UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“SOBRE LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS DE COMPLEJIDAD DE ALGORITMOS Y TEMAS AFINES”

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

M.C. NETZAHUALCÓYOTL CARLOS CASTAÑEDA ROLDÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ MARGARITO HERNÁNDEZ MORALES

CODIRECTORA DE TESIS:

DRA. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

Huajuapan de León, Oaxaca — Junio de 2023

Dedicatoria

Al Todopoderoso,
fuente de todo bienestar, conocimiento y satisfacción.

A la memoria de mis padres, que en paz descansen,
Héctor Castañeda Bringas y Oliva Roldán González,
quienes, desde mi temprana infancia me inculcaron
su interés, apreciación y respeto por la cultura,
el arte, la ciencia, el conocimiento y la educación.

A toda persona a quien cualquier parte de esta tesis le pueda ser de alguna utilidad.

Agradecimientos

Al CONACYT, por su generoso apoyo económico, que fue de una importancia fundamental para hecer posible la realización de este trabajo.

A mi hermano Cuauhtémoc, por avisarme tan oportunamente sobre la posibilidad de participar en el programa del doctorado y por su ayuda para establecer mis contactos iniciales con el personal académico y administrativo de la UTM.

Al Dr. Sergio Palafox, por su paciencia, lo efectivo de su atención durante mis primeros trámites y por el seguimiento consistente que mantuvo sobre mis reportes semestrales.

A los doctores, María Emilia Caballero, Carlos Hernández García-Diego e Isabel Puga Espinosa, de la UNAM, al Dr. Agustín Contreras Carreto, de la BUAP, y al Lic. Enrique Matus Mendoza, de la Universidad Anáhuac, por sus favorables cartas de recomendación.

Al Dr. José Anibal Arias Aguilar, a la Lic. Carmen Torres y a Celes Segoviano, de la Unidad de Posgrado, y a Blanca Nava, de Servicios Escolares, por la gran amabilidad que siempre me brindaron al orientarme en todos los pasos del proceso administrativo.

Al Dr. José Margarito Hernández Morales, por los conocimientos que obtuve estudiando bajo su dirección, especialmente en el área de topología. Desde luego, por el excelente trabajo que realizó, con sus indicaciones y observaciones, en la selección de los temas de investigación y supervisando la redacción de esta tesis. También por sus valiosas colaboraciones de autoría, tanto en un capítulo de libro, como en el artículo de investigación requerido para la obtención del grado. Asimismo, por su paciencia, por su flexibilidad y sobre todo, por su amistad.

A la Dra. Luz del Carmen Álvarez Marín, mi codirectora de tesis, por su apoyo constante y confiable, su buena disposición, sus consejos tan acertados y por su capacidad para resolver problemas de todo tipo con una asombrosa economía de tiempo y esfuerzo, sin generar fricciones innecesarias. Igualmente, por su colaboración de autoría en el artículo de investigación y por haber encontrado el material de referencia que nos condujo al tema central del mismo. Su asesoría fue el complemento perfecto para la dirección del Dr. Hernández.

A mis sinodales, los doctores Adolfo Maceda, Ivonne Martínez Cortés, Reinaldo Martínez Cruz, Victor Méndez, Emmanuel Romano y Armando Romero, por sus comentarios de ánimo y por todas sus preguntas, observaciones, correcciones y sugerencias.

Al Dr. Richard Márquez, por su generoso interés en mi trabajo y por compartir conmigo sus muy valiosas perspectivas sobre el proceso editorial de las revistas científicas, con base en su experiencia personal de varios años como revisor de una revista JCR.

A mi hermano Cuauhtémoc y a su esposa Luz del Carmen, por su cálida hospitalidad, su muy apreciada compañía, su deliciosa comida casera, su buen sentido del humor, por su constante apoyo logístico y también emocional, en los momentos difíciles. Además, por invitarme siempre a sus reuniones y salidas familiares y con amigos y por ser excelentes anfitriones, mostrándome varios de los lugares más agradables de Huajuapan.

Índice general

Parte I

Marco de referencia

Capítulo 1

Descripción

1.1. Introducción

Durante la segunda mitad del siglo XX y hasta la fecha, se ha extendido cada vez más el enfoque computacional para la solución de problemas en todo tipo de áreas de la actividad humana. Con el uso creciente de los algoritmos computacionales, se ha desarrollado simultáneamente una búsqueda cada vez más minuciosa de los algoritmos más veloces y eficientes para el procesamiento de datos. El estudio de la eficiencia de los algoritmos se conoce con el nombre de «complejidad de algoritmos». El análisis de complejidad se ha vuelto un factor esencial en el diseño de los algoritmos. Por ello, el estudio de las funciones de complejidad y de sus propiedades ha sido un tema central en las ciencias de la computación durante décadas. Como parte de este proceso también se han ido aplicando conceptos matemáticos abstractos al análisis de complejidad.

Otra rama importante en las ciencias de la computación es la semántica denotacional, que se originó con los trabajos de Scott [83] y Strachey [84], con el propósito de darle un significado matemático a los lenguajes de programación y para proporcionar definiciones rigurosas que ayuden a verificar que los compiladores de dichos lenguajes se implementen correctamente. En esta formalización se construyen «dominios semánticos», formados por objetos matemáticos llamados «denotaciones». Las denotaciones representan los significados de las expresiones que se utilizan en los lenguajes de programación. En la parte de la teoría de dominios que trata con los programas recursivos, se define a las denotaciones como funciones continuas entre órdenes parciales completos.

De acuerdo a Schellekens [82], una construcción estándar en la semántica denotacional es la completación de un orden parcial, en la que se construye un orden parcial completo a partir de un orden parcial dado. Por lo general, el orden parcial original tiene la topología de Alexandrov, mientras que el orden parcial completo tiene la topología de Scott. Sin embargo, esta construcción estándar no permite obtener la topología de la completación a partir de la topología del orden parcial original y por lo tanto no se puede considerar como una verdadera completación topológica.

Este problema se ha resuelto mediante la completación de espacios cuasiuniformes topológicos presentada por Smyth [85]. La categoría de los espacios cuasiuniformes topológicos es una extensión de la de los espacios cuasiuniformes, que a su vez son una generalización de los espacios uniformes. A cada espacio cuasiuniforme se le asocia de manera canónica un preorden, que coincide con el preorden de especialización de la topología inducida por la cuasiuniformidad y que resulta ser un orden parcial siempre y cuando dicha topología sea la de un espacio T_0. Asimismo, cada espacio cuasiuniforme tiene una representación estándar como un espacio cuasiuniforme topológico, ya que Smyth definió a estos espacios añadiéndole al espacio cuasiuniforme una topología extra que debe cumplir ciertas condiciones relacionadas con la cuasiuniformidad. La topología inducida por la cuasiuniformidad cumple con dichas condiciones, así que es posible tomar esta topología cuasiuniforme como la topología extra requerida y de esta forma el espacio cuasiuniforme queda representado como un espacio cuasiuniforme topológico. Originalmente, Smyth construyó su completación de los espacios cuasiuniformes topológicos de manera indirecta, utilizando para ello a los espacios sintopológicos de Császár [16]. Primero le asignó a cada espacio cuasiuniforme topológico un espacio sintopológico, después dio una completación de los espacios sintopológicos y finalmente regresó desde ahí a los espacios cuasiuniformes topológicos. Más tarde, Sünderhauff [90] dio una versión de la completación de Smyth con una construcción que se mantiene enteramente dentro de los espacios cuasiuniformes topológicos y no necesita usar a los espacios sintopológicos. Cuando se representa a un espacio cuasiuniforme como un espacio cuasiuniforme topológico y se obtiene la completación de Smyth de éste último, si resulta que dicha completación también representa a un espacio cuasiuniforme, se dice que el espacio cuasiuniforme original es Smyth-completable. También se dice que el segundo espacio cuasiuniforme es la completación de Smyth del primero. En este sentido, dentro del contexto de los espacios cuasiuniformes topológicos, se dice que la completación de Smyth de un espacio cuasiuniforme Smyth-completable es nuevamente un espacio cuasiuniforme. Sünderhauff [89] también demostró que cuando un espacio cuasiuniforme es Smyth-completable, su completación de Smyth coincide con su bicompletación. Además caracterizó a la completitud de Smyth y a la completabilidad de Smyth en términos de redes K-Cauchy por la izquierda, mientras que Künzi [56] dio las caracterizaciones correspondientes en términos de filtros K-Cauchy por la izquierda. Si el preorden asociado a un espacio cuasiuniforme Smyth-completable es un orden parcial, el preorden correspondiente a su completación de Smyth es un orden parcial completo. De esta forma la completacion de Smyth constituye un fundamento topológico para la semántica denotacional.

Por otra parte, Matthews [60], trabajando en la semántica de redes de flujo de datos con un enfoque topológico de tipo no Hausdorff, introdujo el concepto de métrica parcial y también un concepto equivalente, el de un espacio cuasimétrico pesable. En este trabajo utilizamos el término *cuasimétrica* para referirnos a la versión asimétrica del concepto de distancia, tal y como se expone en [14], [24] y [32]. Esta interpretación del término *cuasimétrica* difiere del significado que le han dado algunos autores en otras áreas, por ejemplo, en la de los espacios cuasimétricos de medida [37], [45]. Los espacios cuasimétricos son una generalización de los espacios métricos y a la vez constituyen un caso particular de los espacios cuasiuniformes. Los espacios cuasimétricos pesables definidos por Matthews tienen una función de peso w que satisface una ecuación específica relacionada con la cuasimétrica del espacio. Esta combinación de peso y cuasimétrica le proporciona a los espacios cuasimétricos pesables una cierta noción análoga a la simetría, cosa que no tiene necesariamente la cuasimétrica por sí sola. Kunzi [56] demostró una propiedad importante de estos espacios. Dado un espacio cuasimétrico pesable (X, d, w), el espacio cuasiuniforme topológico $(X, \mathcal{U}_d, \tau(\mathcal{U}_d))$ es Smyth-completable.

Continuando con esta corriente de investigación, Schellekens [81] introdujo el espacio de las funciones de complejidad de algoritmos, o espacio de complejidad $\mathcal{C}$, que es un espacio cuasimétrico pesable. La cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ del espacio de complejidad, también llamada «distancia de complejidad», proporciona una forma de medir el progreso relativo que se alcanza en la reducción de la complejidad al pasar de una función de complejidad a otra. Schellekens también probó que todo espacio cuasiuniforme T_0 con base numerable tiene una bicompletación secuencial. Este resultado incluye como caso particular a los espacios cuasimétricos e implica que el espacio de complejidad tiene una completación de Smyth secuencial. En la misma referencia [81] se encuentra una versión del Teorema del punto fijo de Banach [22], adaptada para el caso particular de mapeos de contracción en la bicompletación secuencial de cuasiuniformidades inducidas por una cuasimétrica. La relevancia de este resultado radica en lo siguiente. Hay una clase muy amplia de algoritmos, conocidos como algoritmos del tipo «divide y vencerás», que son de naturaleza recursiva y a los que se les pueden asociar ecuaciones de recurrencia. Estas ecuaciones por lo general (dependiendo de un parámetro) inducen mapeos de contracción con respecto a la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ del espacio de complejidad, por lo que la versión secuencial del Teorema de Banach garantiza la existencia de un límite para cada sucesión de funciones de complejidad que esté determinada por un conjunto de ecuaciones de recurrencia que cuente con un mapeo de contracción. Dicho límite permite establecer cotas superiores para el orden de complejidad de los algoritmos «divide y vencerás» correspondientes. Schellekens mostró con detalle los cálculos necesarios para obtener el límite de la sucesión de funciones de complejidad dada por las ecuaciones de recurrencia del algoritmo de ordenamiento por subdivisión conocido como «mergesort». De esta forma, dio una demostración alternativa para el hecho (conocido con anterioridad [15]) de que el crecimiento asintótico del tiempo promedio de ejecución del algoritmo mergesort es del orden $n\lg(n)$. Con los resultados mencionados, Schellekens estableció el papel de la completación de Smyth como un fundamento topológico para el análisis de complejidad de algoritmos.

Posteriormente, Romaguera y Schellekens [75] definieron el espacio dual de complejidad, $\mathcal{C}^*$, con el propósito de obtener más propiedades cuasimétricas del espacio de complejidad original. El espacio dual también es un espacio cuasimétrico pesable. De hecho, el espacio de complejidad es isométrico a su espacio dual, ya que hay entre ellos una inmersión isométrica biyectiva, el mapeo de inversión. Los elementos del espacio de complejidad son sucesiones de números reales positivos extendidos, mientras que las sucesiones pertenecientes al espacio dual toman valores reales finitos y no negativos. El hecho de que, por una parte, la sucesión constante cero pertenezca al espacio dual y que, por otra parte, ninguna de sus sucesiones tome el valor infinito, hace que el espacio dual sea más atractivo, desde un punto de vista matemático, para trabajar con él, aunque las sucesiones miembros del espacio $\mathcal{C}$ estén intuitivamente ligadas a los algoritmos de una forma más directa. Además, el espacio dual es un espacio semilineal normado asimétricamente, en el sentido de la definicón dada en [73]. Uno de los principales resultados presentados en [75] es el hecho de que el espacio de complejidad $\mathcal{C}$ es Smyth-completo, propiedad que resulta de la isometría entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, ya que los autores probaron primero que el espacio dual es Smyth-completo.

En este trabajo de tesis, después de presentar una recopilación de varios de los principales conceptos y resultados teóricos relacionados con los fundamentos de los espacios de complejidad, nos enfocamos en estudiar algunas de las propiedades de la convolución de sucesiones dentro de dichos espacios. El producto convolución es una operación binaria que tiene aplicaciones en áreas tales como las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional, el análisis armónico, la probabilidad, la combinatoria y la teoría analítica de números, entre otras. Por ejemplo, en análisis, es bien sabido que la convolución está asociada con el producto de series de potencias [77]. En teoría de la probabilidad, la convolución da la distribución de la suma de dos variables aleatorias discretas independientes. En combinatoria, la convolución ayuda a resolver diferentes tipos de problemas mediante el uso de funciones generadoras [33]. En ingeniería electrónica, la convolución se aplica al procesamiento de señales digitales por medio de las diferentes versiones de la transformada de Fourier.

1.2. Planteamiento del problema

En [82], Schellekens observa que la completación de Smyth constituye un fundamento topológico, tanto para la semántica denotacional como para el análisis de complejidad de algoritmos y menciona la posibilidad de que, en aplicaciones futuras, el espacio de complejidad podría utilizarse como base para el desarrollo de semánticas computacionales refinadas que reflejen distinciones en la complejidad de los programas. El desarrollo de modelos matemáticos aplicables a la semántica denotacional y que incorporen también conceptos relativos a la complejidad de los algoritmos, es una rama activa de investigación (véase por ejemplo [71]). Sin embargo, aún no hay resultados publicados en este sentido que tomen como base al espacio de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ o a su espacio dual, $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$.

Schellekens [81] utiliza las propiedades del espacio de complejidad para dar una demostración alternativa de que el algoritmo de ordenamiento «mergesort» tiene un tiempo promedio asintótico óptimo. Dicha demostración representa una aplicación de la teoría de las ecuaciones de recurrencia, dentro del contexto del espacio de complejidad, al análisis de complejidad de los algoritmos del tipo «divide y vencerás». Similarmente, en [29], los autores presentan cálculos basados en ecuaciones de recurrencia y en la convergencia de sucesiones dentro del espacio de complejidad, para estimar el orden asintótico de cuatro clases de funciones de complejidad que corresponden a algoritmos del tipo «divide y vencerás probabilista». Todos estos son ejemplos de aplicaciones de la teoría de los espacios de complejidad al análisis de complejidad de los algoritmos del tipo «divide y vencerás». Sin embargo, no hay ejemplos de aplicaciones semejantes para otros tipos de algoritmos como pueden ser los algoritmos de programación dinámica o los algoritmos voraces.

Künzi [56] propuso el problema de caracterizar a las cuasiuniformidades que tengan una base numerable y que sean inducidas por una cuasimétrica pesable. Shellekens [82] dio una solución parcial a este problema pero no se ha obtenido una solución completa para el mismo.

En [74], Schellekens y Romaguera demuestran que el espacio de complejidad dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ admite la estructura de un espacio semilineal normado asimétricamente y que es convexo con respecto al orden, pesable superiormente y también Smyth-completo. La estructura algebraica de espacio semilineal, en el caso del espacio $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$, toma en cuenta la multiplicación por escalares y también a la operación de la suma pero no considera otras operaciones binarias.

Los ejemplos mencionados arriba muestran que hay varias preguntas relacionadas con los espacios de complejidad, para las que todavía no se tienen las respuestas correspondientes. Por tal motivo y ante estas limitantes, en este trabajo de investigación se planteó el problema de encontrar propiedades adicionales de los espacios de complejidad, específicamente propiedades relativas a la operación binaria de convolución de sucesiones.

1.3. Justificación

La convolución de sucesiones tiene relaciones estrechas con las ecuaciones de recurrencia en áreas tales como el análisis de series de potencias [77] y en el uso de las funciones generadoras en combinatoria [33], rama que tiene muchas conexiones con los algoritmos. Identificar y estudiar las propiedades que pueda tener el producto convolución, ya sea en el espacio de complejidad o en su espacio dual, puede contribuir a extender la teoría existente sobre estos espacios y a encontrar posibles conexiones de los mismos con otras áreas de las matemáticas o con sus aplicaciones. Las repercusiones que tiene en la actualidad la complejidad de algoritmos, justifican la investigación pertinente al desarrollo de los métodos usados para evaluar y comparar la eficiencia de los mismos, con énfasis en el planteamiento de dichos métodos dentro de un marco teórico preciso y riguroso que aproveche la capacidad expresiva, lógica y analítica de ramas matemáticas tales como la topología, el análisis funcional y la teoría combinatoria. Además, los problemas considerados en este trabajo de investigación son compatibles con las líneas de investigación que se desarrollan en el cuerpo académico de análisis matemático (CAAM) del Instituto de Física y Matemáticas de la UTM [41].

1.4. Hipótesis

La hipótesis que se tomó como base para esta investigación, es que la operación binaria de convolución de sucesiones, restringida al espacio de funciones de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, o a su espacio dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$, tiene propiedades algebraicas, cuasimétricas y topológicas no triviales, relacionadas con algunos de los conceptos más relevantes de la teoría de los espacios de complejidad y que no se habían publicado con anterioridad a la realización de este trabajo.

1.5. Objetivos

Objetivo general

Encontrar propiedades del producto convolución restringido a: (A) el espacio de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, o (B) el espacio dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$. Son de particular interés aquellas propiedades con posibles conexiones al análisis de complejidad, como pueden ser las relacionadas con funcionales de mejora, con los órdenes de crecimiento asintótico de las funciones de complejidad, o con la convergencia de sucesiones de este tipo de funciones.

Objetivos particulares

- Identificar propiedades algebraicas del producto convolución, ya sea restringido a las funciones de complejidad, o bien restringido a los elementos del espacio dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$.

- Establecer propiedades del producto convolución que relacionen a dicha operación con la cuasimétrica y con la función de peso del espacio de complejidad, o bien con la cuasimétrica y la función de peso del espacio dual.

- Encontrar propiedades de carácter topológico que pueda tener el producto convolución, ya sea en el espacio de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ o bien en el espacio dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$.
- Determinar formas en las que sea posible usar la operación de convolución para definir funcionales en $\mathcal{C}$ o en $\mathcal{C}^*$.
- Publicar un artículo de investigación en una revista JCR sobre los temas que nos hemos planteado desarrollar en este trabajo.

1.6. Metas

1. Establecer si el espacio de complejidad (C, d_c) o su espacio dual (C^*, d_{c^*}) son cerrados bajo la operación de convolución de sucesiones.
2. Identificar posibles relaciones de la convolución con los órdenes parciales de los espacios $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$.
3. Determinar si la convolución tiene alguna relación con el orden de crecimiento asintótico de las funciones de complejidad en $\mathcal{C}$, o bien con el de las sucesiones que son elementos del espacio dual.
4. Hallar posibles ecuaciones o desigualdades que relacionen al producto convolución con las cuasimétricas $d_{\mathcal{C}}$ y $d_{\mathcal{C}^*}$, o bien con las funciones de peso $w_{\mathcal{C}}$ y $w_{\mathcal{C}^*}$ de los espacios de complejidad, ya sea separadamente o combinando la cuasimétrica y la función de peso en una misma fórmula.
5. Determinar si la convolución es una operación continua con respecto a alguna de las topologías cuasimétricas inducidas, ya sea por $d_{\mathcal{C}}$ o bien por $d_{\mathcal{C}^*}$.
6. Identificar posibles propiedades de la convolución, relacionadas con distintos tipos de sucesiones convergentes en $\mathcal{C}$ o en $\mathcal{C}^*$.
7. Utilizar el producto convolución para definir funcionales en los espacios de complejidad y encontrar condiciones, ya sea necesarias o suficientes, para que algunos de ellos resulten ser funcionales de mejora. Adicionalmente, determinar qué otras propiedades pueden tener dichos funcionales.
8. Considerar la posible continuidad de la convolución con respecto a otras topologías en $\mathcal{C}$ o en $\mathcal{C}^*$, distintas de la topología cuasimétrica pero relacionadas con ella.
9. Entre las propiedades que se vayan encontrando de la convolución en el espacio de complejidad y en el espacio dual, identificar aquellas que se puedan generalizar a otras operaciones binarias en espacios cuasimétricos pesables en general.
10. En caso de poder generalizar alguna propiedad de la forma propuesta en el punto anterior, encontrar ejemplos de operaciones binarias que cumplan con dicha propiedad.

1.7. Limitaciones

La limitación principal en esta investigación fue la disponibilidad de los textos de referencia, ya que las diferentes editoriales tienen métodos y políticas diferentes para regular el acceso a los materiales que publican. Algunos artículos pueden ser difíciles de consultar, lo que puede afectar los tiempos de la investigación en algunos temas o incluso restringir el enfoque de los mismos.

1.8. Metodología

Los colaboradores de este trabajo son: el tesista, el director y la codirectora de la tesis. El director fungió como guía en la adecuada orientación para la selección oportuna de los temas particulares en cada etapa de la investigación. La coordinación del avance se llevó a cabo mediante reuniones de trabajo presenciales entre los colaboradores de manera periódica. Asimismo se utilizaron los medios electrónicos de comunicación. Los materiales usados fueron: computadoras con acceso a internet, teléfonos celulares, libros, copias de artículos de investigación, así como útiles escolares de uso común. El enfoque fue de carácter teórico y se ubicó en un nivel de abstracción separado de las aplicaciones prácticas, así como de cualquier problema computacional específico. Para cumplir con los objetivos establecidos, esta investigación se fundamentó en el estudio de la estructura topológica de los espacios cuasimétricos, así como de las estructuras topológicas y algebraicas en los espacios normados asimétricamente. El trabajo se desarrolló principalmente en las cuatro fases siguientes.

- **Fase 1.** Recopilación de resultados existentes.

  Al inicio, la tarea central fue la de conjuntar los materiales de referencia existentes relacionados con los temas tratados. Esta investigación fue de índole documental, explicativa y no experimental. Así se elaboró una bibliografía con los materiales relevantes para este estudio. La obtención de los datos se llevó a cabo paulatinamente y de una forma diversa según la información que se iba requiriendo. A partir de los artículos que motivaron inicialmente esta investigación, se identificaron las prioridades de los diferentes temas y se realizaron búsquedas por internet para adquirir materiales bibliográficos complementarios.

- **Fase 2.** Organización de los conceptos relacionados.

  En forma paralela a la recopilación de fuentes bibliográficas, se estudiaron las diferentes técnicas utilizadas en los artículos y libros relacionados con el tema. Se identificaron los elementos estructurales que permitieran organizar la información obtenida de una forma coherente en una jerarquía conceptual clara y precisa.

- **Fase 3.** Participación en foros afines a los temas de la tesis.

  El tesista participó en las reuniones semanales del seminario del cuerpo académico de análisis matemático (CAAM) del Instituto de Física y Matemáticas de la UTM. Dicho cuerpo académico incluye al director y a la codirectora de la tesis. Esto motivó la generación de ideas. También se expusieron en este seminario algunos de los temas relacionados con esta investigación. En septiembre del 2021 el tesista dio la plática titulada «Introducción al espacio de las funciones de complejidad de algoritmos», dentro del Octavo Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones, organizado por la Facultas de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. También hubo una participación, en noviembre del mismo año, con la charla titulada «Sobre la bicompletación de espacios cuasiuniformes», en el VI Ciclo de Conferencias «Matemáticas en la Mixteca», organizado por el Instituto de Física y Matemáticas de la UTM.

- **Fase 4.** Generación de resultados originales.

  Una vez que las primeras dos fases estuvieron suficientemente avanzadas, fue posible iniciar la tarea de obtener resultados originales. Para este fin se utilizó una metodología matematicista, que consiste en establecer verdades formales mediante los principios de la lógica deductiva, a partir de preguntas que no tengan una respuesta conocida en los materiales de referencia recopilados. Se examinaron ejemplos concretos, se formularon hipótesis específicas para cada concepto considerado y se identificaron algunas propiedades que se pudieron extender y demostrar en un contexto generalizado. Desde el principio del cuarto semestre se empezaron a obtener algunos resultados originales.

1.9. Organización de la tesis

La tesis consta de tres partes, el marco de referencia, el marco teórico y la parte correspondiente a las aportaciones obtenidas. En el marco de referencia se describe el proyecto de la tesis. El marco teórico contiene los capítulos numerados del 2 al 8, como aparecen en el índice, y es una recopilación documental de algunos de los temas fundamentales en el estudio de los conceptos relacionados con el espacio de funciones de complejidad y con su espacio dual. Empezamos considerando los espacios uniformes, cuasiuniformes, cuasiuniformes topológicos, sintopológicos, cuasimétricos y cuasiseudométricos, así como los espacios normados y seminormados asimétricamente. A continuación cubrimos algunos de los conceptos básicos relacionados con el análisis de complejidad de algoritmos, tales como el tamaño de los problemas computacionales, el tiempo discreto y las cotas asintóticas para las funciones de complejidad. Posteriormente nos enfocamos en las propiedades topológicas y algebraicas del espacio de complejidad (C, d_c) y en las de su espacio dual (C^*, d_{c^*}).

En la tercera parte se exponen, tanto las conclusiones de este trabajo, así como los resultados originales (capítulo 9) que se obtuvieron sobre el producto convolución durante la fase de investigación. La mayor parte de dichos resultados, al igual que sus correspondientes demostraciones, están incluidos en el artículo [39], de próxima aparición.

En la sección 9.1 se dan las propiedades encontradas para la operación convolución en los espacios de complejidad, empezando por la cerradura algebraica de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ bajo dicha operación. Hay varias desigualdades que relacionan a la convolución con las cuasimétricas pesables $d_{\mathcal{C}}$ y $d_{\mathcal{C}^*}$ y con los órdenes parciales de los espacios $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, incluyendo una propiedad relacionada con las cotas superiores asintóticas para el orden de crecimiento de las funciones de complejidad. También se define un funcional en $\mathcal{C}^*$ basado en la convolución y se identifican varias de sus propiedades. Asimismo, se utiliza este funcional de convolución junto con el mapeo de inversión, para obtener una familia de funcionales de mejora en $\mathcal{C}$. La convolución respeta las clases de equivalencia de una relación que definió Schellekens [81] entre sucesiones $d^s_{\mathcal{C}^*}$-Cauchy. Se encontró que la convolución es continua con respecto a la topología cuasimétrica del espacio dual, lo que produce un monoide topológico. Aparte de la topología cuasimétrica, se consideraron otras dos topologías en $\mathcal{C}^*$ con el fin de determinar si la convolución es continua en ellas. Se encontró que una sí produce un monoide topológico pero la otra no.

En la sección 9.2 se generaliza el contexto de referencia para dos de las desigualdades de la sección anterior y se utilizan estas dos desigualdades para definir conceptos nuevos, el de una operación «submultiplicativa» con respecto a la función de peso de un espacio cuasimétrico pesable y el de una operación «firme» con respecto a la cuasimétrica y a la función de peso de este tipo de espacios. Se dan ejemplos de espacios cuasimétricos pesables con operaciones firmes y submultiplicativas y también se cubren algunas de las propiedades que tienen estas operaciones. Las operaciones firmes son continuas en la topología cuasimétrica y cuando se fija uno de los factores se obtiene una función cuasiuniformemente continua. Si se usa una operación firme para formar productos término a término a partir de dos sucesiones K-Cauchy por la izquierda se obtiene como resultado otra sucesión K-Cauchy por la izquierda. Hay varios tipos de convergencia que se conservan al utilizar una operación firme para formar una sucesión de productos término a término partiendo de dos sucesiones convergentes. Todas estas propiedades son generalizaciones de las propiedades que tiene la operación convolución en el espacio de complejidad dual $\mathcal{C}^*$.

Parte II

Marco teórico

Capítulo 2

Conceptos básicos

A lo largo de este documento, los símbolos $\mathbb{Z}$, ω, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ denotan a los números enteros, los enteros no negativos, los enteros positivos, los números reales y los reales no negativos, respectivamente. En esta sección se presentan las definiciones y notaciones de algunos conceptos básicos que se utilizarán más adelante. Empezamos con el tema de relaciones y después pasamos a los conjuntos ordenados. A continuación enunciamos algunos resultados relativos al concepto de filtro y por último cubrimos unos pocos conceptos sobre espacios topológicos.

2.1. Relaciones

Los conceptos que se cubren a continuación son de particular interés dada la importancia que tienen para las estructuras que se manejan en este trabajo.

Definición 2.1.1. Dado un conjunto X, su **conjunto potencia**, $\mathcal{P}(X)$, es el conjunto de todos sus subconjuntos, es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$. Si A y B son conjuntos y se tiene $R \in \mathcal{P}(A \times B)$, nos referimos a R diciendo que «R es una **relación** de A en B». Asimismo se utiliza la notación $R : A \to B$. El conjunto A se llama el **dominio** de R y B se llama el **codominio** de R. En el caso de que $A = B$, se dice que R es «una relación en A». La **relación diagonal** sobre X, también conocida como **la identidad** en X, se denota por $\triangle(X)$ y está dada por $\triangle(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Dada una relación R en X, su **relación inversa** es $R^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in R\}$. Dadas dos relaciones M y N definidas en X, la **relación compuesta** $N \circ M$ se define como

$$N \circ M = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X : (x, y) \in M \text{ y } (y, z) \in N\}.$$

Sean M, N y R relaciones en un conjunto X. R es reflexiva si y solo si $\triangle(X) \subseteq R$, y es simétrica si y solo si $R^{-1} \subseteq R$. Asimismo, como$(R^{-1})^{-1} = R$, la condición $R^{-1} \subseteq R$ es equivalente a $R^{-1} = R$. Las relaciones $R \cup R^{-1}$ y $R \cap R^{-1}$ son ambas simétricas. R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$. Siempre se tiene la identidad $(M \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ M^{-1}$. Si R es una relación reflexiva, entonces $R \subseteq R \circ R^{-1}$.

Definición 2.1.2 (Imágenes bajo relaciones)**.** Sea R una relación en un conjunto X y sean $x \in X$ y $A \subseteq X$. Las **imágenes** del elemento x y del subconjunto A bajo la relación R se definen, respectivamente, como

$$R(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in R\} \quad \text{y} \quad R(A) = \bigcup \{R(a) \mid a \in A\}.$$

Observación 2.1.1. Dada una relación $R \subseteq X \times X$, se tiene que $R \circ R^{-1}$ es una relación simétrica, ya que

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \circ R^{-1} \Longleftrightarrow R(x) \cap R(y) \neq \varnothing.$$

[58] Si U y V son relaciones en un conjunto X y V es simétrica, entonces

$$V \circ U \circ V = \bigcup \{V(x) \times V(y) \mid (x, y) \in U\}.$$

Dado un conjunto X, una relación R definida sobre X y un número natural $n \geq 1$, se denota $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$ y $R^n = R^{n-1} \circ R$.

[12] Sea X un conjunto y sean $A, B \subseteq X$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La **traza** de $\mathcal{F}$ en el subconjunto A es la colección $\{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$. La traza de B en A es $B \cap A$.

Definición 2.1.3 ([26] $T(A, B)$ y S_A)**.** Dados $A, B \subseteq X$, se definen

- $T(A, B) = (X \times X) \setminus (A \times B)$.
- $S_A = T(A, X \setminus A)$.

Los resultados enunciados en el lema siguiente son claros y fáciles de demostrar.

Lema 2.1.1 (Algunas propiedades de S_A)**.** *Para todo $A \subseteq X$ se tiene:*

1. $S_A = X \times A \cup (X \setminus A) \times X$.
2. $S_A = A \times A \cup (X \setminus A) \times X$.
3. $S_A = \{(x, y) \in X \times X \mid x \notin A \text{ o } y \in A\}$.
4. *S_A es una relación reflexiva y transitiva en X.*
5. $S_\varnothing = S_X = X \times X$.

2.2. Conjuntos ordenados

Definición 2.2.1 (Preorden)**.** Un **preorden** P sobre un conjunto X es una relación en X que es reflexiva y transitiva.

En el caso de un preorden P sobre un conjunto X, la condición de transitividad se puede expresar como $P \circ P = P$, en vez de estrictamente como $P \circ P \subseteq P$. La reflexividad de P es la causa de que la composición de P consigo misma deba resultar en la totalidad de P, en vez de solamente un subconjunto.

Definición 2.2.2 ([70] Conjuntos superiores y conjuntos inferiores)**.** Si $\leq$ es un preorden en un conjunto X y $A \subseteq X$, entonces el **conjunto superior** de A se define como

$$i(A) = \uparrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A : a \leq x\}.$$

Similarmente, el **conjunto inferior** de A está dado por

$$d(A) = \downarrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A : x \leq a\}.$$

Definición 2.2.3 ([70] Subconjuntos crecientes, decrecientes y convexos)**.** Si $\leq$ es un preorden en un conjunto X y A es un subconjunto de X, entonces se dice que A es:

- **creciente** si $A = i(A)$.
- **decreciente** si $A = d(A)$.
- **convexo** si $A = i(A) \cap d(A)$.

Los siguientes lemas son claros y fáciles de demostrar.

Lema 2.2.1. *Dados un preorden $\leq$ en un conjunto X y un subconjunto A de X, se tiene:*

- $\uparrow \varnothing = \varnothing \quad \text{y} \quad \uparrow X = X.$
- $A \subseteq \uparrow A.$
- $\uparrow (\uparrow A) = \uparrow A.$

Lema 2.2.2. *Dados un preorden $\leq$ en un conjunto X y una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos crecientes de X, se tiene:*

- $\uparrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\uparrow A_i).$
- $\uparrow \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (\uparrow A_i).$

En vista de las propiedades enunciadas en los dos lemas anteriores, es claro que la familia de conjuntos crecientes de un preorden es una topología. Los conjuntos decrecientes tienen propiedades similares a las de los conjuntos crecientes.

Definición 2.2.4 (Orden parcial)**.** Un **orden parcial** $\leq$ sobre un conjunto X es una relación en X que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Es decir, $\leq$ es un preorden que además cumple

$$\forall x, y \in X : (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y.$$

Definición 2.2.5 (Supremos en un orden parcial)**.** Si $\leq$ es un orden parcial en un conjunto X, con $A \subseteq X$ y $p \in X$, entonces se dice que p es el **supremo** de A si p es la mínima cota superior de A, es decir que:

1. $\forall x \in A : x \leq p.$
2. $\forall q \in X : (\forall x \in A : x \leq q) \Rightarrow p \leq q.$

La notación $p = \bigvee A$ significa que p es el supremo de A. Para un conjunto con dos elementos también se utiliza la notación $x \vee y = \bigvee \{x, y\}$.

