problema inverso electroencefalográfico, es necesario analizar el problema directo asociado. La contribución principal de la tesis es exponer la deducción del modelo matemático electroencefalográfico, además de realizar un análisis detallado del algoritmo propuesto en [23] para la solución del problema directo y así tener una solución al problema inverso.

A continuación se describen los puntos principales que se abordan en cada capítulo de este trabajo:

En el primer capítulo se brinda un panorama general de las partes del cerebro que intervienen en su actividad bioeléctrica; también se presentan conceptos del área de matemáticas que se usarán para demostrar la existencia y unicidad del problema directo de contorno electroencefalográfico, así como para resolver el problema inverso electroencefalográfico.

En el segundo capítulo se describen las leyes de Maxwell y se explica la deducción del modelo matemático para el problema electroencefalográfico; el modelo obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, que permite plantear los problemas directo e inverso electroencefalográfico. En este mismo capítulo, se realiza el planteamiento del problema en su forma discreta, con el fin de que se pueda aplicar en la solución de problemas prácticos.

En el tercer capítulo se demuestra la existencia y unicidad de la solución débil del problema contorno electroencefalográfico, lo cual es importante debido a que su solución sirve para validar la solución del problema inverso.

En el cuarto capítulo se presenta el método de mínimos cuadrados, como una introducción al método de regularización de Tikhonov y se deduce la expresión general de la solución regularizada. También se presenta una aplicación de todo lo visto en los capítulos anteriores, a la solución del problema inverso electroencefalográfico, para el caso en que se tiene una fuente dipolar en el interior del cerebro. Para esta fuente dipolar, se resuelve el problema directo para obtener los datos de entrada para el problema inverso. Se aplica la regularización de Tikhonov para resolver el problema inverso y se encuentra que el error de aproximación es adecuado.

---

# Modelación matemática para la identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro.

Lorena Martínez García

Noviembre de 2023



# Capítulo 1

---

## Conceptos básicos

---

### 1.1. Funcionamiento del cerebro y su actividad eléctrica

#### 1.1.1. El cerebro: un sistema complejo

El cerebro humano es la más compleja de todas las estructuras vivas, pues procesa información sensorial a la vez que mantiene las funciones vitales del organismo; hasta  $10^{11}$  células nerviosas trabajan unidas a través de impulsos eléctricos para coordinar las actividades físicas y los procesos mentales ([6]).

El cerebro se divide en distintas estructuras que interactúan entre sí, en él se puede distinguir dos tipos de tejido: la sustancia gris integrada por neuronas y sus prolongaciones, cuyo color grisáceo se debe a la escasez de mielina, y la sustancia blanca formada por fibras nerviosas miélicas y por tejido neuroglial, es el color blanco de la mielina lo que le confiere su nombre ([32]).

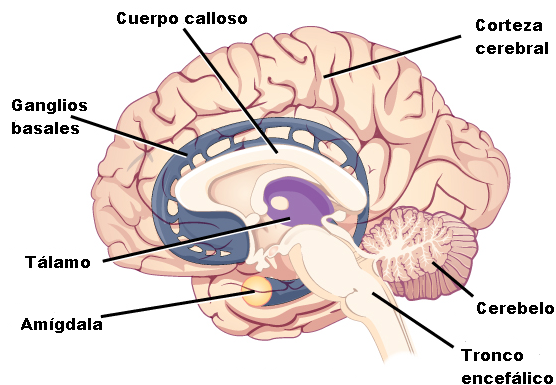


Figura 1.1: Vista sagital de una representación de la anatomía del cerebro ([1]).

A continuación se mencionan algunas de las estructuras más comunes que integran al

cerebro (ver figura 1.1) con sus respectivas funciones ([1], [6], [40]).

- La corteza cerebral. Es la parte más exterior y la más grande del cerebro; es un órgano muy complejo de aproximadamente dos centímetros de espesor y una superficie aproximada de  $1600\text{ cm}^2$ , no es lisa, se encuentra densamente plegada formando giros y surcos denominados cisuras. Esta se encuentra involucrada en varias actividades como la percepción sensorial, actividades motoras voluntarias, almacenamiento de distintos tipos de memoria, actividad consciente, la imaginación, las emociones, entre otros.
- La cisura interhemisférica. Divide la corteza en dos partes llamados hemisferios cerebrales; en los hemisferios se distinguen zonas denominadas lóbulos, que llevan el nombre del hueso con el que se encuentran en contacto. Estos lóbulos se subdividen según la función que realizan, como son: frontal, parietal, occipital y temporal.
- El tálamo. Recibe información del cuerpo y de los diversos órganos sensoriales; además, regula el nivel de conciencia y los aspectos emocionales de las sensaciones.
- El hipotálamo. Controla funciones vitales del organismo como el ciclo del sueño, sed, temperatura corporal, sensaciones de dolor, entre otras; por lo cual, se puede ver como un vínculo entre los sistemas hormonal y nervioso.
- El sistema límbico. Se encarga de las funciones relacionadas con la emoción, los sentimientos y la memoria; este sistema está compuesto por el hipocampo y la amígdala. El hipocampo es importante para la memoria y el aprendizaje, mientras que la amígdala dirige las acciones de los sistemas autónomo y endocrino.
- El cerebelo. Tiene un tamaño de una nuez situada en la base del cráneo. La función más importante del cerebelo es la coordinación de la actividad motora y de la “postura”, también coordina la adquisición del lenguaje.
- Los ganglios basales. Están formados por el cuerpo estriado (compuesto por el núcleo caudado, el putamen y el globo pálido) junto con el núcleo subtálamo y la sustancia negra. Originalmente se creía que solo controlaban las funciones motoras; sin embargo, ahora se sabe que están implicados en la cognición y la motivación.
- El tronco encefálico. Se encarga de transmitir información entre la médula espinal y el cerebro, así mismo interviene en la conciencia, sueño, control cardíaco, la respiración, y además colabora en el trabajo de los nervios craneales.

### 1.1.2. La neurona y su fisiología

El sistema nervioso central está conformado por células nerviosas o neuronas y por células gliales; ambos tipos de células son altamente especializadas, cuya función consiste en la generación y transmisión de señales con el objetivo de comunicarse con las demás neuronas del sistema nervioso ([22]).

---

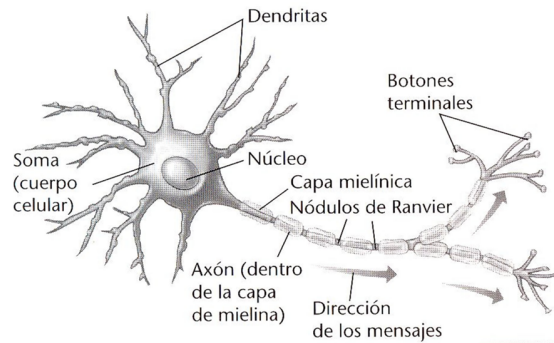


Figura 1.2: Estructura de la neurona ([7]).

El tamaño y forma de las neuronas varía, pero en todas ellas se pueden identificar tres partes (ver figura 1.2): el cuerpo celular o soma, las dendritas y el axón ([1], [6], [19], [22]).

- El cuerpo celular. Contiene al núcleo de la célula y es allí donde ocurre el metabolismo de la célula; el conjunto de cuerpos celulares es lo que le da su color característico a la sustancia gris.
- Las dendritas. Su nombre proviene del latín árbol, son extensiones del cuerpo celular con ramificaciones cortas; a través de ellas, cada neurona recibe señales provenientes de otras neuronas.
- El axón. A través del axón se transmite la información hacia otras neuronas mediante un intercambio químico; esta es una fibra nerviosa que nace del cuerpo celular, se divide cerca del final en finas ramas que contactan con otras neuronas. El proceso de contacto se denomina sinapsis.

La sinapsis se produce por la liberación de sustancias químicas de la neurona presináptica que excita a la postsináptica transmitiendo la información. Durante este proceso de comunicación se activan unas moléculas denominadas neurotransmisores; estas son liberadas principalmente desde el terminal presináptico y viajan por la hendidura sináptica hasta la membrana del elemento postsináptico, donde son contactados por receptores de membrana que en forma directa o indirecta, genera un cambio en el potencial de membrana. Existen dos clases de neurotransmisores; los que se despolarizan para producir un efecto excitatorio y, los que se hiperpolarizan para producir un efecto inhibitorio en la célula postsináptica. Los principales transmisores en las neuronas inhibitorias son el GABA y la glicina, mientras que el glutamato y el aspartato son generalmente excitadores ([19]).

### 1.1.3. Potencial de reposo y potencial de acción de la membrana

Toda neurona en reposo, en su citoplasma tiene un exceso de carga negativa, mientras que en el espacio extracelular contiene una mayor concentración de carga positiva. El potencial de membrana existe en virtud de la diferencia de concentración de iones dentro

y fuera de la célula, entre los iones más importantes se encuentran el sodio ( $Na^+$ ), el potasio ( $K^+$ ), el calcio ( $Ca^{++}$ ) y el cloro ( $Cl^-$ ) ([19]).

Por otra parte, las células, incluidas las neuronas, tienen membranas que están hechas de moléculas lípidas (grasas) y previenen que la mayoría de las cosas salgan o entren en la célula. La superficie de la membrana está formada por una doble capa de fosfolípidos, por sí misma es casi completamente impermeable a los iones, por lo que los iones sólo atraviesan la membrana a través de poros o aberturas especializadas, como los canales iónicos; estos están regulados, se abren y se cierran en respuesta a diversos estímulos, además que reconocen y seleccionan iones específicos. Otros canales iónicos son llamados bombas, estos usan la energía suministrada por la célula para realmente bombear iones dentro o fuera de ella, en el caso de la neurona, se bombea principalmente sodio y potasio ([6]).

Cada neurona tiene una separación de cargas a través de su membrana celular, que consiste de iones positivos y negativos diseminados por la superficie interna y externa de la misma. En reposo, la célula nerviosa tiene un exceso de cargas positivas en la parte externa y un exceso de cargas negativas en la parte interna de la membrana. Cuando las neuronas son estimuladas se genera una transformación interna de las mismas; este proceso es también complejo y requiere de la acción coordinada de diferentes mecanismos biológicos, físicos y químicos, lo cual conduce al llamado “potencial de acción”, lo que constituye una alteración del potencial de membrana de la neurona, gracias al intercambio de iones que corre a lo largo de la longitud del axón. Para que se genere un potencial de acción, necesitamos que el estímulo recibido, a través de una corriente despolarizada, alcance un valor umbral; si la despolarización alcanza este umbral, se producirá una caída de la resistencia de la membrana al sodio, generando la entrada de sodio a la neurona; luego, se genera una caída de la resistencia de membrana al potasio, generando también una salida de potasio hacia el exterior de la neurona. Una vez llegando al punto más alto del potencial de acción, se genera el cierre de los canales de sodio sin poder abrirse nuevamente, hasta que la membrana alcance su estado de reposo otra vez. La neurona ahora se encuentra internamente llena de cargas positivas; con esto, el potasio es empujado hacia el exterior de la célula, provocando que el potencial de membrana comience a recuperar sus condiciones normales; por lo que, los canales de potasio comienzan a cerrarse hasta que este ion ya no puede seguir saliendo ([6], [19]). En la figura 1.3 se puede observar la representación del potencial de acción.

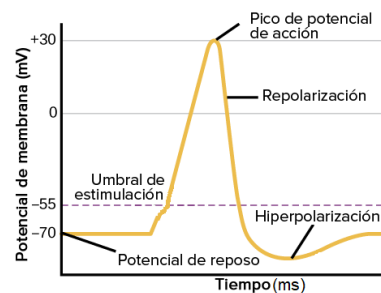


Figura 1.3: Representación del potencial de acción ([15]).



La hiperpolarización es cuando los iones de potasio se encuentran acumulados en la zona exterior de la membrana, con lo cual el potencial de membrana se vuelve más negativo. Una vez que se da este proceso de hiperpolarización entra en acción la bomba sodio-potasio, que expulsa el sodio que se encontraba al interior de la neurona y recupera el potasio que se encontraba al exterior. De aquí que la neurona se encuentra en condiciones de recibir un nuevo estímulo y de repetir los pasos anteriormente descritos ([6], [19]).

La ecuación de Nernst, obtenida en 1888 por W. Nernst, es de gran importancia para la fisiología, pues nos ayuda a proporcionar el voltaje en el que la membrana alcanza su potencial de equilibrio. Considérese que debido a la diferencia de concentraciones de iones a través de la membrana, se genera un gradiente químico que favorece el paso de iones cuando se abren canales de la membrana, estos iones pasan de manera positiva a su gradiente químico y gradualmente generan un potencial eléctrico transmembranal que se opone al flujo de iones impulsado por el gradiente químico, dicho potencial eléctrico aumenta hasta alcanzar un estado de equilibrio donde el flujo es neto; es decir, que sea igual a cero. A este estado se le llama potencial de equilibrio ([6]), y está descrito por la ecuación de Nernst:

$$V = \frac{RT}{ZF} \ln \left( \frac{X_E}{X_I} \right), \quad (1.1.1)$$

donde  $V$  es el voltaje entre el compartimiento  $E$  y el compartimiento  $I$ ,  $R$  es la constante de los gases ideales,  $T$  la temperatura en grados Kelvin,  $Z$  la valencia del ion,  $F$  la constante de Faraday, aproximadamente  $9.65 \times 10^4$  C/mol,  $X_E$  es la concentración extracelular del ion y  $X_I$  es la concentración intracelular del ion.

Dado que en realidad la membrana no es permeable únicamente al potasio como se creía, sino que también es permeable al sodio y al cloro, Goldman modificó la ecuación de Nernst, en 1943, para tener en cuenta la participación de los iones más importantes implicados en la membrana de las neuronas ([6]); esta ecuación viene dada de la siguiente manera:

$$V = \frac{RT}{ZF} \ln \left( \frac{P_{K^+}[K^+]_E + P_{Na^+}[Na^+]_E + P_{Cl^-}[Cl^-]_I}{P_{K^+}[K^+]_I + P_{Na^+}[Na^+]_I + P_{Cl^-}[Cl^-]_E} \right); \quad (1.1.2)$$

donde  $V$  es el voltaje entre el compartimiento  $E$  y el compartimiento  $I$ ,  $P_i$  equivale a la permeabilidad relativa de la membrana a cada ion y  $[ ]_E$ ,  $[ ]_I$  denotan las concentraciones de los iones en el compartimiento  $E$  o  $I$ , respectivamente. Entre los principales iones se encuentran sodio ( $Na^+$ ), potasio ( $K^+$ ) y cloro ( $Cl^-$ ); ya que son los involucrados para determinar el potencial de membrana en reposo de manera simultánea.

En el proceso de conocer más sobre lo que sucede en el cerebro, los avances tecnológicos y otras ciencias nos ayudan a comprender el funcionamiento de las neuronas; estos han permitido crear técnicas con las cuales no sólo se logra obtener información más precisa sobre las conexiones entre regiones cerebrales, identificar neuronas, sino también sobre las zonas activas del cerebro. Con el desarrollo de la tecnología se crearon nuevas técnicas menos invasivas, que permiten obtener información sobre la actividad del cerebro humano vivo, por ejemplo, la tomografía axial computarizada (TAC), la tomografía por emisión de positrones (TEP) y la formación de imágenes por resonancia magnética (IRM), entre otras. Aunque los únicos métodos que responden con rapidez suficiente son las técnicas

de registro eléctrico, es decir, la electroencefalografía (EEG) que detecta la actividad eléctrica del cerebro a partir de las mediciones efectuadas sobre el cuero cabelludo y la magnetoencefalografía (MEG), la cual mide el comportamiento electromagnético que genera la actividad eléctrica en el interior del cerebro ([6]).

#### 1.1.4. La señal electroencefalográfica

La electroencefalografía es una técnica de exploración del Sistema Nervioso Central (SNC) mediante la cual obtiene el registro de la actividad eléctrica cerebral en tiempo real.

El electroencefalograma, conocido por las siglas EEG es un término introducido por el alemán Hans Berger, quien fue el primero en registrar fluctuaciones eléctricas en el cerebro humano mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo ([6]). El EEG consiste en un arreglo de electrodos, dispuestos sobre el cuero cabelludo y gracias a que esta señal amplificada electrónicamente genera un registro que nos permite verla y analizarla. Sirve para medir el flujo de corriente extracelular de la actividad sumada de muchas neuronas; por ejemplo, el EEG de superficie refleja predominantemente la actividad de las neuronas corticales cercanas a los electrodos del equipo. Las señales de EEG representan la diferencia de potencial entre dos electrodos, uno de ellos llamado electrodo activo y el otro electrodo de referencia; además se sabe que el EEG presenta una serie de oscilaciones que, dadas ciertas características predefinidas, son en conjunto denominadas ritmos, generados por una compleja serie de mecanismos celulares y sinápticos ([32]). Un registro típico de EEG, consta de varios trazos dispuestos en líneas horizontales.

La amplitud de la señal de EEG está relacionada con el grado de sincronía en la que interactúan las neuronas. Dadas las bases fisiológicas de la actividad rítmica cerebral, las oscilaciones que obtenemos y que visualizamos en un registro, resultan de la suma de los potenciales postsinápticos excitatorios e inhibitorios; estas señales son de baja amplitud, pero gracias a una serie de amplificadores diferenciales se logran magnificar y analizar ([22]).

Los patrones de EEG oscilatorios, surgen debido a las células marcapasos, en las que que el voltaje de la membrana fluctúa de manera espontánea, o debido a la interacción recíproca de la neuronas; estos patrones es la frecuencia, o tasa de oscilación de un ritmo EEG que es parcialmente sostenido por la actividad de entrada del tálamo.

Las ondas de un EEG varían en su frecuencia entre aproximadamente 0.5 a 40  $Hz$  y su amplitud entre unos pocos microvoltios hasta aproximadamente 100 microvoltios.

Entre los principales ritmos cerebrales básicos y los más relevantes para la práctica experimental tenemos ([36], [21]):

- **Ritmo delta** (entre 0.5 y 4  $Hz$ ). El ritmo delta se presenta cuando se tiene sueño profundo y puede estar presente en el estado vigilia. En el caso de detectarse en una persona despierta, puede indicar que existe algún tipo de anormalidad en el cerebro, como tumores cerebrales.
-

- **Ritmo theta** (4 a 7  $Hz$ ). El ritmo theta ocurre durante el adormecimiento y durante ciertas etapas del sueño.
- **Ritmo alpha** (8 a 13  $Hz$ ). Este ritmo aparece cuando el sujeto está relajado en estado vigilia y con los ojos cerrados.
- **Ritmo beta** (14 a 30  $Hz$ ). Este es un ritmo que se observa en individuos despiertos, alertas y con los ojos abiertos; además puede ser reconocida durante ciertas etapas del sueño también.
- **Ritmo gamma** (entre 30 y 50  $Hz$ ). El ritmo gamma puede ser asociado con la actividad mental superior, incluyendo percepción y conciencia.

Esta técnica no deja de tener limitaciones ya que puede contaminar la actividad de origen extra cerebral con artificios obtenidos mediante el movimiento de algún músculo, el parpadeo, el contacto, etc.

## 1.2. Definiciones y resultados matemáticos

En esta sección introducimos los conceptos básicos que se utilizan a lo largo del trabajo de tesis. Además, se repasan caracterizaciones de algunos de los conceptos que revisamos, con el fin de facilitar el trabajo de demostración en resultados posteriores. Estas definiciones y conceptos se pueden consultar en [3], [16], [18], [37] o en [42].

Iniciamos esta sección definiendo lo que es un dipolo eléctrico, el cual es utilizado en este trabajo.

**Definición 1.** Un *dipolo eléctrico* está formado por dos cargas iguales y opuestas ( $\pm q$ ) colocadas en los extremos de un vector  $\vec{d}$ , dicho vector denota la distancia entre las cargas y apunta en la dirección de la carga positiva, como se muestra en la figura 1.4.

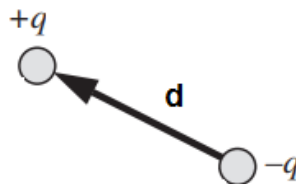


Figura 1.4: Representación del dipolo eléctrico.

A continuación, vamos a definir lo que se denomina un problema bien planteado en sentido de Hadamard, debido a que el problema de la tesis es un problema mal planteado.

