



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**RELACIÓN ENTRE FUNCIONES COSMOLÓGICAS EN LAS  
REPRESENTACIONES DE ADM Y ASHTEKAR DEL CAMPO  
GRAVITACIONAL**

TESIS  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA:  
**IVÁN DE JESÚS CORTES CRUZ**

DIRECTOR:  
**DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ**

Huajuapán de León, Oaxaca, Enero de 2024.



*Este trabajo es dedicado a  
Celso Cortes C. y Alba Cruz A.,  
unos seres humanos extraordinarios,  
por hacer más grata mi existencia en este mundo,  
mis padres.*



# Agradecimientos

El agradecimiento más profundo y sincero es para mis padres Celso Cortes C. y Alba Cruz A. quienes me han apoyado de forma incondicional durante todo el desarrollo de mi carrera universitaria, a ellos les ofrezco toda la admiración, cariño y respeto que un gran ser humano merece.

Le agradezco sinceramente al Dr. Ricardo Rosas R. mi director de tesis por apoyarme, motivarme y siempre responder a mis dudas de forma amigable y concisa. A quien también considero un gran amigo.

A mis amigos a quienes conocí a lo largo de esta carrera por compartir su espacio y tiempo conmigo, y por ayudarme a nunca perder las ganas de dar respuesta a esos grandes misterios del cosmos. En especial a Ezequiel, Gabael y Aviyamil por esas largas pláticas sobre ciencia y cualesquiera otros temas.



# Resumen

Para comenzar se hace una breve revisión de la Relatividad General (RG) de Einstein. Se deducen las ecuaciones de campo a partir de un principio de conservación de energía-momento local y de la acción de Einstein-Hilbert.

Luego, pensando en una cuantización canónica de la RG se estudia el formalismo Hamiltoniano ADM de la RG. Aquí el actor principal es una 3-métrica que se define sobre las hipersuperficies que folian el espaciotiempo. Desafortunadamente, el formalismo ADM resulta ser poco adecuado para propósitos de cuantización de la RG pues trae muchos problemas conceptuales y técnicos que son realmente difíciles de evitar. Un formalismo Hamiltoniano más adecuado es el desarrollado por A. Ashtekar. Aquí el actor principal es una conexión compleja. La cuantización de la RG es más clara en términos de conexiones y como consecuencia aparece un estado físico para la teoría, el estado de Chern-Simons.

Una forma alternativa de ver las cosas es a partir de la gravedad no métrica desarrollada por K. Krasnov. Lo que sugiere Krasnov es modificar la constricción escalar del formalismo Hamiltoniano de Ashtekar de tal forma que se remplace la constante cosmológica por una función arbitraria que depende de las variables canónicas de la teoría. Entonces, la RG es un caso particular de esta teoría, es decir, precisamente cuando la función cosmológica es una constante.

Inspirado en la teoría de K. Krasnov hace algunos años Rosas-Rodríguez propuso un par de funciones cosmológicas, una para el formalismo ADM y otra para el formalismo de Ashtekar. En este trabajo se demuestra que estas funciones cosmológicas se relacionan por medio del escalar de Ricci espacial. También, se demuestra que tal relación se puede poner en términos de la curvatura extrínseca.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Relatividad General (Einstein, 1915)</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	5
1.3. La Acción de Einstein-Hilbert . . . . .	8
<b>2. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Formalismo de ADM (1962)</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. El Formalismo de ADM . . . . .	11
2.3. Transformada de Legendre . . . . .	19
2.4. Álgebra de Constricciones y Ecuaciones de Evolución . . . . .	23
2.5. Cuantización Canónica . . . . .	28
2.6. El Hamiltoniano de ADM Extendido a Tríadas . . . . .	29
<b>3. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Formalismo de Ashtekar (1986)</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. El Formalismo de Palatini . . . . .	39
3.3. El Formalismo de Ashtekar . . . . .	45
3.4. Transformada de Legendre . . . . .	52
3.5. Álgebra de Constricciones y Ecuaciones de Evolución . . . . .	60
3.6. Constante Cosmológica . . . . .	65
3.7. Cuantización Canónica en Términos de Conexiones . . . . .	67
<b>4. Teorías de Gravedad Modificadas y Funciones Cosmológicas</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Gravedad No Métrica . . . . .	71
4.3. Función Cosmológica en la Representación de Ashtekar . . . . .	75
4.4. Función Cosmológica en la Representación de ADM . . . . .	75
<b>5. Relación entre Funciones Cosmológicas en las Representaciones de ADM y Ashtekar</b>	<b>77</b>
5.1. Introducción . . . . .	77
5.2. El Espacio Fase ADM Extendido y las Variables de Ashtekar . . . . .	78
5.3. Relación entre Funciones Cosmológicas . . . . .	80
<b>6. Conclusiones</b>	<b>85</b>



# Introducción

La teoría cuántica y la teoría de la Relatividad General (RG) son los pilares sobre los que descansa toda la física que conocemos en estos días. La teoría cuántica se encarga de dar una explicación consistente de los fenómenos a nivel microscópico, i.e., el comportamiento de la materia a nivel atómico y nuclear [1, 2]. Mientras que la RG es una teoría de la gravedad, en la cual se explica el campo gravitacional desde una perspectiva puramente geométrica y explica los fenómenos a nivel macroscópico, i.e., a nivel del sistema solar, galaxias y el universo mismo [3, 4, 5]. En RG, el espacio y el tiempo se encuentran unidos en un continuo de cuatro dimensiones conocido como espaciotiempo, la interacción gravitacional ahora se expresa como la deformación del mismo. El espaciotiempo ya no es más una cantidad inerte, la materia actúa sobre él y éste actúa sobre la materia. En vista de que la materia se describe por la teoría cuántica, y que ésta se acopla a la geometría, es necesario tener una descripción cuántica de la gravedad. Han surgido problemas tanto técnicos como conceptuales al tratar de cuantizar la gravedad. Muchos de los problemas técnicos se deben a la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. Quizá uno de los problemas conceptuales más importantes es que el campo gravitacional es el mismo espaciotiempo. Así, se debe enfrentar el problema de cuantizar el espaciotiempo. El problema de la gravedad cuántica no es para nada nuevo, el mismo Einstein sugirió que debía existir una versión cuántica de la RG. Otro físico de gran jerarquía que se dio a la tarea de resolver este problema de cuantizar la gravedad fue Dirac [6, 7], pero no tuvo éxito, aunque sus ideas fueron retomadas posteriormente. Después de Dirac vinieron otros físicos y matemáticos que también trataron el problema.

Pensando en una cuantización canónica de la gravedad, en 1962 Arnowitt, Deser y Misner desarrollaron el primer formalismo Hamiltoniano de la RG, en el cual la variable es la métrica del espacio [8]. El problema aquí es que la Hamiltoniana no es polinomial en las variables, y se tiene el conflicto de cómo transformar la raíz cuadrada de una variable en un operador, para poder pasar a una teoría cuántica.

En 1986 A. Ashtekar introduce una nueva formulación Hamiltoniana del campo gravitacional en términos de conexiones, i.e., la variable es ahora una conexión [9, 10]. Lo interesante aquí es que la Hamiltoniana de la teoría se simplifica pues las constricciones se vuelven polinomiales en las variables canónicas. Además, el formalismo de Ashtekar acerca mucho más la estructura matemática de la RG a las teorías de Yang-Mills, una generalización de la teoría de Maxwell que describe las fuerzas nucleares débil y fuerte [11]. Como resultado, se pueden aplicar las técnicas de la teoría de norma (gauge) en gravedad. Quizá un inconveniente que viene con la teoría de Ashtekar es que las conexiones autoduales son *complejas* y para obtener la RG habitual se tienen que imponer condiciones de realidad sobre las variables canónicas.

Posteriormente, en 1988 Rovelli y Smolin encontraron una nueva formulación Hamiltoniana de la RG en la cual se encuentran infinitas soluciones para gravedad cuántica. Este nuevo enfoque es la formulación de lazos (loops) que se utiliza actualmente para la cuantización del campo gravitacional [12].

Existe otro enfoque alternativo, quizá mucho más famoso que el de la teoría de lazos para llevar a cabo la cuantización del campo gravitacional. Éste recibe el nombre de *teoría de cuerdas*. El dilema con la teoría de cuerdas es que en su formulación agrega dimensiones extra, lo cual ha generado gran controversia en la comunidad científica [13].

Recientemente, alrededor de 2008, K. Krasnov introdujo una familia de teorías de gravedad alternativas con el nombre de *gravedad no métrica*, que se conocen en estos días como *teorías de gravedad modificada*. Aquí se pretende cambiar las constricciones de tal forma que se reemplace la constante cosmológica por una función (arbitraria) de las variables canónicas [14, 15, 16]. Así, la RG sería un caso particular de estas nuevas teorías. Como bien lo menciona Krasnov, se espera que estas teorías de gravedad modificada conduzcan a una mejor aproximación de la gravedad cuántica.

Siguiendo las ideas de la gravedad no métrica de K. Krasnov en 2013 fue introducida cierta función cosmológica que resuelve la restricción escalar del campo gravitacional en la representación de Ashtekar [17], donde el actor principal es una conexión con valores en el álgebra de Lie de  $SO(3)$ . Posteriormente se introdujo una función cosmológica en la representación ADM del campo gravitacional, en ésta se hace uso de la métrica como la variable principal, que también resuelve la restricción escalar tanto a nivel clásico como cuántico [18].

La idea central aquí es estudiar este par de funciones cosmológicas y establecer una relación entre ellas, i.e., verificar si son iguales o difieren en algún término. Una vez establecida tal relación se pretende buscar alguna interpretación de relevancia física o geométrica sobre estas funciones ya que hasta este momento no se sabe con seguridad lo que éstas significan.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presenta un repaso muy general sobre RG. En primer lugar se deducen las ecuaciones de campo de Einstein a partir de un principio de conservación de energía-momento local, donde se usa la identidad de Bianchi como herramienta principal. Luego, a partir de un principio de acción se hace la misma deducción pero sólo para el caso del vacío. No es el objetivo de este trabajo profundizar en RG como tal, así que simplemente se usa como un tipo de introducción hacia el núcleo del trabajo principal, a lo mucho se da una explicación muy general de la solución a las ecuaciones de campo de Einstein más simple descubierta por Schwarzschild en 1916, la cual representa un agujero negro estático.

Los Capítulos 2 y 3 están dedicados a la formulación canónica de la RG. En el Capítulo 2 se da un repaso sobre la formulación Hamiltoniana ADM del campo gravitacional, aquí el actor principal es la métrica del espacio y las constricciones son no polinomiales en esta variable. En el Capítulo 3 se trata la formulación de Ashtekar, donde la variable dinámica es una conexión con valores en el álgebra de  $SO(3)$  y, como se verá, las constricciones son polinomiales en las variables canónicas. Esto es una simplificación muy importante ya que la estructura de la RG se acerca mucho a la de las teorías de Yang-Mills y, por lo tanto, se pueden emplear las técnicas ya conocidas en estas teorías (por ejemplo, las variables de lazos que se emplean para cuantizar no perturbativamente [19, 20]). Hay un precio a pagar, resulta que las variables (conexiones) con las que se trabaja son complejas y para regresar a RG estándar se tienen que emplear condiciones de realidad. Se ha tratado de exponer en estos capítulos todo lo necesario para desarrollar el trabajo, además de ser bastante explícito al hacer los cálculos pensando que en mucha literatura la gente no se preocupa por los detalles. Para estos desarrollos se ha seguido de cerca los textos [21, 22, 23], y los artículos [24, 25].

El Capítulo 4 es necesario para el núcleo de este trabajo. Aquí se trata con la gravedad modificada de K. Krasnov en la cual la idea principal es cambiar la restricción escalar reemplazando la constante cosmológica por una función cosmológica arbitraria, que es función de cierto tensor simétrico. Se demuestra de forma explícita que el álgebra de las restricciones es aún de primera clase, tal como en [15, 26] pero de una manera más elaborada. Además, se dan de forma precisa las funciones cosmológicas en las representaciones de ADM y Ashtekar del campo gravitacional, que fueron presentadas como *ansatz* por primera vez por Rosas-Rodríguez en [17, 18]. Con estos *ansatz* en mano se procede a dar una relación entre ambas funciones, que es el tema del Capítulo 5.

El Capítulo 5 es la culminación de los esfuerzos que se hicieron a lo largo de todo este trabajo de tesis. Primero, se da una relación entre el Hamiltoniano de ADM extendido a tríadas y las variables de Ashtekar, este paso es importante ya que a través de una transformación canónica se logran escribir las restricciones de la formulación de Ashtekar en términos de tríadas las cuales son las variables para desarrollar el formalismo ADM si se extiende el espacio fase de métricas y momentos asociados. De aquí es fácil escribir el *ansatz* para la función cosmológica de Ashtekar y relacionarlo con la función cosmológica de ADM (en tríadas), lo cual era el problema a resolver en este trabajo de tesis.

Para finalizar se dan las conclusiones, haciendo hincapié en la relación obtenida entre ambas funciones cosmológicas, la cual tiene que ver con la curvatura escalar espacial de Ricci. Además, se dan los proyectos a futuro sobre la relación hallada.

Conceptos tales como variedades, espacios tangente, formas diferenciales, derivadas de Lie, etc., se pueden revisar en las referencias [3, 21, 23, 27, 28, 29, 30].



# Capítulo 1

## Relatividad General (Einstein, 1915)

### 1.1. Introducción

A mediados del siglo XIX los matemáticos descubrieron que habían geometrías más generales que la geometría Euclidea. Esto llevó a la idea, expuesta por Riemann en 1854, de que la geometría del espacio físico puede no obedecer los axiomas de Euclides, puede deformarse por la presencia de materia. Tomó 61 años más para que esta idea fuera concretada por A. Einstein, quien en 1915 publicó su teoría de la RG. La RG es una teoría de la gravedad, aquí el espacio y el tiempo se unen para formar un continuo cuatridimensional (el espaciotiempo), en la cual la interacción gravitacional se expresa como la deformación del espaciotiempo. El espaciotiempo no es más una cantidad inerte (como en gravedad Newtoniana), actúa sobre la materia y ésta puede actuar sobre él, como bien lo menciona J. Wheeler: *La materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse y el espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse*. La variable fundamental de la teoría ahora es la métrica del espaciotiempo  $g_{\alpha\beta}$ <sup>1</sup>.

Uno de los puntos más importantes que dió lugar a la RG fue la inconsistencia de la teoría de gravitación de Newton con la relatividad especial (1905), puesto que ésta invoca noción de influencia instantánea de un cuerpo a otro. Esto último ya había sido observado por Descartes, Mach y Leibniz quienes no estaban muy de acuerdo con dicha ley. Además, Galileo se dio cuenta que todos los cuerpos caen de la misma forma bajo la acción de un campo gravitacional (principio de equivalencia). Esto sugiere asignarle propiedades de campo gravitacional a la misma estructura del espaciotiempo.

Einstein construyó la RG bajo dos principios fundamentales:

- **Principio de relatividad general** : todas las leyes de la física toman la misma forma en cualquier sistema de referencia (incluidos los no inerciales).
- **Principio de equivalencia** : existe un sistema de coordenadas en el cual los efectos de un campo gravitacional se anulan localmente.

### 1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ecuaciones de Einstein dicen como se curva el espaciotiempo por la presencia de materia, o más generalmente, cualquier cosa que posea energía o momento. Estas ecuaciones son las más

---

<sup>1</sup>Se usan letras Griegas como índices que corren de 0 a 3 (son índices espaciotemporales) y letras Latinas del inicio del alfabeto  $a, b, c...$  como índices espaciales que corren de 1 a 3. Las Latinas de medio alfabeto  $j, k...$  denotarán índices internos más adelante.

simples que relacionan la curvatura y la energía-momento para las cuales la ley de conservación local de energía-momento es una consecuencia automática. Esto es análogo a las ecuaciones de Maxwell:

$$\star d \star F = J, \quad (1.2.1)$$

que automáticamente implican conservación local de la carga eléctrica,

$$d \star J = 0, \quad (1.2.2)$$

donde  $d$  es la derivada exterior,  $J$  es la 1-forma de densidad de corriente,  $F$  es el campo electromagnético (2-forma), y  $\star$  es el operador estrella de Hodge. En el caso de las ecuaciones de Maxwell, la clave para la conservación local de la carga eléctrica es la identidad  $d^2 = 0$  (nilpotencia). En el caso de las ecuaciones de Einstein, la clave es su generalización natural, la identidad de Bianchi.

En física relativista, el flujo de energía y momento a través de un punto dado del espacio-tiempo se resume por el tensor de energía-momento, que es un tensor de tipo  $(0, 2)$  simétrico con componentes escritas como  $T_{\mu\nu}$ . En el espaciotiempo curvo la ley de conservación local de energía-momento se escribe como:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.2.3)$$

se dice que  $T_{\mu\nu}$  tiene divergencia nula.

Para obtener ecuaciones para la gravedad que sean consistentes con la conservación de energía es natural intentar algo de la forma:

$$C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (1.2.4)$$

donde  $C_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico libre de divergencias que depende sólo de la curvatura del espaciotiempo, i.e., del tensor de Riemann. En analogía con las ecuaciones de Maxwell y Yang-Mills, se espera obtener algo libre de divergencias a partir de la identidad de Bianchi. La forma más simple de recordar la identidad de Bianchi para la curvatura de Riemann es que para cualesquiera campos vectoriales  $u, v, w$  en el espaciotiempo:

$$[\nabla_u, [\nabla_v, \nabla_w]] + [\nabla_v, [\nabla_w, \nabla_u]] + [\nabla_w, [\nabla_u, \nabla_v]] = 0, \quad (1.2.5)$$

que es simplemente la identidad de Jacobi.

Es bastante útil considerar la curvatura como una 2-forma con valores en el endomorfismo del haz tangente ( $\text{End}(\text{TM})$ ), i.e.,  $\mathcal{R}$ . En estos términos la identidad de Bianchi se convierte simplemente en:

$$d_\nabla \mathcal{R} = 0, \quad (1.2.6)$$

donde  $d_\nabla$  es la derivada covariante exterior que surge de la conexión de Levi-Civita,  $\nabla_\mu$ . Si se usa  $\nabla_\mu$  para definir la derivada exterior de formas diferenciales ordinarias, y luego para definir  $d_\nabla$ , resolver la identidad de Bianchi  $d_\nabla \mathcal{R} = 0$  en coordenadas locales lleva a:

$$\nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]}^\lambda = 0. \quad (1.2.7)$$

Ahora bien, se pueden obtener versiones *reducidas* de la identidad de Bianchi contrayendo índices. Si se contrae una vez se obtiene:

$$\nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]}^\alpha = 0. \quad (1.2.8)$$

Si se escribe explícitamente la antisimetrización, se obtiene:

$$\nabla_{\alpha}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + \nabla_{\beta}R_{\gamma\alpha\delta}^{\alpha} - \nabla_{\gamma}R_{\beta\alpha\delta}^{\alpha} = 0, \quad (1.2.9)$$

lo cual, por la definición del tensor de Ricci y al hacer uso de la métrica para subir y bajar índices, es simplemente,

$$\nabla^{\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_{\beta}R_{\gamma\delta} - \nabla_{\gamma}R_{\beta\delta} = 0. \quad (1.2.10)$$

Se puede reducir la identidad de Bianchi aún más usando la simetría del tensor de Riemann, de modo que:

$$\nabla^{\alpha}R_{\gamma\alpha} + \nabla^{\beta}R_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}R = 0, \quad (1.2.11)$$

donde se han subido algunos índices y se han contraído otros. Reetiquetando índices mudos y dividiendo entre 2, se obtiene:

$$\nabla^{\alpha}\left(R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha}R\right) = 0, \quad (1.2.12)$$

ya que  $\nabla^{\alpha}g_{\gamma\alpha} = 0$ . El tensor en paréntesis es simplemente el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ . En otras palabras, se ha mostrado que,

$$\nabla^{\alpha}G_{\gamma\alpha} = 0. \quad (1.2.13)$$

El tensor de Einstein es, por lo tanto, el tensor de tipo (0, 2) simétrico libre de divergencias más simple que depende sólo de la curvatura del espaciotiempo, tal que la ecuación de Einstein para la RG,

$$G_{\gamma\alpha} = 8\pi\kappa T_{\gamma\alpha}, \quad (1.2.14)$$

donde  $\kappa = \frac{G}{c^4}$ , implica automáticamente conservación local de energía y momento.

La ecuación de Einstein del *vacío* es el caso especial cuando  $T_{\mu\nu} = 0$ . Esto simplemente dice que el tensor de Einstein es cero, lo cual es equivalente (excepto en espaciotiempos de 2 dimensiones) a que el tensor de Ricci sea cero,

$$R_{\gamma\alpha} = 0. \quad (1.2.15)$$

Esto se puede verificar de la siguiente manera. Considere,

$$R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha}R = 8\pi\kappa T_{\gamma\alpha} \quad \text{y} \quad R = g^{\gamma\alpha}R_{\gamma\alpha}.$$

Entonces,

$$R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha}g^{\gamma\alpha}R_{\gamma\alpha} = 8\pi\kappa T_{\gamma\alpha}.$$

En  $n$  dimensiones se tiene:

$$g_{\gamma\alpha}g^{\gamma\alpha} = \delta_{\gamma}^{\gamma} = n. \quad (1.2.16)$$

Sigue que,

$$R_{\gamma\alpha}\left(1 - \frac{n}{2}\right) = 8\pi\kappa T_{\gamma\alpha},$$

tomar la traza de la ecuación anterior da:

$$R = 8\pi\kappa\left(1 - \frac{n}{2}\right)^{-1} T.$$

De aquí que:

$$R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha}8\pi\kappa\left(1 - \frac{n}{2}\right)^{-1} T = 8\pi\kappa T_{\gamma\alpha},$$

entonces,

$$R_{\gamma\alpha} = 8\pi\kappa \left[ T_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha} \left( 1 - \frac{n}{2} \right)^{-1} T \right].$$

Con esto para el caso  $T_{\gamma\alpha} = 0$ , se obtiene:

$$R_{\gamma\alpha} = 0. \quad (1.2.17)$$

Ahora, hay otro tensor de tipo  $(0, 2)$  que es simétrico y libre de divergencia, el tensor métrico, i.e.,  $\nabla^\alpha g_{\alpha\beta} = 0$ . De esta manera, se puede, si así se desea, modificar la ecuación de Einstein sumando un término adicional proporcional a la métrica, como:

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.2.18)$$

El parámetro  $\lambda$  se conoce como **la constante cosmológica**.

### 1.3. La Acción de Einstein-Hilbert

La RG es una teoría para la cual la variable dinámica es la métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Supóngase que  $M$  es una variedad orientada, *el espaciotiempo*, con una métrica semi-Riemanniana  $g$  en ésta. El Lagrangiano para la RG, descubierto por Hilbert 5 días antes de que Einstein lo encontrara de forma independiente, es simplemente,

$$Rvol, \quad (1.3.1)$$

donde  $R$  es la curvatura escalar de Ricci de  $g$  y  $vol$  es la forma de volumen asociada a  $g$ . La acción de Einstein-Hilbert es, por lo tanto,

$$S(g) = \int_M vol R. \quad (1.3.2)$$

Si  $M$  no es compacta esta integral podría no converger, pero la variación de  $S$  tendrá aún sentido si la variación de la métrica desaparece fuera de un conjunto compacto.

La acción de Einstein-Hilbert en coordenadas locales se escribe como:

$$S(g) = \int_M d^n x R \sqrt{|\det g|}. \quad (1.3.3)$$

Para una métrica Lorentziana se tiene  $|\det g| = -\det g$ . Para el caso Lorentziano (otros casos funcionan similarmente) la variación de la acción es de la siguiente manera.

Suponga que  $g$  es una métrica Lorentziana y que  $\delta g$  es cualquier  $(0, 2)$ -tensor que se anula fuera de un conjunto compacto. Si  $s \in \mathbb{R}$  es pequeño,  $g + s\delta g$  seguirá siendo una métrica Lorentziana, así a medida que  $s$  varía,  $g + s\delta g$  es un conjunto de trayectorias variadas de  $g$ . Esto permite definir la variación de la acción como:

$$\delta S(g) = \left. \frac{d}{ds} S(g + s\delta g) \right|_{s=0}, \quad (1.3.4)$$

y se puede definir la variación de cualquiera cantidad dependiente de  $g$  de manera similar.

Note que:

$$\delta S = \int_M (\delta R) vol + R\delta vol.$$

Lo que sigue es calcular la variación del escalar de Ricci  $R$  y de la forma de volumen  $vol$ . Antes de continuar es necesario recordar el siguiente teorema del álgebra lineal.

**Teorema 1:** Sea  $A$  cualquier matriz, entonces,

$$\det(1 + sA) = 1 + \text{str}(A), \quad (1.3.5)$$

hasta términos de orden  $s^2$ .

Así, se hace el cálculo de la variación de  $vol$ :

$$\delta vol = -\frac{1}{2}(-\det g)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \det(g + s\delta g)|_{s=0} d^n x.$$

Al usar el Teorema 1, i.e. la Ec. (1.3.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \det(g + s\delta g) \right|_{s=0} &= \left. \frac{d}{ds} \det(g) \det(1 + sg^{-1}\delta g) \right|_{s=0} = \det g \left. \frac{d}{ds} (s \text{tr}(g^{-1}\delta g)) \right|_{s=0} \\ &= \det(g) \text{tr}(g^{-1}\delta g) = \det(g) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

de aquí que,

$$\delta vol = -\frac{1}{2}(-\det g)^{\frac{1}{2}} \det(g) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} d^n x = \frac{1}{2} \sqrt{-\det g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} d^n x.$$

A partir de la Ec. (1.2.16), la expresión anterior se puede escribir de forma distinta, i.e.,

$$\delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\delta vol = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta g^{\alpha\beta}) vol. \quad (1.3.6)$$

Con esto, se puede establecer,

$$\int_M \delta vol R = -\frac{1}{2} \int_M vol R g_{\alpha\beta} (\delta g^{\alpha\beta}) \quad (1.3.7)$$

Ahora, para hacer la variación  $\delta R$  es conveniente usar  $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ . Entonces,

$$\int_M vol \delta R = \int_M vol (\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}). \quad (1.3.8)$$

Para realizar la variación del tensor de Ricci,  $R_{\alpha\beta}$ , se necesita calcular la variación de los símbolos de Christoffel y del tensor de Riemann. Primero, recuerde que los símbolos de Christoffel se pueden escribir como:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} (\partial_{\beta} g_{\gamma\eta} + \partial_{\gamma} g_{\beta\eta} - \partial_{\eta} g_{\beta\gamma}). \quad (1.3.9)$$

De aquí la variación de los símbolos de Christoffel quede determinada mediante,

$$\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} (\nabla_{\beta} \delta g_{\gamma\eta} + \nabla_{\gamma} \delta g_{\beta\eta} - \nabla_{\eta} \delta g_{\beta\gamma}) \quad (1.3.10)$$

Similarmente, partiendo de la siguiente expresión del tensor de curvatura de Riemann,

$$R_{\beta\gamma\eta}^{\alpha} = \partial_{\beta} \Gamma_{\gamma\eta}^{\alpha} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\beta\eta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\eta}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\eta}^{\sigma} \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha}. \quad (1.3.11)$$

Se puede verificar que:

$$\delta R_{\beta\gamma\eta}^{\alpha} = \nabla_{\beta} \delta \Gamma_{\gamma\eta}^{\alpha} - \nabla_{\gamma} \delta \Gamma_{\beta\eta}^{\alpha}. \quad (1.3.12)$$

A partir de lo cual se tiene:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} = \nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\gamma\beta}^{\gamma} - \nabla_{\gamma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}. \quad (1.3.13)$$

Se puede usar la variación de los simbolos de Christoffel para reescribir la formula anterior como:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[g^{\gamma\eta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\eta} + g^{\gamma\eta}\nabla_{\gamma}\nabla_{\eta}\delta g_{\alpha\beta} - g^{\gamma\eta}\nabla_{\gamma}(\nabla_{\beta}\delta g_{\alpha\eta} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\beta\eta})]. \quad (1.3.14)$$

Con todo esto la Ec. (1.3.8) es:

$$\int_M vol \delta R = \int_M vol \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \int_M vol g^{\alpha\beta} \{[g^{\gamma\eta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\eta} + g^{\gamma\eta}\nabla_{\gamma}\nabla_{\eta}\delta g_{\alpha\beta} - g^{\gamma\eta}\nabla_{\gamma}(\nabla_{\beta}\delta g_{\alpha\eta} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\beta\eta})]\}.$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$\int_M vol \delta R = \int_M vol [(\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha}\omega_{\alpha}], \quad (1.3.15)$$

con la 1-forma  $\omega_{\alpha}$  dada por:

$$\omega_{\alpha} = g^{\gamma\eta}\nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\eta} - \nabla^{\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.3.16)$$

Ahora, de las Ecs. (1.3.7) y (1.3.15) se tiene que la variación total de  $S$  está dada por:

$$\delta S = \int_M vol \left( \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha}\omega_{\alpha} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.3.17)$$

Note que el segundo término de la expresión anterior es una divergencia total, por lo que:

$$\int_M vol \nabla^{\alpha}\omega_{\alpha} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\delta S = \int_M vol \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta}, \quad (1.3.18)$$

lo cual es cero para todas las variaciones  $\delta g^{\alpha\beta}$  que se anulan fuera de un conjunto compacto precisamente cuando se satisface la ecuación de Einstein para el vacío,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.3.19)$$

En este punto se deberían revisar las soluciones conocidas a las ecuaciones de Einstein para ver lo que dicen sobre el universo. La primera solución a estudiar es una solución de vacío estática esféricamente simétrica, la solución de Schwarzschild, que representa el campo gravitacional de una masa puntual. Es decir, dada la métrica,

$$g = -f(r)^2 dt^2 + f(r)^{-2} dr^2 + r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2), \quad (1.3.20)$$

las ecuaciones de Einstein implican la ecuación diferencial para  $f$ ,

$$\frac{d}{dr} r f(r)^2 = 1. \quad (1.3.21)$$

Ésta tiene solución:

$$f(r)^2 = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (1.3.22)$$

que describe (en unidades donde  $\kappa = 1$ ) la métrica producida por una partícula puntual de masa  $m$ . De hecho, esta solución es singular y describe un agujero negro. Hay mucho que decir aún sobre las soluciones a las ecuaciones de Einstein clásicas, pero aquí no se pretende profundizar en este asunto, para más detalles véase, por ejemplo [3].

# Capítulo 2

## Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Formalismo de ADM (1962)

### 2.1. Introducción

Ya que sólo se considera espaciotiempos cuatridimensionales, la(s) ecuación(es) de Einstein (1.2.14) son en realidad 10 ecuaciones diferenciales, porque hay 10 componentes independientes en el tensor de Einstein. Mientras que las ecuaciones de Einstein son muy simples, lleva mucho trabajo extraer la física que contienen. Esto se debe a que la RG es una teoría de campo generalmente covariante, en la cual no hay estructura de fondo fija (el campo es el mismo espaciotiempo). Una característica de la covarianza de las ecuaciones de Einstein es que algunas de estas son constricciones sobre las variables dinámicas. Estas constricciones están estrechamente relacionadas a las identidades de Bianchi (1.2.6), las cuales también expresan que estas constricciones se preservan cuando se satisfacen las ecuaciones dinámicas. En la práctica, un aislamiento preciso de las ecuaciones con contenido dinámico de aquellas que son constricciones no es del todo claro a partir de esta forma covariante de expresarlas. Una forma de desentrañar la dinámica de la RG es tratarla como un problema de Cauchy, i.e., analizarla cómo la evolución de una hipersuperficie de tres dimensiones donde se definen los campos. Esta manera de reformular la RG fue desarrollada por Arnowitt, Deser y Misner y se conoce como la formulación ADM de la RG [8].

### 2.2. El Formalismo de ADM

Para poner la teoría en forma canónica, se necesita dividir el espaciotiempo en espacio y tiempo. Sin una noción de tiempo, no hay noción de evolución de modo que no hay Hamiltoniano en el sentido usual. Esto puede parecer redundante ya que uno de los principios básicos de la RG es poner espacio y tiempo en las mismas condiciones y este nuevo enfoque parecería separarlos otra vez. Sin embargo, aunque el formalismo canónico rompe con la covarianza de espaciotiempo de la teoría de forma manifiesta separando una dirección temporal particular, al final el mismo formalismo dirá que en realidad no es relevante qué dirección de tiempo se tome para empezar.

En realidad, el primer paso para producir una formulación Hamiltoniana de una teoría de campo consiste en elegir una función temporal  $t$  y un campo vectorial  $t^\alpha$ , sobre un espaciotiempo

$M$  de tal forma que las superficies,  $\Sigma_t$ , de  $t$  constante sean superficies de Cauchy<sup>1</sup> espacialoides, i.e., superficies tales que los conos de luz que emanan de éstas cubren todo el espaciotiempo hasta el futuro de  $\Sigma$ , y tal que  $t^\alpha \nabla_\alpha t = t^\alpha \partial_\alpha t = 1$ , donde  $\nabla_\alpha$  denota la **derivada covariante de Levi-Civita** (libre de torsión) compatible con  $g_{\alpha\beta}$ . La curvatura de  $\nabla_\alpha$  se define por:

$$2\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}v_\rho := R_{\alpha\beta\rho}{}^\sigma v_\sigma, \quad (2.2.1)$$

para algún covector  $v_\sigma$ . El campo vectorial  $t^\alpha$  puede interpretarse como el *flujo de tiempo* en el espaciotiempo y puede usarse para identificar cada  $\Sigma_t$  como la superficie inicial  $\Sigma_0$ .

La premisa es describir cómo pensar a las ecuaciones de Einstein como una regla que le dice a la geometría del espacio cómo evolucionar a medida que pasa el tiempo. Por lo tanto, considerese el caso de una variedad Lorentziana<sup>2</sup>  $M$  difeomorfa a  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ , donde la variedad  $\mathcal{S}$  representa el “espacio”, y  $\tau \in \mathbb{R}$  representa el “tiempo”. Por supuesto, la división particular de espaciotiempo en *instantes de tiempo* es una elección arbitraria, en lugar de una propiedad intrínseca de  $M$ . En otras palabras, si se tiene simplemente el espaciotiempo  $M$ , hay muchas formas de tomar un difeomorfismo<sup>3</sup>:

$$\phi : M \rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{R}.$$

Esto da distintas formas de definir una **coordenada temporal**  $t$  en  $M$ , es decir el pullback por  $\phi$  de la coordenada temporal estandar  $\tau$  en  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ :

$$t = \phi^* \tau.$$

Se dice que una subvariedad  $\Sigma \subset M$  es una rebanada de  $M$  si se tiene  $\{t = cte.\}$  para alguna coordenada temporal  $t$ . En lo que sigue sólo se considera el caso de un espaciotiempo de cuatro dimensiones.

Considérese el espaciotiempo dado por una variedad  $M$ , se asume que la variedad es orientada, con coordenadas  $x^\mu$  y con una métrica  $g_{\alpha\beta}$  definida en ella y con signatura  $(-, +, +, +)$ . Se define el encajamiento de una hipersuperficie (3-dimensional)  $\Sigma$  de la siguiente manera:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a), \quad (2.2.2)$$

donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y  $a = 1, 2, 3$ . Estas cuatro funciones son las que determinan el encajamiento. Para que se trate realmente de un encajamiento se debe pedir que la hipersuperficie, con coordenadas (intrínsecas)  $\xi^a$ , no se interseque a sí misma, i.e., el mapeo  $X : \Sigma \rightarrow M$  debe ser uno a uno.

Ahora, sea  $\Sigma$  una rebanada del espaciotiempo  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ . Se asume que  $\Sigma$  es espacial, i.e., cuando se restringe la métrica  $g$  en  $M$  a  $\Sigma$ , se obtiene una métrica Riemanniana sobre  $\Sigma$ , lo que significa que:

$$g(v, v) > 0,$$

---

<sup>1</sup>Formalmente una *superficie de Cauchy* es una subvariedad en  $M$ . Se dice que el espaciotiempo  $(M, g_{\alpha\beta})$  es globalmente hiperbólico si posee una superficie de Cauchy.

<sup>2</sup>Una métrica semi-Riemanniana  $g$  en  $M$  es un campo 2-tensorial en  $M$  tal que para cada punto  $p \in M$  satisface:

1.  $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ , para todo  $v, w \in T_p M$ ,
2. si  $g_p(v, w) = 0$  para cualquier  $v \in T_p M$ , entonces  $w = 0$

Las métricas con signatura  $(n - 1, 1)$  son llamadas métricas Lorentzianas. Una variedad  $M$  equipada con una métrica Lorentziana es llamada una **variedad Lorentziana**.

<sup>3</sup>Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. Dos variedades  $M$  y  $N$  son difeomorfas ( $M \approx N$ ) si existe un difeomorfismo  $f$  entre ellas.

para todo  $v \in T_p\Sigma$  distinto de cero. Se denota a esta métrica sobre  $\Sigma$  por  $q_{ab}$ , y se le conoce como la 3-métrica. En coordenadas locales, la 3-métrica se expresa como:

$$q_{ab} = g_{\mu\nu}X_a^\mu X_b^\nu = X_a^\mu X_{\mu b}, \quad (2.2.3)$$

con  $X_a^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}$ . Note que también se puede escribir  $q_{ab} = g_{\mu\nu}X_a^\mu X_b^\nu + n_a n_b$  ya que  $n_a = X_a^\mu n_\mu = 0$ . Con esto, se puede verificar que:

$$g_{\mu\nu} = X_\mu^a X_\nu^b q_{ab} - n_\mu n_\nu, \quad (2.2.4)$$

es compatible con la ecuación anterior.

Ya que se tiene una métrica todos los índices se suben y bajan con ésta. Se puede notar que  $X_a^\mu$  es la  $\mu$ -ésima componente en las coordenadas  $x^\mu$  del  $a$ -ésimo vector de la base coordenada natural sobre  $\Sigma$  dada por:

$$\mathbf{e}_a := \frac{\partial}{\partial \xi^a}. \quad (2.2.5)$$

La métrica sobre  $\Sigma$  también se puede escribir como  $q_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$ . Los 3 vectores  $\mathbf{e}_a$  forman una base para el espacio tangente a la variedad  $\Sigma$  en el punto  $p$ , i.e.,  $T_p\Sigma^4$ . Luego,  $T_p\Sigma \subset T_pM$ , para completar la base de este espacio ( $T_pM$ ) se construye el complemento ortogonal a  $T_p\Sigma$  definido por la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Este subespacio será generado por  $n$ , el vector ortogonal a los  $\mathbf{e}_a$ . Este vector, cuyas componentes son  $n^\mu$ , debe satisfacer:

$$g_{\mu\nu}X_a^\mu n^\nu = 0 \quad (2.2.6)$$

y

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1. \quad (2.2.7)$$

Se tiene entonces que el conjunto  $(\mathbf{e}_a, n)$  forma una base de  $T_pM$  para cada punto  $p$ .

Hasta aquí se ha definido como encajar una 3-geometría en el espaciotiempo, la métrica  $q_{ab}$  sobre esta hipersuperficie, así como la descomposición de un vector de espaciotiempo en componentes proyectadas y ortogonales. Ahora, lo siguiente es afirmar que la totalidad del espaciotiempo se puede generar por las hipersuperficies (cada una de ellas corresponde a un encajamiento) sin que éstas se intersequen. A la totalidad de las hipersuperficies generadoras se le denomina una *foliación*. La foliación estará dada por una función  $t$  en el espaciotiempo de tal forma que a cada hipersuperficie le corresponda un valor constante de  $t$ , i.e., las hipersuperficies están definidas para  $t = cte$ .

La foliación está dada analíticamente por las funciones:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a, t), \quad (2.2.8)$$

donde el vector que conecta los puntos de dos hipersuperficies está dado por  $\partial_t$ , con componentes en la base  $\partial_\mu$  dadas por:

$$\partial_t = t^\mu \partial_\mu, \quad (2.2.9)$$

con  $t^\mu = \frac{dX^\mu}{dt}$ . Realmente, para moverse de una rebanada a otra, infinitesimalmente cercana, se define el campo vectorial de deformación  $t^\mu$  sobre  $M$ , que se obtiene a partir del difeomorfismo elegido  $\phi$ , es decir, con el pushforward dado por  $\phi^{-1}$  sobre el campo vectorial  $\partial_\tau$  en  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ . Este campo vectorial apunta hacia el “futuro”, pero no es necesariamente ortogonal a las rebanadas  $\{t = s : s \in \mathbb{R}\}$ . Ya se ha descrito anteriormente que se puede descomponer un vector en parte

---

<sup>4</sup>Como es usual  $TM$  denota el espacio tangente a la variedad  $M$ , véase por ejemplo [21].

proyectada sobre la hipersuperficie y en parte normal, de modo que se puede escribir en esta forma al vector  $\partial_t$ , i.e.,

$$t^\mu := Nn^\mu + N^a X_a^\mu. \quad (2.2.10)$$

Al escalar  $N$  se le conoce como función *lapso* (lapse), y el vector sobre la hipersuperficie  $N^a$  se denomina vector de *corrimiento* (shift). La descomposición puede verse en la Figura 1.