Definición 2.2.6 (Conjunto dirigido)**.** Dado un preorden $\leq$ definido sobre un conjunto D, la pareja $(D, \leq)$ se llama **conjunto dirigido** si tiene esta propiedad,

$$\forall a, b \in D, \exists c \in D : a \leq c \ \text{ y } \ b \leq c.$$

Definición 2.2.7 (Cadena-ω)**.** Una **cadena-ω** en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ es una sucesión $\{x_n \mid n \geq 0\}$ en X, no decreciente. Es decir que, para todo $n \geq 0$ se tiene la desigualdad $x_n \preceq x_{n+1}$.

Definición 2.2.8 ([36] Orden parcial completo)**.** Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden parcial $\leq$ es **completo** si:

1. Todo subconjunto dirigido $M \subseteq X$ tiene un supremo $\bigvee M$.

2. Existe un elemento mínimo $\perp \in X$.

Definición 2.2.9 (Orden parcial ω-completo)**.** Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden parcial $\preceq$ es **ω-completo** si toda cadena-ω $x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots$ en X tiene un supremo $\bigvee_{n \geq 0} x_n \in X$.

Definición 2.2.10 (Redes)**.** Una **red** en un conjunto X es una función $\varphi : D \to X$, donde D es un conjunto dirigido.

Como los números naturales con su orden usual son un conjunto dirigido, toda sucesión es una red.

Definición 2.2.11 (Convergencia de redes)**.** Si $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido, dados una red $\varphi : D \to X$ en un espacio topológico (X, τ) y un punto $x \in X$, se dice que φ **converge** al punto x (notación: $\varphi \to x$) si se cumple que

$$\forall A \in \tau, x \in A \Rightarrow (\exists a \in D : \forall b \in D, b \geq a \Rightarrow \varphi(b) \in A)\,.$$

2.3. Filtros

Definición 2.3.1 (Filtro)**.** Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es una familia no vacía de subconjuntos de X, es decir $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, que cumple con estas propiedades:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

2. $\forall F, G \in \mathcal{F} : F \cap G \in \mathcal{F}$.

3. $\forall G \subseteq X, F \in \mathcal{F} : F \subseteq G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Una consecuencia inmediata de la definición 2.3.1 es que toda intersección finita de elementos de un filtro es no vacía. A continuación se dan algunos ejemplos de filtros.

Ejemplo 2.3.1. Si $\varnothing \neq A \subseteq X$, el conjunto $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$ es un filtro en X, generalmente llamado **filtro principal** determinado por A.

Ejemplo 2.3.2 (El filtro de vecindades de un punto)**.** Si (X, τ) es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $\mathcal{N}(x)$, el conjunto de todas las vecindades de x, es un filtro sobre X, llamado **el filtro de vecindades** de x.

Ejemplo 2.3.3 (El filtro de Fréchet)**.** Si X es un conjunto infinito, el **filtro de Fréchet** sobre X es el subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ dado por $\mathcal{F} = \{\ C \subseteq X \mid (X \setminus C) \ \text{ es } finito\ \}$.

Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros en un conjunto X. Se dice que $\mathcal{F}_2$ es **más fino** que $\mathcal{F}_1$ y que $\mathcal{F}_1$ es **más grueso** que $\mathcal{F}_2$, cuando $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. También se dice que $\mathcal{F}_2$ es un **refinamiento** de $\mathcal{F}_1$, o que $\mathcal{F}_2$ **refina** a $\mathcal{F}_1$. De acuerdo a esta definición, todo filtro es simultáneamente más grueso y más fino que sí mismo y todo filtro es un refinamiento de sí mismo. Para excluir la posibilidad de que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, se dice que $\mathcal{F}_2$ es un **refinamiento estricto** de $\mathcal{F}_1$, o que $\mathcal{F}_2$ refina estrictamente a $\mathcal{F}_1$, o que $\mathcal{F}_2$ es estrictamente más fino que $\mathcal{F}_1$ o que $\mathcal{F}_1$ es estrictamente más grueso que $\mathcal{F}_2$. Se dice que dos filtros son **comparables** si uno es más fino que el otro.

Lema 2.3.1. *Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una familia no vacía de filtros en X, entonces su intersección $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ también es un filtro en X.*

Proposición 2.3.2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $A \subseteq X$, $\mathcal{F}_A = \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ se conoce como «la traza de $\mathcal{F}$ en A». $\mathcal{F}_A$ es un filtro en A si y solo si, para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene $A \cap F \neq \varnothing$.*

Definición 2.3.2 (Subbase de filtro)**.** Dado un conjunto X y un subconjunto $\mathcal{S}$ no vacío de su conjunto potencia, $\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, se dice que $\mathcal{S}$ es una **subbase de filtro** en X si ningún subconjunto finito de $\mathcal{S}$ tiene una intersección vacía.

Proposición 2.3.3. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Una condición necesaria y suficiente para que exista un filtro $\mathcal{F}$ en X que contenga a $\mathcal{A}$, es que $\mathcal{A}$ sea una subbase de filtro. Además, si $\mathcal{A}$ es una subbase de filtro, el filtro más grueso que contiene a $\mathcal{A}$ se llama el filtro* **generado** *por $\mathcal{A}$. Este es el conjunto*

$$\mathcal{F} = \left\{ F \subseteq X \;\middle|\; \exists A_1, .., A_n \in \mathcal{A} : \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq F \right\}.$$

Corolario 2.3.4. *Sea $\mathcal{F}_1$ un filtro en X y $A \subseteq X$. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}_2$ en X más fino que $\mathcal{F}_1$ y tal que $A \in \mathcal{F}_2$, si y solo si para cada $F \in \mathcal{F}_1$ se tiene $F \cap A \neq \varnothing$.*

Corolario 2.3.5. *Un conjunto Φ de filtros en un conjunto $X \neq \varnothing$ tiene una mínima cota superior con respecto al orden de la contención en el conjunto de todos los filtros de X, si y solo si, para todas las sucesiones finitas $(\mathcal{F}_i)_{i=1}^{n}$ de elementos de Φ y para todos los conjuntos $A_i \in \mathcal{F}_i$ posibles ($1 \leq i \leq n$), la intersección $A_1 \cap ... \cap A_n$ es no vacía.*

Esta condición es equivalente a pedir que $\bigcup \Phi$ sea una subbase de filtro.

Definición 2.3.3 (Base de filtro)**.** Dado un conjunto X y un subconjunto β no vacío de su conjunto potencia, $\varnothing \neq \beta \subseteq \mathcal{P}(X)$, se dice que β es **base de filtro** sobre X si cumple las propiedades siguientes.

1. $\forall B_1, B_2 \in \beta : \exists B_3 \in \beta : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

2. $\varnothing \notin \beta$.

Ejemplo 2.3.4. Sea $X = \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tomamos el conjunto de todos los múltiplos enteros de a, es decir $a\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : m = na\}$. Entonces el conjunto $\beta = \{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$ es una base de filtro en $\mathbb{Z}$, ya que $(ab)\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Nótese que todo filtro es una base de filtro. Además, si β es una base de filtro en X, entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{\ F \subseteq X \mid \exists B \in \beta : B \subseteq F\ \}$ es un filtro en X [78]. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $\beta \subseteq \mathcal{F}$, entonces β es base de $\mathcal{F}$ si y solo si $\forall F \in \mathcal{F} : \exists B \in \beta : B \subseteq F$. Si $\mathcal{S}$ es subbase de un filtro $\mathcal{F}$, entonces el conjunto $\mathcal{B}$ de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de $\mathcal{F}$. Dos bases de filtro $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se llaman **equivalentes** si las dos generan el mismo filtro. Similarmente, dos subbases de filtro $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se llaman equivalentes si generan el mismo filtro.

Proposición 2.3.6. *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de filtro tales que $\mathcal{B}_1$ genera a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{B}_2$ genera a $\mathcal{F}_2$, entonces $\mathcal{F}_2$ es más fino que $\mathcal{F}_1$ si y solo si*

$$\forall G \in \mathcal{B}_1 : \exists F \in \mathcal{B}_2 : F \subseteq G.$$

Corolario 2.3.7. *Dos bases de filtro $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si y solo si cada elemento de $\mathcal{B}_1$ contiene a algún elemento de $\mathcal{B}_2$ y viceversa, cada elemento de $\mathcal{B}_2$ contiene a algún elemento de $\mathcal{B}_1$.*

A continuación tenemos unos ejemplos de bases de filtro.

Ejemplo 2.3.5 ([78] Una base del filtro de vecindades de un punto)**.** Si x es un punto del espacio topológico (X, τ), entonces $\mathcal{N}^0(x)$, el conjunto de sus vecindades abiertas, es base de $\mathcal{N}(x)$, el filtro de todas las vecindades de x.

Ejemplo 2.3.6 ([8] Base del filtro de secciones terminales de un conjunto dirigido)**.** Sea $(X, \prec)$ un conjunto dirigido con $X \neq \varnothing$. Dado $a \in X$, el conjunto $T(a) = \{x \in X \mid a \prec x\}$ se llama la «sección terminal» del elemento a. Entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{T(a) \mid a \in X\}$ de todas las secciones terminales en X, es una base de filtro, ya que $\varnothing \notin \mathcal{B}$ y dados dos elementos $a, b \in X$, existe un tercero $c \in X$ tal que $a \prec c$ y $b \prec c$, lo que implica que $T(c) \subseteq T(a) \cap T(b)$. El filtro generado por $\mathcal{B}$ se llama el **filtro de secciones terminales** del conjunto dirigido $(X, \prec)$.

Definición 2.3.4 ([48] El filtro generado por dos filtros)**.** Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en X con la propiedad de que $\forall F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G} : F \cap G \neq \varnothing$. Entonces la familia de intersecciones $\mathcal{B} = \{M \cap N \mid M \in \mathcal{F}\ \wedge\ N \in \mathcal{G}\}$ es una base de filtro y el filtro que genera $\mathcal{B}$ se llama el **filtro generado por** $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Este filtro solamente está definido cuando cada miembro de $\mathcal{F}$ intersecta a cada miembro de $\mathcal{G}$. En tal caso, es un refinamiento común de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$.

Definición 2.3.5 (Filtro imagen)**.** Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X y $\psi : X \to Y$ una función. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{\psi(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro en Y. El filtro generado en Y por $\mathcal{B}$ se denota como $\psi_*\mathcal{F}$.

En el caso particular de que $X \subseteq Y$ y que ψ sea la inclusión, nos referimos a $\psi_*\mathcal{F}$ como la **extensión** de $\mathcal{F}$ a Y.

Definición 2.3.6 (El filtro inducido por la preimagen de otro filtro)**.** Sean $\psi : X \to Y$ una función y $\mathcal{F}$ un filtro en Y. Supongamos que $\forall F \in \mathcal{F} : \psi^{-1}(F) \neq \varnothing$ (esta condición se cumple, por ejemplo, cuando ψ es suprayectiva). Entonces $\mathcal{B} = \{\psi^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es base de filtro en X. El filtro que genera $\mathcal{B}$ en X se denota como $\psi^*\mathcal{F}$ y se llama el **filtro inducido** por ψ en X.

[48] En el caso particular de que $X \subseteq Y$ y que ψ sea la inclusión, nos referimos a $\psi^*\mathcal{F}$ como **la traza** de $\mathcal{F}$ en X, recalcando que este filtro solamente está definido cuando cada miembro de $\mathcal{F}$ tiene una intersección no vacía con X.

Observación 2.3.1. Si $\psi : X \to Y$ es una función, $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $\mathcal{G}$ es un filtro en Y, entonces $\mathcal{F}$ es más fino que $\psi^*\psi_*\mathcal{F}$ y, en caso de que $\psi^*\mathcal{G}$ esté definido, $\psi_*\psi^*\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{G}$. Esto es consecuencia de las siguientes propiedades de imágenes y preimágenes. Si $F \subseteq X$ y $G \subseteq Y$, entonces $F \subseteq \psi^{-1}(\psi(F))$ y también $\psi(\psi^{-1}(G)) \subseteq G$.

Proposición 2.3.8. *[78] Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, $A \subseteq X$ y se definen los conjuntos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ como $\mathcal{B}_1 = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{F \cap (X \setminus A) \mid F \in \mathcal{F}\}$, entonces, o bien $\mathcal{B}_1$ es base de un filtro en X o bien $\mathcal{B}_2$ es base de un filtro en X.*

Definición 2.3.7 (Ultrafiltro)**.** Un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X se llama **ultrafiltro** si es un filtro maximal con respecto al orden de la contención. Es decir, dado cualquier filtro $\mathcal{G}$ en X, si $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Proposición 2.3.9. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un conjunto X. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *$\forall A, B \subseteq X : A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F})$.*
3. *$\forall A \subseteq X : A \in \mathcal{F}$ o $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$.*

Definición 2.3.8 (Ultrafiltro principal, fijo o trivial)**.** Un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en un conjunto X se llama **principal**, o **fijo**, o **trivial**, si se cumple

$$\exists a \in X : \mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid a \in F\}.$$

Un ultrafiltro no principal es lo mismo que un ultrafiltro no trivial y también recibe el nombre de **ultrafiltro libre**, porque no es fijo.

Lema 2.3.10. *Un ultrafiltro $\mathcal{F}$ es principal si y solo si tiene como elemento a algún subconjunto finito de su conjunto base X.*

Como consecuencia, es fácil verificar que si X es infinito, entonces $\mathcal{F}$ es libre si y solo si contiene al filtro de Fréchet de todos los subconjuntos cofinitos de X.

Definición 2.3.9 ([5] [48] El filtro elemental asociado a una sucesión)**.** Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un conjunto X, entonces el **filtro elemental** asociado con la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in A\}.$$

Lema 2.3.11. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* X*. Dado* $n \in \mathbb{N}$ *se define* $S_n = \{x_k \mid k \geq n\}$*. La familia* $\mathcal{B} = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es base del filtro elemental asociado a* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Ejemplo 2.3.7. Sea $X = \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde el n-ésimo término de la sucesión es n. Entonces, el filtro elemental asociado a la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el filtro de Fréchet en $\mathbb{N}$, el conjunto de todos los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$.

Observación 2.3.2 ([48]). Si dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden cofinalmente, es decir que

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n = b_n,$$

entonces los filtros asociados a las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son el mismo.

Lema 2.3.12 ([8])**.** *El filtro elemental de una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es más fino que el filtro asociado a la sucesión original.*

Observación 2.3.3. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los filtros elementales asociados con las sucesiones $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Si $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{G}$ es el filtro elemental asociado a una subsucesión de a, ya que alguna sección terminal de b debe ser subsucesión de a.

Por definición, todo filtro elemental tiene una base numerable. En el otro sentido tenemos:

Proposición 2.3.13 ([8])**.** *Si un filtro* $\mathcal{F}$ *tiene una base numerable, entonces es igual a la intersección de todos los filtros elementales que son más finos que* $\mathcal{F}$*.*

Lema 2.3.14 ([27])**.** *Todo filtro numerable tiene una base de la forma* $\mathcal{C} = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *y tal que* $\forall n \in \mathbb{N} : C_{n+1} \subseteq C_n$*.*

Definición 2.3.10 (Punto de aglomeración de una base de filtro)**.** Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y Γ una base de filtro sobre X. Entonces x es un **punto de aglomeración** de Γ si para cada $B \in \Gamma$, x está en la cerradura de B.

Un filtro puede converger a un elemento x de un espacio topológico X (esto permite visualizarlos como una generalización de las sucesiones). De forma más general, la convergencia puede definirse en términos de bases de filtros. Esto se hace como sigue.

Definición 2.3.11 ([22] Convergencia de una base de filtro a un punto)**.** Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y Γ una base de filtro sobre X. Se dice que Γ converge a x (y en tal caso se escribe $\Gamma \longrightarrow x$), si toda vecindad de x contiene a algún elemento de Γ. En este caso también se dice que x es un límite de Γ, o un punto límite de Γ.

Como todo filtro sobre X es una base de filtro sobre X, la convergencia queda definida para ambos.

Si (X, τ) es un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, una consecuencia de las definiciones 2.3.1 y 2.3.11 es que $\mathcal{F}$ converge a x si y solo si $\mathcal{F}$ es un refinamiento del filtro de vecindades de x, es decir que: $\mathcal{F} \longrightarrow x \iff \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Observación 2.3.4. En vista del Lema 2.3.11, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $p \in X$ si y solo si el filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p.

Si un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto x, entonces cualquier filtro más fino que $\mathcal{F}$ también converge a x.

Lema 2.3.15. *Sean $\sigma \subseteq \tau$ dos topologías en X, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Si $\mathcal{F}$ converge a x en (X, τ), entonces también converge a x en (X, σ).*

Proposición 2.3.16. *[8] Si Γ es base de filtro en un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$, entonces Γ converge a x si y solo si toda base de $\mathcal{N}(x)$ tiene algún conjunto elemento de Γ.*

Definición 2.3.12 ([11] Filtro abierto)**.** Una **base de filtro abierta** en un espacio topológico (X, τ), es una base de filtro formada exclusivamente por conjuntos abiertos. Un **filtro abierto** $\mathcal{A}$ en el espacio (X, τ), es una familia no vacía de abiertos no vacíos, cerrada bajo intersecciones finitas y tal que, si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B \in \tau$, entonces $B \in \mathcal{A}$.

Se observa que los filtros abiertos se definen dentro del contexto de un espacio topológico y, a diferencia de los filtros, consisten enteramente de conjuntos abiertos. Además, un filtro abierto no necesita ser cerrado bajo la toma de superconjuntos arbitrarios, sino únicamente bajo superconjuntos abiertos. En cambio los filtros se pueden definir sobre cualquier conjunto no vacío y sin hacer referencia a ninguna topología.

2.4. Algunas propiedades topológicas

Definición 2.4.1 (Interior y cerradura)**.** Dado un espacio topológico (X, τ), un punto $x \in X$ y un subconjunto $A \subseteq X$, utilizamos las notaciones siguientes:

- $\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{G \in \tau \mid G \subseteq A\}$ es el **interior** del conjunto A.
- $\mathrm{cl}(A) = \bigcap \{X \setminus G \mid G \in \tau \wedge G \cap A = \varnothing\}$ es la **cerradura** del conjunto A.
- $N(x) = \bigcap \mathcal{N}(x) = \bigcap \mathcal{N}^0(x) = \bigcap \{B \in \tau \mid x \in B\}$.

Lema 2.4.1. *[68] Dados dos puntos $x, y \in X$ en cualquier espacio topológico (X, τ), las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

1. $cl\,\{x\} = cl\,\{y\}$.
2. $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$.
3. $N(x) = N(y)$.

Definición 2.4.2 ([59] Cerrados irreducibles)**.** Un subespacio cerrado no-vacío $A \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) se llama **irreducible** si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados $B, C \subseteq X$ se cumple

$$A \subseteq B \cup C \Rightarrow (A \subseteq B \ \vee \ A \subseteq C)\,.$$

Ejemplo 2.4.1. Las cerraduras de puntos individuales $cl\,\{x\}$ son cerrados irreducibles en cualquier espacio topológico.

A continuación damos algunas de las definiciones que se conocen comúnmente como «axiomas de separación». Este nombre se refiere a formas específicas de separar entre sí puntos o subconjuntos cerrados de un espacio topológico mediante conjuntos abiertos o funciones continuas.

Definición 2.4.3 (Espacio T_0 o de Kolmogorov)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama T_0 o **espacio de Kolmogorov** si

$$\forall x \neq y \in X : \mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y).$$

La siguiente condición para T_0 es la misma que la de arriba, puesta de manera explícita.

$$\forall x \neq y \in X : \exists G \in \tau : (x \in G \wedge y \notin G) \; o \; (y \in G \wedge x \notin G).$$

Definición 2.4.4 (Espacio R_0 o simétrico)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama R_0 o **espacio simétrico** si

$$\forall x, y \in X : \mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y) \Rightarrow \exists A, B \in \tau : x \in A \setminus B \;\; \wedge \;\; y \in B \setminus A.$$

O, equivalentemente, $\forall x, y \in X : N(x) = N(y) \;\; \vee \;\; (x \notin N(y) \wedge y \notin N(x))$. Y también es equivalente a esta otra condición [18], $\forall x, y \in X : x \in \mathrm{cl}(\{y\}) \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}(\{x\})$.

Definición 2.4.5 (Espacio T_1 o de Fréchet)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama T_1 o **espacio de Fréchet** si

$$\forall x \neq y \in X, \exists A, B \in \tau : x \in A \setminus B \;\; \wedge \;\; y \in B \setminus A.$$

Nótese que en un espacio T_1 todos los conjuntos con un solo punto son cerrados.

Definición 2.4.6 ([59] Espacio sobrio)**.** Un espacio (X, τ) se llama **sobrio** si para todo cerrado irreducible $A \subseteq X$, existe un único punto $x \in X$ tal que $A = \mathrm{cl}\,\{x\}$.

Observación 2.4.1. Todo espacio sobrio es T_0.

Definición 2.4.7 ([62] Espacio R_1 o pre-regular)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama R_1 o **espacio prerregular** si

$$\forall x, y \in X : \mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y) \Rightarrow \exists A, B \in \tau : x \in A \;\; \wedge \;\; y \in B \;\; \wedge \;\; A \cap B = \varnothing.$$

O, equivalentemente, $\forall x, y \in X : N(x) = N(y) \;\; \vee \;\; (N(x) \cap N(y) = \varnothing)$.

Definición 2.4.8 (Espacio T_2 o de Hausdorff)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama T_2 o **espacio de Hausdorff** si

$$\forall x \neq y \in X : \exists A, B \in \tau : x \in A, \; y \in B, \; \text{y } A \cap B = \varnothing.$$

Definición 2.4.9 (Espacio regular)**.** Un espacio (X, τ) se llama **regular** si

$$\forall x \in G \in \tau : \exists A, B \in \tau : A \cap B = \varnothing, \; x \in A \;\; \text{y} \;\; X \setminus G \subseteq B.$$

Definición 2.4.10 (Espacio T_3 o regular de Hausdorff)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama T_3 si es regular y T_0.

Ser un espacio T_3 es equivalente a ser regular y T_1. También es equivalente a ser regular y T_2, ya que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ y aparte tenemos la implicación: (Regular y T_0) $\Rightarrow T_2$. A los espacios T_3 también se les conoce como **espacios de Hausdorff regulares**.

Definición 2.4.11 (Espacio completamente regular)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama **completamente regular** si

$$\forall x \in G \in \tau, \exists f : X \to [0,1] \text{ continua, con } f(x) = 1 \ \wedge \ f(X \setminus G) = \{0\}.$$

Definición 2.4.12 (Espacio de Tychonoff o $T_{3\frac{1}{2}}$)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama $T_{3\frac{1}{2}}$ o **espacio de Tychonoff** si es completamente regular y T_0.

Todo espacio de Tychonoff es T_2 y por lo tanto T_1. Los espacios de Tychonoff también se llaman **espacios de Hausdorff completamente regulares**.

Definición 2.4.13 (Espacio normal)**.** Un espacio (X, τ) se llama **normal** si

$$\forall C, D \subseteq X \text{ cerrados ajenos} : \exists A, B \in \tau : A \cap B = \varnothing \ \wedge \ C \subseteq A \ \wedge \ D \subseteq B.$$

Definición 2.4.14 (Espacio T_4 o normal de Hausdorff)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama T_4 o **espacio de Hausdorff normal** si es normal y T_1.

Definición 2.4.15 ([38] Espacio realcompacto)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama **realcompacto** cuando es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto topológico de lineas rectas reales, es decir, de copias de $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Observación 2.4.2. [38] Como la línea recta real $\mathbb{R}$ es Tychonoff y los productos de espacios Tychonoff son Tychonoff, así como sus subespacios, por lo tanto todos los espacios realcompactos son Tychonoff.

Definición 2.4.16 (Preservación de interiores)**.** Dado un espacio topológico (X, τ) y una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, se dice que $\mathcal{C}$ **preserva interiores** si se cumple

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} : \bigcap \{Int(A) \mid A \in \mathcal{A}\} = Int\left(\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A}\}\right).$$

Definición 2.4.17 ([6] Monoide topológico)**.** Un **monoide topológico** (X, m, τ) es un espacio topológico (X, τ) equipado con una operación binaria $m : X \times X \to X$ que es asociativa, tiene una unidad y es continua con respecto a τ y a la topología producto correspondiente en $X \times X$.

Definición 2.4.18 ([49] Grupo topológico)**.** Un **grupo topológico** es una terna $(G, *, \tau)$ donde $(G, *)$ es un grupo, (G, τ) es un espacio topológico y la función dada por $x * y^{-1} : G \times G \to G$ es continua con respecto a la topología producto en $G \times G$.

La tercera condición es equivalente a pedir por separado que cada una de las funciones $x * y : G \times G \to G$ y $x^{-1} : G \to G$ sean continuas.

Definición 2.4.19 (Relación izquierda y relación derecha)**.** Dado un subconjunto A de un grupo topológico G, la relación $L_A = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1} \cdot y \in A\}$ se llama la **relación izquierda** determinada por A, mientras que $R_A = \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y^{-1} \in A\}$ se llama la **relación derecha** determinada por A.

Cuando el grupo G es abeliano, las relaciones izquierda y derecha determinadas por A coinciden, es decir, $\forall A \subseteq G : L_A = R_A$.

2.4.1. Espacios preordenados y espacios de Alexandrov

Definición 2.4.20 ([61] Espacio topológico preordenado)**.** Un espacio topológico **preordenado** es una terna $(X, \tau, \leq)$ donde (X, τ) es un espacio topológico y $\leq$ es un preorden en X.

Definición 2.4.21 ([26] Espacio topológico ordenado)**.** Un espacio topológico **ordenado** es una terna $(X, \tau, \leq)$ donde (X, τ) es un espacio topológico, $\leq$ es un orden parcial en X y su gráfica $G(\leq) = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$.

Definición 2.4.22 (El preorden de especialización de una topología)**.** Dado un espacio topológico (X, τ), el **preorden de especialización** $\leq_\tau$ en X se define así

$$\forall x, y \in X : x \leq_\tau y \Leftrightarrow x \in cl\,\{y\}.$$

El preorden de especialización también se puede caracterizar mediante las condiciones siguientes.

Lema 2.4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sean $x, y \in X$. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

- $x \leq_\tau y$.
- $cl\,\{x\} \subseteq cl\,\{y\}$.
- $\mathcal{N}^0(x) \subseteq \mathcal{N}^0(y)$.
- $N(y) \subseteq N(x)$.

Observación 2.4.3. En todo espacio T_1, el preorden de especialización es $\triangle(X)$, la relación de identidad.

Lema 2.4.3. *Dada cualquier topología, sus abiertos son conjuntos crecientes en el preorden de especialización.*

$$A \in \tau \Rightarrow \uparrow_{\leq_\tau} A = A.$$

Proposición 2.4.4 ([32])**.** *Dado un preorden $\leq$ en un conjunto X, la familia de sus conjuntos crecientes es la topología más fina entre todas aquellas que tienen a $\leq$ como su preorden de especialización.*

Proposición 2.4.5 ([32])**.** *Dado un preorden $\leq$ en un conjunto X, existe una topología en X que es la más gruesa entre todas aquellas que tienen a $\leq$ como su preorden de especialización. La familia $\mathcal{S} = \{X \setminus \downarrow\{x\} \mid x \in X\}$ es subbase de dicha topología y $\mathcal{B} = \{X \setminus \downarrow E \mid E \subseteq X,\ E \text{ finito}\}$ es una base.*

La topología de la proposición 2.4.5 se conoce como la *topología superior* del preorden $\leq$.

Definición 2.4.23 ([2], [88] Topología de Alexandrov)**.** Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la topología τ se llama **de Alexandrov** si es cerrada bajo intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos.

Si una topología τ sobre un conjunto X es de Alexandrov, entonces al espacio (X, τ) también se le llama espacio de Alexandrov. La topología de la proposición 2.4.4 es una topología de Alexandrov y se conoce como la *topología de Alexandrov* del preorden $\leq$.

Lema 2.4.6. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandrov, entonces el conjunto de todos los cerrados de τ también es una topología de Alexandrov en X.*

Proposición 2.4.7. *[88] Un espacio topológico (X, τ) es de Alexandrov si y solo si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad mínima.*

Proposición 2.4.8. *[88] Si τ es una topología de Alexandrov, entonces $\mathcal{B} = \{N(x) \mid x \in X\}$, el conjunto de todas las vecindades mínimas, es base de τ y es la única base minimal en el sentido de que cualquier base de τ contiene a $\mathcal{B}$.*

Proposición 2.4.9. *[3] Una topología de Alexandrov τ es T_0 si y solo si su preorden de especialización $\leq_\tau$ es un orden parcial.*

Lema 2.4.10. *[3] La única topología de Alexandrov que puede ser T_1 es la topología discreta.*

Esto es consecuencia de que en un espacio de Alexandrov, las uniones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas y de que en un espacio T_1 todos los puntos son cerrados.

Lema 2.4.11. *Un espacio de Alexandrov es R_0 si y solo si es R_1.*

Lema 2.4.12. *Si un espacio de Alexandrov es R_1, entonces todos sus conjuntos abiertos son cerrados y viceversa.*

A continuación damos varios ejemplos de topologías de Alexandrov.

Ejemplo 2.4.2. Toda topología τ sobre un conjunto finito es una topología de Alexandrov.

Ejemplo 2.4.3 (Todas las preimágenes de una función)**.** Si $f : X \to Y$ es una función y definimos a $\tau = \{A \subseteq X \mid \exists B \subseteq Y : A = f^{-1}(B)\}$, la familia de los conjuntos f-saturados, entonces τ es una topología de Alexandrov.

Ejemplo 2.4.4. [70] Sea X un conjunto no vacío y sea $S \subseteq X$. Entonces los tres conjuntos siguientes son topologías de Alexandrov en X.

- $Super(S) = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid S \subseteq A\}$.
- $Sub(S) = \{X\} \cup \{A \subseteq X \mid A \subseteq S\}$.
- $Ajeno(S) = \{X\} \cup \{A \subseteq X \mid A \cap S = \varnothing\} = Sub(X \setminus S)$.

Ejemplo 2.4.5 (Topologías basadas en una partición)**.** Sea $X \neq \varnothing$ y sea $\beta = \{B_i\}_{i \in I}$ una partición de X. Entonces la topología que tiene como base a β es de Alexandrov.

En este ejemplo la vecindad mínima de un punto x es el bloque B_i que contiene a x.

Ejemplo 2.4.6 ([70] Cerrados que contienen a su imagen bajo una función)**.** Si $f : X \to X$ es una función y se define a los conjuntos cerrados en τ como aquellos $C \subseteq X$ que cumplen $f(C) \subseteq C$, entonces τ es de Alexandrov.

Ejemplo 2.4.7 ([70] Abiertos que contienen a su preimagen bajo una función)**.** Si se tiene una función $f : X \to X$ y se define a los abiertos de τ como aquellos $A \subseteq X$ que cumplen $f^{-1}(A) \subseteq A$, entonces τ es de Alexandrov.

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente.

Ejemplo 2.4.8 (Abiertos que contienen a su imagen bajo una relación)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $R \subseteq X \times X$. Entonces $\tau_R = \{A \subseteq X \mid R(A) \subseteq A\}$ es una topología de Alexandrov en el conjunto X.

Este último ejemplo es el más general que hay, ya que todas las topologías de Alexandrov se pueden definir de esa manera. De hecho, dada una topología de Alexandrov, es posible describir sus conjuntos abiertos mediante el formato del ejemplo anterior utilizando no solamente una relación en general, sino un preorden, el propio preorden de especialización de la misma topología.

Proposición 2.4.13. *Si τ es una topología de Alexandrov, entonces todos los conjuntos crecientes de su preorden de especialización pertenecen a τ.*

El lema 2.4.3 junto con la proposición 2.4.13 implican el siguiente resultado.

Corolario 2.4.14. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandrov y $\leq_\tau$ es el preorden de especialización de τ, entonces la colección de los conjuntos crecientes de $\leq_\tau$ es igual a τ.*

De aquí se sigue este otro resultado muy similar.

Corolario 2.4.15. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandrov y $\leq_\tau$ es el preorden de especialización de τ, entonces la colección de los conjuntos decrecientes de $\leq_\tau$ coincide con la colección de los conjuntos cerrados en τ.*

Lema 2.4.16. *Sea $P \subseteq X \times X$ un preorden sobre un conjunto $X \neq \varnothing$. Sea τ_P la topología de Alexandrov dada por los conjuntos crecientes de P, es decir, $\tau_P = \{A \subseteq X \mid P(A) \subset A\}$. Sea $x \in X$. Se tiene*

1. *El preorden de especialización de τ_P es igual a P.*
2. *$N(x) = P(x)$.*
3. *$cl\,\{x\} = P^{-1}(x)$.*

Corolario 2.4.17. *Si P y Q son dos preórdenes en X que inducen la misma topología con sus conjuntos crecientes (es decir que $\tau_P = \tau_Q$) entonces $P = Q$.*

Lema 2.4.18. *Si τ y σ son dos topologías de Alexandrov en un conjunto X no vacío y ambas tienen el mismo preorden de especialización $\leq_\tau = \leq_\sigma$, entonces $\tau = \sigma$.*

Los resultados anteriores significan que hay una biyección entre el conjunto de todos los preórdenes que se pueden definir en un conjunto dado, por un lado, y el conjunto de topologías de Alexandrov que se pueden definir sobre ese mismo conjunto, por el otro. En esta biyección el preorden asociado a la topología es su preorden de especialización y la topología asociada al preorden es la que tiene a los conjuntos crecientes por abiertos y a los decrecientes como cerrados.

2.4.2. Espacios bitopológicos

Definición 2.4.24 (Espacio bitopológico)**.** Un espacio **bitopológico** es una terna (X, τ, σ) donde tanto τ como σ son topologías en X.

Ejemplo 2.4.9. Un espacio topológico de Alexandrov (X, τ) se puede considerar de entrada como un espacio bitopológico ya que los cerrados de τ forman otra topología en X.

Definición 2.4.25 (Función bicontinua)**.** [14] Dados dos espacios bitopológicos (X, τ_1, τ_2) y (Y, σ_1, σ_2), entonces una función $f : X \to Y$ se llama **bicontinua**, o también **continua por pares**, si tanto $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ como $f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$ son continuas.

Definición 2.4.26 (La categoría **Bitop**)**.** La categoría **Bitop** está definida por:

- Sus objetos son los espacios bitopológicos.
- Sus morfismos son las funciones bicontinuas.

De manera similar al hecho de que en un espacio topológico se tienen axiomas de separación, en un espacio bitopológico también se tienen este tipo de axiomas. Veamos algunos.

Definición 2.4.27 (Topología regular con respecto a otra topología)**.** Dado un espacio bitopológico (X, τ, σ), se dice que τ es **regular con respecto a** σ si se cumple

$$\forall x \in X : \exists \mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{B}_x \text{ es base del filtro } \mathcal{N}_\tau(x) \text{ y } \ \forall B \in \mathcal{B}_x : X \setminus B \in \sigma.$$

Esto significa que todo punto en X tiene una base de vecindades en τ que consiste enteramente de conjuntos que son cerrados en σ.