**Definición 2.** Sean  $X, Y$  espacios normados,  $L : X \rightarrow Y$  un operador lineal o no lineal. La ecuación  $Lx = y$  es *correctamente planteada* o *bien planteada* si se cumple lo siguiente:

1. *Existencia*: Para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $Lx = y$ .
2. *Unicidad*: Para todo  $y \in Y$ , existe a lo más un  $x \in X$  que cumple  $Lx = y$ .
3. *Estabilidad*: La solución  $x$  depende continuamente de  $y$ , es decir; para cada sucesión  $(x_n) \subset X$  con  $Lx_n \rightarrow Ly$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Un problema se denomina *mal planteado* si no cumple con alguna de las condiciones anteriores.

Como hemos mencionado antes, el problema directo electroencefalográfico está bien planteado, debido a que cumple con las condiciones de la definición; mientras que el problema inverso electroencefalográfico no satisface los postulados del buen planteamiento en el sentido de Hadamard, debido a que no se cumplen las condiciones de unicidad y estabilidad, por lo que se dice que es un problema mal planteado ([32]).

Cabe mencionar que los problemas de la forma  $Lx = y$ , donde  $L$  es un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita, se pueden escribir en forma matricial  $Ax = y$ , donde  $A$  es la representación matricial del operador lineal; de manera que se puede analizar su buen o mal planteamiento a partir de lo que se conoce como el número de condición de la matriz, que se define a continuación.

**Definición 3.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible. El *número de condición* de la matriz  $A$  se define y denota por:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

El número de condición de una matriz sirve para determinar si un problema de la forma  $Ax = y$ , donde  $A$  es una matriz y  $x$  e  $y$  son vectores, es bien o mal planteado. Esto es, si el número de condición de la matriz  $A$  es “cercano” a 1, se dice que el problema es bien planteado, pero si el número de condición de  $A$  es “mucho mayor” que 1, se dice que el problema es mal planteado. Esto significa que si se tiene un pequeño error en los datos  $y$  se obtendrá un error grande en la solución  $x$ .

Para el análisis de la solución del problema directo de la tesis necesitamos algunos resultados de análisis funcional que citamos a continuación, los cuales pueden ser consultados en [4], [18], [34] y [37].

**Definición 4.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se llama cuadrado integrable cuando

$$\int_{\Omega} |f|^2 < \infty.$$

El conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en  $\Omega$  se denota por  $L^2(\Omega)$ .

**Definición 5.** Se llama espacio de Sobolev de orden 1 sobre el conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  que se define y denota por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \exists g_1, g_2, g_3 \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, 3 \right\},$$

donde  $C_0^\infty(\Omega)$  es el conjunto de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto en  $\Omega$ .

Para  $v \in H^1(\Omega)$  se define la derivada parcial débil de  $v$  como  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$  y el gradiente de  $v$  como

$$\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right).$$

El espacio  $H^1(\Omega)$  se dota del producto interno:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx. \quad (1.2.1)$$

**Teorema 1.2.1. (Primera identidad de Green)** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^3$  con frontera de clase  $C^1$ . Si  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  y  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ , entonces,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) dx,$$

donde  $n$  es el vector normal exterior a  $\partial\Omega$  y  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  es el operador laplaciano.

**Teorema 1.2.2. (Densidad)** Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  abierto, acotado y con frontera de clase  $C^1$ . Si  $u \in H^1(\Omega)$ , entonces existe una sucesión  $\{u_n\}$  en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que la sucesión de restricciones  $\{u_n|_{\Omega}\}$  converge a  $u$  en  $H^1(\Omega)$ . Esto es equivalente a que el conjunto  $R$  es denso en  $H^1(\Omega)$ , donde  $R = \{v \in C^\infty(\Omega) : v = u|_{\Omega} \text{ para algún } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\}$ .

*Demostración.* Ver el corolario 9.8 en [4]. ■

**Proposición 1.2.3.** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es abierto, acotado y con frontera de clase  $C^1$ , entonces  $C^k(\Omega)$  es denso en  $H^1(\Omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  abierto, acotado y con frontera de clase  $C^1$ . Por demostrar que  $C^k(\Omega)$  es denso en  $H^1(\Omega)$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ ; es decir, que para todo  $x \in H^1(\Omega)$  existe una sucesión  $\{x_n\}$  en  $C^k(\Omega)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

Sea  $x \in H^1(\Omega)$ . Por el teorema (1.2.2)  $R$  es denso en  $H^1(\Omega)$ , entonces existe una sucesión  $\{x_n\}$  en  $R$  tal que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Debido a que  $R \subset C^k(\Omega)$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que la sucesión  $\{x_n\}$  está en  $C^k(\Omega)$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Esto implica que existe una sucesión  $\{x_n\}$  en  $C^k(\Omega)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

Debido que  $x$  es arbitrario, se concluye que  $C^k(\Omega)$  es denso en  $H^1(\Omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . ■

**Teorema 1.2.4. (Teorema de operador traza)** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es abierto, acotado y con frontera de clase  $C^1$ , entonces existe un operador lineal y continuo  $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  tal que:

1.  $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ , si  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,

$$2. \|T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

para cada  $u \in H^1(\Omega)$ , con la constante  $C$  dependiendo solo de  $\Omega$ .

*Demostración.* Ver [18], página 258. ■

**Teorema 1.2.5. (Teorema de representación de Riezs)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $H'$  su espacio dual. Luego, si  $f \in H'$ , entonces existe un único elemento  $u_f \in H$  tal que,  $f(x) = \langle u_f, x \rangle_H$ , para todo  $x \in H$ .

La aplicación  $H' \rightarrow H$  tal que  $f \rightarrow u_f$  es una isometría, es decir,  $\|u_f\|_H = \|f\|_{H'}$ .

**Definición 6.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach tales que  $X \subset Y$ . Se dice que  $X$  es un embebimiento compacto en  $Y$  (denotado por  $X \subset\subset Y$ ), si

1.  $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ , para algún  $C$  constante positivo.
2. Si  $\{u_n\}$  es una sucesión acotada en  $X$ , entonces existe una subsucesión  $\{u_{n_k}\}$  de  $\{u_n\}$  y un punto  $u \in Y$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - u\|_Y = 0$ .

**Teorema 1.2.6. (Teorema de Rellich Kondrachov)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y acotado. Si  $\partial\Omega$  es de clase  $C^1$ , entonces

$$H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega).$$

*Demostración.* Ver [18], página 272. ■

**Definición 7.** Sea  $L : X \rightarrow Y$  operador lineal. Se dice que  $L$  es compacto, si para toda sucesión  $\{u_n\}$  acotada en  $X$ , existe una subsucesión  $\{u_{n_k}\}$  de  $\{u_n\}$  y un punto  $y \in Y$  tal que  $L(u_{n_k}) \rightarrow y$  con la norma de  $Y$ .

**Proposición 1.2.7.** Sean  $X, Y$  espacios de Banach tal que  $X \subset\subset Y$ . Luego,  $i : X \rightarrow Y$  definida por  $i(x) = x$  es compacto.

*Demostración.* Por demostrar que  $i$  es compacto.

Sea  $\{z_n\}$  una sucesión acotada en  $X$ .

Dado que  $\{z_n\}$  es un sucesión acotada en  $X$ , entonces existe una constante  $M > 0$  tal que  $\|z_n\|_X \leq M$ .

Como  $X$  es un embebimiento compacto en  $Y$ , entonces existe una subsucesión  $\{z_{n_k}\}$  de  $\{z_n\}$  y un punto  $z \in Y$  tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{n_k} - z\|_Y = 0,$$

luego,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|i(z_{n_k}) - z\|_Y = 0.$$

Por lo tanto,  $i$  es compacto. ■

**Observación 1.2.8.** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y acotado, además  $X = H^1(\Omega)$  e  $Y = L^2(\Omega)$ , entonces del teorema (1.2.6) y de la proposición (1.2.7), se obtiene que:

$$i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

definido por

$$i(x) = x, \forall x \in H^1(\Omega)$$

es compacto.

**Teorema 1.2.9.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios de Banach. Si  $K : X \rightarrow Y$  es compacto y  $L : Y \rightarrow Z$  es lineal y continuo, entonces

$$L \circ K : X \rightarrow Z$$

es compacto.

*Demostración.* Supongamos que  $K : X \rightarrow Y$  es compacto y  $L : Y \rightarrow Z$  es lineal y continuo. Por demostrar que  $L \circ K : X \rightarrow Z$  es compacto; es decir, para toda sucesión acotada  $\{v_n\}$  en  $X$ , existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  y  $z \in Z$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(L \circ K)(v_{n_k}) - z\|_Z = 0.$$

Sea  $\{v_n\}$  una sucesión acotada cualquiera en  $X$ .

Debido que  $K$  es compacto, entonces existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  de  $\{v_n\}$  y  $y \in Y$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|K(v_{n_k}) - y\|_Y = 0.$$

Como  $L$  es lineal y continuo, se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L(K(v_{n_k})) - L(y)\|_Z = 0. \quad (1.2.2)$$

Dado que existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  de  $\{v_n\}$  y  $z = L(y) \in Z$  tal que se cumple (1.2.2), se concluye que  $L \circ K : X \rightarrow Z$  es compacto. ■

**Definición 8.** Sean  $K : X \rightarrow Y$  un operador lineal entre espacios vectoriales,  $f \in Y$  y  $x \in X$ ; a la ecuación  $Kx = f$  se le conoce como ecuación de Fredholm de primera especie y, a la ecuación  $(I - K)x = f$  como ecuación de Fredholm de segunda especie, donde  $I$  es el operador identidad.

**Teorema 1.2.10. (Teorema de alternativa de Fredholm)** Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $K : H \rightarrow H$  un operador compacto e  $y \in H$ . Luego, existe  $x \in H$  tal que  $(I - K)x = y$  si y solo si  $y$  es ortogonal a toda solución de  $(I - K^*)\gamma = 0$ ; donde  $K^*$  es el operador adjunto de  $K$ .

**Definición 9.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se define el espacio  $H_0^1(\Omega)$  como la adherencia en  $H^1(\Omega)$  de  $C_0^\infty(\Omega)$ , es decir:

$$H_0^1(\Omega) = Cl_{\|\cdot\|_{H^1}}(C_0^\infty(\Omega)).$$

**Teorema 1.2.11. (Teorema de la Desigualdad de Poincaré - Wirtinger's)** Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  es un abierto no vacío, conexo y acotado con  $\partial\Omega$  de  $C^1$ , entonces existe una constante  $C_1 > 0$  tal que para todo  $u \in H^1(\Omega)$  se tiene:

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (1.2.3)$$

donde  $(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$ .

*Demostración.* Ver [4], página 312. ■

**Proposición 1.2.12.** Sea  $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $R : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_1)$  dado por  $R(u) = u|_{\Omega_1}$ , entonces  $R$  es continuo.

*Demostración.* Sea  $R : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_1)$  dado por  $R(u) = u|_{\Omega_1}$ . Por demostrar que  $R$  es continuo.

Sea  $u \in H^1(\Omega)$ . Veamos que  $R$  es continuo en  $u$ .

Supongamos que  $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$  converge a  $u$ . Probemos que  $\{R(u_n)\}$  converge a  $R(u)$ , es decir, que para todo  $\gamma > 0$  existe  $N_\gamma$  tal que:

$$\|R(u_n) - R(u)\|_{H^1(\Omega_1)} < \gamma, \quad \forall n \geq N_\gamma.$$

Sea  $\gamma > 0$ .

Observemos que:

$$\begin{aligned} \|R(u_n) - R(u)\|_{H^1(\Omega_1)}^2 &= \|u_n|_{\Omega_1} - u|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \\ &= \int_{\Omega_1} (u_n - u)^2 dx + \int_{\Omega_1} |\nabla(u_n - u)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} (u_n - u)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 dx \\ &= \|u_n - u\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Por otra parte, como  $\{u_n\}$  converge a  $u$ , entonces para este  $\gamma > 0$  existe  $N_\gamma$  tal que:

$$\|u_n - u\|_{H^1} < \gamma, \quad \forall n \geq N_\gamma. \quad (1.2.5)$$

De la observación (1.2.4) y de (1.2.5), tenemos que dado  $\gamma > 0$ , existe  $N_\gamma$  tal que:

$$\|R(u_n) - R(u)\|_{H^1(\Omega_1)} < \gamma, \quad \forall n \geq N_\gamma.$$

Por tanto,  $\{R(u_n)\}$  converge a  $R(u)$ . Como  $u$  es arbitrario, se concluye que  $R$  es continuo en  $H^1(\Omega)$ . ■

Por otro lado, debido que la densidad de carga de la fuente, empleada para resolver el problema directo electroencefalográfico, está descrita en términos de la distribución delta de Dirac, es preciso comentar acerca de ella.

---



La distribución delta de Dirac  $\delta$  informalmente la podemos definir mediante:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

con las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0),$$

para toda función continua  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

La distribución delta de Dirac se usa para representar fenómenos en los que aparecen sucesos muy rápidos como: un golpe a un sistema dinámico, un pulso de una señal, un sonido o fuerza de gran amplitud que ocurre en el instante  $t = t_0$ , entre otros. Para el caso de la tesis esta distribución nos modela a la fuente como la densidad volumétrica de una carga puntual ubicada en  $t_0$ , es decir, la fuente es nula en todo el espacio excepto en el punto  $t_0$ .

---



## Capítulo 2

---

# Modelación matemática del problema inverso electroencefalográfico

---

En este capítulo presentamos la formulación de un modelo de medio conductor para establecer relaciones entre las fuentes bioeléctricas y el potencial medido sobre el cuero cabelludo. Dicha relación nos permite estudiar el problema de la localización de fuentes bioeléctricas en el cerebro.

### 2.1. Leyes de Maxwell

Hasta aquí hemos revisado que las fuentes bioeléctricas relacionadas con el movimiento de iones de la membrana celular son representadas como fuentes de corriente, gracias a los potenciales de acción.

El resultado de la actividad eléctrica que sucede dentro del cerebro es la generación de campos eléctricos y magnéticos que se comportan de acuerdo a las leyes físicas de Maxwell. Fue en enero de 1865 cuando Maxwell publicó un artículo titulado *Una teoría dinámica del campo electromagnético*, en el que desarrolló las ecuaciones del electromagnetismo, que hoy conocemos como ecuaciones de Maxwell, y son las siguientes:

1.  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ;
2.  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ;
3.  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ;
4.  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ;

donde:

$\mathbf{E}$  representa el campo eléctrico,

$\mathbf{B}$  simboliza el campo magnético,

$\rho$  representa la densidad de carga eléctrica,

$\varepsilon_0$  es la constante eléctrica o permitividad eléctrica del vacío,

$\mu_0$  denota la permeabilidad magnética del vacío o constante magnética,  
 $\mathbf{J}$  representa la densidad de la corriente eléctrica.

Las cuatro ecuaciones antes mencionadas fueron descubiertas por otros grandes personajes, Maxwell al estudiarlas encontró una relación entre ellas, sin embargo, encontró que la ley de Ampere junto con la ley de Faraday violaba el principio de conservación de la carga, por lo que tuvo que modificarla, el término que introdujo recibe el nombre de corriente de desplazamiento ([33]); dichas ecuaciones describen la relación entre el campo electromagnético y el campo eléctrico. La electricidad y el magnetismo se estudiaban de forma separada, hasta que en 1820 el danés Hans Christian Orsted se dio cuenta de que una corriente eléctrica genera a su alrededor un campo magnético.

La primera de las ecuaciones presentada es la *ley de Gauss* para el campo eléctrico: esta equivale a la ecuación que describe la interacción entre cargas de Coulomb; en primera instancia expresa que el campo eléctrico depende linealmente de la magnitud de la carga que lo genera y, en segundo lugar, solo es válida si es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Por lo que conceptualmente, la ley de Gauss es una ecuación diferencial que describe el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas eléctricas. La segunda ecuación también es la *ley de Gauss* para el campo magnético lo cual nos habla que no existen los monopolos magnéticos.

La *ley de Faraday* es la tercera ecuación mencionada con anterioridad. Michael Faraday enunció un principio que hablaba exclusivamente de cables y circuitos, pero Maxwell fue capaz de estructurarlo como una ley ajena a circuitos y corrientes; es decir, escribirlo en términos matemáticos que era aplicado a distintos casos. Hacia 1830, Faraday descubrió que la geometría del campo eléctrico depende del cambio del campo magnético en el tiempo, incluso en ausencia de cargas.

La última ecuación es la conocida *ley de Ampere-Maxwell* modificada, la parte  $\mu_0\mathbf{J}$  nos menciona que las fuentes primarias del campo magnético son las corrientes eléctricas y el término  $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$  nos habla que un campo eléctrico variable produce un rotacional del campo magnético, incluso en ausencia de corrientes.

## 2.2. Modelo electroencefalográfico

Para resolver el problema inverso de identificación de fuentes se planteará primero, el problema directo asociado, el cual consiste en determinar el potencial electrostático suponiendo conocida la fuente de corriente neuronal en el cerebro.

Para el análisis del problema de identificación de fuentes bioeléctricas se considera la cabeza dividida en capas conductoras correspondientes a diferentes regiones de la cabeza como los músculos cerebrales, cerebro, líquido intracraneal, cráneo y cuero cabelludo, haciendo uso del modelo simple del medio conductor y de la aproximación casi estática de las ecuaciones de Maxwell.

Sean  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$  la región correspondiente al cerebro,  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$  las capas restantes de la cabeza,  $S_1$  la frontera de  $\Omega_1$ , que corresponde a la parte externa de la corteza cerebral y  $S_2$  al cuero cabelludo, como se muestra en la figura 2.1

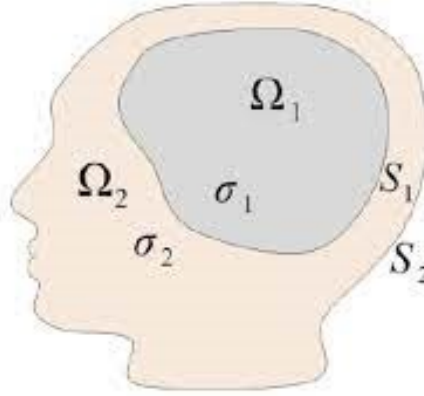


Figura 2.1: Representación de la cabeza como dos medios conductores ([35]).

Observemos que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son subconjuntos abiertos y conexos de  $\mathbb{R}^3$  con frontera de clase  $C^1$  y que la constante de conductividad de  $\Omega_1$  está dada por el número positivo  $\sigma_1$  y la de  $\Omega_2$  por el número positivo  $\sigma_2$ . Asumamos además que las corrientes que se producen en la cabeza se deben únicamente a la actividad eléctrica del cerebro, las cuales pueden tener un comportamiento óhmico debido que la corriente generada por las cargas iónicas que salen y entran en los canales iónicos fluyen en todo el espacio extracelular.

Por otra parte, existe un mecanismo de generación de otras corrientes producidas por la actividad neuronal a las que llamaremos impresas. La densidad de las corrientes impresas está dada mediante la función  $J : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la cual se origina de la fuerza electromotriz producida por la actividad biológica.

Sea  $J_T^i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  la densidad de corriente total en  $\Omega_i$  y  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo eléctrico generado por la actividad bioeléctrica en  $\Omega$ . Dado que las corrientes impresas y óhmicas están presentes en la región  $\Omega_1$ , entonces la suma de dichas corrientes está dada por la densidad total, de modo que:

$$J_T^1 = J + \sigma_1 E, \text{ en } \Omega_1; \quad (2.2.1)$$

como en  $\Omega_2$  solo puede haber corrientes óhmicas, se tiene que:

$$J_T^2 = \sigma_2 E, \text{ en } \Omega_2. \quad (2.2.2)$$

Se sabe que la ecuación de continuidad está dada por ([12]):

$$\nabla \cdot J_T^i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.2.3)$$

tomando en cuenta que la variación de la densidad de carga  $\rho_i$  con respecto al tiempo en cada región  $\Omega_i$  es de la forma ([35]):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \rho_0 e^{-\frac{\sigma_i}{\epsilon_0} t}, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.4)$$

donde la permitividad eléctrica del vacío es  $\epsilon_0 = 1.8 \times 10^{-9} \frac{F}{m}$ ,  $\rho_0$  es la densidad de carga en el tiempo 0 y además debido que  $\frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \approx \frac{1}{200} \frac{1}{Ohm \cdot m}$  para el cráneo, es mucho menor en ambas regiones, tal término se puede despreciar de la ecuación de continuidad, de modo que:

$$\nabla \cdot J_T^i = 0, \quad i = 1, 2; \text{ en } \Omega. \quad (2.2.5)$$

Sustituyendo (2.2.1) y (2.2.2) en (2.2.5), obtenemos:

$$\nabla \cdot (J + \sigma_1 E) = 0, \text{ en } \Omega_1; \quad (2.2.6)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_2 E) = 0, \text{ en } \Omega_2. \quad (2.2.7)$$

Por otra parte, de la ley de Faraday, tenemos que:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{ en } \Omega;$$

donde  $B$  representa el campo magnético generado por la actividad eléctrica del cerebro. Basados en los resultados experimentales, el término  $\frac{\partial B}{\partial t}$  puede ser despreciado y, considerando que la corriente en el medio conductor es continua, se concluye que el campo eléctrico es irrotacional, obteniéndose la relación siguiente:

$$\nabla \times E = 0, \text{ en } \Omega;$$

y dado que  $\Omega$  es simplemente conexo, entonces existe un potencial electrostático  $u$  definido en  $\Omega$ , tal que:

$$E = -\nabla u, \text{ en } \Omega. \quad (2.2.8)$$

Definamos  $u_i = u|_{\Omega_i}$ , para  $i = 1, 2$ .