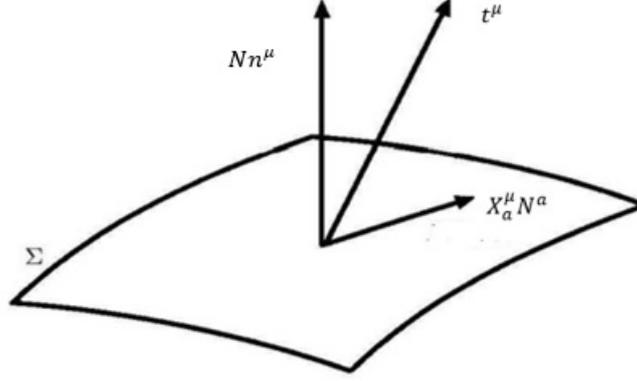


Figura 1: Foliación inducida por la formulación hamiltoniana de la RG.

El tiempo propio de separación entre  $\Sigma_t$  y la rebanada  $\Sigma_{t+dt}$  está dado por  $Ndt$ , para un observador en reposo sobre  $\Sigma_t$ , i.e., la función lapso da información del tiempo entre cualesquiera dos eventos. Por otro lado,  $N^a$  mide el corrimiento de las coordenadas espaciales desde una rebanada a otra, globalmente, da información de la deformación de las hipersuperficies.

La función *lapso*  $N$ , el vector de *corrimiento*  $N^a$  y la métrica  $q_{ab}$  constituyen las llamadas variables ADM. Los tensores  $\{N, N^a, q_{ab}\}$  pueden verse como las componentes de la métrica cuadridimensional  $g_{\alpha\beta}$ , como sigue:

$$\begin{aligned} g_{00} &= t^\alpha t^\beta g_{\alpha\beta} = -N^2 + N^a N_a, \\ g_{0a} &= t^\alpha X_a^\beta g_{\alpha\beta} = N^b q_{ab}, \\ g_{ab} &= X_a^\alpha X_b^\beta g_{\alpha\beta} = q_{ab}. \end{aligned}$$

Ahora, lo que sigue es definir algebraicamente una cantidad que mida la razón de cambio de la métrica inducida,  $q_{ab}$ , de una rebanada a otra infinitesimalmente cercana. La primera posibilidad que se puede sugerir es la velocidad con respecto al “tiempo de laboratorio”, a veces llamado tiempo fiducial,  $\dot{q}_{ab} = \mathcal{L}_{t^\alpha} q_{ab}$ , donde  $\mathcal{L}_{t^\alpha}$  es la derivada de Lie [27] con respecto al campo vectorial de deformación  $t^\alpha$ . Una segunda opción es la velocidad de  $q_{ab}$  con respecto a un tiempo propio local ortogonal,  $\mathcal{L}_{n^\alpha} q_{ab}$ . Esta cantidad es proporcional a la curvatura extrínseca de  $\Sigma$ :

$$K_{ab} := \frac{1}{2} \mathcal{L}_{n^\alpha} q_{ab}. \quad (2.2.11)$$

Una definición equivalente de  $K_{ab}$  es:

$$K_{ab} := X_a^\alpha X_b^\beta \nabla_\alpha n_\beta, \quad (2.2.12)$$

i.e., la proyección sobre  $\Sigma$  del gradiente del campo vectorial normal.

La curvatura extrínseca  $K_{ab}$  mide la deformación de la rebanada  $\Sigma$  en  $M$ . Note que la curvatura extrínseca está definida en la rebanada espacial, además, sus propiedades básicas son que es un tensor y que es simétrico  $K_{ab} = K_{ba}$ . Recuerde que por ser  $K(u, v)$  un tensor se quiere dar a entender que depende  $C^\infty(\Sigma)$ -linealmente de los campos vectoriales  $u, v \in X(\Sigma)$ , tal que para cualesquiera  $u, v \in X(\Sigma)$  se tiene:

$$K(u, v) = K_{ab}u^a v^b, \quad (2.2.13)$$

en coordenadas locales donde:

$$K_{ab} = K(\partial_a, \partial_b). \quad (2.2.14)$$

Ahora, note que usando la definición de la derivada de Lie, se tiene:

$$\begin{aligned} 2K_{ab} &= \mathcal{L}_{n^\alpha} q_{ab} = \mathcal{L}_{n^\alpha} X_a^\alpha X_b^\beta q_{\alpha\beta} = X_a^\alpha X_b^\beta (n^\sigma \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha n^\gamma + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta n^\gamma) \\ &= \frac{1}{N} X_a^\alpha X_b^\beta [N n^\sigma \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha (N n^\gamma) + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta (N n^\gamma)], \end{aligned}$$

pero de la Ec. (2.2.10) sigue que:

$$N n^\alpha = t^\alpha - X_a^\alpha N^a.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2K_{ab} &= \frac{1}{N} X_a^\alpha X_b^\beta [(t^\sigma - X_a^\sigma N^a) \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha (t^\gamma - X_c^\gamma N^c) + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta (t^\gamma - X_d^\gamma N^d)] \\ &= \frac{1}{N} X_a^\alpha X_b^\beta (t^\sigma \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha t^\gamma + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta t^\gamma) - \frac{1}{N} X_a^\alpha X_b^\beta (X_a^\sigma N^a \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} \\ &\quad + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha X_c^\gamma N^c + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta X_d^\gamma N^d). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 2K_{ab} &= \frac{1}{N} (t^\sigma \nabla_\sigma q_{ab} + q_{\gamma b} \nabla_a t^\gamma + q_{a\gamma} \nabla_b t^\gamma) - \frac{1}{N} X_a^\alpha X_b^\beta (N^\sigma \nabla_\sigma q_{\alpha\beta} + q_{\gamma\beta} \nabla_\alpha N^\gamma + q_{\alpha\gamma} \nabla_\beta N^\gamma) \\ &= \frac{1}{N} (t^\sigma \nabla_\sigma q_{ab} + q_{\gamma b} \nabla_a t^\gamma + q_{a\gamma} \nabla_b t^\gamma) - \frac{1}{N} (q_{\gamma b} D_a N^\gamma + q_{a\gamma} D_b N^\gamma), \end{aligned}$$

usando la definición de la derivada de Lie nuevamente, se concluye que:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_{t^\alpha} q_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \quad (2.2.15)$$

lo que se puede escribir como:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \quad (2.2.16)$$

i.e.,  $K_{ab}$  contiene esencialmente la información sobre la *derivada temporal* de  $q_{ab}$ .

En la Eq. (2.2.16)  $D_a$  es la derivada covariante sin torsión (es decir, la conexión) compatible con  $q_{ab}$ , cuyo tensor de curvatura es:

$$[D_a, D_b]v_c := {}^{(3)}R_{abc}{}^d v_d, \quad (2.2.17)$$

donde  $v_c$  es un vector arbitrario sobre la hipersuperficie.

La relación con la geometría diferencial de  $M$  está bien definida, por ejemplo, para  $v_\mu$  tal que  $n^\mu v_\mu = 0$ ,

$$D_a v_b = X_a^\mu X_b^\nu \nabla_\mu v_\nu. \quad (2.2.18)$$

La extensión a tensores de mayor rango es directa. A partir de la ecuación anterior es inmediato verificar que  $D_a$  es realmente una conexión. Como es costumbre la única parte no trivial es la ley de Leibniz. Sean  $u, v \in X(\Sigma)$  y  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , entonces,

$$D_a(fv_b) = X_a^\mu X_b^\nu \nabla_\mu (fv_\nu) = X_a^\mu X_b^\nu (\partial_\mu f v_\nu + f \nabla_\mu v_\nu) = \partial_a f v_b + f D_a v_b. \quad (2.2.19)$$

De manera similar, verificar que  $D_a$  es libre de torsión es inmediato. Considere  $v \in X(\Sigma)$ , entonces,

$$D_u v_b - D_b v_a = X_a^\mu X_b^\nu \nabla_\mu v_\nu - X_a^\mu X_b^\nu \nabla_\nu v_\mu = X_a^\mu X_b^\nu (\nabla_\mu v_\nu - \nabla_\nu v_\mu) = X_a^\mu X_b^\nu [v_\mu, v_\nu] = [v_a, v_b].$$

Así,

$$D_u v_b - D_b v_a = [v_a, v_b], \quad (2.2.20)$$

por lo tanto,  $D_a$  es libre de torsión. Una propiedad adicional de la misma importancia que hereda esta conexión  $D_a$  de  $\nabla_\alpha$  es que preserva la métrica, esto es:

$$\partial_a q_{bc} = X_a^\mu X_b^\nu X_c^\gamma \partial_\mu g_{\nu\gamma} = X_a^\mu X_b^\nu X_c^\gamma [g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\gamma) + g(\partial_\mu, \nabla_\mu \partial_\gamma)].$$

Así,

$$\partial_a q_{bc} = q(D_a \partial_b, \partial_c) + q(\partial_b, D_a \partial_c) \quad (2.2.21)$$

Los símbolos de Christoffel de la conexión  $D_a$  sobre la rebanada  $\Sigma$  se definen como:

$$D_a \partial_b := {}^3 \Gamma_{ab}^c \partial_c. \quad (2.2.22)$$

En este punto se debe verificar que 4 de las ecuaciones de Einstein son constricciones que la 3-métrica y la curvatura extrínseca deben satisfacer. La razón para esto es que algunas componentes del tensor de Riemann dependen solamente de la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  y de la curvatura intrínseca, i.e., de la curvatura de  $q_{ab}$ . Las formulas que describen esto se conocen como las ecuaciones de Gauss-Codazzi, las cuales se deducirán a continuación.

Elija un punto  $p$  sobre  $\Sigma$ , y escoja las coordenadas locales  $x^0, x^1, x^2, x^3$  en una vecindad de  $p$  de tal forma que  $x^0 = t$ ,  $\partial_0 = \partial_t$ , y los campos vectoriales  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  sean tangentes a  $\Sigma$  en  $p$ . Lo que se hace es calcular las componentes del tensor de Riemann  $R$  en términos del tensor de Riemann tridimensional  ${}^{(3)}R$  y de la curvatura extrínseca  $K$ . Para hacer esto se necesita calcular:

$$R(\partial_a, \partial_b) \partial_c = 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} \partial_c. \quad (2.2.23)$$

Existe una forma de reescribir la curvatura que sigue de la ortogonalidad de  $n$  respecto a la hipersuperficie, i.e.,  $(u \cdot n) = 0$ . Se tiene entonces que:

$$K(u, v) = g(\nabla_u n, v), \quad (2.2.24)$$

o en coordenadas locales,

$$K_{ab} = \nabla_a n^c g_{cb}. \quad (2.2.25)$$

De aquí sigue un hecho que más adelante se usará, esto es:

$$\nabla_a n = K_a^c \partial_c. \quad (2.2.26)$$

La definición anterior de la curvatura extrínseca permite escribir  $\nabla_u v$ , con  $u, v \in X(\Sigma)$ , en términos de sus componentes normal y tangencial a la hipersuperficie, es decir,

$$\nabla_u v = K(u, v)n + D_u v. \quad (2.2.27)$$

Esta ecuación es conocida como **la ecuación de Gauss**. De aquí, y usando la Ec. (2.2.22), sigue que:

$$\nabla_a \partial_b = K_{ab} n + {}^3\Gamma_{ab}^c \partial_c \quad (2.2.28)$$

Con estas ecuaciones en mano, el primer término de la Ec. (2.2.23) se vuelve:

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \partial_c &= \nabla_a (K_{bc} n + {}^3\Gamma_{bc}^d \partial_d) = \partial_a K_{bc} n + K_{bc} \nabla_a n + \partial_a {}^3\Gamma_{bc}^d \partial_d + {}^3\Gamma_{bc}^d \nabla_a \partial_d, \\ &= (\partial_a K_{bc} + {}^3\Gamma_{bc}^d K_{ad}) n + K_{bc} K_a^d \partial_d + (\partial_a {}^3\Gamma_{bc}^d + {}^3\Gamma_{bc}^e {}^3\Gamma_{ae}^d) \partial_d. \end{aligned}$$

Mientras que el segundo término es:

$$\nabla_b \nabla_a \partial_c = (\partial_b K_{ac} + {}^3\Gamma_{ac}^d K_{bd}) n + K_{ac} K_b^d \partial_d + (\partial_b {}^3\Gamma_{ac}^d + {}^3\Gamma_{ac}^e {}^3\Gamma_{be}^d) \partial_d.$$

Restando el segundo término del primero se obtiene:

$$\begin{aligned} R(\partial_a, \partial_b) \partial_c &= (\partial_a K_{bc} - \partial_b K_{ac} + {}^3\Gamma_{bc}^d K_{ad} - {}^3\Gamma_{ac}^d K_{bd}) n + (K_{bc} K_a^d - K_{ac} K_b^d) \partial_d \\ &\quad + (\partial_a {}^3\Gamma_{bc}^d - \partial_b {}^3\Gamma_{ac}^d + {}^3\Gamma_{bc}^e {}^3\Gamma_{ae}^d - {}^3\Gamma_{ac}^e {}^3\Gamma_{be}^d) \partial_d. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Note que la primera línea del lado derecho es simplemente:

$$(D_a K_{bc} - D_b K_{ac}) n, \quad (2.2.30)$$

mientras que la tercera es:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d \partial_d. \quad (2.2.31)$$

Por lo tanto, se tiene:

$$R(\partial_a, \partial_b) \partial_c = (D_a K_{bc} - D_b K_{ac}) n + ({}^{(3)}R_{abc}{}^d + K_{bc} K_a^d - K_{ac} K_b^d) \partial_d \quad (2.2.32)$$

De la Ec. (2.2.32) se tiene directamente la proyección sobre la hipersuperficie y la normal, por lo que se puede escribir:

$$R^d{}_{abc} = {}^{(3)}R_{abc}{}^d + K_{bc} K_a^d - K_{ac} K_b^d, \quad (2.2.33)$$

que es la ecuación de **Gauss-Codazzi** y,

$$R^\alpha{}_{abc} n_\alpha = D_a K_{bc} - D_b K_{ac}, \quad (2.2.34)$$

es conocida como la ecuación de **Codazzi-Mainardi**.

Note que hasta aquí se ha interesado sólo en la cinemática, no se han usado las ecuaciones de campo. Sea  $g_{\alpha\beta}$  una métrica del espaciotiempo que satisface las ecuaciones de Einstein, con  $\Lambda = 0$ ,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi\kappa T_{\alpha\beta}. \quad (2.2.35)$$

Una relación directa entre las ecuaciones de campo de la RG con los campos espaciales sigue de las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Es decir, tomando la traza de (2.2.33) se demuestra que:

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -G_0^0 = \frac{1}{2} R^{ab}{}_{ab} = \frac{1}{2} ({}^{(3)}R + K^2 - K_{ab} K^{ab}) = 8\pi\kappa\rho, \quad (2.2.36)$$

donde  $\rho := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$  es la densidad de masa-energía de la contribución de materia y  $K := q^{ab} K_{ab} = K_a^a$  es la traza de  $K_{ab}$ . De la ecuación de Codazzi-Mainardi se obtiene que:

$$G_{\mu\nu} n^\mu X_b^\nu = D_b K - D_a K_b^a = -8\pi\kappa J_b, \quad (2.2.37)$$

donde  $J_b := -T_{\mu\nu}n^\mu X_b^\nu$  es la densidad de momento. Las Ecs. (2.2.36) y (2.2.37) que dependen sólo de  $q_{ab}$  y  $K_{ab}$ , para una contribución de materia dada se pueden considerar como “ecuaciones de restricción”, en el sentido de que restringen los valores posibles de los campos espaciales  $q_{ab}$  y  $K_{ab}$ .

Las 6 ecuaciones restantes:

$$G_{\mu\nu}X_a^\mu X_b^\nu = 8\pi\kappa S_{ab}, \quad (2.2.38)$$

donde  $S_{ab} := X_a^\mu X_b^\nu T_{\mu\nu}$  es el tensor de esfuerzo-energía espacial, son ecuaciones dinámicas que describen la evolución temporal de  $q_{ab}$ . Estas son las ecuaciones que involucran las segundas derivadas temporales de la métrica.

Por otro lado, se ha mencionado que el espaciotiempo es considerado como una variedad orientada. Se dice que una variedad es orientable si existe una forma de volumen sobre ella. Ahora, para realizar las integrales de funcionales sobre  $M$  es natural pensar en elegir el elemento de volumen  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  asociado con la métrica del espaciotiempo. Análogamente, para integrar sobre  $\Sigma_t$  podría usarse el elemento de volumen  ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \epsilon_{\alpha abc}n^\alpha$ , con  $n^\alpha$  el vector normal unitario a  $\Sigma_t$ . El dilema con estos elementos de volumen es que serán, en general, dependientes del tiempo en el sentido de que  $\mathcal{L}_{t^\alpha}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$  y  $\mathcal{L}_{t^\alpha}\epsilon_{abc} \neq 0$ .

Lo que interesa es ver la evolución dinámica como el cambio de los campos sobre la subvariedad fija  $\Sigma_0$ , así que la elección de un elemento de volumen que depende del tiempo sobre  $\Sigma_t$  es inconveniente si se desea indentificar  $\Sigma_t$  con  $\Sigma_0$ . Por lo tanto, se escoge un elemento de volumen fijo  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sobre  $M$ , tal que  $\mathcal{L}_{t^\alpha}e_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ <sup>5</sup>. En una base donde las componentes no nulas de  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  toman los valores  $\pm 1$  se tiene que:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{|\det g|}e_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.2.39)$$

donde  $\det g$  denota el determinante de las componentes de la métrica en tal base de coordenadas. Dada la forma de volumen  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sobre  $M$ , se puede definir la *densidad tensorial* (de peso 1)  $T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$  como un tensor que se expresa de la forma:

$$T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} = \sqrt{|\det g|}\tilde{T}^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}, \quad (2.2.40)$$

donde  $\tilde{T}^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$  es un tensor cuyos valores no dependen de la elección de  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Ya que la integración sobre variedades es independiente de la elección de coordenadas (véase [21]), se puede usar bases coordenadas convenientes de tal forma que:

$$\int f\epsilon = \int f\sqrt{|\det g|}e = \int f\sqrt{|\det g|}d^4x, \quad (2.2.41)$$

para alguna función  $f$ .

Sobre cada  $\Sigma_t$ , se define  ${}^3e_{abc} := e_{\alpha abc}t^\alpha$ . Sobre  $\Sigma_t$  también se tiene una forma de volumen  ${}^3e_{abc} = \sqrt{q}{}^3e_{abc}$ , donde  $q$  es el determinante de la 3-métrica en la base donde las componentes no nulas de  ${}^3e_{abc}$  toman valores  $+1$ . Entonces,

$$\sqrt{q}{}^3e_{abc} = \sqrt{q}e_{\alpha abc}t^\alpha = \sqrt{q}e_{\alpha abc}(Nn^\alpha + N^d X_d^\alpha) = \sqrt{|\det g|}\epsilon_{\alpha abc}n^\alpha, \quad (2.2.42)$$

donde se ha usado que  ${}^3\epsilon_{abc} = \epsilon_{\alpha abc}n^\alpha$ . Ya que  $e_{\alpha abc}X_d^\alpha = e_{dabc} = 0$ , se concluye que:

$$\sqrt{q}N = \sqrt{|\det g|}. \quad (2.2.43)$$

<sup>5</sup>Localmente esto se puede hacer introduciendo coordenadas adicionales  $x^1, x^2, x^3$  a  $x^0 = t$  tales que  $t^\alpha = \partial_0^\alpha$  y tomar  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  como la forma de volumen coordenada  $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

## 2.3. Transformada de Legendre

En principio el problema de gravedad cuántica debería abordarse a través del enfoque de integral de trayectoria o Lagrangiano. Sin embargo, existe un enfoque complementario, el enfoque Hamiltoniano o canónico, que es igualmente importante. El enfoque canónico está estrechamente relacionado al formalismo ADM. Lo que aquí interesa es aplicar las ideas de dicho enfoque al campo gravitacional. Un ejemplo bastante sencillo que refleja la idea principal del enfoque canónico es el de la mecánica cuántica de una partícula libre en  $\mathbb{R}^n$ , véase por ejemplo [21].

Para poner la teoría en forma Hamiltoniana se debe pasar del espacio de configuración  $(q, \dot{q})$ , al espacio fase  $(q, p)$ . Además, se debe especificar una estructura de paréntesis de Poisson y una funcional Hamiltoniana. En un enfoque general de la mecánica clásica, el espacio de configuración puede considerarse como cualquier variedad  $M$ , y la velocidad es un vector tangente a  $M$ , mientras que el momento es un vector cotangente. El espacio fase es entonces el haz cotangente del espacio de configuración, y el estado de un sistema clásico se representa por un punto en el espacio fase. La idea del enfoque Hamiltoniano es convertir las ecuaciones de Euler-Lagrange en ecuaciones que describen como evoluciona el estado en el tiempo.

Una receta general para obtener una formulación Hamiltoniana es partir de un principio variacional covariante, expresar la densidad Lagrangiana en función de campos espaciales, i.e.,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ , y luego ejecutar una transformación de Legendre para poder pasar a la forma canónica, i.e.,

$$\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}). \quad (2.3.1)$$

Con respecto a la formulación hamiltoniana familiar de mecánica de partículas, hay una complicación crucial al tratar con un sistema Hamiltoniano que posee simetrías locales, lo que lleva a una teoría con restricciones.

Supóngase ahora que se intenta aplicar la receta mencionada a la RG. Para mantener las cosas simples, se considera únicamente el caso del vacío, i.e.,  $T_{\mu\nu} = 0$ . Se asume que el espaciotiempo  $M$  es difeomorfo a  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{S}$  es una variedad 3-dimensional, y se fija una rebanada espacial  $\Sigma$ . La posición  $q$  en este caso es la 3-métrica, y el espacio de configuración es el espacio  $Met(\Sigma)$  de todas las métricas Riemannianas sobre  $\Sigma$ . De forma más extravagante,  $Met(\Sigma)$  es también conocido como superespacio. Como punto de partida, considere la acción de Einstein-Hilbert para RG en el caso del vacío con constante cosmológica nula, definida por:

$$S_G[g] = \int_M vol R = \int_M R \sqrt{|det g|} d^4x. \quad (2.3.2)$$

Lo que sigue es hacer la descomposición 3 + 1 de la acción anterior, y poner la densidad Lagrangiana en la forma  $\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G(q, \dot{q})$ . Usando las ecuaciones de Einstein y el hecho que  $n^\mu n_\mu = -1$ , se tiene que la curvatura escalar se puede escribir como:

$$Rg_{\mu\nu} = 2(R_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}),$$

entonces,

$$Rg_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 2(R_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}) n^\mu n^\nu.$$

Así,

$$Rn^\mu n_\mu = 2(R_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}) n^\mu n^\nu,$$

por lo tanto,

$$R = 2(G_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}) n^\mu n^\nu. \quad (2.3.3)$$

Por otro lado, a partir de la definición del tensor de Riemann se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu}n^\mu n^\nu = R^\nu{}_{\mu\nu\gamma}n^\mu n^\gamma = n^\mu(\nabla_\mu\nabla_\gamma - \nabla_\gamma\nabla_\mu)n^\gamma \\ &= \nabla_\gamma n^\mu\nabla_\mu n^\gamma - \nabla_\mu n^\mu\nabla_\gamma n^\gamma + \nabla_\mu(n^\mu\nabla_\gamma n^\gamma) - \nabla_\gamma(n^\mu\nabla_\mu n^\gamma), \end{aligned}$$

sin embargo, se puede demostrar que: <sup>6</sup>

$$\nabla_\gamma n^\mu\nabla_\mu n^\gamma = K_{ab}K^{ab}, \quad \nabla_\mu n^\mu = K.$$

Así,

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = K_{ab}K^{ab} - K^2 + \nabla_\mu(n^\mu\nabla_\gamma n^\gamma) - \nabla_\gamma(n^\mu\nabla_\mu n^\gamma). \quad (2.3.4)$$

Los dos últimos términos de la expresión anterior son divergencias y serán descartadas (la integral sobre estos términos se anula, al menos cuando la variedad es compacta). Además, de la Ec. (2.2.36) sigue que:

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \frac{1}{2}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab}). \quad (2.3.5)$$

Así que de las Ecs. (2.3.3)-(2.3.5) se concluye que la acción del campo gravitacional en la descomposición 3 + 1 esta dada por:

$$S_G = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R), \quad (2.3.6)$$

donde  $q$  es el determinante de la métrica espacial  $q_{ab}$ ,  $K = K_a^a$  es la traza de  $K_{ab}$  y  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci tridimensional, con  $N\sqrt{q} = \sqrt{|detg|}$ . En la expresión anterior la primera integral es sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ , de modo que la función Lagrangiana está dada por una integral sobre la hipersuperficie de la forma:

$$L := \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{L}_G = \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R), \quad (2.3.7)$$

por lo que la acción está dada como la integral de la función Lagrangiana entre los tiempos  $t_0$  y  $t_1$ :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L. \quad (2.3.8)$$

Es decir, la variación será sobre la métrica de todas las posibles hipersuperficies que conecten a las dos hipersuperficies de los extremos.

Dada la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{q}N(K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R), \quad (2.3.9)$$

se puede determinar los momentos conjugados de las variables canónicas.

Ya que las derivadas temporales de  $N$  y  $N^a$  no aparecen en el Lagrangiano, sus momentos conjugados son cero, lo que indica que no deben tratarse como variables dinámicas, así, la transformada de Legendre se lleva a cabo sólo con respecto a la variable dinámica  $q_{ab}$ .

A partir de  $\mathcal{L}_G$  y la relación entre  $K_{ab}$  y  $\dot{q}_{ab}$  [ver Ec.(2.2.16)] se determina que el momento canónicamente conjugado a  $q_{ab}$  está dado por:

$$p^{ab} := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q}(K^{ab} - Kq^{ab}). \quad (2.3.10)$$

---

<sup>6</sup>La demostración se puede hacer definiendo un pullback a la variedad espacial  $\Sigma$  o fijando la norma de  $n^\mu$ , ver [31].

Note que la traza de  $p^{ab}$  se define como:

$$p := q_{ab}p^{ab} = q^{1/2}q_{ab}(K^{ab} - Kq^{ab}) = q^{1/2}(K - 3K) = -2Kq^{1/2}.$$

Entonces sigue que:

$$K^{ab} = q^{-1/2} \left( p^{ab} - \frac{1}{2} p q^{ab} \right). \quad (2.3.11)$$

De la Ec. (2.2.16) se tiene que:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \quad (2.3.12)$$

lo que implica,

$$\dot{q}_{ab} = 2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}. \quad (2.3.13)$$

Ya que la Ec. (2.3.10) puede invertirse para obtener la Ec. (2.3.13) esta no define una restricción. Sin embargo, ya que  $N$  y  $N^a$  tienen momentos nulos, juegan el rol de multiplicadores de Lagrange.

**Definición 1: Variedad simpléctica.** Una variedad simpléctica (o espacio fase) consiste de un par  $(\Gamma, \Omega)$ , donde  $\Gamma$  es una variedad de dimensión par y  $\Omega$  es una 2-forma cerrada y no degenerada, i.e.,  $d\Omega = 0$  y  $\Omega(v, w) = 0$  para todo  $w$  implica que  $v = 0$ .  $\Omega$  se conoce como la **estructura simpléctica** y permite definir campos vectoriales Hamiltonianos y paréntesis de Poisson.

**Definición 2: Campo vectorial Hamiltoniano.** Dada cualquier función de valores reales  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , el campo vectorial Hamiltoniano  $X_f$  se define por :

$$-i_{X_f}\Omega := df,$$

donde  $i_{X_f} : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ , es el producto interior.

**Definición 3: Paréntesis de Poisson.** Dadas dos funciones de valor real  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , el paréntesis de Poisson  $\{f, g\}$  se define por:

$$\{f, g\} := -\Omega(X_f, X_g) = -i_{X_f}(i_{X_g}\Omega) = i_{X_f}(dg) = -X_f(g).$$

Como un caso especial, si  $\Gamma = T^*C$  es el haz cotangente sobre algún espacio de configuración  $n$ -dimensional  $C$ , entonces,  $\Omega = dp_\mu \wedge dq^\mu$ , es la estructura simpléctica natural sobre  $\Gamma$  asociado con la carta  $(p, q)$ <sup>7</sup>. Sigue que:

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial q^\mu},$$

es el paréntesis de Poisson que comúnmente se encuentra en la literatura.

Entonces, siguiendo el análisis de restricciones de Dirac se encuentra que el espacio fase  $(\Gamma_{EH}, \Omega_{EH})$  de la teoría de Einstein-Hilbert estándar es coordinado por el par  $(q_{ab}, p^{ab})$ , y tiene estructura simpléctica:

$$\Omega_{EH} = \int_{\Sigma} \mathbf{d}p^{ab} \wedge \mathbf{d}q_{ab}. \quad (2.3.14)$$

---

<sup>7</sup>Dado un espacio topológico  $X$  y un conjunto abierto  $U \subseteq X$ , se define una carta como una función continua  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con una inversa continua.

Regresando a la Ec. (2.3.13) la densidad Hamiltoniana está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_G &= p^{ab}\dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_G = p^{ab}(2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}) - q^{1/2}N(K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R) \\ &= 2Np^{ab}q^{-1/2}\left(p_{ab} - \frac{1}{2}pq_{ab}\right) + 2p^{ab}D_aN_b - q^{1/2}N\left[q^{-1}\left(p_{ab} - \frac{1}{2}pq_{ab}\right)\right. \\ &\quad \left.\left(p^{ab} - \frac{1}{2}pq^{ab}\right) - \frac{1}{4}q^{-1}p^2 + {}^{(3)}R\right],\end{aligned}$$

luego,

$$\mathcal{H}_G = \sqrt{q}\left\{N\left[-{}^{(3)}R + q^{-1}\left(p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}p^2\right)\right] - 2N_bD_a(q^{-1/2}p^{ab}) + 2D_a(q^{-1/2}N_b p^{ab})\right\}. \quad (2.3.15)$$

Así, se puede poner la acción en forma canónica explícita, como:

$$S = \int dt \int d^3x \left\{ p^{ab}\dot{q}_{ab} - [N\mathcal{H}(p, q) + N^a\mathcal{H}_a(p, q)] \right\}. \quad (2.3.16)$$

La funcional Hamiltoniana (que es la encargada de generar las ecuaciones dinámicas) está dada por:

$$H := \int d^3x [N\mathcal{H}(p, q) + N^a\mathcal{H}_a(p, q)], \quad (2.3.17)$$

donde:

$$\mathcal{H}(p, q) := q^{1/2}\left(-{}^{(3)}R + q^{-1}p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}q^{-1}p^2\right) \quad (2.3.18)$$

$$\mathcal{H}_a(p, q) := -2q^{1/2}D^b\left(q^{-1/2}p_{ab}\right). \quad (2.3.19)$$

El hecho de que el Hamiltoniano involucre términos proporcionales a la función lapso y al vector de corrimiento no debería ser una sorpresa, ya que el papel del Hamiltoniano es generar la evolución temporal, y en RG se necesita especificar la función lapso y el vector de corrimiento para conocer el significado de evolución temporal. Sin embargo, hay algo mucho más sorprendente que ver aquí. Si se expresa las cantidades  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_G$  en términos de la curvatura extrínseca usando la fórmula para  $p_{ab}$ , se demuestra por un lado que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= q^{1/2}\left[-{}^{(3)}R + q^{-1}\left(q\left(K^{ab} - Kq^{ab}\right)\left(K_{ab} - Kq_{ab}\right) - \frac{4}{2}K^2q\right)\right] \\ &= -2q^{1/2}\left[\frac{1}{2}\left(K^2 - K_{ab}K^{ab} + {}^{(3)}R\right)\right].\end{aligned}$$

Así,

$$\mathcal{H} = -2q^{1/2}G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu. \quad (2.3.20)$$

Y por otro lado,

$$\mathcal{H}_a = -2q^{1/2}D^b(K_{ab} - Kq_{ab}) = 2q^{1/2}(D_aK - D^b(q_{bc}K_a^c)) = 2q^{1/2}(D_aK - D_cK_a^c).$$

Así,

$$\mathcal{H}_a = 2q^{1/2}G_{\mu\nu}n^\mu X_a^\nu. \quad (2.3.21)$$

Esto implica que la densidad Hamiltoniana para la RG debe anularse por las ecuaciones de Einstein del vacío. En otras palabras, las ecuaciones de Einstein implican que:

$$H = 0. \quad (2.3.22)$$

Este hecho parece bastante confuso al principio. Una teoría con Hamiltoniano igual a cero podría parecer completamente trivial, pero la dinámica de la RG no es trivial. ¿Cómo puede ser esto? La clave es que las ecuaciones:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a = 0, \quad (2.3.23)$$

son precisamente las 4 ecuaciones de Einstein que son constricciones sobre los datos iniciales.

Se ha dicho que el espacio de configuración de la RG es  $Met(\Sigma)$ . Es natural entonces esperar que el espacio fase sea el espacio de todos los pares  $(q_{ab}, p^{ab})$ , o el haz cotangente  $T^*Met(\Sigma)$ . Sin embargo, no todos los puntos de este espacio fase representan estados permitidos. Las ecuaciones de Einstein que son constricciones se deben satisfacer, y esta restricción selecciona un subespacio del espacio fase llamado el espacio fase físico:

$$X_{phy.} = \{\mathcal{H} = \mathcal{H}_a = 0\} \subset T^*Met(\Sigma). \quad (2.3.24)$$

El Hamiltoniano se anula en este espacio. Sin embargo, como se demostrará posteriormente, las ecuaciones de Hamilton aún dan dinámica no trivial.

## 2.4. Álgebra de Constricciones y Ecuaciones de Evolución

Para evaluar el corchete de Poisson de las constricciones y determinar los movimientos que generan sobre el espacio fase, primero se debe construir funcionales de restricción, i.e., mapeos  $\Gamma_{EH} \rightarrow \mathbb{R}$ , asociados con las ecuaciones de restricción (2.3.18) y (2.3.19).

Recuerde que la función lapso y el vector de corrimiento miden cuánto la evolución empuja la rebanada  $\Sigma$  en la dirección normal y tangencial, respectivamente. En particular, si se establece el vector de corrimiento igual a cero, el Hamiltoniano para RG es igual a:

$$C_N(p, q) = \int_{\Sigma} d^3x N \mathcal{H}(p, q), \quad (2.4.1)$$

y éste genera la evolución temporal en una forma que corresponde a empujar  $\Sigma$  hacia adelante en la dirección normal. Por otro lado, si se establece la función lapso igual a cero, el Hamiltoniano se vuelve:

$$C_{N^a}(p, q) = \int_{\Sigma} d^3x N^a \mathcal{H}_a(p, q), \quad (2.4.2)$$

que genera un tipo de evolución temporal que empuja a  $\Sigma$  en una dirección que es tangente a si misma. Más precisamente, esta cantidad genera transformaciones de  $X_{phy}$  que corresponden al flujo sobre  $\Sigma$  generado por  $N^a$ . Este flujo es una familia 1-paramétrica de difeomorfismos de  $\Sigma$ . Por esta razón,  $C_{N^a}$  es llamada la **constricción de difeomorfismos o vectorial**, mientras que  $C_N$  es llamada la **constricción Hamiltoniana o escalar**. Realmente no es coincidencia que  $C_N$  y  $C_{N^a}$  jueguen un rol dual como constricciones y términos en el Hamiltoniano. Ésta es, de hecho, una característica especial crucial de las teorías de campo con estructuras de fondo no fijas.

Recuerde que, si  $F, G : \Gamma_{EH} \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funcionales de valor real sobre el espacio fase, el campo vectorial Hamiltoniano  $X_F$ , definido por la estructura simpléctica dada por la Ec. (2.3.14) es:

$$X_F := \int_{\Sigma} d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta p^{ab}} \frac{\delta}{\delta q_{ab}} - \frac{\delta F}{\delta q_{ab}} \frac{\delta}{\delta p^{ab}} \right), \quad (2.4.3)$$

y el paréntesis de Poisson  $\{F, G\}$ , definido por  $\{F, G\} := -X_F(G)$  está dado por:

$$\{F, G\} := \int_{\Sigma} d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta q_{ab}} \frac{\delta G}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta G}{\delta q_{ab}} \frac{\delta F}{\delta p^{ab}} \right). \quad (2.4.4)$$

Sigue que los paréntesis de Poisson de  $p^{ab}$  y  $q_{ab}$ , i.e., los paréntesis de Poisson fundamentales, están dados por:

$$\{q_{ab}(\mathbf{x}), p^{cd}(\mathbf{y})\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.4.5)$$

$$\{p^{ab}(\mathbf{x}), p^{cd}(\mathbf{y})\} = 0, \quad (2.4.6)$$

$$\{q_{ab}(\mathbf{x}), q_{cd}(\mathbf{y})\} = 0. \quad (2.4.7)$$

Lo que sigue es calcular explícitamente el álgebra de constricciones. Al tomar los paréntesis de Poisson de cualesquiera dos constricciones se obtiene lo que se conoce como un álgebra de Dirac [7].

Por lo tanto, considérese las versiones suavizadas de las constricciones, Ecs. (2.4.1) y (2.4.2). Primero se determina el paréntesis de Poisson entre dos constricciones de difeomorfismos. Note que:

$$C_{N^a} = \int_{\Sigma} d^3x N^a \mathcal{H}_a = -2 \int_{\Sigma} d^3x N^a q^{1/2} D^b (q^{-1/2} p_{ab}) = 2 \int_{\Sigma} d^3x p^{cd} q_{ac} D_d N^a,$$

de la definición de la derivada de Lie [28, 29] sigue que:

$$\mathcal{L}_{N^a} q_{ab} = q_{cb} D_a N^c + q_{ac} D_b N^c,$$

con esto, y usando la simetría total del tensor de momento  $p_{ab}$ , se concluye que:

$$C_{N^a} = \int_{\Sigma} d^3x N^a \mathcal{H}_a = \int_{\Sigma} d^3x p^{bc} \mathcal{L}_{N^a} q_{bc}. \quad (2.4.8)$$

De las propiedades de la derivada de Lie sigue que:

$$\mathcal{L}_{N^c} p = \mathcal{L}_{N^a} (p^{ab} q_{ab}) = q_{ab} \mathcal{L}_{N^c} p^{ab} + p^{ab} \mathcal{L}_{N^c} q_{ab},$$

con esto,

$$C_{N^a} = \int_{\Sigma} d^3x \left[ -q_{ab} \mathcal{L}_{N^c} p^{ab} + \mathcal{L}_{N^c} (p^{ab} q_{ab}) \right].$$

Note que:

$$\mathcal{L}_{N^c} p = N^c \partial_c p + p D_c N^c = D_c (N^c p),$$

es decir,  $\mathcal{L}_{N^c} (p^{ab} q_{ab})$  es una derivada total. Por lo tanto,

$$C_{N^a} = - \int_{\Sigma} d^3x q_{bc} \mathcal{L}_{N^a} p^{bc}. \quad (2.4.9)$$

De las Ecs. (2.4.8) y (2.4.9) se demuestra fácilmente que:

$$\{q_{ab}, C_{N^a}\} = \frac{\delta C_{N^a}}{\delta p^{ab}} = \mathcal{L}_{N^a} q_{ab}, \quad (2.4.10)$$

y que:

$$\{p^{ab}, C_{N^a}\} = - \frac{\delta C_{N^a}}{\delta q_{ab}} = \mathcal{L}_{N^a} p^{ab}. \quad (2.4.11)$$

Se tiene entonces que el paréntesis de Poisson de dos constricciones de difeomorfismos es:

$$\begin{aligned} \{C_{N^a}, C_{M^a}\} &= \int_{\Sigma} d^3x \left( \frac{\delta C_{N^a}}{\delta q_{ab}} \frac{\delta C_{M^a}}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta C_{M^a}}{\delta q_{ab}} \frac{\delta C_{N^a}}{\delta p^{ab}} \right) \\ &= - \int_{\Sigma} d^3x \left( \mathcal{L}_{N^a} p^{ab} \frac{\delta C_{M^a}}{\delta p^{ab}} + \mathcal{L}_{N^a} q_{ab} \frac{\delta C_{N^a}}{\delta p^{ab}} \right), \end{aligned}$$

al ver a  $C_{M^a}$  como una funcional que depende del campo  $q_{ab}$  y  $p^{ab}$ , i.e.,  $C_{M^a} = \int_{\Sigma} d^3x M^a \mathcal{H}_a(p, q)$ , se tiene que la derivada funcional respecto a estos campos está dada por:

$$\frac{\delta C_{M^a}}{\delta p^{ab}} = M^a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial p^{ab}}, \quad \frac{\delta C_{M^a}}{\delta q_{ab}} = M^a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial q_{ab}},$$

entonces,

$$\{C_{N^a}, C_{M^a}\} = - \int_{\Sigma} d^3x M^a \left( \mathcal{L}_{N^a} p^{ab} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial p^{ab}} + \mathcal{L}_{N^a} q_{ab} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial q_{ab}} \right),$$

de la definición de la derivada de Lie se puede mostrar que se cumple la regla de la cadena:

$$\mathcal{L}_{N^a} \mathcal{H}_a(p, q) = \mathcal{L}_{N^a} p^{ab} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial p^{ab}} + \mathcal{L}_{N^a} q_{ab} \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial q_{ab}},$$

entonces,

$$\{C_{N^a}, C_{M^a}\} = - \int_{\Sigma} d^3x M^a \mathcal{L}_{N^a} \mathcal{H}_a(p, q) = - \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{L}_{N^a} (M^a \mathcal{H}_a) + \int_{\Sigma} d^3x (\mathcal{L}_{N^a} M^a) \mathcal{H}_a,$$

note que el primer término de la ecuación anterior corresponde a uno de frontera y se debe ignorar, por lo tanto, se concluye que:

$$\{C_{N^a}, C_{M^a}\} = \int_{\Sigma} d^3x (\mathcal{L}_{N^a} M^a) \mathcal{H}_a = C_{\mathcal{L}_{N^a} M^a}, \quad (2.4.12)$$

i.e., el álgebra de Poisson es isomorfa al álgebra de Lie de difeomorfismos espaciales infinitesimales.