Lema 2.4.19. *[50] τ es regular con respecto a σ si y solo si*

$$\forall x \in A \in \tau, \exists U \in \tau, V \in \sigma \text{ con } x \in U, \ U \cap V = \varnothing \text{ y } A \cup V = X.$$

Definición 2.4.28 (Espacio bitopológico regular por pares)**.** Se dice que un espacio bitopológico (X, τ, σ) es **regular por pares** si τ es regular con respecto a σ y además σ es regular con respecto a τ.

Definición 2.4.29 ([50] Espacio bitopológico Hausdorff por pares)**.** El espacio bitopológico (X, τ, σ) se llama **Hausdorff por pares** si

$$\forall x \neq y \in X, \exists U \in \tau, V \in \sigma \text{ con } x \in U, \ y \in V \text{ y } U \cap V = \varnothing.$$

De acuerdo con [50], si (X, τ, σ) es Hausdorff por pares, entonces tanto τ como σ son T_1.

Definición 2.4.30 ([94] Topologías acopladas)**.** Si (X, τ, σ) es un espacio bitopológico, entonces se dice que τ está **acoplada** a σ si para todo abierto A de τ se cumple que $cl_\tau(A) \subseteq cl_\sigma(A)$.

Conforme con Kelly [50], si τ es regular con respecto a σ y σ está acoplada a τ, entonces $\tau \subseteq \sigma$. Por lo tanto si τ y σ son regulares a pares y están acopladas mutuamente, entonces coinciden y es una topología regular.

Capítulo 3

Espacios uniformes

La teoría de los espacios uniformes está relacionada estrechamente con la de los espacios cuasiuniformes, de los que los cuasimétricos son un caso particular. El concepto de espacio uniforme lo introdujo Andre Weil [93] en 1937. Hay varias propiedades que se estudian dentro del marco de los espacios métricos y que están relacionadas estrechamente con propiedades topológicas, por ejemplo el acotamiento total, la continuidad uniforme o las sucesiones de Cauchy, aunque en realidad estas últimas no son en sí mismas propiedades topológicas [49]. Esto es porque el concepto de cercanía uniforme o de pequeñez uniforme no es un concepto topológico [22]. Los espacios uniformes son una generalización de los espacios métricos y se encuentran de cierta forma en un punto intermedio entre los espacios métricos y los espacios topológicos, ya que a todo espacio métrico se le asocia de manera canónica un espacio uniforme y a cada espacio uniforme se le asocia de manera canónica un espacio topológico. A cada grupo topológico también se le asocia de forma canónica un espacio uniforme, aunque su topología no sea metrizable, así que el concepto de espacio uniforme es más general que el de espacio métrico [5].

3.1. Teoría general

Un espacio uniforme es un conjunto equipado con una estructura conocida como uniformidad. Una uniformidad sobre un conjunto dado se puede definir de tres maneras distintas pero equivalentes. Una uniformidad seudométrica es una familia de seudométricas sobre un mismo conjunto, cerrada bajo la operación binaria del máximo y que, sin entrar en detalles, cumple otra propiedad en términos de desigualdades con números reales positivos. Una uniformidad diagonal es un filtro de relaciones reflexivas definidas en un conjunto y que cumplen dos propiedades adicionales en términos de relaciones inversas y de composición de relaciones. Una uniformidad de cubiertas es una familia de cubiertas de un conjunto dado que cumplen tres propiedades acerca de los refinamientos de dichas cubiertas. En este trabajo se exponen los conceptos relativos a la teoría de los espacios uniformes y cuasiuniformes desde el punto de vista y con la notación de las uniformidades diagonales.

Definición 3.1.1 (Espacio uniforme)**.** Un par $(X,\mathcal{U})$ es un **espacio uniforme** si cumple:

1. $\mathcal{U}$ es un filtro sobre $X \times X$.

2. $\forall U \in \mathcal{U} : \triangle(X) \subseteq U$.

3. $\forall U \in \mathcal{U} : \exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subseteq U$.

4. $\forall U \in \mathcal{U} : U^{-1} \in \mathcal{U}$.

Nos referimos a $\mathcal{U}$ como una **uniformidad** sobre X. A los elementos de $\mathcal{U}$ se les llama **entornos**.

Algunos autores, por ejemplo [7], sustituyen la cuarta condición de la definición 3.1.1 por la condición equivalente:

$$\forall U \in \mathcal{U} : \exists V \in \mathcal{U} : V \subseteq U^{-1}.$$

Nótese que dado que $\triangle(X) \subseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}$, si $V^2 \subseteq U$, entonces $V \subseteq U$.

Como las uniformidades son filtros, también se dice que una uniformidad $\mathcal{V}$ **refina** a una uniformidad $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Equivalentemente, se dice que $\mathcal{V}$ es **más fina** que $\mathcal{U}$ y que $\mathcal{U}$ es **más gruesa** que $\mathcal{V}$. Toda uniformidad es simultáneamente más fina y más gruesa que sí misma. Para excluir el caso de la igualdad se habla de **refinamiento estricto**.

Ejemplo 3.1.1 (La uniformidad trivial y la uniformidad discreta)**.** Si X es un conjunto no vacío, entonces:

- $\mathcal{V} = \{X \times X\}$ es una uniformidad en X llamada la **uniformidad trivial**.
- $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq U\}$ es una uniformidad en X llamada la **uniformidad discreta**.

Dada cualquier uniformidad $\mathcal{U}$ sobre el conjunto X, la uniformidad discreta es más fina que $\mathcal{U}$ y la uniformidad trivial es más gruesa que $\mathcal{U}$.

Definición 3.1.2 (Base de una uniformidad)**.** Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{B}$ se llama **base** de $\mathcal{U}$ si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Una base de $\mathcal{U}$ también se llama un **sistema fundamental de entornos** de $\mathcal{U}$.

Proposición 3.1.1. *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$. Entonces existe alguna uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{U}$ si y solo si se cumplen las condiciones siguientes:*

- $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- $\forall B \in \mathcal{B} : \Delta(X) \subseteq B$.
- $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V \circ V \subseteq U$.
- $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V \subseteq U^{-1}$.

Claramente toda uniformidad es base de sí misma y el conjunto singular $\{\Delta(X)\}$ es base de la uniformidad discreta.

Ejemplo 3.1.2. En todo espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, la familia $\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U} \mid U = U^{-1}\}$, formada por los entornos simétricos es una base de la uniformidad $\mathcal{U}$.

Ejemplo 3.1.3 ([47] La estructura p-ádica)**.** Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y\,(mod\ p^n)\}$. La familia $\mathcal{B} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es base de una uniformidad $\mathcal{U}$ en $\mathbb{Z}$ llamada la **estructura p-ádica**.

Ejemplo 3.1.4 (Uniformidades izquierda y derecha en grupos topológicos)**.** Si $(G, *, \tau)$ es un grupo topológico, las relaciones izquierdas L_V determinadas por las vecindades V del elemento neutro de G, forman la base de una uniformidad llamada **la uniformidad izquierda** de G. Similarmente, las relaciones derechas R_V determinadas por las vecindades del elemento neutro generan una uniformidad llamada **la uniformidad derecha** de G.

Ejemplo 3.1.5 (La uniformidad Euclideana)**.** La familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, donde $U_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$, es base de una uniformidad en $\mathbb{R}$ que se llama la **uniformidad Euclideana**.

La uniformidad Euclideana es un caso particular del siguiente concepto más general.

Ejemplo 3.1.6 (Uniformidades métricas)**.** Dada una métrica d en un conjunto X, la familia $\mathcal{B} = \{U_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, donde $U_\epsilon = d^{-1}[0, \epsilon) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, genera una uniformidad sobre X conocida como la **uniformidad métrica** determinada por d.

Definición 3.1.3 (Cercanía y pequeñez relativas a un entorno)**.** En un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, si $x, y \in X$, $U \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq X$, entonces

- Si $(x, y) \in U$, se dice que x e y son **cercanos** con respecto a U.
- Si $A \times A \subseteq U$, es decir, si todos los elementos de A son cercanos entre si con respecto a U, se dice que A es **pequeño** con respecto a U.

Lema 3.1.2. *Sea $\mathcal{U}$ una uniformidad en X y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{U}$. En este caso, $\bigcap\mathcal{U} = \bigcap\mathcal{B}$. Además, dicha intersección es una relación de equivalencia en X.*

Definición 3.1.4 (Uniformidades separadas, o de Hausdorff)**.** Se dice que un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es **separado**, o **de Hausdorff**, si cumple

$$\bigcap\mathcal{U} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta(X).$$

Definición 3.1.5 (Espacio uniforme totalmente acotado)**.** Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se llama **totalmente acotado** si para cada entorno $U \in \mathcal{U}$ existe una familia finita de subconjuntos $A_1, .., A_n \subseteq X$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_n = X \ \text{ y } \ \forall i \in \{1, .., n\} : A_i \times A_i \subseteq U.$$

Definición 3.1.6 (Espacio uniforme precompacto)**.** Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se llama **precompacto** si para cada entorno $U \in \mathcal{U}$ existe un subconjunto finito $S \subseteq X$, tal que $U(S) = X$.

Proposición 3.1.3. *[57] Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es precompacto si y solo si es totalmente acotado.*

En el caso más general de los espacios cuasiuniformes, los dos conceptos anteriores no son equivalentes. La uniformidad trivial siempre es totalmente acotada. En cambio, la uniformidad discreta es totalmente acotada si y solo si el conjunto X es finito. En el caso de una uniformidad métrica, si el espacio $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado, entonces es acotado.

Definición 3.1.7 (Función uniformemente continua)**.** Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios uniformes $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ se llama **uniformemente continua** si

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} : \forall x, y \in X : (x,y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

La condición de arriba es equivalente a pedir que $\forall E \in \mathcal{V} : (f,f)^{-1}E \in \mathcal{U}$.

Si $\mathcal{U}$ es la uniformidad discreta, entonces f es uniformemente continua. Asimismo, si $\mathcal{V}$ es la uniformidad trivial, f es uniformemente continua. Las funciones constantes son uniformemente continuas. En cualquier espacio uniforme, la función identidad es uniformemente continua. La composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Proposición 3.1.4. *Sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua y suprayectiva entre dos espacios uniformes. Si X es totalmente acotado, entonces Y también es totalmente acotado.*

Proposición 3.1.5. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo continuo entre dos grupos topológicos. Entonces f es uniformemente continua, tanto con respecto a la uniformidad izquierda como a la uniformidad derecha.*

Definición 3.1.8 (Unimorfismo)**.** Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios uniformes $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ se llama **unimorfismo** si es una biyección uniformemente continua y su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es uniformemente continua.

Los unimorfismos también reciben el nombre de **equivalencia uniforme**.

Definición 3.1.9 (Espacios uniformemente equivalentes)**.** Dos espacios uniformes $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ son **uniformemente equivalentes** si existe un unimorfismo entre ellos.

Definición 3.1.10 (Invariante uniforme)**.** Un **invariante uniforme** es cualquier propiedad de los espacios uniformes que se mantenga invariante bajo unimorfismos.

Definición 3.1.11 (La categoría **Unif**)**.** La categoría **Unif** está definida por:

- Sus objetos son los espacios uniformes.
- Sus morfismos son las funciones uniformemente continuas.

Definición 3.1.12 (Espacio uniformemente homogéneo)**.** Un espacio uniforme X se llama **uniformemente homogéneo** si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un unimorfismo $f : X \to X$ tal que $f(a) = b$.

Todo espacio uniforme con la uniformidad discreta o con la uniformidad trivial es uniformemente homogéneo. Todos los grupos topológicos son uniformemente homogéneos.

Definición 3.1.13 ([47] El producto uniforme)**.** Sea $\{(X_j,\mathcal{U}_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios uniformes y sea $X=\prod_{j\in J} X_j$. La **uniformidad producto** $\mathcal{U}$ es la uniformidad más gruesa en X entre aquellas para las que todas la proyecciones $\pi_j : X \to X_j$ son uniformemente continuas.

Proposición 3.1.6. *Sea $\{(X_j,\mathcal{U}_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios uniformes y sea X su producto uniforme. Si A es un espacio uniforme y $f : A \to X$ es una función, entonces f es uniformemente continua si y solo si cada una de las composiciones $f_j = \pi_j \circ f : A \to X_j$ es uniformemente continua.*

Lema 3.1.7. *Sean $\{(X_j,\mathcal{U}_j)\}_{j\in J}$ y $\{(Y_j,\mathcal{V}_j)\}_{j\in J}$ dos familias de espacios uniformes y sea $\{f_j : X_j \to Y_j\}_{j\in J}$ una familia de funciones uniformemente continuas entre los espacios correspondientes. En tal caso la función producto,*

$$\prod_{j\in J} f_j : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow \prod_{j\in J} Y_j \quad \text{dada por} \quad \left(\prod_{j\in J} f_j\right)(x) = (f_j(x_j))_{j\in J}\,,$$

es uniformemente continua.

Corolario 3.1.8. *El producto de una familia de unimorfismos es también unimorfismo.*

Corolario 3.1.9. *El producto uniforme de una familia de espacios uniformemente homogéneos es también uniformemente homogéneo.*

Corolario 3.1.10. *Dados un espacio uniforme X y un conjunto J, se tiene que la función diagonal $\Delta : X \to X^J$ es uniformemente continua.*

Proposición 3.1.11. *El producto uniforme de una familia de espacios uniformes separados es separado.*

Proposición 3.1.12. *El producto uniforme de una familia de espacios uniformes totalmente acotados es totalmente acotado.*

Definición 3.1.14 (La uniformidad inducida)**.** Sea $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ una función entre espacios uniformes. Se dice que $\mathcal{U}$ es la **uniformidad inducida** por f a partir de $\mathcal{V}$ si la familia $\mathcal{B} = \{(f\times f)^{-1}E \mid E \in \mathcal{V}\}$ es base de $\mathcal{U}$.

La notación $(f\times f)^{-1}E$ significa $\{(x,y) \in X\times X \mid (f(x),f(y)) \in E\}$.

La uniformidad inducida es la más gruesa en X entre todas aquellas que hacen que la función f sea uniformemente continua.

Lema 3.1.13. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones entre espacios uniformes. Si Y tiene la uniformidad inducida por g a partir de la uniformidad de Z y X tiene la uniformidad inducida por f a partir de la uniformidad de Y, entonces X tiene la uniformidad inducida por $g\circ f$ a partir de la uniformidad de Z.*

Proposición 3.1.14. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones entre espacios uniformes. Si Y tiene la uniformidad inducida por g a partir de la uniformidad de Z, entonces f es uniformemente continua si y solo si $g\circ f$ es uniformemente continua.*

Definición 3.1.15 (Inmersión uniforme)**.** Sea $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ una función inyectiva entre espacios uniformes. Esta función se llama **inmersión uniforme** si los entornos de X coinciden con las imágenes inversas de los entornos de Y, es decir $\mathcal{U} = \{(f \times f)^{-1}E \mid E \in \mathcal{V}\}$

Si el dominio de una función inyectiva y uniformemente continua tiene la uniformidad trivial, entonces dicha función es una inmersión uniforme. Sin embargo, no todas las funciones inyectivas y uniformemente continuas son inmersiones uniformes. Por ejemplo, la función identidad en un conjunto donde la uniformidad del dominio sea un refinamiento estricto de la uniformidad del codominio, no es una inmersión uniforme.

Definición 3.1.16 ([7], [8] Uniformidades relativas y subespacios uniformes)**.** Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $A \subseteq X$ no vacío. La traza de $\mathcal{U}$ en $A \times A$, es decir el conjunto

$$\mathcal{D} = \{U \cap A \times A \mid U \in \mathcal{U}\},$$

es una uniformidad en A a la que se conoce como la **uniformidad inducida** en A por $\mathcal{U}$. También se le llama la **uniformidad relativa** a A, o la **relativización** de $\mathcal{U}$ para A. Al espacio uniforme $(A,\mathcal{D})$ se le llama un **subespacio uniforme** de $(X,\mathcal{U})$.

Proposición 3.1.15. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para cada $x \in X$ se define el conjunto $\mathcal{B}(x) = \{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Existe una única topología τ en X con la propiedad de que, para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{B}(x)$ es igual a $\mathcal{N}_\tau(x)$, el filtro de vecindades de x en τ.*

Definición 3.1.17 (La topología uniforme)**.** Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, la topología de la Proposición 3.1.15 se denota por $\tau(\mathcal{U})$ y se llama la **topología uniforme** asociada a $\mathcal{U}$. Se dice que $\mathcal{U}$ **induce** o **genera** a $\tau(\mathcal{U})$.

Dados $x \in X,\ U \in \mathcal{U}$, al conjunto $U(x)$ se le llama **vecindad uniforme** de x.

Proposición 3.1.16. *En todo espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, la topología uniforme está dada por*

$$\tau(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A : \exists U \in \mathcal{U} : U(x) \subseteq A\}.$$

La topología uniforme es la topología canónica que se le asocia usualmente a un espacio uniforme. Esta topología es básica en el estudio de los espacios uniformes ya que cuando no se indica otra cosa, las propiedades topológicas que se adscriben a un espacio uniforme se interpretan rutinariamente con relación a la topología uniforme. La topología inducida por la uniformidad discreta es la topología discreta y la topología inducida por la uniformidad trivial es la topología indiscreta. En general, dado un punto $x \in X$ y un entorno $U \in \mathcal{U}$, la vecindad $U(x)$ no necesariamente es un conjunto abierto en la topología uniforme. Sin embargo, siempre contiene a una vecindad abierta de x en $\tau(U)$, como lo muestra el resultado siguiente.

Lema 3.1.17 ([4])**.** *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para cada $U \in \mathcal{U}, x \in X$, el conjunto G definido como*

$$G = \{y \in X \mid \exists V \in \mathcal{U} : V(y) \subseteq U(x)\}$$

cumple que $x \in G \subseteq U(x)$ y además $G \in \tau(\mathcal{U})$.

Proposición 3.1.18 ([47]). *Si $(G,*,\tau)$ es un grupo topológico, entonces, tanto la topología uniforme inducida por la uniformidad izquierda de G, así como la inducida por la uniformidad derecha, coinciden con τ.*

Proposición 3.1.19 ([7]). *Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, la topología $\tau(\mathcal{U})$ es de Hausdorff si y solo si el espacio $(X,\mathcal{U})$ es de Hausdorff.*

Proposición 3.1.20. *Sean X y Y espacios uniformes y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Entonces f es continua con respecto a las topologías inducidas por las uniformidades de X y de Y.*

Definición 3.1.18 (Espacio topológico uniformizable)**.** Un espacio topológico (X,τ) se llama **uniformizable** si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\tau = \tau(\mathcal{U})$.

No todo espacio topológico es uniformizable. Por otra parte, hay uniformidades diferentes que generan la misma topología.

Ejemplo 3.1.7. Sea X un conjunto infinito. Sea $\mathcal{B}_1$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en X y sea $\mathcal{B}_2$ el conjunto de relaciones de equivalencia que tienen un número finito de clases de equivalencia. Tanto $\mathcal{B}_1$ como $\mathcal{B}_2$ son bases que generan uniformidades $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ sobre X, respectivamente. Se tiene $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ ya que $\mathcal{U}_1$ es la uniformidad discreta mientras que $\Delta(X) \notin \mathcal{U}_2$. Sin embargo, ambas uniformidades generan a la topología discreta en X.

Proposición 3.1.21. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Si $D = D^{-1} \in \mathcal{U}$ es un entorno simétrico y se tiene un subconjunto $M \subseteq X \times X$, entonces el subconjunto $D \circ M \circ D$ es una vecindad de M en el producto topológico $(X,\tau(\mathcal{U})) \times (X,\tau(\mathcal{U}))$. Además, la cerradura de M está dada por*

$$Cl(M) = \bigcap \left\{ D \circ M \circ D \mid D = D^{-1} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Corolario 3.1.22. *Si H es un subconjunto del espacio uniforme X, entonces*

$$Cl(H) = \bigcap \left\{ D(H) \mid D = D^{-1} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Corolario 3.1.23. *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, se tiene*

i) Los interiores de los entornos $U \in \mathcal{U}$ forman una base de $\mathcal{U}$.

ii) Las cerraduras de los entornos $U \in \mathcal{U}$ forman una base de $\mathcal{U}$.

Corolario 3.1.24. *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, entonces el espacio topológico asociado $(X,\tau(\mathcal{U}))$ es regular.*

De esta manera, el corolario 3.1.24 muestra que ningún espacio topológico que no sea regular admite una uniformidad compatible con su topología. Por ejemplo, la topología cofinita en un conjunto infinito no está inducida por ninguna uniformidad, ya que dicha topología no es regular. Como se vió anteriormente, pueden haber uniformidades diferentes que induzcan la misma topología. Sin embargo, ese no es el caso para un espacio topológico compacto Hausdorff.

Teorema 3.1.25 ([8], [47]). *Si (X,τ) es un espacio compacto Hausdorff, existe una única uniformidad $\mathcal{U}$ en X compatible con τ. La uniformidad $\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las vecindades del conjunto $\Delta(X)$ en el espacio producto $(X,\tau)\times(X,\tau)$.*

Ya se ha mencionado que una función uniformemente continua es continua, pero lo inverso no es cierto de manera general. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, dicha propiedad inversa sí se cumple.

Corolario 3.1.26 ([47]). *Sea $f:(X,\mathcal{U})\longrightarrow(Y,\mathcal{V})$ una función entre espacios uniformes, continua con respecto a $\tau(\mathcal{U})$ y $\tau(\mathcal{V})$. Si $(X,\tau(\mathcal{U}))$ es un espacio compacto Hausdorf, entonces f es uniformemente continua.*

El ejemplo siguiente sirve como ilustración del corolario anterior.

Ejemplo 3.1.8. Si G es un grupo topológico compacto Hausdorff y $n\in\mathbb{Z}$, entonces la función $\psi:G\to G$ tal que $\forall g\in G:\psi(g)=g^n$, es uniformemente continua.

Definición 3.1.19 (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se llama **de Cauchy** si

$$\forall U\in\mathcal{U}:\exists N\in\mathbb{N}:\forall m,n\geq N:(x_m,x_n)\in U.$$

Es suficiente que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpla la condición de la definición con respecto a todos los entornos B pertenecientes a alguna base $\mathcal{B}$ de la uniformidad $\mathcal{U}$ para que sea una sucesión de Cauchy.

Proposición 3.1.27. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología uniforme $\tau(\mathcal{U})$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.*

Proposición 3.1.28. *Sea $f:X\to Y$ una función uniformemente continua entre dos espacios uniformes $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

Definición 3.1.20 (Filtro de Cauchy). En un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, un filtro $\mathcal{F}$ sobre X se dice que es un **filtro de Cauchy** si para cada $U\in\mathcal{U}$ existe $F\in\mathcal{F}$ tal que $F\times F\subset U$.

Observación 3.1.1. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{U}$ en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X tal que para cada $B\in\mathcal{B}$ existe $F\in\mathcal{F}$ con $F\times F\subseteq B$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy.

En una uniformidad discreta, los únicos filtros de Cauchy son los filtros principales. En una uniformidad trivial, todos los filtros son de Cauchy. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.9. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y sea x un punto en X. Sea $\mathcal{F}_x$ la familia de vecindades de x definida como $\mathcal{F}_x=\{U(x)\ \mid\ U\in\mathcal{U}\}$. $\mathcal{F}_x$ es un filtro sobre X, pues $\varnothing\notin\mathcal{F}_x$ y las intersecciones de vecindades de x, al igual que los super conjuntos, son nuevamente vecindades de x. Ahora veamos que $\mathcal{F}_x$ es un filtro de Cauchy. En efecto, si $U\in\mathcal{U}$, por definición existe un entorno simétrico $V\in\mathcal{U}$, tal que $V\circ V\subseteq U$. Así

$$V(x)\times V(x)=\{(z,w)\in X\times X\mid(x,z)\in V\text{ y }(x,w)\in V\}\subseteq V\circ V\subseteq U,$$

pues V es simétrica. Por tanto $\mathcal{F}_x$ es un filtro de Cauchy.

Lema 3.1.29. *En un espacio uniforme, un filtro $\mathcal{F}$ es de Cauchy si y solo si cumple con*

$$\forall U \in \mathcal{U} : \exists x \in X : U(x) \subseteq \mathcal{F}.$$

La condición del Lema 3.1.29 se utiliza para definir los filtros de Cauchy en espacios cuasiuniformes. En un espacio uniforme dicha condición es equivalente a la de la definición 3.1.20.

Observación 3.1.2. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en el espacio uniforme X es de Cauchy si y solo si el filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

En un espacio uniforme, todo refinamiento de un filtro de Cauchy también es de Cauchy.

Proposición 3.1.30. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si $\mathcal{F}$ converge en la topología uniforme $\tau(\mathcal{U})$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy.*

Proposición 3.1.31. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en el espacio uniforme X. Entonces todo punto de adherencia de $\mathcal{F}$ es punto límite de $\mathcal{F}$.*

Corolario 3.1.32. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio uniforme X. Si una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Proposición 3.1.33. *Sea $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ una función uniformemente continua y sea $\mathcal{B}$ una base de un filtro de Cauchy en X. Entonces $f(\mathcal{B})$ es base de un filtro de Cauchy en Y.*

En particular, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son uniformidades en un conjunto X y $\mathcal{V}$ es más gruesa que $\mathcal{U}$, entonces todo filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$ es un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{V})$.

Proposición 3.1.34. *Sea $\psi : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ una función entre dos espacios uniformes. Supóngase que $\mathcal{U}$ es la uniformidad inducida por ψ a partir de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro de Cauchy en Y tal que $\psi^*\mathcal{G}$ está definido, entonces $\psi^*\mathcal{G}$ es un filtro de Cauchy en X.*

Proposición 3.1.35. *Un espacio uniforme X es totalmente acotado si y solo si todo filtro $\mathcal{F}$ en X admite un refinamiento de Cauchy.*

Corolario 3.1.36. *Un espacio uniforme X es totalmente acotado si y solo si todo ultrafiltro en X es un filtro de Cauchy.*

Definición 3.1.21 (Filtro de Cauchy minimal)**.** Un filtro de Cauchy en un espacio uniforme se llama **minimal** si es minimal con respecto a la inclusión de conjuntos.

Proposición 3.1.37 ([47], [44], [10])**.** *Todo filtro $\mathcal{F}$ de Cauchy en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ contiene un único filtro de Cauchy minimal $\mathcal{F}_0$. Además, el filtro $\mathcal{F}_0$ está generado por la base de vecindades uniformes $\Gamma = \{D(M) \mid D \in \mathcal{U} \text{ y } M \in \mathcal{F}\}$.*

Corolario 3.1.38. *Para todo $x \in X$, el filtro de vecindades $\mathcal{F}_x$ del ejemplo 3.1.9, dado por $\mathcal{F}_x = \{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$, es un filtro de Cauchy minimal.*

Definición 3.1.22 (Espacio uniformemente conexo)**.** Un espacio uniforme X se llama **uniformemente conexo** si para cualquier espacio $\mathbb{D}$ con la uniformidad discreta, toda función $\lambda : X \to \mathbb{D}$ uniformemente continua es constante.

Proposición 3.1.39 ([47]). *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Si el espacio $(X,\tau(\mathcal{U}))$ es conexo, entonces $(X,\mathcal{U})$ es uniformemente conexo.*

Proposición 3.1.40. *Sea $f: X \to Y$ una función uniformemente continua y suprayectiva entre espacios uniformes. Si X es uniformemente conexo, entonces Y también lo es.*

Proposición 3.1.41. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios uniformes uniformemente conexos. Entonces su producto uniforme $X = \prod_{j\in J} X_j$ es uniformemente conexo.*

Proposición 3.1.42 ([47]). *Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es uniformemente conexo si y solo si*

$$\forall U \in \mathcal{U} : \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n = X \times X.$$

Teorema 3.1.43 ([7], [43]). *Un espacio topológico (X,τ) es uniformizable si y solo si es completamente regular.*

3.2. La completación canónica de un espacio uniforme

En esta sección se incluye la demostración del teorema 3.2.8 para resaltar tanto las similitudes como las diferencias que hay entre la completación canónica de los espacios uniformes y la bicompletación de los espacios cuasiuniformes. La propiedad de completitud es importante para asegurar ciertos resultados en los espacios de complejidad, que son el objeto de estudio de este trabajo.

Definición 3.2.1 (Espacio uniforme completo). Un espacio uniforme es **completo** si todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre X converge a un punto $x \in X$.

Un ejemplo de espacio uniforme completo es el espacio $(X,\mathcal{U})$ del Teorema 3.1.25, donde $\mathcal{U}$ es la única uniformidad compatible con la topología del espacio compacto (X,τ).

Ejemplo 3.2.1. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme discreto y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X. Entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro trivial y por lo tanto $\mathcal{F}$ converge al punto en el que está fijo. Así vemos que $(X,\mathcal{U})$ es completo.

Definición 3.2.2 (Espacio uniforme secuencialmente completo). Un espacio uniforme se llama **secuencialmente completo** si toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre X converge a un punto $x \in X$.

Teorema 3.2.1 ([7]). *Todo espacio uniforme completo es secuencialmente completo.*

Proposición 3.2.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio uniforme completo, es completo.*

Proposición 3.2.3 ([8]). *Si X es un espacio uniforme de Hausdorff, entonces todo subespacio completo de X es cerrado, independientemente de que X sea completo o no lo sea.*

Proposición 3.2.4. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos uniformidades en un conjunto X tales que $\mathcal{U}$ es más fina que $\mathcal{V}$. Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{U}$ con la propiedad de que cada entorno $B \in \mathcal{B}$ es cerrado en $X \times X$ con respecto a la topología $\tau(\mathcal{V}) \times \tau(\mathcal{V})$. En estas condiciones un filtro $\mathcal{F}$ en X converge en la topología $\tau(\mathcal{U})$ si y solo si es un filtro de Cauchy en la uniformidad $\mathcal{U}$ y converge en la topología $\tau(\mathcal{V})$.*

Corolario 3.2.5. *Bajo las condiciones de la Proposición 3.2.4, si* $(X,\mathcal{V})$ *es completo, entonces* $(X,\mathcal{U})$ *también es completo.*

Proposición 3.2.6 ([8])**.** *Sean* X *un espacio uniforme y* A *un subconjunto denso de* X*. Si* A *tiene la propiedad de que cualquier base de filtro de Cauchy en* A *converge a algún punto de* X*, entonces* X *es completo.*

Teorema 3.2.7 ([7])**.** *Un espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

En otras palabras, un espacio uniforme precompacto es compacto si y solo si es completo.

Definición 3.2.3 (Completación de un espacio uniforme)**.** Una **completación** de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es una pareja $\left(f,\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)\right)$ donde $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$ es un espacio uniforme completo y f es una función uniformemente continua que va de X a un subconjunto denso de $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$. Se dice que la completación es Hausdorff si el espacio $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$ es de Hausdorff.

Teorema 3.2.8 ([8] Existencia de una completación Hausdorff)**.** *Todo espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *tiene una completación Hausdorff* $\left(i,\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)\right)$ *con las siguientes dos propiedades:*

1. *Dada cualquier función uniformemente continua* $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$*, donde* $(Y,\mathcal{V})$ *es un espacio uniforme completo y Hausdorff, existe una única función uniformemente continua* $g:\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)\to(Y,\mathcal{V})$ *tal que* $f=g\circ i$*.*

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{U}) & \xrightarrow{i} & \left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right) \\ & f\searrow & \downarrow g \\ & & (Y,\mathcal{V}) \end{array}$$

2. *Si* $\left(j,\left(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}}\right)\right)$ *es una completación Hausdorff de* $(X,\mathcal{U})$ *que tiene la propiedad (1), entonces existe un unimorfismo único* $\varphi:\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)\to\left(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ *tal que* $j=\varphi\circ i$*.*

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{U}) & \xrightarrow{i} & \left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right) \\ & j\searrow & \downarrow \varphi \\ & & \left(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}}\right) \end{array}$$

Demostración. Primero, para probar la propiedad (1), se define a $\widehat{X}$ como el conjunto de todos los filtros de Cauchy minimales de X. Para cada entorno simétrico $V=V^{-1}\in\mathcal{U}$ se define un conjunto de parejas de filtros de Cauchy minimales como sigue:

$$\overset{*}{V}=\left\{(\mathcal{F},\mathcal{G})\in\widehat{X}\times\widehat{X}\;\middle|\;\exists H\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}:H\times H\subseteq V\right\}.$$

La familia de todos estos conjuntos, $\mathcal{B} = \left\{ \overset{*}{V} \;\middle|\; V = V^{-1} \in \mathcal{U} \right\}$ es base de una uniformidad $\widehat{\mathcal{U}}$ en el conjunto $\widehat{X}$ y el espacio $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right)$ es de Hausdorff.

La definición de la función $i : X \to \widehat{X}$ es como sigue, para cada $x \in X$, el filtro de vecindades de x es un filtro de Cauchy minimal, así que su imagen $i(x)$ se define mediante

$$i(x) = \mathcal{F}_x = \{U(x) \;\mid\; U \in \mathcal{U}\}.$$

Con esto tenemos que i es uniformemente continua y además

$$\mathcal{U} = i^{-1}\left(\left\{ W \cap i(X) \times i(X) \;\middle|\; W \in \widehat{\mathcal{U}} \right\}\right).$$

$\widehat{X}$ es completo y el conjunto $i(X)$ es denso en $\widehat{X}$. Para mostrar que $i(X)$ es denso en $\widehat{X}$, se prueba que, dado un filtro de Cauchy minimal $\mathcal{G}$ en X y un entorno simétrico $V = V^{-1} \in \mathcal{U}$, el conjunto $\overset{*}{V}(\mathcal{G}) \cap i(X)$ es no vacío. Para mostrar que $\widehat{X}$ es completo se aplica la Proposición 3.2.6 con $A = i(X)$.

Verificación de la propiedad (1). Sea $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ una función uniformemente continua, con $(Y, \mathcal{V})$ un espacio uniforme completo Hausdorff. Como $i(x) = \mathcal{F}_x$ y f es uniformemente continua, si $i(x) = i(y)$ se tiene

$$f(x) = f(lim\mathcal{F}_x) = limf(\mathcal{F}_x) = limf(\mathcal{F}_y) = f(lim\mathcal{F}_y) = f(y).$$

Ahora se puede definir una función $g_0 : i(X) \to Y$ mediante $g_0(i(x)) = f(x)$, que resulta uniformemente continua. Como $i(X)$ es denso en $\widehat{X}$, la función g_0 tiene una única extiensión uniformemente continua $g : \left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right) \to (Y, \mathcal{V})$.

Para comprobar la propiedad (2), se condidera una completación Hausdorff $\left(j, \left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}\right)\right)$ del espacio $(X, \mathcal{U})$ que cumpla con la propiedad (1). Como j es una función uniformemente continua y la completación $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right)$ también tiene la propiedad (1), existe una única función uniformemente continua $\varphi : \left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right) \to \left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}\right)$ tal que $j = \varphi \circ i$. Similarmente, existe una única función uniformemente continua $\psi : \left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}\right) \to \left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right)$ tal que $i = \psi \circ j$. De esta forma se tiene que $\varphi \circ \psi$ es uniformemente continua y concide con la identidad en un subconjunto denso de $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}\right)$. Asimismo, $\psi \circ \varphi$ es uniformemente continua y coincide con la identidad en un subconjunto denso de $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right)$. Por lo tanto $\psi = \varphi^{-1}$ y φ es un unimorfirmo. QED

Definición 3.2.4 (La completación Hausdorff canónica)**.** El espacio uniforme completo Hausdorff $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}\right)$ tal como se define en la demostración del Teorema 3.2.8 se llama la **completación Hausdorf canónica** del espacio $(X, \mathcal{U})$. La función $i : X \to \widehat{X}$ se llama el **mapeo canónico** de X a su completación Hausdorff.