Sustituyendo (2.2.8) con  $i = 1$  en (2.2.6), se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (J + \sigma_1 E) \\ &= \nabla \cdot (J + \sigma_1 (-\nabla u_1)) \\ &= \nabla \cdot J - \nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1), \text{ en } \Omega_1. \end{aligned}$$

Sea  $f = -\nabla \cdot J$ . De la igualdad anterior se sigue:

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) = f, \text{ en } \Omega_1. \quad (2.2.9)$$

Ahora, al sustituir (2.2.8) con  $i = 2$  en (2.2.7), se obtiene:

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2) = 0, \text{ en } \Omega_2. \quad (2.2.10)$$

Por otra parte, para la determinación del potencial  $J$  es necesario imponer condiciones de contorno sobre las fronteras que separan a las distintas regiones en que la cabeza ha sido dividida. Estas son las que corresponden a la continuidad del potencial y flujos de corriente en la superficie  $S_1$ , que separa a la región  $\Omega_1$  de  $\Omega_2$ :

$$u_1 = u_2, \text{ sobre } S_1, \quad (2.2.11)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_1}, \text{ sobre } S_1, \quad (2.2.12)$$

y se denominan condiciones de transmisión, las cuales corresponden al acoplamiento de dos medios conductores con diferente conductividad. Dado que ninguna corriente puede ser inyectada en el aire, es decir, fuera de la cabeza humana debido a la baja conductividad del aire, se obtiene la siguiente condición de frontera:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_2} = 0, \text{ sobre } S_2, \quad (2.2.13)$$

donde  $\frac{\partial u_i}{\partial \widehat{n}_j}$  denota la derivada normal de  $u_i$  en  $S_j$  respecto al vector normal unitario  $\widehat{n}_j$  exterior a  $S_j$  con  $i, j = 1, 2$ .

Al problema elíptico con valores en la frontera (2.2.9)-(2.2.13) se le llama problema de contorno electroencefalográfico (PCE).

Tomando en cuenta la medición dada por el EEG denotada por  $V$ ,

$$u_2 = V, \text{ sobre } S_2, \quad (2.2.14)$$

se plantean los siguientes problemas.

Llamaremos **problema directo electroencefalográfico** al problema que consiste en hallar la solución  $u|_{S_2} = V$ , que satisface el PCE (2.2.9)-(2.2.14) cuando se conoce  $f \in L^2(\Omega_1)$ .

Mientras que el **problema inverso electroencefalográfico**, consiste en encontrar la fuente  $f \in L^2(\Omega_1)$  a partir de la medición electroencefalográfica que corresponde al valor del potencial  $u$  en la frontera  $S_2$ , donde  $u$  satisface el modelo (2.2.9)-(2.2.14).

## 2.3. Planteamiento del problema en su forma discreta

En esta sección plantearemos el modelo electroencefalográfico, de manera matricial; para esto primero reescribamos el modelo ya obtenido en el capítulo anterior, sin decir que sucede particularmente en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Sabemos que  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$  y que la densidad de corriente total en un punto  $r$  del volumen conductor puede ser dividida en dos flujos de corriente que será la primaria  $J$  y la óhmica  $\sigma E$ , con la diferencia de que la constante de conductividad y el campo eléctrico ahora dependen del punto  $r$ , es decir,  $\sigma = \sigma(r)$  y  $E = E(r)$ . De aquí que,  $J_T(r) = J(r) + \sigma(r)E(r)$ .

Dado que la ecuación (2.2.9) es una ecuación de Poisson para conducción eléctrica y que dicha ecuación nos da una noción de lo que ocurre cuando la densidad de corriente total es de la forma  $J_T = J + \sigma E$ . Así,

$$\nabla \cdot (\sigma(r)\nabla u(r)) = f, \text{ sobre } \Omega, \quad (2.3.1)$$

donde  $\nabla J(r) = f$ .

---

Recordemos que las condiciones de contorno para determinar el potencial  $J(r)$ , son las siguientes:

$$u_1(r) = u_2(r), \quad r \in S_1, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_1(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial \widehat{n}_1(r)} = \sigma_2 \frac{\partial u_2(r)}{\partial \widehat{n}_1(r)}, \quad r \in S_1, \quad (2.3.3)$$

$$\sigma(r) \frac{\partial u(r)}{\partial \widehat{n}_2(r)} = 0, \quad r \in S_2. \quad (2.3.4)$$

Se sabe que para obtener una solución del problema (2.3.1) - (2.3.4) se debe especificar el valor del potencial en un punto sobre la superficie:

$$u(r_0) = u_0, \quad \text{para algún } r_0 \in S_2. \quad (2.3.5)$$

Del análisis anterior, se obtiene la ecuación de Poisson con condiciones de frontera (2.3.2)-(2.3.5). Este problema tiene solución analítica para geometrías simples, pero no para geometrías complejas; en estos casos, se puede resolver numéricamente.

La solución numérica del problema puede ser formulada en término de un sistema de ecuaciones lineales; para esto, se deben considerar ciertos elementos para su construcción.

Como cada neurona podemos considerarla una fuente de densidad de corriente, y al formarse un grupo grande de células que se activan de forma casi sincrónicamente en un cierto punto específico del cerebro se obtiene una señal EEG medible. En estos casos es posible modelar el arreglo de neuronas activas mediante una fuente puntual de densidad de corriente, o bien, una fuente dipolar de potencial eléctrico.

Un dipolo se define por seis parámetros: tres para su posición en el espacio, dos para su orientación y uno para su intensidad.

Existen muchos modelos de fuentes de corrientes que se pueden acercar más a la realidad o que requieran un aumento de parámetros para su resolución; sin embargo, en simulaciones se ha probado que al tomar a un dipolo de fuente equivalente, a nivel macroscópico, como la representación de las fuentes generadoras del potencial eléctrico no se produce grandes errores en los parámetros de posición, orientación e intensidad ([5]). En este caso, el parámetro de posición del dipolo  $r_{dip}$  se escoge típicamente a la mitad de los dos monopolos.

Por otra parte, los parámetros de orientación e intensidad se representan por un vector llamado momento dipolar  $\mathbf{s}$ . El momento del dipolo  $\mathbf{s}$  definido mediante un vector unitario  $e_s$  y una magnitud dada por  $s = \|\mathbf{s}\| = Ic$ , donde  $c$  es la distancia entre los dos monopolos e  $I$  es la cantidad de corriente. De aquí que, el momento dipolar se puede escribir como ([37]):

$$\mathbf{s} = Ice_s.$$

Generalmente, el dipolo se puede descomponer en tres dipolos orientados a lo largo de cada uno de los ejes cartesianos, estos estarán ubicados en la misma posición del dipolo original. La magnitud de cada uno de estos nuevos dipolos es igual a la proyección ortonormal en el eje respectivo, escrito como:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_x e_x + \mathbf{s}_y e_y + \mathbf{s}_z e_z, \quad (2.3.6)$$



donde  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$  son los vectores unitarios a lo largo de los ejes. También,  $\mathbf{s}_x$ ,  $\mathbf{s}_y$  y  $\mathbf{s}_z$  son llamadas los componentes vectoriales del dipolo. Dado que es posible determinar el potencial  $V$  en un punto de medición arbitrario  $r$ , debido a un dipolo en la posición  $r_{dip}$  con momento  $\mathbf{s}$ , este puede descomponerse en las coordenadas cartesianas de la forma:

$$V(r, r_{dip}, \mathbf{s}) = \mathbf{s}_x V(r, r_{dip}, e_x) + \mathbf{s}_y V(r, r_{dip}, e_y) + \mathbf{s}_z V(r, r_{dip}, e_z). \quad (2.3.7)$$

Como se quiere encontrar una solución al problema directo supóngase que hay una cantidad  $N$  de electrodos sobre el cuero cabelludo ubicados en  $r_i$ , con  $i = 1, \dots, N$ , la ecuación (2.3.7) puede ser ordenada matricialmente, resultando:

$$\begin{aligned} V(r, r_{dip}, \mathbf{s}) &= \begin{bmatrix} V(r_1, r_{dip}, \mathbf{s}) \\ V(r_2, r_{dip}, \mathbf{s}) \\ \vdots \\ V(r_N, r_{dip}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V(r_1, r_{dip}, e_x) & V(r_1, r_{dip}, e_y) & V(r_1, r_{dip}, e_z) \\ V(r_2, r_{dip}, e_x) & V(r_2, r_{dip}, e_y) & V(r_2, r_{dip}, e_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V(r_N, r_{dip}, e_x) & V(r_N, r_{dip}, e_y) & V(r_N, r_{dip}, e_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{s}_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Ahora supongamos que se tiene  $M$  dipolos de corriente, al aplicar el principio de superposición, se obtiene como resultado:

$$V(r, r_{dip}, \mathbf{s}) = \begin{bmatrix} V(r_1, r_{dip,1}, e_x) & V(r_1, r_{dip,1}, e_y) & V(r_1, r_{dip,1}, e_z) & \cdots & V(r_1, r_{dip,M}, e_x) & V(r_1, r_{dip,M}, e_y) & V(r_1, r_{dip,M}, e_z) \\ V(r_2, r_{dip,1}, e_x) & V(r_2, r_{dip,1}, e_y) & V(r_2, r_{dip,1}, e_z) & \cdots & V(r_2, r_{dip,M}, e_x) & V(r_2, r_{dip,M}, e_y) & V(r_2, r_{dip,M}, e_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V(r_N, r_{dip,1}, e_x) & V(r_N, r_{dip,1}, e_y) & V(r_N, r_{dip,1}, e_z) & \cdots & V(r_N, r_{dip,M}, e_x) & V(r_N, r_{dip,M}, e_y) & V(r_N, r_{dip,M}, e_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{x1} \\ \mathbf{s}_{y1} \\ \mathbf{s}_{z1} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{xM} \\ \mathbf{s}_{yM} \\ \mathbf{s}_{zM} \end{bmatrix}.$$

Y si se tienen  $N$  electrodos,  $M$  dipolos y  $T$  muestras de tiempo discreto, tenemos que:

$$V = \begin{bmatrix} V(r_{1,1}) & \cdots & V(r_{1,T}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V(r_{N,1}) & \cdots & V(r_{N,T}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(r_{1,r_{dip,1},e_x}) & \cdots & V(r_{1,r_{dip,M},e_z}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V(r_{N,r_{dip,1},e_x}) & \cdots & V(r_{N,r_{dip,M},e_z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{x1,1} & \cdots & \mathbf{s}_{x1,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{s}_{zM,1} & \cdots & \mathbf{s}_{zM,T} \end{bmatrix}. \quad (2.3.9)$$

Que puede ser reescrito de la forma:

$$V = KS, \quad (2.3.10)$$

donde  $V \in \mathbb{R}^{N \times T}$  es la matriz con los potenciales en los electrodos,  $S \in \mathbb{R}^{3M \times T}$  es la matriz de momentos dipolares y  $K \in \mathbb{R}^{N \times 3M}$  se denomina *matriz de propagación* y contiene la información de la posición de los electrodos y la posición de las fuentes dipolares.

El **problema directo** en EEG consiste en calcular el potencial en la superficie del cuero cabelludo  $V$ , dada una fuente de corriente de características conocidas.

La solución de este problema en el caso más simple es cuando se tiene al medio conductor infinito, homogéneo e isotrópico, es decir, se supone un medio conductor infinito con conductividad  $\sigma$  en donde está contenido un dipolo de corriente con momento dipolar  $\mathbf{s} = se_s$  en la posición  $r_{dip}$ . El potencial se reduce a ([38]):

$$V(r, r_{dip}, \mathbf{s}_i) = \frac{\mathbf{s} \cdot (r - r_{dip})}{4\pi\sigma\|r - r_{dip}\|^3}; \quad (2.3.11)$$

con  $r$  como la posición donde se calcula el potencial. Tomando que la ubicación del dipolo sea en el origen del sistema coordenado cartesiano y con orientación a lo largo del eje  $Z$ , de aquí que:

$$V(r, 0, \mathbf{s}e_z) = \frac{\mathbf{s} \cdot \cos(\theta)}{4\pi\sigma r^2}; \quad (2.3.12)$$

donde  $\theta$  representa el ángulo entre el eje  $z$  y la posición  $r$ , además que  $\mathbf{r} = \|r\|$ .

La solución del problema (2.3.1)-(2.3.5) de forma numérica, para el modelo de capas de conductividad homogénea e isotrópica, se puede obtener por medio del método de elementos de contorno (BEM), este calcula los potenciales superficiales haciendo uso de una malla de triángulos en cada capa que disponga el modelo supuesto, para detalles descriptivos y metodológicos se recomienda al lector referirse a [14], [13], [20] y [27]. En el caso de un modelo conductor no homogéneo de conductividad anisótropa, el problema puede resolverse mediante el método de elementos finitos (FEM), también calcula los potenciales superficiales de la cabeza pero utilizando una malla de tetraedros, para detalles descriptivos y metodológicos se recomienda al lector referirse a [12] y [41].

El **problema inverso** en EEG consiste en hallar la fuente de actividad eléctrica que produce una señal, de la que se toman mediciones en el cuero cabelludo  $V$ , recolectadas por  $N$  sensores en  $M$  dipolos muestras. Es decir, que el objetivo se centra en encontrar la configuración de las fuentes  $S$  que originó estas mediciones en el cuero cabelludo  $V$ , usando la matriz de propagación  $K$ .

El problema inverso es mal planteado, ya que no se cumple la unicidad, pues existen múltiples formas de obtener fuentes de corriente en el cerebro, de manera que generan los mismos potenciales en los sitios donde se ubican los electrodos en cierto instante de tiempo ([17]).

Las soluciones al problema inverso se pueden dividir en dos enfoques que dependen del modelo de fuente que emplean: los paramétricos y los no paramétricos ([22]). Si se utiliza un modelo de fuentes concentradas o focales, usualmente son descritas por métodos paramétricos. Estos estiman 6 parámetros por cada dipolo de corriente, entre estos métodos los más conocidos se encuentran Multiple Signal Classification (MUSIC) ([25]) y el programa BESA por sus siglas en inglés Brain Electric Source Analysis ([39]).

Por otro lado, los métodos que emplean un modelo de fuentes distribuidas generalmente son los no paramétricos. Estos suponen un gran número de fuentes fijas distribuidas uniformemente en todo el cerebro. Entre los algoritmos más utilizados se encuentran el estimador de norma mínima (MNE) ([29], [9]), el estimador de norma pesada (WMNE)

([29], [9]), tomografía eléctrica de baja resolución (LORETA) ([31]), LORETA estandarizado (sLORETA) ([30]).



## Capítulo 3

---

### Análisis del problema directo electroencefalográfico

---

En esta sección analizamos la existencia y unicidad de la solución débil del problema de contorno electroencefalográfico, primero vamos a deducir la definición de solución débil del problema de contorno electroencefalográfico, para posteriormente demostrar el teorema de existencia y unicidad de dicha solución.

#### 3.1. Solución débil del problema de contorno electroencefalográfico

En esta sección vamos a encontrar la expresión que debe satisfacer una solución débil del problema de contorno electroencefalográfico. Para ello, vamos a obtener la formulación variacional del problema a partir del hecho que si  $u$  es solución clásica entonces  $u$  es solución débil de dicho problema; luego, debe satisfacer la relación integral que obtendremos a continuación.

Así, si  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  satisface el PCE (2.2.9) - (2.2.13), entonces para toda  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$ , para  $i = 1, 2$  se cumple que:

$$- [\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1)] v_1 = f v_1. \quad (3.1.1)$$

$$- [\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2)] v_2 = 0. \quad (3.1.2)$$

Integrando en ambos lados de (3.1.1) en  $\Omega_1$ , se tiene que:

$$- \int_{\Omega_1} [\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1)] v_1 dx = \int_{\Omega_1} f v_1 dx, \quad (3.1.3)$$

e integrando en ambos lados de (3.1.2) en  $\Omega_2$ , obtenemos:

$$- \int_{\Omega_2} [\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2)] v_2 dx = 0. \quad (3.1.4)$$

Sumando las igualdades (3.1.3) y (3.1.4), tenemos que:

$$- \left[ \int_{\Omega_1} [\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1)] v_1 dx + \int_{\Omega_2} [\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2)] v_2 dx \right] = \int_{\Omega_1} f v_1 dx,$$

para todo  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$  para  $i = 1, 2$ .

Aplicando la primera identidad de Green (1.2.1) a las integrales  $\int_{\Omega_1} [\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1)] v_1 dx$  y  $\int_{\Omega_2} [\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2)] v_2 dx$  de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f v_1 dx = & - \left[ \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} v_1 ds - \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \left( \int_{S_2} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} v_2 ds \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} v_2 ds \right) - \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx \right], \end{aligned}$$

para todo  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$  para  $i = 1, 2$ , o bien,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f v_1 dx = & \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx - \int_{S_2} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} v_2 ds \\ & + \int_{S_1} (\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} v_2 - \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} v_1) ds, \end{aligned}$$

para todo  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$  para  $i = 1, 2$ .

Utilizando las condiciones de contorno (2.2.12), (??) y la ecuación anterior, se tiene que:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx = \int_{\Omega_1} f v_1 dx, \quad (3.1.5)$$

para todo  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$  para  $i = 1, 2$ .

De la deducción anterior y de la proposición (1.2.3) se obtiene la siguiente definición:

**Definición 10.** Sean  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$  y  $f \in L^2(\Omega_1)$ . Una función  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $u|_{\Omega_i} = u_i$  con  $i = 1, 2$  y  $u_1 = u_2$  en  $S_1$  es solución débil del PCE si se cumple que:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx = \int_{\Omega_1} f v_1 dx, \quad (3.1.6)$$

para todo  $v \in H^1(\Omega)$  tal que  $v|_{\Omega_i} = v_i$  con  $i = 1, 2$  y  $v_1 = v_2$  en  $S_1$ .

En esta definición la frase  $u_1 = u_2$  en  $S_1$  significa que  $T_1(u_1) = T_2(u_2)$  sobre el conjunto  $S_1$ , donde  $T_1 : H^1(\Omega_1) \rightarrow L^2(S_1)$  y  $T_2 : H^1(\Omega_2) \rightarrow L^2(S_1 \cup S_2)$  son los operadores traza.

Observemos que el espacio al que pertenecen las soluciones débiles del PCE, es un subespacio de  $H^1(\Omega)$ . Por este motivo, vamos a definir y denotar al espacio solución del PCE por:

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u_1 = u_2 \text{ sobre } S_1\}.$$

**Proposición 3.1.1.** Sea  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$  y  $S_1$  la frontera de  $\Omega_1$  entre  $\Omega_2$ . Si  $S_1$  es de clase  $C^1$ , entonces  $\tilde{H}^1(\Omega)$  es completo en la norma  $H^1(\Omega)$ .

Probemos que  $\tilde{H}^1(\Omega)$  es completo.

Sea  $\{u_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $\tilde{H}^1(\Omega)$ . Por demostrar que existe  $u^* \in \tilde{H}^1(\Omega)$  tal que  $\{u_n\}$  converge a  $u^*$  en la norma de  $H^1(\Omega)$ .