Usando argumentos similares a los que se presentan en los pasos anteriores se obtiene que el paréntesis de Poisson de la constricción escalar y vectorial está dado por:

$$\{C_{N^a}, C_N\} = - \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{L}_{N^a} (N \mathcal{H}) + \int_{\Sigma} d^3x (\mathcal{L}_{N^a} N) \mathcal{H},$$

donde el primer término de la derecha es una derivada total y su integral sobre la hipersuperficie se anula por el teorema de Stokes, por lo tanto sigue que:

$$\{C_{N^a}, C_N\} = \int_{\Sigma} d^3x (\mathcal{L}_{N^a} N) \mathcal{H} = C_{\mathcal{L}_{N^a} N}, \quad (2.4.13)$$

i.e., este paréntesis de Poisson dice como se transforma  $C_N$  bajo difeomorfismo espaciales.

Resulta que  $C_{N^a}$  para  $N^a$ 's arbitrarios forman una subálgebra, pero no una ideal ya que no hay cerradura bajo paréntesis de Poisson con elementos  $C_N$ . Esta subálgebra tiene una interpretación sencilla, recuerde que los difeomorfismos sobre  $\Sigma$  son generados por campos vectoriales espaciales,  $N^a$ , los cuales forman un álgebra de Lie con el conmutador como paréntesis de Lie, entonces dado  $\mathcal{L}_{N^a} M^a = [N, M]^a$  se puede observar que la función  $N^a \rightarrow C_{N^a}$  es un homeomorfismo del álgebra de Lie de  $\text{Diff}(\Sigma)$ <sup>8</sup> a esta subálgebra.

Una vez que se ha demostrado que el álgebra de Lie de difeomorfismos espaciales está representada en el álgebra de Dirac, es natural preguntar si el álgebra de Lie de difeomorfismos espaciotemporales completa también se puede mapear al álgebra de Dirac de esta manera. Desafortunadamente este no es el caso, ya que el álgebra de Dirac no es realmente un álgebra de Lie, esto se demuestra a continuación pues resulta que el paréntesis de Poisson entre dos

---

<sup>8</sup> $\text{Diff}(\Sigma)$  denota el grupo de difeomorfismos sobre  $\Sigma$ .

constricciones escalares cierra con un coeficiente dependiente del espacio fase de  $\mathcal{H}_a$ . Para ver esto, considerése primero,

$$\frac{\delta C_N}{\delta p^{ab}} = q^{-\frac{1}{2}} 2N \left( p^{ab} - \frac{1}{2} p q^{ab} \right)$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{\delta C_N}{\delta q_{ab}} &= - \left[ \frac{1}{2} N \mathcal{H} q^{ab} + N q^{\frac{1}{2}} \left( q^{ab(3)} R - R^{ab} \right) \right. \\ &\quad \left. + q^{\frac{1}{2}} \left( D^{(a} D^{b)} N - q^{ab} D^c D_c N \right) - 2q^{-\frac{1}{2}} N \left( p^{ac} p_c^b - p p^{ab} \right) \right], \end{aligned}$$

de aquí que:

$$\begin{aligned} \{C_N, C_M\} &= \int_{\Sigma} d^3x \left\{ \left[ - \left( \frac{1}{2} N \mathcal{H} q^{ab} + N q^{\frac{1}{2}} \left( q^{ab(3)} R - R^{ab} \right) + q^{\frac{1}{2}} \left( D^{(a} D^{b)} N - q^{ab} D^c D_c N \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2q^{-\frac{1}{2}} N \left( p^{ac} p_c^b - p p^{ab} \right) \right] \left[ q^{-\frac{1}{2}} 2M \left( p^{ab} - \frac{1}{2} p q^{ab} \right) \right] - (N \leftrightarrow M) \right\} \\ &= -2 \int_{\Sigma} d^3x \left[ M \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) \left( D^{(a} D^{b)} N - q^{ab} D^c D_c N \right) - (N \leftrightarrow M) \right] \\ &= -2 \int_{\Sigma} d^3x \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) \left[ M D^{(a} D^{b)} N - N D^{(a} D^{b)} M + q^{ab} \left( N D^c D_c M - M D^c D_c N \right) \right]. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} D^c \left[ q^{ab} q^{-1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) M D_c N \right] &= q^{ab} M q^{1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) D^c D_c N \\ &\quad + D_c M D^c \left[ q^{ab} M q^{1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) \right], \end{aligned}$$

y que:

$$\begin{aligned} D^a \left[ q^{-1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) M D^b N \right] &= D^a \left[ q^{-1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) M \right] D^b N \\ &\quad + M q^{-1/2} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} p q_{ab} \right) D^{(a} D^{b)} N. \end{aligned}$$

Así,

$$\{C_N, C_M\} = \int_{\Sigma} d^3x q^{ab} (N \partial_b M - M \partial_b N) (-2q^{1/2} D^c (q^{-1/2} p_{ac})) = \int_{\Sigma} d^3x K^a \mathcal{H}_a,$$

donde se han descartado términos de frontera, por lo tanto,

$$\{C_N, C_M\} = C_{K^a}, \quad (2.4.14)$$

donde:

$$K^a := q^{ab} (N \partial_b M - M \partial_b N). \quad (2.4.15)$$

Note que el campo  $K^a$  depende de la inversa de  $q_{ab}$ , por lo tanto, las constantes de estructura en la ecuación anterior no son realmente constantes sino funciones de  $q^{ab}$ . Se concluye entonces que el álgebra de Dirac no es realmente un álgebra de Lie.

Note que las constricciones son cerradas bajo paréntesis de Poisson; i.e., el paréntesis de cualesquiera dos constricciones es otra constricción. En terminología de Dirac se dice que el álgebra es de primera clase. Considerando la geometría del espacio fase, eso significa que los campos vectoriales asociados con las funcionales de restricción generan la hipersuperficie. Por lo cual tiene sentido hablar de una hipersuperficie restringida  $X_{phy}$ . Además, ya que la Hamiltoniana está formada por las constricciones, éstas se preserva en el tiempo.

Hallar las ecuaciones de evolución en el formalismo de ADM requiere de un tratamiento algebraico extenso. En las siguientes líneas se pretende dar indicios de los pasos que se suelen seguir para realizar la deducción de tales ecuaciones.

Primero, para hallar  $\dot{q}_{ab}$  es conveniente poner el Hamiltoniano de forma explícita, i.e.,

$$H = \int d^3x \left[ N\sqrt{q} \left( -^{(3)}R + q^{-1}p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}q^{-1}p^2 \right) - N^a 2\sqrt{q}D_b \left( q^{-1/2}p_a^b \right) \right], \quad (2.4.16)$$

de aquí sigue que:

$$\dot{q}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta p^{ab}} = 2q^{-\frac{1}{2}}N \left( p_{ab} - \frac{1}{2}q_{ab}p \right) + 2D_{(a}N_{b)}, \quad (2.4.17)$$

en donde se han despreciado términos de frontera (divergencias totales) y se ha usado  $D_a q_{ab} = 0$ .

Ahora, para hallar  $\dot{p}_{ab}$  conviene dividir el Hamiltoniano en 3 partes, i.e., tratarlo como una combinación lineal de tres funcionales. Entonces, sean:

$$H = H_1 + H_2 + H_3, \quad (2.4.18)$$

donde,

$$H_1 = - \int_{\Sigma} d^3x q^{\frac{1}{2}} N^3 R \quad (2.4.19)$$

$$H_2 = \int_{\Sigma} d^3x q^{\frac{1}{2}} N q^{-1} \left( p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}p^2 \right) \quad (2.4.20)$$

$$H_3 = - \int_{\Sigma} d^3x q^{\frac{1}{2}} 2N^a \sqrt{q} D_b \left( q^{-1/2} p_a^b \right). \quad (2.4.21)$$

Las variaciones de estos funcionales respecto a la métrica  $q_{ab}$  se muestra a continuación:

$$\delta H_1 = - \int_{\Sigma} d^3x q^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} q^{ab} N^{(3)} R - N R^{ab} + D^{(a} D^{b)} N - q^{ab} D^c D_c N \right) \delta q_{ab}. \quad (2.4.22)$$

$$\delta H_2 = \int_{\Sigma} d^3x \left[ -\frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} N \left( p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}p^2 \right) + 2q^{-\frac{1}{2}} N \left( p^{ac}p_c^b - \frac{1}{2}pp^{ab} \right) \right] \delta q_{ab}. \quad (2.4.23)$$

$$\delta H_3 = \int_{\Sigma} d^3x \left[ 2p^{(ac} D_c N^{b)} - q^{\frac{1}{2}} D_d \left( q^{-\frac{1}{2}} p^{ab} N^d \right) \right] \delta q_{ab}. \quad (2.4.24)$$

Recuerde que la derivada funcional se puede definir por medio de la variación, i.e., sea  $f \in Met(\Sigma)$  entonces,

$$\delta f = \int_{\Sigma} \frac{\delta f}{\delta q_{ab}(x)} \delta q_{ab}(x). \quad (2.4.25)$$

De aquí se concluye que:

$$\begin{aligned} \dot{p}^{ab} = -\frac{\delta H}{\delta q_{ab}} = & -Nq^{\frac{1}{2}} \left( R^{ab} - \frac{1}{2}^{(3)}Rq^{ab} \right) + q^{\frac{1}{2}} D_c \left( q^{-\frac{1}{2}} N^c p^{ab} \right) \\ & - 2Nq^{-\frac{1}{2}} \left( p^{ac}p_c^b - \frac{1}{2}pp^{ab} \right) - 2p^{c(a} D_c N^{b)} \\ & + \frac{1}{2}Nq^{-\frac{1}{2}} q^{ab} \left( p_{cd}p^{cd} - \frac{1}{2}p^2 \right) + q^{\frac{1}{2}} \left( D^a D^b N - q^{ab} D^c D_c N \right). \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Las Ecs. (2.4.17) y (2.4.26) dan la evolución de las variables canónicas de la teoría.

## 2.5. Cuantización Canónica

Una de las razones principales del estudio de una formulación hamiltoniana de la RG es que se espera obtener una teoría cuántica de la gravedad a través de la cuantización canónica. El proceso de cuantización canónica a partir de las variables ADM encara serios problemas [32], así que por lo general se bosqueja el programa de cuantización canónica siguiendo el formalismo de Dirac [7], con el cual se espera obtener la teoría cuántica.

Primero se necesita definir un espacio de Hilbert para la teoría. La elección más sencilla y natural es  $L^2[Met(\Sigma)]$ , i.e., el espacio de las funcionales de cuadrado integrables que dependen de la 3-métrica sobre la hipersuperficie espacial  $\Sigma$ . Sin embargo,  $Met(\Sigma)$  es de dimensión infinita, por lo que no es del todo claro lo que sería una funcional de cuadrado integrable en este espacio. Este es un problema común cuando se hace cuantización canónica de una teoría de campo, y ocasionalmente hay formas de evitarlo. Suponga entonces que se sabe como dar sentido a  $L^2[Met(\Sigma)]$ . Lo que sigue es promover la 3-métrica y su momento conjugado a operadores. La manera más simple es tomar el operador de la 3-métrica como:

$$\hat{q}_{ab}\Psi[q] := q_{ab}(x)\Psi[q], \quad (2.5.1)$$

con  $q \in Met(\Sigma)$  una 3-métrica y  $x$  un punto de  $\Sigma$ . El operador de momento se define como:

$$\hat{p}^{ab}\Psi[q] := -i\frac{\delta}{\delta q_{ab}(x)}\Psi[q]. \quad (2.5.2)$$

Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{p}^{cd}(y)] = -i\delta_{(a}^c\delta_{b)}^d\delta(x-y), \quad (2.5.3)$$

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{q}_{cd}(y)] = 0, \quad (2.5.4)$$

$$[\hat{p}^{ab}(x), \hat{p}^{cd}(y)] = 0. \quad (2.5.5)$$

Lo que sigue es tratar de cuantizar el Hamiltoniano de la teoría. Para hacer esto, se toman los operadores  $\hat{q}_{ab}$ ,  $\hat{p}^{ab}$ , y se sustituyen en las constricciones escalar y vectorial [Ecs. (2.3.18) y (2.3.19)], para obtener la versión cuántica  $\hat{C}_N$  y  $\hat{C}_{N^a}$  de las restricciones como operadores sobre  $L^2[Met(\Sigma)]$ . Esto trae consigo el **problema de ordenamiento de factores**, el cual consiste a grandes rasgos, a que debido a la no conmutatividad de  $\hat{q}_{ab}$  y  $\hat{p}^{ab}$ , el escribir las fórmulas clásicas de las constricciones con un ordenamiento diferente conduce a diferentes operadores. Este problema surge cuando las constricciones no son polinomiales en las variables. Un *buen* ordenamiento de operadores haría que las constricciones cuánticas satisfagan relaciones de conmutación análogas a las clásicas:

$$[\hat{C}_{N^a}, \hat{C}_{M^a}] = -i\hat{C}_{\mathcal{L}_{N^a}M^a}, \quad (2.5.6)$$

$$[\hat{C}_{N^a}, \hat{C}_N] = -i\hat{C}_{\mathcal{L}_{N^a}N}, \quad (2.5.7)$$

$$[\hat{C}_N, \hat{C}_M] = -i\hat{C}_{K^a}. \quad (2.5.8)$$

Desafortunadamente, esto parece casi imposible de lograr. Sin embargo, se puede suponer que se tiene éxito en obtener los operadores  $\hat{C}_N$  y  $\hat{C}_{N^a}$ . Entonces, se puede escribir el Hamiltoniano para la teoría cuántica como:

$$\hat{H} = \int d^3x q^{1/2}(N\hat{C} + N^a\hat{C}_a). \quad (2.5.9)$$

Clásicamente, el Hamiltoniano se anula en el espacio fase físico  $X_{phy}$  (ver sección anterior) debido a las 4 ecuaciones de Einstein que sirven como constricciones. ¿Cómo se tratan estas

constricciones en la teoría cuántica? El tema de las constricciones en la teoría cuántica es algo complicado, pero hay un tratamiento en la teoría cuántica que fue desarrollado por Dirac [7]. Se dice que un vector  $\Psi \in L^2[Met(\Sigma)]$  es un estado físico si satisface las constricciones en su forma cuántica:

$$\widehat{C}_N \Psi = \widehat{C}_{N^a} \Psi = 0, \quad (2.5.10)$$

para toda  $N, N^a$ . Lo que equivale a que la *ecuación de Wheeler-DeWitt*,

$$\widehat{H} \Psi = 0, \quad (2.5.11)$$

se cumpla, para toda  $N, N^a$ .

En este punto, el programa de cuantización canónica tiene ciertas dificultades. Hay tres problemas básicos que vale la pena mencionar. Primero, nadie ha encontrado alguna solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt puesta en esta forma. Segundo, si uno encontrara estados físicos, éstos generarían algún espacio vectorial, el espacio fase físico:

$$\mathcal{H}_{phy} = \{ \Psi : \forall N, N^a \quad \widehat{C}_N \Psi = \widehat{C}_{N^a} \Psi = 0 \}. \quad (2.5.12)$$

Sin embargo, no hay razón para esperar que el producto interno físicamente relevante en  $\mathcal{H}_{phy}$  concuerde con el producto interno en  $L^2[Met(\Sigma)]$ . Éste se conoce como el **problema del producto interno**. Parece que se debería determinar el producto interno correcto requiriendo que las observables resulten ser operadores autoadjuntos. Desafortunadamente, esto lleva al tercer problema. El Hamiltoniano se anula en  $\mathcal{H}_{phy}$ , así que cualquier operador  $A \in \mathcal{H}_{phy}$  automáticamente conmuta con el Hamiltoniano. Sigue que tales operadores corresponden a observables que no cambian con el tiempo,

$$\frac{d}{dt} A_t = i [\widehat{H}, A_t] = 0. \quad (2.5.13)$$

¿A dónde ha ido la dinámica de la teoría? Resulta que los estados en  $\mathcal{H}_{phy}$  no describen estados de la gravedad cuántica en un tiempo particular en la forma en que el par  $(q, p)$  lo hace en gravedad clásica, en lugar de eso, describen estados para todo el tiempo, o más precisamente, sólo la información del estado que es invariante bajo todos los difeomorfismos espaciotemporales. Este es el famoso **problema del tiempo** en gravedad cuántica. No se acostumbra hacer física de una manera manifiestamente invariante de difeomorfismo, por lo que no se conoce ninguna observable candidata que deba representarse como operador en  $\mathcal{H}_{phy}$ .

## 2.6. El Hamiltoniano de ADM Extendido a Tríadas

Para comenzar esta sección, se define el concepto de un **campo de marco**. Suponga que  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional orientada difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Físicamente se puede pensar a  $M$  como un pequeño subconjunto abierto del espaciotiempo (toda variedad puede cubrirse con cartas difeomorfas a  $\mathbb{R}^n$ ). Ya que el haz tangente de  $\mathbb{R}^n$  es trivial, también lo es  $TM$ <sup>9</sup>. Recuerde, una trivialización de  $TM$  es un isomorfismo de haz vectorial,

$$e : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad (2.6.1)$$

<sup>9</sup>Un haz es una estructura que consiste de una variedad  $E$  (el espacio total), una variedad  $M$  (el espacio base), y un mapa sobreyectivo  $\pi : E \rightarrow M$  (el mapa de proyección). Para cada punto  $p \in M$ , el espacio  $E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$  es llamado **la fibra sobre  $p$** . Un **haz vectorial**  $\pi : E \rightarrow M$  es un haz cuya fibra es un espacio vectorial.

que envía cada fibra  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  al espacio tangente correspondiente  $T_p M$ . Una trivialización de  $TM$  también se conoce como un **campo de marcos** o simplemente **marco**, ya que para cada  $p$  éste envía la base estándar de  $\mathbb{R}^n$  a una base de vectores tangentes en  $p$ . Si  $M$  es 3-dimensional, un marco sobre  $M$  también se conoce como **triada** o **dreibein**. Si  $M$  es 4-dimensional, un marco sobre  $M$  se conoce como una **tetrada** o **vierbein**.

La idea es hacer la mayor parte del trabajo en el haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$ , que sirve como un tipo de sustituto para el haz tangente. Se puede pasar  $M \times \mathbb{R}^n$  a  $TM$  y viceversa usando el marco  $e$  y su inversa,

$$e^{-1} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n. \quad (2.6.2)$$

Antes se necesita desarrollar un poco de notación. Para mantener las cosas específicas, se supone que se está en el caso Lorentziano  $n$ -dimensional (otros casos funcionan de forma similar). Una sección de  $M \times \mathbb{R}^n$  es simplemente una función en  $M$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ , así que hay una base natural de secciones  $\xi_0, \dots, \xi_n$  dado por:

$$\xi_0 = (1, 0, 0, \dots),$$

$$\xi_1 = (0, 1, 0, \dots),$$

$$\xi_2 = (0, 0, 1, \dots),$$

y, así sucesivamente. Se puede escribir cualquier sección  $s$  como:

$$s = s^I \xi_I. \quad (2.6.3)$$

En este contexto,  $\mathbb{R}^n$  es a menudo llamado **espacio interno**<sup>10</sup>. Se puede pensar en el marco  $e$  como un mapeo de las secciones de  $M \times \mathbb{R}^n$  a campos vectoriales sobre  $M$ . Al aplicar este mapa a las secciones  $\xi_I$ , se obtiene una base de campos vectoriales  $e(\xi_I)$  sobre  $M$ , y en una carta se puede escribir estos campos como:

$$e_I = e(\xi_I) := e_I^\alpha \partial_\alpha, \quad (2.6.4)$$

donde  $e_I^\alpha$  son funciones en  $M$ . Ya que tanto los coeficientes  $e_I^\alpha$  como los campos  $e_I = e(\xi_I)$  son suficientes para determinar el marco  $e$ , es común llamar a cualquiera de estas cosas el campo de marcos.

Ahora, resulta que  $M \times \mathbb{R}^n$ , como un tipo de **imitación del haz tangente**, tiene algo que el haz tangente real no, es decir un producto interno canónico. En otras palabras, dados  $s, r \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$ <sup>11</sup>, se puede definir su producto interno  $\eta(s, r)$  por:

$$\eta(s, r) = \eta_{IJ} s^I r^J, \quad (2.6.5)$$

donde  $\eta_{IJ}$  es una copia de la métrica de Minkowski [21, 27], i.e.,  $\eta_{IJ} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  [en 3 dimensiones se usa la delta de Kronecker,  $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ , en lugar de  $\eta_{IJ}$ ] y se conoce como **métrica interna**.

Ahora, suponga que  $M$  tiene una métrica Lorentziana  $g_{\mu\nu}$  [21, 27]. Esto significa que se pueden tomar productos internos de campos vectoriales en  $M$  como:

$$g(v, w) = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta. \quad (2.6.6)$$

<sup>10</sup>Se opta por usar letras Latinas mayúsculas  $I, J, K, \dots$  para índices internos de espaciotiempo y letras Latinas minúsculas  $i, j, k, \dots$  para índices internos espaciales.

<sup>11</sup> $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$  representa el espacio de todas las secciones en  $M \times \mathbb{R}^n$ .

Se dice que el marco  $e$  es ortonormal si los campos vectoriales  $e_I$  son ortonormales, i.e.,

$$g_{\alpha\beta}e_I^\alpha e_J^\beta = e_{\alpha I}e_J^\alpha = \eta_{IJ}. \quad (2.6.7)$$

Si el marco es ortonormal, la métrica  $g_{\mu\nu}$  sobre  $M$  está dada en términos del inverso del campo de marcos por:

$$g(v, w) = \eta(e^{-1}v, e^{-1}w). \quad (2.6.8)$$

La fórmula anterior para la métrica puede verse un tanto abstracta, pero para cálculos se puede deducir la siguiente fórmula. Primero, sea:

$$\eta_{IJ} = g(e_I, e_J) = g_{\alpha\beta}e_I^\alpha e_J^\beta. \quad (2.6.9)$$

Note que,

$$\eta_J^I = \eta^{IK}\eta_{KJ} = \eta^{IK}g_{\alpha\beta}e_K^\alpha e_J^\beta = e_J^I e_J^\beta. \quad (2.6.10)$$

Luego, el inverso del marco está dado por:

$$e^{-1}v = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I, \quad (2.6.11)$$

ya que si  $v = e(s)$  para alguna sección  $s \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$ , la Ec. (2.6.11) da:

$$e^{-1}v = e_\alpha^I e_J^\alpha s^J \xi_I = s,$$

como debería. De esto, se puede deducir una fórmula para la métrica  $g_{\mu\nu}$  en términos del comarco  $e_\alpha^I$  (también llamado cotriada o cotétrada en 3 y 4 dimensiones, respectivamente), i.e.,

$$g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \eta(e^{-1}\partial_\alpha, e^{-1}\partial_\beta) = \eta(e_\alpha^I \xi_I, e_\beta^J \xi_J).$$

Así,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J. \quad (2.6.12)$$

A partir de la ecuación anterior es claro que con el conocimiento de la tétrada se puede determinar la métrica del espaciotiempo. Sin embargo, lo contrario no es verdadero, ya que hay una infinidad de marcos que satisfacen la Ec. (2.6.12), todos ellos relacionados por transformaciones de Lorentz locales [3], i.e., para cada  $x \in M$ :

$$e_\alpha^I(x) e_\beta^J(x) \eta_{IJ} = e_\alpha^I(x) e_\beta^J(x) \Lambda_I^{I'}(x) \Lambda_J^{J'}(x) \eta_{I'J'} = e_\alpha^{I'}(x) e_\beta^{J'}(x) \eta_{I'J'},$$

donde se ha usado la invarianza de la métrica de Minkowski bajo transformaciones de Lorentz. Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz locales son interpretadas como la norma en este formalismo. Esto se puede ver a partir del número de componentes independientes en la Ec. (2.6.12), la métrica del espaciotiempo tiene 10 componentes independientes mientras que la tétrada tiene 16, la diferencia 6 corresponde a la dimensión del grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$  (en general, se puede pensar a cualquier grupo  $SO(n, 1)$  como un grupo de Lorentz).

Hallar una formulación Hamiltoniana de la RG con constante cosmológica siguiendo las ideas del formalismo ADM es mucho más trivial si se usa el formalismo de las tríadas. Aquí se sigue de cerca [24] y [33]. Se parte de la densidad Lagrangiana de Einstein-Hilbert (con constante cosmológica),

$$\mathcal{L}_{EH} = e \left( R(e_\alpha^I) + 2\lambda \right). \quad (2.6.13)$$

Para poder determinar la formulación Hamiltoniana de la Ec. (2.6.13), se asume que el espaciotiempo  $M$  es topológicamente  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , donde  $\Sigma$  es alguna subvariedad espacial de  $M$ , y  $\mathbb{R}$  representa la dirección temporal. También, se rompe parcialmente la covarianza manifiesta del

espaciotiempo escogiendo la coordenada  $x^0$  como la coordenada temporal.

Ahora, es importante recordar que para representar cualquier campo tensorial sobre una variedad, se emplean *bases holónomas*, que son inducidas por algún sistema de coordenadas. Pero, para un gran número manipulaciones algebraicas resulta mucho más conveniente usar *bases ortonormales*. Entonces, se puede introducir una base no holónoma, i.e., una base ortonormal no coordenada de campos suaves  $e_a^i$  sobre  $\Sigma$ , que satisface:

$$\delta_{ij} = q_{ab}e_a^i e_b^j, \quad \delta_i^j = e_{ai}e^{aj}, \quad q_{ab} = \delta_{ij}e_a^i e_b^j = e_a^i e_{bj}. \quad (2.6.14)$$

Sigue que:

$$\delta_a^b = q_{ac}q^{cb} = \delta_{ij}e_a^i e_c^j q^{cb} = e_a^i e_i^b. \quad (2.6.15)$$

Además, note que:

$$q = \det(q_{ab}) = \det(e_a^i e_{bj}) = (\det(e_a^i))^2 = e^2, \quad (2.6.16)$$

donde  $q$  es el determinante de la métrica espacial y  $e$  es el determinante de la triada  $e_a^i$ .

Antes de definir el momento conjugado al marco y de hacer la transformada de Legendre conviene reescribir ligeramente el Lagrangiano. La razón es que en la forma dada por la Ec. (2.6.13) contiene segundas derivadas de la tétrada, que puede integrarse parcialmente, dejando una dependencia únicamente en  $e_a^I$  y sus primeras derivadas.

Primero, se definen un par de conexiones:  $\mathcal{D}_\alpha$  y  $\nabla_\alpha$ .  $\mathcal{D}_\alpha$  es covariante con respecto a transformaciones coordenadas en el espaciotiempo como a transformaciones de Lorentz locales sobre los índices internos. Mientras que  $\nabla_\alpha$  es covariante sólo bajo transformaciones de coordenadas generales. Es decir,

$$\mathcal{D}_\alpha \lambda^{\beta I} := \partial_\alpha \lambda^{\beta I} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \lambda^{\gamma I} + \omega_{\alpha J}^I \lambda^{\beta J}. \quad (2.6.17)$$

$$\nabla_\alpha \lambda^{\beta I} := \partial_\alpha \lambda^{\beta I} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \lambda^{\gamma I}, \quad (2.6.18)$$

donde  $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta$  es una conexión afín (se asume que es una conexión con torsión cero, i.e.,  $\Gamma_{[\alpha\beta]}^\gamma = 0$ ) y  $\omega_{\alpha J}^I$  es la conexión de espín. Entonces, se requiere que las derivadas covariantes sean compatibles con la tétrada, i.e.,

$$\mathcal{D}_\alpha e_{\beta I} = 0, \quad (2.6.19)$$

$$\mathcal{D}_\alpha g_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0. \quad (2.6.20)$$

De la Ec. (2.6.19), note que:

$$\mathcal{D}_\alpha e^{\beta J} = \partial_\alpha e^{\beta J} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta e^{\gamma J} + \omega_{\alpha K}^{\beta J} e^K = \nabla_\alpha e^{\beta J} + \omega_{\alpha K}^J e^{\beta K} = 0,$$

entonces,

$$\nabla_\alpha e^{\beta J} = -\omega_{\alpha K}^{\beta J} e^K. \quad (2.6.21)$$

Luego, se tiene que:

$$\mathcal{D}_\alpha e_{\beta I} = \partial_\alpha e_{\beta I} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{\gamma I} + \omega_{\alpha I}^J e_{\beta J} = 0, \quad (2.6.22)$$

entonces,

$$\mathcal{D}_\alpha (e_{\beta I} e_{\gamma J}^\beta) = \mathcal{D}_\alpha \eta_{IJ} = \partial_\alpha \eta_{IJ} + \omega_{\alpha I}^K \eta_{KJ} + \omega_{\alpha J}^K \eta_{IK} = 2 \omega_{\alpha(IJ)} = 0, \quad (2.6.23)$$

i.e.,  $\omega_{\alpha}^{IJ}$  es antisimétrico, y por lo tanto, tiene valores en el álgebra de Lie  $so(3,1)$  [21, 27, 29]. Además, de la Ec. (2.6.22) y de la propiedad de torsión nula de  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ , es posible determinar de forma única  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  y  $\omega_{\alpha I}^J$  como funciones de la tétrada, es decir, sea,

$$\mathcal{D}_\alpha g_{\beta\gamma} = \mathcal{D}_\alpha (e_{\beta I} e_{\gamma}^I) = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\beta\delta} = 0, \quad (2.6.24)$$

sigue que al hacer permutaciones cíclicas y sumar las ecuaciones resultantes se encuentra que:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta} (\partial_{\gamma}g_{\gamma\delta} + \partial_{\beta}g_{\delta\alpha} - \partial_{\delta}g_{\alpha\beta}), \quad (2.6.25)$$

i.e.,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  son los simbolos de Christoffel y bajo la condición de torsión nula,  $\nabla_{\alpha}$  es la conexión de Levi-Civita.

En adición a la Ec. (2.6.22), la conexión de espín se puede definir como:

$$\mathcal{D}_{[\alpha}e_{\beta]I} := \partial_{[\alpha}e_{\beta]I} + \omega_{[\alpha I}^J e_{\beta]J} = 0. \quad (2.6.26)$$

Note que la Ec, (2.6.22) implica la Ec. (2.6.26) pero lo contrario no es cierto. Para obtener directamente  $\omega_{\alpha I}^J$  de la Ec. (2.6.26) primero se convierten los índices Griegos libres a índices internos  $SO(3, 1)$  mediante:

$$2!e_J^{\alpha}e_K^{\beta} (\partial_{[\alpha}e_{\beta]I} + \omega_{[\alpha I}^L e_{\beta]L}) = 0,$$

entonces,

$$\Omega_{JKI} + 2!e_J^{\alpha}e_K^{\beta}\omega_{[\alpha I}^L e_{\beta]L} = 0, \quad (2.6.27)$$

donde se han definido los coeficientes de la anti-holonomía como:

$$\Omega_{JKI} = 2!e_J^{\alpha}e_K^{\beta}\partial_{[\alpha}e_{\beta]I}. \quad (2.6.28)$$

Luego, permutando cíclicamente los índices libres  $I, J, K$  dos veces, y sumando, y restando las ecuaciones resultantes se demuestra que:

$$\Omega_{JKI} + \Omega_{IJK} - \Omega_{KIJ} + 2e_J^{\alpha}\omega_{\alpha IK} = 0, \quad (2.6.29)$$

por lo tanto,

$$\omega_{\alpha KI} = \frac{1}{2}e_{\alpha}^J(\Omega_{JKI} + \Omega_{IJK} - \Omega_{KIJ}). \quad (2.6.30)$$

Sigue inmediatamente que:

$$\omega_{\alpha}^{KI} = \frac{1}{2}e_{\alpha J}(\Omega^{JKI} + \Omega^{IJK} - \Omega^{KIJ}), \quad (2.6.31)$$

con  $\Omega^{JKI} = 2!e^{\alpha J}e^{\beta K}\partial_{[\alpha}e_{\beta]I}$ .

Ahora, el tensor de Riemann se define por:

$$R_{\alpha\beta I}^J \lambda_J := 2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\lambda_I. \quad (2.6.32)$$

$$R_{\alpha\beta\delta}^{\sigma}\lambda_{\sigma} := 2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\lambda_{\delta} = 2\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\lambda_{\delta}. \quad (2.6.33)$$

Así,

$$2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\lambda_{\gamma I} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}\lambda_{\sigma I} + R_{\alpha\beta I}^J\lambda_{\gamma J}. \quad (2.6.34)$$

Usando campos vectoriales  $\lambda_I = e_I^{\alpha}\lambda_{\alpha}$ , se demuestra que:

$$R_{\alpha\beta I}^J \lambda_J = 2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\lambda_I = 2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}e_I^{\gamma}\lambda_{\gamma} = e_I^{\gamma}R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}\lambda_{\sigma} = e_I^{\gamma}R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}e_{\sigma}^J\lambda_J,$$

se concluye que para cada  $\lambda_J$ ,

$$R_{\alpha\beta I}^J = R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}e_I^{\gamma}e_{\sigma}^J. \quad (2.6.35)$$

Note que:

$$R(e_\alpha^I) = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}{}^\beta = e^{\alpha I} R_{\alpha\beta I}{}^J e_J^\beta = e^{\alpha I} (2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}e_I^\beta - R_{\alpha\beta\gamma}{}^\beta e_I^\gamma) = -2e^{\alpha J}\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}e_J^\beta,$$

por lo tanto,

$$R(e_\alpha^I) = 2e^{\beta J}\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}e_J^\alpha, \quad (2.6.36)$$

donde se han usado las Ecs. (2.6.32) y (2.6.34). Luego, de la Ec. (2.6.21) y la ecuación anterior se tiene que:

$$eR(e_\alpha^I) = 2[\partial_\alpha(e e_J^{[\beta}\nabla_\beta e^{\alpha]J}) - e e^{[\beta J}\nabla_\alpha\nabla_\beta e^{\alpha]J}] = 2[\partial_\alpha(e e_J^{[\beta}\nabla_\beta e^{\alpha]J}) - e e^{\beta J}\omega_{[\beta J}\omega_{\alpha]K}^L e_L^\alpha],$$

entonces,

$$eR(e_\alpha^I) = 2[\partial_\alpha(e e_J^{[\beta}\nabla_\beta e^{\alpha]J}) - e e_J^{\beta K}\omega_{[\beta}^J\omega_{\alpha]KL}e^{\alpha L}], \quad (2.6.37)$$

en donde se han subido y bajado algunos índices con la métrica  $\eta_{IJ}$ .

Ahora, ya se han encontrado soluciones para  $\omega_\alpha^{IJ}$  y  $\omega_{\alpha IJ}$  [ver Ecs. (2.6.30) y (2.6.31)], de aquí que:

$$e_J^\beta\omega_\beta^{IJ}\omega_{\alpha IK}e^{\alpha K} = -\Omega_{IJ}{}^J\Omega^I{}_K{}^K, \quad (2.6.38)$$

$$e_J^\beta\omega_{\beta IK}\omega_\alpha^{JI}e^{\alpha K} = -\frac{1}{4}(\Omega_{IJK}\Omega^{IJK} + 2\Omega_{IJK}\Omega^{IKJ}). \quad (2.6.39)$$

Al sustituir las Ecs. (2.6.38) y (2.6.39) en la Ec. (2.6.37) se obtiene que:

$$eR(e_\alpha^I) = 2\left[\partial_\alpha\left(e e_J^{[\beta}\nabla_\beta e^{\alpha]J}\right) + \frac{1}{2}e\left(\Omega_{IJ}{}^J\Omega^I{}_K{}^K - \frac{1}{4}\Omega_{IJK}\Omega^{IJK} - \frac{1}{2}\Omega_{IJK}\Omega^{IKJ}\right)\right]. \quad (2.6.40)$$

Con la Ec. (2.6.40) e ignorando términos de frontera, el Lagrangiano dado por la Ec. (2.6.13) se convierte en:

$$\mathcal{L} = e\left(\Omega_{IJ}{}^J\Omega^I{}_K{}^K - \frac{1}{4}\Omega_{IJK}\Omega^{IJK} - \frac{1}{2}\Omega_{IJK}\Omega^{IKJ} + 2\lambda\right). \quad (2.6.41)$$

Ahora el Lagrangiano tiene una forma que hace mucho más sencillo realizar la transformada de Legendre. Primero se debe hacer la descomposición (3 + 1) del Lagrangiano, y esto se logra separando la tétrada,

$$e_{0I} = NN_I + N^a V_{aI}, \quad e_{aI} = V_{aI}; \quad N^I V_{aI} = 0; \quad N^I N_I = -1. \quad (2.6.42)$$

Esta es una descomposición completamente general y no pone ninguna restricción en la tétrada. La tétrada inversa se convierte en:

$$e^{0I} = -\frac{N^I}{N}, \quad e^{aI} = V^{aI} + \frac{N^a N^I}{N}; \quad V^{aI}V_{bI} = \delta_b^a; \quad V^{aI}N_I = 0. \quad (2.6.43)$$

La métrica toma la forma ADM estándar,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & V_{aI}V^{aI} \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^a}{N^2} \\ \frac{N^a}{N^2} & V^{aI}V_I^b - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{bmatrix}$$

Se prueba fácilmente que  $(g_{\alpha\beta})(g^{\alpha\beta}) = I$ . Además, se define:

$$g := \det(g_{\alpha\beta}) = -N^2 \det(V_{aI}V_b^I), \quad e := \det(e_{\alpha I}) = N \sqrt{\det(V_{aI}V_b^I)}, \quad (2.6.44)$$

donde  $N_a = V_{aI}V_b^I N^b$ . Note que  $N$  y  $N^a$  son la función lapso y el vector de corrimiento, respectivamente.

De aquí, es sencillo, aunque bastante tedioso, llevar a cabo la transformada de Legendre usando la descomposición dada por la Ec. (2.6.42). Sin embargo, hay una forma de reducir este cálculo dramáticamente. Es decir, rompiendo manifiestamente la invarianza de Lorentz con la elección de la norma  $N_I = (1, 0, 0, 0)$  la transformada de Legendre se simplifica bastante. Y ya que la única diferencia a nivel Hamiltoniano debería ser que la invarianza de Lorentz se reduce a la invarianza  $SO(3)$ , aquí se usa esta elección de norma. Con esta elección para  $N_I$  no hay inconsistencia en la notación con  $V_{ai}$  llamado  $e_{ai}$ , así que se cambia la notación a:  $e^{ai} = V^{ai}$ ,  $e_{ai} = V_{ai}$ .