Proposición 3.2.9. *Con respecto a la completación Hausdorf canónica de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ se tiene:*

- *Los entornos de* $i(X) \subseteq \widehat{X}$ *son las imágenes bajo* $i \times i$ *de los entornos de* X.
- *Las cerraduras en* $\widehat{X} \times \widehat{X}$ *de los entornos de* $i(X)$ *forman una base de* $\widehat{\mathcal{U}}$.
- *La gráfica de la relación de equivalencia* $i(x) = i(y)$ *en el conjunto* X *está dada por* $\bigcap \mathcal{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$, *la intersección de los entornos de* X.
- *Si* $(X,\mathcal{U})$ *es un espacio uniforme de Hausdorff, entonces el mapeo canónico* $i : X \to \widehat{X}$ *es inyectivo y es un unimorfismo entre* X *y un subconjunto denso de* $\widehat{X}$.

Definición 3.2.5 (Espacio topológico completamente uniformizable)**.** Un espacio topológico (X,τ) se llama **completamente uniformizable** si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ sea completo y además $\tau(\mathcal{U}) = \tau$.

Capítulo 4

Espacios cuasiuniformes

Los espacios cuasiuniformes son una generalización de los espacios uniformes. Esta generalización se obtiene descartando la condición (4) de la definición 3.1.1, es decir, prescindiendo del requisito de la simetría que proporcionan las relaciones inversas dentro de la estructura uniforme. En este sentido los espacios uniformes son un caso particular de espacios cuasiuniformes, de la misma forma en que los espacios seudométricos son un caso particular de los espacios cuasiseudométricos. Históricamente, la teoría de los espacios uniformes se empezó a desarrollar antes que la de los espacios cuasiuniformes. De acuerdo a Fletcher y Lindgren [25]: «Nachbin introdujo el concepto de espacio cuasiuniforme en conexión con el estudio de los espacios uniformes ordenados [65]». Por otra parte, Császár [16] comenta que Nachbin, en su trabajo [64] de 1948, llamó «semiuniformidades» a las estructuras conocidas actualmente como cuasiuniformidades, y que Tamari [91] les llamó «estructuras cuasiordoformes» en 1954. Dado el hecho de que todo espacio uniforme es un espacio cuasiuniforme, muchas de las definiciones en las dos teorías son muy similares, por ejemplo las de la topología asociada, el preorden asociado, las de bases y subbases y las de las funciones uniformemente continuas y cuasiuniformemente continuas. Pensando en ir de lo más simple a lo complejo, consideramos que es preferible cubrir primero los espacios uniformes y después los cuasiuniformes, principalmente porque, dada una cuasiuniformidad, hay una uniformidad estándar asociada con ella, y dicha uniformidad asociada juega un papel esencial en la construcción de la bicompletación del espacio cuasiuniforme.

4.1. Teoría general

Definición 4.1.1 (Espacio cuasiuniforme)**.** Un **espacio cuasiuniforme** es una pareja ordenada (X, Ψ) donde

1. Ψ es un filtro sobre $X \times X$.
2. $\forall U \in \Psi : \triangle(X) \subseteq U$.
3. $\forall U \in \Psi : \exists V \in \Psi : V \circ V \subseteq U$.

A Ψ se la llama una **cuasiuniformidad** sobre X.

Cualquier uniformidad es trivialmente una cuasiuniformidad. Al igual que en las uniformidades, a los elementos de Ψ también se les llama **entornos**. Como en el caso de una uniformidad, dados $U, V \in \Psi$, si $V^2 \subseteq U$, entonces $V \subseteq U$.

Definición 4.1.2 (La cuasiuniformidad conjugada)**.** Dada una cuasiuniformidad Ψ en X, la familia

$$\Psi^{-1} = \left\{U^{-1} \mid U \in \Psi\right\}$$

es otra cuasiuniformidad sobre X, conocida como la **cuasiuniformidad conjugada** de Ψ.

[26] En vista de las definiciones 4.1.2 y 3.1.1, una cuasiuniformidad Ψ es una uniformidad si y solo si coincide con su cuasiuniformidad conjugada, es decir cuando $\Psi = \Psi^{-1}$.

Definición 4.1.3 (Base de una cuasiuniformidad)**.** Sean Ψ una cuasiuniformidad y sea $\beta \subseteq \Psi$. Se dice que β es una **base** de Ψ si cumple: $\forall U \in \Psi : \exists B \in \beta : B \subseteq U$.

Una base también es llamada **sistema fundamental de entornos** [8]. Nótese que a consecuencia del inciso (3) de la definición 4.1.1, si β es una base de Ψ y n es un entero positivo, entonces $\{B^n \mid B \in \beta\}$ también es base de Ψ [26].

Proposición 4.1.1 ([26])**.** *Una familia β de subconjuntos de $X \times X$ es base de alguna cuasiuniformidad en X si y solo si β es una base de filtro en $X \times X$ que satisface las condiciones (2) y (3) de la definición 4.1.1.*

Definición 4.1.4 (Bases más finas o más gruesas que otras)**.** Si β_1 y β_2 son bases de cuasiuniformidades en un conjunto X, se dice que β_1 es **más fina** que β_2 y que β_2 es **más gruesa** que β_1 si cada elemento de β_2 contiene a algún elemento de β_1.

En particular, si Ψ_1 y Ψ_2 son cuasiuniformidades sobre X, entonces Ψ_1 es más fina que Ψ_2 si y solo si $\Psi_2 \subseteq \Psi_1$.

Definición 4.1.5 (Subbase de una cuasiuniformidad)**.** Si Ψ es una cuasiuniformidad y $\mathcal{S} \subseteq \Psi$, se dice que $\mathcal{S}$ es una **subbase** de Ψ si la familia de intersecciones finitas de $\mathcal{S}$ es una base de Ψ.

Definición 4.1.6 (Bases y subbases equivalentes)**.** Dos subbases $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se dicen **equivalentes** cuando determinan la misma cuasiuniformidad. Como toda base es una subbase, el concepto de bases equivalentes también queda definido.

Definición 4.1.7 (La uniformidad asociada a una cuasiuniformidad)**.** Sea Ψ una cuasiuniformidad sobre X. Para cada $V \in \Psi$, se define $V^* = V \cap V^{-1}$, y entonces la familia $\beta = \{V^* \mid V \in \Psi\}$ es una base para una uniformidad en X, que se denota por Ψ^s y se llama la **uniformidad asociada** a Ψ. Esto es,

$$\Psi^s = \{\ U \subseteq X \times X \ \mid\ \exists V \in \Psi : V^* \subseteq U\ \}.$$

Otra base equivalente para Ψ^s es $\mathcal{B} = \{V \cap W^{-1} \ \mid\ V, W \in \Psi\}$ [61]. También se utiliza comunmente la notación Ψ^* para denotar a Ψ^s. Nótese que Ψ^s es la uniformidad más gruesa que contiene a Ψ. Claramente, $\left(\Psi^{-1}\right)^s = \Psi^s$ y $\Psi \cup \Psi^{-1} \subseteq \Psi^s$.

Ejemplo 4.1.1 (Una cuasiuniformidad finita)**.** Considérense los conjuntos

$$X = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad W = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\},$$

donde $\leq$ representa el orden usual en $\mathbb{R}$. Claramente se tiene que $\Delta(x) \subset W$ y $W \circ W = W$. Así el conjunto $\beta = \{\, W\}$ es base de la cuasiuniformidad $\Psi = \{U \subseteq X \times X \mid W \subseteq U\}$ sobre X. Los elementos de Ψ son los ocho entornos que contienen a la relación W.

El ejemplo 4.1.1 se puede generalizar como se indica a continuación.

Proposición 4.1.2. *Dado un preorden P sobre un conjunto X, el conjunto singular $\{P\}$ es una base de filtro sobre $X \times X$. Esta base genera al filtro $\Psi_P = \{\ U \subseteq X \times X \mid P \subseteq U\ \}$ y Ψ_P es una cuasiuniformidad sobre X.*

Esto también se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.1.2 (La cuasiuniformidad generada por las contenciones)**.** Sea X un conjunto arbitrario. Consideremos $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X, y la relación sobre éste definida por

$$R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \ \mid \ A \subseteq B\}.$$

Claramente esta relación es un preorden, con lo cual $\Psi_R = \{U \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \ \mid \ R \subseteq U\}$ es una cuasiuniformidad sobre $\mathcal{P}(X)$.

Lema 4.1.3. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme. Todo entorno $U \in \Psi$ que sea minimal con respecto a la contención de conjuntos, es un preorden.*

Definición 4.1.8 (El preorden asociado a una cuasiuniformidad)**.** Los espacios cuasiuniformes (X, Ψ), definen un preorden en X mediante la intersección de los elementos de la cuasiuniformidad, esto es, $\bigcap \Psi$ cumple las propiedades reflexiva y transitiva. A éste se le llama el **preorden asociado** a Ψ, y se denota por $\leq_\Psi$.

Se tiene como ejemplo de esto a la relación W del ejemplo 4.1.1. Nótese que W es reflexiva y transitiva, y que $\bigcap \Psi_X = W$, con lo cual se tiene que $\bigcap \Psi_X$ es un preorden.

Definición 4.1.9 (Vecindades relativas a un entorno específico)**.** En los espacios cuasiuniformes se definen las vecindades de puntos y de subconjuntos, mediante el concepto de imágenes bajo relaciones dado en la definición 2.1.2. Para todo $U \in \Psi$, $x \in X$ y $Z \subseteq X$, las **vecindades** del punto x y del subconjunto Z, **relativas al entorno** U, son $U(x)$ y $U(Z)$, respectivamente.

Recuérdese que $U(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ y $U(Z) = \bigcup \{U(z) \mid z \in Z\}$.

Definición 4.1.10 (Vecindades relativas a la cuasiuniformidad Ψ)**.** Dados dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ de un espacio cuasiuniforme (X, Ψ), se dice que B es una **vecindad de A con respecto a** Ψ si $\exists U \in \Psi : U(A) \subseteq B$. Similarmente, si $x \in X$, entonces B es una **vecindad de x con respecto a** Ψ cuando $\exists U \in \Psi : U(x) \subseteq B$.

Definición 4.1.11 (La topología asociada a una cuasiuniformidad)**.** Dado un espacio cuasiuniforme (X, Ψ), la cuasiuniformidad Ψ genera una topología $\tau(\Psi)$ sobre X, llamada la **topología asociada** a la cuasiuniformidad Ψ, que se define así

$$\tau(\Psi) = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A, \exists U \in \Psi \text{ con } U(x) \subseteq A\}.$$

Se dice que Ψ **genera** o **induce** a $\tau(\Psi)$. También se dice que Ψ es **compatible** con $\tau(\Psi)$ y que el espacio topológico $(X, \tau(\Psi))$ **admite** a la cuasiuniformidad Ψ. A $\tau(\Psi)$ también se le conoce como **la topología cuasiuniforme**.

Si $A \subseteq X$ es compacto y B es una vecindad de A en la topología $\tau(\Psi)$, entonces B es una vecindad de A con respecto a Ψ. Si A no es compacto en $\tau(\Psi)$, sus vecindades en $\tau(\Psi)$ no necesariamente son sus vecindades con respecto a Ψ.

Definición 4.1.12 ([61] La topología simétrica de una cuasiuniformidad)**.** La **topología simétrica** de una cuasiuniformidad Ψ es $\tau(\Psi^s)$.

Definición 4.1.13 ([86] Cuasiuniformidades compatibles)**.** Dos cuasiuniformidades que generan la misma topología se llaman **compatibles**.

Proposición 4.1.4. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme. Sea $\mathcal{B}$ una base de Ψ. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}(x) = \{B(x) \mid B \in \mathcal{B}\}$. La topología $\tau(\Psi)$ es la única topología τ en X con la propiedad de que, para todo $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de $\mathcal{N}_\tau(x)$, el filtro de vecindades de x en τ.*

Algunos autores [7], [26], definen a la topología $\tau(\Psi)$ mediante la propiedad de la proposición 4.1.4. Al trabajar con ejemplos concretos utilizando dicha propiedad, es importante recordar que no todas las vecindades en $\mathcal{N}(x)$ son abiertas. Específicamente, dado un punto $x \in X$ y un entorno $U \in \Psi$, la vecindad $U(x)$ del punto x en el espacio cuasiuniforme (X, Ψ) no necesariamente es un conjunto abierto en la topología $\tau(\Psi)$, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.1.3 (Vecindades $U(x)$ en (X, Ψ) que no son abiertas en $(X, \tau(\Psi))$)**.** Sean los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ y $\Psi = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, donde los elementos de Ψ son las relaciones siguientes sobre X:

- $U_1 = X \times X \setminus \{(1, 2), (1, 3)\}$.
- $U_2 = X \times X \setminus \{(1, 2)\}$.
- $U_3 = X \times X \setminus \{(1, 3)\}$.
- $U_4 = X \times X$.

Se tiene que U_1 es un preorden en X y $\Psi = \{U \subseteq X \times X \mid U_1 \subseteq U\}$. Por lo tanto Ψ es una cuasiuniformidad en X. Ahora, la vecindad $U_2(1)$ es el conjunto $\{1, 3\}$ y este conjunto no puede ser abierto en la topología $\tau(\Psi)$ ya que $3 \in \{1, 3\}$ pero

$$U_1(3) = U_2(3) = U_3(3) = U_4(3) = X \nsubseteq \{1, 3\}.$$

Similarmente,

$$U_1(2) = U_2(2) = U_3(2) = U_4(2) = X.$$

Por lo tanto

$$\{\ U(3) \mid U \in \Psi\ \} = \{\ U(2) \mid U \in \Psi\ \} = \{X\}\,.$$

Se concluye quw $\{X\}$ es base de los filtros de vecindades $\mathcal{N}(2)$ y $\mathcal{N}(3)$. Esto implica que X es el único conjunto abierto que contiene a 2 y también el único conjunto abierto que contiene a 3. Para el elemento 1 se tiene:

$$\{\ U(1) \mid U \in \Psi\ \} = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}, X\} = \mathcal{N}(1).$$

En este caso la base de $\mathcal{N}(1)$ coincide con $\mathcal{N}(1)$. El conjunto $\{1\}$ es abierto y los conjuntos $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$ son vecindades del punto 1 porque contienen al abierto $\{1\}$ pero ellos mismos no son abiertos en $\tau(\Psi) = \{\varnothing, \{1\}, X\}$.

Proposición 4.1.5. *Sea $\mathcal{B}$ una base de una cuasiuniformidad Ψ en un conjunto X y sea $A \subseteq X$. La cerradura de A en $\tau(\Psi)$ está dada por:*

$$cl(A) = \bigcap \left\{U^{-1}(A) \mid U \in \mathcal{B}\right\}.$$

Dado que la cuasiuniformidad conjugada también induce una topología en X, entonces la terna $(X, \tau(\Psi), \tau(\Psi^{-1}))$ es un espacio bitopológico.

Observación 4.1.1 (Convenciones de terminología). Sea P cualquier propiedad general que un espacio cuasiuniforme dado pueda tener o no tener. Las dos expresiones siguientes se usan de una forma equivalente e intercambiable:

a. El espacio cuasiuniforme (X, Ψ) tiene la propiedad P.

b. Ψ es una cuasiuniformidad en X y Ψ tiene la propiedad P.

Más aún, si P es una propiedad topológica, simplemente escribimos «(X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme con la propiedad P», en vez de escribir «(X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme y el espacio topológico $(X, \tau(\Psi))$ tiene la propiedad P».

Proposición 4.1.6. *Si (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme, entonces:*

1. *(X, Ψ) es R_0 si y solo si $\bigcap \Psi$ es una relación simétrica.*

2. *(X, Ψ) es T_0 si y solo si $\bigcap \Psi$ es un orden parcial.*

3. *(X, Ψ) es T_0 si y solo si (X, Ψ^s) es T_2.*

4. *(X, Ψ) es T_1 si y solo si $\bigcap \Psi = \Delta(X)$.*

5. *(X, Ψ) es T_2 si y solo si $\bigcap_{U\in\Psi} (U \circ U^{-1}) = \Delta(X)$.*

6. *$\bigcap \Psi$ coincide con $\leq_{\tau(\Psi)}$, el preorden de especialización de la topología inducida $\tau(\Psi)$.*

El ejemplo siguiente es de dos cuasiuniformidades diferentes con la misma intersección.

Ejemplo 4.1.4. Se empieza por definir una cuasiuniformidad Ψ sobre $\mathbb{R}$ por medio de una base $\mathcal{B}_1 = \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ donde $(x, y) \in U_\varepsilon$ si

$$(y \leq x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0 \wedge y > max\,\{0, x - \varepsilon\})\,.$$

Las relaciones U_ε miembros de $\mathcal{B}_1$ tienen las propiedades siguientes:

- U_ε es reflexiva.
- $0 < \varepsilon < \delta \Rightarrow U_\varepsilon \subseteq U_\delta$.
- $U_\varepsilon \circ U_\varepsilon \subseteq U_{2\varepsilon}$.

Estas propiedades aseguran que $\mathcal{B}_1$ es base de una cuasiuniformidad a la que llamamos Ψ. Ahora se define otra familia de relaciones $\mathcal{B}_2 = \{V_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ donde $(x, y) \in V_\varepsilon$ si y solo si

$$(x < 0 \wedge y < min\,\{0, x + \varepsilon\}) \vee (x = 0) \vee (0 < x \leq y)\,.$$

Las relaciones V_ε de $\mathcal{B}_2$ tienen las mismas tres propiedades que las relaciones U_ε de $\mathcal{B}_1$ y esto implica que $\mathcal{B}_2$ es base de otra cuasiuniformidad Υ sobre $\mathbb{R}$. Las cuasiuniformidades Ψ y Υ son diferentes ya que ninguna U_ε está contenida dentro de ninguna V_δ y viceversa. Sin embargo tenemos $\bigcap \Psi = \bigcap \Upsilon$ ya que ambas intersecciones coinciden con el preorden P donde $(x, y) \in P$ si y solo si

$$(y \leq x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x \leq y)\,.$$

La topología $\tau(\Psi)$ tiene como abiertos básicos a $\mathbb{R}$ y a los conjuntos de la forma $(-\infty, r]$ y $(-\infty, r)$, con $r < 0$, y a (r, ∞) con $r > 0$. En cambio, los abiertos básicos de $\tau(\Upsilon)$ son $\mathbb{R}$ y los conjuntos de la forma $(-\infty, r)$ con $r < 0$, y $[r, \infty)$ y (r, ∞), con $r > 0$. En ambas topologías, el único abierto que contiene a 0 es $\mathbb{R}$.

Ni $\tau(\Psi)$ ni $\tau(\Upsilon)$ son topologías de Alexandrov ya que en $\tau(\Psi)$ los números reales positivos carecen de una vecindad mínima, mientras que en $\tau(\Upsilon)$ son los números negativos los que no tienen vecindades mínimas.

Nótese que en la topología de Alexandrov τ_P dada por los conjuntos crecientes del preorden $P = \bigcap \Psi = \bigcap \Upsilon$, tanto los intervalos $(-\infty, r]$ con $r < 0$, así como los intervalos $[r, \infty)$ con $r > 0$ pertenecen a la topología, lo que no sucede en $\tau(\Psi)$ ni en $\tau(\Upsilon)$.

En este ejemplo se da el caso de que el preorden P no pertenece a ninguna de las dos cuasiuniformidades, ni a Ψ ni a Υ, es decir que $\bigcap \Psi \notin \Psi \;\wedge\; \bigcap \Upsilon \notin \Upsilon$.

Definición 4.1.14 (Espacio topológico cuasiuniformizable)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama **cuasiuniformizable** si existe una cuasiuniformidad Ψ en X tal que $\tau(\Psi) = \tau$.

Como es bien sabido, existen espacios topológicos que no son metrizables, por lo que cabe la pregunta: ¿Todo espacio topológico es cuasiuniformizable, o solamente algunos con ciertas características? La siguiente proposición responde esta pregunta.

Proposición 4.1.7 ([55], [67])**.** *Todo espacio topológico es cuasiuniformizable. Dado un espacio topológico (X, τ), siempre se puede construir una cuasiuniformidad Ψ sobre X de tal forma que la topología inducida por Ψ coincida con τ, es decir, que se cumpla $\tau(\Psi) = \tau$.*

Esta cuasiuniformidad se define utilizando como subbase a la familia $\mathcal{S}_\tau = \{S_G \mid G \in \tau\}$, donde S_G se interpreta como $S_G = G \times G \cup (X \setminus G) \times X$, de acuerdo a la definición 2.1.3. Por el lema 2.1.1, $\mathcal{S}_\tau$ es una familia de preórdenes sobre X. La cuasiuniformidad Ψ generada por la subbase $\mathcal{S}_\tau$ se conoce como la **estructura de Pervin** o la **cuasiuniformidad de Pervin**. Consideremos un ejemplo muy sencillo meramente ilustrativo.

Ejemplo 4.1.5 (Cuasiuniformidad que genera a la topología de Sierpinski)**.** Sea el conjunto $X = \{0, 1\}$ con la topología $\tau = \{\varnothing, \{1\}, X\}$. En este caso las relaciones S_G son los siguientes subconjuntos de $X \times X$,

$$S_{\{1\}} = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{0\} \times X) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \quad \text{y} \quad S_\varnothing = S_X = X \times X.$$

Claramente $S_{\{1\}}$, S_X y $S_\varnothing$ son preórdenes en X. Como $S_{\{1\}} \subseteq S_\varnothing = S_X$, entonces el conjunto de intersecciones de $S_{\{1\}}$, S_X y $S_\varnothing$ se reduce a $\beta = \left\{S_{\{1\}}, X \times X\right\}$. Este conjunto es la base de una cuasiuniformidad Ψ sobre X. Dado que $\beta = \left\{U \subseteq X \times X \mid S_{\{1\}} \subseteq U\right\}$, resulta que $\Psi = \beta$. Para cada elemento de X, $S_{\{1\}}$, S_X y $S_\varnothing$ generan las siguientes vecindades:

$$S_{\{1\}}(1) = \{1\}, \quad S_{\{1\}}(0) = \{0,1\},$$

$$S_X(1) = S_\varnothing(1) = \{0,1\} = S_X(0) = S_\varnothing(0).$$

Además, en la familia de vecindades que genera la cuasiuniformidad Ψ, no existe una vecindad que contenga únicamente al punto $\{0\}$, pues $S_{\{1\}}$ está contenido en cada elemento de la cuasiuniformidad. Por tanto, de acuerdo a la definición 4.1.11 la topología generada por Ψ resulta ser $\tau(\Psi) = \{\varnothing, \{1\}, X\} = \tau$.

Definición 4.1.15 (Subespacio cuasiuniforme)**.** Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme y sea $\varnothing \neq A \subseteq X$. La familia de relaciones en A dada por la traza de Ψ en $A \times A$,

$$\Psi_{|A \times A} = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \Psi\},$$

es una cuasiuniformidad en A que se llama la **cuasiuniformidad inducida** en A por Ψ. También se le conoce como la **relativización** de Ψ para A. Al espacio $\left(A, \Psi_{|A\times A}\right)$ se le llama un **subespacio cuasiuniforme** de (X, Ψ).

Definición 4.1.16 (Función cuasiuniformemente continua)**.** Si (X, Ψ) y (Y, Υ) son espacios cuasiuniformes, entonces una función $f : X \longrightarrow Y$ es **cuasiuniformemente continua** si se cumple

$$\forall V \in \Upsilon : \exists U \in \Psi : \forall x, y \in X : (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

De la definición 4.1.11 puede verse que una función cuasiuniformemente continua f, es continua respecto a las topologías $\tau(\Psi)$ y $\tau(\Upsilon)$.

Definición 4.1.17 (Cuasiunimorfismo)**.** Un **cuasiunimorfismo** entre dos espacios cuasiuniformes (X, Ψ) y (Y, Υ) es una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que f y f^{-1} son cuasiuniformemente continuas.

Así pues, la clase de los espacios cuasiuniformes forma una categoría en donde los morfismos son precisamente los funciones cuasiuniformemente continuas.

Definición 4.1.18 ([20] La categoría **QUnif**)**.** La categoría cuyos objetos son los espacios cuasiuniformes (X, Ψ) y sus morfismos son las funciones cuasiuniformemente continuas, es llamada **QUnif**.

Definición 4.1.19 (Cuasiuniformidad totalmente acotada)**.** Dado un espacio cuasiuniforme (X, Ψ), tanto él mismo así como su cuasiuniformidad Ψ se llaman **totalmente acotados** si

$$\forall U \in \Psi : \exists n \in \mathbb{N}; A_1, .., A_n \subseteq X : \bigcup_1^n A_k = X \ \wedge \ \forall k : A_k \times A_k \subseteq U.$$

Definición 4.1.20 (Cuasiuniformidad precompacta)**.** Un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) y su cuasiuniformidad Ψ se llaman **precompactos** si

$$\forall U \in \Psi : \exists n \in \mathbb{N}; x_1, .., x_n \in X : \bigcup_1^n U(x_k) = X.$$

Proposición 4.1.8 ([57])**.** *Todo espacio cuasiuniforme totalmente acotado es precompacto.*

Lo inverso no es necesariamente cierto. Lambrinos [57] menciona que un ejemplo al respecto ha sido dado por Murdeshwar y Naimpally [63]. Por otra parte, Todas las quasiuniformidades obtenidas a partir de un espacio topológico mediante el método de Pervin son totalmente acotadas [34].

Definición 4.1.21 (Supremo e ínfimo de una familia de cuasiuniformidades)**.** Dada una familia de cuasiuniformidades $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ sobre un conjunto X,

- El **supremo** $\bigvee \{\Psi_i\}_{i\in I} = \bigvee_{i\in I} \Psi_i$ de la familia $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ es la cuasiuniformidad más gruesa en X de todas aquellas que son más finas que cada una de las Ψ_i. El supremo siempre existe, es el filtro más grueso en $X \times X$ entre todos aquellos que son más finos que cada Ψ_i.

- El **ínfimo** $\bigwedge \{\Psi_i\}_{i\in I} = \bigwedge_{i\in I} \Psi_i$ de la familia $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ es la cuasiuniformidad más fina en X de todas aquellas que son más gruesas que cada una de las Ψ_i. El ínfimo siempre existe, es el supremo de la familia de todas las cuasiuniformidades en X que son más gruesas que cada Ψ_i.

La uniformidad discreta $\{U \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq U\}$ sobre un conjunto X es el supremo de todas las cuasiuniformidades de ese conjunto, mientras que el ínfimo es la cuasiuniformidad indiscreta. La topología inducida por el supremo de una familia $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ de cuasiuniformidades en X, es el supremo de las topologías $\tau(\Psi_i)$ inducidas por las cuasiuniformidades individuales Ψ_i.

Definición 4.1.22 ([26] Productos de espacios cuasiuniformes)**.** Sea $\{(X_i, \Psi_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios cuasiuniformes y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. La cuasiuniformidad producto Ψ es la más gruesa en X de aquellas para las que todas la proyecciones $\pi_i : X \to X_i$ son cuasiuniformemente continuas.

La familia de todos los conjuntos de la forma $\{(x,y) \in X \times X \mid (\pi_i(x), \pi_i(y)) \in V\}$, con $i \in I$ y $V \in \Psi_i$, es una subbase de la cuasiuniformidad producto Ψ. En el caso particular de dos espacios cuasiuniformes (X,Ψ) y (Y,Υ), la cuasiuniformidad producto tiene una base $\mathcal{B}$ que se puede expresar como

$$\mathcal{B} = \left\{B \subseteq (X \times Y)^2 \mid \exists U \in \Psi, V \in \Upsilon : \forall x \in X, y \in Y : B\left((x,y)\right) = U(x) \times V(y)\right\}.$$

La topología inducida por la cuasiuniformidad producto coincide con la del producto topológico de las topologías inducidas en sus espacios por las cuasiuniformidades correspondientes.

Definición 4.1.23 ([26] Bases de filtro de Cauchy)**.** Sea (X,Ψ) un espacio cuasiuniforme y sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Entonces $\mathcal{B}$ se llama de Cauchy si

$$\forall U \in \Psi : \exists x \in X, B \in \mathcal{B} : B \subseteq U(x).$$

Observación 4.1.2 ([26]).

(i) Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases de filtro, $\mathcal{B}_1$ es de Cauchy y $\mathcal{B}_2$ es más fina que $\mathcal{B}_1$, entonces $\mathcal{B}_2$ es de Cauchy.

(ii) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces $\mathcal{F}$ es de Cauchy si y solo si

$$\forall U \in \Psi : \exists x \in X : U(x) \in \mathcal{F}.$$

(iii) Toda base de filtro en X que converja a un punto $x \in X$ en la topología $\tau(\Psi)$, es de Cauchy en (X,Ψ).

(iv) Si Ψ y Υ son dos cuasiuniformidades en X y $\Psi \subseteq \Upsilon$, entonces toda base de filtro que sea de Cauchy en (X,Υ), también es de Cauchy en (X,Ψ).

(v) Si Ψ es una cuasiuniformidad en X, toda base de filtro de Cauchy en (X,Ψ^s) es base de filtro de Cauchy en (X,Ψ) y en (X,Ψ^{-1}).

Lema 4.1.9. *Si (X,Ψ) es un espacio cuasiuniforme y Γ es una base de filtro en X, entonces Γ es de Cauchy en (X,Ψ^*) si y solo si $\forall U \in \Psi : \exists G \in \Gamma : G \times G \subseteq U$.*

Lema 4.1.10. *Sea (X,Ψ) un espacio cuasiuniforme y sea $\mathcal{F}$ un filtro en X que cumple con*

$$\forall U \in \Psi : \exists F \in \mathcal{F} : F \times F \subseteq U.$$

En estas condiciones $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en el espacio (X,Ψ).

La condición del lema 4.1.10 se utiliza para definir los filtros de Cauchy en un espacio uniforme (Definición 3.1.20). En los espacios uniformes las dos condiciones son equivalentes. Sin embargo no son equivalentes en cualquier espacio cuasiuniforme, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.1.6. Sea $X = \{0,1,2\}$ y sea P el preorden en X dado por la desigualdad $\leq$ usual en los números reales. Es decir $P = \{(x,y) \in X \times X \mid x \leq y\}$. Tomemos al conjunto singular $\beta = \{P\}$ como base de la cuasiuniformidad $\Psi = \{U \subseteq X \times X \mid P \subseteq U\}$ y consideremos el filtro $\mathcal{F} = \{\{0,1\}, X\}$. Sea $U \in \Psi$ y sea $y \in X$. Como $0 \leq y$, se tiene $(0,y) \in P \subseteq U$. Por lo tanto, $y \in U(0)$ lo que implica $X \subseteq U(0)$ y por tanto $U(0) = X \in \mathcal{F}$. Esto muestra que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en (X,Ψ). Ahora, como $(1,0) \notin P$, entonces $\{0,1\} \times \{0,1\} \nsubseteq P$ y por tanto también tenemos $X \times X \nsubseteq P$, pero $P \in \Psi$. Esto implica que $\mathcal{F}$ no cumple con la propiedad del lema 4.1.10.

4.2. La bicompletación

En vista de la importancia que tiene la propiedad de completitud para garantizar la existencia de algunos límites en los espacios de complejidad (que son espacios cuasimétricos y por lo tanto cuasiuniformes), en esta sección se da la demostración del teorema 4.2.13.

Definición 4.2.1. [26] Un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) se llama **completo** si todo filtro de Cauchy tiene un punto de aglomeración en $\tau(\Psi)$, mientras que el espacio se llama **completo con respecto a la convergencia** si todo filtro de Cauchy converge en $\tau(\Psi)$. Por último, se dice que (X, Ψ) es **bicompleto** si todo filtro de Cauchy en Ψ^* tiene un punto límite en $\tau(\Psi^*)$, es decir, si (X, Ψ^*) es completo con respecto a la convergencia.

Cobzaş [14] usa el término «Ψ-completo por la izquierda» para referirse a un espacio completo con respecto a la convergencia. Si todo ultrafiltro de Cauchy converge en un espacio cuasiuniforme, entonces el espacio es completo. Cualquier espacio cuasiuniforme regular en el que todo filtro abierto de Cauchy tenga un punto de aglomeración, es completo.

Proposición 4.2.1. *Dado un espacio cuasiuniforme (X, Ψ), las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

(a) $\forall U \in \Psi, x \in X : \exists V \in \Psi : V = V^{-1}$ y $V^2(x) \subseteq U(x)$.

(b) $\forall U \in \Psi, x \in X : \exists V \in \Psi : V^{-1}(V(x)) \subseteq U(x)$.

(c) $\forall x \in X$, la familia $\{U^{-1}(U(x)) \mid U \in \Psi\}$ es una base de $\mathcal{N}_{\tau(\Psi)}(x)$.

Definición 4.2.2. Se dice que un espacio cuasiuniforme es **localmente simétrico** si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes de la proposición 4.2.1.

Nótese que todo espacio uniforme es localmente simétrico.

Proposición 4.2.2. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme localmente simétrico y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en Ψ. Si p es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, entonces p es un punto límite de $\mathcal{F}$.*

Corolario 4.2.3. *Todo espacio cuasiuniforme localmente simétrico que sea completo, también es completo con respecto a la convergencia.*

Proposición 4.2.4. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y sea C un subconjunto cerrado de X. Si $(X,\mathcal{U})$ es completo, entonces el subespacio uniforme $\left(C,\mathcal{U}_{|C\times C}\right)$ también es completo. Asimismo, si $(X,\mathcal{U})$ es completo con respecto a la convergencia, el subespacio $\left(C,\mathcal{U}_{|C\times C}\right)$ también lo es.*

Proposición 4.2.5. *[14], [55] Las afirmaciones siguiente son equivalentes:*

(a) El espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es bicompleto.

(b) El espacio cuasiuniforme (X, Ψ^{-1}) es bicompleto.

(c) El espacio uniforme (X, Ψ^*) es completo.

Definición 4.2.3 (Notación para el filtro de vecindades en la topología uniforme)**.** Si (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme, denotamos con $\eta^*(x)$ al filtro de vecindades de x en la topología uniforme $\tau(\Psi^*)$.

Proposición 4.2.6. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme T_0 y sea (Y, Υ) un subespacio bicompleto de (X, Ψ). Entonces Y es cerrado en $(X, \tau(\Psi^*))$.*

Teorema 4.2.7. *[26] Sean (X, Ψ) y (Y, Υ) dos espacios cuasiuniformes. Supongamos que (Y, Υ) es T_0 y bicompleto. Sea $D \subseteq X$ denso en $(X, \tau(\Psi^*))$ y sea $f : \left(D, \Psi_{|D\times D}\right) \to (Y, \Upsilon)$ una función cuasiuniformemente continua. Entonces f tiene una única extensión continua $g : (X, \tau(\Psi^*)) \to (Y, \tau(\Upsilon^*))$. Además se tiene que esta misma función, $g : (X, \Psi) \to (Y, \Upsilon)$, es cuasiuniformemente continua.*

Corolario 4.2.8. *Sean (X, Ψ) y (Y, Υ) dos espacios cuasiuniformes, cada uno de ellos T_0 y bicompleto. Sean $D \subseteq X, E \subseteq Y$ subespacios densos de $(X, \tau(\Psi^*))$ y de $(Y, \tau(\Upsilon^*))$ respectivamente. Dado un cuasiunimorfismo $f : \left(D, \Psi_{|D\times D}\right) \to \left(E, \Upsilon_{|E\times E}\right)$, f se puede extender a un cuasiunimorfismo de (X, Ψ) a (Y, Υ).*

Definición 4.2.4 (Bicompletación)**.** Una **bicompletación** de un espacio cuasiuniforme dado (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme bicompleto (Y, Υ) que tiene un subespacio denso en $\tau(\Upsilon^*)$ y cuasiunimórfico a (X, Ψ).