Como  $\{u_n\} \subset \tilde{H}^1(\Omega)$ , entonces  $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$  y además que  $u_n|_{\Omega_1} = u_{1n}$  y  $u_n|_{\Omega_2} = u_{2n}$  son iguales en  $S_1$ , es decir,

$$T_1(u_n|_{\Omega_1}) = T_2(u_n|_{\Omega_2}) \text{ en } S_1. \quad (3.1.7)$$

Como  $\{u_n\}$  es una sucesión de Cauchy y  $H^1(\Omega)$  es completo, se tiene que existe  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \tilde{u}. \quad (3.1.8)$$

Dado que  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ , entonces podemos restringirla a  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , es decir, sean  $\tilde{u}_1$  y  $\tilde{u}_2$  tales que  $\tilde{u}|_{\Omega_1} = \tilde{u}_1$  y  $\tilde{u}|_{\Omega_2} = \tilde{u}_2$ .

Mostremos que  $T_1(\tilde{u}_1) = T_2(\tilde{u}_2)$  en  $S_1$ .

Debido que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \tilde{u}$ , los operadores restricción  $R_1 : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_1)$  y  $R_2 : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_2)$  son continuos, se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n|_{\Omega_1} = \tilde{u}|_{\Omega_1} \quad (3.1.9)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n|_{\Omega_2} = \tilde{u}|_{\Omega_2}. \quad (3.1.10)$$

Aplicando el operador traza a (3.1.9) y (3.1.10), se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_1(u_n|_{\Omega_1}) = T_1(\tilde{u}|_{\Omega_1}) \text{ en } L^2(S_1) \quad (3.1.11)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_2(u_n|_{\Omega_2}) = T_2(\tilde{u}|_{\Omega_2}) \text{ en } L^2(S_1 \cup S_2). \quad (3.1.12)$$

Aplicando límite en (3.1.7), tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_1(u_n|_{\Omega_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_2(u_n|_{\Omega_2}) \text{ en } L^2(S_1),$$

luego, de las ecuaciones(3.1.11) y (3.1.12), se tiene que:

$$T_1(\tilde{u}|_{\Omega_1}) = T_2(\tilde{u}|_{\Omega_2}) \text{ sobre } S_1. \quad (3.1.13)$$

Por tanto, existe  $u^* = \tilde{u} \in \tilde{H}^1(\Omega)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^*$ . Como  $\{u_n\}$  es arbitraria, se concluye que  $\tilde{H}^1(\Omega)$  es completo en la norma  $H^1(\Omega)$ .

## 3.2. Existencia y unicidad de la solución débil del PCE

A continuación vamos a demostrar un teorema que habla de la existencia y unicidad de la solución débil del problema de contorno electroencefalográfico. La demostración del teorema se puede encontrar en [35]; sin embargo, en este trabajo de tesis se completan algunos detalles de la demostración.

Antes de demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución débil del problema de contorno electroencefalográfico, primero definimos un producto interno para  $L^2(\Omega)$  y otro para  $\tilde{H}^1(\Omega)$  y, además demostramos una proposición.

**Definición 11.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $g, h \in L^2(\Omega)$  y  $\sigma : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  definido por  $\sigma = \sigma_1 \chi_{\Omega_1} + \sigma_2 \chi_{\Omega_2}$ , donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son constantes positivas, definimos el funcional  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\langle g, h \rangle_0 = \int_{\Omega} \sigma g h dx.$$

Se puede probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  es un producto interno en  $L^2(\Omega)$  y que este producto interno define una norma en  $L^2(\Omega)$  dada por:

$$\|f\|_0 = \sqrt{\langle f, f \rangle_0}.$$

En  $\tilde{H}^1(\Omega)$  se puede definir distintos productos internos, uno de estos es el que hereda del espacio  $H^1(\Omega)$  y otro es el que se define a continuación.

**Definición 12.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $g, h \in \tilde{H}^1(\Omega)$  y  $\sigma : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  definido por  $\sigma = \sigma_1 \chi_{\Omega_1} + \sigma_2 \chi_{\Omega_2}$ , donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son constantes positivas, definimos el funcional  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : \tilde{H}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\langle g, h \rangle_1 = \int_{\Omega} \sigma g h dx + \int_{\Omega} \sigma (\nabla g \cdot \nabla h) dx.$$

Se puede probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  es un producto interno en  $\tilde{H}^1(\Omega)$  y que este producto interno define una norma en  $\tilde{H}^1(\Omega)$  dada por:

$$\|f\|_1 = \sqrt{\langle f, f \rangle_1}.$$

**Definición 13.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  abierto y acotado con frontera de  $C^1$ . Se define  $\hat{H}^1(\Omega)$  al subespacio de  $\tilde{H}^1(\Omega)$  cuyos elementos sean ortogonales a las constantes, es decir,

$$\hat{H}^1(\Omega) = \{u \in \tilde{H}^1(\Omega) : \int_{\Omega} u dx = 0\}.$$

Definamos el producto interno de  $\hat{H}^1(\Omega)$  dado por:

$$\langle g, h \rangle_3 = \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla h dx.$$

En efecto, veamos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$  es un producto interno de  $\hat{H}^1(\Omega)$ . Luego,



1. Sean  $g, h \in \widehat{H}^1(\Omega)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De aquí,

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda g + w, h \rangle_3 &= \int_{\Omega} \nabla(\lambda g + w) \cdot \nabla h dx \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla(\lambda g) + \nabla w) \cdot \nabla h dx \\
 &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla g + \nabla w) \cdot \nabla h dx \\
 &= \int_{\Omega} \lambda \nabla g \cdot \nabla h dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla h dx \\
 &= \lambda \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla h dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla h dx \\
 &= \lambda \langle g, h \rangle_3 + \langle w, h \rangle_3,
 \end{aligned}$$

esto implica que  $\langle \lambda g + w, h \rangle_3 = \lambda \langle g, h \rangle_3 + \langle w, h \rangle_3$ ,  $\forall g, h \in \widehat{H}^1(\Omega)$  y  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Sean  $g, h \in \widehat{H}^1(\Omega)$ . Así,

$$\begin{aligned}
 \langle g, h \rangle_3 &= \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla h dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla g dx \\
 &= \langle h, g \rangle_3.
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\langle g, h \rangle_3 = \langle h, g \rangle_3$ ,  $\forall g, h \in \widehat{H}^1(\Omega)$ .

3. Sea  $g \in \widehat{H}^1(\Omega)$ . Debido a que  $|\nabla g|^2 \geq 0$ , entonces

$$\langle g, g \rangle_3 = \int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx \geq 0,$$

En consecuencia,  $\langle g, g \rangle_3 \geq 0$ ,  $\forall g \in \widehat{H}^1(\Omega)$ .

4. Sea  $g \in \widehat{H}^1(\Omega)$ . Por demostrar que  $\langle g, g \rangle_3 = 0$  si y solo si  $g = 0$ .

Supongamos que  $\langle g, g \rangle_3 = 0$  y probemos que  $g = 0$ . De la definición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$  se tiene que:

$$\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx = 0,$$

de aquí que  $|\nabla g|^2 = 0$ , lo cual ocurre solo si  $g \equiv C$  donde  $C \in \mathbb{R}$ .

Como  $g \in \widehat{H}^1(\Omega)$ , entonces

$$0 = \int_{\Omega} g dx = \int_{\Omega} c dx = cm(\Omega),$$

así  $c = 0$ , lo que implica que  $g = 0$ .

Observemos que si  $g = 0$ , de manera inmediata podemos decir que:

$$\langle g, g \rangle_3 = \int_{\Omega} |\nabla g|^2 = 0.$$

Por tanto,  $\langle g, g \rangle_3 = 0$  si y solo si  $g = 0$ .

De (1), (2), (3) y (4) se concluye que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$  es un producto interior en  $\widehat{H}^1(\Omega)$ .

**Proposición 3.2.1.** Sea  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ . Las normas  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_{L^2}$  son equivalentes en  $L^2(\Omega)$  y,  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_{\widehat{H}^1}$  son equivalentes en  $\widehat{H}^1(\Omega)$ . Es decir, existen constantes positivas  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  tales que:

$$\begin{aligned} k_1 \|g\|_0 &\leq \|g\|_{L^2} \leq k_2 \|g\|_0, \quad \forall g \in L^2(\Omega), \\ k_3 \|g\|_1 &\leq \|g\|_{\widehat{H}^1} \leq k_4 \|g\|_1, \quad \forall g \in \widehat{H}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Además se cumple que  $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1$  en el espacio  $\widehat{H}^1(\Omega)$ .

*Demostración.* En lo que sigue vamos a demostrar que  $\|\cdot\|_0$  es equivalente a  $\|\cdot\|_{L^2}$  en  $L^2(\Omega)$  y no probaremos que  $\|\cdot\|_1$  es equivalente a  $\|\cdot\|_{\widehat{H}^1}$  en  $\widehat{H}^1(\Omega)$ , ya que la prueba se realiza de manera similar.

Vamos a demostrar que existen dos constantes positivas  $k_1$  y  $k_2$  que satisfacen:

$$k_1 \|g\|_0 \leq \|g\|_{L^2} \leq k_2 \|g\|_0, \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Sea  $g \in L^2(\Omega)$  arbitraria. Por definición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \|g\|_0^2 &= \langle g, g \rangle_0 \\ &= \int_{\Omega} \sigma g^2 dx \\ &= \int_{\Omega_1} \sigma_1 g^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 g^2 dx \\ &= \sigma_1 \int_{\Omega_1} g^2 dx + \sigma_2 \int_{\Omega_2} g^2 dx \end{aligned}$$

tomando  $c = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,

$$\begin{aligned} \|g\|_0^2 &= \sigma_1 \int_{\Omega_1} g^2 dx + \sigma_2 \int_{\Omega_2} g^2 dx \\ &\leq c \int_{\Omega_1} g^2 dx + c \int_{\Omega_2} g^2 dx \\ &= c \left( \int_{\Omega_1} g^2 dx + \int_{\Omega_2} g^2 dx \right) \\ &= c \int_{\Omega} g^2 dx \\ &= c \|g\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

o bien,  $\|g\|_0 \leq \sqrt{c}\|g\|_{L^2}$ . Como  $c \neq 0$ , tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\|g\|_0 \leq \|g\|_{L^2}. \quad (3.2.1)$$

Por otra parte, de la definición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle g, g \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} g^2 dx \\ &= \int_{\Omega_1} g^2 dx + \int_{\Omega_2} g^2 dx \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \int_{\Omega_1} \sigma_1 g^2 dx + \frac{1}{\sigma_2} \int_{\Omega_2} \sigma_2 g^2 dx, \end{aligned}$$

considerando  $k = \max\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}\}$ ,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{\sigma_1} \int_{\Omega_1} \sigma_1 g^2 dx + \frac{1}{\sigma_2} \int_{\Omega_2} \sigma_2 g^2 dx \\ &\leq k \int_{\Omega_1} \sigma_1 g^2 dx + k \int_{\Omega_2} \sigma_2 g^2 dx \\ &= k \left( \int_{\Omega_1} \sigma_1 g^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 g^2 dx \right) \\ &= k \int_{\Omega} \sigma g^2 dx \\ &= k \|g\|_0^2, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

o bien,

$$\|g\|_{L^2} \leq \sqrt{k} \|g\|_0. \quad (3.2.3)$$

Por (3.2.1) y (3.2.3), se tiene que:

$$k_1 \|g\|_0 \leq \|g\|_{L^2} \leq k_2 \|g\|_0, \quad \forall g \in L^2(\Omega);$$

con  $k_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}$  y  $k_2 = \sqrt{k}$ . Debido que  $g$  es arbitraria, se concluye que  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_{L^2}$  son equivalentes. De manera similar se muestra que  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_{\tilde{H}^1}$  son equivalentes.

Ahora probemos que  $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1$ . Sea  $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$ . Como  $\tilde{H}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  y por la definición  $\|\cdot\|_0$ , tenemos,

$$\|u\|_0^2 = \int_{\Omega} \sigma u^2 dx = \int_{\Omega_1} \sigma_1 u_1^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 u_2^2 dx, \quad (3.2.4)$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &= \int_{\Omega} \sigma u^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_1} \sigma_1 u_1^2 dx + \int_{\Omega_1} \sigma_1 |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 u_2^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 |\nabla u_2|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Por otro lado, debido a que  $\sigma_i$  es positiva para  $i = 1, 2$ , se tiene que:

$$\int_{\Omega_i} \sigma_i u_i^2 dx \leq \int_{\Omega_i} \sigma_i u_i^2 dx + \int_{\Omega_i} \sigma_i |\nabla u_i|^2 dx. \quad (3.2.6)$$

En consecuencia de (3.2.4), (3.2.5) y (3.2.6), tenemos que:

$$\|u\|_0^2 \leq \|u\|_1^2,$$

así  $\|u\|_0 \leq \|u\|_1$ . ■

A continuación probaremos el teorema de existencia y unicidad de la solución débil del problema de contorno electroencefalográfico; es oportuno comentar que para probar la existencia de la solución débil haremos uso del teorema de representación de Riezs y del teorema de alternativa de Fredholm.

**Teorema 3.2.2.** Sean  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$  y  $f \in L^2(\Omega_1)$ . Si se cumple que  $\int_{\Omega_1} f dx = 0$ , entonces existe una solución débil  $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$  que satisface (3.1.6). Además, si

$$\int_{\Omega} u dx = 0,$$

entonces la solución débil es única y cumple:

$$\|u\|_{\tilde{H}^1} \leq C \|f\|_{L^2}, \quad (3.2.7)$$

donde la constante  $C$  no depende de  $f$ .

*Demostración.* Primero se probaremos la existencia y posteriormente la unicidad de la solución débil.

Sea  $f \in L^2(\Omega_1)$ , tal que  $\int_{\Omega_1} f dx = 0$ .

Definamos a  $F$  como la función que describe a toda la fuente en  $\Omega$  por medio de:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} f(x), & \text{si } x \in \Omega_1; \\ 0, & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Observemos que la ecuación (3.1.6) de la definición de solución débil se puede escribir en término de los productos interiores expuestos en las definiciones (11) y (12) y, del hecho de la inclusión de  $\tilde{H}^1(\Omega)$  en  $L^2(\Omega)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} - \langle u, v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_1 &= - \left( \int_{\Omega_1} \sigma_1 u_1 v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 u_2 v_2 dx \right) + \\ &\quad \left( \int_{\Omega_1} \sigma_1 (u_1 v_1 + \nabla u_1 \cdot \nabla v_1) dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 (u_2 v_2 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) dx \right) \\ &= - \int_{\Omega_1} \sigma_1 u_1 v_1 dx - \int_{\Omega_2} \sigma_2 u_2 v_2 dx + \int_{\Omega_1} \sigma_1 u_1 v_1 dx \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 u_2 v_2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx \\ &= \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle F, v \rangle_0 &= \int_{\Omega_1} \sigma_1 \left( \frac{1}{\sigma_1} f \right) v_1 dx \\ &= \int_{\Omega_1} f v_1 dx. \end{aligned}$$

En consecuencia  $u$  satisface la igualdad (3.1.6) si y solo si

$$\langle F, v \rangle_0 = - \langle u, v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_1,$$

para todo  $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ .

Por lo tanto,  $u$  es solución débil del PCE, si

$$\langle F, v \rangle_0 = - \langle u, v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_1, \quad (3.2.9)$$

para todo  $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ .

Para cada  $u \in L^2(\Omega)$  defínase un funcional lineal  $g_u : \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$g_u(v) = \langle u, v \rangle_0, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega) \quad (3.2.10)$$

Verifiquemos que  $g_u$  es continuo en  $\tilde{H}^1(\Omega)$  con respecto a  $\|\cdot\|_1$ ; es decir, que existe una constante  $c_1$  tal que  $|g_u(v)| \leq c_1 \|v\|_1, \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ .

Por las desigualdades de Cauchy-Schwarz y la dada en la proposición (3.2.1), obtenemos que:

$$\begin{aligned} |g_u(v)| &= |\langle u, v \rangle_0| \\ &\leq \|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \|u\|_1 \|v\|_1 \\ &= c_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$

con  $c_1 = \|u\|_1, \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ . Por lo tanto,  $g_u$  es continuo.

Luego, el funcional  $g_u$  satisface las condiciones del teorema de representación de Riesz, por tanto existe un único elemento  $y_u \in \tilde{H}^1(\Omega)$  tal que:

$$g_u(v) = \langle y_u, v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (3.2.11)$$

Por como definimos  $g_u$  en (3.2.10) y de (3.2.11), se cumple:

$$\langle y_u, v \rangle_1 = g_u(v) = \langle u, v \rangle_0, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (3.2.12)$$

Definamos  $\tilde{A} : L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega)$  como  $\tilde{A}(u) = y_u$ . Así, de (3.2.12) debe cumplirse:

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle \tilde{A}(u), v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (3.2.13)$$

Veamos que este operador  $\tilde{A}$  es lineal y continuo. Para ello sean  $y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$  cualesquiera y un escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , de aquí que:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(\alpha y_1 + y_2), v \rangle_1 &= \langle \alpha y_1 + y_2, v \rangle_0 \\ &= \alpha \langle y_1, v \rangle_0 + \langle y_2, v \rangle_0 \\ &= \alpha \langle \tilde{A}(y_1), v \rangle_1 + \langle \tilde{A}(y_2), v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Como  $y_1, y_2$  y  $\alpha$  son arbitrarios, se tiene la linealidad de  $\tilde{A}$ .

Ahora vamos a demostrar que  $\tilde{A}$  es continuo; es decir, que existe  $k > 0$  tal que  $\|\tilde{A}(u)\|_1 \leq k\|u\|_0, \forall u \in L^2(\Omega)$ .

Sea  $u \in L^2(\Omega)$ . Por definición de  $\|\cdot\|_1$ , sabemos que:

$$\|\tilde{A}(u)\|_1^2 = \langle \tilde{A}(u), \tilde{A}(u) \rangle_1. \quad (3.2.14)$$

Debido que (3.2.13) se cumple para todo  $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$ , entonces, en particular se cumple para  $v = \tilde{A}(u)$ , que al sustituir en (3.2.14) se tiene,

$$\langle \tilde{A}(u), \tilde{A}(u) \rangle_1 = \langle \tilde{A}(u), v \rangle_1. \quad (3.2.15)$$

De (3.2.14), (3.2.15) y (3.2.13), tenemos,

$$\|\tilde{A}(u)\|_1^2 = \langle u, v \rangle_0,$$

luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\tilde{A}(u)\|_1^2 = \langle u, v \rangle_0 \leq \|u\|_0 \|v\|_0. \quad (3.2.16)$$

Como  $v = \tilde{A}(u)$ , en consecuencia (3.2.16) se puede escribir como:

$$\|\tilde{A}(u)\|_1^2 \leq \|\tilde{A}(u)\|_0 \|u\|_0. \quad (3.2.17)$$

De (3.2.17) y de la desigualdad de la proposición (3.2.1), se obtiene:

$$\|\tilde{A}(u)\|_1^2 \leq \|\tilde{A}(u)\|_0 \|u\|_0 \leq \|\tilde{A}(u)\|_1 \|u\|_0, \quad (3.2.18)$$

de aquí que  $\|\tilde{A}(u)\|_1 \leq \|u\|_0$ . Observemos que hemos demostrado que existe una constante  $k = 1$ , que satisface la desigualdad anterior y, por lo tanto, concluimos que  $\tilde{A}$  es continuo.

Hasta aquí hemos probado que  $\tilde{A} : L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega)$  es un operador lineal y continuo que satisface (3.2.13). Además que por la representación de Riezs se sigue que  $\tilde{A}$  es único. Lo que haremos ahora es relacionar a este operador  $\tilde{A}$  con la solución débil del PCE que cumple (3.2.9). Para ello primero apliquemos el operador  $\tilde{A}$  a  $F$  definido en (3.2.8) de donde obtenemos (3.2.13) es equivalente a:

$$\langle F, v \rangle_0 = \langle \tilde{A}(F), v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (3.2.19)$$

Por la observación (1.2.8) tenemos que  $i$  es un operador compacto y dado que  $\tilde{A}$  es continuo, entonces de la proposición (1.2.9) se concluye que  $\tilde{A} \circ i : \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega)$

es compacto. Denotemos por  $A = \tilde{A} \circ i$ , así, la igualdad (3.2.9) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\langle \tilde{A}(F), v \rangle_1 = -\langle A(u), v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_1, \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

lo cual es equivalente a:

$$\langle \tilde{A}(F) + A(u) - u, v \rangle_1 = 0, \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

de la igualdad anterior se concluye:

$$\tilde{A}(F) = -A(u) + u. \quad (3.2.20)$$

Observemos que la solución débil del PCE, en caso de existir debe cumplirse la igualdad (3.2.20).