Ahora, se usa la descomposición  $3 + 1$  de  $e^{\alpha I}$  para descomponer  $\Omega^{IJK}$ ,

$$\Omega^{ijk} = 2e^{0i}e^{\beta j}\partial_{[0}e_{\beta]k} + 2e^{ai}e^{\beta j}\partial_{[a}e_{\beta]k} = 2e^{ai}e^{oj}\partial_{[a}e_{o]k} + 2e^{ai}e^{bj}\partial_{[a}e_{b]k} = 2e^{ai}e^{bj}\partial_{[a}e_{b]k}.$$

Así,

$$\Omega^{ijk} = 2e^{ai}e^{bj}\partial_{[a}e_{b]k}. \quad (2.6.45)$$

Luego,

$$\Omega^{0jk} = 2e^{a0}e^{\beta j}\partial_{[a}e_{\beta]k} = -2\frac{N^0}{N}e^{\beta j}\partial_{[0}e_{\beta]k} + \left(V^{a0} + \frac{N^aN^0}{N}\right)e^{\beta j}\partial_{[a}e_{\beta]k},$$

note que:

$$V^{aI}N_I = V^{a0}N_0 + V^{ai}N_i = 0 \Rightarrow V^{a0} = 0, \quad e^{0i} = 0,$$

entonces,

$$\Omega^{0jk} = \frac{2}{N} \left( e^{bj}\partial_{[0}e_{b]k} - N^ae^{bj}\partial_{[a}e_{b]k} \right), \quad (2.6.46)$$

$$\Omega_{0jk} = -\frac{2}{N} \left( e_j^b\partial_{[0}e_{b]k} - N^ae_j^b\partial_{[a}e_{b]k} \right). \quad (2.6.47)$$

Similarmente,

$$\Omega^{0j0} = \frac{1}{N}e^{bj}\partial_b N, \quad (2.6.48)$$

$$\Omega^{ij0} = 0. \quad (2.6.49)$$

El Lagrangiano dado por la Ec. (2.6.41) también debería descomponerse en  $3 + 1$ . Note que:

$$\Omega_{IJ}^J\Omega^I_K^K = \Omega_{0j}^j\Omega^0_k{}^k + \Omega_{i0}^0\Omega^i_0{}^0 + 2\Omega_{i0}^i\Omega^0_{ik}{}^k + \Omega_{ij}^j\Omega^i_k{}^k. \quad (2.6.50)$$

$$\Omega_{IJK}\Omega^{IJK} = 2\Omega_{0j0}\Omega^{0j0} + 2\Omega_{0jk}\Omega^{0jk} + \Omega_{ijk}\Omega^{ijk}. \quad (2.6.51)$$

$$\Omega_{IJK}\Omega^{IKJ} = \Omega_{0jk}\Omega^{0kj} + \Omega_{0j0}\Omega^{0j0} + \Omega_{ijk}\Omega^{ikj}. \quad (2.6.52)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.6.50), (2.6.51) y (2.6.52) en la Ec. (2.6.41), se obtiene que:

$$\mathcal{L} = N^{(3)}e \left( \Omega_{ij}^j\Omega^i_k{}^k - \frac{1}{2}\Omega_{ijk}\Omega^{ikj} - \frac{1}{4}\Omega_{ijk}\Omega^{ijk} + \Omega_{0j}^j\Omega^0_k{}^k + 2\Omega_{i0}^i\Omega^0_{ik}{}^k - \Omega^{0(jk)}\Omega_{0jk} + 2\lambda \right) \quad (2.6.53)$$

Donde se ha usado la descomposición en la forma de volumen tal que  $e = N^{(3)}e$ , con  ${}^{(3)}e = \det(e_{ai})$ .

Ahora, usando de nuevo la Ec. (2.6.37), pero para la derivada covariante  $\nabla_a$  en  $\Sigma$ , definida para aniquilar  $e_{ai}e_b^i$ , se demuestra que:

$$N^{(3)}e^{(3)}R = 2N^{(3)}ee^{bj}\nabla_{[a}\nabla_{b]}e_j^a = 2N^{(3)}e(\nabla_{[a}e_j^b\nabla_{b]}e^{aj} - e_j^b\omega_{[b}^{kj}\omega_{a]kl}e^{al}).$$

Así,

$$N^{(3)}e^{(3)}R = N^{(3)}e \left( \Omega_{ij}^j\Omega^i_k{}^k - \frac{1}{2}\Omega_{ijk}\Omega^{ikj} - \frac{1}{4}\Omega_{ijk}\Omega^{ijk} \right)$$

$$+\partial_{[a}(2N^{(3)}e e^{bj}\nabla_{b]}e_j^a) - 4^{(3)}e e_j^b\partial_{[b}e_{c]}^i g^{ca}\partial_a N. \quad (2.6.54)$$

Note que:

$$\Omega^i{}_{0^0}\Omega_{ik}{}^k = -\frac{2}{N}e_k^b\partial_{[b}e_{c]}^k g^{ca}\partial_a N. \quad (2.6.55)$$

De las Ecs. (2.6.54)-(2.6.55), y eliminando términos de frontera, se concluye que:

$$\mathcal{L} = N^{(3)}e \left( -\Omega^{0(jk)}\Omega_{0jk} + \Omega_{0j}{}^j\Omega^0{}_k{}^k + {}^{(3)}R + 2\lambda \right). \quad (2.6.56)$$

Lo que sigue es calcular el momento asociado a las variables canónicas. Ya que  $N$  y  $N^a$  no aparecen en el Lagrangiano su momento conjugado se anula. El momento conjugado a la tríada está dado por:

$$p^{ai} := \frac{\delta L}{\delta \dot{e}_{ai}} = 2N^{(3)}e \left( \Omega^{0(li)}N^{-1}e_l^a - N^{-1}\Omega^0{}_k{}^k e^{ai} \right) = 2^{(3)}e \left( \Omega^{0(li)}e_l^a - \Omega^0{}_k{}^k e^{ai} \right).$$

Así,

$$p^{ai} = 2^{(3)}e e_l^a \left( \Omega^{0(li)} - \Omega^0{}_k{}^k \delta^{il} \right). \quad (2.6.57)$$

Es decir, existe una constricción primaria,

$$L^i := \epsilon^{ijk} p_j^a e_{ak} \approx 0, \quad (2.6.58)$$

esta restricción adicional genera rotaciones  $SO(3)$ .

Note que:

$$e_{ai} p^{ai} = 2^{(3)}e \delta_{il} \left( \Omega^{0(li)} - \Omega^0{}_k{}^k \delta^{il} \right) = 2(-2)^{(3)}e \Omega^0{}_k{}^k,$$

entonces,

$$\Omega^0{}_k{}^k = -\frac{1}{4^{(3)}e} p_k{}^k. \quad (2.6.59)$$

Sigue que:

$$p^{ij} := p^{ai} e_a^j = 2^{(3)}e \delta_l^j \left( \Omega^{0(li)} - \Omega^0{}_k{}^k \delta^{il} \right).$$

Así,

$$\Omega^{0(ij)} = \frac{1}{2^{(3)}e} \left( p^{ij} - \frac{1}{2}(p_k{}^k)\delta^{ij} \right). \quad (2.6.60)$$

Similarmente,

$$\Omega_{0j}{}^j = \frac{1}{4^{(3)}e} p_j{}^j, \quad \Omega_{0(ij)} = -\frac{1}{2^{(3)}e} \left( p_{ij} - \frac{1}{2}(p_k{}^k)\delta_{ij} \right). \quad (2.6.61)$$

Ahora, queda por determinar de forma explícita la transformada de Legendre. Primero, note que con la cantidades calculadas el Lagrangiano se reescribe como:

$$\mathcal{L} = N^{(3)}e \left[ \frac{1}{4^{(3)}e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{4}(p_i^i)^2 \right) - \frac{1}{16^{(3)}e^2} (p_k{}^k)^2 + {}^{(3)}R + 2\lambda \right].$$

Entonces,

$$\mathcal{L} = \frac{N}{4^{(3)}e} \left[ p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2}(p_i^i)^2 + 4^{(3)}e^2 {}^{(3)}R + 8^{(3)}e^2 \lambda \right]. \quad (2.6.62)$$

Además,

$$\dot{e}_{ai} = -e_a^j N \Omega_{0ij} + e_{bi} D_a N^b = \frac{N}{2^{(3)}e} \left( p_{ai} - \frac{1}{2}(p_k^k) e_{ai} \right) + e_{bi} D_a N^b,$$

donde se ha usado la Ec. (2.6.61) y el hecho de que  $e_{0j} = N^a e_{aj}$ . Entonces,

$$p^{ai} \dot{e}_{ai} = \frac{N}{2^{(3)}e} \left( p^{ai} p_{ai} - \frac{1}{2}(p_k^k) p^{ai} e_{ai} \right) + \partial_a \left( N^b p^{ai} e_{bi} \right) - N^b e_{bi} D_a p^{ai}.$$

Así,

$$p^{ai}\dot{e}_{ai} = \frac{N}{2^{(3)}e} \left( p^{ij}p_{ij} - \frac{1}{2}(p_i^i)^2 \right) + \partial_a(N^b p^{ai} e_{bi}) - N^b e_{bi} D_a p^{ai} \quad (2.6.63)$$

donde se ha usado que  $p^{ai} = e_j^a p^{ij}$ , y que  $D_a e_{bi} = 0$ . De las Ecs. (2.6.62) y (2.6.63), se concluye que la densidad Hamiltoniana está dada por:

$$\mathcal{H}_G = p^{ai} e_{ai} - \mathcal{L} + N_i L^i = \frac{N}{4^{(3)}e} \left( p^{ij}p_{ij} - \frac{1}{2}(p_i^i)^2 - 4^{(3)}e^2 {}^{(3)}R - 8^{(3)}e^2 \lambda \right) - N^b e_{bi} D_a p^{ai} + N_i L^i, \quad (2.6.64)$$

donde se han descartado términos de frontera, y  $N_i$  es un multiplicador de Lagrange.

Note que:

$$p^{ab} \dot{q}_{ab} = p^{ab} (\dot{e}_a^i e_b^j \delta_{ij} + e_a^i \dot{e}_b^j \delta_{ij}) = 2p^{ab} \dot{e}_{ai} e_b^i,$$

entonces,

$$p^{ai} = 2p^{ab} e_b^i. \quad (2.6.65)$$

El paréntesis de Poisson fundamental es:

$$\{e_{ai}(x), p^{bj}(y)\} = \delta_a^b \delta_i^j \delta^{(3)}(x, y). \quad (2.6.66)$$

Además,  $L^i \approx 0$  implementa la condición de que  $p^{ab}$ , considerado ahora como una cantidad derivada, es simétrico,

$$p^{ab} = \frac{1}{4} (p_i^a e^{bi} + p_i^b e^{ai}). \quad (2.6.67)$$

La interpretación geométrica de las variables de espacio fase es que  $e_{ai}$  es la tríada sobre la subvariedad espacial  $\Sigma$ , y  $p^{ij}$  está estrachamente relacionado a la curvatura extrínseca de  $\Sigma$ . Es decir, se define,

$$K_a^i := e_{aj} \Omega^{0(ij)} = \frac{1}{2^{(3)}e} \left( p_a^i - \frac{1}{2} (p_k^k) e_a^i \right). \quad (2.6.68)$$

Ya que  $N$  y  $N^a$  tienen momentos que se anulan, la variación de éstas implica las constricciones secundarias:

$$\mathcal{H}(e, p) := p^{ij}p_{ij} - \frac{1}{2}(p_i^i)^2 - 4^{(3)}e^2 {}^{(3)}R - 8^{(3)}e^2 \lambda \approx 0. \quad (2.6.69)$$

$$\mathcal{H}_a(e, p) := -e_{ai} D_b p^{bi} \approx 0. \quad (2.6.70)$$

Ahora, se define la versión *suavizada* de la constricción  $SO(3)$  por:

$$C_{N^i} := \int_{\Sigma} N^i L_i. \quad (2.6.71)$$

El álgebra de Poisson es isomorfa al álgebra  $SO(3)$ , i.e.,

$$\{C_{N^i}, C_{M^j}\} = C_{\epsilon^i{}_{jk} N^j M^k}.$$

Ya que el otro par de restricciones son invariantes  $SO(3)$  (no hay índices internos libres), las restricciones  $SO(3)$  conmutan con ellas.

Pero, ¿qué pasa con el álgebra de las constricciones escalar y vectorial? Resulta que el álgebra es la misma en términos de  $e_a^i, p_i^a$  que en términos de  $q_{ab}, p^{ab}$  hasta términos proporcionales a  $L^i$ . La razón de estos términos adicionales es que, cuando  $q_{ab}$  y  $p^{ab}$  se tratan como cantidades derivadas, la parte de los paréntesis de Poisson de estas variables se ha modificado, i.e.,

$$\{q_{ab}(\mathbf{x}), p^{cd}(\mathbf{y})\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^3(x, y), \quad \{q_{ab}, q_{cd}\} = 0, \quad (2.6.72)$$

mientras que:

$$\{p^{ab}(\mathbf{x}), p^{cd}(\mathbf{y})\} = \frac{1}{4}(q^{ac}J^{bd} + q^{ad}J^{bc} + q^{bc}J^{ad} + q^{bd}J^{ac})\delta^3(x, y), \quad (2.6.73)$$

donde,

$$J^{ab} := -\frac{1}{4}(e^{ai}p_i^b - e^{bi}p_i^a) = J^{[ab]}. \quad (2.6.74)$$

Para preservar la correspondencia entre estructuras de Poisson, deben imponerse las 3 restricciones  $J^{ab} = 0$  (las cuales también aseguran la conservación del número de grados de libertad). Ya que las componentes de  $\epsilon^{abc}$  en la base ortonormal están dadas por  $\epsilon^{ijk} = \epsilon^{abc}e_a^i e_b^j e_c^k$ , sigue que la constricción dada por la Ec. (2.6.58) es equivalente a  $J^{ab} = 0$ .

Por lo tanto, las constricciones  $L^i$ ,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_a$  realmente forman un conjunto de primera clase (en la terminología de Dirac, un álgebra de primera clase), lo que significa que el Hamiltoniano dado por la Ec. (2.6.64) es completo y consistente. Para más detalles ver [24].

Se pueden escoger coordenadas alternativas para  $\Gamma_{ADM}^{ext}$ , cambiando la densidad de peso de las  $q$ 's y las  $p$ 's. Estas coordenadas alternativas están dadas por la densidad de peso +1,

$$\tilde{E}_i^a = e e_i^a. \quad (2.6.75)$$

El momento conjugado a  $\tilde{E}_i^a$  es proporcional a la curvatura extrínseca,

$$P_a^i = -2K_{ab}e^{bi}, \quad (2.6.76)$$

ya que  $P_a^i \dot{\tilde{E}}_i^a = -\frac{1}{2}p_i^a \dot{e}_a^i$  módulo la constricción  $L^i$ . Con respecto a estas variables, las constricciones escalar y vectorial toman la forma:

$$\mathcal{H}(E, P) := -q^{1/2}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab}) \approx 0, \quad (2.6.77)$$

$$\mathcal{H}_a(E, P) := q^{1/2}(D_b K_a^b - D_a K) \approx 0, \quad (2.6.78)$$

[ver Ecs.(2.3.18) y (2.3.19)].

Ahora, se puede hacer una comparación entre el Hamiltoniano que se ha obtenido en términos de las tríadas y del Hamiltoniano en términos de la métrica, i.e., Ecs. (2.3.18) y (2.3.19). Al sustituir las Ecs. (2.6.16) y (2.6.65) en la Ec. (2.6.64) se obtiene que:

$$\mathcal{H}_G = \frac{N}{4q^{1/2}} \left[ (2p^{ab}e_b^i)(2p_{ac}e_i^c) - \frac{1}{2}(2p^{ab}e_{bi}e_a^i)^2 - 4q({}^{(3)}R - 8q\lambda) \right] - N^b e_{bi} D_a (2p^{ac}e_c^i) + \Lambda_i L^i.$$

Si se descartan rotaciones internas y se considera la constante cosmológica nula, sigue que:

$$\mathcal{H}_G = Nq^{1/2} \left[ q^{-1} \left( p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}(p_a^a)^2 \right) - {}^{(3)}R \right] - 2N_b D_a p^{ab}. \quad (2.6.79)$$

Note que la Ec. (2.6.79) corresponde con el Hamiltoniano encontrado en la formulación ADM en términos de la métrica (Ec. (2.3.15) ).

# Capítulo 3

## Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Formalismo de Ashtekar (1986)

### 3.1. Introducción

La dinámica de la RG es generada por las constricciones. Esto significa que las 6 ecuaciones de Einstein que describen la evolución temporal pueden obtenerse calculando los paréntesis de Poisson de la 3-métrica y su momento conjugado con un Hamiltoniano que es una combinación lineal de las constricciones, i.e., cantidades que deben anularse en el espacio fase físico debido a las otras 4 ecuaciones de Einstein.

Uno de los problemas actuales en física teórica es la cuantización canónica de la gravedad. Si se pretende cuantizar basándose en el formalismo de ADM surgen problemas tanto conceptuales como técnicos. Los problemas *conceptuales* son el problema del producto interno y del tiempo. Muchos de los problemas *técnicos* en gravedad canónica cuántica giran alrededor de las constricciones.

A mediados de la década de 1980, Abhay Ashtekar (y otros) desarrolló una nueva formulación canónica en términos de **nuevas variables** para describir la RG, con las cuales las constricciones se simplifican radicalmente [9, 10]. Quizá la característica clave de la formulación de Ashtekar para gravedad canónica es que puede usarse una conexión espacial  $SO(3)$  compleja como coordenada para el espacio fase gravitacional, aunque en su artículo original Ashtekar usó espinores  $SU(2)$  [9]. Se puede pasar de la representación métrica ADM extendida a tríadas a una representación de conexión. Por tanto, las nuevas variables acercan mucho más la estructura matemática de la RG a las teorías de Yang-Mills. Como un resultado, se pueden aplicar las técnicas e ideas de las teorías de norma (gauge) en gravedad. Puede ser que la técnica más usada sea el uso de las **variables de lazo** (loop) en la cuantización canónica no perturbativa de la gravedad [20]. Hay desde luego un precio a pagar por esta nueva formulación de la RG y éste es que las conexiones autoduales son complejas.

### 3.2. El Formalismo de Palatini

La acción de Palatini para la RG es simplemente la acción de Einstein-Hilbert, Ec. (1.3.2), reescrita de tal forma que no sea una función de la métrica, sino una función de una conexión y

un campo de marcos. Aquí, su importancia principal será como un paso previo para la discusión de las **nuevas variables** de Ashtekar para la RG.

En la Sección 4.6 ya se ha abordado el concepto de campo de marcos y se han encontrado relaciones entre la métrica y los marcos. Además del campo de marcos, el otro ingrediente en el formalismo de Palatini es una conexión en el haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$ . Por analogía con la definición de una conexión que preserva métrica, se dice que una conexión  $D$  sobre el haz  $M \times \mathbb{R}^n$  es una conexión de Lorentz si:

$$v\eta(s, s') := \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s'). \quad (3.2.1)$$

Esto es lo mismo que ser una conexión  $SO(n, 1)$  en el sentido de la teoría de norma. Note que no tiene sentido preguntar si una conexión en  $M \times \mathbb{R}^n$  es libre de torsión. Por tanto, no hay conexión de Levi-Civita en  $M \times \mathbb{R}^n$ . Sin embargo, hay una conexión de Lorentz que es especialmente agradable, la conexión plana estandar  $D^0$ , dada por:

$$D_v^0 s = v(s^I)\xi_I. \quad (3.2.2)$$

Se puede escribir cualquier conexión como  $D^0 + A$  para algún potencial vectorial  $A$ , que es una 1-forma con valores en  $End(\mathbb{R}^n)$  sobre  $M$ ,

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I)\xi_J. \quad (3.2.3)$$

Note que  $D$  es compatible con la métrica interna  $\eta_{IJ}$ , y que:

$$D_\mu \eta_{IJ} = \partial_\mu \eta_{IJ} + A_{\mu I}^K \eta_{KJ} + A_{\mu J}^K \eta_{IK} = (A_{\mu IJ} + A_{\mu JI}) = A_{\mu(IJ)} = 0,$$

es decir,  $A_{\mu IJ}$  es antisimétrico en sus índices internos. Entonces, una conexión  $D$  en  $M \times \mathbb{R}^n$  es una conexión de Lorentz precisamente cuando:

$$A_\mu^{IJ} = -A_\mu^{JI}, \quad (3.2.4)$$

que es simplemente una forma de decir que  $A_\mu$  vive en el álgebra de Lie Lorentziana  $so(n, 1)$ . La 2-forma de curvatura interna  $F_{\mu\nu}^{IJ}$  de la conexión  $D$  se define por:

$$2D_{[\mu} D_{\nu]} \lambda_I := F_{\mu\nu I}^J \lambda_J, \quad (3.2.5)$$

donde  $\lambda_I$  es un covector de Lorentz arbitrario y  $F_{\mu\nu}^{IJ}$  puede expresarse, en términos de los coeficientes de la conexión de Lorentz como:

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{IJ} + A_{\mu K}^I A_{\nu}^{KJ} - A_{\nu K}^I A_{\mu}^{KJ} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{IJ} + [A_\mu, A_\nu]^{IJ}. \quad (3.2.6)$$

Se verifica fácilmente que si  $A$  es una conexión de Lorentz entonces:

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = -F_{\nu\mu}^{IJ} = -F_{\mu\nu}^{JI}. \quad (3.2.7)$$

Ahora, suponga que se tiene tanto el marco  $e$  como una conexión de Lorentz  $D$ . Se puede usar el marco para transferir la conexión de Lorentz del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  al haz tangente  $TM$ . Es decir,

$$\tilde{\nabla}_u v := e(D_u(e^{-1}(v))), \quad (3.2.8)$$

donde  $u, v \in X(M)$ , y en componentes esto implica,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha := \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu = e((\partial_\mu e_\nu^I + A_{\mu J}^I e_\nu^J)\xi_I) = (\partial_\mu e_\nu^I + A_{\mu J}^I e_\nu^J)e_I^\alpha \partial_\alpha, \quad (3.2.9)$$

y por lo tanto,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = (\partial_\mu e_\nu^I + A_{\mu J}^I e_\nu^J)e_I^\alpha. \quad (3.2.10)$$

Se suele llamar a  $\tilde{\nabla}$  la **imitación de la conexión de Levi-Civita** y a  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$  la **imitación de los símbolos de Christoffel** [3, 21].

Note que:

$$\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma g_{\gamma\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^\gamma g_{\nu\gamma} = \partial_\mu (e_{\nu J} e_\sigma^J) - g_{\gamma\sigma} e_I^\gamma (\partial_\mu e_\nu^I + A_{\mu J}^I e_\nu^J) - g_{\nu\gamma} e_I^\gamma (\partial_\mu e_\sigma^I + A_{\mu J}^I e_\sigma^J).$$

Así,

$$\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\sigma} = - (e_\sigma^I e_\nu^J A_{\mu IJ} + e_\sigma^J e_\nu^I A_{\mu IJ}) = 0,$$

donde se ha usado la antisimetría de  $A$ . Es decir,  $\tilde{\nabla}$  es compatible con la métrica de espacio-tiempo.

Se puede ir de  $TM$  a  $M \times \mathbb{R}^n$  usando el marco inverso, i.e.,

$$e^{-1} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n. \quad (3.2.11)$$

Note que se puede pensar a éste marco como una 1-forma con valores en  $\mathbb{R}^n$ , esto es, se define a  $e^{-1}$  como:

$$e^{-1} := e_\alpha^I \xi_I \otimes dx^\alpha, \quad (3.2.12)$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial. Además, se puede usar la conexión de Lorentz  $D$  para definir derivadas covariantes exteriores de formas diferenciales  $d_D$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

Luego, para la torsión de la conexión inducida, se tiene que:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha = 2 (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + A_{[\mu|J|}^I e_{\nu]}^J) e_I^\alpha = T_{\mu\nu}^\alpha, \quad (3.2.13)$$

donde  $T_{\mu\nu}^\alpha$  es el tensor de torsión, y este se puede expresar en términos de formas diferenciales como:

$$T^I = e_\rho^I T_{\mu\nu}^\rho \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu = 2e_\rho^I e_J^\rho (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^J + A_{[\mu|K|}^J e_{\nu]}^K) \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu = 2 (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + A_{[\mu|K|}^I e_{\nu]}^K) \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Así,

$$T^I = 2D_{[\mu} e_{\nu]}^I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu := d_D e^I. \quad (3.2.14)$$

Donde,  $T^I$  es la 2-forma de torsión,  $d_D$  es la derivada covariante exterior. A la Ec. (3.2.14) se le conoce como la primera *ecuación de estructura de Cartan*. Note que la conexión inducida no es necesariamente libre de torsión, de hecho en la acción de Palatini la condición libre de torsión  $T^I = 0$  es una de las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de ella.

**Teorema 1.**  $\tilde{\nabla}$  es libre de torsión si y sólo si  $d_D e^I = 0$ .

*Prueba.* Supóngase que  $\tilde{\nabla}$  es libre de torsión, sigue que:

$$\tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \partial_\mu = [\partial_\mu \partial_\nu] = 0, \Rightarrow T_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha = \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \partial_\mu = 0$$

De las Ecs. (3.2.9), (3.2.13) y (3.2.14) sigue que:

$$d_D e^I = 0.$$

Ahora, se asume que  $d_D e^I = 0$ . Luego:

$$T_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \partial_\mu = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_\mu \partial_\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \partial_\mu = [\partial_\mu, \partial_\alpha].$$

Se concluye que  $\tilde{\nabla}$  es libre de torsión.

**Proposición.** La conexión  $\tilde{\nabla}$  preserva métrica.

*Prueba.* Sean,

$$u = u^\alpha \partial_\alpha \quad , \quad s = e^{-1}v = e_\beta^I v^\beta \varepsilon_I \quad , \quad s' = e^{-1}w = e_\gamma^J w^\gamma \varepsilon_J. \quad (3.2.15)$$

Por un lado, note que:

$$u\eta(s, s') = u\eta(e_\beta^I v^\beta \varepsilon_I, e_\gamma^J w^\gamma \varepsilon_J) = u\eta_{IJ} e_\beta^I e_\gamma^J v^\beta w^\gamma.$$

Así,

$$u\eta(s, s') = ug(v, w). \quad (3.2.16)$$

Por el otro lado,

$$\begin{aligned} \eta(D_u s, s') + \eta(s, D_u s') &= u^\alpha [\eta(D_\alpha s, s') + \eta(s, D_\alpha s')] = u^\alpha [\eta(D_\alpha s^I \varepsilon_I, s^J \varepsilon_J) + \eta(s^I \varepsilon_I, D_\alpha s^J \varepsilon_J)] \\ &= u^\alpha [\eta((\partial_\alpha s^I + A_{\alpha L}^I s^L) \varepsilon_I, s^J \varepsilon_J) + \eta(s^I \varepsilon_I, (\partial_\alpha s^J + A_{\alpha M}^J s^M) \varepsilon_J)]. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $\eta$  es un mapa bilineal se tiene que:

$$\begin{aligned} \eta(D_u s, s') + \eta(s, D_u s') &= u^\alpha [\partial_\alpha s^I \eta(\varepsilon_I, \varepsilon_J) s^J + A_{\alpha L}^I s^L s^J \eta(\varepsilon_I, \varepsilon_J) \\ &\quad + s^I \partial_\alpha s^J \eta(\varepsilon_I, \varepsilon_J) + s^I A_{\alpha M}^J s^M \eta(\varepsilon_I, \varepsilon_J)] \\ &= u^\alpha [\eta_{IJ} e_\gamma^J w^\gamma \partial_\alpha v^\beta + (\partial_\alpha e_\beta^I e_\gamma^J + A_{\alpha L}^I e_\beta^L e_\gamma^J) v^\beta w^\gamma \\ &\quad + \eta_{IJ} e_\gamma^J v^\beta e_\beta^I \partial_\alpha w^\gamma + (\partial_\alpha e_\gamma^J e_\beta^I + A_{\alpha M}^J e_\gamma^M e_\beta^I) v_\beta w^\gamma] \\ &= u^\alpha (g_{\beta\gamma} w^\gamma \partial_\alpha v^\beta + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma v^\beta w^\gamma + g_{\gamma\beta} v^\beta \partial_\alpha w^\gamma + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta v_\beta w^\gamma), \end{aligned}$$

agrupando términos y usando la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , para subir algunos índices, y su bilinealidad, sigue que:

$$\eta(D_u s, s') + \eta(s, D_u s') = g(u(v^\beta) \partial_\beta + u^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta v^\gamma \partial_\beta, w) + g(v, u(w^\gamma) \partial_\gamma + u^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma w^\beta \partial_\gamma).$$

Así,

$$\eta(D_u s, s') + \eta(s, D_u s') = g(\tilde{\nabla}_u(v), w) + g(v, \tilde{\nabla}_u(w)). \quad (3.2.17)$$

De las Ecs. (3.2.16) y (3.2.17) se concluye que:

$$ug(v, w) = g(\tilde{\nabla}_u(v), w) + g(v, \tilde{\nabla}_u(w)). \quad (3.2.18)$$

Por lo tanto,  $\tilde{\nabla}$  preserva métrica.

Ahora, se sabe que la *mejor* conexión en  $TM$  es la de Levi-Civita ( $\nabla$ ), lo que hace interesante a la conexión de Levi-Civita es que preserva métrica y tiene torsión nula (o es libre de torsión).

**Teorema 2.**  $\tilde{\nabla} = \nabla$  si y sólo si  $\tilde{\nabla}$  es libre de torsión.

*Prueba.* La demostración del teorema se sigue de la proposición anterior.

Antes de discutir la acción de Palatini conviene encontrar la relación entre la curvatura sobre  $M \times \mathbb{R}^n$  y la curvatura del espaciotiempo definida por medio de la conexión inducida.

La curvatura de Riemann inducida (o la **imitación de la curvatura de Riemann**) se define por:

$$2\tilde{\nabla}_{[\mu} \tilde{\nabla}_{\nu]} v_\sigma := \tilde{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho v_\rho, \quad (3.2.19)$$

para un covector de espaciotiempo arbitrario  $v_\sigma$ . De la definición abstracta para la conexión inducida dada por la Ec. (3.2.8) se deduce que:

$$\tilde{\nabla}_u \tilde{\nabla}_v w = \tilde{\nabla}_u (e(D_v(e^{-1}(w)))) = e(D_u(e^{-1} \circ e(D_v(e^{-1}(w)))) = e(D_u D_v(e^{-1}(w))),$$

donde  $u, v, w$  son vectores de espaciotiempo arbitrarios. Luego, antisimetrizando se obtiene:

$$\tilde{R}(u, v)w = e(D_u D_v(e^{-1}(w))) - e(D_v D_u(e^{-1}(w))) = e(F(u, v)(e^{-1}(w))). \quad (3.2.20)$$

En términos de coordenadas locales da:

$$\tilde{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho \partial_\rho = e(F_{\mu\nu I}^J \xi_J e_\sigma^I) = F_{\mu\nu I}^J e_\sigma^I e_J^\rho \partial_\rho, \quad (3.2.21)$$

donde se ha usado  $F(\partial_\mu, \partial_\nu)(e^{-1}\partial_\sigma) = F_{\mu\nu}(e_\sigma^I \xi_I) = e_\sigma^I F_{\mu\nu I}^J \xi_J$ , y por lo tanto,

$$\tilde{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho = F_{\mu\nu I}^J e_\sigma^I e_J^\rho. \quad (3.2.22)$$

En resumen, se puede realizar una transferencia entre la curvatura interna y la del espaciotiempo por medio de contracciones apropiadas de índices con la tétrada y la cotétrada. Usando la Ec. (3.2.22) se puede expresar el tensor y el escalar de curvatura de Ricci en términos de contracciones de la curvatura interna y la tétrada como:

$$\tilde{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho = e_\sigma^I e_J^\rho F_{\mu\nu I}^J,$$

$$\tilde{R}_{\mu\sigma} = e_\sigma^I e_J^\rho F_{\mu\rho I}^J. \quad (3.2.23)$$

$$\tilde{R} = g^{\sigma\mu} e_\sigma^I e_J^\rho F_{\mu\rho I}^J = e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ}. \quad (3.2.24)$$

Ahora, es momento de describir la acción de Palatini. Ésta es básicamente la acción de Einstein-Hilbert disfrazada, pero se enfatiza de nuevo que, a diferencia que la de Einstein-Hilbert, no es una función de una métrica sobre  $M$ . De hecho, es una función de un campo de marcos  $e$  y de una conexión de Lorentz  $A$ . En el enfoque de Palatini, la métrica en  $M$  no es un campo fundamental; de hecho, es una función del campo de marco dada por  $g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J$ .

En coordenadas locales la **acción de Palatini** se escribe como:

$$S(A, e) = \int_M vol e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ}, \quad (3.2.25)$$

tal que  $vol = \sqrt{|\det g|} d^n x$ . En general, se puede establecer tal acción de la siguiente manera:

$$S(A, e) = \int_M e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ} = - \int_M e_I \wedge e_J \wedge \eta^{IA} \eta^{JB} F_{AB} = \frac{1}{2} \int_M \epsilon_{AB}{}^{CD} e^A \wedge e^B \wedge \star F_{CD}. \quad (3.2.26)$$

Así,

$$S(A, e^{-1}) = - \int_M tr(e^{-1} \wedge e^{-1} \wedge \star F), \quad (3.2.27)$$

donde  $\star$  es el operador estrella de Hodge [21, 27]. Lo que sigue es hallar las ecuaciones de movimiento en el formalismo de Palatini, i.e., variar la acción respecto al marco  $e$  y el potencial  $A$ . Primero para variaciones con respecto al potencial  $A$  y  $\delta e^{-1} = 0$ , se tiene que:

$$\delta S = - \int_M tr(e^{-1} \wedge e^{-1} \wedge \delta \star F) = - \int_M tr(e^{-1} \wedge e^{-1} \wedge \star \delta F).$$

**Teorema 3.** Suponga que  $\pi : E \rightarrow M$  es un haz vectorial. Sean  $M$  una variedad orientada  $n$ -dimensional y  $\omega$  una  $p$ -forma, y  $\mu$  una  $q$ -forma con valores en  $End(E)$ <sup>1</sup>. Si  $M$  tiene una métrica semi-Riemanniana y  $p + q = n$ , entonces,

$$\int_M tr(\omega \wedge \star \mu) = \int_M tr(\mu \wedge \star \omega). \quad (3.2.28)$$

*Prueba.* La demostración se da en [21].

Del Teorema 3 sigue que:

$$\delta S = - \int_M tr(\delta F \wedge \star(e^{-1} \wedge e^{-1})) = - \int_M tr(d_D \delta A \wedge \star(e^{-1} \wedge e^{-1})),$$

donde se ha usado el hecho de que  $\delta F = d_D \delta A$ , para la demostración de esta afirmación consultar también [21].

**Teorema 4.** Suponga que  $\pi : E \rightarrow M$  es un haz vectorial. Sean  $M$  una variedad orientada  $n$ -dimensional y  $\omega$  una  $p$ -forma, y  $\mu$  una  $q$ -forma con valores en  $End(E)$ . Si  $M$  es compacta y  $p + q = n - 1$ , entonces,

$$\int_M tr(d_D \omega \wedge \mu) = (-1)^{p+1} \int_M tr(\omega \wedge d_D \mu). \quad (3.2.29)$$

*Prueba.* La demostración se da en [21].

Usando el Teorema 4, sigue que:

$$\delta S = - \int_M tr(\delta A \wedge d_D \star(e^{-1} \wedge e^{-1})).$$

Note que:

$$d_D \star(e^{-1} \wedge e^{-1}) = d_D \left( \frac{1}{2!} \epsilon^{IJ}{}_{AB} e^A \wedge e^B \right) = \frac{1}{2!} \epsilon^{IJ}{}_{AB} d_D(e^A \wedge e^B).$$

Así,

$$\begin{aligned} d_D \star(e^{-1} \wedge e^{-1}) &= \frac{1}{2!} \epsilon^{IJ}{}_{AB} (d_D e^A \wedge e^B + (-1)^1 e^A \wedge d_D e^B) \\ &= \frac{1}{2!} \epsilon^{IJ}{}_{AB} (d_D e^A \wedge e^B - e^A \wedge d_D e^B), \end{aligned}$$

en donde se ha usado la definición del operador estrella de Hodge y la definición de la derivada exterior covariante (ver las Refs. [21, 27]). Entonces,

$$\delta S = - \int_M tr(\delta A \wedge \frac{1}{2!} \epsilon^{IJ}{}_{AB} (d_D e^A \wedge e^B - e^A \wedge d_D e^B)) = - \int_M tr(\delta A \wedge \epsilon^{IJ}{}_{[AB]} d_D e^A \wedge e^B).$$

De lo anterior se concluye que:

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \epsilon^{IJ}{}_{[AB]} d_D e^A \wedge e^B = 0 \Rightarrow d_D e^I = 0 \quad \forall e^{-1}. \quad (3.2.30)$$

Ahora, para variaciones de  $S$  con respecto al marco inverso  $e^{-1}$  y  $\delta A = 0$ , se tiene que:

$$\delta S = -\delta \int_M tr(e^{-1} \wedge e^{-1} \wedge \star F) = -\delta \int_M tr(F \wedge \star(e^{-1} \wedge e^{-1})).$$

---

<sup>1</sup>Dado un haz vectorial  $E$  sobre una variedad  $M$ , sea  $End(E)$ , el haz de endomorfismos de  $E$ , que denota el haz  $E \otimes E^*$ .

Así,

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F_{IJ} \wedge \epsilon^{IJ}{}_{AB} (\delta e^A \wedge e^B - e^A \wedge \delta e^B)) = - \int_M \text{tr}(F_{IJ} \wedge \epsilon^{IJ}{}_{AB} e^A \wedge \delta e^B),$$

por lo tanto,

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \epsilon^{IJ}{}_{AB} F_{IJ} \wedge e^A = 0. \quad (3.2.31)$$

En resumen, las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción de Palatini son:

$$\epsilon^{IJ}{}_{AB} F_{IJ} \wedge e^A = 0, \quad (3.2.32)$$

$$d_D e^I = 0. \quad (3.2.33)$$

Por supuesto, la primera ecuación, asumiendo que la cotétrada no sea degenerada, es equivalente a las ecuaciones de Einstein sujetas a la condición de torsión nula. Sin embargo, la diferencia con estas ecuaciones es que debido a que la tétrada nunca se utilizó explícitamente, también se puede considerar  $e^I = 0$ , como una solución a estas ecuaciones de movimiento. Pero, note que esta solución corresponde a un espaciotiempo de métrica degenerada por la Ec. (2.6.12) y, por lo tanto, el espacio de solución a las Ecs. (3.2.30) y (3.2.31) es estrictamente más grande que el espacio de solución para la versión métrica de las ecuaciones de Einstein, como se deducen de la acción de Einstein-Hilbert. Por supuesto, las métricas degeneradas del espaciotiempo dejan indefinida la acción de Einstein-Hilbert, y las ecuaciones de movimiento, ya que incluso no se pueden definir las componentes de la conexión de Levi-Civita sin la inversa de la métrica. El hecho de que las métricas degeneradas se permitan en este formalismo se ha utilizado para sugerir que el cambio de topología es factible en el (sector de gravedad pura del) formalismo de Palatini.

### 3.3. El Formalismo de Ashtekar

Mientras que la RG es claramente una teoría de norma en algún sentido, la relación precisa entre la RG y otras teorías de norma no es un tema simple. Ciertamente la noción de conexión y curvatura son cruciales en RG, pero en la formulación original de Einstein-Hilbert son derivados de una entidad más básica: la métrica. Por muchos años los investigadores han intentado inventar formulaciones de la RG en las que la conexión juegue un rol más fundamental y la métrica pase a segundo plano .

En el formalismo de Palatini, por ejemplo, la métrica es un concepto secundario, los campos básicos son una conexión de Lorentz en la **imitación del haz tangente**  $M \times \mathbb{R}^n$  y un marco  $e : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ . Es interesante lo que pasa cuando se intenta cuantizar canónicamente la gravedad usando el formalismo de Palatini. Ya que hay más variables se esperan más constricciones. De hecho, se encuentra que en adición a la constricciones escalar y de difeomorfismos, hay una constricción de ley de Gauss análoga a la del electromagnetismo y teorías de Yang-Mills. La forma de estas constricciones es mucho más simple que en la aproximación de ADM (ver por ejemplo [25]). En particular, se pueden escribir las constricciones de tal forma que sean polinomiales en términos de los campos que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas. Desafortunadamente, las constricciones no son cerradas bajo paréntesis de Poisson. Esto complica la cuantización de la teoría de tal forma que el formalismo de Palatini es un poco mejor que el de Einstein-Hilbert para propósitos de gravedad cuántica.

Las **nuevas variables** o **variables de Ashtekar** pueden pensarse como una modificación del formalismo de Palatini que evita este problema. La idea principal es tomar ventaja de las

características especiales del espaciotiempo de cuatro dimensiones y trabajar con la parte **auto-dual** de la conexión de Lorentz. Esta forma de pensar las cosas fue desarrollada por Samuel así como por Jacobson y Smolin, de forma independiente, alrededor de 1987, ver las Refs. [34, 35].