[81] Los espacios cuasiuniformes T_0 tienen una única (salvo uniformismos) bicompletación T_0, conocida como «la bicompletación».

Proposición 4.2.9. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en (X, Ψ^*). Existe exactamente un filtro de Cauchy minimal (definición 3.1.21) en (X, Ψ^*) más grueso que $\mathcal{F}$. Además, si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$, entonces la familia*

$$\mathcal{B}_0 = \left\{U(B) \mid B \in \mathcal{B} \ \wedge \ U = U^{-1} \in \Psi^*\right\}$$

es base de ese filtro de Cauchy minimal en (X, Ψ^*) más grueso que $\mathcal{F}$.

Corolario 4.2.10. *Dado un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) y un punto $x \in X$, el conjunto $\eta^*(x)$ es un filtro de Cauchy minimal en (X, Ψ^*).*

Teorema 4.2.11. *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme. Todo filtro de Cauchy minimal en (X, Ψ^*) tiene una base de conjuntos abiertos en $\tau(\Psi^*)$.*

Proposición 4.2.12. *Si (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme y $D \subseteq X$ es un conjunto denso en $(X, \tau(\Psi^*))$ tal que todo filtro de Cauchy en $\left(D, \Psi^*_{|D\times D}\right)$ converge en $(X, \tau(\Psi^*))$, entonces (X, Ψ) es bicompleto.*

Por la importancia del siguiente resultado, desarrollamos su demostración en detalle.

Teorema 4.2.13 (Existencia de la bicompletación)**.** *Todo espacio cuasiuniforme T_0 tiene una bicompletación T_0.*

Demostración. **(Paso 1)** Sea (X,Ψ) un espacio cuasiuniforme T_0. Se define a $\widehat{X}$ como el conjunto de todos los filtros de Cauchy minimales en (X,Ψ^*). Ahora, para cada entorno $U\in\Psi$ se define una relación $\widehat{U}$ en $\widehat{X}\times\widehat{X}$ como

$$\widehat{U}=\left\{(\mathcal{F},\mathcal{G})\in\widehat{X}\times\widehat{X}\;\middle|\;\exists F\in\mathcal{F},G\in\mathcal{G}:F\times G\subseteq U\right\}.$$

Hay que verificar que la familia $\mathcal{B}=\left\{\widehat{U}\;\middle|\;U\in\Psi\right\}$ es base de una cuasiuniformidad $\widehat{\Psi}$ en $\widehat{X}$. Dados $U\in\Psi,\mathcal{F}\in\widehat{X}$, se tiene $(\mathcal{F},\mathcal{F})\in\widehat{U}$. Sean $V_1,V_2\in\Psi$. Haciendo $V=V_1\cap V_2$ se sigue que $V\in\Psi$ y $\widehat{V}=\widehat{V_1}\cap\widehat{V_2}$. Dado $U\in\Psi$, existe $V\in\Psi$ tal que $V\circ V\subseteq U$. Sean $(\mathcal{F},\mathcal{G}),(\mathcal{G},\mathcal{H})\in\widehat{V}$. Entonces existen $F\in\mathcal{F};G_1,G_2\in\mathcal{G};H\in\mathcal{H}$ tales que $F\times G_1\subseteq V$ y $G_2\times H\subseteq V$. Como $G_1\cap G_2\neq\varnothing$, entonces $F\times H\subseteq V\circ V\subseteq U$ y por lo tanto resulta $\widehat{V}\circ\widehat{V}\subseteq\widehat{U}$.

(Paso 2) Para probar que el espacio cuasiuniforme $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}\right)$ es T_0, se toman dos filtros de Cauchy minimales en (X,Ψ^*), es decir $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\widehat{X}$. Supóngase que, como puntos de $\widehat{X}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ tienen las mismas vecindades en $\tau\left(\widehat{\Psi}\right)$. Por lo tanto, dado cualquier entorno $U\in\Psi$ se tiene $(\mathcal{F},\mathcal{G}),(\mathcal{G},\mathcal{F})\in\widehat{U}$. Esto implica que $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ es un filtro de Cauchy en Ψ^*. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Cauchy minimales en (X,Ψ^*) y $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ es más grueso que ambos, por lo tanto $\mathcal{F}=\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\mathcal{G}$.

(Paso 3) Sea $i:X\to\widehat{X}$ la función dada por $i(x)=\eta^*(x)$, que a cada $x\in X$ le asigna su filtro de vecindades en (X,Ψ^*). Por el Corolario 4.2.10, la función i está bien definida. Dado cualquier entorno $U\in\Psi$, existe otro $V\in\Psi$ tal que $V^3\subseteq U$. Con esto se tienen las dos implicaciones: $(x,y)\in V\Rightarrow(\eta^*(x),\eta^*(y))\in\widehat{U}$ y $(\eta^*(x),\eta^*(y))\in\widehat{U}\Rightarrow(x,y)\in U$. Por lo tanto la función i es una inmersión cuasiuniforme.

(Paso 4) Para probar que $i(X)$ es denso en $\left(\widehat{X},\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$ se demuestra que, si $\mathcal{F}\in\widehat{X}$, entonces $i(\mathcal{F})$ converge a $\mathcal{F}$ en $\left(\widehat{X},\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Si se toma a $\mathcal{F}\in\widehat{X}$ y $U_1\in\Psi$, entonces existen $V_1\in\Psi,F\in\mathcal{F}$ tales que $V_1^2\subseteq U_1$ y $F\times F\subseteq V_1$. Sean $U=U_1\cap U_1^{-1}$ y $V=V_1\cap V_1^{-1}$. Para cada $x\in F$ tenemos que $F\times V(x)\subseteq U$ y por lo tanto $i(x)=\eta^*(x)\in\widehat{U}(\mathcal{F})$. Esto muestra que $i(F)\subseteq\widehat{U}(\mathcal{F})$.

(Paso 5) En vista de la Proposición 4.2.12, para probar que $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}\right)$ es bicompleto, basta con probar que, dado cualquier filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en (X,Ψ^*), su imagen $i(\mathcal{F})$ converge en $\left(\widehat{X},\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en (X,Ψ^*). Por la Proposición 4.2.9, existe un filtro $\mathcal{G}$ que es de Cauchy minimal en (X,Ψ^*) y es más grueso que $\mathcal{F}$. De acuerdo con lo demostrado en el paso anterior, $i(\mathcal{G})$ converge a $\mathcal{G}$ en $\left(\widehat{X},\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Como $i(\mathcal{F})$ es más fino que $i(\mathcal{G})$, entonces $i(\mathcal{F})$ también es convergente. QED

Definición 4.2.5 (La inmersión canónica)**.** La función $i:X\to\widehat{X}$ definida en la demostración del Teorema 4.2.13 se llama la **inmersión canónica** de (X,Ψ) en $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}\right)$.

Como consecuencia del corolario 4.2.8 tenemos la siguiente propiedad de unicidad para las bicompletaciones T_0.

Teorema 4.2.14. *Si (X,Ψ) es un espacio cuasiuniforme T_0, cualquier otra bicompletación T_0 de (X,Ψ) es cuasiunimórfica a $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}\right)$.*

Cuando (X,Ψ) es un espacio cuasiuniforme T_0, a $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}\right)$ se le llama **la bicompletación** de (X,Ψ) y es posible identificar a X con $i(X)$. Desde esta perspectiva, los filtros de Cauchy minimales en (X,Ψ^*) son las trazas de los filtros de vecindades en $\left(\widehat{X},\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$.

Teorema 4.2.15. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme Hausdorff. Entonces $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$ es un espacio uniforme Hausdorff completo. Además, cualquier espacio uniforme Hausdorff completo que tenga un subespacio denso unimórfico a $(X,\mathcal{U})$, es unimórfico a $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$.*

Proposición 4.2.16. *Sea (X,Ψ) un espacio cuasiuniforme T_0. Entonces (X,Ψ) es totalmente acotado si y solo si $\left(\widehat{X},\widehat{\Psi}^*\right)$ es compacto.*

4.3. Conceptos relativos a otras completaciones

En los espacios cuasiuniformes que no son uniformes, la falta de simetría en los entornos de la cuasiuniformidad ocasiona una correspondiente falta de simetría en los conceptos de pequeñez y de proximidad, nociones que están íntimamente ligadas con objetos tales como las redes de Cauchy y los filtros de Cauchy. Dicha asimetría hace posible una variedad de definiciones no equivalentes para estos conceptos y dificulta la adopción de un estándar único para cada uno de ellos. Por consecuencia se han definido varias completaciones para los espacios cuasiuniformes en general, algunas de ellas equivalentes entre sí y otras no. También hay completaciones que se definen para ciertas clases de espacios cuasiuniformes, por ejemplo para los espacios cuasimétricos. Algunas completaciones se han realizado usando sucesiones, otras utilizando redes y otras se han definido mediante filtros. Las completaciones que se construyen usando sucesiones se llaman **completaciones secuenciales**. Entre las completaciones que se citan con mayor frecuencia, además de la bicompletación, están la completación de Doitchinov [21], la completación de Yoneda [54] y la completación de Smyth [85].

Definición 4.3.1 (Corredes)**.** Dadas dos redes $\{x_\alpha \mid \alpha\in A\}$ y $\{y_\beta \mid \beta\in B\}$ en el espacio cuasiuniforme (X,Ψ), se dice que $\{y_\beta \mid \beta\in B\}$ es una **corred** de $\{x_\alpha \mid \alpha\in A\}$ cuando

$$\forall U\in\Psi : \exists\alpha_U\in A, \beta_U\in B : \forall\alpha\geq\alpha_U, \beta\geq\beta_U : (y_\beta,x_\alpha)\in U.$$

La notación $(y_\beta,x_\alpha)\to 0$ indica que $\{y_\beta \mid \beta\in B\}$ es una corred de $\{x_\alpha \mid \alpha\in A\}$.

Definición 4.3.2 (Redes D-Cauchy)**.** Una red φ en un espacio cuasiuniforme (X,Ψ) se llama **D-Cauchy** si tiene una corred en ese espacio, es decir si existe una red γ en X tal que γ sea corred de φ.

Como es de esperarse, al igual que sucede con la convergencia en otros espacios, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *Toda red convergente es una red D-Cauchy.*

Definición 4.3.3 ([21] Espacio cuasiuniforme D-completo)**.** Se dice que un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es **D-completo** si toda red D-Cauchy en X es convergente.

Definición 4.3.4 ([56] Red K-Cauchy por la izquierda)**.** Una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en un espacio cuasiuniforme (X, Ψ), se llama **K-Cauchy por la izquierda** si

$$\forall U \in \Psi : \exists \lambda_0 \in \Lambda : \forall \mu, \nu \in \Lambda : \lambda_0 \leq \mu \leq \nu \Rightarrow (x_\mu, x_\nu) \in U.$$

Al igual que con el teorema 4.2.13, daremos la demostración del teorema siguiente.

Teorema 4.3.2. *[81] Todo espacio cuasiuniforme T_0 con base numerable tiene una bicompletación secuencial.*

Demostración. Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme T_0 y sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Ψ. Considérese el conjunto S de todas las sucesiones en X que son de Cauchy en (X, Ψ^*). En S se define una relación de equivalencia $\approx$ como sigue:

$$(x_n)_n \approx (y_n)_n \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0, (x_m, y_n) \in B_k^* = B_k \cap B_k^{-1}.$$

El espacio base de la bicompletación secuencial será el conjunto cociente $\overline{X} = S/\approx$. Para generar la cuasiuniformidad requerida sobre $\overline{X}$ se define una familia numerable de entornos básicos $U_k \subseteq \overline{X} \times \overline{X}$, con $k \in \mathbb{N}$, donde

$$U_k = \left\{(\overline{x}, \overline{y}) \mid \exists\, (x_n)_n \in \overline{x},\ (y_n)_n \in \overline{y},\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : (x_m, y_n) \in B_k\right\}.$$

La familia $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ genera una cuasiuniformidad $\overline{\Psi}$ en $\overline{X}$ tal que $\left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right)$ es un espacio cuasiuniforme T_0 que es una bicompletación de (X, Ψ) y por lo tanto es cuasiunimórfico a su bicompletación canónica, la que se construye con filtros de Cauchy como en el Teorema 4.2.13. QED

El resultado siguiente es una adaptación, dada por Schellekens, de la propiedad de la extensión de funciones cuasiuniformemente continuas (corolario 4.2.8) para el caso específico de la bicompletación secuencial.

Teorema 4.3.3 ([81] Teorema de extensión)**.** *Supóngase que (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme T_0 con base numerable y que $\left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right)$ es su bicompletación secuencial, tal como se definió en el teorema 4.3.2. Si $f : (X, \Psi) \to (X, \Psi)$ es una función cuasiuniformemente continua, entonces la función $\overline{f} : \left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right) \to \left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right)$, definida como $\overline{f}\left[(x_n)_n\right] = \left[(f(x_n))_n\right]$, es cuasiuniformemente continua y es una extensión de f que es única en el sentido de que cualquier función cuasiuniformemente continua $\overline{g} : \left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right) \to \left(\overline{X}, \overline{\Psi}\right)$ que coincida con $\overline{f}$ en las sucesiones constantes, debe ser igual a $\overline{f}$.*

Otra completación, que existe para algunos espacios cuasiuniformes, es la completación de Smyth. A diferencia de la bicompletación, no todos los espacios cuasiuniformes tienen una completación de Smyth, como se verá en el capítulo siguiente. Esta completación es particularmente importante en el caso del espacio de complejidad $\mathcal{C}$, por sus aplicaciones al análisis de algoritmos del tipo «divide y vencerás». La completación de Smyth no se construye dentro de la categoría de los espacios cuasiuniformes, sino en la de los espacios cuasiuniformes topológicos, que son el tema de la sección 5.1, donde se dan las definiciones correspondientes. Sin embargo, es posible caracterizar a los espacios cuasiuniformes Smyth-completos, así como a aquellos que son Smyth-completables, mediante filtros K-Cauchy por la izquierda, que se definen a continuación.

Definición 4.3.5 (Filtro K-Cauchy por la izquierda)**.** Un filtro Γ en un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es llamado K-Cauchy por la izquierda si para cada $U \in \Psi$ existe un $F \in \Gamma$ tal que $U(x) \in \Gamma$ para cada $x \in F$.

Proposición 4.3.4 ([75])**.** *Un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es Smyth-completo si y solo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda en (X, Ψ) converge a un único punto x en (X, Ψ^*).*

Proposición 4.3.5 ([56])**.** *Un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es Smyth-completable si y solo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda sobre (X, Ψ), es un filtro de Cauchy en el espacio uniforme (X, Ψ^*).*

4.4. Espacios cuasiuniformes finitos

Las topologías finitas tienen muchas aplicaciones a la computación, sobre todo en el campo de los algoritmos para el procesamiento de imágenes. Dado que las pantallas digitales cuentan únicamente con un número finito de pixeles, se da lo que se conoce como «pérdida de resolución». Esto es en comparación con la geometría Euclideana y su representación basada en espacios lineales reales. La necesidad de caracterizar nociones como cercanía, convergencia y continuidad dentro del contexto discreto y finito de una pantalla de computadora, vuelve imperativo el uso de las topologías finitas [70].

En vista de que todas las topologías finitas son topologías de Alexandrov y de que las topologías de Alexandrov comparten muchas de las propiedades de las topologías finitas, incluimos en esta subsección algunos resultados relativos a las cuasiuniformidades que inducen topologías de Aleandrov.

Proposición 4.4.1. *[2] Un espacio topológico (X, τ) es de Alexandrov si y solo si existe un preorden $P \subseteq X \times X$, tal que τ admite a la cuasiuniformidad Ψ que tiene como base al conjunto singular $\beta = \{P\}$.*

Lema 4.4.2. *Si (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme, tal que la topología inducida $\tau(\Psi)$ es de Alexandrov, entonces $\bigcap \Psi = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times N(x)$.*

El resultado siguiente tiene como consecuencia que en los espacios finitos es posible considerar a las topologías, a los preórdenes y a las cuasiuniformidades como representaciones diferentes de la misma estructura, ya que hay una biyección entre el conjunto de todas las cuasiuniformidades que se pueden definir sobre un espacio finito, por un lado, y el conjunto de todos los preórdenes que se pueden definir sobre ese mismo espacio, por el otro.

El hecho anterior, aunado a la biyección que existe entre preórdenes y topologías en los espacios de Alexandrov, nos da la equivalencia entre topologías, preórdenes y cuasiuniformidades en el caso finito.

Lema 4.4.3. *Si (X, Ψ) es un espacio cuasiuniforme donde $X \neq \varnothing$ es finito, entonces:*

1. *El preorden $P = \bigcap \Psi$ es un entorno de Ψ.*
2. *$\{P\}$ es base de Ψ.*
3. *$\{P^{-1}\}$ es base de Ψ^{-1}.*

4. *$P \cap P^{-1}$ es una relación de equivalencia.*

5. *$\{P \cap P^{-1}\}$ es base de la uniformidad Ψ^*.*

Kovalevsky, en [53], presenta un concepto de geometría digital utilizando unos espacios llamados «complejos celulares abstractos» [87]. Intuitivamente, los elementos de estos espacios pueden representar, por ejemplo, en el caso particular de un poliedro, al poliedro mismo, a alguna de sus caras, a una de sus aristas o a un vértice. Se considera a cada uno de estos objetos geométricos como un elemento individual o «celda» del complejo celular, en vez de considerarlo como un subconjunto de puntos dentro del espacio Euclideano. Los complejos celulares abstractos están dotados de una topología de Alexandrov que es T_0 y que se puede definir, mediante la formulación del ejemplo 2.4.8, a partir de una relación de «enmarcamiento» entre los objetos geométricos representados por los elementos del complejo celular. En la relación mencionada, los vértices no están enmarcadas por ningún otro objeto. Cada arista está enmarcada por sus vértices extremos. Cada cara está enmarcada tanto por las aristas como por los vértices que forman su perímetro. Por último, las caras solamente enmarcan al poliedro mismo. Estas ideas se pueden extender a objetos geométricos similares de dimensiones superiores. Como se verá más adelante, a cada complejo celular abstracto se le asocia de manera canónica una topología. Dado que, en el caso finito, las cuasiuniformidades, las topologías y los preórdenes son conceptos equivalentes, cada complejo celular abstracto finito es un caso particular de espacio cuasiuniforme.

Definición 4.4.1 ([53] Complejos celulares abstractos)**.** Un **complejo celular abstracto** sobre un conjunto no vacío X es una terna $C = (X, E, d)$ tal que:

- $E \subseteq X \times X$ es una relación antisimétrica, irreflexiva y transitiva.
- $d : X \to \omega$ es una función que cumple $(x, y) \in E \Rightarrow d(x) < d(y)$.

A E se le llama la relación de **enmarcamiento** de C y a d se le conoce como la función de **dimensión** de C. Se dice que C es **finito** si X es finito. C es **localmente finito** si $E(x) \cup E^{-1}(x)$ es finito para toda $x \in X$. Si $d(x) = n$, entonces a x se le llama una n**-celda**. C se llama **n-dimensional** si $\max\{d(x) \mid x \in X\} = n$.

Definición 4.4.2. [53] La topología de un complejo celular abstracto $C = (X, E, d)$, se define como $\tau = \{A \subseteq X \mid E(A) \subseteq A\}$. Esta es una topología de Alexandrov y es T_0.

Aunque la relación de enmarcamiento es irreflexiva, se obtiene la misma topología de Alexandrov a partir del orden parcial $E \cup \Delta(X)$. Esto sucede en general para cualquier relación. Si $R \subseteq X \times X$ y se toma $S = R \cup \Delta(X)$, entonces $\{A \subseteq X \mid R(A) \subseteq A\} = \{A \subseteq X \mid S(A) \subseteq A\}$.

Definición 4.4.3 ([53] Subcomplejo celular)**.** Sean $C = (X, E, d)$ y $D = (Y, F, h)$ complejos celulares abstractos. Se dice que D es un **subcomplejo celular** de C cuando se cumplen las condiciones (i) $Y \subseteq X$, (ii) $F = E \cap (Y \times Y)$ y (iii) $h = d_{|Y}$.

Esto significa que es posible determinar un subcomplejo celular especificando un subconjunto $Y \subseteq X$, ya que la relación de enmarcamiento en el subcomplejo D, así como la función de dimensión. deben ser las restricciones de E y de d al subconjunto Y.

Definición 4.4.4 ([53] Isomorfismo entre complejos celulares)**.** Dos complejos celulares abstractos $C = (X, E, d)$ y $D = (Y, F, h)$ se llaman **isomorfos** si existe una biyección $g : X \to Y$ tal que $(a, b) \in E \Leftrightarrow (g(a), g(b)) \in F$.

A partir de la relación de enmarcamiento E en un complejo celular, se define la **relación de incidencia** como $I = \Delta(X) \cup E \cup E^{-1}$. Esta es la mínima relación reflexiva y simétrica que contiene a E. De esta manera, cada celda es incidente consigo misma y con las celdas que la enmarcan, así como con aquellas a las que ella enmarca. La relación de incidencia no es necesariamente transitiva. La cerradura transitiva de I se denota por K y se conoce como la **relación de conexidad** del complejo celular. Un complejo celular se llama **conexo** cuando su relación de conexidad tiene una única clase de equivalencia.

Definición 4.4.5 ([53] Regiones y regiones sólidas)**.** Una **región** de un complejo celular abstracto es un subconjunto abierto y conexo del espacio. Dentro de un complejo n-dimensional, una región se llama **sólida** si cada celda de su complemento es incidente a alguna n-celda del mismo complemento.

La geometría digital que desarrolla Kovalevsky se puede considerar como una imitación finita de la geométria cartesiana. Para lograr esto se define un tipo especial de complejo celular que va a representar, intuitivamente, a objetos geométricos tales como líneas, rectángulos, paralelepípedos y, en general, a productos cartesianos de segmentos rectilíneos de longitud entera. Se empieza por definir las «líneas numéricas finitas» como un tipo especial de complejo celular dotado además de coordenadas.

Definición 4.4.6 ([53] Líneas numéricas finitas)**.** Dada una longitud entera positiva n, se define a L_n, la **línea numérica finita** de longitud n, como $L_n = (X_n, E_n, d_n, c_n)$, donde:

- $X_n = \{0, 1, .., 2n\}$,
- $E_n = \{(2k, 2k + 1)\}_{k=0}^{n-1} \cup \{(2k, 2k - 1)\}_{k=1}^{n}$,
- $d_n(j) = j \bmod 2$, para $j \in X_n$,
- $c_n(j) = j/2$, para $j \in X_n$.

De esta forma, los elementos de una línea numérica de longitud n son los primeros $2n+1$ enteros no negativos, donde los números pares representan vértices y tienen dimensión cero, mientras que los números impares representan aristas y su dimensión es uno. La coordenada que se le asigna a cada elemento de la línea numérica es igual a su mitad. Con esto se logra que la distancia entre vértices consecutivos sea la unidad y que cada elemento tenga una coordenada igual a la del punto medio del objeto geométrico que representa si se considera a la línea como parte de un eje cartesiano, con su primer vértice situado en el origen de un espacio Euclideano. En esta línea numérica finita cada número par enmarca tanto al impar siguiente como al anterior. Esto se ilustra con el siguiente diagrama para el caso $n = 4$.

$$0 \to 1 \leftarrow 2 \to 3 \leftarrow 4 \to 5 \leftarrow 6 \to 7 \leftarrow 8$$

Definición 4.4.7 ([53] Complejos celulares cartesianos)**.** Dado $m \in \mathbb{N}$ y dadas m líneas numéricas finitas, $L_{n_1}, .., L_{n_m}$, cada una de longitud n_i, y tal que $L_{n_i} = (X_{n_i}, E_{n_i}, d_{n_i}, c_{n_i})$, para $1 \leq i \leq m$, se define el **complejo celular cartesiano**

$$C = (X, E, d, c) = \prod_{i=1}^{m} L_{n_i},$$

donde

- $X = \prod_{i=1}^{m} X_{n_i}$,
- $(u, v) = ((u_i), (v_i)) \in E$ si y solo si, $(u_i, v_i) \in I_{n_i}$ y $d_{n_i}(u_i) \leq d_{n_i}(v_i)$, para $1 \leq i \leq m$,
- $d(u) = d((u_i)) = \sum_{i=1}^{m} d_{n_i}(u_i)$,
- $c(u) = c(u_i) = (c_{n_1}(u_1), .., c_{n_m}(u_m))$.

En la definición anterior, I_{n_i} representa a la relación de incidencia correspondiente a la línea L_{n_i}. En el complejo cartesiano C todas las componentes de los vectores de coordenadas correspondientes a 0-celdas (vértices) son números enteros, mientras que todas las componentes de los vectores de coordenadas correspondientes a m-celdas son números racionales no enteros. En un complejo cartesiano bidimensional, a las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas se les llama puntos, segmentos y pixeles, respectivamente.

Definición 4.4.8 ([53] Semiplanos digitales)**.** En un complejo cartesiano de dimensión 2, un **semiplano digital** es una región sólida tal que sus pixeles están determinados por una desigualdad lineal sobre sus coordenadas. Un **segmento rectilíneo digital** es un subconjunto conexo de la frontera de un semiplano digital y un **subconjunto digital convexo** es una intersección no vacía de semiplanos digitales.

En los complejos celulares abstractos, el operador frontera se define de la misma forma que en cualquier espacio topológico. Dado que las topologías de los complejos celulares son de Alexandrov, la frontera de un subconjunto A se puede expresar en términos de vecindades mínimas como $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in X \mid N(x) \cap A \neq \varnothing \neq N(x) \cap (X \setminus A)\}$. Los discos digitales se definen de manera similar a la de los semiplanos digitales.

Definición 4.4.9 ([53] Discos digitales)**.** Un **disco digital** en un complejo cartesiano bidimensional, es una región sólida tal que sus pixeles están dados por una desigualdad de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

donde a y b son las coordenadas del centro y r es el radio. Un **arco circular digital** es un subconjunto conexo de la frontera de un disco digital.

Con frecuencia, las imágenes digitales que representan gráficas de funciones entre intervalos reales requieren columnas verticales de dos o más pixeles en las partes de la gráfica donde la pendiente de la función es muy elevada. Esto hace preferible utilizar relaciones en vez de funciones para definir el concepto de mapeo entre complejos celulares abstractos.

Definición 4.4.10 ([53] Mapeos entre complejos celulares)**.** Si $C_1 = (X, E_1, d_1)$ y $C_2 = (Y, E_2, d_2)$ son complejos celulares abstractos, un **mapeo** $F : C_1 \to C_2$ es una relación $F \subseteq X \times Y$. Una mapeo $F : C_1 \to C_2$ se llama **continuo** si dado $A \subseteq Y$ abierto en C_2, su preimagen $F^{-1}(A)$ es abierta en C_1. Se dice que $F : C_1 \to C_2$ **preserva la conectividad** cuando $F(A)$ es conexo en C_2 para todo $A \subseteq X$ que sea conexo en C_1.

Capítulo 5

Sintopologías y espacios cuasiuniformes topológicos

Smyth [85] proporciona un marco de referencia topológico para la teoría de dominios con base en la teoría de los espacios cuasiuniformes. Esto se logra introduciendo el concepto de espacio cuasiuniforme topológico.

5.1. Espacios cuasiuniformes topológicos

La idea básica al considerar la noción de un espacio cuasiuniforme topológico, es la de dotar a un espacio cuasiuniforme con una topología extra que sea compatible en ciertos sentidos con la cuasiuniformidad definida sobre el conjunto base. El ejemplo principal de una topología compatible con la cuasiuniformidad Ψ es, por supuesto $\tau(\Psi)$, la topología inducida por Ψ. Además de esto, M. Smyth [85] y P. Sünderhauf [90] han sugerido que otras topologías distintas de $\tau(\Psi)$ se pueden considerar compatibles con Ψ bajo ciertas condiciones.

Definición 5.1.1 (Espacios cuasiuniformes topológicos y subtopológicos)**.** Dado un conjunto X no vacío, una cuasiuniformidad Ψ sobre X y una topología τ definida en X, se dice que la terna (X, Ψ, τ) es un espacio cuasiuniforme **subtopológico** si cumple estas dos condiciones:

A1) $\forall A \in \tau, x \in A; \exists U \in \Psi, B \in \tau$ con $x \in B$ y $U(B) \subset A$.

A2) $\forall U \in \Psi, \exists V \in \Psi$ con $(V \subset U$ y $\forall x \in X,\ V^{-1}(x)$ es cerrado en $\tau)$.

Si además se cumple esta tercera condición

A3) $\forall U \in \Psi, \exists V \in \Psi\ :\ \forall A \in \tau, \exists B \in \tau$ con $V(A) \subseteq B \subseteq U(A)$,

entonces llamamos a (X, Ψ, τ) un espacio cuasiuniforme **topológico**.

La condición (A3) dada por Sünderhauf es equivalente a la siguiente formulación que es la que utiliza Künzi [56],

$$A3)' \quad \forall U \in \Psi, \exists V \in \Psi\ :\ \forall A \in \tau, V(A) \subseteq Int_\tau U(A).$$

Definición 5.1.2 (Espacio cuasiuniforme subtopológico interpolativo)**.** Dado un espacio cuasiuniforme subtopológico (X,Ψ,τ), lo llamamos **interpolativo** si cumple la siguiente condición, llamada (Int),

$$\forall U \in \Psi, \exists V \in \Psi : \forall A, B \in \tau, \exists C \in \tau \text{ con } U(A) \subseteq B \Rightarrow (V(A) \subseteq C \text{ y } V(C) \subseteq B).$$

En un espacio cuasiuniforme topológico, la condición (A3) implica el cumplimiento de la condición (Int). En otras palabras, todo espacio cuasiuniforme topológico es un espacio cuasiuniforme subtopológico interpolativo.

[56] En todo espacio cuasiuniforme topológico (X,Ψ,τ), el preorden $\leq_\Psi$ asociado a su cuasiuniformidad coincide con el preorden de especialización de τ. Asimismo, si Ψ es una cuasiuniformidad en X, entonces la topología $\tau(\Psi)$ cumple las tres condiciones (A1), (A2) y (A3). Esto implica que $(X,\Psi,\tau(\Psi))$ es un espacio cuasiuniforme topológico. De esta manera el espacio cuasiuniforme (X,Ψ) queda representado como un espacio cuasiuniforme topológico. Debido a esta representación estándar, se dice que un espacio cuasiuniforme topológico (X,Ψ,σ) es un espacio cuasiuniforme precisamente cuando $\sigma = \tau(\Psi)$. Como consecuencia de la condición (A1), en todo espacio cuasiuniforme subtopológico (X,Ψ,τ) se cumple $\tau \subset \tau(\Psi)$, mientras que una consecuencia de la condición (A2) es que en un espacio cuasiuniforme subtopológico (X,Ψ,τ) en donde $\Delta(X) \in \Psi$, la topología cofinita de X está contenida en τ, ya que en ese caso todos los conjuntos singulares $\{x\}$ son cerrados.

En la proposición siguiente se enuncia una conexión simple entre la cuasiuniformidad y la topología de un espacio cuasiuniforme topológico.

Proposición 5.1.1 ([56])**.** *Si (X,Ψ,τ) es un espacio cuasiuniforme topológico, entonces el espacio bitopológico $(X,\tau(\Psi^{-1}),\tau)$ es regular por pares.*

Definición 5.1.3 (Morfismos entre espacios cuasiuniformes topológicos)**.** Un morfismo entre dos espacios cuasiuniformes topológicos es una función $f : (X,\Psi,\tau) \longrightarrow (Y,\mathcal{Y},\sigma)$ que satisface estas condiciones:

(1) $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ es una función continua.

(2) $f : (X,\Psi) \longrightarrow (Y,\mathcal{Y})$ es una función cuasiuniformemente continua.

Definición 5.1.4 (La categoría **QUTop**)**.** La categoría **QUTop** se define especificando sus objetos y morfismos de la manera siguiente:

- Sus objetos son los espacios cuasiuniformes topológicos (X,Ψ,τ).
- Sus morfismos son las funciones que son cuasiuniformemente continuas entre los respectivos espacios cuasiuniformes y además continuas entre los respectivos espacios topológicos.

Como para cada cuasiuniformidad Ψ sobre X, la terna $(X,\Psi,\tau(\Psi))$ es un espacio cuasiuniforme topológico, resulta que **QUnif** es equivalente a una subcategoría de **QUTop** [56], [90].

Definición 5.1.5 ([56], [90] Contención fuerte en espacios cuasiuniformes topológicos)**.** Sea (X,Ψ,τ) un espacio cuasiuniforme topológico y sea $U \in \Psi$. Dados subconjuntos $A, B \subseteq X$, se dice que A está **contenido fuertemente** en B **con respecto** a U (lo que se denota por $A <_U B$) si existen $O, O' \in \tau$ tales que $A \subseteq O$, $U(O) \subseteq O'$ y $O' \subseteq B$.

Dado cualquier espacio cuasiuniforme topológico (X, Ψ, τ), tanto la cuasiuniformidad Ψ como la topología τ se pueden volver a obtener a partir de las relaciones $<_U$ [56].

Definición 5.1.6 ([85] Relaciones asociadas a los entornos $U \in \Psi$)**.** Dado un espacio cuasiuniforme subtopológico (X, Ψ, τ), para cada entorno $U \in \Psi$, Smyth define tres relaciones $\widehat{U}$, U^+ y $\overline{U}$ en X a partir de U y con ellas define las tres familias correspondientes $\widehat{\Psi}$, Ψ^+ y $\overline{\Psi}$ de la siguiente manera:

$$x\widehat{U}y \Longleftrightarrow \forall A, B \in \tau : (x \in A \ \wedge \ U(A) \subseteq B) \Rightarrow y \in B \quad ; \quad \widehat{\Psi} = \left\{\widehat{U}\right\}_{U\in\Psi}.$$

$$xU^+y \Longleftrightarrow y \in \bigcap \{U(A) \mid x \in A \in \tau\} \quad ; \quad \Psi^+ = \{U^+\}_{U\in\Psi}.$$

$$x\overline{U}y \Longleftrightarrow x \in cl\,(U^{-1}(y)) \quad ; \quad \overline{\Psi} = \left\{\overline{U}\right\}_{U\in\Psi}.$$

Lema 5.1.2. *Si (X, Ψ, τ) es un espacio cuasiuniforme subtopológico, entonces*

(a) $\forall U \in \Psi, \overline{U} \subseteq U^+ \subseteq \widehat{U}$.

(b) $\forall U \in \Psi, \exists W \in \Psi : \widehat{W} \subseteq \overline{U}$.

Lema 5.1.3. *En un espacio cuasiuniforme subtopológico (X, Ψ, τ) las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) $\widehat{\Psi}$ *es base de* Ψ.

(2) Ψ^+ *es base de* Ψ.

(3) $\overline{\Psi}$ *es base de* Ψ.

Definición 5.1.7 (Filtros S-Cauchy y filtros redondos)**.** Sea (X, Ψ, τ) un espacio cuasiuniforme topológico. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces se dice que $\mathcal{F}$ es:

- **S-Cauchy** si $\forall U \in \Psi, F \in \mathcal{F}, \exists x \in F : \forall A \in \tau, (x <_U A \Rightarrow A \in \mathcal{F})$.
- **Redondo** si $\forall F \in \mathcal{F}, \exists U \in \Psi, A \in \tau \cap \mathcal{F} : A <_U F$.