Denotando  $T_0 = \tilde{A}(F)$ , la ecuación (3.2.20) se puede escribir como:

$$(I - A)(u) = T_0, \text{ para } u \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (3.2.21)$$

La ecuación operacional (3.2.21) es una ecuación de Fredholm de la segunda clase. Por el teorema de alternativa de Fredholm dado en (1.2.10), se sabe que esta ecuación tiene solución para aquellas  $T_0$  que son ortogonales a todas las soluciones de la ecuación homogénea adjunta:

$$(I - A^*)\gamma = 0.$$

Veamos que el operador  $A$  es autoadjunto; esto es, demostrar que  $A$  satisface:

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \langle u, A(v) \rangle_1, \forall u, v \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

Sea  $u, v \in \tilde{H}^1(\Omega)$  cualesquiera, entonces de la definición de  $A$  se tiene:

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \langle \tilde{A}(u), v \rangle_1, \quad (3.2.22)$$

en consecuencia, por (3.2.13) y (3.2.22) obtenemos:

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle A(u), v \rangle_1 \quad (3.2.23)$$

y

$$\langle v, u \rangle_0 = \langle A(v), u \rangle_1. \quad (3.2.24)$$

Sabemos que por la conmutatividad del producto punto, se cumple:

$$\langle A(v), u \rangle_1 = \langle u, A(v) \rangle_1, \quad (3.2.25)$$

y

$$\langle v, u \rangle_0 = \langle u, v \rangle_0. \quad (3.2.26)$$

Dado que (3.2.26) se cumple, entonces podemos igualar los miembros derechos de las igualdades (3.2.23) y (3.2.24), para concluir que:

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \langle A(v), u \rangle_1.$$

De lo anterior y por (3.2.25), tenemos:

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \langle u, A(v) \rangle_1.$$

Como  $u$  y  $v$  son arbitrarios se concluye que  $A$  es autoadjunto, es decir,  $A^* = A$ . Ya que  $A^* = A$  tenemos que la ecuación homogénea adjunta, se puede escribir como:

$$(I - A)\gamma = 0. \quad (3.2.27)$$

Luego,

$$\langle A(\gamma), v \rangle_1 = \langle \gamma, v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

pero, de la igualdad dada en (3.2.13) se sigue:

$$\langle \gamma, v \rangle_0 = \langle \gamma, v \rangle_1, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega);$$

y al aplicar la definición de los productos interiores, observamos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \gamma, v \rangle_1 - \langle \gamma, v \rangle_0 \\ &= \int_{\Omega} \sigma \gamma v dx + \int_{\Omega} \sigma \nabla \gamma \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} \sigma \gamma v dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma \nabla \gamma \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Considerando  $\gamma|_{\Omega_1} = \gamma_1$ ,  $\gamma|_{\Omega_2} = \gamma_2$  y  $v = \gamma$  con  $v|_{\Omega_1} = \gamma_1$  y  $v|_{\Omega_2} = \gamma_2$  en la ecuación (3.2.28), tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \sigma \nabla \gamma \cdot \nabla \gamma dx \\ &= \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla \gamma_1 \cdot \nabla \gamma_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla \gamma_2 \cdot \nabla \gamma_2 dx, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\int_{\Omega_1} \nabla \gamma_1 \cdot \nabla \gamma_1 dx = 0$  y  $\int_{\Omega_2} \nabla \gamma_2 \cdot \nabla \gamma_2 dx = 0$ . De modo que,  $\gamma_1 = C_1$  c.d. sobre  $\Omega_1$  y  $\gamma_2 = C_2$  c.d. sobre  $\Omega_2$  para algunas constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

Más aún, estas funciones propias son ortogonales a  $T_0$ ; ya que:

$$\langle T_0, \gamma \rangle_1 = \langle \tilde{A}(F), \gamma \rangle_1 = \langle F, \gamma \rangle_0 = \int_{\Omega} \sigma F dx = C_1 \int_{\Omega_1} f dx = 0;$$

la igualdad a cero de la última integral se cumple por hipótesis del teorema.

Por lo tanto, por el teorema de alternativa de Fredholm existe  $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$  tal que es solución de la ecuación operacional (3.2.21), que es lo que se quería demostrar, ya que



la prueba de la existencia de la solución de la ecuación (3.2.21), equivale a demostrar la existencia de la solución débil del PCE. Lo que haremos ahora, es demostrar la desigualdad (3.2.7), utilizando las hipótesis del teorema.

Si  $u$  es solución débil de PCE perteneciente a  $\widehat{H}^1(\Omega)$ . Tomemos  $v = u$  en (3.1.6), se tiene:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 |\nabla u_2|^2 dx = \int_{\Omega_1} f u_1 dx.$$

Por la definición del producto escalar en  $L^2(\Omega)$  y de la definición de  $F$  dada en (3.2.8), la igualdad anterior es equivalente a:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 |\nabla u_2|^2 dx = \sigma_1 \langle F, u \rangle_{L^2}. \quad (3.2.29)$$

Ahora bien, debido a que  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 > 0$ , entonces existe una constante  $C_2 > 0$ , tal que:

$$\langle u, u \rangle_3 = \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 dx \leq C_2 \left( \int_{\Omega_1} \sigma_1 |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 |\nabla u_2|^2 dx \right). \quad (3.2.30)$$

De (3.2.29) y (3.2.30), obtenemos:

$$\langle u, u \rangle_3 \leq C_2 \sigma_1 \langle F, u \rangle_{L^2}.$$

Reescribiendo la desigualdad anterior, tenemos:

$$|\langle u, u \rangle_3| \leq C_2 \sigma_1 |\langle F, u \rangle_{L^2}|,$$

De la desigualdad de Cauchy Schwarz, se tiene:

$$|\langle u, u \rangle_3| \leq C_2 \sigma_1 |\langle F, u \rangle_{L^2}| \leq C_2 \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}. \quad (3.2.31)$$

Por otro lado, del teorema de Poincaré - Wirtinger's (1.2.3), existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u - (u)_{\Omega}|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

donde  $(u)_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$ , al sumar  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  a los miembros de la desigualdad (1.2.3) del teorema de Poincaré - Wirtinger's y del hecho que  $\int_{\Omega} u dx = 0$ , podemos obtener:

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

de aquí que:

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq (1 + C_1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Tomando  $C = 1 + C_1$ , se concluye que  $\|u\|_{\widehat{H}^1}^2 \leq C \|u\|_3^2$ .

De lo mostrado anteriormente y de la desigualdad (3.2.31), obtenemos que:

$$\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq C\|u\|_3^2 \leq CC_2\sigma_1 | \langle F, u \rangle_{L^2} | \leq CC_2\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}. \quad (3.2.32)$$

Luego, de la proposición (3.2.1), tenemos que:

$$CC_2\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \leq CC_2\|u\|_{\tilde{H}^1}\|f\|_{L^2},$$

y de la desigualdad (3.2.32), se obtiene:

$$\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq CC_2\|u\|_{\tilde{H}^1}\|f\|_{L^2}.$$

Por lo tanto,  $\|u\|_{\tilde{H}^1} \leq CC_2\|f\|_{L^2}$ .

Probemos ahora que la solución débil encontrada es única.

Supóngase que existen  $u, u^* \in \hat{H}^1(\Omega)$  soluciones débiles del PCE.

Debido que  $u$  y  $u^*$  son soluciones débiles del PCE, se cumple que:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx = \int_{\Omega_1} f v_1 dx, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega) \quad (3.2.33)$$

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1^* \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2^* \cdot \nabla v_2 dx = \int_{\Omega_1} f v_1 dx, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega) \quad (3.2.34)$$

Restando la ecuación (3.2.34) a (3.2.33), se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx - \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1^* \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx - \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2^* \cdot \nabla v_2 dx &= 0, \\ \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla (u_1 - u_1^*) \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla (u_2 - u_2^*) \cdot \nabla v_2 dx &= 0. \end{aligned}$$

De aquí que  $u - u^*$  es solución débil del problema de contorno con su término fuente igual a cero.

Como  $u, u^* \in \hat{H}^1(\Omega)$ , entonces  $\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} u^* dx$ . Luego:

$$0 = \int_{\Omega} u dx - \int_{\Omega} u^* dx = \int_{\Omega} (u - u^*) dx.$$

Puesto que  $u$  y  $u^* \in \tilde{H}^1(\Omega)$ , entonces  $u - u^* \in \tilde{H}^1(\Omega)$ . Debido a que se cumple la igualdad anterior, se tiene que  $u - u^* \in \hat{H}^1(\Omega)$ . En consecuencia:

$$\|u - u^*\|_{\tilde{H}^1} \leq C\|0\|_{L^2} = 0.$$

Por la definición de norma y de lo anterior, tenemos que:

$$\|u - u^*\|_{\tilde{H}^1} = 0.$$

De aquí que,  $u - u^* = 0$ ; es decir,  $u = u^*$ . Por lo tanto, la solución débil del PCE es única. ■

## Capítulo 4

---

# Análisis del problema inverso electroencefalográfico

---

En el presente capítulo analizaremos el problema inverso electroencefalográfico y presentaremos soluciones mediante mínimos cuadrados y mínimos cuadrados penalizados.

Resolvemos el problema de identificación de fuentes bioeléctricas tipo dipolar mediante regularización de Tikhonov, utilizando [24], cuya solución del problema directo asociado se compara con la obtenida por el software Fieldtrip ([28]) y con los resultados obtenidos en [23].

### 4.1. Solución mediante mínimos cuadrados

Debido a que el método de regularización que utilizamos en la tesis se basa en el problema de mínimos cuadrados, en esta primera sección exponemos esta teoría de mínimos cuadrados. Sin embargo, en el trabajo no debemos aplicar directamente este método debido a que tenemos un problema mal condicionado en el sentido de Hadamard, pues hallaríamos una solución que no será óptima.

Cuando se resuelve un sistema lineal de la forma  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , lo que se quiere es encontrar el vector solución  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ante esta situación podríamos recurrir a los métodos tradicionales (eliminación Gaussiana, factorización LU, entre otros); sin embargo, la matriz que se obtiene en el problema inverso electroencefalográfico presenta un mal condicionamiento; es decir, que pequeños errores en los componentes de los datos  $b$  nos pueden conducir a grandes errores para obtener  $x$ ; lo cual hace necesario el uso de las técnicas de regularización.

Considerando el problema de la tesis, escrito en forma matricial en (2.3.10), se pretende obtener la solución de mínimos cuadrados  $x$ , a partir del conocimiento de la matriz  $A$  y el vector  $b$ ; es decir, se busca minimizar el siguiente funcional:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2. \quad (4.1.1)$$

En vista que el problema de minimización dado en (4.1.1) se puede analizar utilizando la teoría de los operadores lineales, a continuación vamos a demostrar un resultado, que

se puede consultar en [16], que habla acerca de la existencia del mínimo en la ecuación (4.1.1).

**Lema 4.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert,  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal y acotado, y sea  $b \in Y$ . Entonces existe un  $\hat{x} \in X$  con  $\|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ , para todo  $x \in X$ , si y solo si  $\hat{x}$  es solución de la ecuación normal  $A^*Ax = A^*b$ , donde  $A^* : Y \rightarrow X$  denota el operador adjunto de  $A$ .

*Demostración.* Vamos a suponer que  $\hat{x}$  es solución de la ecuación normal  $A^*Ax = A^*b$ ; vamos a demostrar que existe un  $\hat{x} \in X$  tal que  $\|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ , para todo  $x \in X$ .

Observemos que:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2 &= \|Ax + A\hat{x} - A\hat{x} - b\|_2, \\ &= \|(A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x})\|_2. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de (4.1.2), tenemos:

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|(A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x})\|_2^2,$$

y dado que  $\|s\|_2^2 = \langle s, s \rangle$ ,  $\forall s \in X$ , podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x})\|_2^2 \\ &= \langle (A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x}), (A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x}) \rangle \\ &= \langle A\hat{x} - b, (A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x}) \rangle \\ &\quad + \langle Ax - A\hat{x}, (A\hat{x} - b) + (Ax - A\hat{x}) \rangle \\ &= \langle A\hat{x} - b, A\hat{x} - b \rangle + \langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle + \langle Ax - A\hat{x}, A\hat{x} - b \rangle \\ &\quad + \langle Ax - A\hat{x}, Ax - A\hat{x} \rangle \\ &= \|A\hat{x} - b\|_2^2 + \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + \langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle \\ &\quad + \langle Ax - A\hat{x}, A\hat{x} - b \rangle \\ &= \|A\hat{x} - b\|_2^2 + \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + \langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle \\ &\quad + \overline{\langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle} \\ &= \|A\hat{x} - b\|_2^2 + \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle). \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 &= \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A\hat{x} - b, Ax - A\hat{x} \rangle) \\ &= \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A\hat{x} - b, A(x - \hat{x}) \rangle). \end{aligned}$$

Por definición de operador adjunto, tenemos:

$$\|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 = \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - b), x - \hat{x} \rangle). \quad (4.1.3)$$

Dado que  $\hat{x}$  es solución de la ecuación normal  $A^*Ax = A^*b$ , se cumple que  $A^*A\hat{x} = A^*b$ , o bien,  $A^*(A\hat{x} - b) = 0$ . De la ecuación (4.1.3), se tiene:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 &= \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle 0, x - \hat{x} \rangle), \\ \|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 &= \|Ax - A\hat{x}\|_2^2, \forall x \in X. \end{aligned}$$

Sabemos, por la definición de norma, que esta es positiva y de la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente:

$$\|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 = \|Ax - A\hat{x}\|_2^2 \geq 0.$$

Por tanto, se concluye:

$$\|Ax - b\|_2 \geq \|A\hat{x} - b\|_2, \forall x \in X.$$

Ahora, supongamos que existe un  $\hat{x} \in X$  con  $\|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ , para todo  $x \in X$ , entonces vamos a probar que  $\hat{x}$  es solución de la ecuación normal  $A^*Ax = A^*y$ .

Al elevar al cuadrado  $\|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$  se tiene:

$$\|A\hat{x} - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2,$$

o bien,

$$\|Ax - b\|_2^2 - \|A\hat{x} - b\|_2^2 \geq 0.$$

Tomemos  $x = \hat{x} + \alpha z$ , para todo  $\alpha > 0$  y  $z \in X$ . Sustituyendo a  $x$  en (4.1.3) y de la desigualdad anterior, tenemos:

$$\|A(\hat{x} + \alpha z) - A\hat{x}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), \hat{x} + \alpha z - \hat{x} \rangle) \geq 0.$$

Luego:

$$\|A(\hat{x} + \alpha z - \hat{x})\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), \alpha z \rangle) \geq 0,$$

teniendo así:

$$\|A(\alpha z)\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), \alpha z \rangle) \geq 0.$$

Por propiedades de producto punto, se tiene:

$$\alpha^2 \|A(z)\|_2^2 + 2\alpha \operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), z \rangle) \geq 0. \quad (4.1.4)$$

Como  $\alpha > 0$ , podemos dividir a (4.1.4) por  $\alpha$ , teniendo así,

$$\alpha \|A(z)\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), z \rangle) \geq 0,$$

tomando el límite cuando  $\alpha$  tiende a cero, se obtiene:

$$\operatorname{Re}(\langle A^*(A\hat{x} - y), z \rangle) \geq 0, \forall z \in X.$$

De aquí que  $A^*(A\hat{x} - y) = 0$ . Por lo tanto,  $\hat{x}$  es solución a la ecuación normal. ■

Como se ha mencionado anteriormente, la solución por mínimos cuadrados, no proporciona buenas soluciones a los problemas que son mal planteados, ya que se puede ver que la norma de la solución crece mucho más rápido conforme se busca al mínimo. Por ello, en la siguiente sección resolveremos el problema inverso usando la regularización de Tikhonov.

---

## 4.2. Solución obtenida mediante la regularización de Tikhonov

El método de regularización de Tikhonov se centra en resolver el problema de mínimos cuadrados penalizados (que penalizan a la norma de la solución),

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2 \}, \quad (4.2.1)$$

donde  $\alpha$  es el factor de Tikhonov que actúa como el parámetro de regularización. Dicho parámetro  $\alpha$  tiene el efecto de controlar el balance entre el tamaño del residuo  $R_\alpha = Ax_\alpha - b$  y el tamaño de la solución regularizada  $x_\alpha$ . Cuando  $\alpha = 0$  la penalización es nula y el resultado es equivalente al de un modelo lineal por mínimos cuadrados, pero si el valor de  $\alpha$  es muy grande, entonces el término donde aparece la solución regularizada disminuye pero el tamaño del residuo aumenta y, si el valor de  $\alpha$  es muy pequeño, entonces el término donde aparece la norma de la solución regularizada aumenta, es decir;

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|x_\alpha\|_2 &\rightarrow 0 & \text{cuando } \alpha &\rightarrow \infty, \\ \alpha^2 \|x_\alpha\|_2 &\rightarrow \infty & \text{cuando } \alpha &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, mientras más pequeño sea el tamaño de  $\alpha$ , la solución regularizada se acerca más a la solución exacta del problema, denotada por  $x^\dagger$ , y si el tamaño de  $\alpha$  es muy grande, entonces la solución regularizada se aleja de la solución exacta del problema; es decir:

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|_2 &\rightarrow 0 & \text{cuando } \alpha &\rightarrow 0, \\ \|x_\alpha - x^\dagger\|_2 &\rightarrow \infty & \text{cuando } \alpha &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo cual una consecuencia del lema 4.1.1 es penalizar  $\|x\|_2$  o reemplazar la ecuación de primer tipo  $A^*A\hat{x} = A^*y$ , por una ecuación de segundo tipo dada por  $\alpha^2\hat{x} + A^*A\hat{x} = A^*y$ . Lo anterior nos conduce al siguiente problema de minimización: Sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal y acotado sobre espacios de Hilbert y sea  $b \in Y$ , se necesita determinar  $x_\alpha \in X$  que minimice el **funcional de Tikhonov** definido como:

$$J_\alpha(x) := \|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2, \quad \forall x \in X, \quad \alpha > 0, \quad (4.2.2)$$

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad del mínimo del funcional de Tikhonov. Aunque se presenta en [16]; en esta tesis desarrollamos su demostración completando los detalles que fueron omitidos.

**Teorema 4.2.1.** Sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal y acotado sobre espacios de Hilbert y  $\alpha > 0$ . Entonces el funcional de Tikhonov  $J_\alpha$  tiene un único mínimo  $x_\alpha \in X$ , el cual es la única solución de la ecuación normal:

$$\alpha^2 x + A^*Ax = A^*y. \quad (4.2.3)$$

*Demostración.* Se probará que  $x_\alpha$  es solución única de la ecuación normal  $\alpha^2 x_\alpha + A^* A x_\alpha = A^* y$ , si y solo si  $x_\alpha$  minimiza el funcional de Tikhonov.

Supongamos que  $x_\alpha$  es solución única de la ecuación normal  $\alpha^2 x_\alpha + A^* A x_\alpha = A^* y$ , probaremos que  $x_\alpha$  minimiza al funcional de  $J_\alpha$ .