Usar la autodualidad en gravedad cuando la métrica es Lorentziana requiere trabajar con campos de valor complejo. Por lo tanto, se define el haz tangente complejificado de  $M$ , escrito  $\mathbb{C}TM$ , como el haz vectorial cuyas fibras en cada punto  $p \in M$  es el espacio vectorial  $\mathbb{C} \otimes T_pM$  que consiste de combinaciones lineales complejas de vectores tangentes. Hay también una imitación del haz tangente complejificado, es decir, el haz trivial  $M \times \mathbb{C}^4$ . Un **campo de marcos complejificado** es, entonces, un isomorfismo de haz vectorial,

$$e : M \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}TM. \quad (3.3.1)$$

Se define la métrica interna  $\eta$  sobre  $M \times \mathbb{C}^4$  por la misma fórmula que para  $M \times \mathbb{R}^4$ . Esto permite subir y bajar índices internos. Ahora, una conexión  $A$  en  $M \times \mathbb{C}^4$  es una 1-forma con valores en  $End(\mathbb{C}^4)$  en  $M$ .<sup>2</sup> Sus componentes se escriben como  $A_\alpha^{IJ}$ . Se dice que  $A$  es una conexión de Lorentz si,

$$A_\alpha^{IJ} = -A_\alpha^{JI}. \quad (3.3.2)$$

Debido a esta propiedad de antisimetría, se puede pensar a una conexión de Lorentz como una 1-forma con valores en  $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ .<sup>3</sup> Recuerde que el operador estrella de Hodge mapea 2-formas a 2-formas en 4 dimensiones, lo que representa la base de la simetría de dualidad. Hay un **operador estrella de Hodge interno** análogo, que mapea  $\Lambda^2\mathbb{C}^4$  en si mismo; denotado por  $*$ , y está dado por:

$$*T^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}T^{KL}, \quad (3.3.3)$$

para cualquier cantidad con dos índices internos superiores antisimétricos, análogo al Hodge ordinario, ver Refs. [21, 27].

En particular, se define el Hodge interno dual de una conexión de Lorentz por:

$$(*A)_\alpha^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}A_\alpha^{KL}. \quad (3.3.4)$$

En variedades Lorentzianas se tiene que:

$$(* \cdot *A)_\mu^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}(*A)_\mu^{KL} = \frac{1}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\epsilon^{KL}{}_{MN}A_\mu^{MN} = \frac{1}{4}(-4\delta_M^{[I}\delta_N^{J]})A_\mu^{MN} = -A_\mu^{IJ},$$

donde  $\epsilon^{KL}{}_{MN}$  es un símbolo totalmente antisimétrico con  $\epsilon^{0123} = 1$  y  $\epsilon_{0123} = -1$ . Sigue que:

$$*^2 = -1. \quad (3.3.5)$$

Por esta razón, se fuerza a usar conexiones complejas como variable autodual y se dice que una conexión de Lorentz es autodual, si y sólo si,

$$(*A)_\mu^{IJ} = iA_\mu^{IJ}, \quad (3.3.6)$$

y antiautodual, si y sólo si,

$$(*A)_\mu^{IJ} = -iA_\mu^{IJ}, \quad (3.3.7)$$

<sup>2</sup>Note que aquí se ha usado el término conexión para referirse al potencial vectorial tal como se suele acostumbrar.

<sup>3</sup> $\Lambda^2\mathbb{C}^4$  denota el espacio de las 2-formas en  $\mathbb{C}^4$ .

Esto, entonces, permite descomponer cualquier conexión en sus componentes auto y anti auto-dual como:

$$A_\mu^{IJ} = {}^+A_\mu^{IJ} + {}^-A_\mu^{IJ}, \quad (3.3.8)$$

donde,

$${}^+A_\mu^{IJ} := \frac{1}{2} \left( A_\mu^{IJ} - i(*A)_\mu^{IJ} \right), \quad (3.3.9)$$

y,

$${}^-A_\mu^{IJ} := \frac{1}{2} \left( A_\mu^{IJ} + i(*A)_\mu^{IJ} \right). \quad (3.3.10)$$

Sigue que  ${}^+A_\mu^{IJ}$  y  ${}^-A_\mu^{IJ}$  son auto y anti autodual respectivamente, ya que:

$$(*^-A)_\mu^{IJ} = \frac{1}{2} \left( *A_\mu^{IJ} + i(* \cdot *A)_\mu^{IJ} \right) = \frac{1}{2} \left( *A_\mu^{IJ} - iA_\mu^{IJ} \right) = -\frac{i}{2} \left( A_\mu^{IJ} + i * A_\mu^{IJ} \right) = -i^-A_\mu^{IJ},$$

similarmente para  ${}^+A_\mu^{IJ}$ . Note que:

$${}^+A^{IJ}(-B_{IJ}) = 0. \quad (3.3.11)$$

$${}^+A^{IJ}B_{IJ} = {}^+A^{IJ}({}^+B_{IJ}). \quad (3.3.12)$$

$$[A, B]^{IJ} = [{}^+A, {}^+B]^{IJ} + [{}^-A, {}^-B]^{IJ}, \quad (3.3.13)$$

donde  $A$  y  $B$  son conexiones de Lorentz arbitrarias.

En el formalismo autodual de la RG, uno de los dos campos básicos es una conexión de Lorentz autodual, i.e., una conexión de Lorentz  ${}^+A$  en  $M \times \mathbb{C}^4$  con:

$$*{}^+A = i{}^+A. \quad (3.3.14)$$

El otro campo básico es un campo de marcos complejo  $e : M \times \mathbb{C}^4 \rightarrow CTM$ . La acción en la formulación autodual se construye usando la curvatura de la conexión autodual de Lorentz, que se escribe como  ${}^+F$  y en coordenadas locales está dada por:

$${}^+F_{\mu\nu}^{IJ} = 2\partial_{[\mu}{}^+A_{\nu]}^{IJ} + [{}^+A_\mu, {}^+A_\nu]^{IJ}. \quad (3.3.15)$$

Como en el formalismo de Palatini, se puede usar el marco para definir una métrica  $g_{\mu\nu}$  en  $M$  por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{IJ}e_\mu^I e_\nu^J, \quad (3.3.16)$$

donde los coeficientes  $e_\mu^I$  se definen usando el campo de marcos inverso,

$$e^{-1}\partial_\mu = e_\mu^I \xi_I. \quad (3.3.17)$$

Sin embargo, ya que el marco es complejo, la métrica  $g_{\mu\nu}$  es ahora compleja.

La **acción autodual** está dada por:

$$S_{SD}({}^+A, e) = \int_M \text{vol} e_I^\mu e_J^\nu {}^+F_{\mu\nu}^{IJ}, \quad (3.3.18)$$

donde, la forma de volumen es:

$$\text{vol} = \sqrt{-\det g} d^4x, \quad (3.3.19)$$

$g_{\mu\nu}$  siendo definido en términos de  $e$  como en la Ec. (3.3.16). Es decir, note que:

$$\text{vol} = d^4x \sqrt{|\det g|} = d^4x \sqrt{|e^2|} = d^4x \sqrt{|e| \cdot |e|} = d^4x |e|,$$

para métricas Lorentzianas se tiene que  $|\det g| = -\det g$ , entonces,

$$e := |e| = \sqrt{-\det g} \Rightarrow \text{vol} = d^4x e. \quad (3.3.20)$$

Sigue que:

$$S_{SD}(^+A, e) = \int_M d^4x e e_I^\mu e_J^{\nu+} F_{\mu\nu}^{IJ}. \quad (3.3.21)$$

Antes de discutir las ecuaciones que se obtienen de la acción autodual, se dira algo más acerca de la autodualidad. Se puede definir el Hodge dual interno de la curvatura de una conexión en  $M \times \mathbb{C}^4$  como sigue,

$$(*F)_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL}, \quad (3.3.22)$$

y se dice que la curvatura es autodual si,

$$*F = iF. \quad (3.3.23)$$

**Proposición.** La curvatura de una conexión de Lorentz autodual en  $M \times \mathbb{C}^4$  es autodual.

*Prueba.* Sea  $F$  dado en coordenadas locales como en la Ec. (3.2.6), entonces,

$$(*F)_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} (2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{KL} + A_{\mu M}^K A_{\nu}^{ML} - A_{\nu M}^K A_{\mu}^{ML}) = 2\partial_{[\mu} *A_{\nu]}^{IJ} + *(A_{\mu M}^I A_{\nu}^{MJ}) - *(A_{\nu M}^I A_{\mu}^{MJ}).$$

Sigue que,

$$(*F)_{\mu\nu}^{IJ} = i 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{IJ} + i[A_{\mu}, A_{\nu}]^{IJ} = iF_{\mu\nu}^{IJ}.$$

Sin embargo, este hecho es tan importante que se debe explicar su razón de fondo. Dada un álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$  (una que es un espacio vectorial sobre los números reales), se puede convertir el espacio vectorial  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$  en un álgebra de Lie definiendo, para cualquier  $x, y \in \mathfrak{g}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$[x \otimes \alpha, y \otimes \beta] = [x, y] \otimes \alpha\beta. \quad (3.3.24)$$

El álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$  es llamada la complejificación de  $\mathfrak{g}$ . Ahora, toda álgebra de Lie compleja puede pensarse como un álgebra de Lie real si se ignora la habilidad de multiplicar sus elementos por números imaginarios. Si  $\mathfrak{g}$  viene de un álgebra de Lie de esta manera, resulta que  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \{x \otimes z : x \in \mathfrak{g}, z \in \mathbb{C}\}$  es isomorfa a la suma directa de dos copias de  $\mathfrak{g}$ . Note que, si  $\mathfrak{g}$  viene de un álgebra de Lie compleja entonces,

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \left\{ \frac{1}{2}(x \otimes 1 \pm ix \otimes i) : x \in \mathfrak{g} \right\}, \quad (3.3.25)$$

son subálgebras de Lie de  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ , que son isomorfas como álgebras de Lie a  $\mathfrak{g}$ . Además,  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$  es la suma directa de las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_{\pm}$ , i.e.,

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \quad (3.3.26)$$

ya que, para todo  $v \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ , existe  $(u, w) \in \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_-$ , tal que,

$$u + w = \frac{1}{2}(v \otimes 1 + iv \otimes i) + \frac{1}{2}(v \otimes 1 - iv \otimes i) = v,$$

y, también,  $\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{g}_- = \emptyset$ .

Ahora, una conexión de Lorentz en  $M \times \mathbb{C}^4$  es básicamente sólo una 1-forma con valores en  $\mathfrak{so}(3, 1) \otimes \mathbb{C}$ . Sin embargo,  $SL(2, \mathbb{C})$  es una cubierta doble<sup>4</sup> de  $SO_0(3, 1)$ . Esto implica

---

<sup>4</sup>Una cubierta doble es un mapa  $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_0(3, 1)$  que es dos a uno y sobreyectivo.

que las álgebras de Lie  $\mathfrak{so}_0(3, 1)$  y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  son isomorfas. Sigue que  $\mathfrak{so}_0(3, 1) \otimes \mathbb{C}$  es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$ . Como una consecuencia,  $\mathfrak{so}_0(3, 1) \otimes \mathbb{C}$  es una suma directa de dos subálgebras isomorfas a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , llamadas las partes autodual y antiautodual. Ya que una subálgebra de Lie es cerrada bajo corchete de Lie, si una conexión  ${}^+A$  es autodual, entonces también lo es su curvatura  ${}^+F$ . A partir de este punto de vista, es la existencia de la cubierta doble  $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_0(3, 1)$  la que hace a la autodualidad tan útil en gravedad de 4 dimensiones. La división de  $\Lambda^2\mathbb{C}^4$  en sus partes autodual y antiautodual corresponde a la división de  $\mathfrak{so}_0(3, 1) \otimes \mathbb{C}$  en dos subálgebras de Lie isomorfas a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Ya que la curvatura de una conexión de Lorentz autodual también es autodual (similarmente para el caso antiautodual) sigue que la acción compleja de Palatini se puede escribir como la suma de sus componentes autodual y antiautodual, i.e.,

$$S_{PAL}[e, A] = S_{SD}[e, {}^+A] + S_{ASD}[e, {}^-A], \quad (3.3.27)$$

el resultado a señalar es que sólo se necesita considerar la acción autodual (o equivalentemente la antiautodual) de forma separada para recuperar las ecuaciones de movimiento de la RG compleja.

Lo que sigue es variar la acción autodual, y exigir que:

$$\delta S_{SD} = 0. \quad (3.3.28)$$

Primero, para variaciones en la conexión, note que:

$$\begin{aligned} \delta^+ F_{\mu\nu}^{IJ} &= \partial_\mu \delta^+ A_\nu^{IJ} - \partial_\nu \delta^+ A_\mu^{IJ} + \delta({}^+A_{\mu K}^I {}^+A_\nu^{KJ}) - \delta({}^+A_{\nu K}^I {}^+A_\mu^{KJ}) \\ &= \partial_\mu \delta^+ A_\nu^{IJ} + {}^+A_{\mu K}^I \delta^+ A_\nu^{KJ} + {}^+A_{\mu K}^J \delta^+ A_\nu^{IK} - (\partial_\nu \delta^+ A_\mu^{IJ} + {}^+A_{\nu K}^I \delta^+ A_\mu^{KJ} + {}^+A_{\nu K}^J \delta^+ A_\mu^{IK}). \end{aligned}$$

Así,

$$\delta^+ F_{\mu\nu}^{IJ} = \mathcal{D}_\mu \delta^+ A_\nu^{IJ} - \mathcal{D}_\nu \delta^+ A_\mu^{IJ} = 2\mathcal{D}_{[\mu} \delta^+ A_{\nu]}^{IJ}. \quad (3.3.29)$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta S_{SD} &= \int_M d^4x e e_I^\mu e_J^\nu \delta({}^+F_{\mu\nu}^{IJ}) = \int_M d^4x e e_I^\mu e_J^\nu 2\mathcal{D}_{[\mu} \delta^+ A_{\nu]}^{IJ} \\ &= 2 \int_M d^4x \partial_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \delta^+ A_\nu^{IJ}] - 2 \int_M d^4x \mathcal{D}_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]})] \delta^+ A_\nu^{IJ}, \end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[\mu} \delta^+ A_{\nu]}^{IJ} e e_I^\mu e_J^\nu &= \mathcal{D}_{[\mu} \delta^+ A_{\nu]}^{IJ} e^+(e_I^\mu e_J^\nu) = \partial_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \delta^+ A_\nu^{IJ}] - \left\{ \partial_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]})] - {}^+A_{\mu I}^K e^+(e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) \right. \\ &\quad \left. - {}^+A_{\mu J}^K e^+(e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}) \right\} \delta^+ A_\nu^{IJ}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{D}_{[\mu} \delta^+ A_{\nu]}^{IJ} e e_I^\mu e_J^\nu = \partial_\mu [e^+(e_I^\mu e_J^\nu) \delta^+ A_\nu^{IJ}] - \mathcal{D}_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]})] \delta^+ A_\nu^{IJ},$$

donde  $\mathcal{D}$  es compatible con  ${}^+A$ . Note que se ha forzado a usar la parte autodual de  $e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}$  ya que se requiere que las variaciones de  $\delta^+ A_\mu^{IJ}$  sean autoduales, ver por ejemplo la Ec. (3.3.12).

Ahora, al despreciar términos de frontera se tiene que:

$$\delta S_{SD} = -2 \int_M d^4x \mathcal{D}_\mu [e^+(e_I^{[\mu} e_J^{\nu]})] \delta^+ A_\nu^{IJ},$$

por lo tanto,

$$\delta S_{SD} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_\mu \left[ e^+ (e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \right] = 0. \quad (3.3.30)$$

**Proposición.** La ecuación (3.3.30) implica que  $\mathcal{D}_\mu$  es la parte autodual de la derivada covariante generalizada única libre de torsión  $\nabla_\mu$  compatible con  $e_I^\mu$ .

*Prueba.* Sea  $\Gamma_{aI}^J$  el símbolo de Christoffel interno de  $\nabla_\mu$ . Se define la parte dual  ${}^+\nabla_\mu$  de  $\nabla_\mu$  por,

$${}^+\nabla_\mu v_I := \partial_\mu v_I + {}^+ \Gamma_{\mu I}^J v_J, \quad (3.3.31)$$

donde  ${}^+\Gamma_{\alpha I}^J$  es la parte autodual de  $\Gamma_{\mu I}^J$ . La diferencia entre  $\mathcal{D}_\mu$  y  ${}^+\nabla_\mu$  se caracteriza por un campo tensorial  ${}^+C_{\mu I}^J$  definido por:

$$\mathcal{D}_\mu v_I =: {}^+ \nabla_\mu v_I + {}^+ C_{\mu I}^J v_J. \quad (3.3.32)$$

Note que:

$$\mathcal{D}_\mu v_I = \partial_\mu v_I + {}^+ A_{\mu I}^J v_J = \partial_\mu v_I + {}^+ \Gamma_{\mu I}^J v_J + {}^+ C_{\mu I}^J v_J.$$

Entonces,

$${}^+ A_{\mu I}^J = {}^+ \Gamma_{\mu I}^J + {}^+ C_{\mu I}^J. \quad (3.3.33)$$

De la Ec. (3.3.32) sigue que:

$${}^+\nabla_\mu \left[ e^+ (e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \right] + e \left[ {}^+ C_{\mu I}^{K+} (e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) + {}^+ C_{\mu J}^{K+} (e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}) \right] = 0 \quad (3.3.34)$$

Además,

$$\nabla_\mu v_I = \partial_\mu v_I + ({}^+ \Gamma_{\mu I}^J + {}^- \Gamma_{\mu I}^J) v_J.$$

Así,

$${}^+\nabla_\mu v_I = \nabla_\mu v_I - {}^- \Gamma_{\mu I}^J v_J, \quad (3.3.35)$$

donde  ${}^- \Gamma_{\mu I}^J$  es la parte antiautodual del símbolo de Christoffel interno  $\Gamma_{aI}^J$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \left[ e^+ (e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \right] - e \left[ -\Gamma_{\mu I}^{K+} (e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) + {}^- \Gamma_{\mu J}^{K+} (e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}) \right] \\ + e \left[ {}^+ C_{\mu I}^{K+} (e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) + {}^+ C_{\mu J}^{K+} (e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Luego, se tiene que:

$$\nabla_\mu \left[ e^+ (e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) \right] = \nabla_\mu \left[ e \frac{1}{2} \left( e_I^{[\mu} e_J^{\nu]} - \frac{1}{2} i \epsilon_{IJ}{}^{KL} e_K^{[\mu} e_L^{\nu]} \right) \right] = 0,$$

ya que  $\nabla_\mu$  es compatible con  $e_I^\nu$ , en particular  $\nabla_\mu e_I^\mu = 0$ , y  $\nabla_\mu e = 0$ . Además,

$$\begin{aligned} [{}^+ C_{\mu, e^{[\mu} e^{\nu]}}]_{IJ} &= \frac{1}{2} \left( [{}^+ C_{\mu, e^{[\mu}}]_I e_J^{\nu]} + e_I^\mu [{}^+ C_{\mu, e^{\nu]}}]_J \right) \\ &= ({}^+ C_{\mu I}^K e_K^{[\mu} - {}^+ C_{\mu K}^I e_I^{[\mu} e_J^{\nu]}) + e_I^\mu ({}^+ C_{\mu J}^K e_K^{\nu]} - {}^+ C_{\mu K}^J e_J^{\nu]}), \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que  $C_{\mu K}^K = 0$ , ya que  $C_{\mu IJ} = C_{\mu[IJ]}$ . Entonces,

$$[{}^+ C_{\mu, e^{[\mu} e^{\nu]}}]_{IJ} = {}^+ C_{\mu I}^K e_K^{[\mu} e_J^{\nu]} + {}^+ C_{\mu J}^K e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}. \quad (3.3.37)$$

Similarmente,

$$[{}^+ C_{\mu, *} (e^{[\mu} e^{\nu]})]_{IJ} = {}^+ C_{\mu I}^K * (e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) + {}^+ C_{\mu J}^K * (e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}). \quad (3.3.38)$$

De las Ecs. (3.3.37) y (3.3.38) sigue que:

$$[{}^+ C_{\mu, +} (e^{[\mu} e^{\nu]})]_{IJ} = {}^+ C_{\mu I}^{K+} (e_K^{[\mu} e_J^{\nu]}) + {}^+ C_{\mu J}^{K+} (e_I^{[\mu} e_K^{\nu]}). \quad (3.3.39)$$

De forma análoga se puede mostrar que:

$$\left[ -\Gamma_{\mu, +} (e^{[\mu} e^{\nu]}) \right]_{IJ} = -\Gamma_{\mu I}{}^{K+} (e_K^{[\mu} e^{\nu]}) + -\Gamma_{\mu J}{}^{K+} (e_I^{[\mu} e^{\nu]}). \quad (3.3.40)$$

Entonces, la ecuación (3.3.36) se puede escribir como,

$$- \left[ -\Gamma_{\mu, +} (e^{[\mu} e^{\nu]}) \right]_{IJ} + \left[ +C_{\mu, +} (e^{[\mu} e^{\nu]}) \right]_{IJ} = 0. \quad (3.3.41)$$

Pero, el primer conmutador se anula ya que  $-\Gamma_{\mu IJ}$  es antiautodual mientras que  $+(e^{[\mu} e^{\nu]})$  es autodual; en el segundo conmutador,  $+(e^{[\mu} e^{\nu]})$  se puede remplazar por  $e^{[\mu} e^{\nu]}$ , ver Ecs. (3.3.12) y (3.3.13). Por lo tanto,

$$+C_{\mu I}{}^K e_K^{[\mu} e^{\nu]} + +C_{\mu J}{}^K e_I^{[\mu} e^{\nu]} = 0. \quad (3.3.42)$$

Lo que sigue es verificar que  $+C_{\mu I}^J = 0$ .

Se define el campo tensorial  $S_{\mu\nu\gamma}$  por medio de,

$$S_{\mu\nu\gamma} := +C_{\mu IJ} e_\nu^I e_\gamma^J, \quad (3.3.43)$$

tal que  $+C_{\mu[IJ]} \leftrightarrow S_{\mu[\nu\gamma]}$ . Note que:

$$e_\nu^I e_\sigma^J (+C_{\mu I}{}^K e_K^{[\mu} e^{\nu]} + +C_{\mu J}{}^K e_I^{[\mu} e^{\nu]}) = +C_{\sigma K}{}^K - 2+C_{\mu J}{}^K e_K^\mu e_\sigma^J + 4+C_{\mu J}{}^K e_\sigma^J e_K^\mu = 0.$$

Así,

$$+C_{\sigma K}{}^K + 2S_{\mu\sigma}^\mu = 0 \Rightarrow S_{\mu\sigma}^\mu = 0, \quad (3.3.44)$$

ya que  $+C_{\sigma K}{}^K = 0$ . De las Ecs. (3.3.41) y (3.3.44), se tiene que:

$$+C_{\mu I}{}^K e_K^\nu e_J^\mu - +C_{\mu J}{}^K e_K^\nu e_I^\mu = 0. \quad (3.3.45)$$

Además,

$$e_\sigma^I e_\gamma^J (+C_{\mu I}{}^K e_K^\nu e_J^\mu - +C_{\mu J}{}^K e_K^\nu e_I^\mu) = \delta_\gamma^\mu + C_{\mu I}{}^K e_\sigma^I e_K^\nu - \delta_\sigma^\mu + C_{\mu J}{}^K e_K^\nu e_\gamma^J = S_{\gamma\sigma}{}^\nu - S_{\sigma\gamma}{}^\nu = 0.$$

Así,

$$S_{[\sigma\gamma]}{}^\nu = 0 \therefore S_{\mu\nu\sigma} = S_{(\mu\nu)\sigma}, \quad (3.3.46)$$

i.e.,  $S$  es simétrico en los dos primeros índices y antisimétrico en los dos últimos. De aquí,

$$S_{\mu\nu\sigma} = S_{\mu[\nu\sigma]} = \frac{1}{2}(S_{\mu\nu\sigma} - S_{\mu\sigma\nu}) = \frac{1}{2}(S_{\mu[\nu\sigma]} - S_{[\nu|\mu|\sigma]}) = 0,$$

esto implica que,

$$C_{\mu I}^J = 0, \quad (3.3.47)$$

ya que  $e$  es invertible. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}_\mu = +\nabla_\mu \Rightarrow +A_{\mu I}^J = +\Gamma_{\mu I}^J, \quad (3.3.48)$$

i.e.,  $\mathcal{D}_\mu$  es la parte autodual de la derivada covariante generalizada única libre de torsión  $\nabla_\mu$ .

La proposición anterior implica que la parte autodual del tensor de Riemann de  $g_{\mu\nu}$ ,

$$+R^\mu{}_{\nu\gamma}{}^\sigma = \frac{1}{2}(R^\mu{}_{\nu\gamma}{}^\sigma - i(*R)^\mu{}_{\nu\gamma}{}^\sigma), \quad (3.3.49)$$

se relaciona a  ${}^+F$  por el campo de marco como sigue,

$${}^+R^\mu{}_{\nu\gamma}{}^\sigma = {}^+F^{IJ}e_I^\mu e_J^\sigma. \quad (3.3.50)$$

$${}^+R_{\mu\nu} = {}^+R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu} = {}^+F_{\mu\gamma}^{IJ}e_I^\gamma e_{\nu J}. \quad (3.3.51)$$

$${}^+R := {}^+R^\mu{}_\mu = {}^+F_{\mu\gamma}^{IJ}e_I^\gamma e_J^\mu. \quad (3.3.52)$$

Segundo, variando respecto al marco se tiene que,

$$\delta S_{SD} = \delta \int_M \text{vol} e_I^\mu e_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} = 2 \int_M \text{vol} \left( e_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\mu^I e_K^\gamma e_L^\delta + F_{\gamma\delta}^{KL} \right) \delta e_I^\mu,$$

donde se ha usado que  $\delta \text{vol} = -e_\gamma^K \delta e_K^\gamma \text{vol}$ . De las Ecs. (3.3.51) y (3.3.52), sigue que:

$$\delta S_{SD} = 2 \int_M \text{vol} \left( {}^+R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^+R g_{\mu\nu} \right) \eta^{IJ} e_J^\nu \delta e_I^\mu. \quad (3.3.53)$$

Se concluye que:

$$\delta S_{SD} = 0 \Leftrightarrow {}^+R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^+R g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.54)$$

Es decir, se han encontrado las ecuaciones de Einstein autoduales. Sin embargo, usando las simetrías del tensor de Riemann, estas ecuaciones autoduales son equivalentes a las ecuaciones de Einstein del vacío. Esto es:

$$g^{\mu\nu} \left( {}^+R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^+R g_{\mu\nu} \right) = {}^+R - 2{}^+R = 0,$$

entonces,

$${}^+R = 0 \Rightarrow {}^+R_{\mu\nu} = {}^+R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu} = 0.$$

Luego,

$${}^+R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu} = \frac{1}{2} (R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu} - i(*R)^\gamma{}_{\mu\gamma\nu}) = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\delta\sigma} R^\gamma{}_{\delta\gamma\sigma},$$

pero ya que  $R_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ , se sigue que:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.55)$$

Note que se han recuperado las ecuaciones de Einstein del vacío para métricas complejas sobre el espaciotiempo  $M$ . Para obtener la RG ordinaria, se necesita imponer **condiciones de realidad** sobre los marcos complejos que hacen a  $g_{\mu\nu}$  de valor real.

### 3.4. Transformada de Legendre

Para poner la teoría autodual para gravedad compleja 3 + 1 en forma Hamiltoniana, se procede de forma análoga a como se hizo en el formalismo ADM. Sin embargo, ya que la métrica del espaciotiempo  $g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J$  ahora es compleja, sólo se puede asumir que  $M$  es topológicamente  $\Sigma \times \mathbb{R}$  para alguna subvariedad  $\Sigma$  y se asume que existe una función real  $t$  cuyas superficies  $t = \text{cte.}$  folian  $M$  (No se puede asumir que  $\Sigma$  es espacial, ya que la signatura de una métrica compleja no está definida). Aún se puede introducir un campo vectorial de flujo real (que satisface  $t^\mu (dt)_\mu = 1$ ), y una normal covariante unitaria  $n_\mu$  a las superficies  $t = \text{cte.}$  que satisface  $n_\mu n^\mu = -1$ . (se puede elegir  $-1$  para la normalización de  $n_\mu$  ya que se permite que  $n_\mu$  sea complejo.) Note que  $n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu$  es el campo vectorial asociado a  $n^\mu$ , y se relaciona a la función lapso compleja  $N$  y al vector de corrimiento  $N^a$  por medio de:

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu, \quad (3.4.1)$$

con  $N^\mu n_\mu = 0$ .

Se puede definir la métrica espacial como:

$$q_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (3.4.2)$$

Este tensor es espacial ya que cuando se contrae cualquier índice por  $n^\mu$  el resultado es cero. Por ejemplo,

$$q_{\mu\nu} n^\nu = g_{\mu\nu} n^\nu + n_\mu n_\nu n^\nu = n_\mu - n_\mu = 0.$$

Usando esto se tiene que  $q_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n^\mu n_\nu$  proyecta campos vectoriales sobre sus componentes tangentes a  $\Sigma_t$ , ya que para vectores ortogonales  $q_\mu^\nu n^\mu = 0$ , y para vectores tangentes es la identidad,

$$q_\mu^\nu N^\mu = (\delta_\mu^\nu + n^\mu n_\nu) N^\mu = N^\nu,$$

donde se ha usado  $N^\mu n_\mu = 0$ . Se sigue que cualquier tensor espaciotemporal puede proyectarse a su versión espacial contrayendo con  $q_\mu^\nu$  en todos sus índices libres, i.e.,

$$T_{\text{espacial}}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} = q_{\alpha_1}^{\mu_1} \dots q_{\alpha_p}^{\mu_p} q_{\nu_1}^{\beta_1} \dots q_{\nu_q}^{\beta_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} \quad (3.4.3)$$

La interpretación de  $q_{\mu\nu}$  es que es la métrica espacial sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , además, es equivalente a  $g_{\mu\nu}$  en todos los vectores tangente a la hipersuperficie pero degenerada en vectores perpendiculares, proporcional a  $n^\mu$ .

Se puede definir la proyección espacial de la tetraada por:

$$E_I^\mu := e_I^\nu (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu) = e_I^\mu + n^\mu n_I, \quad (3.4.4)$$

donde  $n_I := e_I^\mu n_\mu$ , es por construcción un covector interno temporal de longitud unitaria. Note que:

$$E_I^\mu n_\mu = (e_I^\mu + n^\mu n_I) n_\mu = n_I - n_I = 0,$$

y,

$$E_I^\mu n^I = (e_I^\mu + n^\mu n_I) n_I = e_I^\mu e_I^I n^\nu + n^\mu n_I e^{\nu I} n^\nu = n^\mu - n^\mu = 0,$$

así que se puede pensar a  $E_I^\mu$  como un ente espacial (i.e, como una triada).

De la Ec. (3.4.4) se tiene que:

$$e_I^\mu = E_I^\mu - n^\mu n_I, \quad (3.4.5)$$

entonces,

$$\begin{aligned} S_{SD}(^+A, e) &= \int_M d^4 x e (E_I^\mu - n^\mu n_I) (E_J^\nu - n^\nu n_J) e_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ}, \\ S_{SD}(^+A, e) &= \int_M d^4 x e (E_I^\mu E_J^\nu - 2E_I^\mu n^\nu n_J + n^\mu n^\nu n_I n_J) + F_{\mu\nu}^{IJ}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $+F_{\mu\nu}^{IJ} = +F_{\nu\mu}^{JI}$ . Note que:

$$n^\mu n^\nu n_I n_J + F_{\mu\nu}^{IJ} = -n^\mu n^\nu n_I n_J + F_{\nu\mu}^{IJ} \Rightarrow n^\mu n^\nu n_I n_J + F_{\mu\nu}^{IJ} = 0.$$

Así,

$$S_{SD}(^+A, e) = \int_M d^4 x e \left( E_I^\mu E_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} - 2E_I^\mu n^\nu n_J + F_{\mu\nu}^{IJ} \right). \quad (3.4.6)$$

Ya que  $+F_{\mu\nu}^{IJ}$  es autodual se tiene que:

$$(*F)_{\mu\nu}^{IJ} = iF_{\mu\nu}^{IJ} \Rightarrow F_{\mu\nu}^{IJ} = -\frac{i}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL}. \quad (3.4.7)$$

Sigue que:

$$\begin{aligned} S_{SD}(+A, e) &= \int_M d^4x e \left( E_I^\mu E_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} + i E_I^\mu n^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} \right), \\ &= \int_M d^4x e \left( E_I^\mu E_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} + i E_I^\mu N^{-1} t^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} - i E_I^\mu N^{-1} N^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} \right). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Note que:

$$\begin{aligned} \int_M d^4x e i E_I^\mu N^{-1} t^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} &= i \int_M d^4x n_J N^{-1} \epsilon^{IJ}_{KL} t^\nu E_I^\mu \left[ +A_\mu, +A_\nu \right]^{KL} \\ &+ i \int_M d^4x e n_J N^{-1} \left[ \partial_\mu \left( +A_\nu^{KL} E_I^\mu t^\nu \epsilon^{IJ}_{KL} \right) - +A_\nu^{KL} \partial_\mu \left( E_I^\mu t^\nu \epsilon^{IJ}_{KL} \right) - \left( \partial_\nu + A_\mu^{KL} \right) t^\nu \epsilon^{IJ}_{KL} E_I^\mu \right] \\ &= i \int_M d^4x n_J N^{-1} \epsilon^{IJ}_{KL} t^\nu E_I^\mu \left[ +A_\mu, +A_\nu \right]^{KL} + i \int_M d^4x e n_J N^{-1} \left[ \partial_\mu \left( t^\nu + A_\nu^{KL} \right) E_I^\mu \epsilon^{IJ}_{KL} \right. \\ &\left. - \epsilon^{IJ}_{KL} \left( +A_\nu^{KL} \right) E_I^\mu \partial_\mu t^\nu - \left( \partial_\nu + A_\mu^{KL} \right) t^\nu \epsilon^{IJ}_{KL} E_I^\mu \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_M d^4x e i E_I^\mu N^{-1} t^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} &= -i \int_M d^4x e n_J \epsilon^{IJ}_{KL} E_I^\mu N^{-1} \left[ \left( \partial_\nu + A_\mu^{KL} \right) t^\nu + +A_\nu^{KL} \partial_\mu t^\nu \right. \\ &\left. - \left( \partial_\mu \left( t^\nu + A_\nu^{KL} \right) + +A_{\mu M}^K t^\nu + A_\nu^{ML} + t^\nu + A_{\nu M}^K + A_\mu^{LM} \right) \right], \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que  $+A_\mu^{IJ} = -+A_\mu^{JI}$ . Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} &= \partial_\mu \left( t^\nu + A_\nu^{KL} \right) + +A_{\mu M}^K t^\nu + A_\nu^{ML} + t^\nu + A_{\nu M}^K + A_\mu^{LM}. \\ \mathcal{L}_{t^\nu} + A_\mu^{KL} &= t^\nu \partial_\nu + A_\mu^{KL} + +A_\nu^{KL} \partial_\mu t^\nu. \end{aligned}$$

Sigue que:

$$\int_M d^4x e i E_I^\mu N^{-1} t^\nu n_J \epsilon^{IJ}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} = -i \int_M d^4x e \epsilon^I_{KL} E_I^\mu N^{-1} \left[ \mathcal{L}_{t^\nu} + A_\mu^{KL} - \mathcal{D}_\mu \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} \right], \quad (3.4.9)$$

donde se ha definido  $\epsilon^I_{KL} := n_J \epsilon^{IJ}_{KL}$ . Sustituyendo la Ec. (3.4.9) en la Ec. (3.4.8), se obtiene que:

$$\begin{aligned} S_{SD}(+A, e) &= \int_M d^4x e \left[ E_I^\mu E_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} - i \epsilon^I_{KL} E_I^\mu N^{-1} \left( \mathcal{L}_{t^\nu} + A_\mu^{KL} - \mathcal{D}_\mu \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} \right) \right. \\ &\left. - i E_I^\mu N^{-1} N^\nu \epsilon^I_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} \right]. \end{aligned}$$

Ahora,

$$e \mathcal{D}_\mu \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} E_I^\mu \epsilon^I_{KL} = \partial_\mu \left[ e \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} E_I^\mu \epsilon^I_{KL} \right] - \mathcal{D}_\mu \left( e E_I^\mu \epsilon^I_{KL} \right) \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S_{SD}(+A, e) &= \int_M d^4x e \left[ E_I^\mu E_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} - i \epsilon^I_{KL} E_I^\mu N^{-1} \mathcal{L}_{t^\nu} + A_\mu^{KL} \right. \\ &\left. + i e^{-1} N^{-1} \left( \partial_\mu \left( e \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} E_I^\mu \epsilon^I_{KL} \right) - \mathcal{D}_\mu \left( e E_I^\mu \epsilon^I_{KL} \right) \left( t^\nu + A_\nu \right)^{KL} \right) - i E_I^\mu N^{-1} N^\nu \epsilon^I_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} \right]. \end{aligned}$$

Ya que se asume que  $M$  es difeomorfa a  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , el difeomorfismo, denotado por  $\phi$ , significa que se puede definir una familia 1-paramétrica de encajamientos de  $\Sigma$  en  $M$  como sigue:

$$\phi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$\phi_\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma_\tau \subset M$$

$$\phi_\tau : \xi \mapsto x = \phi(\xi) := \phi(\xi, \tau), \quad (3.4.10)$$

tener estas relaciones significa que se puede hacer el pullback de campos tensoriales contravariantes en  $M$  a  $\Sigma$  por medio de estos encajamientos.

Se puede emplear los encajamientos  $\phi_t$  para retroceder las ecuaciones espaciales a la variedad abstracta  $\Sigma$ , esto permite escribir  $S_{SD}$  como una integral sobre  $\Sigma \times \mathbb{R}$ . Esto es:

$$E_{aI} = X_a^\mu E_{\mu I} = X_a^\mu (e_{\mu I} + n_\mu n_I) = e_{aI} + X_a^\mu n_\mu n_I = e_{aI}, \quad (3.4.11)$$

ya que  $n_a = X_a^\mu n_\mu = 0$ . Es decir,  $E_{aI}$  transforma como una tríada.

La métrica inducida  $q_{ab}$  en  $\Sigma$  está dada por:

$$q_{ab} = X_a^\mu X_b^\nu g_{\mu\nu} = X_a^\mu X_b^\nu (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) = X_a^\mu X_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.4.12)$$

donde se ha usado el hecho de que  $n_a := X_a^\mu n_\mu = 0$ . En general, no se puede retroceder tensores contravariantes, pero se puede usar la métrica inducida para subir índices en  $\Sigma$ , tal que se pueda definir vectores de corrimiento  $N^a := q^{ab} X_b^\mu g_{\mu\nu} N^\nu$  sobre  $\Sigma$ , y similarmente para otros vectores.