Nótese que, dado cualquier punto $x \in X$, su filtro de vecindades $\mathcal{N}_\tau(x)$ es redondo y S-Cauchy [56], [90]. Tomando en cuenta las aplicaciones a la semántica denotacional, Smyth [85] y Sunderhauff [90] consideran que el concepto usual de convergencia de filtros en un espacio topológico no es adecuado para construir la completación de un espacio cuasiuniforme topológico. Por este motivo utilizan la noción de convergencia fuerte, que Smyth aplica también en su completación de los espacios sintopológicos.

Definición 5.1.8 (Convergencia fuerte de un filtro a un punto)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $x \in X$ y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Se dice que $\mathcal{F}$ **converge fuertemente** a x (Notación: $\mathcal{F} \twoheadrightarrow x$) si $\mathcal{N}(x) = \mathcal{F}$.

Con la noción de convergencia fuerte, es posible definir el concepto de espacios cuasiuniformes topológicos Smyth-completos.

Definición 5.1.9 ([56], [85], [90] Espacio Smyth-completo)**.** Un espacio cuasiuniforme topológico (X, Ψ, τ) se llama **Smyth-completo** si, dado cualquier filtro $\mathcal{F}$ en X que sea redondo y S-Cauchy, existe un único punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F}$ converge fuertemente a x.

Se dice que un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) es Smyth-completo cuando el espacio cuasiuniforme topológico $(X, \Psi, \tau(\Psi))$ es Smyth-completo. El teorema siguiente se enuncia sin demostración y solamente se especifica el conjunto base para la completación de Smyth, sin entrar en detalles acerca de la cuasiuniformidad ni la topología correspondientes.

Teorema 5.1.4 ([90] Existencia de la completación de Smyth)**.** *Si (X, Ψ, τ) es un espacio cuasiuniforme topológico, existe otro espacio cuasiuniforme topológico $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\tau}\right)$ tal que*

- *$\widetilde{X}$ es el conjunto de todos los filtros redondos y S-Cauchy en X.*
- *El espacio $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\tau}\right)$ es Smyth-completo.*
- *Si la topología τ es T_0, entonces la función $i : X \to \widetilde{X}$ tal que $i(x) = \mathcal{N}_\tau(x)$, es un morfismo inyectivo y los espacios X e $i(X)$ son isomorfos en* **QUTop**.
- *Si $f : (X, \Psi, \tau) \to (Y, \Upsilon, \sigma)$ es un morfismo de* **QUTop** *y el espacio (Y, Υ, σ) es Smyth-completo, entonces existe una única extensión de f a $\widetilde{X}$, esto es, un único morfismo $\widetilde{f} : \left(\widetilde{X}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\tau}\right) \to (Y, \Upsilon, \sigma)$ tal que $f = \widetilde{f} \circ i$.*

Definición 5.1.10 (Espacio cuasiuniforme Smyth-completable)**.** Un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) se llama **Smyth-completable** si la completación de Smyth (Y, Υ, σ) del espacio cuasiuniforme topológico $(X, \Psi, \tau(\Psi))$ asociado a (X, Ψ) es nuevamente representante de un espacio cuasiuniforme, es decir cuando se cumple que $\sigma = \tau(\Upsilon)$.

Existen espacios en la categoría **QUnif**, cuya completación de Smyth ya está fuera de esta categoría, pero dentro de la categoría **QUTop**. Se puede encontrar un ejemplo de esto en [90].

5.2. Espacios sintopológicos

Si bien los conceptos que motivan el trabajo de Smyth [85] se originan en la teoría de dominios, el desarrollo de sus resultados se centra en el concepto de espacio sintopológico, definido con anterioridad por Császár. La estructura de los espacios sintopológicos está dada por una familia de relaciones que expresan diferentes grados de inclusión fuerte entre los subconjuntos de un espacio. Császár ha escrito una exposición detallada de los fundamentos de la topología utilizando este tipo de relaciones [16]. Este enfoque forma parte del así llamado «programa de la topología libre de puntos», que incluye también a la teoría de marcos y a la teoría de locales. La completación de los espacios cuasiuniformes topológicos presentada originalmente por Smyth utiliza a los espacios sintopológicos, ya que primero define una familia de relaciones que le permite obtener un espacio sintopológico a partir de un espacio cuasiuniforme topológico. A continuación define otra familia de relaciones que le permite obtener un espacio cuasiuniforme topológico a partir de un espacio sintopológico, construyendo así un puente que conecta a estos dos tipos diferentes de espacios. Después, Smyth define una completación específicamente para los espacios sintopológicos. La completación de Smyth (la versión presentada en [85]) de un espacio cuasiuniforme topológico se consigue pasando primero al espacio sintopológico asociado, obteniendo después la completación sintopológica de dicho espacio y finalmente regresando desde ahí al espacio cuasiuniforme topológico correspondiente.

Definición 5.2.1 (Espacio sintopológico y estructuras subsintopológicas)**.** Un espacio sintopológico es una pareja ordenada $(X, \mathcal{J})$ donde $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i\in I}$ es una familia de relaciones definidas sobre $\mathcal{P}(X)$. Es decir, cada $<_i$ es una relacion entre subconjuntos de X y además se cumplen:

S1. $\forall i \in I,\ \varnothing <_i \varnothing \ \text{ y } \ X <_i X.$

S2. $\forall i \in I, A, B \subseteq X; A <_i B \Rightarrow A \subseteq B.$

S3. $\forall i \in I; A, B, C, D \subseteq X : A \subseteq B <_i C \subseteq D \Rightarrow A <_i D.$

S4. $\forall i \in I; B \subseteq X; \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : (\forall A \in \mathcal{A} : A <_i B) \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} <_i B.$

S5. $\forall i \in I; A, B, C \subseteq X : (A <_i B \ \ y \ \ A <_i C) \Rightarrow A <_i B \cap C.$

S6. $\forall i, j \in I, \exists k \in I : (<_i \cup <_j) \subseteq <_k.$

S7. $\forall i \in I, \exists j \in I : \forall A, B \subseteq X, \exists C \subseteq X \text{ con } A <_i B \Rightarrow A <_j C <_j B.$

A la familia $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i\in I}$ se le llama una **sintopología** sobre X. En el caso de que se cumplan las condiciones (S1) hasta (S6), a la familia $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i\in I}$ se le llama una **estructura subsintopológica** sobre X.

Definición 5.2.2 (Inclusión fuerte en espacios sintopológicos)**.** Sea $(X, \mathcal{J})$ un espacio sintopológico con $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i\in I}$ y sean $A, B \subseteq X$. Se dice que A está **fuertemente contenido** en B (notación: $A \ll B$) si se cumple

$$\exists i \in I : A <_i B.$$

Definición 5.2.3 (La topología asociada a un espacio sintopológico)**.** Sea $(X, \mathcal{J})$ un espacio sintopológico con $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i\in I}$. La **topología asociada** a $(X, \mathcal{J})$ es

$$\tau_{\mathcal{J}} = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \{a\} \ll A\} \ = \ \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \exists i \in I \text{ con } \{a\} <_i A\}.$$

En el caso de una sintopología singular $\mathcal{J} = \{<\}$, la topología $\tau_{\mathcal{J}}$ asociada a $(X, \mathcal{J})$ se puede caracterizar como

$$\tau_{\mathcal{J}} = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \{a\} < A\} = \{A \subseteq X \mid A < A\}.$$

Definición 5.2.4 (La sintopología asociada a una topología)**.** Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces $\mathcal{J} = \{<\}$ resulta ser una sintopología en X si se define

$$A < B \iff \exists U \in \tau : A \subseteq U \subseteq B.$$

Observación 5.2.1. Dado un espacio topológico (X, τ), si primero se construye la sintopología singular $\mathcal{J} = \{<\}$ asociada a τ de acuerdo a la definición 5.2.4 y luego se determina la topología $\tau_{\mathcal{J}}$ asociada a $\mathcal{J}$ como lo indica la definición 5.2.3, regresamos al punto de partida ya que en este caso $\tau_{\mathcal{J}} = \tau$.

Observación 5.2.2. Dado un espacio sintopológico $(X, \mathcal{J})$ con $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i \in I}$, si primero se construye $\tau_{\mathcal{J}}$, la topología asociada a $\mathcal{J}$ según la definición 5.2.3 y después se construye la sintopología singular asociada a $\tau_{\mathcal{J}}$ siguiendo la definición 5.2.4, en vez de regresar a la sintopología original, obtenemos una sola relación $<$ entre subconjuntos de X tal que

$$\forall A, B \subseteq X : A < B \Longleftrightarrow (\exists G \subseteq X : A \subseteq G \subseteq B \ \wedge \ \forall x \in G : \{x\} \ll G)\,.$$

Proposición 5.2.1. *Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una familia de topologías en un conjunto X tal que cualesquiera dos de ellas tienen un refinamiento común dentro de la familia. Si para cada $i \in I$ se define una relación $<_i \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ siguiendo el modelo de la definición 5.2.4, es decir,*

$$\forall A, B \subseteq X, (A <_i B \Longleftrightarrow \exists U \in \tau_i : A \subseteq U \subseteq B)\,,$$

entonces $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i \in I}$ es una sintopología en X.

Definición 5.2.5 (Función continua entre espacios sintopológicos)**.** Si tenemos dos espacios sintopológicos $\left(X, \{<_i\}_{i \in I}\right)$ y $\left(Y, \{\prec_j\}_{j \in J}\right)$ y una función $f : X \to Y$, se dice que f es **continua** si se cumple

$$\forall j \in J, \exists i \in I, \forall A, B \subseteq Y : A \prec_j B \Rightarrow f^{-1}(A) <_i f^{-1}(B).$$

Definición 5.2.6 (La categoría Syn)**.** La categoría **Syn** está definida por:

- Sus objetos son los espacios sintopológicos.
- Sus morfismos son las funciones continuas entre espacios sintopológicos.

Dado un espacio cuasiuniforme (X, Ψ) y dada cualquier topología τ definida sobre X, aún cuando dicha topología no tenga necesariamente ninguna relación con la cuasiuniformidad Ψ (más allá de compartir a X como conjunto base) es posible definir una estructura subsintopológica en X a partir de τ y de Ψ, como se enuncia a continuación.

Proposición 5.2.2 (Las estructuras subsintopológicas de un espacio cuasiuniforme)**.** *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme y sea τ una topología en X. Si para cada entorno $U \in \Psi$ se define una relación $<_U$ sobre el conjunto potencia de X, es decir $<_U \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, tal que*

$$\forall A, B \subseteq X; A <_U B \Longleftrightarrow \exists C, D \in \tau : A \subseteq C \text{ y } U(C) \subseteq D \subseteq B,$$

entonces la familia $\mathcal{J}_{\Psi,\tau} = \{<_U\}_{U \in \Psi}$ es una estructura subsintopológica en X.

Proposición 5.2.3 (La cuasiuniformidad asociada a una sintopología)**.** *Sea $(X, \mathcal{J})$ un espacio sintopológico, con $\mathcal{J} = \{<_i\}_{i \in I}$. Si para cada índice $i \in I$ se define una relación $U_i \subseteq X \times X$ como*

$$\forall x, y \in X; (x, y) \in U_i \Longleftrightarrow (\forall A \subseteq X : \{x\} <_i A \Rightarrow y \in A)\,,$$

entonces la familia $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in I\}$ es base de una cuasiuniformidad en X.

Definición 5.2.7 (Filtros redondos y filtros S-Cauchy)**.** Sea $\left(X, \{<_i\}_{i\in I}\right)$ un espacio sintopológico y sea $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X. En este caso,

1 $\mathcal{B}$ se llama **redonda** si se cumple

$$\forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{B} : A \ll B.$$

2 Se dice que $\mathcal{B}$ es **S-Cauchy** si se cumple

$$\forall i \in I, \forall B \in \mathcal{B}, \exists x \in B : \forall A \subseteq X; \{x\} <_i A \Rightarrow A \in \mathcal{B}.$$

Capítulo 6

Espacios cuasimétricos

A continuación se define una clase particular de espacios cuasiuniformes, los llamados espacios cuasimétricos, entre los cuales está el espacio de complejidad, que es el tema de interés principal en este trabajo.

6.1. Teoría General

Definición 6.1.1 (Métricas y sus generalizaciones)**.** Dado un conjunto X no vacío, una **métrica** sobre X, es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $\forall x, y, z \in X$:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(3) $[\ d(x, y) = 0 = d(y, x)\ ] \Longrightarrow x = y$.

(4) $d(y, x) = d(x, y)$.

d es una **cuasimétrica** si satisface las condiciones (1), (2) y (3).

d es una **seudométrica** si satisface las condiciones (1), (2) y (4).

d es una **cuasiseudométrica** si satisface las condiciones (1) y (2).

El par (X, d) es llamado un espacio métrico, cuasimétrico, seudométrico o cuasiseudométrico según sea el caso con la función d.

Definición 6.1.2 (Cuasiseudométrica extendida)**.** Con frecuencia se trabaja con cuasiseudométricas **extendidas**, entendiendo que la cuasiseudométrica puede tomar el valor $+\infty$ para algunos pares $(x, y) \in X \times X$.

Fletcher y Lindgren [26], al igual que Kelly [50] y también Schellekens en [81], usan el término cuasimétrica para referirse a una cuasimétrica T_1, es decir a una cuasimétrica que cumple con la condición $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Esta es una condición más fuerte que (3). La condición (3) únicamente implica que el espacio (X, d) es T_0 pero no necesariamente T_1.

Cobzaş [14] le llama «semimétricas» a las seudométricas y «cuasisemimétricas» a las cuasiseudométricas. Goubault [32] le llama «hemimétrica» a una cuasiseudométrica extendida y llama «métricas» y «cuasimétricas» a las métricas extendidas y a las cuasimétricas extendidas, respectivamente.

Definición 6.1.3 (Subespacio cuasiseudométrico)**.** Si (X, d) y (Y, q) son espacios cuasiseudométricos, entonces (Y, q) es un **subespacio** de (X, d) si $Y \subseteq X$ y q es la restricción de d a $Y \times Y$.

Se dice que el espacio (X, d) satisface una propiedad «hereditariamente» cuando todos sus subespacios satisfacen esa propiedad.

Definición 6.1.4 ([56] Cuasiseudométrica no arquimediana)**.** Una cuasiseudométrica d se llama **no arquimediana** si cumple que $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq max \{d(x, y), d(y, z)\}$. Una métrica no arquimediana también se conoce como **ultramétrica**.

Por ejemplo, una métrica no arquimediana es la *métrica discreta*, que se puede definir en cualquier conjunto X no vacío mediante $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, para $x, y \in X$. Otro ejemplo consiste en tomar X^ω, el conjunto de las sucesiones de elementos de un conjunto $X \neq \varnothing$, y definir a la función d como $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-k}$ si $x \neq y$, donde $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ y el número $k \in \omega$ cumple con $x_k \neq y_k$ pero $x_n = y_n$ para todo $n < k$.

Definición 6.1.5 (Cuasiseudométrica conjugada)**.** La cuasiseudométrica **conjugada** de una cuasiseudométrica d se denota por d^{-1} y está definida como $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$.

Definición 6.1.6 (La seudométrica inducida)**.** A partir de las cuasiseudométricas d y d^{-1}, la función $d^s(x, y) = \text{máx}\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}$, con $x, y \in X$, es una seudométrica sobre X, que se llama la **seudométrica inducida** por d.

La seudométrica d^s es una métrica si y solo si d es una cuasimétrica. Las desigualdades siguientes son trivialmente ciertas,

$$d(y, x) \leq d^s(x, y) \qquad \text{y} \qquad d^{-1}(x, y) \leq d^s(x, y). \tag{6.1}$$

Definición 6.1.7 (La cuasiuniformidad asociada a una cuasiseudométrica)**.** Si la pareja (X, d) es un espacio cuasiseudométrico, se construye la **cuasiuniformidad asociada**, Ψ_d, utilizando como base la familia de relaciones $\beta = \{\ U_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \left\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 2^{-n}\right\}.$$

Si d es una seudométrica, entonces Ψ_d es una uniformidad. Si d genera a Ψ, entonces d^{-1} genera a Ψ^{-1}.

Lema 6.1.1. *Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre espacios cuasiseudométricos es cuasiuniformemente continua con respecto a Ψ_{d_X} y Ψ_{d_Y}, si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ siempre que $d_X(x, y) < \delta$, para todo $x, y \in X$.*

Observación 6.1.1. En vista de la desigualdad que determina a los entornos básicos de Ψ_d en la definición 6.1.7, el preorden $\leq_{\Psi_d} = \bigcap \Psi$ se puede expresar directamente en términos de la cuasiseudométrica d, e indicarse con el símbolo $\leq_d$, como sigue

$$\forall x, y \in X : \ x \leq_d y \ \Leftrightarrow \ x \leq_{\Psi_d} y \ \Leftrightarrow \ d(x, y) = 0.$$

Cuando d es una cuasimétrica, el preorden $\leq_d$ es un orden parcial. Si el espacio $(X, \tau(d))$ es T_1, entonces $\leq_d$ es la relación de identidad en X. Se dice [79] que un espacio cuasiseudométrico (X, d) es **dirigido** cuando el conjunto preordenado $(X, \leq_d)$ es dirigido. Asimismo, se dice [74] que un espacio cuasimétrico (X, d) **tiene un máximo** (res. **mínimo**) si su orden parcial asociado $\leq_d$ tiene un máximo (resp. mínimo).

Definición 6.1.8 ([79] Funciones crecientes y decrecientes)**.** Sean (X, d) un espacio cuasimétrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. La función f se llama **creciente** (resp. **decreciente**, **estricamente creciente**, **estrictamente decreciente**) si para todos $x, y \in X$, la desigualdad $x \leq_d y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$, $f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$).

Lema 6.1.2 ([79])**.** *Si (X, d) es un espacio cuasimétrico con $x, y, u, v \in X$, entonces*

$$(u \leq_d x \ \text{ y } \ y \leq_d v) \Rightarrow d(u, v) \leq d(x, y)$$

Definición 6.1.9 ([74] Espacios convexos de acuerdo al orden)**.** Un espacio cuasiseudométrico (X, d) se llama **convexo con respecto al orden** (o también se dice [79] que (X, d) satisface la **condición del camino descendente**) si

$$\forall x, y, z \in X : x \geq_d y \geq_d z \Rightarrow d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

Definición 6.1.10 ([79], [74] Espacio acotado por una función)**.** Sean (X, d) un espacio cuasimétrico y $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función. Se dice que (X, d) está **acotado por** f si la desigualdad $d(x, y) \leq f(y)$ se cumple para todos $x, y \in X$. En general, (X, d) se llama **acotado por una función** cuando existe una función f tal que (X, d) esté acotado por f.

Definición 6.1.11 ([32] Inmersión isométrica)**.** Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios cuasiseudométricos (X, d_X) y (Y, d_Y) se llama **inmersión isométrica** si

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definición 6.1.12 (Isometría)**.** Una **isometría** es una inmersión isométrica biyectiva.

Toda isometría entre espacios métricos es una equivalencia uniforme con respecto a las uniformidades inducidas por las métricas correspondientes.

Definición 6.1.13 ([81] Mapeo de contracción)**.** Dado un espacio cuasiseudométrico (X, d), una función $f : X \to X$ se llama **mapeo de contracción** si

$$\exists c < 1 : \forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Lema 6.1.3. *[26] Si $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de relaciones reflexivas definidas en un conjunto X no vacío y tales que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n,$$

entonces existe una cuasiseudométrica d en X con la propiedad de que

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \subseteq \left\{(x, y) \mid d(x, y) < 2^{-n}\right\} \subseteq U_n.$$

En el caso de que cada relación U_n sea simétrica, se puede considerar a la función d como una seudométrica.

Teorema 6.1.4 (Cuasiseudometrizabilidad de espacios cuasiuniformes)**.** *Sea (X, Ψ) un espacio cuasiuniforme. Existe una cuasiseudométrica d que genera a la cuasiuniformidad Ψ, si y solo si Ψ tiene una base numerable.*

Definición 6.1.14 (Uniformidades metrizables)**.** Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es **metrizable** si existe una métrica d definida en X y que genere a $\mathcal{U}$. En este caso también se dice que la uniformidad $\mathcal{U}$ es metrizable y se le conoce como la **uniformidad métrica** asociada a d.

Teorema 6.1.5. *Una uniformidad es metrizable si y solo si es Hausdorff y tiene una base numerable.*

Definición 6.1.15 ([14] Bolas abiertas y bolas cerradas)**.** Sea (X, d) un espacio cuasiseudométrico. Sea $x \in X$ y sea $r > 0$. Los conjuntos

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \quad \text{y} \quad B_d[x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

se llaman: la **bola abierta** con centro en x y de radio r, y la **bola cerrada** con centro en x y de radio r, respectivamente. El subíndice d es para distinguir la cuasiseudométrica en caso necesario. Se puede omitir cuando la claridad del contexto lo permita.

Definición 6.1.16 (La topología asociada a una cuasiseudométrica)**.** Si d es una cuasiseudométrica en un conjunto X, la base $\beta = \{B(x, r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ genera una topología que se llama la **topología inducida** por d y se denota por $\tau(d)$.

La topología inducida por d es idéntica a la inducida por la cuasiuniformidad generada por d, es decir $\tau(d) = \tau(\Psi_d)$. Kelly [50], ha estudiado las propiedades de los espacios bitopológicos de la forma $(X, \tau(d), \tau(d^{-1}))$ y considera a este espacio como la estructura topológica natural asociada a la cuasiseudométrica d.

Lema 6.1.6. *[50] Si d es una cuasiseudométrica en X, entonces d y d^{-1} son cuasimétricas T_1 si y solo si $(X, \tau(d), \tau(d^{-1}))$ es Hausdorff por pares.*

Lema 6.1.7. *[13] Si (X, d) es un espacio cuasimétrico, entonces*

1. *La topología $\tau(d)$ es T_0.*
2. *$\tau(d)$ es T_1 si y solo si $\forall x \neq y : d(x, y) > 0$.*

Definición 6.1.17 (Espacios topológicos metrizables y sus variantes)**.** Un espacio topológico (X, τ) se llama **metrizable** si existe una métrica d en X tal que $\tau = \tau(d)$.

Los conceptos correspondientes para cuasimétricas, seudométricas y cuasiseudométricas se definen de manera similar. Todo espacio topológico seudometrizable es uniformizable, ya que $\tau = \tau(d) = \tau(\mathcal{U}_d)$. Si una uniformidad es metrizable, entonces la topología uniforme que genera también es metrizable ya que, en este caso, $\tau(\mathcal{U}) = \tau(\mathcal{U}_d)$. Sin embargo, la metrizabilidad de una topología uniforme no implica la metrizabilidad de la uniformidad que la generó [7], [86]. Es decir que hay ejemplos de uniformidades $\mathcal{U}$ que generan una topología $\tau(\mathcal{U})$ que es metrizable pero la uniforfmidad $\mathcal{U}$ no es metrizable.

Definición 6.1.18 ([85] Inclusión de margen $\varepsilon > 0$)**.** Sea (X, d) un espacio cuasimétrico. Sean $A, B \subseteq X$ y sea $\varepsilon > 0$. La notación $A <_\varepsilon B$ significa

$$\forall x, y \in X : [x \in A \text{ y } d(x, y) < \varepsilon] \Rightarrow y \in B.$$

El concepto de inclusión de margen $\varepsilon > 0$ se puede caracterizar en términos de unión de bolas abiertas como sigue

$$\forall M, N \subseteq X : M <_\varepsilon N \Longleftrightarrow \bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon) \subseteq N.$$

Definición 6.1.19 (Base redonda de filtro)**.** Se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio cuasimétrico (X, d) es **redonda** si cumple

$$\forall B \in \mathcal{B} : \exists A \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 : A <_\varepsilon B.$$

Definición 6.1.20 (Espacio cuasiseudométrico interpolativo)**.** Sea (X, d) un espacio cuasiseudométrico y sea τ la topología generada por d de acuerdo a la definición 6.1.16. El espacio (X, d) se llama **interpolativo** si cumple

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A, B \in \tau, \exists C \in \tau : A <_\varepsilon B \Rightarrow A <_\delta C <_\delta B.$$

Definición 6.1.21 ([14] Convergencia con respecto a una cuasiseudométrica)**.** Se dice que una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio cuasiseudométrico (X, d) **converge** a $x \in X$, **con respecto a** d, si $\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0$.

La convergencia estadística de una sucesión se define en términos del concepto de densidad asintótica que se aplica a subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición 6.1.22 ([46] Densidad asintótica)**.** Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, su **densidad asintótica** se denota como $\varrho(A)$ y está definida como

$$\varrho(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |A \cap \{1, .., n\}| .$$

cuando dicho límite existe. La notación $|S|$ indica la cardinalidad del conjunto S.

Definición 6.1.23 ([46] Convergencia estadística hacia adelante)**.** Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio cuasiseudométrico (X, d) **converge hacia adelante estadísticamente** a un elemento $x \in X$, si $\forall \varepsilon > 0 : \varrho(\{k \in \mathbb{N} \mid d(x, x_k) \geq \varepsilon\}) = 0$.

Definición 6.1.24 ([14], [29] Sucesiones de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio cuasiseudométrico (X, d). Entonces $(x_n)_n$ se llama:

- **d-Cauchy por la izquierda** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(x, x_n) < \varepsilon.$$

- **d-Cauchy por la derecha** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

- **d^s-Cauchy** si
$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq n_0, d^s\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon.$$
- **K-Cauchy por la izquierda** si
$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall m\geq n\geq n_0, d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon.$$
- **K-Cauchy por la derecha** si
$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall m\geq n\geq n_0, d\left(x_m,x_n\right)<\varepsilon.$$

Proposición 6.1.8. *[14] Si $(x_n)_n$ es una sucesión en un espacio cuasiseudométrico (X,d),*

(i) d^s-Cauchy $\Rightarrow$ K-Cauchy por la izquierda $\Rightarrow$ d-Cauchy por la izquierda.

(ii) d^s-Cauchy $\Rightarrow$ K-Cauchy por la derecha $\Rightarrow$ d-Cauchy por la derecha.

(iii) $(x_n)_n$ es d^s-Cauchy si y solo si es K-Cauchy por la izquierda y por la derecha.

Un espacio cuasimétrico (X,d) es bicompleto si y solo si el espacio métrico (X,d^s) es completo [28].

Proposición 6.1.9. *Un espacio métrico X es totalmente acotado si y solo si toda sucesión en X tiene una subsucesión de Cauchy.*

Proposición 6.1.10. *[28] Un espacio cuasimétrico (X,d) es Smyth-completable si y solo si toda sucesión K-Cauchy por la izquierda en (X,d) es una sucesión de Cauchy en (X,d^s).*

Como consecuencia del teorema 4.3.2 sobre la bicompletación secuencial de los espacios cuasiuniformes T_0 con base numerable, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 6.1.11 ([81])**.** *Sean (X,d) un espacio cuasiseudométrico y $\Psi=\Psi_d$, la cuasiuniformidad inducida por d. Si se toman al conjunto $\overline{X}$ y a la cuasiuniformidad $\overline{\Psi}$ tal y como están definidos en la demostración del teorema 4.3.2, entonces las funciones $\overline{d}$ y $\overline{d^s}$ dadas por*
$$\overline{d}\left(\left[(x_n)_n\right],\left[(y_n)_n\right]\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right),$$
$$\overline{d^s}\left(\left[(x_n)_n\right],\left[(y_n)_n\right]\right)=\lim_{n\to\infty}d^s\left(x_n,y_n\right),$$
son respectivamente, una cuasiseudométrica y una seudométrica en $\overline{X}$ que cumplen con
$$\left(\overline{d}\right)^s=\overline{d^s},\quad \overline{\Psi}=\Psi_{\overline{d}}\ \text{ y }\ \left(\Psi_{\overline{d}}\right)^*=\Psi_{\overline{d^s}}.$$

A continuación se presenta una adaptación, dada por Schellekens, del teorema del punto fijo de Banach [22] para el caso particular de la bicompletación secuencial de cuasiuniformidades inducidas por una cuasimétrica.

Teorema 6.1.12 ([81] Teorema de Banach)**.** *Sea f un mapeo de contracción en un espacio cuasimétrico (X,d). Supóngase que Ψ_d es la cuasiuniformidad inducida por d y que $\left(\overline{X},\overline{\Psi_d}\right)$ es la bicompletación secuencial de (X,Ψ_d). Si $\overline{d}$ es la cuasimétrica dada en la proposición 6.1.11, $\left[(x_n)_n\right]$ es un elemento arbitrario de $\overline{X}$ y $\overline{f}$ es la extensión de f construída en la demostración del teorema 4.3.2, entonces $\overline{f}$ es un mapeo de contracción con respecto a $\overline{d}$ y tiene un único punto fijo $\mathrm{Fix}\left(\overline{f}\right)$ dado por*
$$\mathrm{Fix}\left(\overline{f}\right)=\lim_{k\to\infty}\overline{f}^k\left(\left[(x_n)_n\right]\right).$$
En particular, dada una sucesión constante $(x)_n$, se tiene $\mathrm{Fix}\left(\overline{f}\right)=\left[(f^n(x))_n\right]$.

6.2. Ejemplos de espacios cuasimétricos

A continuación presentamos algunos ejemplos de espacios cuasimétricos. Los primeros seis se pueden consultar también en las referencias indicadas. Los demás aparecen sin referencia ya que los obtuvo el autor de manera independiente. Sin embargo, no se afirma aquí que dichos ejemplos sean contribuciones originales, ya que, por motivos de tiempo, no se realizó ninguna búsqueda exhaustiva para verificar esta posibilidad.

Ejemplo 6.2.1 ([72], [75])**.** La cuasimétrica superior en $\mathbb{R}$ es la función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida como $u(x, y) = (y - x) \vee 0$.

Ejemplo 6.2.2 ([56] La línea de Sorgenfrey)**.** El espacio cuasimétrico $(\mathbb{R}, d)$, donde $d = d(x, y)$ es la función definida a continuación, se conoce como la **línea de Sorgenfrey**.

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & si \quad x \leq y. \\ 1 & si \quad x > y. \end{cases}$$

En topología [14], [32], la línea de Sorgenfrey es denotada por la pareja $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología generada por la base $\beta = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Esta topología coincide con aquella asociada a la cuasimétrica d señalada arriba.

Ejemplo 6.2.3 ([75])**.** La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida a continuación es una cuasimétrica en $\mathbb{R}$ que induce una topología más gruesa que la inducida por la cuasimétrica superior definida en el ejemplo 6.2.1.

$$d(x,y) = [(y - x) \vee 0] \wedge 1 = \begin{cases} 1 & si & x + 1 \leq y. \\ y - x & si & x \leq y \leq x + 1. \\ 0 & si & y \leq x. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.4 ([75])**.** La cuasimétrica del ejemplo 6.2.3 se puede extender a $\mathbb{R}^\omega$ de la siguiente forma. Si u es la cuasimétrica superior definida en el ejemplo 6.2.1 y $x, y \in \mathbb{R}^\omega$, se define

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [u\left(x_n, y_n\right) \wedge 1]$$

La topología $\tau(d)$ coincide con la topología del espacio producto $\prod_{n \in \omega} (\mathbb{R}, u)$ [75].

Ejemplo 6.2.5 ([79])**.** Sea $X \subseteq (0, \infty)$, no vacío. La función $d(x, y)$ sobre $X \times X$ definida a continuación también es una cuasimétrica.

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & si \quad x \leq y. \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & si \quad x > y. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.6 ([53] La distancia en los complejos celulares cartesianos)**.** Dado que los complejos celulares cartesianos (ver la definición 4.4.7) están dotados de coordenadas, esto permite definir en ellos una métrica utilizando la misma fórmula con la que se define la distancia Euclideana en $\mathbb{R}^n$.

$$D(u,v) = D\left(\left(u_i\right), \left(v_i\right)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(u_i - v_i\right)^2}$$

Sin embargo, con esta métrica, la mínima distancia positiva en un complejo celular cartesiano es igual a $1/2$ y, por lo tanto, la topología que induce esta métrica en dichos espacios es la topología discreta, no la topología de Alexandrov inducida por la relación de enmarcamiento y que es la que se usa para definir la conexidad en los complejos celulares.

Ejemplo 6.2.7 (La cardinalidad de la diferencia simétrica)**.** Dado un conjunto finito F no vacío, si tomamos $X = \mathcal{P}(F)$, entonces la función $d(A, B) = |B \setminus A|$, definida para todo $A, B \subseteq F$, es una cuasimétrica en X.

Ejemplo 6.2.8 (Una cuasimétrica en $\mathbb{R}$ usando integrales)**.** Sean $u, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y supongamos que u es estrictamente positiva, es decir $\forall x \in \mathbb{R} : u(x) > 0$. La función $q(a, b)$ definida a continuación es una cuasimétrica en $\mathbb{R}$.

$$q(a,b) = \begin{cases} \int_a^b u(f(t))dt \quad si \quad a \leq b. \\ \\ \int_b^a u(-f(t))dt \quad si \quad b < a. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.9 (A partir de una métrica y de una función con valores reales no negativos)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función. La función $q_f(x, y)$ definida a continuación es una cuasimétrica en X.

$$q_f(x,y) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x = y. \\ \\ d(x,y) + f(y) \quad si \quad x \neq y. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.10 (Basado en una función no negativa)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $f : X \to [0, \infty)$ una función. Sean p_f y q_f las funciones dadas por

$$p_f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ f(x) & \text{si} \quad x \neq y, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad q_f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ f(y) & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Se tiene:

- p_f y q_f son cuasiseudométricas conjugadas.
- Si f es estrictamente positiva ($f(x) > 0,\ \forall x \in X$), entonces p_f y q_f son cuasimétricas.

Ejemplo 6.2.11 (Basado en una función positiva y dos números positivos)**.** Sean, X un conjunto no vacío, $f : X \to (0, \infty)$ una función y $r, s > 0$. Esta función $q : X \times X \to \mathbb{R}^+$

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ rf(x) + sf(y) & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

es una cuasimétrica T_1 y, cuando $r = s$, es una métrica.

Ejemplo 6.2.12 (Basado en una función a un espacio cuasimétrico)**.** Sea (C, q) un espacio cuasimétrico. Si X es un conjunto y $f : X \to C$ es una función, se define a la función $s : X \times X \to \mathbb{R}^+$ como

$$s(x, y) = q(f(x), f(y)).$$

En este caso se tiene:

- s es una cuasiseudométrica.
- Si f es inyectiva, s es una cuasimétrica.
- Si q es una métrica, s es una seudométrica.
- Si q es métrica y f es inyectiva, s es una métrica.