Sea  $x_n \subset X$  una sucesión minimizante de vectores, de manera que cumpla lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\alpha(x_n) = I := \inf_{x \in X} J_\alpha(x). \quad (4.2.4)$$

Probaremos que la sucesión  $x_n$  es una sucesión de Cauchy; para esto sean  $n, m \in \mathbb{Z}$ , entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= \|Ax_n - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x_n\|_2^2 + \|Ax_m - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x_m\|_2^2 \\ &= \|Ax_n - b\|_2^2 + \|Ax_m - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x_n\|_2^2 + \alpha^2 \|x_m\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Por otro lado, por el teorema del binomio tenemos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle), \\ \|x - y\|_2^2 &= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle); \end{aligned}$$

y sumando las dos igualdades anteriores, se tiene:

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2. \quad (4.2.6)$$

Aplicando la igualdad (4.2.6) a  $x_n$  y  $x_m$ , obtenemos lo siguiente:

$$\|x_n + x_m\|_2^2 + \|x_n - x_m\|_2^2 = 2\|x_n\|_2^2 + 2\|x_m\|_2^2;$$

y multiplicando la igualdad anterior por  $\frac{\alpha^2}{2}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2} (\|x_n + x_m\|_2^2 + \|x_n - x_m\|_2^2) &= \frac{\alpha^2}{2} (2\|x_n\|_2^2 + 2\|x_m\|_2^2) \\ &= \alpha^2 \|x_n\|_2^2 + \alpha^2 \|x_m\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (4.2.7) en la ecuación (4.2.5), tendremos:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= \|Ax_n - b\|_2^2 + \|Ax_m - b\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2} (\|x_n + x_m\|_2^2 + \|x_n - x_m\|_2^2) \\ &= \|Ax_n - b\|_2^2 + \|Ax_m - b\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|x_n + x_m\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|x_n - x_m\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} 2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 &= 2\left\|\frac{Ax_n}{2} + \frac{Ax_m}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}\right\|_2^2 \\ &= 2\left\|\frac{Ax_n - b}{2} + \frac{Ax_m - b}{2}\right\|_2^2 \\ &= 2\left\|\frac{1}{2}[(Ax_n - b) + (Ax_m - b)]\right\|_2^2 \\ &= \frac{2}{4}\|(Ax_n - b) + (Ax_m - b)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|(Ax_n - b) + (Ax_m - b)\|_2^2. \end{aligned}$$

De aquí que:

$$4\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 = \|(Ax_n - b) + (Ax_m - b)\|_2^2. \quad (4.2.9)$$

Aplicando la igualdad (4.2.6) a  $Ax_n - b$  y  $Ax_m - b$ , se obtiene lo siguiente:

$$\|(Ax_n - b) + (Ax_m - b)\|_2^2 + \|(Ax_n - b) - (Ax_m - b)\|_2^2 = 2\|Ax_n - b\|_2^2 + 2\|Ax_m - b\|_2^2. \quad (4.2.10)$$

Al sustituir la ecuación (4.2.9) en la ecuación (4.2.10), obtenemos:

$$4\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + \|(Ax_n - b) - (Ax_m - b)\|_2^2 = 2\|Ax_n - b\|_2^2 + 2\|Ax_m - b\|_2^2.$$

Dividiendo la ecuación anterior por 2, tenemos que:

$$2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + \frac{1}{2}\|Ax_n - Ax_m\|_2^2 = \|Ax_n - b\|_2^2 + \|Ax_m - b\|_2^2. \quad (4.2.11)$$

Luego, al sustituir la ecuación (4.2.11) en la ecuación (4.2.8), obtenemos lo siguiente:

$$J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) = 2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + \frac{1}{2}\|Ax_n - Ax_m\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|x_n + x_m\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|x_n - x_m\|_2^2. \quad (4.2.12)$$

Como:

$$\begin{aligned} 2J_\alpha\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) &= 2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + 2\alpha^2\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|_2^2 \\ &= 2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + \frac{2}{4}\alpha^2\|x_n + x_m\|_2^2 \\ &= 2\|A\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - b\|_2^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|x_n + x_m\|_2^2, \end{aligned}$$

entonces, podemos reescribir la ecuación (4.2.12), como:

$$J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) = 2J_\alpha\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) + \frac{1}{2}\|Ax_n - Ax_m\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|x_n - x_m\|_2^2.$$

Dado que:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} J_\alpha\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) = I,$$

entonces, se cumple:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= 2J_\alpha\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) + \frac{1}{2}\|Ax_n - Ax_m\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|x_n - x_m\|_2^2 \\ &\geq 2J_\alpha\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\|x_n - x_m\|_2^2. \end{aligned}$$


---



Al tomar el límite para cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , en ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos que:

$$J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) \geq 2I + \frac{\alpha^2}{2} \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_2^2,$$

de aquí que:

$$0 \geq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| \geq 0.$$

Dando a lugar que la sucesión de vectores  $x_n$  es una sucesión de Cauchy. Como  $X$  es un espacio normado completo, entonces podemos concluir que la sucesión  $x_n$  es convergente, es decir, existe  $x_\alpha \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\alpha$ . Ya que el funcional de Tikhonov es continuo y la sucesión  $x_n$  es convergente, entonces tenemos que  $J_\alpha(x_n) \rightarrow J_\alpha(x_\alpha)$ ; por lo tanto  $J_\alpha(x_\alpha) = I$ . Con esto concluimos la prueba de la existencia de un mínimo de  $J_\alpha$ .

Ahora vamos a demostrar que  $x_\alpha$  es solución de las ecuaciones normales, suponiendo que es el mínimo del funcional de Tikhonov.

Sea  $x_\alpha$  un mínimo del funcional, entonces se debe cumplir que:

$$J_\alpha(x_\alpha) \leq J_\alpha(x), \quad \forall x \in X. \quad (4.2.13)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= (\|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2\|x\|_2^2) - (\|Ax_\alpha - b\|_2^2 + \alpha^2\|x_\alpha\|_2^2) \\ &= \|Ax - b\|_2^2 - \|Ax_\alpha - b\|_2^2 + \alpha^2(\|x\|_2^2 - \|x_\alpha\|_2^2). \end{aligned}$$

De la observación anterior y de la ecuación (4.1.3) de la demostración del lema anterior, se tiene:

$$J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) = 2Re(\langle A^*(Ax_\alpha - b), x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 + \alpha^2(\|x\|_2^2 - \|x_\alpha\|_2^2). \quad (4.2.14)$$

Por el teorema del binomio, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \|x_\alpha + x - x_\alpha\|_2^2 \\ &= \|x_\alpha\|_2^2 + \|x - x_\alpha\|_2^2 + 2Re(\langle x_\alpha, x - x_\alpha \rangle), \end{aligned}$$

o bien,

$$\|x\|_2^2 - \|x_\alpha\|_2^2 = \|x - x_\alpha\|_2^2 + 2Re(\langle x_\alpha, x - x_\alpha \rangle). \quad (4.2.15)$$

Sustituyendo la ecuación (4.2.15) en la ecuación (4.2.14), se tiene:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= 2Re(\langle A^*(Ax_\alpha - b), x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 + \\ &\quad \alpha^2(\|x - x_\alpha\|_2^2 + 2Re(\langle x_\alpha, x - x_\alpha \rangle)) \\ &= 2Re(\langle A^*(Ax_\alpha - b), x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 + \\ &\quad \alpha^2\|x - x_\alpha\|_2^2 + 2\alpha^2 Re(\langle x_\alpha, x - x_\alpha \rangle). \end{aligned}$$

Al factorizar términos de la igualdad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= 2Re(\langle A^*(Ax_\alpha - b), x - x_\alpha \rangle + \alpha^2 \langle x_\alpha, x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 \\ &\quad + \alpha^2\|x - x_\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de producto interior en la ecuación anterior, se tiene:

$$J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) = 2\operatorname{Re}(\langle A^*(Ax_\alpha - b) + \alpha^2x_\alpha, x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 + \alpha^2\|x - x_\alpha\|_2^2, \quad (4.2.16)$$

para todo  $x \in X$ . Al sustituir la ecuación (4.2.16) en la desigualdad (4.2.13), tenemos que:

$$0 \leq 2\operatorname{Re}(\langle A^*(Ax_\alpha - b) + \alpha^2x_\alpha, x - x_\alpha \rangle) + \|A(x - x_\alpha)\|_2^2 + \alpha^2\|x - x_\alpha\|_2^2. \quad (4.2.17)$$

La desigualdad (4.2.17) se cumple particularmente para  $x = x_\alpha + \alpha z$ , con  $\alpha > 0$  y  $z = \frac{x - x_\alpha}{\alpha} \in X$ . De aquí que:

$$0 \leq 2\operatorname{Re}(\langle A^*(Ax_\alpha - b) + \alpha^2x_\alpha, \alpha z \rangle) + \|A(\alpha z)\|_2^2 + \alpha^4\|z\|_2^2.$$

Dividiendo la desigualdad anterior por  $\alpha > 0$  y tomando el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , entonces se puede deducir que  $\operatorname{Re}(\langle A^*(Ax_\alpha - b) + \alpha^2x_\alpha, \alpha z \rangle) \geq 0$ , para todo  $z \in X$ , así que:

$$A^*(Ax_\alpha - b) + \alpha^2x_\alpha = 0,$$

por lo tanto, hemos demostrado que  $x_\alpha$  es solución a la ecuación normal

$$(A^*A + \alpha^2I)x_\alpha = A^*b.$$

Por último, probemos que dicha solución es única. Para esto, supongamos que  $x'$  también es solución de la ecuación normal:

$$\alpha^2x' + A^*Ax' = A^*b.$$

Como  $x_\alpha$  y  $x'$  son soluciones de la ecuación normal, podemos obtener lo siguiente:

$$\alpha^2x_\alpha + A^*Ax_\alpha = \alpha^2x' + A^*Ax',$$

esta igualdad se cumple solo si  $x_\alpha = x'$ . Por lo tanto,  $x_\alpha$  es la única solución de la ecuación normal. ■

El teorema anterior garantiza la solución al problema de mínimos cuadrados penalizados; sin embargo, no se nos muestra cuál es dicha solución. Para hallar la solución, se pueden utilizar distintos métodos de solución; sin embargo, debido a la necesidad de obtener una solución viable, vamos a plantear el problema de forma discreta y para esto, utilizaremos la forma matricial.

Entonces, sea  $K_A$  una matriz de tamaño  $m \times n$  asociada al operador lineal y acotado  $A$ ; de esta forma, se puede reescribir la ecuación normal de segundo tipo, como:

$$\alpha^2x_\alpha + K_A^t K_A x_\alpha = K_A^t b, \quad (4.2.18)$$

donde  $K_A^t$  es la representación matricial del operador adjunto de  $K_A$  y  $\alpha > 0$ . Lo que haremos a continuación, es obtener una expresión para  $x_\alpha$ , mediante un despeje en la ecuación

(4.2.18). Por lo anterior, vamos a considerar la descomposición en valores singulares de la matriz  $K_A$  de tal forma que:

$$K_A = U\Sigma V^t, \quad (4.2.19)$$

donde  $U_{m \times m}$  y  $V_{n \times n}$  son matrices ortonormales, tales que  $U^t U = V^t V = I$  y  $\Sigma$  es una matriz diagonal de tamaño  $m \times n$  cuyas entradas  $\sigma_i$  son los llamados valores singulares de la matriz  $K_A$  ordenados en orden decreciente:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

De lo anterior, se tiene que  $K_A$  es de la siguiente forma:

$$K_A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}^t.$$

Notemos que al transponer la matriz  $K_A$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} K_A^t &= (U\Sigma V^t)^t \\ &= (\Sigma V^t)^t U^t \\ &= (V^t)^t \Sigma^t U^t \\ &= V \Sigma^t U^t. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Al multiplicar la matriz obtenida con la matriz  $K_A$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} K_A^t K_A &= (V \Sigma^t U^t)(U \Sigma V^t) \\ &= (V \Sigma^t)(U^t U)(\Sigma V^t) \\ &= (V \Sigma^t)I(\Sigma V^t) \\ &= V \Sigma^t \Sigma V^t. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Al sustituir (4.2.20) y (4.2.21) en la ecuación (4.2.18), tenemos que:

$$\alpha^2 x_\alpha + (V \Sigma^t \Sigma V^t) x_\alpha = V \Sigma^t U^t b,$$

de donde:

$$(V \Sigma^t \Sigma V^t + \alpha^2 I_n) x_\alpha = V \Sigma^t U^t b. \quad (4.2.22)$$

Ya que  $\Sigma$  es una matriz diagonal, entonces  $\Sigma \Sigma^t = \Sigma^2$ , puesto que toda matriz diagonal  $D$ , se cumple que  $D = D^t$ ; luego, la ecuación (4.2.22) es equivalente a:

$$(V \Sigma^2 V^t + \alpha^2 I_n) x_\alpha = V \Sigma^t U^t b,$$

o bien:

$$V(\Sigma^2 + \alpha^2 I_n)V^t x_\alpha = V \Sigma^t U^t b. \quad (4.2.23)$$

A continuación, vamos a obtener de manera explícita la matriz  $V(\Sigma^2 + \alpha^2 I_n)V^t$ , para posteriormente invertirla de manera que permita despejar a  $x_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 V(\Sigma^2 + \alpha^2 I_n)V^t &= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}^t \\
 &= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}^t.
 \end{aligned}$$

Llamaremos  $L$  a la matriz siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Dado que toda matriz diagonal  $D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$  es invertible si y sólo si las entradas  $d_1, \dots, d_n$  son distintas de cero. Además que, la matriz inversa de  $D$  se puede representar como:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Debido a que  $L$  es una matriz diagonal, entonces la ecuación (4.2.23) se puede escribir de la siguiente forma:

$$x_\alpha = VL^{-1}V^tV\Sigma^tU^tb = V(\Sigma^2 + \alpha^2 I)^{-1}V^tV\Sigma^tU^tb.$$

O bien:

$$\begin{aligned}
 x_\alpha &= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \\
 &\quad \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1m} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} & \cdots & \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} & \cdots & \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1m} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} u_{11} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} u_{1n} & \cdots & \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} u_{m1} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} u_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} u_{11} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} u_{1n} & \cdots & \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} u_{m1} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} u_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} u_{11} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} u_{1n} \right) b_1 + \cdots + \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{11} u_{m1} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{1n} u_{mn} \right) b_m \\ \vdots \\ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} u_{11} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} u_{1n} \right) b_1 + \cdots + \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} v_{n1} u_{m1} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} v_{nn} u_{mn} \right) b_m \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} (u_{11} \cdots u_{m1}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} (u_{1n} \cdots u_{mn}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha^2} \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} (u_i^t b) v_i.
\end{aligned}$$

donde  $u_i = \{u_{1i}, \dots, u_{mi}\}$  y  $v_i = \{v_{1i}, \dots, v_{ni}\}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Por lo tanto, la solución del problema  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2\}$  está dada por:

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} (u_i^t b) v_i, \quad (4.2.24)$$

con  $u_i = \{u_{1i}, \dots, u_{mi}\}$  y  $v_i = \{v_{1i}, \dots, v_{ni}\}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Este método de regularización necesita un método para la escogencia de parámetro de regularización. En este trabajo no se estudiará sobre este parámetro, sin embargo existen distintos criterios para dicha selección la cual da lugar a soluciones diferentes; entre ellos destacamos: El Principio de Mínima Discrepancia ([26]), Validación Cruzada Generalizada ([8]), El Criterio de la Curva-L ([11]), entre otros.

### 4.3. Experimentos numéricos

El interés de este trabajo radica en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro. En esta sección se presenta un ejemplo donde se utiliza un algoritmo propuesto en [24] de manera particular para la solución del problema directo asociado de fuentes bioeléctricas tipo dipolar que representan a focos epilépticos.

De acuerdo a lo estudiado anteriormente, el problema inverso consiste en hallar el momento dipolar  $\hat{S}$  a partir del conocimiento de la posición de los electrodos de medición sobre el cuero cabelludo y de los potenciales medidos en ellos.

Debido a que no contamos con datos experimentales, vamos a trabajar con un ejemplo sintético. El ejemplo sintético consiste en resolver el problema directo (hallar el potencial en el interior de la región) suponiendo que se conoce la localización de la fuente (o solución del problema inverso). A partir de la solución del problema directo, se obtendrán los datos de entrada para el problema inverso; estos datos son los potenciales medidos en cada uno de los electrodos de medición y colocados en el cuero cabelludo; los cuales se usarán como datos para el problema inverso, de manera que al aplicarles el método de regularización para resolver el problema inverso, se obtenga una solución regularizada, la cual debe ser muy cercana a la solución exacta

#### 4.3.1. Solución del problema directo

Para resolver el problema directo vamos a suponer que la región  $\Omega$  es una esfera de radio 1, centrada en el origen con conductividad constante  $\sigma$ ; en la que se cumple el problema de contorno:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde la fuente localizada en el punto  $a$  puede ser representada de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{\nabla \cdot (p\delta(x - a))}{\sigma}, \quad (4.3.2)$$

donde  $p$  representa al momento dipolar y  $\delta(x - a)$  es la distribución delta de Dirac concentrada en  $a$ .

En ([24]) se muestra que la solución al problema de contorno (4.3.1), donde  $f$  está dada por (4.3.2) es:

$$u(x) = \left[ \frac{q \vec{d}}{\sigma} \cdot \nabla_y G(y, x) \right] \Big|_{y=a}, \quad (4.3.3)$$

donde  $q$  y  $\vec{d}$  son los parámetros del momento dipolar,  $\nabla_y$  es el operador gradiente con respecto a la variable  $y$  y  $G(y, x)$  es la función de Green. Considerando que  $x$  está fijo, la función de Green está dada por ([24]):

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|y - x|} + g(y, x),$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $g(y, x) = \beta R^2 + g_1(y, x)$ , para  $\beta = -\frac{1}{6m(\Omega)}$ ,  $R^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ,  $m(\Omega)$  es el volumen de  $\Omega$  y  $g_1$  una función armónica que satisface el problema:

$$\Delta g_1(y, x) = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{4\pi|y-x|} + \beta R^2 \right], \quad x \in S, y \in \Omega. \quad (4.3.5)$$

En el esquema de la figura 4.1, se representa, de manera particular, la posición del electrodo de medición y de la fuente bioeléctrica.

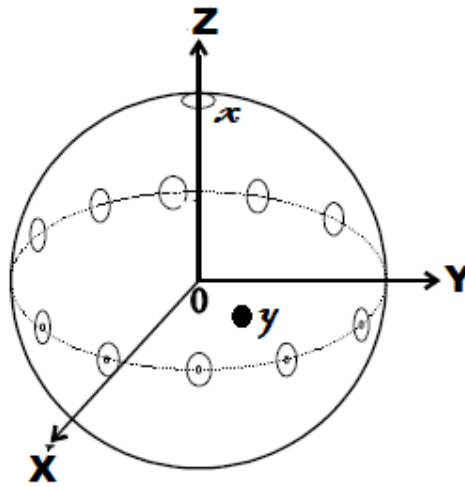


Figura 4.1: Esquema de la región esférica que representa al cerebro, donde  $x$  es la posición del electrodo de medición e  $y$  es la posición de la fuente bioeléctrica.

Dado que el electrodo de medición en el punto  $x$  se ubica sobre el eje  $Z$ , es decir, cuando  $x = (0, 0, x_3)$ , se tiene que la función de Green es de la forma ([24]):

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{1}{y_3} \frac{1}{4\pi|y-x'|} - \frac{\omega(y, x)}{4\pi} - \frac{R^2(y)}{8\pi} + \widehat{C}, \quad (4.3.6)$$

donde  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $|y-x| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - x_3)^2}$ ,  $x'_3 = \frac{1}{x_3}$ ,  $x' = (0, 0, x'_3)$ ,  $\omega(y, x) = \ln(x'_3 - y_3 + |y-x'|)$  y  $\widehat{C}$  es una constante que se elige de manera que se cumpla la condición:

$$\int_{\Omega} G(y, x) dy = 0. \quad (4.3.7)$$

Ahora, obtengamos el vector gradiente de la función de Green dada para la región  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
\nabla_y G(y, x) = & \left( -\frac{y_1}{4\pi} \left( \frac{1}{|y-x|^3} + \frac{1}{|y-x'|^3} + \frac{1}{|y-x'|(x'_3 - y_3 + |y-x'|)} + 1 \right), \right. \\
& -\frac{y_2}{4\pi} \left( \frac{1}{|y-x|^3} + \frac{1}{|y-x'|^3} + \frac{1}{|y-x'|(x'_3 - y_3 + |y-x'|)} + 1 \right), \\
& \left. -\frac{y_3 - x_3}{4\pi|y-x|^3} - \frac{y_3 - x'_3}{4\pi|y-x'|^3} + \frac{1}{4\pi|y-x'|} - \frac{y_3}{4\pi} \right)^t, \tag{4.3.8}
\end{aligned}$$

donde  $\nabla_y G(y, x)$  es el vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales de la función de Green con respecto a  $y$ , donde  $x$  es fija.