Ahora, se puede escribir la acción  $S_{SD}$  en la forma 3 + 1, notando que la integración es invariante bajo difeomorfismos usando la forma de volumen,

$$vol = \sqrt{|\det(\phi^*g)|} d^4x = e d^4x = N \sqrt{q} d^3\xi dt. \quad (3.4.13)$$

Por lo tanto, se puede escribir  $S_{SD}$  en forma 3 + 1 como:

$$\begin{aligned} S_{SD}(+A, e) &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi N \sqrt{q} \left\{ E_I^a E_J^b X_a^\mu X_b^{\nu+} F_{\mu\nu}^{IJ} - i \epsilon^I{}_{KL} E_I^a X_a^\mu N^{-1} \mathcal{L}_{t^\gamma}{}^+ A_\mu^{KL} \right. \\ &\quad \left. + i q^{-1/2} N^{-1} \left[ \partial_\mu \left( q^{1/2} (t^\nu + A_\nu)^{KL} E_I^a X_a^\mu \epsilon^I{}_{KL} \right) - \mathcal{D}_\mu \left( q^{1/2} E_I^a X_a^\mu \epsilon^I{}_{KL} \right) (t^\nu + A_\nu)^{KL} \right] \right. \\ &\quad \left. - i E_I^a X_a^\mu N^{-1} N^b X_b^\nu \epsilon^I{}_{KL} + F_{\mu\nu}^{KL} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ N q^{1/2} E_I^a E_J^b + F_{ab}^{IJ} - i q^{1/2} \epsilon^I{}_{KL} E_I^a \mathcal{L}_{t^\gamma}{}^+ A_a^{KL} \right. \\ &\quad \left. - i \mathcal{D}_a \left( q^{1/2} E_I^a \epsilon^I{}_{KL} \right) (t^\nu + A_\nu)^{KL} - i q^{1/2} E_I^a N^b \epsilon^I{}_{KL} + F_{ab}^{KL} \right]. \end{aligned}$$

Donde, se ha despreciado términos de frontera y se ha usado que:

$$F_{ab}^{IJ} = X_a^\mu X_b^\nu F_{\mu\nu}^{IJ}, \quad \mathcal{L}_{t^\gamma}{}^+ A_a^{KL} = X_a^\mu \mathcal{L}_{t^\gamma}{}^+ A_\mu^{KL}, \quad \mathcal{D}_a = X_a^\mu \mathcal{D}_\mu. \quad (3.4.14)$$

Luego, se define:

$$\mathcal{L}_{t^\gamma}{}^+ A_a^{KL} := + \dot{A}_a^{KL}, \quad \tilde{E}_I^a := q^{1/2} E_I^a, \quad \underline{N} := q^{-1/2} N. \quad (3.4.15)$$

Es decir,  $\tilde{E}_I^a$  es una tríada de densidad de peso +1 y  $\underline{N}$  tiene densidad de peso -1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_{SD}(+A, e) &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ \underline{N} \tilde{E}_I^a \tilde{E}_J^b + F_{ab}^{IJ} - i \epsilon^I{}_{KL} \tilde{E}_I^a + \dot{A}_a^{KL} \right. \\ &\quad \left. - i \mathcal{D}_a \left( \tilde{E}_I^a \epsilon^I{}_{KL} \right) (t^\nu + A_\nu)^{KL} - i \tilde{E}_I^a N^b \epsilon^I{}_{KL} + F_{ab}^{KL} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Las variables de configuración son ahora  $+A_a^{IJ}$ ,  $N^b$ ,  $t^\nu + A_\nu$  y  $\underline{N}$ .

Lo que sigue es calcular los momentos conjugados a las variables de configuración. Se puede verificar inmediatamente que los momentos conjugados a  $N^b$ ,  $t^\nu + A_\nu$  y  $\underline{N}$  se anulan, esto significa que hay constricciones primarias asociadas con estos momentos conjugados. Se dice

que  $N^b$ ,  $t^\nu + A_\nu$  y  $\underline{N}$  juegan el rol de multiplicadores de Lagrange. Por otro lado, note que el momento conjugado a  $+A_a^{IJ}$  está dado por:

$$P_{IJ}^a := \frac{\delta L}{\delta +\dot{A}_a^{IJ}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial +\dot{A}_a^{IJ}} = -i^+ (\tilde{E}_K^a \epsilon_{IJ}^K). \quad (3.4.17)$$

El hecho de que el momento conjugado a  $+A_a^{IJ}$  sea la parte autodual de  $-iE_K^a \epsilon_{IJ}^K$  se debe a que su coeficiente  $+A_a^{IJ}$  es autodual, y por eso se proyecta en el espacio autodual de todo lo que multiplica. Se puede determinar la forma explícita de  $P_{IJ}^a$ , i.e.,

$$\begin{aligned} P_{IJ}^a &= -i\frac{1}{2} \left( \tilde{E}_K^a \epsilon_{IJ}^K - i\frac{1}{2} \epsilon_{IJ}^{MN} \epsilon^K{}_{MN} \tilde{E}_K^a \right) = -i\frac{1}{2} \left( \tilde{E}_K^a \epsilon_{IJ}^K - i\frac{1}{2} \epsilon_{IJ}^{MN} n_P \epsilon_{MN}{}^{PK} \tilde{E}_K^a \right) \\ &= -i\frac{1}{2} \left( \tilde{E}_K^a \epsilon_{IJ}^K - i\frac{1}{2} (-4\delta_I^{[P} \delta_J^{K]}) n_P \tilde{E}_K^a \right) = -i\frac{1}{2} \tilde{E}_K^a \epsilon_{IJ}^K + n_{[I} \tilde{E}_{J]}^a. \end{aligned}$$

Así,

$$P_{IJ}^a = n_{[I} \tilde{E}_{J]}^a - \frac{i}{2} \epsilon_{IJ}^K \tilde{E}_K^a. \quad (3.4.18)$$

Entonces, el espacio fase complejo  $({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{SD}, {}^{\mathbb{C}}\Omega_{SD})$  es coordinado por el par de campos complejos  $(+A_a^{IJ}, P_{IJ}^a)$ , y tiene estructura simpléctica compleja natural,

$${}^{\mathbb{C}}\Omega_{SD} = \int_{\Sigma} \mathbf{d}P_{IJ}^a \wedge \mathbf{d}+A_a^{IJ}. \quad (3.4.19)$$

Por lo tanto, el paréntesis de Poisson fundamental, definido por  ${}^{\mathbb{C}}\Omega_{SD}$ , de la teoría es la parte autodual del paréntesis  $\{+A_a^{IJ}(\mathbf{x}), P_{KL}^b(\mathbf{y})\}$ , i.e.,

$$+ \{+A_a^{IJ}(\mathbf{x}), P_{KL}^b(\mathbf{y})\} = \frac{1}{2} \delta_a^b \left( \delta_K^I \delta_L^J - \frac{i}{2} \epsilon_{KL}{}^{MN} \delta_M^I \delta_N^J \right) \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.4.20)$$

Antes de poner la transformada de Legendre explícitamente conviene poner la acción dada por la Ec. (3.4.16) en términos del momento  $P_{IJ}^a$ , i.e.,

$$S_{SD} = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi [ \underline{N} P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} + P_{IJ}^a + \dot{A}_a^{IJ} + \mathcal{D}_a P_{IJ}^a (t^\nu + A_\nu)^{IJ} + P_{IJ}^a N^b + F_{ab}^{IJ} ], \quad (3.4.21)$$

donde la única parte no trivial es,

$$P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} = + \left( -i\epsilon_{IL}{}^M \tilde{E}_M^a \right) + \left( -i\epsilon_J{}^{KL} \tilde{E}_K^b \right) + F_{ab}^{IJ},$$

entonces,

$$P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} = -\frac{1}{2} \left[ \epsilon_{IL}{}^K \tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML} \tilde{E}_M^b) - \frac{i}{2} \epsilon_{IL}{}^{PQ} \epsilon_{PQ}^K \tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML} \tilde{E}_M^b) \right] + F_{ab}^{IJ}. \quad (3.4.22)$$

Note que:

$$\epsilon_{IL}{}^K \tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML} \tilde{E}_M^b) + F_{ab}^{IJ} = -\delta_J^{[K} \delta_M^I] \tilde{E}_K^a \tilde{E}^{bM} + F_{abI}^J + i\delta_P^{[K} \delta_M^I \delta_O^L] \epsilon_{JL}{}^{PQ} \tilde{E}^{bM} \tilde{E}_K^b + F_{abI}^J.$$

Así,

$$\epsilon_{IL}{}^K \tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML} \tilde{E}_M^b) = -\tilde{E}_J^a E_J^b + F_{ab}^{[IJ]} = -\tilde{E}_J^a E_J^b + F_{ab}^{IJ}. \quad (3.4.23)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \epsilon_{IL}{}^{PQ} \epsilon_{PQ}^K \tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML} \tilde{E}_M^b) + F_{ab}^{IJ} &= \frac{i}{2} \left( -2\delta_J^{[K} \delta_M^P \delta_L^Q] \epsilon^{IL}{}_{PQ} \tilde{E}^{bM} \tilde{E}_K^a + F_{abI}^J \right. \\ &\left. - \frac{i}{2} \epsilon_{IL}{}^{PQ} \epsilon_J{}^L{}_R{}^S \epsilon_{PQ}{}^K \epsilon_S{}^{MR} \tilde{E}_K^a \tilde{E}_M^b + F_{ab}^{IJ} \right) = -\frac{1}{4} \epsilon^{LQJK} \epsilon_{LQPI} \tilde{E}^{bP} \tilde{E}_K^a + F_{abI}^J = \delta_P^{[J} \delta_I^{K]} \tilde{E}^{bP} \tilde{E}_K^a + F_{abI}^J, \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{i}{2}\epsilon_{IL}{}^{PQ}\epsilon_{PQ}{}^K\tilde{E}_K^a + (\epsilon_J{}^{ML}\tilde{E}_M^b) + F_{ab}^{IJ} = \tilde{E}_I^a\tilde{E}_J^b + F_{ab}^{[IJ]} = \tilde{E}_I^a\tilde{E}_J^b + F_{ab}^{IJ}. \quad (3.4.24)$$

Entonces, sustituyendo las Ecs. (3.4.23) y (3.4.24) en la Ec.(3.4.22) se obtiene:

$$P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} = \tilde{E}_I^a \tilde{E}_J^b + F_{ab}^{IJ}. \quad (3.4.25)$$

Resta escribir explícitamente la transformada de Legendre, i.e.,

$$\mathcal{H} := P_{IJ}^a \dot{A}_a^{IJ} - \mathcal{L} = P_{IJ}^a \dot{A}_a^{IJ} - \left( \underline{N} P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} + P_{IJ}^a + \dot{A}_a^{IJ} + \mathcal{D}_a P_{IJ}^a (t^\nu + A_\nu)^{IJ} + P_{IJ}^a N^b + F_{ab}^{IJ} \right).$$

Así,

$$\mathcal{H} = N^a P_{IJ}^b + F_{ab}^{IJ} - \underline{N} P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} - \mathcal{D}_a P_{IJ}^a (t^\nu + A_\nu)^{IJ}, \quad (3.4.26)$$

donde se ha usado que  ${}^+F_{ab}^{IJ} = -{}^+F_{ba}^{IJ}$ . El Hamiltoniano canónico se puede escribir como:

$$H_c = \int_\Sigma d^3\xi \left( N^a P_{IJ}^b + F_{ab}^{IJ} - \underline{N} P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} - \mathcal{D}_a P_{IJ}^a (t^\nu + A_\nu)^{IJ} \right). \quad (3.4.27)$$

Se tienen conricciones secundarias, dadas por las variables de configuración no dinámicas, es decir,

$$P_{IJ}^b + F_{ab}^{IJ} \approx 0. \quad (3.4.28)$$

$$P_{IL}^a P_J^{bL} + F_{ab}^{IJ} \approx 0. \quad (3.4.29)$$

$$\mathcal{D}_a P_{IJ}^a \approx 0. \quad (3.4.30)$$

Note que las conricciones (y por tanto, las ecuaciones de evolución) son polinomiales en el par canónicamente conjugado  $({}^+A_a^{IJ}, P_{IJ}^a)$ . Estas conricciones forman un álgebra de primera clase. Ya que las ecuaciones de conricción nunca involucran la inversa de  $P_{IJ}^a$ , la formulación Hamiltoniana anterior es bien definida incluso si  $P_{IJ}^a$  no es invertible. Así, se tiene una ligera extensión de la RG compleja.<sup>5</sup>

Para coincidir con la notación usada en la literatura (ver, e.g., [10]) se sigue de cerca [25]. La idea es construir un isomorfismo  ${}^+b_{IJ}^K$  entre el subálgebra de Lie autodual del álgebra de Lie complejizada de  $SO(3, 1)$  y el álgebra de Lie de  $SO(3)$  complejizada. Recuerde que la normal covariante  $n_\mu$  a  $\Sigma$  define un vector interno unitario  $n_I$  por medio de  $n_I := n_\mu e_I^\mu$ . Se puede escoger el isomorfismo tal que las siguientes relaciones se cumplan,

$$[{}^+b_I, {}^+b_J]^{MN} = \epsilon_{IJ}{}^{K+} b_K^{MN}. \quad (3.4.31)$$

$$\text{tr}({}^+b^I + {}^+b^J) := -{}^+b^I{}_{MN} + {}^+b^{JMN} = -q^{IJ}. \quad (3.4.32)$$

En [25] se menciona que tal isomorfismo esta dado por:

$${}^+b_I{}^{KL} := -\frac{1}{2}\epsilon_I{}^{KL} + i q_I^{[K} n^{L]}, \quad (3.4.33)$$

donde, como es usual,  $\epsilon_{JKL} := n^I \epsilon_{IJKL}$ ,  $q_I^K := \delta_I^K + n_I n^K$  y  $n_I n^I = -1$ . Es decir, es un isomorfismo del subálgebra de Lie autodual del álgebra de Lie complejizada de  $SO(3, 1)$  al espacio tangente complejizado de  $\Sigma$ .

Ya que  $n_I {}^+b_{JK}^I = 0$ , se usará un índice abstracto interno 3-dimensional  $i$  (realmente, esto se comprueba fijando la norma de  $n_I$ ) y se escribe  ${}^+b_i^{JK}$  y  ${}^+b_{JK}^i$  en lo que sigue. De la propiedad

---

<sup>5</sup>La teoría autodual tiene sentido incluso cuando la métrica inducida  $\tilde{q}^{ab} := q q^{ab} := \tilde{E}_L^a \tilde{E}^{bL}$  se vuelve degenerada.

(3.4.31), se tiene que  ${}^+b_{JK}^i$  realmente puede pensarse como un isomorfismo del subálgebra de Lie del álgebra de Lie complejizada de  $SO(3,1)$  al álgebra de Lie complejizada de  $SO(3)$ . Además, se requiere que el isomorfismo satisfaga:

$$\partial_a {}^+b_i^{JK} = 0. \quad (3.4.34)$$

Dado tal isomorfismo, se puede ahora definir una conexión 1-forma  $A_a^i$  con valores en  $C\mathcal{L}_{SO(3)}$ , y una variable de momento  $\tilde{E}_i^a$  con valores en  $C\mathcal{L}_{SO(3)}^*$ , por medio de:

$${}^+A_a^{JK} =: A_a^i b_i^{JK}, \quad \text{y} \quad {}^+P^a_{JK} =: -i \tilde{E}_i^a b^i_{JK}. \quad (3.4.35)$$

Note que:

$${}^+F_{ab}^{IJ} = 2\partial_{[a} {}^+A_{b]}^{IJ} + [{}^+A_a, {}^+A_b]^{IJ} = 2\partial_{[a} A_{b]}^i b_i^{IJ} + [{}^+b_j, {}^+b_k]^{IJ} A_a^j A_b^k = 2\partial_{[a} A_{b]}^i b_i^{IJ} + \epsilon^i_{jk} {}^+b_i^{IJ} A_a^j A_b^k.$$

Así,

$${}^+F_{ab}^{IJ} = \left(2\partial_{[a} A_{b]}^i + \epsilon^i_{jk} A_a^j A_b^k\right) {}^+b_i^{IJ} =: F_{ab}^i {}^+b_i^{IJ}. \quad (3.4.36)$$

Luego,

$$\text{tr}(P^a P^b) = -P^a_{IJ} P^{bIJ} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bj} \delta_j^i = \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} = \tilde{q}^{ab}. \quad (3.4.37)$$

Por lo tanto,  $\tilde{E}_i^a$  es una triada compleja (densitizada) y  $F_{ab}^i$  es el tensor de curvatura con valores en el álgebra de Lie de  $SO(3)$  asociado a la conexión  $D$  definida por:

$$D_a v^i := \partial_a v^i + \epsilon^i_{jk} A_a^j v^k. \quad (3.4.38)$$

En términos de  $A_a^i$  y  $\tilde{E}_i^a$ , i.e., de las llamadas **variables de Ashtekar**, la estructura simplectica compleja  ${}^C\Omega_{SD}$  se vuelve:

$${}^C\Omega_{SD} = -i \int_{\Sigma} \mathbf{d}\tilde{E}_i^a \wedge \mathbf{d}A_a^i. \quad (3.4.39)$$

Entonces, es posible reescribir todas las ecuaciones que se han obtenido anteriormente usando  $A_a^i$  y  $\tilde{E}_i^a$  en lugar de  ${}^+A_a^{IJ}$  y  $P_{IJ}^a$ .

Ahora, dados los funcionales  $F, G : {}^C\Gamma_{SD} \rightarrow \mathbb{R}$ , el campo Hamiltoniano  $X_F$ , definido por la estructura simplectica, es dado por:

$$X_F := i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( \frac{\delta F}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta \tilde{E}_i^a} - \frac{\delta F}{\delta \tilde{E}_i^a} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \right), \quad (3.4.40)$$

y el paréntesis de Poisson  $\{F, G\}$ , definido por  $\{F, G\} = -X_F(G)$ , es:

$$\{F, G\} := i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( \frac{\delta F}{\delta \tilde{E}_i^a} \frac{\delta G}{\delta A_a^i} - \frac{\delta G}{\delta \tilde{E}_i^a} \frac{\delta F}{\delta A_a^i} \right). \quad (3.4.41)$$

Entonces, el paréntesis de Poisson fundamental da:

$$\{A_a^i(\psi), \tilde{E}_j^b(\omega)\} = i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( \frac{\delta A_a^i(\psi)}{\delta \tilde{E}_i^a(\xi)} \frac{\delta \tilde{E}_j^b(\omega)}{\delta A_a^i(\xi)} - \frac{\delta \tilde{E}_j^b(\omega)}{\delta \tilde{E}_i^a(\xi)} \frac{\delta A_a^i(\psi)}{\delta A_a^i(\xi)} \right) = -i \int_{\Sigma} d^3\xi \frac{\delta \tilde{E}_j^b(\omega)}{\delta \tilde{E}_i^a(\xi)} \delta^3(\xi, \psi).$$

Note que:

$$\tilde{E}_j^b(\omega) = \int_{\Sigma} d^3\xi \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(\xi, \omega) \tilde{E}_i^a(\mathbf{z}).$$

Así,

$$\{A_a^i(\psi), \tilde{E}_j^b(\omega)\} = -i \int_{\Sigma} d^3\xi \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(\xi, \omega) \delta^3(\xi, \psi) = -i \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(\psi, \omega). \quad (3.4.42)$$

Se comprueba fácilmente que:

$$\{A_a^i, A_b^j\} = 0, \quad (3.4.43)$$

$$\{\tilde{E}_i^a, \tilde{E}_j^b\} = 0. \quad (3.4.44)$$

Ahora, lo que sigue es reescribir el Hamiltoniano en términos de  $A_a^i$  y  $\tilde{E}_i^a$ . De las Ecs.(3.4.35) y (3.4.36) sigue que:

$$H_c = \int_{\Sigma} d^3\xi \left( -iN^a \tilde{E}_i^b + b_{IJ}^i F_{ab}^j + b_{IJ}^{IJ} + \underline{N} \tilde{E}_i^a + b_{IL}^i \tilde{E}_j^b + b_J^{jL} F_{ab}^k + b_k^{IJ} - \mathcal{D}_a(\tilde{E}_i^a + b_{IJ}^i) t^\nu A_\nu^j + b_j^{IJ} \right).$$

Pero, note que:

$$+b_i^{IJ} + b_{IJ}^i = \delta_i^j, \quad tr(+b^i + b^j + b^k) := -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk},$$

ver [24] para más detalles. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a P_{IJ}^a t^\nu A_\nu^l + b_l^{IJ} &= \left[ \partial_a(-i\tilde{E}_i^a + b_{IJ}^i) - iA_a^j + b_{jI}^K \tilde{E}_k^a + b_{KJ}^k - iA_a^j + b_{jJ}^K \tilde{E}_k^a + b_{IK}^k \right] t^\nu A_\nu^l + b_l^{IJ} \\ &= -i \left( \partial_a \tilde{E}_i^a + b_{IJ}^i + A_a^j \tilde{E}_k^a \left[ +b_j, +b^k \right]_{IJ} \right) t^\nu A_\nu^l + b_l^{IJ} \\ &= -i \left( \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak} \right) \delta_i^l (t^\nu A_\nu)^l =: -i D_a \tilde{E}_i^a (t^\nu A_\nu)^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$H_c = \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ \frac{N}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} - iN^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + iD_a \tilde{E}_i^a (t^\nu A_\nu)^i \right]. \quad (3.4.45)$$

Es decir, la Hamiltoniana es una combinación lineal de las constricciones dadas por:

$$\mathcal{G}_i(A, E) := D_a \tilde{E}_i^a := \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak} \approx 0. \quad (3.4.46)$$

$$\mathcal{H}_a(A, E) := \tilde{E}_i^b F_{ab}^i \approx 0. \quad (3.4.47)$$

$$\mathcal{H}(A, E) := \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} \epsilon^{ijk} \approx 0, \quad (3.4.48)$$

que son las constricciones de Gauss, vectorial y escalar (o super-Hamiltoniana), respectivamente. Es común usar las ecuaciones de restricción en esta forma para realizar el análisis del álgebra de Poisson.

Note que la restricción escalar es de la forma,

$$\mathcal{H} = G_{ab}^{ij} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b, \quad (3.4.49)$$

i.e., homogénea en los momentos  $\tilde{E}_i^a$  ( $G_{ab}^{ij} := \epsilon^{ijk} F_{abk}$  se conoce como la supermétrica de Ashtekar-Wheeler-De Wiit). Hay sólo un término cinético y no hay término potencial (el término con  ${}^{(3)}R$  en la restricción escalar de ADM, ver Ec. (2.3.18)). Así, se ha obtenido una simplificación sustancial de la restricción escalar respecto a la forma en el formalismo ADM.

El espacio fase de la RG es ahora idéntico al de los campos de Yang-Mills de valor complejo (con grupo interno  $SO(3)$ ). Además, una de las ecuaciones de restricción es precisamente la ley de Gauss que se encuentra en espacio fase de Yang-Mills. Por lo tanto, se tiene una incrustación natural de la superficie de restricción de la teoría de Einstein en la de la teoría de Yang-Mills: Todo dato inicial  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$  para la teoría de Einstein es también un dato inicial que la teoría de Yang-Mills satisface, en adición a la ley de Gauss, una restricción vectorial y una escalar. Desde el punto de vista de la teoría de Yang-Mills, las constricciones adicionales son en esencia

las expresiones invariantes más simples de difeomorfismos y de norma que se pueden escribir en ausencia de una estructura de fondo tal como una métrica.

Una interpretación interesante para la constricción vectorial se puede obtener definiendo el campo magnético de  $A_a^i$  como:

$$B_i^a := \epsilon^{abc} F_{ac}^i. \quad (3.4.50)$$

Por tanto, la constricción vectorial puede escribirse como:

$$\mathbf{B}_i \times \mathbf{E}^i = 0, \quad (3.4.51)$$

i.e., como la anulación del vector de Poynting de Yang-Mills.

En resumen, toda la discusión en esta sección ha tratado con gravedad compleja 3+1. Para recuperar la teoría real, se debe imponer **condiciones de realidad** sobre las variables del espacio fase complejo  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$  para seleccionar una sección real de  $({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{SD}, {}^{\mathbb{C}}\Omega_{SD})$ . Es decir, se debe imponer que:

$$\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \text{ sea real.} \quad (3.4.52)$$

Ya que se quiere asegurar que esta condición de realidad se preserve bajo la evolución dinámica generada por la Hamiltoniana, también se exige que:

$$\left(\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi}\right)^* \text{ sea real.} \quad (3.4.53)$$

Donde, \* denota conjugación compleja.

### 3.5. Álgebra de Constricciones y Ecuaciones de Evolución

Dadas las ecuaciones de constricción, Ecs. (3.4.28)-(3.4.30), para la teoría autodual compleja, lo que sigue es verificar que sus funcionales de constricción forman un conjunto de primera clase. Para hacer esto, sean  $v^i \in C\mathcal{L}_{SO(3)}$ ,  $\underline{N}$  y  $N^a$  campos de prueba arbitrarios de valor complejo en  $\Sigma$ , tal que:

$$\mathcal{S}_{\underline{N}} = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \mathcal{H} \quad (3.5.1)$$

$$\mathcal{C}'_{N^a} = -i \int_{\Sigma} d^3\xi N^a \mathcal{H}_a, \quad (3.5.2)$$

$$\mathcal{G}_{v^i} = i \int_{\Sigma} d^3\xi v^i \mathcal{G}_i. \quad (3.5.3)$$

Estos se suelen llamar los funcionales de constricción **escalar**, **vectorial** y de **Gauss**.

El funcional vectorial por sí mismo no tiene un significado geométrico directo, el asunto es que  $\mathcal{C}'_{N^a}$  no genera difeomorfismos espaciales, entonces lo que se suele hacer es definir un nuevo funcional de constricción  $\mathcal{C}_{N^a}$  tomando una combinación lineal de las constricciones de Gauss y vectorial. Se define:

$$\mathcal{C}_{N^a} := \mathcal{C}'_{N^a} + \mathcal{G}_{N^i}, \quad (3.5.4)$$

donde  $N^i := N^a A_a^i$ . A  $\mathcal{C}_{N^a}$  se le conoce como la funcional de constricción de difeomorfismos ya que el movimiento que esta genera en el espacio fase corresponde a una familia 1-paramétrica de difeomorfismos en  $\Sigma$ , asociados con el campo vectorial  $N^a$ . En forma explicita  $\mathcal{C}_{N^a}$  se puede expresar como:

$$\mathcal{C}_{N^a} = -i \int_{\Sigma} d^3\xi N^a \left( \tilde{E}_i^b F_{ab}^i - A_a^i D_b \tilde{E}_i^b \right) = -i \int_{\Sigma} d^3\xi \left\{ N^a \tilde{E}_i^b \left( 2\partial_{[a} A_{b]}^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k \right) \right\}$$

$$- \left[ \partial_b (\tilde{E}_i^b N^a A_a^i) - \tilde{E}_i^b D_b (N^a A_a^i) \right] \} = -i \int_{\Sigma} d^3 \xi \tilde{E}_i^b \left[ N^a \left( 2\partial_{[a} A_{b]}^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k \right) + D_b (N^a A_a^i) \right].$$

Note que:

$$D_b (N^a A_a^i) = \partial_b N^a A_a^i + N^a \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_b^j N^a A_a^k = \partial_b N^a A_a^i + N^a \partial_b A_a^i - \epsilon_{jk}^i A_a^j N^a A_b^k,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{N^a} &= -i \int_{\Sigma} d^3 \xi \tilde{E}_i^b \left[ N^a \left( \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k \right) + \partial_b N^a A_a^i + N^a \partial_b A_a^i - \epsilon_{jk}^i A_a^j N^a A_b^k \right] \\ &= -i \int_{\Sigma} d^3 \xi \tilde{E}_i^b \left( N^a \partial_a A_b^i + \partial_b N^a A_a^i \right) = -i \int_{\Sigma} d^3 \xi \tilde{E}_i^b \mathcal{L}_{N^a} A_b^i, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{C}_{N^a} = -i \int_{\Sigma} d^3 \xi \tilde{E}_i^b \mathcal{L}_{N^a} A_b^i = i \int_{\Sigma} d^3 \xi A_b^i \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^b, \quad (3.5.5)$$

donde para obtener la última expresión se han ignorado términos de frontera, y  $\mathcal{L}_{N^a}$  es la derivada de Lie con respecto al campo vectorial  $N^a$ , que trata índices internos como escalares. De aquí que:

$$\frac{\delta \mathcal{C}_{N^a}}{\delta \tilde{E}_i^a} = i \{ A_a^i, \mathcal{C}_{N^a} \} = -i \mathcal{L}_{N^a} A_a^i, \quad \frac{\delta \mathcal{C}_{N^a}}{\delta A_a^i} = -i \{ E_i^a, \mathcal{C}_{N^a} \} = i \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a. \quad (3.5.6)$$

Con esto es trivial calcular el paréntesis de Poisson entre la constricción de difeomorfismos y las constricciones restantes, i.e.,

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{C}_{M^a} \} &= i \int_{\Sigma} d^3 \xi \left( -i \mathcal{L}_{N^a} A_a^i \frac{\delta \mathcal{C}_{M^a}}{\delta A_a^i} - i \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a \frac{\delta \mathcal{C}_{M^a}}{\delta \tilde{E}_i^a} \right) \\ &= i \int_{\Sigma} d^3 \xi M^a \left( \mathcal{L}_{N^a} A_a^i \frac{\partial \mathcal{C}_a}{\partial A_a^i} + \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a \frac{\partial \mathcal{C}_a}{\partial \tilde{E}_i^a} \right), \end{aligned}$$

donde se ha usado:

$$\mathcal{C}_{M^a} := i \int_{\Sigma} d^3 \xi M^a \mathcal{C}_a.$$

Además, note que:

$$\mathcal{L}_{N^a} \mathcal{C}_a[A, E] := \mathcal{L}_{N^a} A_a^i \frac{\partial \mathcal{C}_a}{\partial A_a^i} + \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a \frac{\partial \mathcal{C}_a}{\partial \tilde{E}_i^a}. \quad (3.5.7)$$

Entonces,

$$\{ \mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{C}_{M^a} \} = i \int_{\Sigma} d^3 \xi M^a \mathcal{L}_{N^a} \mathcal{C}_a[A, E] = i \int_{\Sigma} d^3 \xi \left[ \mathcal{L}_{N^a} (M^a \mathcal{C}_a) - (\mathcal{L}_{N^a} M^a) \mathcal{C}_a \right],$$

por lo tanto, ignorando términos de frontera, se obtiene:

$$\{ \mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{C}_{M^a} \} = -i \int_{\Sigma} d^3 \xi (\mathcal{L}_{N^a} M^a) \mathcal{C}_a =: -\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{N^a} M^a}. \quad (3.5.8)$$

Similarmente,

$$\{ \mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{G}_{v^i} \} = i \int_{\Sigma} d^3 \xi v^i \left( \mathcal{L}_{N^a} A_a^i \frac{\partial \mathcal{G}_{v^i}}{\partial A_a^i} + \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a \frac{\partial \mathcal{G}_{v^i}}{\partial \tilde{E}_i^a} \right) = i \int_{\Sigma} d^3 \xi v^i \mathcal{L}_{N^a} \mathcal{G}_{v^i},$$

descartando términos de frontera, se tiene que:

$$\{ \mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{G}_{v^i} \} = -i \int_{\Sigma} d^3 \xi (\mathcal{L}_{N^a} v^i) \mathcal{G}_{v^i} =: -\mathcal{G}_{\mathcal{L}_{N^a} v^i}. \quad (3.5.9)$$

De forma análoga se concluye que:

$$\{\mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{S}_N\} = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \left( \mathcal{L}_{N^a} A_a^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_a^i} + \mathcal{L}_{N^a} \tilde{E}_i^a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{E}_i^a} \right) = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \mathcal{L}_{N^a} \mathcal{H}.$$

Así,

$$\{\mathcal{C}_{N^a}, \mathcal{S}_N\} = - \int_{\Sigma} d^3\xi (\mathcal{L}_{N^a} \underline{N}) \mathcal{H} =: -\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{N^a} \underline{N}}. \quad (3.5.10)$$

Como es usual, no es difícil demostrar que el funcional de contricción de Gauss genera las transformaciones de normal estandar de la conexión 1-forma y la rotación de índices internos. Para ver esto, primero note que:

$$\mathcal{G}_{v^i} = i \int_{\Sigma} d^3\xi v^i D_a \tilde{E}_i^a = i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( \partial_a (\tilde{E}_i^a v^i) - \tilde{E}_i^a D_a v^i \right),$$

entonces, eliminando términos de frontera, se tiene que:

$$\mathcal{G}_{v^i} = -i \int_{\Sigma} d^3\xi \tilde{E}_i^a D_a v^i \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{G}_{v^i}}{\delta \tilde{E}_i^a} = i \{ \tilde{A}_a^i, \mathcal{G}_{v^i} \} = -i D_a v^i. \quad (3.5.11)$$

Además,

$$\mathcal{G}_{v^i} = i \int_{\Sigma} d^3\xi v^i \left( \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ijk} A_j^a \tilde{E}^{ak} \right) \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{G}_{v^i}}{\delta \tilde{A}_a^i} = -i \{ \tilde{E}_i^a, \mathcal{G}_{v^i} \} = -i \epsilon_{ijk} v^j \tilde{E}^{ak}. \quad (3.5.12)$$

Sigue que el paréntesis de Poisson entre cualesquiera dos constricciones de Gauss está dado por:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{G}_{w^j}\} &= -i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( D_a v^i \epsilon_{ijk} w^j \tilde{E}^{ak} - D_a w^j \epsilon_{ijk} v^i \tilde{E}^{ak} \right) \\ &= -i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( D_a v^i w^j + D_a w^j v^i \right) \epsilon_{ijk} \tilde{E}^{ak} = -i \int_{\Sigma} d^3\xi D_a (v^i w^j) \epsilon_{ijk} \tilde{E}^{ak} \\ &= -i \int_{\Sigma} d^3\xi \left( \partial_a (v^i w^j \epsilon_{ijk} \tilde{E}^{ak}) - \epsilon_{ijk} D_a \tilde{E}^{ak} v^i w^j \right) = i \int_{\Sigma} d^3\xi \epsilon^{ijk} v_j w_k D_a \tilde{E}_i^a, \end{aligned}$$

donde se han subido y bajado índices con la delta de Kronecker  $\delta^{ij}$ , por lo tanto,

$$\{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{G}_{w^j}\} =: \mathcal{G}_{\epsilon^{ijk} v_j w_k}. \quad (3.5.13)$$

Lo que sigue es calcular el paréntesis de Poisson entre la constricción de Gauss y la escalar. Primero, note que la variación de  $\mathcal{S}_N$  con respecto a  $\tilde{E}_i^a$  es:

$$\delta \mathcal{S}_N = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \frac{1}{2} \delta (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b) F_{abk} \epsilon^{ijk} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \left( F_{abk} \epsilon^{ijk} \delta \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b + \tilde{E}_l^c F_{cbk} \epsilon^{ljk} \delta_a^b \delta_j^i \delta \tilde{E}_i^a \right),$$

entonces,

$$\delta \mathcal{S}_N = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \delta \tilde{E}_i^a \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{S}_N}{\delta \tilde{E}_i^a} = i \{ A_a^i, \mathcal{S}_N \} = \underline{N} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \quad (3.5.14)$$

Luego, la variación de  $\mathcal{S}_N$  con respecto a  $A_a^i$  da:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_N &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta F_{ab}^k \epsilon^{ijk} = \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b D_{[a} \delta A_{b]}^k \epsilon^{ijk} = \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ \partial_a \left( \underline{N} \tilde{E}_i^{[a} \tilde{E}_j^{b]} \delta A_b^k \epsilon^{ijk} \right) \right. \\ &\quad \left. - D_a \left( \underline{N} \tilde{E}_i^{[a} \tilde{E}_j^{b]} \epsilon^{ijk} \right) \delta A_b^k \right] = - \int_{\Sigma} d^3\xi D_a \left( \underline{N} \tilde{E}_i^{[a} \tilde{E}_j^{b]} \epsilon^{ijk} \right) \delta A_b^k = - \int_{\Sigma} d^3\xi D_b \left( \underline{N} \tilde{E}_k^{[b} \tilde{E}_j^{a]} \epsilon^{ikj} \right) \delta A_a^i. \end{aligned}$$

Sigue que:

$$\delta \mathcal{S}_{\underline{N}} = \int_{\Sigma} d^3 \xi D_b \left( \underline{N} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}^{b]}_j \epsilon_i^{kj} \right) \delta A_a^i \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{S}_{\underline{N}}}{\delta A_a^i} = -i \{E_i^a, \mathcal{S}_{\underline{N}}\} = D_b \left( \epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}^{b]}_j \right). \quad (3.5.15)$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{S}_{\underline{N}}\} &= i \int_{\Sigma} d^3 \xi \left[ -i D_a v^i D_b \left( \epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}^{b]}_j \right) - \left( -i \epsilon_{ijk} v^j \tilde{E}^{ak} \right) \underline{N} \epsilon^{ilm} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^3 \xi \left[ D_a v^i D_b \left( \epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}^{b]}_j \right) - 2 \delta_j^{[l} \delta_k^{m]} v^j \tilde{E}^{ak} \underline{N} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^3 \xi \left[ \partial_b \left( D_a v^i \epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}^{b]}_j \right) - D_{[a} D_{b]} v^i \epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^a \tilde{E}^b_j + 2 v^{[m} \tilde{E}^{al]} \underline{N} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right]. \end{aligned}$$

De la definición de curvatura sigue que:

$$D_{[a} D_{b]} v^i = \frac{1}{2} F_{ab}^j \epsilon^i_{jk} v^k, \quad (3.5.16)$$

entonces, ignorando términos de frontera,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{S}_{\underline{N}}\} &= \int_{\Sigma} d^3 \xi \left( \delta_k^{[l} \delta_j^{m]} F_{abl} v_m \underline{N} \tilde{E}^{ak} \tilde{E}^{bj} + 2 v^{[m} \tilde{E}^{al]} \underline{N} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right), \\ &= \int_{\Sigma} d^3 \xi \left( F_{abl} v_m \underline{N} \tilde{E}^{al} \tilde{E}^{bm} + 2 v^{[m} \tilde{E}^{al]} \underline{N} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right). \end{aligned}$$

Luego, usando la constricción vectorial ,  $\tilde{E}^{bj} F_{abj} \approx 0$ , se sigue que:

$$\{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{S}_{\underline{N}}\} = \int_{\Sigma} d^3 \xi \left( -\frac{1}{2} \underline{N} v_m \tilde{E}^{am} \tilde{E}^{bl} F_{abl} + v^m \tilde{E}^{al} \underline{N} \tilde{E}_l^b F_{abm} \right) = \int_{\Sigma} d^3 \xi v^m \underline{N} \tilde{q}^{ab} F_{abm}.$$

Pero, note que:

$$\tilde{q}^{ab} F_{abm} = -\tilde{q}^{ab} F_{bam} = -\tilde{q}^{ba} F_{bam} \Rightarrow \tilde{q}^{ab} F_{abm} = 0,$$

por lo tanto,

$$\{\mathcal{G}_{v^i}, \mathcal{S}_{\underline{N}}\} =: 0. \quad (3.5.17)$$

Queda por calcular el paréntesis de Poisson entre cualesquiera dos constricciones escalares. Entonces, haciendo uso de las ecuaciones anteriores sigue que:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} &= i \int_{\Sigma} d^3 x \left[ \left( \underline{N} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \right) \left( \epsilon_{ilm} D_c \left( \underline{M} \tilde{E}^{[a l} \tilde{E}^{c] m} \right) \right) - \left( \underline{N} \leftrightarrow \underline{M} \right) \right] \\ &= i \int_{\Sigma} d^3 x \left[ 2 \underline{N} \tilde{E}_{[j}^b F_{abk]} D_c \left( \underline{M} \tilde{E}^{[a j} \tilde{E}^{c] k} \right) - 2 \underline{M} \tilde{E}_{[j}^b F_{abk]} D_c \left( \underline{N} \tilde{E}^{[a j} \tilde{E}^{c] k} \right) \right] \\ &= 2i \int_{\Sigma} d^3 x E^{[a j} E^{c] k} E_{[j}^b F_{abk]} \left( \underline{N} \partial_c \underline{M} - \underline{M} \partial_c \underline{N} \right). \end{aligned}$$

Note que,

$$\tilde{E}^{[a j} \tilde{E}^{c] k} \tilde{E}_{[j}^b F_{abk]} = \frac{1}{2} \left( \tilde{E}^a j \tilde{E}^c k \tilde{E}_{[j}^b F_{abk]} - \tilde{E}^c j \tilde{E}^s k \tilde{E}_{[j}^b F_{abk]} \right) = -\frac{1}{2} \tilde{E}_k^a F_{ab}^k \tilde{q}^{bc},$$

entonces,

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = -i \int_{\Sigma} d^3 x \tilde{E}_k^a F_{ab}^k \tilde{q}^{bc} \left( \underline{N} \partial_c \underline{M} - \underline{M} \partial_c \underline{N} \right) = -i \int_{\Sigma} d^3 x K^a \tilde{E}_k^b F_{ab}^k =: \mathcal{C}'_{K^a},$$

donde se ha definido:

$$K^a := \tilde{q}^{ac} \left( \underline{N} \partial_c \underline{M} - \underline{M} \partial_c \underline{N} \right). \quad (3.5.18)$$

Se concluye que,

$$\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\} =: \mathcal{C}_{K^a} + \mathcal{G}_{K^i}, \quad (3.5.19)$$

con,

$$K^a = \tilde{q}^{ac} (N \partial_c M - M \partial_c N), \quad \tilde{q}^{ab} = \tilde{E}_k^a \tilde{E}^{bk}, \quad K^i = K^a A_a^i. \quad (3.5.20)$$

Por lo tanto, las constricciones forman un grupo de primera clase. Sin embargo, el álgebra de constricciones no es realmente un álgebra de Lie ya que el último paréntesis de Poisson muestra que se trata con funciones de estructura en lugar de constantes de estructura.