Ejemplo 6.2.13 (Basado en un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. La función $q_A(x, y)$ definida a continuación es una cuasimétrica en X.

$$q_A(x,y) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in A \wedge y = x. \\ \\ 1 \quad si \quad x \in A \wedge y \neq x. \\ \\ min\left\{d(x,y),\ 1 + inf_{a \in A} d(x,a)\right\} \quad si \quad x \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.14 (A partir de una familia de espacios cuasimétricos)**.** Sea $\{(X_i, q_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios cuasimétricos tales que $\forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$. Supongamos que en cada espacio de esta familia se ha elegido un punto distinguido $y_i \in X_i$. Se puede construir un espacio X identificando a todos estos puntos y_i en un solo punto. Para tal efecto tomamos un objeto a tal que $a \notin \bigcup_{i \in I} X_i$. Se define

$$X = \{a\} \cup \left[\bigcup_{i \in I} (X_i \setminus \{y_i\}) \right].$$

Ahora se define una cuasimétrica en X, de tal manera que para cualesquiera $u, v \in X$,

$$q(u,v) = \begin{cases} 0 \quad si \quad u = v = a. \\ \\ q_i(u, y_i) \quad si \quad u \in X_i \setminus \{y_i\} \ \wedge \ v = a. \\ \\ q_i(y_i, v) \quad si \quad u = a \ \wedge \ v \in X_i \setminus \{y_i\}. \\ \\ q_i(u, v) \quad si \quad u, v \in X_i \setminus \{y_i\}. \\ \\ q_i(u, y_i) + q_j(y_j, v) \quad si \quad u \in X_i \setminus \{y_i\} \ \wedge \ v \in X_j \setminus \{y_j\}. \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.15 (Basada en una estructura sobre un conjunto finito)**.** Sea X un conjunto finito no vacío y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La función

$$q(x,y) = |\{A \in \mathcal{A} \mid x \in A \ \wedge \ y \notin A\}|$$

es una cuasimétrica en X que toma valores enteros para todos $x, y \in X$.

Ejemplo 6.2.16 (Basada en una familia finita de funciones a un espacio cuasimétrico)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $f = \{f_k\}_{k=1}^n$ una familia finita de funciones, $f_k : X \to (C,d)$, donde (C,d) es un espacio cuasimétrico. La función $d_f : X \times X \to \mathbb{R}^+$ definida como

$$d_f(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\left(f_k(x), f_k(y)\right)$$

es una cuasimétrica sobre X. También se obtiene una cuasimétrica si se quita de la fórmula la fracción unitaria $1/n$ y se toma la suma total en vez del promedio.

Ejemplo 6.2.17 (Basada en una operación binaria en un espacio finito)**.** Como un caso particular del ejemplo anterior, si $* : X \times X \to X$ es una operación binaria definida sobre un espacio cuasimétrico finito (X,d), donde $X = \{x_1, .., x_n\}$, entonces la función definida a continuación también es una cuasimétrica sobre el conjunto X.

$$d_*(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\left(a * x_k, b * x_k\right).$$

Ejemplo 6.2.18 (A partir de un conjunto conectado por las iteraciones de una función)**.** Sea $X \neq \varnothing$ y sea $f : X \to X$ una función. Para cada $x \in X$, sea $S_x = \{f^n(x) \mid n \in \omega\}$. Nótese que x es un punto fijo de f si y solo si $S_x = \{x\}$ y que, para todos $x, y \in X$, se tiene la implicación $y \in S_x \Rightarrow S_y \subseteq S_x$. Es fácil ver que la relación $\leq$ definida por $x \leq y$ si $y \in S_x$ es un preorden. El conjunto preordenado $(X, \leq)$ es un conjunto dirigido si y solo si $S_x \cap S_y \neq \varnothing$ para todos $x, y \in X$. En este ejemplo supondremos que $(X, \leq)$ es un conjunto dirigido. En este caso, si $a \in X$ y S_a es finito, entonces S_x es finito para toda $x \in X$. Dado un punto $x \in X$, le llamamos **punto recurrente** de f si $S_y = S_x$ para toda $y \geq x$. Denotamos por T al conjunto de los puntos recurrentes de f. Se observa que $T = \bigcap_{x \in X} S_x$ y que es un conjunto finito. Además se tiene que, si $x \neq y \in X$ y $S_x = S_y$, entonces $x, y \in T$.

El preorden $\leq$ es un orden parcial si y solo si T es vacío o singular. En este caso se puede definir en X una operación binaria $x \vee y$, un supremo con respecto al preorden $\leq$, de la siguiente forma. Si $x, y, z \in X$, entonces:

- $x \leq y \Rightarrow x \vee y = y$.
- $x \notin S_y$ y $y \notin S_x \Rightarrow x \vee y = z$, cuando

$$\exists m, n \in \mathbb{N} : z = f^m(x) = f^n(y);\;\; f^{m-1}(x) \notin S_y;\;\; f^{n-1}(y) \notin S_x.$$

Usando ahora este supremo, $x \vee y$, se pueden definir una métrica $d(x,y)$ y también una cuasimétrica $q(x,y)$, de la manera siguiente.

$$d(x,y) = m + n \iff f^m(x) = x \vee y = f^n(y).$$

$$q(x,y) = n \iff x \vee y = f^n(y).$$

En el caso en el que $T \neq \varnothing$ se puede definir, para cada punto $x \in X$, su **profundidad**, como $p(x) = \text{mín}\,\{n \in \omega \mid f^n(x) \in T\}$, así como también el punto $t_x = f^{p(x)}(x) \in T$. Cuando T es un conjunto singular, se tiene lo siguiente, para todos $x, y \in X, n \in \omega$:

- $x \leq y = f^n(x) \Rightarrow p(x) = p(y) + n$.
- $d(x,y) = p(x) + p(y) - 2p(x \vee y)$.

En el caso en que $|T| > 1$, dados $x, y \in X$, si $t_x = t_y$, entonces se pueden definir $d(x,y)$ y $q(x,y)$ igual que en el caso $|T| \leq 1$ pero utilizando la restricción de la función f al subconjunto $\{z \in X \mid t_z = t_x\}$. En cambio, si $t_x \neq t_y$, primero hay que definir d y q para los puntos de T. Esto se logra observando que, si $s, t \in T$, existen $m, n \in \omega$ únicos tales que $m = \min\left\{k \in \omega \mid f^k(s) = t\right\}$ y $n = \min\left\{k \in \omega \mid f^k(t) = s\right\}$. Con esto se define $d(s,t) = \min\{m,n\}$ y $q(s,t) = 0$. Para extender d y q a todo X se define, para $t_x \neq t_y$,

$$d(x,y) = p(x) + p(y) + d(t_x, t_y) \quad \text{y} \quad q(x,y) = p(y).$$

Nótese que en el caso en que $|T| > 1$, la función $d(x,y)$ no es una métrica sino una seudométrica y que $q(x,y)$ es una cuasiseudométrica.

6.3. Espacios cuasimétricos pesables

Los conceptos de métrica parcial y de espacio cuasimétrico pesable, los definió Matthews [60] en su estudio topológico de la semántica de redes de flujo de datos, enfocándose en topologías que no son de Hausdorff.

Definición 6.3.1 ([60], [80] Espacios pesables)**.** Si (X,d) es un espacio cuasimétrico:

- (X,d) es **pesable** si existe una función $w : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

  $$\forall x, y \in X : d(x,y) + w(x) = d(y,x) + w(y).$$

  A w se le llama **función de peso** y al valor $w(x)$ se le dice el **peso** de x.
- (X,d) es **copesable** si el espacio cuasimétrico conjugado $(X, \overline{d})$ es pesable.
- (X,d) es **bipesable** si es pesable y copesable.
- (X,d) es **pesable con respecto a un punto** $z \in X$ si la función definida mediante $w(x) = d(z,x)$ es una función de peso en (X,d).

Se utiliza la notación (X,d,w) para referirse a un espacio cuasimétrico pesable con una función de peso w. Si v y w son funciones de peso de la misma cuasimétrica d, su diferencia $v - w$ es constante. Si la función w es una función de peso tanto para la cuasimétrica d como para su conjugada d^{-1}, entonces $d = d^{-1}$ y d es una métrica.

Lema 6.3.1 ([79])**.** *Si (X,d,w) es un espacio cuasimétrico pesable, entonces la función de peso w es decreciente.*

Lema 6.3.2 ([79])**.** *Todo espacio cuasimétrico pesable es convexo con respecto al orden.*

Definición 6.3.2 ([74] ,[79] Espacio pesable superiormente)**.** Un espacio cuasimétrico (X,d) se llama **pesable superiormente** si existe una función de peso $w : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ para d y tal que (X,d) esté acotado por w.

La bicompletación de un espacio cuasimétrico pesable también es un espacio cuasimétrico pesable [66].

El resultado siguiente sobre los espacios cuasimétricos pesables, como se mencionó anteriormente, se debe a Künzi y su consecuencia principal para el tema de este trabajo es que el espacio de complejidad de algoritmos (ver el capítulo 8) es Smyth-completable.

Proposición 6.3.3 ([56])**.** *Dado un espacio cuasimétrico pesable (X, d, w), el espacio cuasiuniforme topológico $(X, \mathcal{U}_d, \tau(\mathcal{U}_d))$ es Smyth-completable.*

Definición 6.3.3 ([60], [80] Métrica parcial)**.** Dado un conjunto $X \neq \varnothing$, una **métrica parcial** en X es una función $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ que satisface, para toda $x, y, z \in X$, las condiciones siguientes:

(i) $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$.

(ii) $p(x, x) \leq p(x, y)$.

(iii) $p(y, x) = p(x, y)$.

(iv) $p(x, z) + p(y, y) \leq p(x, y) + p(y, z)$.

Ejemplo 6.3.1. Sea $X \neq \varnothing$. Si d es una seudométrica en X y $f : X \to \mathbb{R}^+$ es una función, ya sea inyectiva o bien estrictamente positiva, entonces la siguiente función $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ es una métrica parcial en X,

$$p(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x = y, \\ d(x, y) + f(x) + f(y) & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Matthews [60] demostró que hay una correspondencia entre las métricas parciales y los espacios cuasimétricos pesables. De tal manera que, a partir de una métrica parcial, se obtiene una cuasimétrica pesable.

Proposición 6.3.4. *Si p es una métrica parcial en X, entonces p induce una cuasimétrica d en X, así como una función de peso w en (X, d) definiendo, para toda $x, y \in X$:*

- $d(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$.
- $w(x) = p(x, x)$.

Inversamente, a partir de una cuasimétrica pesable, se puede obtener una métrica parcial.

Proposición 6.3.5. *Sea (X, d, w) un espacio cuasimétrico pesable. Definiendo la función $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ como $p(x, y) = d(x, y) + w(x)$ para toda $x, y \in X$, se obtiene una métrica parcial en X.*

6.4. Espacios normados asimétricamente

En años recientes se han realizado muchos trabajos de análisis funcional, cuyo objetivo es extender resultados bien conocidos de la teoría clásica de espacios lineales normados al contexto de espacios lineales normados no simétricos, así como en conos normados asimétricamente [14], [72]. Una presentación de los resultados básicos sobre espacios normados asimétricamente se puede encontrar en [14]. En particular, el dual de un espacio lineal normado asimétricamente ha sido construido y estudiado en [29] y [75]. En la misma referencia una versión asimétrica del Teorema de Alouglu ha sido probada. En [29] y [72] la completación de un espacio normado asimétricamente ha sido explorada. En [40] se introduce un espacio de Banach asimétrico y se utiliza para estudiar problemas de optimización. Una versión asimétrica del teorema sobre la acotación del operador conjugado en espacios normados de dimensión finita puede ser hallada en [75].

Definición 6.4.1 (Norma y sus generalizaciones)**.** Sea X un espacio lineal real. Una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** sobre X si para toda $x, y \in X$ se cumplen:

(1) $p(x) \geq 0$.

(2) $\forall a \in \mathbb{R} : p(ax) = |a|\, p(x)$.

(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

(4) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Una **seminorma** satisface las condiciones (1), (2) y (3), mientras que una **norma asimétrica** cumple con (1), (3) y además con:

(2A) $\forall a \geq 0 : p(ax) = a \cdot p(x)$.

(4A) $[\ p(x) = p(-x) = 0\ ] \Rightarrow x = 0$.

Una **seminorma asimétrica** satisface (1), (2A) y (3).

Si p es una norma asimétrica, el par (X, p) es llamado un **espacio lineal asimétrico**, **espacio no simétrico** o **espacio normado asimétricamente**.

Si p es una seminorma asimétrica, entonces el par (X, p) es llamado un **espacio seminormado asimétricamente**.

Definición 6.4.2 ((Semi)norma asimétrica extendida)**.** En algunas instancias, el valor $+\infty$ podrá permitirse para p, en cuyo caso p será una seminorma (o una norma) asimétrica **extendida**.

Royden [76] les llama seudonormas a las seminormas. Kolmogorov y Fomin [51] le llaman funcionales convexos a las seminormas asimétricas extendidas.

Definición 6.4.3 (La cuasiseudométrica asociada a una seminorma asimétrica)**.** Si p es una seminorma asimétrica sobre X, entonces la función $d_p : X \times X \to \mathbb{R}$ dada como:

$$\forall x, y \in X : d_p(x, y) = p(y - x)$$

es la **cuasiseudométrica asociada** a p.

Si p es una norma asimétrica, entonces d_p es una cuasimétrica. Si p es una seminorma, entonces d_p es una seudométrica. Si p es una norma, entonces d_p es una métrica.

Definición 6.4.4 (La seminorma asimétrica conjugada)**.** Si p es una seminorma asimétrica, su **conjugada**, $\overline{p}$, es la seminorma asimétrica definida como

$$\overline{p}(x) = p(-x),\ x \in X.$$

Definición 6.4.5 (La seminorma asociada a una seminorma asimétrica)**.** Si p es una seminorma asimétrica y $\overline{p}$ es su conjugada, entonces $p^s(x) = \text{máx}\{p(x), \overline{p}(x)\},\ x \in X$, resulta ser una seminorma y se llama la **seminorma asociada** a p.

Claramente las siguientes desigualdades son válidas.

$$p(x) \leq p^s(x) \qquad \text{y} \qquad \overline{p}(x) \leq p^s(x),\ x \in X. \tag{6.2}$$

La seminorma asimétrica p es una norma asimétrica si y solo si p^s es una norma.

En este caso, las desigualdades (6.1) de la sección anterior son consecuencia de las desigualdades (6.2) y además se tiene

$$q_p^s(x, y) = p^s(y - x).$$

Ejemplo 6.4.1. Considérese la norma asimétrica en $\mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = \text{máx}(0, x),\ x \in \mathbb{R}.$$

La cuasimétrica q_p determinada por la norma asimétrica p es la cuasimétrica superior,

$$q_p(x, y) = p(y - x) = \text{máx}(0, y - x) = (y - x) \vee 0.$$

6.4.1. Conos normados asimétricamente

Definición 6.4.6 (Monoide abeliano)**.** Un **monoide** es un semigrupo $(X, +)$ con elemento neutro 0. El monoide se llama **abeliano** cuando la operación $+$ es conmutativa.

Definición 6.4.7 ([72] Cono)**.** Un **cono** sobre $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ es una terna ordenada $(X, +, \cdot)$ en donde $(X, +)$ es un monoide abeliano y $\cdot$ representa una función $\cdot : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ tal que $\forall x, y \in X; r, s \in \mathbb{R}^+$:

i. $r \cdot (s \cdot x) = rs \cdot x$.

ii. $r \cdot (x + y) = (r \cdot x) + (r \cdot y)$.

iii. $(r + s) \cdot x = (r \cdot x) + (s \cdot x)$.

iv. $1 \cdot x = x$.

Definición 6.4.8 (Cono cancelativo)**.** Un cono $(X, +, \cdot)$ se llama **cancelativo** si se cumple que $\forall x, y, z \in X : z + x = z + y \Rightarrow x = y$.

Claramente, todo espacio lineal $(X, +, \cdot)$ se puede considerar como un cono cancelativo si restringimos la operación $\cdot$ del producto por escalares a $\mathbb{R}^+ \times X$.

Definición 6.4.9 (Conos de un espacio lineal)**.** Si A es un subconjunto de un espacio lineal X, se dice que A **es un cono de** X si A forma un cono con las restricciones a A de las operaciones del espacio lineal X.

Los conceptos de **norma en un cono**, **cono normado**, **norma asimétrica en un cono** y **cono normado asimétricamente** se definen utilizando las condiciones correspondientes dadas en la Definición 6.4.1 para espacios lineales.

Definición 6.4.10 (Cono punteado o con vértice)**.** Se dice que un cono B de un espacio lineal X **tiene vértice** o que es un **cono punteado** cuando $B \cap -B = \{0\}$.

Definición 6.4.11 (Función lineal entre conos)**.** Dados dos conos $(X, +, \cdot)$ y $(Y, +, \cdot)$, una **función lineal** entre ellos es una función $f : X \to Y$ tal que $\forall x, y \in X; a, b \in \mathbb{R}^+$ se cumple

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y).$$

Capítulo 7

Algoritmos

7.1. El concepto de algoritmo

Un algoritmo es un procedimiento computacional definido mediante una sucesión finita de instrucciones, cada una de ellas con un significado preciso y que se puede ejecutar con una cantidad finita de esfuerzo en un tiempo finito [1]. Al inicio de su ejecución el algoritmo toma un valor o un conjunto de valores (conocidos como «los valores de entrada») y produce, como resultado de efectuar los pasos indicados en el orden prescrito, otro valor o conjunto de valores conocidos como «los valores de salida» [15]. Un algoritmo debe terminar después de ejecutar un número finito de instrucciones sin importar cuales hayan sido los valores de entrada [1]. Así, un algoritmo es la descripción de un método para que un dispositivo de cómputo pueda resolver un problema, siempre y cuando dicho método se especifique exacta y completamente como una serie finita de pasos discretos en un lenguaje que el dispositivo utilizado pueda interpretar y ejecutar [52]. El algoritmo debe garantizar que el dispositivo se detenga después de efectuar un número finito de pasos, aún cuando el problema no tenga solución. El enunciado del problema debe especificar en términos generales la relación entre los valores de entrada y los valores de salida. El algoritmo describe un procedimiento computacional específico para alcanzar esa relación entre dichos valores [15].

7.2. Problemas computacionales

Aquí nos estamos refiriendo a problemas de cómputo en general. Cuando decimos «el problema» o «un problema» sin especificar otra cosa, nos referimos a problemas que se pueden resolver mediante programas de computadora, por ejemplo:

- Dado un número natural, factorizarlo en factores primos.
- Encontrar las primeras diez mil cifras decimales del número π.
- Encontrar la ruta más corta entre dos vértices en un grafo dirigido [15].
- Encontrar una coloración de los vértices de un grafo arbitrario utilizando el mínimo número de colores posible [31].

- Dada una sucesión finita de matrices $A_1, A_2, ..., A_n$ donde cada matriz A_i tiene dimensiones $p_{i-1} \times p_i$ y donde se requiere evaluar el producto de todas ellas, determinar completamente el orden en el que se deben calcular las multiplicaciones binarias de los productos parciales (respetando el orden dado de las matrices individuales) de manera que se minimice el número total de multiplicaciones escalares que hay que realizar [15].

- Ordenar una lista de palabras en orden alfabético.

- Encontrar un número dentro de una lista de números ordenados en orden creciente, pero no necesariamente consecutivos. Si el número buscado se encuentra en la lista, hay que determinar en qué lugar está. En caso contrario, el resultado a reportar es su ausencia.

- Dado un grafo conexo y no dirigido, con pesos en sus aristas, encontrar un árbol generador de peso mínimo, es decir, un subgrafo conexo y sin ciclos que tenga todos los vértices del grafo original y que la suma de los pesos de sus aristas sea el mínimo posible [15].

- El problema del agente viajero. Un vendedor tiene que visitar un conjunto dado de ciudades. Partiendo de su ciudad de origen, debe visitar cada ciudad una vez y regresar a su punto de partida. El objetivo del problema es encontrar una ruta que minimice la distancia total recorrida por el vendedor.

- El problema de la mochila. Se requiere llenar una mochila que sólo puede soportar un peso máximo fijo. Cada objeto que se puede llevar tiene un peso y un valor determinados. Se debe maximizar el valor total de los objetos cargados en la mochila sin exceder el peso máximo. Este problema tiene aplicaciones reales para las empresas que requieren almacenar o transportar grandes cantidades de productos.

7.3. Análisis de algoritmos y su complejidad

Dado un problema computacional, puede haber varios algoritmos que lo resuelvan, cada uno con sus propios métodos. Por ejemplo, se conocen por lo menos doce algoritmos diferentes para calcular los términos de la sucesión de Fibonacci [17]. Dados dos algoritmos diferentes que resuelven el mismo problema computacional, cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas. Esto nos lleva a la necesidad de establecer comparaciones de eficiencia entre algoritmos.

Analizar un algoritmo significa determinar los recursos que se requieren para su diseño, implementación y ejecución. Los principales puntos que se consideran al comparar dos algoritmos son: el tiempo de ejecución, el espacio de almacenamiento requerido y el grado de dificultad para codificar cada algoritmo en un determinado lenguaje de programación.

Si un algoritmo se va a utilizar solamente una vez o pocas veces, el costo de escribir el código correspondiente en un lenguaje de programación probablemente será mayor al costo de los recursos de cómputo utilizados durante su ejecución. En este caso, la simplicidad del algoritmo será más importante que su velocidad. En cambio, si el algoritmo se va a utilizar muchas veces y va a procesar cada vez una gran cantidad de datos, entonces es preferible usar un algoritmo que resuelva el problema lo más rápidamente posible, aunque sea más difícil de entender y de codificar [1].

La complejidad de un algoritmo es una medida de los recursos de cómputo que se utilizan durante la ejecución del mismo. Principalmente se consideran la complejidad temporal y la complejidad espacial. La complejidad temporal es una estimación del tiempo de ejecución, mientras que la complejidad espacial es una estimación del espacio de memoria requerido para que corra el algoritmo. La complejidad espacial es una suma de dos términos, una parte fija y una parte variable. La parte fija es el espacio de memoria donde se almacena el programa y las variables que usa que no dependan de los valores de entrada. La parte variable es la cantidad de memoria necesaria para almacenar y procesar los datos de entrada y todas las variables que dependan directamente de ellos.

A lo largo del desarrollo de la industria electrónica, el costo del espacio de almacenamiento para la información digital se ha reducido continua y considerablemente, dando como resultado una preponderancia casi total del tema de la complejidad temporal en la ciencia de la computación. En lo sucesivo utilizaremos el término «complejidad» para referirnos implícitamente a la complejidad temporal de un algoritmo.

7.4. El tamaño del problema

Dos factores, que claramente pueden afectar el tiempo de ejecución de un algoritmo cuando está resolviendo un problema computacional dado, tienen que ver con los valores de entrada. El conjunto inicial de datos que toma el algoritmo para su procesamiento puede variar tanto en su tamaño como en la configuración concreta en la que se presenta. La cantidad y el tamaño de los valores de entrada es lo que se conoce como «el tamaño del problema». Ilustramos este concepto con algunos ejemplos.

- Si un algoritmo puede ordenar alfabéticamente una lista de cincuenta palabras, prácticamente sin modificación alguna podrá ordenar una lista de cinco mil palabras. Si la longitud promedio de las palabras en las dos listas es la misma, el algoritmo tardará más ordenando la lista de cinco mil palabras que la de cincuenta palabras.

- El mismo algoritmo que sirve para calcular las primeras cien cifras decimales del número π puede usarse para calcular las primeras diez mil cifras decimales del número π, pero se va a tardar más tiempo calculando diez mil cifras que calculando cien cifras.

- El algoritmo de la aplicación Google Maps que se utiliza para encontrar rutas de tránsito en la ciudad de Coatepec, Ver., es el mismo que se usa para encontrar rutas de tránsito en la Ciudad de México. Sin embargo, el espacio de almacenamiento que se necesita para representar los datos de las calles de la Ciudad de México es mucho mayor que el espacio requerido para representar los datos de las calles de Coatepec.

- Un algoritmo que sirve para calcular la inversa de una matriz de 4x4 puede ser el mismo que se use para calcular la inversa de una matriz de 15x15, pero el número total de operaciones aritméticas requeridas por este algoritmo en el caso de 15x15, es mucho mayor al número de operaciones que se necesitan realizar en el caso de 4x4.

En situaciones semejantes se dice que el problema computacional es el mismo, porque la tarea a realizar es esencialmente la misma. La diferencia reside en el conjunto de datos de entrada, ya sea en la cantidad total de los valores de entrada, o en la combinación del número y tamaño de los mismos. Este concepto es fundamental porque la complejidad de un algoritmo se considera como una función del tamaño del problema que resuelve. En general, algoritmos diferentes tardan tiempos diferentes para resolver el mismo problema, lo que nos lleva a comparar su eficiencia en términos de cuánto tiempo tarda cada uno de ellos para procesar un conjunto de valores de entrada de determinado tamaño n. A menudo nos referimos a este conjunto de valores de entrada diciendo simplemente «una entrada de tamaño n».

7.5. El peor caso, el mejor caso y el caso promedio

El tiempo de corrida de un algoritmo depende no solamente del tamaño total del conjunto de valores de entrada, sino también de la configuración concreta en la que se presentan estos valores en cada instancia de la ejecución del algoritmo. Dicha presentación de los datos iniciales puede afectar de manera significativa el tiempo de ejecución.

Por ejemplo, en el caso de un algoritmo que esté buscando un nombre en una lista larga, si el nombre buscado por casualidad se encuentra al inicio de la lista, el algoritmo terminará más rápido que si ese nombre no se encuentra dentro de la lista o que si se encuentra hasta el final. En este ejemplo nos referimos a la primera situación como «el mejor caso posible» y a la segunda como «el peor caso posible» [1], [15], [31]. En otro ejemplo similar, si una lista de números distintos ya está casi completamente ordenada en orden creciente, un algoritmo de ordenamiento para orden creciente se tardará menos tiempo terminando de ordenar esa lista, que lo que se tardaría si la lista estuviera completamente ordenada en un orden decreciente.

Por esto, dado un algoritmo, es útil preguntarse por la cantidad de operaciones que éste necesita realizar para procesar un conjunto de datos de tamaño n, cuando dichos datos se presentan en la peor configuración posible. También es útil realizar un análisis separado para encontrar el número de operaciones requeridas cuando los valores de entrada se presentan en la mejor configuración posible. El mejor caso posible nos da una cota inferior para el tiempo de ejecución del algoritmo, mientras que el peor caso posible nos da una cota superior.

Para algunos algoritmos también se considera «el caso promedio», es decir las configuraciones típicas de los valores de entrada que se presentan con mayor probabilidad o frecuencia. El «tiempo promedio» o «tiempo esperado» de ejecución de un algoritmo para un problema de tamaño n, se define como el promedio del tiempo de ejecución tomado sobre todas las posibles entradas de tamaño fijo n [31]. El tiempo promedio se determina usando técnicas de análisis de probabilidad. Casi siempre es más difícil determinar el tiempo promedio de ejecución que el del peor caso posible. La razón principal de esta dificultad es que puede no haber criterios claros para definir con precisión lo que significa un conjunto «promedio» de tamaño n de valores de entrada [1], [15]. Además, no todas las entradas del mismo tamaño son igualmente probables. Otro motivo por el que el tiempo promedio solamente se estudia en algunos casos, es que con frecuencia el orden de crecimiento de esta función es el mismo que la del peor caso [15].

Tomando en cuenta lo anterior, cuando hablamos de la complejidad de un algoritmo sin señalar otra cosa, nos referimos a su complejidad temporal para el peor caso posible y consideramos a esta complejidad como una función del tamaño n de la entrada. Con este fin utilizamos la notación $T(n)$.

7.6. Tiempo discreto y máquinas abstractas

Para realizar mediciones objetivas del tiempo real de ejecución de un algoritmo, sería necesario hacerlas empíricamente y a posteriori, es decir después de haber codificado el algoritmo en algún lenguaje de programación en particular. Además habría que correr el programa resultante en un equipo de cómputo específico y con un determinado sistema operativo. Esto introduciría demasiadas variables ajenas al algoritmo. Ese tipo de mediciones empíricas se llevan a cabo pero no para determinar la complejidad de un algoritmo, sino para evaluar el funcionamiento de prototipos concretos de máquinas reales. En dichas mediciones de velocidad se utilizan algoritmos clásicos cuya complejidad teórica ya ha sido establecida desde hace tiempo.

En vez de intentar medir $T(n)$ en unidades de tiempo propiamente dichas, como minutos, segundos o milisegundos, el análisis de algoritmos toma en cuenta, como una estimación aproximada del tiempo, el número total de pasos básicos de cómputo que debe realizar el algoritmo durante su ejecución. Este número de pasos es a lo que se refiere la notación $T(n)$, donde n denota el tamaño de la entrada en una instancia del peor caso posible del problema.

De acuerdo a F. Preparata [69], la idea de definir un sistema formal con un conjunto finito de «operaciones primitivas» y de contar el número total de estas operaciones que es necesario realizar para llevar a cabo un procedimiento específico dentro de ese sistema, se remonta por lo menos a 1902, cuando Emile Lemoine estableció su «Geometrografía» al enumerar las siguientes operaciones primitivas para las construcciones de la geometría Euclideana:

1. Colocar una punta del compás en un punto dado.
2. Colocar una punta del compás sobre una línea recta.
3. Trazar un círculo.
4. Poner la orilla de la regla sobre un punto dado.
5. Trazar una línea recta.

Lemoine se refirió al número total de estas operaciones básicas realizadas durante una construcción geométrica como «la simplicidad» de la construcción, aunque tal vez el término «complejidad» habría sido más apropiado. La solución de Euclides al problema de los Círculos de Apolonio requiere realizar 508 de estos pasos básicos, mientras que Lemoine encontró otra construcción para resolver el mismo problema en menos de 200 pasos.

Para poder contar los pasos básicos que realiza un algoritmo, es necesario definir primero el conjunto de acciones o instrucciones a las que nos referimos como básicas. Estrictamente hablando, se deberían definir con precisión tanto las instrucciones como sus costos. Sin embargo, hacer esto con toda exactitud y de manera formal es tedioso y no brinda mayor claridad en cuanto al funcionamiento del algoritmo ni a su complejidad [15].

No es necesario ni deseable expresar los algoritmos en un lenguaje de máquina. En aras de la claridad, la brevedad y la facilidad de expresión, es mejor utilizar las convenciones de lenguajes de programación de alto nivel tales como Algol, C, Pascal o Java [69]. Los textos sobre el tema de análisis de algoritmos presuponen que el lector ya está familiarizado con al menos un lenguaje de programación y con conceptos fundamentales como el tipo de datos llamado arreglo y las unidades básicas de la memoria como el bit, el byte, y la «palabra» de longitud fija (word).

El análisis de algoritmos tiene entre sus metas principales el ser, hasta donde sea posible, independiente de los lenguajes de programación en los que se puedan codificar los algoritmos, así como de las máquinas concretas en las que se vayan a correr los programa. Para lograr el primer objetivo se utiliza un lenguaje informal conocido como seudocódigo. Por cuanto al segundo objetivo se usan las máquinas abstractas [19], [42].

Las máquinas abstractas, o dispositivos computadores idealizados, son como las computadoras digitales pero sin limitaciones de espacio de memoria [23]. La primera definición de este tipo de dispositivo idealizado se conoce como la máquina de Turing [30], [42] y se publicó en 1936, antes de que existieran las computadoras reales. Aproximadamente al mismo tiempo, Emil Post realizó un trabajo similar al de Turing. En [92], Uspenski explica el funcionamiento de la máquina de Post.

Los algoritmos se formulan con respecto a alguna clase específica de máquinas abstractas. Estas clases se conocen también como modelos de computación y representan una abstracción conveniente de las máquinas físicas. Las máquinas de registros son una familia de máquinas abstractas equivalentes a la máquina de Turing pero con un funcionamiento que se presenta de una forma más parecida al de las computadoras reales. Los principales tipos de máquinas de registros son: las máquinas de conteo de instrucciones, las máquinas de apuntadores, las máquinas RAM y las máquinas RASP [95].

Las siglas RASP son la abreviatura de la expresión en inglés «Random Access, Stored Program» que significa: acceso aleatorio y programa almacenado. Esto se refiere al hecho de que muy al principio los programas no se almacenaban en la memoria, solamente se almacenaban los datos. El programa se implementaba manipulando una serie de interruptores eléctricos o modificando las conexiones del cableado de la máquina.

7.7. Modelo de computación RAM

Las siglas RAM son una abreviatura de la expresión en inglés «Random Access Machine», que significa máquina de acceso aleatorio. Esto se refiere a la forma en que la unidad de procesamiento central puede tener acceso al contenido de la memoria. Durante varios años la memoria principal de las computadoras se implementó mediante cintas magnéticas enrolladas en cilindros que un motor tenía que hacer girar hasta que un segmento de la cinta quedara alineado con las llamadas «cabezas» de lectura y escritura y éstas pudieran leer o modificar la información de ese segmento específico de la cinta. Ese tipo de memoria se conocía como «de acceso secuencial» y era muy lenta. Además, el acceso secuencial a la memoria afectaba el tiempo de corrida de los programas dependiendo de las posiciones de la cinta magnética en donde estuvieran almacenados los datos. Esto era un factor a tomar en cuenta para la complejidad de los algoritmos y el efecto crecía significativamente mientras más datos tuviera que procesar el algoritmo. Esta situación cambió drásticamente cuando se inventaron los tambores de discos magnéticos para sustituir a las cintas. Los discos eran mucho más rápidos que las cintas y además la forma en que las cabezas de lectura y escritura se pueden desplazar sobre la superficie de los discos hizo posible alcanzar cualquier localidad de memoria en un tiempo prácticamente constante. El modelo de computación RAM es el que se utiliza más ampliamente en el análisis de algoritmos.

Cada modelo de cómputo es una simplificación del funcionamiento de las máquinas reales. Al trabajar con el modelo RAM se hacen las suposiciones siguientes [15]:

- El programa no está almacenado en la memoria principal y por lo tanto no puede modificarse a sí mismo, es un programa fijo.
- La máquina cuenta con un sólo procesador genérico. No hay procesamiento en paralelo. Esto implica que las instrucciones se ejecutan secuencialmente, una a la vez.
- La memoria principal se puede considerar como un arreglo.
- Hay un arreglo de registros separado de la memoria principal.
- El acceso a la memoria principal es indirecto, usando los valores almacenados en el arreglo de registros como apuntadores, es decir interpretándolos como direcciones de celdas de memoria.
- No se considera ningún tipo de estructura para la optimización del manejo de memoria, tales como jerarquías de memoria, área de almacenamiento temporal, memoria dinámica o memorias virtuales.
- Todas las operaciones de acceso a la memoria tardan la misma cantidad constante de tiempo.
- Los tipos de datos básicos son: de número entero y de número decimal.
- Todas las celdas de memoria tienen la misma capacidad de almacenamiento.
- La capacidad de cada celda se considera lo suficientemente grande para poder almacenar a cualquier elemento individual de los valores de entrada.
- Hay una instrucción especial «malloc» (memory allocation) que se utiliza para agregar una celda adicional al arreglo de memoria en caso necesario. De esta forma la memoria se puede considerar teóricamente como ilimitada.
- El conjunto de instrucciones incluye aquellas que se utilizan comunmente en las computadoras reales, como instrucciones aritméticas, asignaciones, comparaciones, instrucciones para el movimiento de datos entre la memoria y el arreglo de registros, operaciones de bits en las palabras de los registros, instrucciones de control como los ciclos, las condicionales, la transferencia incondicional de control, las llamadas a subrutinas y la instrucción de paro para detener la ejecución del programa.
- Cada instrucción básica se ejecuta en un intervalo constante de tiempo.
- Los ciclos y las subrutinas no son operaciones básicas, sino que tienen su propia complejidad que se debe de analizar separadamente para después incorporarla a la complejidad total del algoritmo en la forma correcta. Las llamadas a las subrutinas y las pruebas booleanas de los ciclos sí se llevan a cabo en tiempos constantes.

7.8. Seudocódigo

Por lo general, escribir un algoritmo es un proceso que avanza por etapas, cada una de ellas con un nivel de formalización mayor que la anterior, hasta llegar a un programa que se pueda codificar en algún lenguaje de programación [1]. Este proceso de refinamiento paulatino empieza con una descripción del algoritmo que puede ser bastante informal. Para poder expresar el algoritmo lo más claramente posible en todas estas etapas con un grado creciente de formalidad, se utiliza un seudolenguaje, también conocido como seudocódigo.