De manera que la solución del problema (4.3.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u(x) = & \left( \left[ -\frac{qd_1 y_1}{4\sigma\pi} \left( \frac{1}{|y-x|^3} + \frac{1}{|y-x'|^3} + \frac{1}{|y-x'|(x'_3 - y_3 + |y-x'|)} + 1 \right), \right. \right. \\
& -\frac{qd_2 y_2}{4\sigma\pi} \left( \frac{1}{|y-x|^3} + \frac{1}{|y-x'|^3} + \frac{1}{|y-x'|(x'_3 - y_3 + |y-x'|)} + 1 \right), \\
& \left. \left. -\frac{qd_3}{\sigma} \left( \frac{(y_3 - x_3)}{4\pi|y-x|^3} - \frac{y_3 - x'_3}{4\pi|y-x'|^3} + \frac{1}{4\pi|y-x'|} - \frac{y_3}{4\pi} \right) \right] \Big|_{y=a} \right)^t. \tag{4.3.9}
\end{aligned}$$

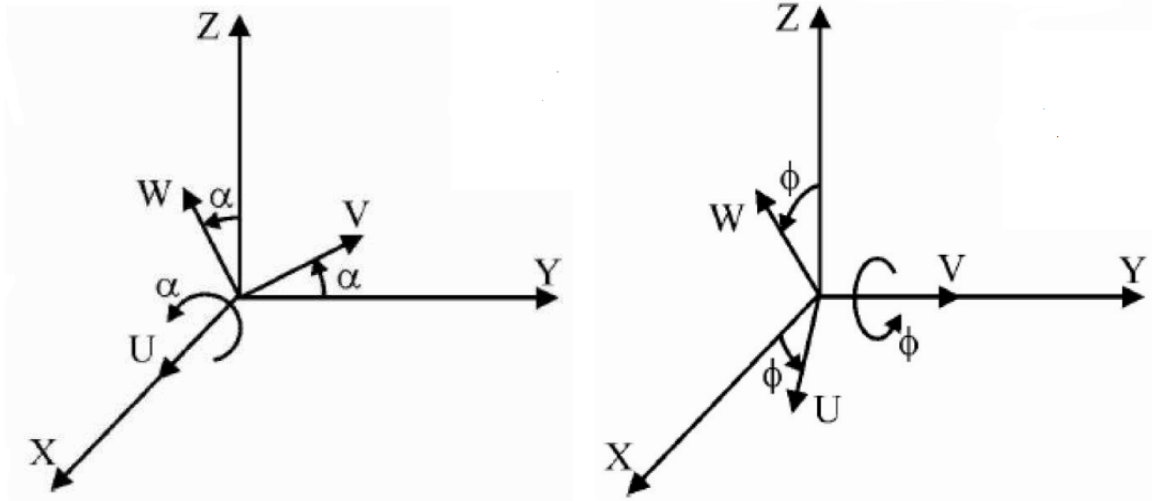
Ahora bien, para que podamos hallar el potencial dado en (4.3.9), debemos tomar en cuenta que el electrodo de medición debe estar localizado en el polo norte de la esfera unitaria; por lo tanto, cuando los electrodos de medición no se encuentran colocados en esa posición, debemos realizar rotaciones y traslaciones para llevarlos a ella.

A continuación vamos a describir cómo hallar al potencial en un electrodo que no está colocado en el polo norte de la esfera unitaria. Para ello, supongamos que la posición del electrodo está dada por:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{4.3.10}$$

Para llevar el punto  $x$  a la posición del vector  $(0, 0, 1)$ , vamos a recurrir a las matrices de rotación alrededor del eje  $X$  y del eje  $Y$  que se deducen a apartir de los esquemas mostrados en la figura 4.2.





(a) Rotación de V y W alrededor del eje X.

(b) Rotación de W y U alrededor del eje Y.

Figura 4.2: Rotación con respecto a los ejes X y Y.

Antes de iniciar con el proceso de rotación, primero normalicemos el vector  $x$ , y denotemos por  $u$  a este vector normalizado; esto es:

$$u = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3.11)$$

A fin de colocar  $u$  sobre el eje  $Z$ , el proceso se realizará en dos pasos:

1. Rotar el vector  $u$ , alrededor del eje X hasta llevarlo al plano  $XZ$ . Para esto, primero proyectamos al vector  $u$  sobre el plano  $YZ$  y denotamos por  $\tilde{u}$  a su vector proyección. Después calculamos el ángulo de giro  $\alpha$  y obtenemos las componentes de la matriz de rotación con respecto al eje X, que se denota por  $R_x(\alpha)$  (ver Figura 4.3). Finalmente, aplicamos la matriz de rotación  $R_x(\alpha)$  al vector  $u$ , para llevarlo al plano  $XZ$ .
2. Rotar un ángulo  $\phi$  al vector obtenido en el paso anterior alrededor del eje Y, mediante la aplicación de la matriz de rotación  $R_y(\phi)$ .

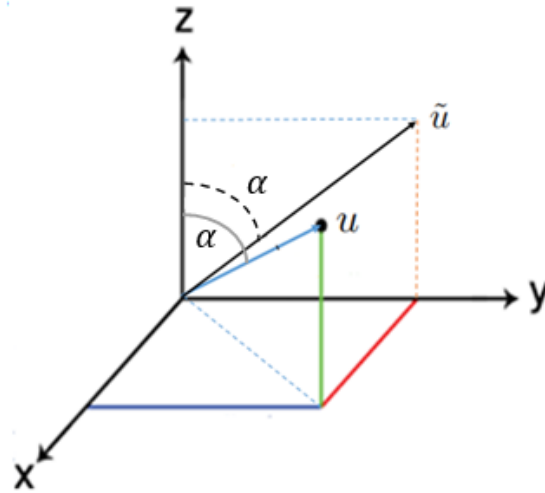


Figura 4.3: El ángulo formado por la proyección del vector  $u$  sobre el plano  $YZ$  con el eje  $Z$  será denotado por  $\alpha$ .

Posteriormente vamos a describir con detalle los pasos anteriores y aclaramos que los giros en el sentido a las manecillas del reloj serán negativos.

Para girar al vector  $u$  alrededor del eje  $X$ , debemos encontrar la matriz de giro ( $R_x(\alpha)$ ), para esto, primero vamos a encontrar condiciones que debe cumplir el ángulo de giro.

Dado que  $u$  forma un ángulo  $\alpha$  con respecto al plano  $XZ$ , como se muestra en la Figura 4.3, al realizar la rotación del vector, con respecto al eje  $X$ , debemos considerar que se trata de un giro negativo, pues el sentido de dicho giro es el mismo que el de las manecillas de reloj; por tanto, este ángulo será denotado por  $-\alpha$ .

Sea  $UVW$  el nuevo sistema de coordenadas,  $e_x, e_y$  y  $e_z$  los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $XYZ$ , y  $e_u, e_v$  y  $e_w$  los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $UVW$ .

Como la rotación que se realizará es en relación al eje  $X$ , el vector unitario  $e_x$  coincidirá con el vector unitario  $e_u$ . Mientras que al proyectar los vectores unitarios  $e_y$  y  $e_z$  sobre los vectores unitarios  $e_v$  y  $e_w$  respectivamente, tenemos que la matriz de rotación  $R_x(\alpha)$  es:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \otimes (e_u \ e_v \ e_w) = \begin{pmatrix} e_x e_u & e_x e_v & e_x e_w \\ e_y e_u & e_y e_v & e_y e_w \\ e_z e_u & e_z e_v & e_z e_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & \text{sen}(-\alpha) \\ 0 & -\text{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $\alpha$  es un ángulo agudo del triángulo rectángulo formado por el vector  $\tilde{u}$  y sus coordenadas cartesianas. Luego, por razones trigonométricas tenemos:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{u_3}{d_u}, \quad \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha) = -\frac{u_2}{d_u}, \quad (4.3.12)$$

donde  $d_u = \sqrt{u_2^2 + u_3^2}$ .

Sustituyendo los valores obtenidos en (4.3.12) en la matriz de rotación  $R_x(\alpha)$ , se tiene:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & \text{sen}(-\alpha) \\ 0 & -\text{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_3}{d_u} & -\frac{u_2}{d_u} \\ 0 & \frac{u_2}{d_u} & \frac{u_3}{d_u} \end{pmatrix}. \quad (4.3.13)$$

Una vez que obtenemos a la matriz de rotación  $R_x(\alpha)$ , la aplicamos al vector  $u$ , para obtener al vector  $\hat{u}$ , como sigue:

$$R_x(\alpha)u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_3}{d_u} & -\frac{u_2}{d_u} \\ 0 & \frac{u_2}{d_u} & \frac{u_3}{d_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ d_u \end{pmatrix} = \hat{u}. \quad (4.3.14)$$

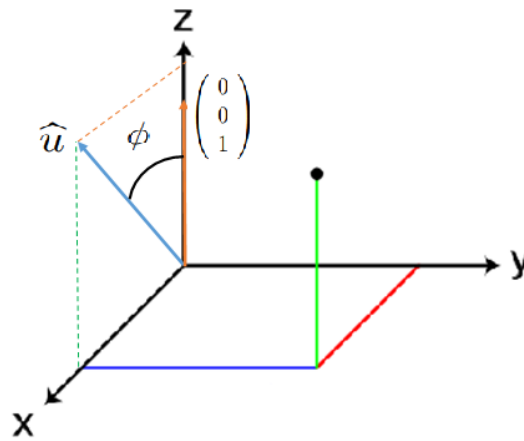


Figura 4.4: El ángulo formado por el vector  $\hat{u}$  y el eje  $Z$ , denotado por  $\phi$ .

Ahora calculemos la matriz de rotación que nos ayudará que el vector  $\hat{u}$  sea colocado sobre el eje positivo  $Z$ . Para colocar dicho vector sobre el eje positivo  $Z$  utilicemos el ángulo  $\phi$  que se genera en el triángulo formado por el vector  $\hat{u}$  y el eje  $Z$ . En consecuencia, por las razones trigonométricas, se tiene:

$$\cos(\phi) = \frac{d_u}{d_{\hat{u}}} = d_u, \quad \text{sen}(\phi) = \frac{u_1}{d_{\hat{u}}} = u_1. \quad (4.3.15)$$

donde  $d_{\hat{u}} = \sqrt{u_1^2 + d_u^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$ .

Sea  $UVW$  el nuevo sistema de coordenadas,  $e_x, e_y$  y  $e_z$  los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $XYZ$ , y  $e_u, e_v$  y  $e_w$  los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $UVW$ . Al proyectar los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $XYZ$  en cada uno de los vectores unitarios del sistema de coordenadas  $UVW$ , tenemos:

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \otimes (e_u \ e_v \ e_w) = \begin{pmatrix} e_x e_u & e_x e_v & e_x e_w \\ e_y e_u & e_y e_v & e_y e_w \\ e_z e_u & e_z e_v & e_z e_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

De aquí que, la matriz  $R_y(\phi)$  correspondiente a la rotación alrededor del eje  $Y$  para el vector  $\hat{u}$  es:

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_u & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_1 & 0 & d_u \end{pmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Después de que obtenemos la matriz  $R_y(\phi)$  y aplicarla al vector  $\hat{u}$ , se lleva finalmente el vector  $u$  a la posición del polo norte de la esfera unitaria:

$$R_y(\phi)u = \begin{pmatrix} d_u & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_1 & 0 & d_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ d_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.17)$$

De los cálculos anteriores podemos observar cómo se transforma el punto  $x$  a un punto que coincide con el punto  $(0, 0, 1)$ ; de manera que se pueda calcular el gradiente de la función de Green para hallar el potencial  $u(x)$ .

### 4.3.2. Solución del problema directo cuando la fuente se representa como un dipolo eléctrico.

Para hallar los valores del potencial en cada electrodo en la superficie de la cabeza, se utilizará la fórmula (4.3.9) y supondremos que:

- La fuente estará localizada en el punto  $a = (0, 0.03, 0.01)$ .
- La conductividad del medio en la cabeza es igual a  $2 \times 10^{-12}$ .
- Los electrodos se ubicarán en forma de una banda, teniendo así la misma altura. De manera que las coordenadas cartesianas de los electrodos se presentan en el Cuadro (4.3.1).

No. de electrodos	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	0.1	0	0.015
2	0.07	0.07	0.015
3	0	0.1	0.015
4	-0.07	0.07	0.015
5	-0.1	0	0.015
6	-0.07	-0.07	0.015
7	0	-0.1	0.015
8	0.07	-0.07	0.015

Cuadro 4.3.1: Coordenadas cartesianas de cada electrodo.

Para tener una referencia de los resultados que se obtendrá mediante el método de solución planteado anteriormente, se muestran en el Cuadro (4.3.2) los valores de los potenciales en cada electrodo que obtuvieron los autores de ([23]). Además que ambos resultados se compararán con los que se obtienen con el toolbox Fieldtrip de Matlab.

No. de electrodos	Potencial hallado en ([23])
1	0.035
2	0.048
3	0.074
4	0.050
5	0.043
6	0.049
7	0.040
8	0.038

Cuadro 4.3.2: Valores de los potenciales en cada electrodo, obtenidos en ([23]).

Con el fin de ilustrar cómo se obtienen los potenciales dentro del cerebro, a partir del conocimiento de la localización de la fuente, vamos a explicar cómo hallamos el potencial en el electrodo colocado sobre el cuero cabelludo en la posición  $x = (0.1, 0, 0.015)$ , usando las matrices de rotación y la expresión (4.3.9).

Dado que la posición del este electrodo es distinta a la posición del vector unitario  $(0, 0, 1)$ , entonces procederemos a normalizar y rotar al vector  $x$ , para llevarlo a la posición del vector unitario sobre el eje  $Z$ . Para esto, primero vamos a normalizar el vector  $x$  y denotemos por  $u$  a su vector normalizado:

$$u = \begin{pmatrix} \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \\ 0 \\ \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \end{pmatrix}.$$

Una vez que lo hemos normalizado, lo vamos a rotar alrededor del eje  $X$  y posteriormente alrededor del eje  $Y$ , para llevarlo a la posición deseada.

Ahora bien, para hallar el ángulo de rotación  $\alpha$ , que servirá para obtener la matriz de rotación alrededor del eje  $X$ , que aplicaremos al vector normalizado  $u$ , vamos a proyectar el vector  $u$  sobre el plano  $YZ$  y llamemos  $\tilde{u}$  a su vector proyección. Luego,

$$\tilde{u} = (0, 0, \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}}).$$

De esta forma, al considerar el ángulo  $\alpha$  que se forma entre el vector  $\tilde{u}$  y el eje  $Z$ , obtenemos, mediante razones trigonométricas, las siguientes ecuaciones que debe cumplir el ángulo  $\alpha$ :

$$\cos(\alpha) = 1, \quad \text{sen}(\alpha) = 0, \quad (4.3.18)$$

donde  $|\tilde{u}| = \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}}$ .

Por lo que, la matriz de rotación alrededor del eje  $X$ , dada en (4.3.13) para el vector  $u$ , es:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, utilizaremos la matriz de rotación  $R_x(\alpha)$  para rotar al vector unitario  $u$  alrededor del eje  $X$  y llevarlo al plano  $XZ$ ; de esta forma el vector rotado lo denotaremos por  $\hat{u}$ ; que en este caso coincide con  $u$ , pero pudiera no ser así:

$$\hat{u} = R_x(\alpha)u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u = u.$$

Finalmente, para rotar al vector  $\hat{u}$  alrededor del eje  $Y$ , necesitamos conocer la matriz de rotación correspondiente. Para ello, de acuerdo a lo explicado anteriormente, el ángulo de rotación  $\phi$ , alrededor del eje  $Y$ , debe cumplir las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos(\phi) = \frac{0.015}{\sqrt{(0.1)^2 + (0.015)^2}}, \quad \text{sen}(\phi) = \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}}. \quad (4.3.19)$$

Apartir de estos cálculos podemos obtener la matriz de rotación correspondiente a la rotación alrededor del eje  $Y$  para el vector  $\hat{u}$ , es la siguiente:

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} & 0 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{0.1}{0.1^2 + 0.015^2} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \end{pmatrix},$$

aplicando  $R_y(\phi)$  al vector  $\hat{u}$  obtenemos que el vector  $x$  se ha rotado a la posición del vector unitario del eje  $Z$  como sigue:

$$R_y(\phi)\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} & 0 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{0.1}{0.1^2 + 0.015^2} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \end{pmatrix} \hat{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{x}.$$

Debido a que el sistema de coordenadas se ha modificado para obtener la posición del electrodo deseado, podemos deducir que la posición de la fuente también ha cambiado, por lo que para obtener la nueva posición de la fuente se le aplicará las matrices rotación antes calculadas. Dicha ubicación la denotaremos como  $\tilde{a}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= R_y(\phi)R_x(\alpha)a^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} & 0 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{0.1}{0.1^2 + 0.015^2} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2 + 0.015^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.03 \\ 0.01 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9.89 \times 10^{-3} \\ 0.03 \\ 1.48 \times 10^{-3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cabe mencionar que los cálculos anteriores se realizaron con el propósito de hallar el potencial en el electrodo colocado en la posición  $x$ , mediante la ecuación (4.3.9). Sin embargo, en dicha ecuación, la expresión para el gradiente de la función de Green solo se puede utilizar para vectores unitarios que coincidan con el eje  $Z$ ; motivo por el cual hemos llevado el vector  $x$  a la posición  $(0, 0, 1)$  y a la posición de la fuente a la nueva posición  $\tilde{a}$ . Ahora bien, a partir de las nuevas posiciones de los vectores  $x$  y  $a$ , procedemos a calcular el vector gradiente de la función de Green y obtenemos:

$$[\nabla G(y, \tilde{x})] \Big|_{y=\tilde{a}} = (2.76 \times 10^{-3}, 4.185 \times 10^{-3}, 0.238). \quad (4.3.20)$$

Sin embargo, para aplicar la fórmula (4.3.9), que nos permita hallar el potencial en el electrodo  $x$  y cuya fuente está colocada en el punto  $a$ , debemos regresar al vector obtenido en (4.3.20), al sistema de coordenadas de los vectores  $x$  y  $a$ . Es decir, obtendremos el gradiente en el sistema de coordenadas original y, para esto, calcularemos las inversas de las matrices de rotación dadas anteriormente, para así aplicarlas a (4.3.20).

Utilizando el método de Gauss, obtengamos la matriz inversa de  $R_y(\phi)$ :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{0.1}{0.015} & \frac{\sqrt{0.1^2+0.015^2}}{0.015} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{0.1^2+0.015^2}}{0.015} & -\frac{0.1}{0.015} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{0.1}{0.015} & \frac{\sqrt{0.1^2+0.015^2}}{0.015} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \end{array} \right). \end{aligned}$$

y al aplicar la matriz de inversa de  $R_y(\phi)$  a  $[\nabla G(y, \tilde{x})] \Big|_{y=\tilde{a}}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} R_y(\phi)^{-1} \left( [\nabla G(y, \tilde{x})] \Big|_{y=\tilde{a}} \right)^t &= \left( \begin{array}{ccc} \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} & 0 & \frac{0.015}{\sqrt{0.1^2+0.015^2}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 2.76 \times 10^{-3} \\ -8.37 \times 10^{-3} \\ 0.238 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.236 \\ -8.37 \times 10^{-3} \\ 0.0033 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Lo que sigue es aplicar la inversa de la matriz  $R_x(\alpha)$  al vector obtenido en (4.3.21); sin embargo, para el caso de este ejemplo, la inversa de la matriz  $R_x(\alpha)$  es la matriz identidad. De manera que el vector  $(0.236, -8.37 \times 10^{-3}, 0.0033)$  corresponde al vector gradiente de la función de Green en las coordenadas originales.

Ahora bien, a partir del vector dado en (4.3.21) y el momento dipolar  $p$ , podemos hallar finalmente el potencial en el electrodo  $x$ , utilizando la ecuación (4.3.9), dado por:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{[\nabla G(y, \tilde{x})] \Big|_{y=a}}{\sigma} \cdot p \\
&= \frac{(0.236, -8.37 \times 10^{-3}, 0.0033)}{2 \times 10^{-12}} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (1.18 \times 10^{11}, -4.185 \times 10^9, 0.165 \times 10^9) \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 1.18 \times 10^{10}.
\end{aligned}$$

El proceso que realizamos para hallar el potencial en el electrodo colocado en la posición  $x$ , se realiza para cada uno de los electrodos colocados sobre el cuero cabelludo, de manera que al final obtenemos los valores del potencial dados en el Cuadro (4.3.2) ([23]). Más aún, debido a que son varios cálculos, hemos realizado un programa computacional que se presenta en el Apéndice A.