Lo que resta es encontrar las ecuaciones de evolución de la teoría. Esto se logra tomando el paréntesis de Poisson entre las variables canónicas y el Hamiltoniano. Pero, primero note que en este contexto se ha definido  $v^i =: (t^\nu A_\nu)^i$ , y además se ha mencionado que esta variable juega el papel de multiplicador de Lagrange, entonces, se anexa,

$$\frac{\delta H}{\delta v^i} = 0, \quad (3.5.21)$$

a las ecuaciones de evolución para las variables canónicas. Esta ecuación implica que  $D_a E_i^a = 0$ . Por lo tanto, el Hamiltoniano que da la evolución de la teoría es:

$$H = \int_\Sigma d^3 \xi \left( \frac{N}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} - i N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i \right),$$

entonces,

$$H_c = \mathcal{S}_N + \mathcal{C}'_{N^a}. \quad (3.5.22)$$

Note que las variaciones de  $\mathcal{C}'_{N^a}$  con respecto a las variables canónicas son:

$$\delta \mathcal{C}'_{N^a} = -i \int_\Sigma d^3 \xi N^c \delta_a^b \delta_k^i F_{cb}^k \delta \tilde{E}_i^a = -i \int_\Sigma d^3 \xi N^c F_{ca}^i \delta \tilde{E}_i^a = i \int_\Sigma d^3 \xi N^b F_{ab}^i \delta \tilde{E}_i^a.$$

Así,

$$\frac{\delta \mathcal{C}'_{N^a}}{\delta \tilde{E}_i^a} = i \{A_a^i, \mathcal{C}'_{N^a}\} = i N^b F_{ab}^i. \quad (3.5.23)$$

Además,

$$\delta \mathcal{C}'_{N^a} = 2i \int_\Sigma d^3 \xi N^a E_i^b D_{[b} \delta A_{a]}^i = 2i \int_\Sigma d^3 \xi \left[ \partial_b (E_i^{[b} N^{a]}) \delta A_a^i - D_b (E_i^{[b} N^{a]}) \delta A_a^i \right],$$

ignorando términos de frontera, se tiene que:

$$\frac{\delta \mathcal{C}'_{N^a}}{\delta A_a^i} = -i \{ \tilde{E}_i^a, \mathcal{C}'_{N^a} \} = -2i D_b (E_i^{[b} N^{a]}). \quad (3.5.24)$$

Sigue que:

$$\dot{A}_a^i := \frac{\delta H}{\delta \tilde{E}_i^a} = i \{A_a^i, H\} = i \{A_a^i, \mathcal{S}_N\} + i \{A_a^i, \mathcal{C}'_{N^a}\},$$

por lo tanto,

$$\dot{A}_a^i = \underline{N} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} + i N^b F_{ab}^i, \quad (3.5.25)$$

y,

$$\dot{\tilde{E}}_i^a := -\frac{\delta H}{\delta A_a^i} = i \{ \tilde{E}_i^a, H \} = i \{ \tilde{E}_i^a, \mathcal{S}_N \} + i \{ \tilde{E}_i^a, \mathcal{C}'_{N^a} \},$$

se concluye que:

$$\dot{\tilde{E}}_i^a = 2i D_b (E_i^{[b} N^{a]}) - D_b (\epsilon_i^{kj} \underline{N} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_j^b). \quad (3.5.26)$$

Tanto las constricciones como las ecuaciones de evolución, haciendo uso de las variables de Ahstekar, se han simplificado respecto a lo que se obtiene con el formalismo ADM. Pero, esta simplificación tiene un precio a pagar, este es que se tienen que usar coordenadas complejas para el espacio fase de la RG.

### 3.6. Constante Cosmológica

Una de las ventajas de la formulación de Ahstekar es que se puede introducir de forma inmediata una constante cosmológica. En la acción de la gravedad la constante cosmológica aparece como:

$$S_\Lambda = \int \text{vol}\Lambda, \quad (3.6.1)$$

la cual se puede poner fácilmente en forma 3 + 1:

$$S_\Lambda = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi N q^{1/2} \Lambda = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} q \Lambda. \quad (3.6.2)$$

Note que:

$$\tilde{q}^{ab} = q q^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi} \Rightarrow \det(q q^{ab}) = q^3 \det q^{ab} = (\det \tilde{E}^{ai})^2 \Rightarrow \frac{q^3}{q} = (\det \tilde{E}^{ai})^2.$$

Así,

$$q = \det \tilde{E}^{ai} := \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c, \quad (3.6.3)$$

donde se ha usado el hecho que  $\det q^{ab} := q^{-1}$ .

Por lo tanto, la acción autodual con constante cosmológica se puede escribir como una combinación lineal entre la acción autodual pura y la Ec. (3.6.2), i.e.,

$$S_{SD\Lambda} := S_{SD} - S_\Lambda = \int_M \text{vol}(e_I^\mu e_J^\nu + F_{\mu\nu}^{IJ} - \Lambda). \quad (3.6.4)$$

En la descomposición 3 + 1, esta acción lleva al Hamiltoniano canónico en términos de las variables  $SO(3)$ :

$$H_{\Lambda c} = \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ \frac{N}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} - i N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + i D_a \tilde{E}_i^a (t^\nu A_\nu)^i - \underline{N} \det \tilde{E}^{ai} \Lambda \right]. \quad (3.6.5)$$

De modo que las constricciones toman ahora la forma:

$$\mathcal{G}_i(A, E) := D_a \tilde{E}_i^a := \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak} \approx 0. \quad (3.6.6)$$

$$\mathcal{H}_a(A, E) := \tilde{E}_i^b F_{ab}^i \approx 0. \quad (3.6.7)$$

$$\mathcal{H}_\Lambda(A, E) := \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} \epsilon^{ijk} - \frac{\Lambda}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \approx 0. \quad (3.6.8)$$

Note que la única restricción que se ha modificado es la escalar, entonces, se espera que el álgebra de constricciones aún sea de primera clase. Ya que los funcionales asociados a las constricciones de Gauss y de difeomorfismos no se han modificado, y debido a que las constricciones de Gauss y de difeomorfismos generan transformaciones de norma y de difeomorfismos espaciales, respectivamente, es claro que su álgebra con la nueva restricción escalar no se modificará. Por lo tanto, basta con concentrarse en el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos constricciones escalares para verificar que las constricciones forman aún un conjunto de primera clase. Es decir, sea  $\mathcal{S}_{\underline{N}}$  el funcional de restricción escalar dado por:

$$\mathcal{S}_{\underline{N}} := \int_{\Sigma} d^3\xi \underline{N} \mathcal{H}_\Lambda(A, E). \quad (3.6.9)$$

Entonces, la variación de  $\mathcal{S}_N$  con respecto a las variables canónicas da:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_N &= \int_{\Sigma} d^3\xi \widetilde{N} \left[ \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \delta\tilde{E}_i^a - \frac{\Lambda}{3!} \left( \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \delta\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c + \epsilon_{abc} \epsilon^{ljk} \delta_a^b \delta_j^i \delta\tilde{E}_i^a \tilde{E}_l^d \tilde{E}_k^c \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \epsilon_{abc} \epsilon^{ljk} \delta_a^c \delta_k^i \delta\tilde{E}_i^a \tilde{E}_l^d \tilde{E}_j^b \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3\xi \widetilde{N} \left( 2\epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} - \Lambda \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) \delta\tilde{E}_i^a.\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\delta\mathcal{S}_N}{\delta\tilde{E}_i^a} = i\{A_a^i, \mathcal{S}_N\} = \frac{N}{2} \left( 2\epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} - \Lambda \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right). \quad (3.6.10)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_N &= \int_{\Sigma} d^3\xi \left[ D_b \left( \widetilde{N} \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{b]} j \epsilon_i^{kj} \right) \delta A_a^i - \widetilde{N} \frac{\Lambda}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \delta \left( \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^3\xi D_b \left( \widetilde{N} \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{b]} j \epsilon_i^{kj} \right) \delta A_a^i.\end{aligned}$$

Sigue que:

$$\frac{\delta\mathcal{S}_N}{\delta A_a^i} = -i\{E_i^a, \mathcal{S}_N\} = D_b \left( \epsilon_i^{kj} \widetilde{N} \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{b]} j \right). \quad (3.6.11)$$

Entonces, el paréntesis de Poisson entre cualesquiera dos funcionales de constricción escalar está dado por:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\} &= i \int_{\Sigma} d^3x \left[ \frac{N}{2} \left( 2\epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} - \Lambda \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) \left( \epsilon_{ilm} D_d \left( \widetilde{M} \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{d]} m \right) \right) - \left( \widetilde{N} \leftrightarrow \widetilde{M} \right) \right] \\ &= i \int_{\Sigma} d^3x \left[ \widetilde{N} \left( 2\tilde{E}_{[l}^b F_{abm]} - \Lambda \epsilon_{abc} \tilde{E}_l^b \tilde{E}_m^c \right) \left( D_d \left( \widetilde{M} \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{d]} m \right) \right) - \left( \widetilde{N} \leftrightarrow \widetilde{M} \right) \right] \\ &= i \int_{\Sigma} d^3x \left( 2\tilde{E}_{[l}^b F_{abm]} - \Lambda \epsilon_{abc} \tilde{E}_l^b \tilde{E}_m^c \right) \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{d]} m \left( \widetilde{N} \partial_d \widetilde{M} - \widetilde{M} \partial_d \widetilde{N} \right).\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{d]} m \tilde{E}_{[l}^b F_{abm]} &= -\frac{1}{2} \tilde{E}_k^a F_{ab}^k \tilde{q}^{bd}, \\ \epsilon_{abc} \tilde{E}_{[l}^b \tilde{E}_m^c \tilde{E}^{[a} \tilde{E}^{d]} m &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \tilde{E}_l^b \tilde{E}_m^c \left( \tilde{E}^{a[l} \tilde{E}^{d]m]} - \tilde{E}^{d[l} \tilde{E}^{a]m]} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_{acb} \tilde{q}^{ac} \tilde{q}^{bd} = 0.\end{aligned}$$

Sigue que:

$$\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\} = -i \int_{\Sigma} d^3x \tilde{E}_k^a F_{ab}^k \tilde{q}^{bc} \left( \widetilde{N} \partial_c \widetilde{M} - \widetilde{M} \partial_c \widetilde{N} \right) = -i \int_{\Sigma} d^3x K^a \tilde{E}_k^b F_{ab}^k =: \mathcal{C}'_{K^a},$$

donde se ha definido,

$$K^a := \tilde{q}^{ac} \left( \widetilde{N} \partial_c \widetilde{M} - \widetilde{M} \partial_c \widetilde{N} \right). \quad (3.6.12)$$

Se concluye que:

$$\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\} =: \mathcal{C}_{K^a} + \mathcal{G}_{K^i}, \quad (3.6.13)$$

con,

$$K^a = \tilde{q}^{ac} \left( N \partial_c M - M \partial_c N \right), \quad \tilde{q}^{ab} = \tilde{E}_k^a \tilde{E}^{bk}, \quad K^i = K^a A_a^i. \quad (3.6.14)$$

Por lo tanto, se ha verificado que las constricciones aún forman un grupo de primer orden. Además, el paréntesis de Poisson anterior muestra que el álgebra no es realmente un álgebra de Lie, pues el campo  $K^a$  depende de las variables canónicas.

Por último, las ecuaciones de evolución ahora están dadas por:

$$\dot{A}_a^i := \frac{\delta H}{\delta \tilde{E}_i^a} = i\{A_a^i, H\} = i\{A_a^i, \mathcal{S}_N\} + i\{A_a^i, \mathcal{C}'_{Na}\}.$$

Así,

$$\dot{A}_a^i = \frac{N}{2} \left( 2\epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} - \Lambda \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) + iN^b F_{ab}^i, \quad (3.6.15)$$

y,

$$\dot{\tilde{E}}_i^a := -\frac{\delta H}{\delta A_a^i} = i\{\tilde{E}_i^a, H\} = i\{\tilde{E}_i^a, \mathcal{S}_N\} + i\{\tilde{E}_i^a, \mathcal{C}'_{Na}\}.$$

Entonces,

$$\dot{\tilde{E}}_i^a = 2iD_b \left( E_i^{[b} N^{a]} \right) - D_b \left( \epsilon_i^{kj} N \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}_j^{b]} \right). \quad (3.6.16)$$

Lo que sigue es ilustrar el procesos de cuantización en términos de conexiones y mostrar que el estado de Chern-Simons es solución a la versión cuántica de las constricciones en gravedad compleja.

### 3.7. Cuantización Canónica en Términos de Conexiones

En la teoría cuántica se espera que los estados sean vectores viviendo en el espacio  $L^2(\mathcal{A})$ , i.e., funcionales de cuadrado integrables que dependen de las conexiones, donde  $\mathcal{A}$  es el espacio de todas las conexiones Lorentzianas en  $\Sigma \times \mathbb{C}^4$ . Por supuesto, hasta que se tenga una teoría funcional de la **medida de Lebesgue**  $\mathcal{D}\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{A}$ , este espacio  $L^2$  es puramente formal. Por lo tanto, se ignora la condición de cuadrado integrabilidad por ahora y se piensa en los estados como funcionales arbitrarios  $\Psi$  en  $\mathcal{A}$ . Para cuantizar, se remplazan las variables de Ashtekar  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$ , de **posición** y **momento**, respectivamente, por los operadores:

$$\hat{A}_a^i(\mathbf{x})\Psi[A] = A_a^i(\mathbf{x})\Psi[A], \quad (3.7.1)$$

$$\hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x})\Psi[A] = \frac{\delta}{\delta A_a^i(\mathbf{x})}\Psi[A]. \quad (3.7.2)$$

Note que los conmutadores de estos operadores están dados por:

$$\begin{aligned} [\hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x}), \hat{A}_b^j(\mathbf{y})]\Psi[A] &= \hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x}) \left( \hat{A}_b^j(\mathbf{y})\Psi[A] \right) - \hat{A}_b^j(\mathbf{y}) \left( \hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x})\Psi[A] \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta A_a^i(\mathbf{x})} \left( A_b^j(\mathbf{y})\Psi[A] \right) - A_b^j(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_a^i(\mathbf{x})}\Psi[A] \\ &= \frac{\delta A_b^j(\mathbf{y})}{\delta A_a^i(\mathbf{x})}\Psi[A] = \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x, y)\Psi[A]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x}), \hat{A}_b^j(\mathbf{y})] = \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x, y). \quad (3.7.3)$$

Similarmente,

$$[\hat{\tilde{E}}_i^a(\mathbf{x}), \hat{\tilde{E}}_j^b(\mathbf{y})] = 0 \quad (3.7.4)$$

$$[\hat{A}_a^i(\mathbf{x}), \hat{A}_b^j(\mathbf{y})] = 0. \quad (3.7.5)$$

Es decir, la relación de los conmutadores es análoga a la de los paréntesis de Poisson en la teoría clásica. Con estos operadores en mano, se puede entonces promover las constricciones de Gauss, escalar y de difeomorfismo a ecuaciones de restricción en términos de operadores. Hay

un número de ordenamiento de operadores del cual elegir: con  $E$ 's a la derecha o a la izquierda. Para el caso de  $E$ 's a la derecha existe el Loop de Wilson y se trata en [19]. El caso interesante (y el que aquí se estudia) es con  $E$ 's a la izquierda, para el que existe el estado de Chern-Simons.

Entonces, las constricciones con constante cosmológica no nula se puede escribir como:

$$\widehat{\mathcal{G}}_i := \widehat{D}_a \widehat{E}_i^a, \quad (3.7.6)$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_a := \widehat{E}_i^b \widehat{F}_{ab}^i, \quad (3.7.7)$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_\Lambda := \frac{1}{2} \widehat{E}_i^a \widehat{E}_j^b \widehat{F}_{abk} \epsilon^{ijk} - \frac{\Lambda}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \widehat{E}_i^a \widehat{E}_j^b \widehat{E}_k^c. \quad (3.7.8)$$

Donde,

$$\widehat{F}_{ab}^i \Psi[A] := F_{ab}^i \Psi[A]. \quad (3.7.9)$$

Mientras que hay algo de controversia acerca de esto, debido en parte a la naturaleza formal de las matemáticas involucradas, parece que estos operadores satisfacen relaciones de conmutación análogas a los paréntesis de Poisson de las constricciones clásicas. Como en el capítulo anterior, se define el **espacio de estados físico**  $\mathcal{H}_{phy}$  como el estado de funcionales  $\Psi$  en  $\mathcal{A}$  que satisfacen las constricciones en forma cuántica. En otras palabras,

$$\mathcal{H}_{phy} = \{\Psi : \widehat{\mathcal{G}}_i \Psi = \widehat{\mathcal{V}}_a \Psi = \widehat{\mathcal{S}}_\Lambda \Psi = 0\}.$$

El problema es, entonces, encontrar funciones  $\Psi$  en  $\mathcal{H}_{phy}$ .

Antes de continuar sería agradable decir algo acerca del significado de las constricciones. Entonces, ¿qué significan las ecuaciones de restricción? La restricción de difeomorfismos genera flujos en la rebanada  $\Sigma$ . Así que:

$$\widehat{\mathcal{V}}_a \Psi = 0,$$

está realmente diciendo que  $\Psi[A] = \Psi[A']$  siempre que  $A'$  se obtenga de  $A$  aplicando un difeomorfismo que es conexo a la identidad por un flujo. Similarmente, la restricción de Gauss resulta que genera transformaciones de norma (gauge), así que:

$$\widehat{\mathcal{G}}_i \Psi = 0,$$

dice que  $\Psi[A] = \Psi[A']$  siempre que  $A'$  se obtenga de  $A$  por una transformación de norma pequeña. ¿Qué hay de la restricción escalar? Esta es la única que realmente guarda la invarianza 4-dimensional ante difeomorfismos de la RG, y toda la dinámica de la teoría acecha en su interior. Precisamente por esta razón, es tan difícil encontrar explícitamente funcionales  $\Psi$  en  $\mathcal{A}$  para los que:

$$\widehat{\mathcal{S}}_\Lambda \Psi = 0,$$

se cumpla.

Lo que queda es estudiar la relación entre la teoría de Chern-Simons y la gravedad cuántica. El punto es que la teoría de Chern-Simons da lugar a una solución de las tres ecuaciones de restricción, si se trabaja con una versión de la gravedad cuántica con constante cosmológica,  $\Lambda$ , no nula.

Se define el **estado de Chern-Simons**  $\Psi_{CS}$  como el siguiente funcional sobre  $\mathcal{A}$ ,

$$\Psi_{CS}[A] = e^{-\frac{3\Lambda}{8} S_{CS}(A)}, \quad (3.7.10)$$

donde,  $S_{CS}(A)$  es la acción de Chern-Simons,

$$S_{CS}(A) := \int_{\Sigma} tr \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (3.7.11)$$

Así,

$$\Psi_{CS}[A] = exp \left[ -\frac{6}{\Lambda} \int_{\Sigma} tr \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right]. \quad (3.7.12)$$

**Proposición.**  $\Psi_{CS}[A]$  satisface:

$$\widehat{\mathcal{G}}_i \Psi_{CS} = \widehat{\mathcal{C}}_a \Psi_{CS} = \widehat{\mathcal{S}}_{\Lambda} \Psi_{CS} = 0, \quad (3.7.13)$$

siempre que la constante cosmológica,  $\Lambda$ , no es cero.

*Prueba.* Sea  $S_{CS}(A)$  la acción de Chern-Simons dada por:

$$S_{CS}(A) = \int_{\Sigma} tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A).$$

Entonces, su variación con respecto al potencial  $A$  da:

$$\begin{aligned} \delta S_{CS}(A) &= \int_{\Sigma} tr(\delta A \wedge dA + A \wedge \delta dA + \frac{2}{3}(\delta A \wedge A \wedge A + A \wedge \delta A \wedge A + A \wedge A \wedge \delta A)) \\ &= 2 \int_{\Sigma} tr((dA + A \wedge A) \wedge \delta A) = 2 \int_{\Sigma} tr(F \wedge \delta A), \end{aligned}$$

donde se ha usado el Teorema 4, y que  $tr(\mu \wedge \nu) = (-1)^{pq} tr(\nu \wedge \mu)$ , para  $\mu$  una  $p$ -forma y  $\nu$  una  $q$ -forma. Además, se ha expresado la curvatura en términos de formas diferenciales, i.e.,  $F := dA + A \wedge A$ . Ya que  $sl(2, \mathbb{C})$  tiene una base en términos de las matrices de Pauli, también se puede escribir la conexión de Lorentz autodual como:

$$A = -\frac{i}{2} A_a^j \sigma_j \otimes dx^a \Rightarrow \delta A = -\frac{i}{2} \delta A_a^j \sigma_j \otimes dx^a. \quad (3.7.14)$$

Entonces, la curvatura se puede escribir localmente, y en términos de coordenadas internas:

$$F = -\frac{i}{4} F_{ab}^i \sigma_i \otimes dx^a \wedge dx^b. \quad (3.7.15)$$

Por lo tanto, la variación de la acción de Chern-Simons se puede expresar localmente como:

$$\begin{aligned} \delta S_{CS}(A) &= -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} \epsilon^{abc} F_{ab}^i \delta A_c^j tr(\sigma^i \sigma_j) = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \epsilon^{abc} F_{ab}^i \delta A_c^j \delta_j^i \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \epsilon^{abc} F_{ab}^i \delta A_c^i. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\delta S_{CS}(A)}{\delta A_a^i} = -\frac{1}{2} \epsilon^{abc} F_{bc}^i, \quad (3.7.16)$$

donde se ha usado  $tr(\sigma^i \sigma_j) = 2\delta_j^i$ .

Ahora, lo que sigue es calcular explícitamente  $\widehat{\mathcal{G}}_i \Psi_{CS} = 0$ , en principio el hecho que la acción de Chern-Simons es invariante bajo transformaciones de norma pequeñas hace que la igualdad se cumpla, pero un cálculo explícito da:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_i \Psi_{CS}[A] &= \widehat{D}_a(\widehat{E}_i^a \Psi_{CS}[A]) = D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} \Psi_{CS}[A] = D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} e^{-\frac{3!}{\Lambda} S_{CS}(A)}, \\ &= -\frac{3!}{\Lambda} D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} S_{CS}(A) (e^{-\frac{3!}{\Lambda} S_{CS}(A)}) = \frac{3}{\Lambda} \epsilon^{abc} D_a F_{bc}^i \Psi_{CS}[A], \end{aligned}$$

note que de la identidad de Bianchi se tiene que:

$$d_D F = 0 \Rightarrow d_D F = -\frac{i}{4} D_a F_{bc}^i \sigma_i \otimes dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0 \Rightarrow D_a F_{bc}^i = 0,$$

entonces, se concluye que:

$$\widehat{\mathcal{G}}_i \Psi_{CS}[A] = 0. \quad (3.7.17)$$

Lo que sigue es verificar que en efecto  $\widehat{\mathcal{C}}_a \Psi_{CS}[A] = 0$ . Ya que la constricción de difeomorfismos genera difeomorfismos sobre  $\Sigma$ , y la acción de Chern-Simons se preserva bajo difeomorfismos que son conexos a la identidad, la igualdad anterior se cumple. Para dar una prueba de que esto es verdadero se debe regularizar la constricción de difeomorfismos (para detalles de esta afirmación ver [19]), con esto, si se usa reguladores simétricos, el ordenamiento con triadas a la izquierda coincide con el de triadas a la derecha, i.e., se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}_a \Psi_{CS}[A] &= \widehat{E}^b{}_i (\widehat{F}_{ab}^i \Psi_{CS}[A]) = \widehat{F}_{ab}^i (\widehat{E}^b{}_i \Psi_{CS}[A]) = -\frac{3!}{\Lambda} F_{ab}^i \frac{\delta}{\delta A_b^i} S_{CS}(A) \Psi_{CS}[A] \\ &= -\frac{3!}{\Lambda} F_{ab}^i \epsilon^{bcd} F_{cdi} \Psi_{CS}[A], \end{aligned}$$

donde, se ha usado (3.7.16). Note que se puede definir  $F_{ab}^i := \epsilon_{abc} B^{ci}$ , entonces,

$$F_{ab}^i \epsilon^{bcd} F_{cdi} = \epsilon^{bcd} \epsilon_{abf} \epsilon_{cdg} B^{fi} B_i^g = 2\delta_g^b \epsilon_{abf} B^{fi} B_i^g = 2\epsilon_{abf} B^{fi} B_i^b = 0,$$

ya que  $B^{fi} B_i^b = B^{bi} B_i^f$ , por lo tanto,

$$\widehat{\mathcal{C}}_a \Psi_{CS}[A] = 0. \quad (3.7.18)$$

Queda por verificar que  $\widehat{S}_\Lambda \Psi_{CS} = 0$ , y es aquí donde viene la parte interesante del asunto.<sup>6</sup> Primero note que:

$$\frac{\delta}{\delta A_c^k} \Psi_{CS}[A] = \frac{3}{\Lambda} \frac{\delta}{\delta A_c^k} S_{CS}(A) \Psi_{CS}[A] = -\frac{3!}{\Lambda} \epsilon^{cdf} F_{dfk} \Psi_{CS}[A].$$

Así,

$$\frac{\delta}{\delta A_c^k} \Psi_{CS}[A] = -\frac{3!}{\Lambda} \epsilon^{cdf} F_{dfk} \Psi_{CS}[A]. \quad (3.7.19)$$

Entonces, de (3.7.19) se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_\Lambda \Psi_{CS}[A] &= \epsilon^{ijk} \left( \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} F_{abi} - \frac{\Lambda}{3!} \epsilon_{abc} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \frac{\delta}{\delta A_c^k} \right) \Psi_{CS}[A] \\ &= \epsilon^{ijk} \widehat{E}_i^a \widehat{E}_j^b \left( F_{abi} \Psi_{CS}[A] - \frac{\Lambda}{3} \frac{3!}{\Lambda} \epsilon_{abc} \epsilon^{cdf} F_{dfk} \Psi_{CS}[A] \right) \\ &= \epsilon^{ijk} \widehat{E}_i^a \widehat{E}_j^b \left( F_{abi} - \frac{1}{2} 2\delta_a^{[d} \delta_b^{f]} F_{dfi} \right) \Psi_{CS}[A] = \epsilon^{ijk} \widehat{E}_i^a \widehat{E}_j^b (F_{abi} - F_{[ab]i}) \Psi_{CS}[A], \end{aligned}$$

pero  $F_{abi}$  es totalmente antisimétrico en los índices espaciales, i.e.,  $F_{[ab]i} = F_{abi}$ . Por lo tanto,

$$\widehat{S}_\Lambda \Psi_{CS}[A] = 0. \quad (3.7.20)$$

¿Cuál es el significado físico del estado de Chern-Simons? Este aún no es claro, pero una pista la proporciona el trabajo de Kodama, quien primero escribió este estado en [36]. El trabajo de Kodama indica que el estado de Chern-Simons es una versión cuantizada del **espacio anti-deSitter**, una solución simple de las ecuaciones de Einstein del vacío con constante cosmológica no nula. Sin embargo, la extensión a la que el estado de Chern-Simons es físicamente realista es aún controversial. En particular, para comprender mejor la dinámica del estado de Chern-Simons, se necesita más trabajo sobre el problema del tiempo en gravedad cuántica.

<sup>6</sup>¿Por qué debería el estado de Chern-Simons, una criatura que vive en 3 dimensiones, satisfacer una ecuación que expresa invarianza ante difeomorfismos 4-dimensionales? La explicación última de este enigma parece ser la relación entre la clase de Chern-Simons y la 2-enésima clase de Chern.

# Capítulo 4

## Teorías de Gravedad Modificadas y Funciones Cosmológicas

### 4.1. Introducción

La RG en sí misma permite reformulaciones bastante radicales que eliminan casi por completo la métrica del espaciotiempo del escenario. En 1977 Plebański propuso una descripción alternativa de la RG [37]. En la formulación de Plebański de la gravedad, la noción de la métrica del espaciotiempo dinámica es remplazada por la dinámica del operador de Hodge [38]. Recuerde que, dada una métrica  $g_{\mu\nu}$ , el operador de Hodge puede definirse como el mapa que actúa sobre el espacio de las 2-formas y que mapea una 2-forma  $B_{\mu\nu}$  en su 2-forma *dual*,  $(*B)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}$ . Aquí  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  es la forma de volumen compatible con la métrica. El operador de Hodge es invariante bajo reescalamientos conformales de la métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega g_{\mu\nu}$ . El hecho clave es que lo contrario también es verdadero y dos métricas que definen el mismo Hodge están relacionadas por una transformación conformal (para detalles véase la Ref. [39]). Esto significa que el operador de Hodge define una métrica hasta transformaciones conformales, y que éste puede usarse como el objeto dinámico principal en una teoría de la gravedad, en lugar de la métrica.

Posteriormente, como se vio en el capítulo anterior en 1986 Ashtekar [9, 10] desarrolló una nueva formulación Hamiltoniana para la gravedad en la cual las variables del espacio fase canónicamente conjugadas son una tríada densificada  $\tilde{E}_i^a$  y una conexión  $A_a^i \in SO(3)$  (originalmente Ashtekar usó el lenguaje de los espinores  $SU(2)$ , la transición de variables  $SO(3)$  a espinores  $SU(2)$  puede verse de forma detallada en [22]), como se ha demostrado en el capítulo anterior las constricciones en este formalismo toman una forma simple en relación a lo que se obtiene con el formalismo ADM. Esta nueva formulación de la RG puede verse como la versión Hamiltoniana de la teoría de Plebański. Estas ideas y la premisa de describir la RG con algo más que la métrica ha llevado a una clase de teorías mucho más generales que la misma RG.

### 4.2. Gravedad No Métrica

En 2008, K. Krasnov introdujo una clase de teorías de gravedad alternativas con el nombre de *gravedad no métrica* [14, 15], las cuales se conocen en estos días como *teorías de gravedad modificada*; en éstas se plantea cambiar la constricción escalar de tal forma que la constante cosmológica sea remplazada por una función (arbitraria)  $\phi(\Psi)$  del tensor (simétrico):

$$\Psi^{ij} := \frac{1}{\det \tilde{E}^{ai}} \left( F_{ab}^i \epsilon^{ajkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b \right)_{tr-free}, \quad (4.2.1)$$

donde *tr-free* denota la parte sin traza.  $F_{ab}^i = 2\partial_{[a}A_{b]}^i + \epsilon^{ijk}A_{a,j}A_{b,k}$  es la curvatura de  $A_a^i$ ,  $\epsilon^{ijk}$  y  $\epsilon_{abc}$  son los tensores completamente antisimétricos interno y espacial que toman los valores  $\pm 1$  y 0.

Entonces, en la representación de Ashtekar la constricción de Gauss y de difeomorfismos se mantienen invariantes, la única modificación viene en la constricción escalar. Por lo tanto, las constricciones modificadas se escriben como:

$$\mathcal{G}_i = \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a \approx 0, \quad (4.2.2)$$

$$\mathcal{V}_a = \tilde{E}_i^b F_{ab}^i \approx 0, \quad (4.2.3)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{abk} - \phi(\Psi_{tf}) \det \tilde{E}^{ai} \approx 0. \quad (4.2.4)$$

El álgebra de las constricciones dadas por las Ecs. (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4) es aún de primera clase. Ya que sólo la constricción escalar se ha modificado basta con verificar su álgebra. Sin embargo, debido a que las constricciones de Gauss y de difeomorfismos generan transformaciones de norma y de difeomorfismos espaciales respectivamente, es claro que su álgebra con la nueva constricción escalar no se modificará. Más precisamente, como la constricción es invariante de norma ésta conmuta con la constricción de Gauss, y el paréntesis de Poisson de las constricciones Hamiltoniana y de difeomorfismo da de regreso la constricción escalar con una derivada de Lie de la función lapso (ver capítulo anterior para más detalles). Por lo tanto, la parte no trivial es verificar el álgebra de constricciones entre cualesquiera dos constricciones escalares. Un cálculo preciso de  $\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\}$  lo da Krasnov en [15], aunque un cálculo más explícito se da en [26], aquí sólo se esboza tal cálculo. Sea  $\mathcal{S}_N$  el funcional escalar dado por:

$$\mathcal{S}_N := \int_{\Sigma} d^3x N \mathcal{H}. \quad (4.2.5)$$

Para calcular  $\{\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_M\}$ , se necesita hallar las variaciones de  $\mathcal{S}_N$  respecto a las variables canónicas. Variando  $\mathcal{S}_N$  respecto a  $A_a^i$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_N &= \int_{\Sigma} d^3x N \left( \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta F_{abk} - \delta \phi(\Psi_{tf}) \det \tilde{E}^{ai} \right) \\ &= \int_{\Sigma} d^3x N \left( \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b D_{[a} \delta A_{b]k} - M_{ij} \delta \Psi^{ij} \det \tilde{E}^{ai} \right), \end{aligned}$$

donde se ha definido,

$$\delta \phi(\Psi_{tf}) = \frac{\partial \phi}{\partial \Psi_{tf}^{ij}} \delta \Psi_{tf}^{ij} =: M_{ij} \delta \Psi^{ij}. \quad (4.2.6)$$

Además, se ha remplazado  $M_{ij} \delta(\dots)_{tf}^{ij}$  por la variación completa  $M_{ij} \delta(\dots)^{ij}$  para obtener la Ec. (4.2.6) ya que  $M_{ij}$  es simétrico y sin traza. Entonces,

$$\delta \Psi^{ij} = \frac{1}{\det \tilde{E}^{ai}} \delta F_{ab}^i \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b = \frac{2}{\det \tilde{E}^{ai}} D_{[a} \delta A_{b]}^i \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b.$$

Así,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_N &= \int_{\Sigma} d^3x N \left( \epsilon_i^{jk} \tilde{E}_j^a \tilde{E}_k^b D_{[a} \delta A_{b]}^i - M_{ij} \frac{2}{\det \tilde{E}^{ai}} D_{[a} \delta A_{b]}^i \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b \det \tilde{E}^{ai} \right), \\ &= \int_{\Sigma} d^3x N \left( \delta_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b - 2M_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b \right) D_{[a} \delta A_{b]}^i, \\ &= - \int_{\Sigma} d^3x N (\delta_{ij} - 2M_{ij}) \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b D_{[b} \delta A_{a]}^i. \end{aligned}$$

Definiendo  $h_{ij} := \delta_{ij} - 2M_{ij}$ , se tiene que:

$$\delta \mathcal{S}_{\underline{N}} = - \int_{\Sigma} d^3x \left[ \partial_b \left( h_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}_l^{b]} \delta A_a^i \underline{N} \right) - D_b \left( \underline{N} h_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}_l^{b]} \right) \delta A_a^i \right],$$

despreciando términos de frontera se concluye que:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\underline{N}}}{\delta A_a^i} = D_b \left( \underline{N} h_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}_l^{b]} \right) = D_b \left( \underline{N} h_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b \right), \quad (4.2.7)$$

ya que  $\epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^{[a} \tilde{E}_l^{b]} = \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b$ .

La variación respecto a la tríada  $\tilde{E}_i^a$  da:

$$\delta \mathcal{S}_{\underline{N}} = \int_{\Sigma} d^3x \underline{N} \left[ \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \delta \tilde{E}_i^a - \left( M_{lm} \delta \Psi^{lm} \det \tilde{E}^{ai} + \phi(\Psi_{tr}) \delta \det \tilde{E}^{ai} \right) \right],$$

pero  $\delta \Psi^{lm}$  con respecto a la tríada está dada por:

$$\delta \Psi^{lm} = \frac{1}{\det \tilde{E}^{ai}} F_{cb}^l \epsilon^{mkl} \delta(\tilde{E}_k^c \tilde{E}_l^b) - \frac{\Psi^{lm}}{\det \tilde{E}^{ai}} \delta \det \tilde{E}^{ai} = \frac{2}{\det \tilde{E}^{ai}} F_{ab}^l \epsilon^{mik} \tilde{E}_k^b \delta \tilde{E}_i^a - \frac{\Psi^{lm}}{\det \tilde{E}^{ai}} \delta \det \tilde{E}^{ai}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{\underline{N}} &= \int_{\Sigma} d^3x \underline{N} \left[ \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b F_{abk} \delta \tilde{E}_i^a - 2M_{lm} F_{ab}^l \epsilon^{mik} \tilde{E}_k^b \delta \tilde{E}_i^a + M_{lm} \Psi_{tf}^{lm} \delta \det \tilde{E}^{ai} - \phi(\Psi_{tr}) \delta \det \tilde{E}^{ai} \right], \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \underline{N} \left[ \left( \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \delta_{lk} F_{ab}^l - 2M_{lk} F_{ab}^l \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \right) \delta \tilde{E}_i^a + \left( M_{lm} \Psi_{tf}^{lm} - \phi(\Psi_{tf}) \right) \delta \det \tilde{E}^{ai} \right], \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \underline{N} \left( h_{lk} F_{ab}^l \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \delta \tilde{E}_i^a + \left( M_{lm} \Psi_{tf}^{lm} - \phi(\Psi_{tf}) \right) \delta \det \tilde{E}^{ai} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto, definiendo  $\Phi(\Psi_{tf}) := M_{lm} \Psi_{tf}^{lm} - \phi(\Psi_{tf})$  se tiene que:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\underline{N}}}{\delta \tilde{E}_i^a} = \underline{N} h_{lk} F_{ab}^l \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b + \frac{1}{2} \underline{N} \Phi(\Psi_{tr}) \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c, \quad (4.2.8)$$

Sigue, entonces que:

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = i \int_{\Sigma} d^3x \left[ \underline{N} \left( h_{lk} F_{ab}^l \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b + \frac{1}{2} \Phi(\Psi_{tr}) \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) D_d \left( \underline{M} h_{il} \epsilon^{lmn} \tilde{E}_m^a \tilde{E}_n^d \right) - \left( \underline{N} \leftrightarrow \underline{M} \right) \right].$$

En [26] se muestra de forma detallada que:

$$\underline{N} \frac{1}{2} \Phi(\Psi_{tr}) \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c D_d \left( \underline{M} h_{il} \epsilon^{lmn} \tilde{E}_m^a \tilde{E}_n^d \right) - \left( \underline{N} \leftrightarrow \underline{M} \right) = 0,$$

i.e., que tal término no contribuye a la integral. Entonces,

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = i \int_{\Sigma} d^3x \left[ \underline{N} h_{rs} F_{ab}^r \epsilon^{ijs} \tilde{E}_j^b D_d \left( \underline{M} h_{il} \epsilon^{lmn} \tilde{E}_m^a \tilde{E}_n^d \right) - \left( \underline{N} \leftrightarrow \underline{M} \right) \right],$$

luego,

$$\underline{N} h_{rs} F_{ab}^r \epsilon^{ijs} \tilde{E}_j^b D_d \left( \underline{M} h_{il} \epsilon^{lmn} \tilde{E}_m^a \tilde{E}_n^d \right) - \left( \underline{N} \leftrightarrow \underline{M} \right) = \underline{K}_b h_{ij} \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b h_{mn} F_{ac}^m \epsilon^{ipn} \tilde{E}_p^c,$$

donde  $\underline{K}_b := \underline{N} \partial_b \underline{M} - \underline{M} \partial_b \underline{N}$ . El procedimiento es análogo a lo que se usa en el caso cuando la función es una constante. Conviene escribir:

$$F_{ac}^i \tilde{E}_j^a \tilde{E}_k^c := \frac{1}{2} \epsilon_{ljk} \tilde{\Psi}^{il}, \quad \text{tal que, } \tilde{\Psi}^{ij} = F_{ab}^i \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b. \quad (4.2.9)$$

Así,

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = \frac{i}{2} \int_{\Sigma} d^3x \underline{K}_b \epsilon^{iln} h_{ij} h_{mn} \tilde{E}_l^b \tilde{\Psi}^{mj},$$

pero sólo la parte antisimétrica de  $\tilde{\Psi}^{mj}$  contribuye, entonces,

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = \frac{i}{2} \int_{\Sigma} d^3x \underline{K}_b \epsilon^{iln} h_{ij} h_{mn} \tilde{E}_l^b \tilde{\Psi}^{[mj]}.$$

Ahora,

$$\tilde{Q}^{ab} \underline{K}_b F_{ab}^i \tilde{E}_i^c = \frac{1}{4} \underline{K}_b \tilde{E}_k^b \epsilon^{kpq} (2\delta_r^{[l} \delta_i^{m]}) h_{lp} h_{mq} \Psi^{ir} = -\frac{1}{2} \underline{K}_b \tilde{E}_l^b \epsilon^{iln} h_{ij} h_{mn} \Psi^{[mj]},$$

donde se ha definido:

$$\tilde{Q}^{ab} := \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} h_{km} h_{ln}. \quad (4.2.10)$$

Se concluye que:

$$\{\mathcal{S}_{\underline{N}}, \mathcal{S}_{\underline{M}}\} = -i \int_{\Sigma} d^3x \underline{K}_b \tilde{Q}^{ab} F_{ac}^i \tilde{E}_i^c. \quad (4.2.11)$$

Note que  $\tilde{Q}^{ab}$  es una métrica mucho más complicada que la de RG, i.e.  $\tilde{E}_i^a \tilde{E}^{bi}$ , entonces la Ec. (4.2.11) es realmente la constricción vectorial disfrazada. De esta manera se muestra que el álgebra de constricciones es aún de primera clase. Esto implica que el conteo del número de grados de libertad físicos no cambia y aún se tienen dos grados de libertad. En RG la cantidad  $\Psi^{ij}$  que se define por la Ec. (4.2.1) no es más que la parte de Weyl del tensor de curvatura de Riemann. La teoría modificada, entonces, puede describirse como aquella en la que la constante cosmológica se vuelve una función no trivial de la *curvatura*.

Ahora, la acción de la teoría covariante espaciotemporal que conduce a las constricciones modificadas dadas por las Ecs. (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4) fue propuesta en [14] y está dada por:

$$S = \int_{\Sigma} B_i \wedge F^i(A) + \frac{1}{2} (\Lambda_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \phi(\Psi)) B^i \wedge B^j. \quad (4.2.12)$$

Cuando  $\phi = cte. = \Lambda$  se recupera la acción de Plebański para RG con constante cosmológica. En la acción anterior  $B^i$  es una 2-forma con valores en el álgebra de Lie de  $SU(2)$ ,  $A^i$  es la 1-forma de conexión,  $F^i(A)$  es su curvatura, y  $\Lambda^{ij}$  es el campo multiplicador de Lagrange, el cual se requiere que sea simétrico y sin traza.

La descomposición 3+1 de la Ec. (4.2.12) procede como en [38], y está dada explícitamente en [15] como:

$$S = \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}} d^3x dt [\tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i + A_0^i \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a + (\delta^{ij} \underline{N} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \underline{N}_k) \tilde{\Psi}_{ij} - \underline{N} \phi(\Psi) \det \tilde{E}^{ai}], \quad (4.2.13)$$

donde  $\tilde{\Psi}^{ij} := F_{ab}^i \epsilon^{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b$ ,  $\underline{N}^k$  es el vector de corrimiento y  $\underline{N}$  es la función lapso.

Se ha descrito, por lo tanto, una familia infinita de teorías de gravedad modificada de cuatro dimensiones que propagan dos grados de libertad. Una teoría de la familia está parametrizada por una función arbitraria  $\phi(\Psi)$  de una matriz simétrica sin traza (por lo tanto, una función de dos variables). Se puede recuperar la formulación de la RG (clásica) con constante cosmológica haciendo  $\phi(\Psi) = cte. = \lambda$ , de modo que la RG es parte de esta familia de teorías. La nueva clase de teorías de gravedad descrita puede tener aplicaciones muy amplias. En particular, puede que sea posible usarla para entender el problema de la constante cosmológica, que consta en explicar por qué su valor observado es tan diferente del que se espera que surja como la energía

del vacío de los campos cuánticos. Más ejemplos de aplicación se pueden ver en [16, 40].

Esta teoría también tiene implicaciones para el programa de gravedad cuántica por lazo (LQG, por sus siglas en inglés). Este programa a menudo es criticado por elevar la RG al estado fundamental incluso a escalas de Planck, donde, como se cree ampliamente, la descripción de la RG no es válida. El resultado de K. Krasnov muestra que el punto de partida de LQG, i.e., el espacio fase cinemático junto con el álgebra de constricciones del tipo mostrado, es común a una clase mucho más general de teorías que RG. Por lo tanto, siempre que se permita una clase más general de constricciones Hamiltonianas, la tecnología y todos los resultados de LQG inmediatamente se extienden a una clase bastante grande de teorías, algunas de las cuales posiblemente estén mucho más cerca de la descripción correcta de la gravedad a la escala de Planck.

### 4.3. Función Cosmológica en la Representación de Ashtekar

Nótese que la función cosmológica dada por Krasnov,  $\phi(\Psi)$ , es genérica, no hay una forma específica para ésta hoy en día (sin embargo, véase [41]).

A pesar de no tener una forma específica para  $\phi(\Psi_{tf})$ , estas funciones dieron la idea a Rosas-Rodriguez [17] para sugerir el siguiente ansatz como función cosmológica,

$$\varphi := \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{ijk} \tilde{E}^{ai} \tilde{E}^{bl} F_{ab}^k}{\det \tilde{E}^{ai}}. \quad (4.3.1)$$

Con esta función escalar, la restricción Hamiltoniana dada por la Ec. (4.2.4) se satisface automáticamente tanto en gravedad clásica como cuántica. Nótese que esta función cosmológica no es un miembro de las teorías de Krasnov.

Por lo tanto, el problema de encontrar funcionales  $\Phi[A] \in \mathcal{H}_{phy}$  se reduce. No hay problema con la restricción escalar, ya que cualquier funcional que satisface las restricciones de Gauss y vectorial,

$$\widehat{\mathcal{G}}_i \Psi = 0, \quad \widehat{\mathcal{H}}_a \Psi = 0, \quad (4.3.2)$$

es solución de esta restricción (escalar). Por ejemplo, el estado de Chern-Simons sigue siendo solución a estas dos restricciones pero ya no es necesario verificar la restricción escalar, véase la Sección 4.7.

### 4.4. Función Cosmológica en la Representación de ADM

El ansatz para la representación de Ashtekar, dado en la sección anterior, sugiere algo análogo en la representación ADM, lo cual es tratado en [18].

Como se revisó en la sección 6 del Capítulo 2, para el formalismo ADM extendido a tríadas las variables canónicamente conjugadas son la tríada  $e_{ai}$  y el momento  $p^{ai}$ , además, las constricciones toman la forma:

$$\mathcal{H} = p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 - 4e^2 {}^{(3)}R - 8e^2 \lambda \approx 0. \quad (4.4.1)$$

$$\mathcal{H}_a = -e^{ai} \mathcal{D}_b p^{bi} \approx 0. \quad (4.4.2)$$

donde  $p^{ij} := p^{ai}e_a^j$ ,  $e := \det e_{ai}$  y  $\mathcal{D}_b$  es la derivada covariante compatible con la tríada,  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci y  $\lambda$  es la constante cosmológica.

Por lo tanto, la función cosmológica:

$$\Lambda = \frac{p^{ij}p_{ij} - \frac{1}{2}(p^i_i)^2 - 4e^2{}^{(3)}R}{8e^2}, \quad (4.4.3)$$

resuelve la constricción dada por la Ec. (4.4.1) tanto en gravedad cuántica como cuántica. Este ansatz es una función escalar de nuevo.

Aunque los ansatz  $\varphi$  y  $\Lambda$  se obtienen esencialmente de un simple despeje de las Ecs. (4.2.4) y (4.4.1), respectivamente, la interpretación para estas funciones cosmológicas no es del todo claro. Nótese que también pueden obtenerse más funciones cosmológicas a partir de las formulaciones Hamiltonianas de Hilbert-Palatini H-P. Además se podría obtener una función cosmológica de la representación de Ashtekar del campo gravitacional en  $2 + 1$  dimensiones, como se menciona en [18].

Se debe señalar que este modelo con los ansatz  $\varphi$  y  $\Lambda$  guarda similitud con la dinámica sin dinámica del modelo de Husain-Kuchar [42].

# Capítulo 5

## Relación entre Funciones Cosmológicas en las Representaciones de ADM y Ashtekar

### 5.1. Introducción

En el capítulo anterior se dio un repaso muy general de las teorías de gravedad modificadas de Krasnov y la introducción de dos funciones cosmológicas (como *ansatz*) que resuelven las constrictión escalar automáticamente en las representaciones de ADM y Ashtekar del campo gravitacional. Se pudo notar que, a nivel de formulación Hamiltoniana, la única modificación comparada con el caso de la RG usual es que la constante cosmológica es remplazada por una función arbitraria de la “curvatura”,  $\phi(\Psi)$ . Quizá la implicación física más relevante de esta modificación es que la constante cosmológica observada en regiones de curvatura relativamente baja no tiene que ser la misma que la observada en regiones de curvatura relativamente alta. En particular, la constante cosmológica que aparece en las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la evolución de un Universo isotrópico homogéneo está dada por  $\lambda_{cosm.} = \phi(0)$  (el argumento de la función  $\phi$  es cero en este caso debido a las simetrías) y no tiene que ser igual a la constante cosmológica efectiva de gran curvatura en las escalas de Planck. Esto da un posible mecanismo para resolver el **problema de la constante cosmológica**, que consiste en explicar por qué la constante cosmológica observada es tan diferente de la constante cosmológica del orden  $1/l_p^2$ , donde  $l_p$  es la longitud de Planck, que se espera sea inducida por la física a escala de Planck. La constante cosmológica inducida a escalas de Planck  $\phi(1/l_p^2)$  (en el régimen de curvaturas extremadamente grandes  $1/l_p^2$ ) bien podría ser del orden de  $1/l_p^2$  pero esto no tendría ningún efecto observable siempre que el valor  $\phi(0)$  de la función  $\phi$  con curvatura cero sea pequeño. No se profundizará más en estos asuntos, sólo queda decir que este problema de la constante cosmológica aún permanece abierto hoy en día.

En este capítulo se presenta el núcleo de esta tesis. Dadas las funciones cosmológicas dadas como *ansatz* en las representaciones de Ashtekar y ADM del capítulo anterior, se busca una forma de relacionarlas, i.e., encontrar una fórmula con la que se pueda escribir una función cosmológica en términos de la otra. Por su puesto, el hecho que las variables de Ashtekar y las variables en el espacio ADM extendido a tríadas están relacionadas por una transformación canónica facilita en gran medida los cálculos.

## 5.2. El Espacio Fase ADM Extendido y las Variables de Ashtekar

En esta sección se muestra la relación que existe entre el formalismos ADM extendido a tríadas y las variables de Ashtekar. Éstos están relacionados a través de una transformación canónica, y para mostrar tal afirmación, en primer lugar se define el nuevo campo  $K_{ai}$ :

$$K_{ai} := i(A_{ai} - \Gamma_{ai}), \quad (5.2.1)$$

donde  $A_a^i$  es la conexión de Ashtekar y  $\Gamma_{ai}$  es la conexión de espín libre de torsión definida de tal manera que aniquila al campo eléctrico  $\tilde{E}^{ai}$ ,

$$\mathcal{D}_a \tilde{E}^{bi} := \partial_a \tilde{E}^{ai} + \Gamma_{ac}^b \tilde{E}^{ci} - \Gamma_{ac}^c \tilde{E}^{bi} + \epsilon^{ijk} \Gamma_{aj} \tilde{E}_i^b = 0, \quad (5.2.2)$$

en particular,

$$\mathcal{D}_a \tilde{E}^{ai} = \partial_a \tilde{E}^{ai} + \epsilon^{ijk} \Gamma_{aj} \tilde{E}_k^a = 0 \quad (5.2.3)$$

Ahora, se usa la definición dada en la Ec. (5.2.1) para reescribir todas las constricciones en términos de  $K_{ai}$  y  $\tilde{E}^{ai}$ . Primero, con (5.2.3) la constricción de Gauss se puede escribir como,<sup>1</sup>

$$\mathcal{G}^i := D_a \tilde{E}^{ai} := \partial_a \tilde{E}^{ai} + \epsilon^{ijk} (\Gamma_{aj} - iK_{aj}) \tilde{E}_k^a = \mathcal{D}_a \tilde{E}^{ai} - iK_{aj} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_k^a \approx 0.$$

Así,

$$\mathcal{G}^i = -i\epsilon^{ijk} K_{aj} \tilde{E}_k^a \approx 0. \quad (5.2.4)$$

Luego, la curvatura de  $A_{ai}$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} F_{abi} &= 2\partial_{[a}(\Gamma_{b]i} - iK_{b]i}) + \epsilon_{ijk} (\Gamma_a^j \Gamma_b^k - i\Gamma_a^j K_b^k - iK_a^j \Gamma_b^k - K_a^j K_b^k) \\ &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]i} + \epsilon_{ijk} \Gamma_a^j \Gamma_b^k - 2i\partial_{[a} K_{b]i} - \epsilon_{ijk} K_a^j K_b^k - i\epsilon_{ijk} (\Gamma_a^j K_b^k - \Gamma_b^j K_a^k) \\ &= f_{abi} - 2i (\partial_{[a} K_{b]i} + \epsilon_{ijk} \Gamma_{[a}^j K_{b]i}^k) - \epsilon_{ijk} K_a^j K_b^k. \end{aligned}$$

Así,

$$F_{ab}^i = f_{ab}^i - 2i\mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i - \epsilon^{ijk} K_{aj} K_{bk}, \quad (5.2.5)$$

donde  $f_{abi}$  es la curvatura de  $\Gamma_{ai}$  definida por:  $f_{abi} := 2\partial_{[a} \Gamma_{b]i} + \epsilon_{ijk} \Gamma_a^j \Gamma_b^k$ . Entonces, la constricción vectorial, ver Ec. (3.4.47), se puede escribir como:

$$\mathcal{H}_a := \tilde{E}_i^b F_{ab}^i = \tilde{E}_i^b f_{ab}^i - 2i\tilde{E}_i^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i - \epsilon^{ijk} K_{aj} \tilde{E}_i^b K_{bk} \approx 0,$$

pero  $\tilde{E}_i^b f_{ab}^i = 0$ , es la identidad de Bianchi, véase por ejemplo la Ref. [31] para una revisión de ésto. Por tanto,

$$\mathcal{H}_a = -2i\tilde{E}_i^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i + K_{aj} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^b K_{bk} = -2i\tilde{E}_i^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i + K_{aj} \mathcal{G}^j \approx 0.$$

Así,

$$\mathcal{H}_a \approx -2i\tilde{E}_i^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i \approx 0. \quad (5.2.6)$$

Queda por reescribir la constricción escalar, Ec. (3.4.48) usando la Ec. (5.2.5); lo cual da:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b (f_{abk} - 2i\mathcal{D}_{[a} K_{b]k} - \epsilon_{klm} K_a^l K_b^m) - \lambda \det \tilde{E}^{ai} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b f_{abk} - i\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]k} - \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} - \lambda \det \tilde{E}^{ai} \approx 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Recuede que  $D_a$  es la conexión asociada con el potencial vectorial  $A_{ai}$  y  $\mathcal{D}_a$  es la conexión asociada con el potencial vectorial  $\Gamma_{ai}$ .

Note que al integrar sobre  $\Sigma$  se tiene:

$$\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \mathcal{D}_{[a} K_{b]k} = \partial_a (\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b K_{bk}) - K_{bk} \mathcal{D}_a (\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b) = \partial_a (\tilde{E}_i^a \mathcal{G}^i) - K_{bk} \mathcal{D}_a (\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b) \approx 0,$$

donde se han despreciado términos proporcionales a la restricción de Gauss y se ha usado la compatibilidad de  $\mathcal{D}_a$  con  $\tilde{E}_i^a$  y se desprecian divergencias totales. Por lo tanto:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b f_{abk} - \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} - \lambda \det \tilde{E}^{ai} \approx 0 \quad (5.2.7)$$

Comparando las restricciones  $\mathcal{G}_i$ ,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_a$  con las restricciones ADM en la Sección 3.6, Ecs. (2.6.58), (2.6.69) y (2.6.70), respectivamente, se puede ver que tienen la misma estructura. Para obtener una concordancia exacta, es necesario cambiar  $\tilde{E}^{ai}$  por su inversa no densificada  $e_{ai}$ , que es la coordenada usada en la Sección 3.6.

Lo que sigue es probar que la transformación dada por la Ec. (5.2.1) es canónica. Para mostrar esto, se define la  $\tilde{E}^{ai}$  no densificada y su inversa, es decir,

$$\tilde{E}^{ai} =: e e^{ai} \quad e_{bi} e^{ai} = \delta_b^a \quad e := \det e_{ai} = \sqrt{\det \tilde{E}^{ai}}. \quad (5.2.8)$$

Note que,  $\det \tilde{E}^{ai} = \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c$ , entonces,

$$\mathcal{D}_a e^2 := \partial_a e^2 = 2e \partial_a e = \mathcal{D}_a \left( \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right) = 0 \Rightarrow \partial_a e = 0,$$

donde se ha usado el hecho de que  $\mathcal{D}_a$  es compatible con  $\tilde{E}^{bi}$  (véase la Ec. (5.2.3)). Sigue que  $\mathcal{D}_a$  también es compatible con la tríada  $e^{bi}$ . Por lo tanto, sigue entonces:

$$\mathcal{D}_{[a} \tilde{E}_{b]i} = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{[a} e_{b]i} = \partial_{[a} e_{b]i} - \Gamma_{[ab]}^c e_{ci} + \epsilon_{ijk} \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k = 0.$$

Así,

$$\mathcal{D}_{[a} e_{b]i} = \partial_{[a} e_{b]i} + \epsilon_{ijk} \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k = 0, \quad (5.2.9)$$

ya que  $\Gamma_{[ab]}^c = 0$ . Luego, tomando la derivada temporal de la Ec. (5.2.9) se tiene:

$$\partial_0 \left( \partial_{[a} e_{b]i} + \epsilon_{ijk} \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k \right) = \partial_{[a} \dot{e}_{b]i} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_{[a}^j e_{b]}^k + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_{[a}^j \dot{e}_{b]}^k = 0.$$

Así,

$$\mathcal{D}_{[a} \dot{e}_{b]i} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_{[a}^j e_{b]}^k = 0. \quad (5.2.10)$$

Si se usa un tensor totalmente antisimétrico  $\epsilon^{ab}$ , tal que  $\epsilon^{ab} \epsilon_{dc} = 2\delta_d^{[a} \delta_c^{b]}$ , se tiene que:<sup>2</sup>

$$\epsilon^{ab} (\mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_a^j e_b^k) = \frac{1}{2} (\epsilon^{ab} - \epsilon^{ba}) \mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \frac{1}{2} (\epsilon^{ab} - \epsilon^{ba}) \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_a^j e_b^k = \epsilon^{ab} (\mathcal{D}_{[a} \dot{e}_{b]i} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_{[a}^j e_{b]}^k) = 0.$$

Así,

$$\epsilon^{ab} (\mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_a^j e_b^k) = 0. \quad (5.2.11)$$

Proyectando la Ec. (5.2.11) sobre el campo  $\epsilon_{ac} \epsilon^{ilm} e_l^a e_m^c$  se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ab} \epsilon_{ac} \epsilon^{ilm} e_l^a e_m^c (\mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_a^j e_b^k) &= 2\delta_c^{[a} \epsilon^{ilm} e_l^a e_m^c (\mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \epsilon_{ijk} \dot{\Gamma}_a^j e_b^k) = 0 \\ &= \epsilon^{ilm} e_l^a e_m^b \mathcal{D}_a \dot{e}_{bi} + \epsilon^{ilm} \epsilon_{ijm} \dot{\Gamma}_a^j e_l^a = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>También se cumple  $\epsilon^{ab} \epsilon_{ac} = 2\delta_c^b$ , para más detalles ver [46].

Así,

$$e\dot{\Gamma}_a^l e_l^a = -\frac{e}{2}\epsilon^{ilm} e_l^a e_m^b \mathcal{D}_a \dot{e}_{bi}.$$

De la Ec. (5.2.8), sigue que:

$$\dot{\Gamma}_a^i \tilde{E}_i^a = -\frac{1}{2}e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \mathcal{D}_a \dot{e}_{bk} = -\frac{1}{2}\left[\partial_a (e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \dot{e}_{bk}) - \dot{e}_{bk} \mathcal{D}_a (e\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a e_j^b)\right],$$

pero ya que  $\mathcal{D}_a e_i^b = 0$ , entonces,

$$\dot{\Gamma}_a^i \tilde{E}_i^a = -\frac{1}{2}e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \mathcal{D}_a \dot{e}_{bk} = -\frac{1}{2}\partial_a (e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \dot{e}_{bk}). \quad (5.2.12)$$

De la Ec. (5.2.1) se tiene que:

$$\dot{\Gamma}_a^i = \dot{A}_a^i + i\dot{K}_a^i, \quad (5.2.13)$$

entonces,

$$(\dot{A}_a^i + i\dot{K}_a^i) \tilde{E}_i^a = -\frac{1}{2}\partial_a (e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \dot{e}_{bk}).$$

Así,

$$\tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i = -i\tilde{E}_i^a \dot{K}_a^i - \frac{1}{2}\partial_a (e\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b \dot{e}_{bk}). \quad (5.2.14)$$

Por lo tanto, la transformación dada por la Ec. (5.2.1) es canónica hasta divergencia total de la Ec. (5.2.14). Esto significa que el paréntesis de Poisson fundamental ahora es:

$$\{K_a^i(\mathbf{x}), \tilde{E}_j^b(\mathbf{y})\} = \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.2.15)$$

Note que una comparación entre la Ec. (5.2.7) y el Hamiltoniano-ADM dado en la Sección 3.6 muestra que  $K_{ai} \tilde{E}_b^i$  tiene la interpretación como la curvatura extrínseca densificada. Más detalles de esta transformación canónica pueden verse en [43].

### 5.3. Relación entre Funciones Cosmológicas

En la parte final del capítulo anterior se han presentado un par de funciones cosmológicas, una para la representación de Ashtekar y otra para la representación ADM, y las cuales resuelven la constricción escalar en cada representación. La controversia es que no se sabe con certeza la forma en que estas funciones cosmológicas se relacionan. En la Ref. [18] se plantea que estas funciones son equivalentes módulo alguna constricción de la teoría. Aquí se hace un desarrollo explícito de la relación que existe entre tales funciones cosmológicas.

En la sección anterior se ha demostrado que cuando se usa una transformación canónica para relacionar las variables de Ashtekar y las variables del espacio fase extendido ADM, la constricción escalar toma la forma [ver Ec. (5.2.7)]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b f_{abk} - \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} - \lambda \det \tilde{E}^{ai} \approx 0. \quad (5.3.1)$$

Usando las relaciones definidas por la Ec. (5.2.8) se puede escribir esta constricción en términos de variables no densificadas, i.e., en términos de la tríada  $e_{ai}$  y su determinante. Entonces,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} e^2 e_i^a e_j^b f_{abk} - e^2 e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} - \lambda e^2 \approx 0.$$

Por lo tanto, el ansatz dado por la Ec. (4.3.1) ahora toma la forma:

$$\varphi := \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b f_{abk} - e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]}. \quad (5.3.2)$$

Note que:

$$\epsilon^{ijk} e_i^a e_j^b f_{abk} = e_i^a e_j^b \Omega_{ab}^{ij}, \quad (5.3.3)$$

donde  $\Omega_{ab}^{ij} = -\Omega_{ab}^{ji}$ , es la curvatura de la conexión de Lorentz asociada con la conexión de espín similar a la que se ha encontrado en la Sección 4.2, véase Ec. (3.2.19). Ahora, ya se ha mostrado (véase Ec. (3.2.24)) que el escalar de Ricci (tridimensional) está relacionado a la curvatura de la conexión de espín como:

$${}^{(3)}R := e_i^a e_j^b \Omega_{ab}^{ij}. \quad (5.3.4)$$

Por lo tanto, la función cosmológica se puede escribir en forma más familiar como:

$$\varphi := \frac{1}{2} {}^{(3)}R - e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]}. \quad (5.3.5)$$

Ahora, a partir del ansatz dado por la Ec. (4.4.3) se tiene que la función cosmológica en la representación ADM está dada por:

$$\Lambda := \frac{p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 - 4 e^2 {}^{(3)}R}{8 e^2},$$

entonces,

$$8 e^2 \Lambda = p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 - 4 e^2 {}^{(3)}R.$$

Así,

$${}^{(3)}R = -2\Lambda + \frac{1}{4 e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right). \quad (5.3.6)$$

Sustituyendo la Ec. (5.3.6) en la Ec. (5.3.5) se tiene que:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ -2\Lambda + \frac{1}{4 e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right) \right] - e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]}.$$

Así,

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{8 e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right) - e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]}. \quad (5.3.7)$$

La ecuación anterior representa la primera relación entre funciones cosmológicas en las representaciones de Ashtekar y ADM del campo gravitacional. Lo que sigue es manipular la ecuación (5.3.7) para llegar a una relación más compacta.

En la Sección 3.6 se ha dado una relación explícita entre el campo  $K_{ai}$  y  $p^{ai} = e_j^a p^{ij}$ , i.e.,

$$K_a^i = \frac{1}{2e} \left( p_a^i - \frac{1}{2} (p_k^k) e_a^i \right). \quad (5.3.8)$$

Ahora,  $p^{ij} = p^{ai} e_j^a$ , entonces,

$$p^{ij} p_{ij} = p^{ai} e_a^j p_{bi} e_j^b = p^{ai} p_{bi} \delta_a^b = p^{ai} p_{ai}, \quad p := p^{ai} e_{ai} = p^{ij} e_j^a e_{ai} = p_i^i. \quad (5.3.9)$$

A partir de las Ecs. (5.3.8) y (5.3.9) es fácil determinar explícitamente  $e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]}$ . Por un lado,

$$e_i^a e_j^b K_a^i K_b^j = e_i^a e_j^b \frac{1}{4e^2} \left( p_a^i - \frac{1}{2} p e_a^i \right) \left( p_b^j - \frac{1}{2} p e_b^j \right) = \frac{1}{4e^2} \left[ e_i^a e_j^b p_a^i p_b^j - \frac{p}{2} (e_b^j p_a^i e_i^a e_j^b + e_a^i p_b^j e_i^a e_j^b) \right]$$

$$+\frac{1}{4}p^2 e_i^a e_j^b e_a^i e_b^j] = \frac{1}{4e^2} \left[ p_i^j p_j^i - \frac{p}{2}(p_i^j \delta_j^i + p_j^i \delta_i^j) + \frac{1}{4}p^2 \delta_i^j \delta_j^i \right] = \frac{1}{4e^2} \left( p^2 - 3p^2 + \frac{9}{4}p^2 \right).$$

Así,

$$e_i^a e_j^b K_a^i K_b^j = \frac{1}{16e^2} p^2. \quad (5.3.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} e_i^a e_j^b K_a^j K_b^i &= \frac{1}{4e^2} \left[ e_i^a e_j^b p_a^j p_b^i - \frac{p}{2} e_i^a e_j^b (p_a^j e_b^i + p_b^i e_a^j) + \frac{1}{4} p^2 e_i^a e_j^b e_a^j e_b^i \right] \\ &= \frac{1}{4e^2} \left[ p_i^j p_j^i - \frac{p}{2} (p_i^j \delta_j^i + p_j^i \delta_i^j) + \frac{1}{4} p^2 \delta^{ii} \right] = \frac{1}{4e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - p^2 + \frac{3}{4} p^2 \right). \end{aligned}$$

Así,

$$e_i^a e_j^b K_a^j K_b^i = \frac{1}{4e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{4} p^2 \right). \quad (5.3.11)$$

De las Ecs. (5.3.10) y (5.3.11), sigue que:

$$e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} = \frac{1}{2} \left[ e_i^a e_j^b K_a^i K_b^j - e_i^a e_j^b K_a^j K_b^i \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{16e^2} p^2 - \frac{1}{4e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{4} p^2 \right) \right].$$

Entonces,

$$e_i^a e_j^b K_a^{[i} K_b^{j]} = -\frac{1}{8e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_k^k)^2 \right). \quad (5.3.12)$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ec. (5.3.12) en la Ec. (5.3.7) se obtiene que:

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{8e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right) + \frac{1}{8e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right).$$

Así,

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{4e^2} \left( p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 \right). \quad (5.3.13)$$

Note que la Ec. (5.3.13) es una relación más compacta entre las funciones cosmológicas.

Además, de la Ec. (4.4.3) se tienen que:

$$p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} (p_i^i)^2 = 8e^2 \Lambda + 4e^2 {}^{(3)}R. \quad (5.3.14)$$

Entonces, la relación dada por la Ec. (5.3.13) se puede escribir como:

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{4e^2} \left( 8e^2 \Lambda + 4e^2 {}^{(3)}R \right) = -\Lambda + 2\Lambda + {}^{(3)}R.$$

Así,

$$\varphi = \Lambda + {}^{(3)}R, \quad (5.3.15)$$

la cual representa la relación más compacta entre las funciones cosmológicas en las representaciones de ADM y Ashtekar del campo gravitacional.

Queda aún por escribir una forma de tal relación en términos de la curvatura extrínseca.

De la Ec. (5.3.9) sigue que la Ec. (5.3.13) se puede escribir como:

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{4e^2} \left( p^{ai} p_{ai} - \frac{1}{2} p^2 \right). \quad (5.3.16)$$

Luego, de la Ec. (5.3.8) se tiene que  $p^{ai} = 2K^{ai}e + \frac{1}{2}pe^{ai}$ , entonces,

$$p^{ai}p_{ai} = 4e^2K_{ai}K^{ai} + 2peK^{ai}e_{ai} + \frac{p^2}{4}\delta_i^i = 4K_{ai}K^{ai} + 2peK + \frac{3}{4}p^2, \quad (5.3.17)$$

donde se ha definido  $K := K^{ai}e_{ai}$ . Ahora el campo  $K_a^i$  se puede escribir como [44]:

$$K_a^i := K_{ab}e^{bi} + J_{ab}e^{bi}, \quad (5.3.18)$$

donde  $K_{ab} = K_{(ab)}$  es la curvatura extrínseca y  $J_{ab} = J_{[ab]}$ . De la discusión de la formulación ADM extendida a tríadas la anulación de  $J_{ab}$  es equivalente a que la constricción interna se cumpla [ver Ec. (2.6.58)]. Entonces,

$$K_{ai}K^{ai} = K_{ab}K^{ac}\delta_c^b + 2e^{-1}K_{ab}J^{ac}\delta_c^b + e^{-2}J_{ab}J^{ac}\delta_c^b.$$

Así,

$$K_{ai}K^{ai} = K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}. \quad (5.3.19)$$

Sustituyendo la Ec. (5.3.19) en la Ec. (5.3.17) se encuentra que:

$$p^{ai}p_{ai} = 4e^2(K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}) + 2peK + \frac{3}{4}p^2.$$

Luego, note que:

$$p := e_{ai}p^{ai} = 2K^{ai}e_{ai}e + \frac{p}{2}e_{ai}e^{ai}.$$

Entonces,

$$K = -\frac{1}{4e}p \Rightarrow K^2 = \frac{1}{16e^2}p^2.$$

Luego,

$$p^{ai}p_{ai} = 4e^2(K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}) + 2e(-4eK)K + \frac{3}{4}(16e^2K^2).$$

Así,

$$p^{ai}p_{ai} = 4e^2(K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}) + 4e^2K^2. \quad (5.3.20)$$

Sigue que:

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{4e^2} \left[ 4e^2(K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}) + 4e^2K^2 - \frac{1}{2}(16e^2K^2) \right].$$

Entonces,

$$\varphi = -\Lambda + \frac{1}{4e^2} \left[ 4e^2(K_{ab}K^{ab} + 2e^{-1}K^{ab}J_{ab} + e^{-2}J_{ab}J^{ab}) - 4e^2K^2 \right]. \quad (5.3.21)$$

Por lo tanto,

$$\varphi \approx -\Lambda + K_{ab}K^{ab} - K^2, \quad (5.3.22)$$

donde  $\approx$  denota módulo la constricción de rotaciones internas. Pero, cuando se hace una restricción a  $X_{phy}$ , se tiene que [ver Ecs. (2.3.20), (2.3.21)]:

$$K_{ab}K^{ab} - K^2 \approx {}^{(3)}R. \quad (5.3.23)$$

Se concluye que:

$$\varphi \approx -\Lambda + {}^{(3)}R, \quad (5.3.24)$$

la cual representa la relación más compacta entre las funciones cosmológicas en las representaciones de ADM y Ashtekar del campo gravitacional si se hace una restricción al espacio fase físico  $X_{phy}$ .

Note que las Ecs. (5.3.15) y (5.3.24) no tienen por que se las mismas, resulta que cuando se determina la Ec. (5.3.15) se trabaja sobre todo el espacio fase de la teoría, i.e. sobre  $Met(\Sigma)$ , mientras que para obtener la Ec. (5.3.24) se hace una restricción al espacio fase físico  $X_{phy}$ .



# Capítulo 6

## Conclusiones

Finalmente, en este trabajo se ha hallado una relación entre las funciones cosmológicas que Rosas-Rodríguez propone en [17, 18], ver Ecs. (4.3.1) y (4.4.3). En primer lugar se demostró que las funciones cosmológicas son iguales (fuertemente) hasta el escalar de curvatura de Ricci espacial. Para propósitos más geométricos se ha demostrado explícitamente que las funciones cosmológicas (hasta signo) difieren por un término que involucra la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  módulo la constricción interna, la cual está dada por la ley de Gauss para el espacio fase ADM extendido a tríadas. Note que la curvatura extrínseca es un objeto geométrico de la subvariedad  $\Sigma$ . La curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad en sí misma, sólo toma significado cuando se encuentra encajada en una variedad de dimensión superior, ya que, de la misma definición,  $K_{ab}$  depende de la geometría de la variedad  $M$  (recuerde, en su definición aparece la derivada covariante del espaciotiempo y el vector normal a la hipersuperficie). Físicamente, el hecho de que la curvatura extrínseca aparezca en la ecuación que relaciona las funciones cosmológicas dice que estas guardan información de la evolución de la métrica de las hipersuperficies que folian el espaciotiempo pues si se mira hacia la Ec. (2.2.16) se establece que la curvatura extrínseca está estrechamente relacionada con la derivada temporal de la métrica  $q_{ab}$ . Además, cuando se mira hacia el espacio físico ADM (estándar),  $X_{phy.}$ , resulta que el término que relaciona (hasta signo) las funciones cosmológicas es débilmente el escalar de Ricci espacial. Note que se han encontrado dos ecuaciones que dan la relación entre funciones cosmológicas en términos del escalar de curvatura de Ricci espacial, una lo hace fuertemente y la otra débilmente, ver Ecs. (5.3.15) y (5.3.24) respectivamente, estas ecuaciones no tienen por qué ser iguales ya que en la primera se trabaja sobre todo el espacio fase y en la segunda se hace una restricción al espacio fase físico ADM.

En la teoría de K. Krasnov la función cosmológica depende de un tensor simétrico sin traza, i.e.  $\phi(\Psi)$ . Resulta que en la teoría de la RG de Plebański el tensor  $\Psi$  es el tensor de Weyl que se relaciona al tensor de curvatura de Ricci [3], entonces, se dice que la función cosmológica depende de la curvatura. Realmente en [18] se sugiere que las funciones cosmológicas son iguales módulo la constricción de Gauss, sin embargo, este trabajo ha mostrado explícitamente que este no es el caso y que las funciones cosmológicas se relacionan por medio de la curvatura escalar de Ricci. En este momento no se cuenta con una interpretación precisa de lo que significa que las funciones cosmológicas en dos representaciones canónicas del campo gravitacional se relacionen a través del escalar de curvatura espacial.

Se debe mencionar que si se usa la convención que P. Peldan adopta en [24], donde además se utiliza la transformación canónica  $K_{ai} := A_{ai} + i\Gamma_{ai}$ , resulta que la relación entre las funciones cosmológicas es igual a la que se obtiene en la Ec. (5.3.24).

Aunque hoy en día no se tiene una idea clara sobre lo que indican estas funciones cosmológicas propuestas como ansatz, se espera que los resultados de este trabajo sirvan para aclarar un poco más lo que éstas implican física y geoméricamente, lo cual se puede dejar como proyecto a futuro. También, como proyecto a futuro se deja probar la forma en que dependen las funciones cosmológicas de la derivada temporal de la 3-métrica  $q_{ab}$ . Esto se puede lograr partiendo de la Ec. (5.3.22) y usando la expresión para la curvatura extrínseca dada por la Ec. (2.2.16).

# Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition, Oxford University Press, New York (1982).
- [2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, Addison-Wesley, Reading MA (1994).
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [5] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton (1921).
- [6] P. A. M. Dirac, “Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation”, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 114 (1959).
- [7] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Yeshiva University, Belfer Graduate School of Science Monograph series, No. 2 (1964).
- [8] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, p 227, ed. L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [9] A. Ashtekar, “New Variables for Classical and Quantum Gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [10] A. Ashtekar, “New Hamiltonian Formulation of General Relativity”, *Phys. Rev. D* **36**, 1587 (1987).
- [11] C. N. Yang and R. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, *Phys. Rev.* **96** (1): 191-195 (1954).
- [12] C. Rovelli, L. Smolin, “Loop Space Representation of Quantum General Relativity”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1155 (1990).
- [13] L. Smolin, *The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*, HMH, Boston (2007).
- [14] K. Krasnov, “Renormalizable Non-Metric Quantum Gravity?”, arXiv:hep-th/0611182 (2007).
- [15] K. Krasnov, “On Deformations of Ashtekar’s Constraint Algebra”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 081102. (2007).
- [16] K. Krasnov, “Non-metric Gravity: I. Field Equations”, *Class. Quantum Grav.* **25** 025001, (2008)
- [17] R. Rosas-Rodríguez, “Hamiltonian Constraint of Gravity with Cosmological Function”, *AIP. Conf. Proc.* **1548**, 191 (2013).

- [18] R. Rosas-Rodríguez, “Cosmological Functions in ADM and Ashtekar’s Representations of Gravity”, en preparación.
- [19] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000).
- [20] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004).
- [21] J. Baez and J. P. Muniainn, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore (1994).
- [22] A. Ashtekar, (notes prepared in collaboration with R.S. Tate), *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*, World Scientific, Singapore, (1991).
- [23] R. Rosas-Rodríguez, *Estructuras Hamiltonianas para Campos Clásicos*, Tesis de Doctorado BUAP, Puebla (2007).
- [24] P. Peldan, “Actions for Gravity, with Generalizations: A Review”, *Class. Quantum Grav.* **11** 1087, (1994).
- [25] D. Romano, “Geometrodynamics vs Connection Dynamics”, *Gen. Rel. and Grav.*, **25**, 759-854 (1993).
- [26] R. Rosas-Rodríguez, “Note on the Constraint Algebra of Modified Gravity Theories”, *AIP. Conf. Proc.* **1287**, 85 (2010).
- [27] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd edn. Springer, New York, (2011).
- [28] G. F. Torres del Castillo, *Notas sobre Variedades Diferenciales*, Monografía del Cinvestav del IPN, México, D.F. (1998).
- [29] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol (2003).
- [30] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston (1992).
- [31] T. Thiemann, “Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity”, arXiv preprint gr-qc/0110034, (2001).
- [32] H. Kodama, “Quantum Gravity by the Complex Canonical Formulation”, *Int. J. Mod. Phys. D*, **1**, 439 (1992).
- [33] H. Nicolai, H. J. Matschull, “Aspects of Canonical Gravity and Supergravity”, *Journal of Geometry and Physics*. **11.1-4**: 15-62 (1993).
- [34] J. Samuel, “A Lagrangian Basis for Ashtekar’s Formulation of Canonical Gravity”, *Pramana*. **28** (4): L429-L432 (1987).
- [35] T. Jacobson, L. Smolin, “Covariant Action for Ashtekar’s form of Canonical Gravity”, *Class. Quantum Grav.* **5** (4): 583–594 (1988).
- [36] H. Kodama, “Holomorphic Wavefunction of the Universe”, *Phys. Rev. D* **42** 2548-65, (1990).
- [37] J. F. Plebanski, “On the Separation of Einsteinian Substructures”, *J. Math. Phys.* **18**, 2511 (1977).

- [38] R. Capovilla, J. Dell, T. Jacobson and L. Mason, “Selfdual 2-forms and Gravity”, *Class. Quantum Grav.* **8**, 41 (1990).
- [39] T. Dray, R. Kulkarni and J. Samuel, “Duality and Conformal Structure”, *J. Math. Phys.* **30**, 1306 (1989).
- [40] K. Krasnov, Y. Shtanov, “Non-metric Gravity: II. Spherically Symmetric Solution, Missing Mass and Redshifts of Quasars”, *Class. and Quantum Grav.*, **25**, 025002 (2007).
- [41] R. Capovilla, M. Montesinos and M. Velázquez, “Minimally Modified Self-dual 2-forms Gravity”, *Class. Quantum Grav.*, **27**, 145011 (2010).
- [42] V. Husain and K. V. Kuchar, “General Covariance, New Variables, and Dynamics Without Dynamics”, *Phys. Rev. D* **42**, 4070 (1990).
- [43] M. Henneaux, J. E. Nelson, and C. Schombold, “Derivation of Ashtekar Variables from Tetrad Gravity”, *Phys. Rev.* **D39** 434 (1989).
- [44] R. Capovilla, “Canonical Gravity”, Proc. IV Mexican Workshop on Particles and Fields, p 217, Mérida (1993).
- [45] R. Rosas-Rodríguez, “On the Chern-Simons State in General Relativity and Modified Gravity Theories”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **545** 012013 (2014).
- [46] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th edition, Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).
- [47] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1950).