Debido a que necesitamos conocer a la matriz de propagación  $K_A$  para resolver el problema inverso, usaremos la expresión dada en (4.3.3) y el código computacional del Apéndice A; de esta forma, encontramos la siguiente matriz de propagación:

$$K_A = \begin{pmatrix} 1.1840 \times 10^{11} & -0.0419 \times 10^{11} & 0.1637 \times 10^{11} \\ 0.8896 \times 10^{11} & 0.8459 \times 10^{11} & 0.1761 \times 10^{11} \\ 0 & 1.2469 \times 10^{11} & 0.1789 \times 10^{11} \\ -0.8896 \times 10^{11} & 0.8459 \times 10^{11} & 0.1761 \times 10^{11} \\ -1.1840 \times 10^{11} & -0.0419 \times 10^{11} & 0.1637 \times 10^{11} \\ -0.7897 \times 10^{11} & -0.8298 \times 10^{11} & 0.1558 \times 10^{11} \\ 0 & -1.1306 \times 10^{11} & 0.1505 \times 10^{11} \\ 0.7897 \times 10^{11} & -0.8298 \times 10^{11} & 0.1558 \times 10^{11} \end{pmatrix}. \quad (4.3.22)$$

Con el conocimiento de la matriz  $K_A$  y de la posición del momento dipolar  $p$ , hallamos los valores de los potenciales  $v$  en cada electrodo, dados por:

$$v = \begin{pmatrix} 1.1840 \times 10^{10} \\ 8.8959 \times 10^9 \\ 0 \\ -8.8959 \times 10^9 \\ -1.1840 \times 10^{10} \\ -7.8966 \times 10^9 \\ 0 \\ 7.8966 \times 10^9 \end{pmatrix}. \quad (4.3.23)$$

Comparamos los valores del potencial en los electrodos que obtuvimos en (4.3.23), con los que obtuvieron los autores en ([23]); pero observamos que eran distintos. Por ello,



fue necesario utilizar el toolbox Fieldtrip para poder comparar el resultado (4.3.23) y asegurarnos que la matriz de propagación  $K_A$  obtenida fuera la correcta; de aquí que se llegó a la conclusión que los potenciales teóricos medidos por los electrodos resultantes por el toolbox Fieldtrip fueron iguales a los que obtuvimos con nuestro código. El código computacional de Fieldtrip que se tomó como ejemplo para obtener el potencial de los datos supuestos, se puede ver en ([28]).

### 4.3.3. Solución del problema inverso

En la sección anterior hemos obtenido los valores de los potenciales en cada electrodo, de acuerdo a lo mostrado en (4.3.23); en esta sección vamos a resolver el problema inverso. Este problema inverso, supone que no conocemos la posición de la fuente pero que conocemos los potenciales medidos en los electrodos colocados sobre el cuero cabelludo.

Lo que haremos en esta sección es aplicar el método de regularización de Tikhonov, para resolver el problema inverso, a partir de los potenciales (4.3.23). La solución del problema inverso nos dará la ubicación de la fuente, que en principio, debe ser muy cercana a la fuente exacta  $p$ , que utilizamos en la sección anterior. De esta forma, la solución del problema directo, servirá para validar a la solución del problema inverso.

Dado que el problema inverso electroencefalográfico entra en la categoría de los problemas que son mal planteados, para resolver el problema se utilizará el método de regularización de Tikhonov, la cual consiste en hallar una solución aproximada a la solución exacta del problema  $K_A p = v$ , resolviendo el problema de mínimos cuadrados penalizados:

$$\min_p \{ \|K_A p - v\|_2^2 + \alpha^2 \|p\|_2^2 \},$$

donde  $K_A$  es la matriz de propagación, cuyas entradas contienen los valores de  $\nabla_y G(x_k, y)$  para los  $k$  electrodos;  $p = q \vec{d}$  es el vector que representa al momento dipolar y  $v$  es el vector que contiene los potenciales medidos en los electrodos.

Considerando la matriz de propagación (4.3.22) y los potenciales teóricos (4.3.23) obtenidos en el problema directo electroencefalográfico, con el valor del parámetro  $\alpha$  que se estableció, se resolvió el problema inverso electroencefalográfico mediante el método de la regularización de Tikhonov, la cual nos proporciona una solución aproximada  $\tilde{p}$  del momento dipolar que estábamos buscando:

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 1.3878 \times 10^{-17} \end{pmatrix}.$$

Si comparamos la solución aproximada  $\tilde{p}$  con la solución exacta  $p$ , tenemos un error absoluto de  $3.8519 \times 10^{-34}$  para  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ , lo cual el resultado presenta un error mínimo que era esperado, ya que la solución está regularizada.



---

## Conclusiones

---

El objetivo de este trabajo de tesis fue estudiar el problema de identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de la medición del electroencefalograma sobre el cuero cabelludo, para el caso de una fuente dipolar. En el estudio de este tema se pudo observar que es algo diverso, ya que requiere de distintas disciplinas para analizarse de forma correcta, aparte de las matemáticas que es lo primordial en este trabajo. Para ello, fue necesario revisar una serie de conceptos que nos permitieron conocer la formulación del modelo electroencefalografico, la cual permitió identificar al problema de contorno y al problema inverso.

Esto nos permitió desarrollar el análisis de la existencia y unicidad de la solución del problema directo de identificación de la fuente. También se analizaron los métodos de mínimos de cuadrados y mínimos cuadrados penalizados, para este último método se necesita introducir un término de regularización que nos ayuda ajustar el modelo estudiado. Sin embargo, sabemos que hay otras soluciones basados en norma mínima como: la norma mínima ponderada, el algoritmo de LORETA y de la estandarización de LORETA, que no se analizaron en este trabajo, pero que se puede estudiar y hacer una comparación entre ellas para observar su eficiencia.

Además, para resolver numéricamente el problema inverso electroencefalográfico se sabe que es necesario resolver primero el problema directo asociado a fin de conocer la matriz de propagación. Como el problema de interés es el problema inverso, se quería solo encontrar información de la matriz de propagación, en cambio esto no fue posible debido que los artículos que han estudiado este tema no muestran como tal a dicha matriz; por lo que se tuvo que revisar un algoritmo para resolver numéricamente el problema directo, sin tener que profundizar en la teoría.

A través del algoritmo presentado para resolver el problema directo, se realizó una comparación con los datos encontrados en [23], aunque dicha comparación resultó que difiere de los potenciales que nosotros obtuvimos, por lo cual fue necesario utilizar el toolbox Fieldtrip, y así obtener la matriz de propagación correcta, que fue necesaria para la solución del problema inverso. Posteriormente, se empleó el método de regularización Tikhonov para resolver numéricamente el problema inverso, donde los resultados obtenidos nos indican que es estable hasta que el parámetro de regularización empieza tomar un valor mayor a 362 y el error de nuestro resultado comparado con el real fue mínimo.



---

## Apéndice A

---

A continuación, se muestra el código computacional que se desarrolló para identificar la fuente bioeléctrica dipolar, considerando el análisis explicado en el Capítulo 4. Cabe señalar que los comentarios realizados dentro del código se han escrito sin acentos, debido a que el software de Matlab no los admite.

```
1 %%DATOS DE LA FUENTE
2 PO=[0 0.03 0.01] %Posicion del dipolo
3 moment=[0.1 0 0] %Momento dipolar
4 %%Conductividad del medio
5 sigma=2e-12
6 %%Puntos de medicion
7 POS_ELEC=[0.10 0 0.015; 0.07 0.07 0.015; 0 0.10 0.015; -0.07 0.07 0.015;
8 -0.1 0 0.015; -0.07 -0.07 0.015; 0 -0.1 0.015; 0.07 -0.07 0.015]
9 %%Los potenciales medidos en los electrodos
10 V_ELEC=[0.035 0.048 0.074 0.05 0.043 0.049 0.04 0.038]
11 %%%% Se rotara las posiciones de los electrodos y la posicion del
    dipolo
12 %%%% de manera que nuestro sistema de coordenada haga que coincida la
13 %%%% posicion del electrodo en el norte de una esfera unitaria
14 PO_ROTADO=ones(8,3)
15 POS_ELEC_ROTADO=ones(8,3)
16 for j=1:1:8
17     d=sqrt(POS_ELEC(j,1)^2+POS_ELEC(j,2)^2+POS_ELEC(j,3)^2)
18     P=[POS_ELEC(j,1)/d POS_ELEC(j,2)/d POS_ELEC(j,3)/d]
19     x0=P(1)
20     y0=P(2)
21     z0=P(3)
22     dx=sqrt(y0^2+z0^2)
23     Rx=[1 0 0;0 z0/dx -y0/dx;0 y0/dx z0/dx]
24     PrOT1=Rx*P'
25     Ryy=[dx 0 -PrOT1(1);0 1 0;PrOT1(1) 0 dx]
26     PrOT2=Ryy*Rx*P'
27     POS_ELEC_ROTADO(j,:)=PrOT2'
28     POrOT=Ryy*Rx*PO'
29     PO_ROTADO(j,:)=POrOT'
30 end
31 %%%%Se evaluo la gradiente de la funcion de Green en las
32 %%%%posiciones de los electrodos y de la posicion del dipolo
```

```

33 POT=ones(8,1)
34 A=ones(8,3)
35 for i=1:1:8
36     dist11=PO_ROTADO(i,1)^2+PO_ROTADO(i,2)^2+(PO_ROTADO(i,3)-
POS_ELEC_ROTADO(i,3))^2
37     dist12=PO_ROTADO(i,1)^2+PO_ROTADO(i,2)^2+(PO_ROTADO(i,3)-(1/
POS_ELEC_ROTADO(i,3)))^2
38     dGdx=-(1/(4*pi))*PO_ROTADO(i,1)*((1/(dist11)^(3/2))+1/(
POS_ELEC_ROTADO(i,3)*(dist12)^(3/2)))+1/((sqrt(dist12))*((1/
POS_ELEC_ROTADO(i,3))-PO_ROTADO(i,3)+sqrt(dist12))))+1)
39     dGdy=-(1/(4*pi))*PO_ROTADO(i,2)*((1/(dist11)^(3/2))+1/(
POS_ELEC_ROTADO(i,3)*(dist12)^(3/2)))+1/((sqrt(dist12))*((1/
POS_ELEC_ROTADO(i,3))-PO_ROTADO(i,3)+sqrt(dist12))))+1)
40     dGdz=-1/(4*pi)*(((PO_ROTADO(i,3)-POS_ELEC_ROTADO(i,3))/(dist11)
^(3/2))+((PO_ROTADO(3)-(1/POS_ELEC_ROTADO(i,3)))/(POS_ELEC_ROTADO(i
,3)*(dist12)^(3/2))))+1/(4*pi*sqrt(dist12)))-(PO_ROTADO(i,3)/(4*pi))
41
42     d=sqrt(POS_ELEC(i,1)^2+POS_ELEC(i,2)^2+POS_ELEC(i,3)^2)
43     P=[POS_ELEC(i,1)/d POS_ELEC(i,2)/d POS_ELEC(i,3)/d]
44     AA=[dGdx/sigma dGdy/sigma dGdz/sigma]
45     x0=P(1)
46     y0=P(2)
47     z0=P(3)
48     dx=sqrt(y0^2+z0^2)
49     Rx=[1 0 0;0 z0/dx -y0/dx;0 y0/dx z0/dx]
50     PrOT1=Rx*P'
51     Ryy=[dx 0 -PrOT1(1);0 1 0;PrOT1(1) 0 dx]
52     ArOT=inv(Rx)*inv(Ryy)*AA'
53     A(i,:)=ArOT'
54 end
55 %%%Se obtiene la solución del problema directo
56 POT=A*moment'
57 %%%Para obtener la solución del problema inverso, procederemos a:
58 [U,S,V]=svd(A)%Realizar la descomposición de valores singulares de la
matriz de propagación
59 alpha=1e-5%el parametro de regularización de Tikhonov
60 inv_T=inv(V*S'*S*V'+(alpha^2)*eye(3))
61 x_alpha=inv_T*V*S'*U'*POT %solución del problema inverso usando la
regularización de Thikonov
62 %%%Calculamos el error entre la solución obtenida y su valor exacto.
63 x=[0.1;0;0]%posición exacta de la fuente
64 E=norm(x-x_alpha)^2

```

Listing 1: Código de Matlab.

---

## Bibliografía

---

- [1] Alonso F. (2018) “*Modelos y simulaciones del campo eléctrico en estimulación cerebral profunda: comparación de diseños de cables, modos de funcionamiento y conductividad tisular.*” Prensa electrónica de la Universidad de Linköping.
- [2] Beltrachini L., von Ellenrieder N. y Muravchik CH. (2008) “*Análisis del problema directo en EEG sobre medios anisótropos: formulación matemática y simulación mediante FEM.*” En Actas del XVII de Métodos numéricos y sus aplicaciones. ENIEF, tomo XXVII, pág. 10–13.
- [3] Burden R.L., Douglas J. (2002) “*Análisis numérico*” Ediciones Paraninfo, no. 7, pág. 454-464.
- [4] Brezis H. (2010) “*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
- [5] De Munck Jan C., Van Dijk Bob W. y Spekreijse Henk. (Noviembre 1988) “*Mathematical dipoles are adequate to describe realistic generators of human brain activity.*” IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 35, no. 11. pág. 960-966.
- [6] Escamilla J. A. (1999) “*Modelos matemáticos para el estudio de la activación de la corteza cerebral.*” Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas.
- [7] FisiOnline todo sobre fisioterapia “*Soma o cuerpo neuronal*”. En FisiOnline. Extraído el (octubre 2021) en <https://www.fisioterapia-online.com/glosario/soma-o-cuerpo-neuronal>.
- [8] Golub, G. H., Heath, M., Wabba, G., (1979). “*Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter*”. Technometrics, vol. 21, pág. 215–223.
- [9] Grech R., Cassar T., Muscat J., Camilleri K.P., Fabri S.G., Zervakis M., Xanthopoulos P., Sakkalis V. y Vanrumste B. (2008) “*Review on solving the inverse problem in EEG source analysis*”. Journal of neuroengineering and rehabilitation, vol. 5, no. 25.

- 
- [10] Hallez, H., Vanrumste, B., Grech, R., Muscat, J., De Clercq, W., Vergult, A., D'Asseler, Y., Camilleri, K., Fabri, S., Van Huffel, S., Lemahieu, I. (2007). “*Review on solving the forward problem in EEG source analysis*”. Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation, vol.4, no. 1,pág 46. URL <http://www.jneuroengrehab.com/content/4/1/46>.
- [11] Hansen, P., (2001). “*The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*”. Computational Inverse Problems in Electrocardiology, pág. 119–142.
- [12] Heller L. (1990) “*Return current in encephalography. Variational Principles*”.Biophysical Journal.
- [13] Hämmäläinen M., Hari R., Ilmoniemi R.J.,Knuutila J. y Lounasmaa O.V. (1993) “*Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain.*” Reviews of Modern Physics, vol. 65, no. 2, pág. 413-497.
- [14] Johnson C.R. (1995)“*Numerical methods for bioelectric field problems.*” The Biomedical Engineering Handbook, vol. 1, cap. 12, pág 1–20.
- [15] Khan Academy Biología “*Preguntas y respuestas: despolarización, hiperpolarización y potenciales de acción de neuronas*”.En Khan Academy. Extraído el (septiembre 2021) <https://es.khanacademy.org/science/biology/human-biology/neuron-nervous-system/a/depolarization-hyperpolarization-and-action-potentials>.
- [16] Kirsch A. (2011) “*An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*”, AMS 120, Springer, New York.
- [17] Koles Z.J.(1998) “*Trends in EEG source localization.*”. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 11, no. 6, pág. 666-667.
- [18] Lawrence C. Evans, “*Partial Differential Equations*”, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, Second Edition. .
- [19] Megías M., Molist P., Pombal M. A. (2018) “*Tipos celulares: Neurona*”. Departamento de Biología Funcional y Ciencias de la Salud. Facultad de Biología. Universidad de Vigo.
- [20] Meijs J., Wejer O., Peters M. y van Oosterom A. (1989) “*On the numerical accuracy of the Boundary Element Method.*” Transactions on Biomedical Engineering, vol. 36, no. 10, pág. 1038–1049.
- [21] Michel C.M., Koenig T., Brandeis D., Gianotti L.R.R. y Wackermann J. (2009) “*Electrical Neuroimaging*”. Cambridge University Press, pág 1-24.
-



- 
- [22] Montes V. E. (2009) “*Localización de fuentes electroencefalográficas empleando modelos inversos distribuidos basados en norma mínima*”. Tesis de Maestría en Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ingenierías Eléctrica, Electrónica, Física y Ciencias de la Computación de la Universidad Tecnológica de Pereira.
- [23] Morín M.M., Oliveros J.J., Flores E., Gutierrez E.M., Conde J.J., Fraguera A. (2011) “*Solución regularizada del problema inverso electroencefalográfico*”. Facultad de Ciencias de la Electrónica y Físico Matemáticas-BUAP.
- [24] Morín M.M., Oliveros J.J., Flores E., Gutierrez E.M., Conde J.J. (abril de 2013) “*Simplificación del Problema Inverso Electroencefalográfico a una Sola Región Homogénea con Condición de Neumann Nula*”. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, vol. 34, no. 1, pp. 41-51.
- [25] Mosher J. C., Lewis P.S. y Leahy R. M. (1992) “*Multiple dipole modeling and localization from spatio-temporal MEG data*”. IEEE transactions on bio-medical engineering, vol. 39, no. 6, pág. 541-557.
- [26] Morozov V. A., “*On the solution of functional equations by the method of regularization*”. Soviet Math. Dokl, vol.7, pág. 414-117, 1966.
- [27] Oostendorp, T. F., van Oosterom, A. (1989). “*Source parameter estimation in inhomogeneous volume conductors of arbitrary shape.*” IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 36, no. 3, pág. 382-391.
- [28] Oostenveld R., Schoffelen, J.-M. “*Fieldtrip toolbox.*” Extraído el (marzo 2023) en [https://www.fieldtriptoolbox.org/example/compute\\_leadfield](https://www.fieldtriptoolbox.org/example/compute_leadfield).
- [29] Pascual-Marqui R. (1999). “*Review of methods for solving the EEG inverse problem.*” International Journal of Bioelectromagnetism, vol. 1, no. 1, pág. 75-86.
- [30] Pascual-Marqui R. (2002). “*Standardized low resolution brain electromagnetic tomography (sLORETA): technical detail.*” Methods and findings in experimental and clinical pharmacology, vol. 24, suppl. D, pág. 5-12.
- [31] Pascual-Marqui R., Michel C. y Lehmann D. (1994). “*Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain.*” International Journal of Psychophysiology, vol. 18, no. 1, pág. 49-65.
- [32] Peña J. (Marzo 2010) “*Solución del problema inverso de electroencefalografía mediante modelos de fuentes distribuidas por regiones*”. Tesis de Doctorado en Ciencias de la Computación del Centro de Investigación en Matemáticas.
- [33] Perez L.I. (2004) “*Apunte: Ecuaciones de Maxwell*”. Dpto. de Física. Facultad de Ingeniería, UBA.
-

- [34] Perez J.A. (2003) “*La distribución Delta*”. Centro Regional de Estudios Nucleares. Universidad Autónoma de Zacatecas.
  - [35] Rojas B. I. (2015) “*Problema inverso electroencefalográfico: Estudio numérico del subproblema de detección de fuentes volumétricas*”. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
  - [36] Sanei S. y J. A. (2007) “*EEG Signal Processing*”. Chichester: John Wiley & Sons, 1st ed.
  - [37] Salsa S. (2008) “*Partial differential equations in action*”. From modelling to theory, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan.
  - [38] Sarvas J. (1987) “*Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem*”. Physics in medicine and biology, vol. 32, no 1, pág. 11-22.
  - [39] Scherg M. y Von Cramon D. (1986) “*Evoked dipole source potentials of the human auditory cortex*”. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology/ Evoked Potentials Section, vol. 65, no 5, pág. 344-360.
  - [40] Sörmo I., Laguna P. (2005) “*Procesamiento de señales bioeléctricas en aplicaciones cardíacas y neurológicas*”. Prensa académica de Elsevier.
  - [41] Wolters C. H. (March 2007) “*The finite element method in EEG/MEG source analysis*.” SIAM Review, vol. 40, no. 2.
  - [42] Zangwill A. (2012) “*Modern Electrodynamics*.” Cambridge University Press, New York, pág. 92.
-