El seudocódigo es una combinación de las construcciones formales de los lenguajes de programación de alto nivel, con frases y enunciados informales de algún lenguaje natural como el español. La diferencia principal entre el seudocódigo y los códigos formales de los lenguajes de programación, es que en el seudocódigo se utilizan las formas de expresión más claras y concisas posibles (no necesariamente las más formales) para especificar los pasos del algoritmo [15]. A veces el medio de expresión más claro es el lenguaje natural. Por eso en el seudocódigo aparecen frases y oraciones del idioma español dentro de las instrucciones formales de los lenguajes de programación. En los ejemplos de algoritmos que presentamos aquí utilizando seudocódigo, por lo general consideramos las siguientes convenciones:

- Siguiendo la convención de las primeras versiones del lenguaje FORTRAN, utilizamos números de línea. Es decir, cada línea del seudocódigo empieza con un número que la distingue de las otras líneas en una sucesión creciente.

- Se utilizan letras negritas para escribir las palabras clave de los lenguajes de programación.

- Las palabras clave como **while**, **for**, **repeat**, **do-until** e **if-then-else**, se usan aquí de acuerdo al uso común que tienen en varios lenguajes de programación.

- Siguiendo el estilo del lenguaje Java, las condiciones booleanas que activan a las instrucciones condicionales y las que controlan la iteración de los ciclos las ponemos entre paréntesis después de la palabra clave correspondiente.

- Se utilizan palabras en letras mayúsculas para escribir los nombres de los tipos de datos abstractos que utilice el algoritmo. Esto lo aplicamos a variables que no sean de tipo booleano, numérico, de caracter, apuntadores, arreglos ni cadenas de caracteres.

- La asignación de valores a variables la indicamos con el símbolo $\leftarrow$ con la variable del lado izquierdo y el valor asignado (que puede estar guardado en otra variable) del lado derecho. Una instrucción de asignación múltiple como $a \leftarrow b \leftarrow 5$ se ejecuta de derecha a izquierda.

- Cuando una condición booleana lleve disyunciones o conjunciones, las indicamos simplemente con las palabras «o» e «y», o bien con los símbolos $\vee$ y $\wedge$ del álgebra booleana, respectivamente.

- Los comentarios son líneas de texto que no forman parte del algoritmo, sino que son observaciones breves que se añaden por claridad. En la ejecución de los programas se ignoran los comentarios. Aquí los indicamos con una doble barra diagonal, //, que es el símbolo que se usa en Java.

- La estructura de anidamiento de bloques se indica mediante la indentación de las líneas correspondientes del programa. Algunos autores [15], siguen al lenguaje Phyton en su convención de utilizar únicamente la indentación como indicio del anidamiento. En cambio otros autores [1], siguen la convención de lenguajes como Algol y Pascal, que utilizan las palabras clave **Begin** y **End** al principio y al final de cada bloque. Aquí usamos la indentación y además seguimos el estilo de Java de utilizar los paréntesis de conjunto en vez de las palabras clave **Begin** y **End**. Es más, inmediatamente después del caracter } al final de cada bloque, escribimos entre paréntesis normales el número de línea donde inicia el bloque que se acaba de cerrar.
- A diferencia de la mayoría de los lenguajes de programación, aquí no usamos ningún símbolo como el punto y coma para indicar el final de una instrucción individual. No ponemos más de una instrucción en cada línea, de modo que el final de la línea o el símbolo de comentario indican el final de la instrucción.

El primer ejemplo que mostramos aparece en [1] y se relaciona con el problema de encontrar una coloración admisible para los vértices de un grafo dado G. En este ejemplo no aparece la totalidad del algoritmo sino únicamente su procedimiento principal (llamado *ávido*). El algoritmo consiste en llamar repetidamente al procedimiento *ávido* hasta que todos los vértices del grafo G hayan sido coloreados.

Ejemplo 7.8.1 ([1] Encuentra una coloración para los vértices de un grafo)**.**

```
 1) Procedure ávido(var G: GRAFO, var color-nuevo: CONJUNTO){
 2) // El procedimiento ávido le asigna a color-nuevo un subconjunto de vértices de G
 3) // aún no coloreados a los que se les puede dar el mismo color.
 4)         color-nuevo ← ∅
 5)         for(cada vértice v de G aún no coloreado){
 6)                 if(v no es adyacente a ningún vértice de color-nuevo){
 7)                         marca a v como coloreado
 8)                         coloca a v dentro de color-nuevo
 9)                 } (6)
10)         } (5)
11) } (1)
```

Este ejemplo muestra al algoritmo en una de las primeras etapas de su proceso de formalización, ya que el seudocódigo tiene expresiones informales en casi todas sus líneas. En la asignación de la línea 4 aparece el símbolo matemático $\varnothing$, que no forma parte de un lenguaje de programación. Las condiciones booleanas del **for** en la línea 5 y del **if** en la línea 6 son frases informales, así como las instrucciones de las líneas 7 y 8. Para que este algoritmo quede codificado como un programa real, se necesita sustituir esas frases informales con las instrucciones formales correspondientes que concuerden con los detalles de una implementación precisa de los tipos de datos abstractos GRAFO y CONJUNTO.

7.9. El algoritmo de ordenamiento por inserción

El ejemplo siguiente está tomado de [15] y es un algoritmo de ordenamiento conocido como ordenamiento «por inserción». Este algoritmo toma como entrada un arreglo y ordena sus elementos en un orden no decreciente. Todos los elementos del arreglo deben ser del mismo tipo. Por ejemplo, caracteres, cadenas de caracteres o bien valores numéricos, para poderlos comparar por parejas de acuerdo a un orden dado, ya sea numérico o alfabético. El arreglo puede tener elementos repetidos. En este seudocódigo, el nombre del arreglo es A y su longitud es de n elementos, indexados desde 1 hasta n. Claramente se trata de un problema y de un algoritmo muy diferentes a los del ejemplo anterior. Sin embargo, se puede observar que este seudocódigo no tiene frases informales y por lo tanto ya está suficientemente formalizado para poderse traducir fácilmente a un lenguaje de programación real.

Ejemplo 7.9.1 ([15] Ordenamiento creciente por inserción)**.**

1) **for**$(2 \leq j \leq n)\{$

2) $\quad$ $\textit{tarjeta} \leftarrow A[j]$

3) $\quad$ // Insertar $A[j]$ en la sucesión creciente $A[1], \ldots, A[j-1]$

4) $\quad$ $i \leftarrow j - 1$

5) $\quad$ **while**$(i > 0 \;\wedge\; A[i] > \textit{tarjeta})\{$

6) $\qquad$ $A[i+1] \leftarrow A[i]$

7) $\qquad$ $i \leftarrow i - 1$

8) $\quad$ $\}$ (5)

9) $\quad$ $A[i+1] \leftarrow \textit{tarjeta}$

10) $\}$ (1)

7.9.1. Verificación de corrección e invariantes de ciclo

Antes de calcular la complejidad de este algoritmo vamos a comprobar que funciona correctamente. En el análisis de algoritmos, la verificación de confiabilidad de los mismos es relevante ya que no importa qué tan rápido trabaje un algoritmo si no resuelve el problema que debe de resolver.

Uno de los conceptos principales que se usan para comprobar si un algoritmo funciona correctamente, se conoce como «las invariantes de un ciclo». La mayoría de los algoritmos incluyen ciclos. Los ciclos son segmentos de instrucciones consecutivas que se repiten una y otra vez hasta que alguna condición dada se cumpla o deje de cumplirse, dependiento de la sintaxis específica de la instrucción de ciclo de que se trate. Para poder asegurar que el algoritmo produce la relación deseada entre los valores de entrada y los de salida, es útil identificar, para cada ciclo del algoritmo, alguna propiedad o conjunto de propiedades de los datos, que sean válidas al momento de iniciarse el ciclo y que mantengan su validez durante la ejecución del mismo. Dichas propiedades, si es que las hay, son las invariantes del ciclo en cuestión.

Por ejemplo, la invariante del ciclo **for** de la línea 1 consiste en el hecho de que la sucesión finita $A[1], \ldots, A[j-1]$ es creciente. Al inicio del ciclo tenemos $j = 2$ y por lo tanto $j-1 = 1$, así que en este punto la sucesión consta de un solo término y está ordenada en orden creciente trivialmente.

Cada iteración del ciclo **for** empieza colocando el valor $A[j]$ en la variable *tarjeta* y el valor del índice $j-1$ en la variable i. Acto seguido el ciclo **while** de la línea 5 se encarga de ir comparando el valor de *tarjeta* con el valor $A[i]$ en forma descendente. Si $A[i] > tarjeta$, entonces recorre un lugar hacia la derecha a $A[i]$, colocándolo en el lugar $i+1$ del arreglo y decrementa i en una unidad. En cuanto se encuentra el primer caso en el que $A[i] \leq tarjeta$, o bien el índice i llega a cero, se termina el ciclo **while** y el valor guardado en *tarjeta* se coloca en el lugar $i+1$ del arreglo.

Esto garantiza que al finalizar el ciclo **while** la sucesión finita $A[1], \ldots, A[j]$ está en orden creciente, puesto que la subsucesión $A[1], \ldots, A[j-1]$ ya estaba en orden creciente pero el valor que antes estaba en el lugar j, ahora está en donde le corresponde de acuerdo al orden, es decir en el lugar $i+1$, relativo al último valor que tomó la variable i dentro del ciclo **while**. Al terminar el ciclo **while** todos los valores menores o iguales que el $A[j]$ inicial siguen estando en sus mismos lugares. En cambio, todos los valores estrictamente mayores que el $A[j]$ inicial se recorrieron cada uno un lugar hacia la derecha.

Como el último valor que toma j dentro del ciclo **for** es n, esto implica que al terminar ese ciclo ya toda la sucesión finita $A[1], \ldots, A[n]$ está en orden creciente. De esta manera concluimos que el funcionamiento del algoritmo es correcto.

7.9.2. La complejidad del ordenamiento por inserción

Como se mencionó anteriormente, $T(n)$, la función de complejidad de un algoritmo es una estimación aproximada del tiempo que tarda el mismo en ejecutarse. Esta estimación está basada en el número de pasos elementales que realiza el algoritmo dentro del modelo de computación RAM. La tabla siguiente muestra las instrucciones del algoritmo de ordenamiento por inserción [15]. La primera columna muestra los números de linea. Se omiten las líneas 8 y 10 del seudocódigo ya que solamente indican el final de los ciclos **while** y **for** respectivamente y por lo tanto en realidad no son instrucciones. La tercera columna muestra el «costo temporal» de cada instrucción, indicado por la constante c_i, que representa el número de pasos básicos que se realizan cada vez que se ejecuta esa instrucción. Como los comentarios no se ejecutan, su costo temporal es cero. Por último, en la cuarta columna aparece el número de veces que se ejecuta cada instrucción durante la corrida del algoritmo. Para cada valor de j entre 2 y n, la variable v_j indica el número de veces que se ejecuta el ciclo **while** de la línea 5 para ese valor particular de j.

Línea	Instrucción	Costo	Número de veces
1	**for**$(2 \leq j \leq n)\{$	c_1	n
2	$\quad$ *tarjeta* $\leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
3	$\quad$ // comentario	0	$n-1$
4	$\quad$ $i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
5	$\quad$ **while**$(i > 0 \ \wedge \ A[i] > \mathit{tarjeta})\{$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} v_j$
6	$\quad\quad A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (v_j - 1)$
7	$\quad\quad i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (v_j - 1)$
9	$\quad A[i+1] \leftarrow \mathit{tarjeta}$	c_9	$n-1$

Nótese que cuando un ciclo termina normalmente, es decir a causa de la prueba de la condición booleana que especifica su encabezado, esa prueba se está realizando una vez más que las instrucciones contenidas propiamente dentro del ciclo.

La complejidad del algoritmo es una suma de productos. Cada instrucción contribuye al total con un sumando que es el producto de su costo temporal multiplicado por el número de veces que la instrucción se ejecuta. De esta manera tenemos el cálculo siguiente.

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{2}^{n} v_j + c_6 \sum_{2}^{n} (v_j - 1) + c_7 \sum_{2}^{n} (v_j - 1) + c_9(n-1).$$

Para este algoritmo, el mejor caso posible ocurre cuando el arreglo de la entrada ya está ordenado de forma creciente. En este caso, cada vez que se realiza la prueba boolena del ciclo **while**, se verifica la desigualdad $A[i] \leq tarjeta$. Esto implica que $v_j = 1$ independientemente del valor de j y por lo tanto

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_9(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_9)\, n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_9)\,. \end{aligned}$$

Esto significa que la complejidad del mejor caso posible de este algoritmo es una función lineal del tamaño de la entrada.

El peor caso posible sucede cuando el arreglo original está completamente ordenado en orden decreciente. En este caso, en cada iteración del ciclo **for**, el valor de $A[j]$ se debe de comparar con todos los elementos desde $A[1]$ hasta $A[j-1]$. Por tanto $v_j = j$ y se tiene

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) + \\ &\quad + c_6 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + c_7 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + c_9(n-1) \\ &= \left(\frac{c_5 + c_6 + c_7}{2} \right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5 - c_6 - c_7}{2} + c_9 \right) n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_9)\,. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la complejidad del peor caso posible para el algoritmo de ordenamiento por inserción es una función cuadrática de n.

7.10. Complejidad asintótica

Por lo general, los problemas de cómputo pueden presentarse en instancias de tamaño muy grande, teóricamente ilimitado. En la práctica es de gran interés estudiar las funciones de complejidad para valores de n muy grandes [35]. Esto nos lleva a considerar la eficiencia asintótica de los algoritmos, es decir, el comportamiento de la función de complejidad $T(n)$ cuando $n \to \infty$. En el análisis asintótico de la complejidad, lo más importante es el orden de crecimiento de las funciones. Esto significa que, dadas dos funciones $f(n)$ y $g(n)$, hay que considerar qué tan rápido crece cada una de ellas relativamente a la otra cuando el valor de n se hace arbitrariamente grande.

Para ilustrar la importancia del enfoque asintótico, supongamos que tenemos una computadora capaz de realizar 10^4 pasos básicos por segundo. Asimismo, supongamos que en esta computadora se pueden ejecutar tres algoritmos diferentes que ordenan los registros de una base de datos. Uno de ellos tiene una complejidad exponencial de 2^n, otro tiene una complejidad cúbica de n^3 y la complejidad del tercero es cuadrática igual a n^2. La tabla siguiente muestra cuánto tiempo tardaría cada algoritmo para procesar una entrada de tamaño n.

n	$T(n) = n^2$	$T(n) = n^3$	$T(n) = 2^n$
10	0.01 segundos	0.1 segundos	0.1 segundos
20	0.04 segundos	0.8 segundos	1.7 minutos
30	0.09 segundos	2.7 segundos	1.2 días
40	0.16 segundos	6.4 segundos	3.5 años
50	0.25 segundos	12.5 segundos	3.6 milenios
60	0.36 segundos	21.6 segundos	3.7 millones de años
70	0.49 segundos	34.3 segundos	3,743.6 millones de años
80	0.64 segundos	51.2 segundos	3.8 billones de años
90	0.81 segundos	1.2 minutos	3,925.5 billones de años
100	1 segundo	1.7 minutos	4,019,693.7 billones de años

En esta tabla se puede apreciar claramente el efecto cada vez mayor que tiene el tamaño de la entrada en el tiempo de corrida de los algoritmos con base en el orden de crecimiento de su función de complejidad. Estrictamente hablando, los valores de $T(n)$ son números enteros positivos, ya que representan el número de pasos básicos que realiza un algoritmo durante su ejecución. Sin embargo, hay otras definiciones más generales de medidas de complejidad y algunas de estas medidas abstractas pueden tomar valores no necesariamente enteros. Por otro lado, con el propósito de poder utilizar en el análisis asintótico de la complejidad todas las herramientas del álgebra de funciones, incluyendo las propiedades de las funciones logarítmicas, se trabaja con funciones asintóticamente positivas y de valores reales.

Definición 7.10.1 (Funciones reales asintóticamente positivas)**.**

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : f(n) > 0\}$$

Definición 7.10.2 (Notación O)**.** Si $g \in \mathcal{A}$, entonces

$$O(g) = \{f \in \mathcal{A} \mid \exists c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 < f(n) \leq c \cdot g(n)\}.$$

En la notación O (**O mayúscula**), la función g es una cota superior asintótica para las funciones $f \in O(g)$. A partir de cierto punto n_0, los valores de $f(n)$ no superan a un múltiplo constante de $g(n)$. Por ejemplo, la complejidad del peor caso posible del ordenamiento por inserción es $O(n^2)$. Abusando de la notación, a veces se escribe $f(n) = O(g(n))$ en vez de $f \in O(g)$. Se dice que f es de un orden menor o igual al orden de g. Si f es una función constante, entonces $f \in O(1)$. Como la notación O indica una cota superior, cuando esa cota se aplica al tiempo de corrida del peor caso de un algoritmo, automáticamente se aplica también para cualquier caso de la configuración de los datos de entrada [15]. Esto implica que la complejidad del algoritmo de ordenamiento por inserción es $O(n^2)$.

Definición 7.10.3 (Notación Ω)**.** Si $g \in \mathcal{A}$, entonces

$$\Omega(g) = \{f \in \mathcal{A} \mid \exists c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 < c \cdot g(n) \leq f(n)\}.$$

En la notación Ω (**Omega mayúscula**), la función g es una cota inferior asintótica para las funciones $f \in \Omega(g)$. A partir de algún punto n_0, los valores de $f(n)$ no caen por debajo de un múltiplo constante de $g(n)$. Dada una función $f \in \mathcal{A}$, si $f \notin \Omega(1)$, esto es equivalente a decir que $f(n)$ tiene una subsucesión que tiende a cero. Como la notación Ω indica una cota inferior, si dicha cota se aplica al tiempo de corrida del mejor caso posible de un algoritmo, entonces también se aplica para cualquier otro caso de la configuración de los datos de entrada. Como ejemplo particular, la complejidad del algoritmo de ordenamiento por inserción es $\Omega(n)$, además de ser también $O(n^2)$. Las notaciones O y Ω están relacionadas mediante la siguiente propiedad: $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$.

Definición 7.10.4 (Notación Θ)**.** Si $g \in \mathcal{A}$, entonces

$$\Theta(g) = \{f \in \mathcal{A} \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 < c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}.$$

En la notación Θ (**Zeta**), la función g da una cota asintótica justa (también llamada exacta) para las funciones $f \in \Theta(g)$ ya que estas funciones quedan acotadas tanto superior como inferiormente por múltiplos constantes de la función g. En otras palabras, a la derecha de n_0, la gráfica de $f(n)$ queda arriba de $c_1 g(n)$ y abajo de $c_2 g(n)$ Por ejemplo, cualquier función constante pertenece a $\Theta(1)$. Si la función $f(n)$ es un polinomio de grado k, entonces $f(n) \in \Theta(n^k)$. Con esta notación también se acostumbra escribir $f(n) = \Theta(g(n))$ en vez de $f \in \Theta(g)$. Este uso se extiende incluso a expresiones como: $5n^2 + 3n + 1 = 5n^2 + \Theta(n)$.

Teorema 7.10.1. *[15]* $\forall g \in \mathcal{A} : \Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$.

Corolario 7.10.2. $\forall f \in \Theta(g) : f \in O(g)$ y $f \in \Omega(g)$

Si g es una cota superior asintótica de f, es decir que $f \in O(g)$, puede ser que g sea una cota exacta (en caso de que $f \in \Theta(g)$), o puede ser que no lo sea (si $f \notin \Theta(g)$). La siguiente notación define una clase de funciones para las que g es una cota superior asintótica pero que no es exacta.

Definición 7.10.5 (Notación o)**.** Si $g \in \mathcal{A}$, entonces

$$o(g) = \{f \in \mathcal{A} \mid \forall c > 0 : \exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 < f(n) < c \cdot g(n)\}.$$

En este caso se dice que f es «asintóticamente menor» que g. La definición de la notación o (**o minúscula**) se parece a la de la notación O pero hay una diferencia importante que radica en el cuantificador del factor constante $c > 0$. Si $f \in O(g)$, la desigualdad $f(n) \leq c \cdot g(n)$ se debe cumplir a partir de algún punto n_0 para *alguna* constante $c > 0$. En cambio, si $f \in o(g)$, para *toda* constante $c > 0$ se cumple la desigualdad $f(n) < c \cdot g(n)$ a partir de algún punto n_0 (que depende de c). Por ejemplo, tomando $c = 1$ y $n_0 = 3$, se comprueba que $3n = O(n^2)$. Sin embargo, $3n^2 \neq o(n^2)$ ya que (tomando, digamos $c = 2$) no hay ningún valor $n > 0$ para el que se cumpla $3n^2 < 2n^2$. Similarmente a los casos anteriores, aquí también es común abusar de la notación escribiendo $f(n) = o(g(n))$ en lugar de $f \in o(g)$. Nótese que $o(g) \subseteq O(g) \setminus \Omega(g)$. En la notación o, el valor de $f(n)$ se vuelve cada vez más insignificante comparado con $g(n)$ al crecer la n [15]. Es decir que

$$f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Definición 7.10.6 (Notación ω)**.** Si $g \in \mathcal{A}$, entonces

$$\omega(g) = \{f \in \mathcal{A} \mid \forall c > 0 : \exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 < c \cdot g(n) < f(n)\}.$$

En este caso se dice que f es «asintóticamente mayor» a g. La notación ω (**omega minúscula**) indica una cota inferior asintótica que no es exacta. Por ejemplo, $3n^2 = \omega(n)$ pero $3n^2 \neq \omega(n^2)$. Similarmente al caso de las notaciones O y Ω, hay una relación estrecha entre la notación o y la notación ω ya que $f \in \omega(g) \Leftrightarrow g \in o(f)$. Además se cumple lo siguiente

$$f \in \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Proposición 7.10.3. *[15] Para cualesquiera $f, g, h \in \mathcal{A}$ se tiene:*

- $f \in \Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$.
- $f \notin o(f)$ y $f \notin \omega(f)$.
- $[\ f \in O(g)$ y $g \in O(h)\ ] \Rightarrow f \in O(h)$.
- $[\ f \in \Omega(g)$ y $g \in \Omega(h)\ ] \Rightarrow f \in \Omega(h)$.
- $[\ f \in o(g)$ y $g \in o(h)\ ] \Rightarrow f \in o(h)$.
- $[\ f \in \omega(g)$ y $g \in \omega(h)\ ] \Rightarrow f \in \omega(h)$.

7.11. Algoritmos del tipo «divide y vencerás»

Los algoritmos del tipo conocido como «divide y vencerás» tienen una estrategia que consiste en dividir el problema en subproblemas de menor tamaño y resolverlos de forma separada. El objetivo de esta reducción es que los subproblemas en los que se divide el problema original sean suficientemente simples para ser resueltos de forma sencilla, y posteriormente obtener la solución total del problema combinando las soluciones parciales. Esta es la estrategia que siguen los algoritmos recursivos: el problema se va reduciendo sucesivamente hasta llegar al caso base cuya solución es conocida, y a partir de allí se construye la solución del problema total. Un ejemplo de este tipo de algoritmos es la búsqueda binaria: la lista de búsqueda se va reduciendo sucesivamente a la mitad hasta obtener una lista de un sólo elemento.

7.12. Algoritmos voraces

Los llamados algoritmos voraces se utilizan en problemas de optimización, entre otros. Por ejemplo: la busqueda de una ruta más corta entre ciudades, determinar una forma de codificar mensajes usando el menor número de bits posibles. Sorprendentemente, por lo general una técnica muy simple conduce a menudo a una solución óptima del problema. Esta técnica hace la mejor elección posible en cada paso, en vez de considerar toda una secuencia global de pasos que podría conducir a una solución óptima. Una vez conocida la solución proporcionada por un algoritmo voraz, se determina si ésta es óptima, con base en una estructura de matroide [9]. El esquema de un algoritmo voraz forma parte de una familia de algoritmos mucho más amplia denominada «algoritmos de búsqueda local» de la que también forman parte, por ejemplo, el método del gradiente, los algoritmos Hill-Climbing y los algoritmos genéticos.

El procedimiento que siguen los algoritmos voraces [1], [15] puede resumirse como sigue:

1. Para resolver un problema dado, un algoritmo voraz tratará de tomar el conjunto de decisiones (escoger entre el conjunto de candidatos) que, cumpliendo las restricciones del problema, conduzca a la solución óptima.

2. Para ello trabajará por etapas, tomando en cada una de ellas la decisión que le parezca mejor en ese momento, sin considerar las consecuencias futuras.

3. De acuerdo a esta estrategia, tomará la decisión de escoger al candidato que produzca un óptimo local en cada etapa, suponiendo que ello conducirá, a su vez, a un óptimo global para el problema.

4. Antes de tomar una decisión, el algoritmo voraz comprobará si es prometedora. En caso afirmativo, la decisión se ejecuta (es decir, se da un nuevo paso hacia la solución) sin posibilidad de retroceder; en caso negativo, la decisión será descartada para siempre.

5. Cada vez que se toma una nueva decisión, el algoritmo voraz comprobará si la solución construida hasta ese punto cumple las restricciones.

Capítulo 8

Espacios de complejidad

El espacio cuasimétrico $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ de funciones de complejidad tiene sus orígenes tanto en las ciencias de la computación como en la topología. Scott [83] y Strachey [84] iniciaron el estudio de la semántica denotacional y de la teoría de dominios con el objetivo de crear una teoría formal de los lenguajes de programación y para desarrollar modelos matemáticos de los mismos. La completación de órdenes parciales juega un papel importante en la teoría de dominios. Algunos autores, por ejemplo Nachbin [65], han estudiado las conexiones entre la topología y la teoría de los espacios ordenados. Smyth [85] introdujo el concepto de *espacio cuasiuniforme topológico* (una categoría que extiende a la de los espacios cuasiuniformes) y utilizó dichos espacios para desarrollar una completación de los espacios cuasiuniformes, basándose también en los *espacios sintopológicos* de Császár [16]. Según Schellekens [82], «la completación de Smyth nos permite desarrollar completaciones en el campo de la Semántica Denotacional de una forma verdaderamente topológica». Sünderhauf [90] presentó una construcción de la completación de Smyth que utiliza espacios cuasiuniformes topológicos pero sin usar espacios sintopológicos. Künzi [56] caracterizó, para los espacios cuasiuniformes, la propiedad de ser o no Smyth-completables en términos de filtros K-Cauchy por la izquierda. También probó que si (X, d, w) es un espacio cuasimétrico pesable, entonces el espacio cuasiuniforme topológico $(X, \mathcal{U}_d, \tau(\mathcal{U}_d))$ es Smyth-completable (proposición 6.3.3). Dentro del contexto de esta corriente de investigación, Schellekens [81] definió la distancia de complejidad (que es una cuasimétrica pesable) como una forma de medir el progreso relativo en reducir la complejidad de los programas, ya sea mediante transformaciones sintácticas o al sustituir un programa por otro.

8.1. El espacio de complejidad $\mathcal{C}$

En 1995, Schellekens [81] introdujo el espacio de complejidad, conformado por el conjunto de funciones de complejidad de algoritmos y dotado de una función de distancia asimétrica entre dichas funciones, con la intención de dar un sustento topológico al análisis de complejidad. Usando la notación $\omega = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$, se define el espacio de complejidad como la pareja ordenada $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, donde

$$\mathcal{C} = \left\{ f : \omega \longrightarrow (0, \infty] \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty \right\},$$

y $d_{\mathcal{C}}$ es la cuasimétrica sobre $\mathcal{C}$ dada por

$$d_{\mathcal{C}}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right],$$

para cada $f, g \in \mathcal{C}$, con la convención de que $\frac{1}{\infty} = 0$. El símbolo $\vee$ denota la operación binaria del máximo entre dos números reales.

La cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ es pesable, con la función de peso definida para cada $f \in \mathcal{C}$ como

$$w_{\mathcal{C}}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}.$$

Siendo un espacio cuasimétrico pesable, $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ es Smyth-completable (6.3.3). En [81], Schellekens explica que la definición dada arriba para la cuasimétrica d_C, está motivada por el siguiente argumento heurístico. Si P y Q son dos algoritmos, P con función de complejidad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ y Q con función de complejidad $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, entonces para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ se podría usar la diferencia $f(n) - g(n)$ para cuantificar el beneficio obtenido (en términos de reducción de complejidad) al remplazar el algoritmo P por el algoritmo Q. Si en vez de simplemente utilizar esa diferencia, la remplazamos por el cociente $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)}$, obtenemos una medida de progreso relativo al algoritmo inicial P. Sin embargo, si $f(n)$ toma un valor muy grande comparado con el valor de $g(n)$, esta última expresión tiende a 1, pues $1 - \frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 1$ cuando $\frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 0$. Dado que se busca poder distinguir el nivel de beneficio para distintos valores de $g(n)$ (aún cuando se tengan valores de $f(n)$ muy grandes), se reemplaza la última expresión por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)g(n)} = \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)}$. [1]

La asimetría de d_C ocasiona pérdida de cierta información, sin embargo este es un costo necesario pues es precisamente la ausencia de simetría la que guía la elección del algoritmo más eficiente. Por ejemplo, si el algoritmo Q es más eficiente que P en todas las entradas, esto significa que para toda n, $g(n) < f(n)$ y por lo tanto $d_{\mathcal{C}}(g, f) = 0$. Este mismo ejemplo muestra que la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ no es T_1.

Observación 8.1.1. En el espacio de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, el preorden cuasimétrico,

$$f \leq g \Leftrightarrow d_{\mathcal{C}}(f,g) = 0,$$

coincide exactamente con el orden parcial puntual usual entre sucesiones reales,

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall n \in \omega : f(n) \leq g(n).$$

Hay algunas variaciones posibles para definir el espacio de complejidad. En [81], Schellekens empieza definiendo la distancia de complejidad solamente entre funciones de complejidad de programas escritos en un mismo lenguaje de programación y que calculen la misma función parcial recursiva. Después, generaliza esa primera definición y da la que hemos presentado arriba, donde $\mathcal{C}$ abarca a todas las funciones de complejidad e incluso, como él mismo lo indica, a funciones que no necesariamente representan la complejidad de algún algoritmo.

[1] La multiplicación por 2^{-n} garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}$.

Luego, con la finalidad de aplicar la teoría al análisis del algoritmo *Mergesort*, que es un algoritmo de ordenamiento basado en comparaciones y es del tipo «divide y vencerás», Schellekens introduce otras variantes del espacio de complejidad.

Por lo general, la función de complejidad de un algoritmo del tipo «divide y vencerás» es la solución de una ecuación de recurrencia T de la forma $T(1) = c$,

$$\text{y} \quad T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) \quad \text{para} \quad n > 1,$$

donde $a > 1$ representa el número de subproblemas en que se divide el problema dado, b representa el tamaño de cada subproblema y $h(n)$ representa el tiempo necesario para combinar las soluciones parciales y construir la solución al problema de tamaño n.

Como el caso base de la ecuación de recurrencia T está dado para $n = 1$ en vez de $n = 0$, la primera adaptación es cambiar el dominio de las funciones de ω a $\mathbb{N}$. Es común suponer que los algoritmos del tipo «divide y vencerás» siempre terminan, así que sus funciones de complejidad nunca toman el valor ∞. Por esta razón la segunda adaptación consiste en quitar dicho valor de su codominio. Para los algoritmos de ordenamiento basados en comparaciones, Schellekens toma como medida de complejidad el número de comparaciones que realiza el algoritmo para ordenar completamente una lista de longitud n. Además hace la suposición de que todos estos algoritmos empiezan encontrando la longitud de la lista de entrada y terminan inmediatamente si dicha longitud es menor que 2. Esto implica que en tales casos no se realiza ninguna comparación y por lo tanto se tiene $f(1) = 0$. Claramente, las listas de longitud 1 son los únicos casos en que estas funciones de complejidad pueden valer cero. Aún así, considerando tales casos, el codominio de las funciones queda como $[0, \infty)$.

En concreto, para cada número real $c \geq 0$, se define el espacio $\mathcal{C}_c$ como sigue

$$\mathcal{C}_c = \left\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty) \;\middle|\; \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty,\ f(1) = c \ \text{ y } (f(n) > 0 \text{ si } n > 1) \right\}.$$

La condición de convergencia de la serie garantiza la convergencia de las series que se usan en la demostración del teorema 8.1.1. La condición ($f(n) > 0$ si $n > 1$) es necesaria para evitar la división entre cero, como se muestra enseguida. Dado que en $\mathcal{C}_c$ existe la posibilidad de que las funciones tomen el valor 0 (cuando $n = 1$ y $c = 0$), hay que formular la definición de la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ de modo que se pueda aplicar a estos casos en $\mathcal{C}_c$. Esto se hace con la expresión

$$d_{\mathcal{C}_c}(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left\{ \begin{matrix} 0 & si & f(n) \leq g(n) \\ \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} & si & f(n) > g(n) \end{matrix} \right\}.$$

Por simplicidad, abusamos de la notación y no escribiremos el segundo subíndice, "c," ya que ambas cuasimétricas funcionan de la misma forma y la única diferencia entre ellas radica en sus dominios de aplicación, lo que será claro por el contexto en cada instancia particular. Para establecer algunas propiedades de las recurrencias asociadas a los algoritmos del tipo «divide y vencerás», Schellekens define el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$, otra variante del espacio de complejidad. Para cada número natural $b > 1$ se tiene

$$\mathcal{C}_c \mid b = \left\{ f : \left\{ b^k \mid k \in \omega \right\} \longrightarrow [0, \infty) \mid \exists g \in \mathcal{C}_c, \forall k \in \omega, f(b^k) = g(b^k) \right\}.$$

Esto quiere decir que las funciones pertenecientes a $\mathcal{C}_c \mid b$ son las restricciones de funciones en $\mathcal{C}_c$ al subconjunto de números naturales formado por las potencias del número b, es decir restringidas al dominio $\left\{1, b, b^2, ..., b^k, ...\right\}$. En el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$ también se puede aplicar la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$.

Teorema 8.1.1 (Mapeo de contracción)**.** *Sea T la ecuación de recurrencia dada por*

$$T(n) = \begin{cases} c & si \quad n = 1. \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) & si \quad n > 1. \end{cases}$$

y sea Φ_T el funcional inducido por T en el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$, es decir, $\Phi_T : \mathcal{C}_c \mid b \longrightarrow \mathcal{C}_c \mid b$, con

$$\left[\Phi_T f\right](n) = \begin{cases} c & si \quad n = 1. \\ a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) & si \quad n > 1. \end{cases}$$

Entonces Φ_T es un mapeo de contracción con respecto a $d_{\mathcal{C}}$ si y solo si $a > 1$, en cuyo caso la constante de contracción es $\frac{1}{a}$.

Definición 8.1.1 (Funcional monótono creciente)**.** Un funcional $\Phi : (C, d_c) \longrightarrow (C, d_c)$ es **monótono creciente** si $\forall f, g \in \mathcal{C} : f \leq g \Rightarrow \Phi f \leq \Phi g$.

Definición 8.1.2 (Funcional de mejora)**.** Dados un funcional $\Phi : (C, d_c) \longrightarrow (C, d_c)$ y una función $g \in \mathcal{C}$, se dice que Φ es **de mejora** con respecto a g si para cada $n \in \omega$, se cumple que $\Phi^{n+1} g \leq \Phi^n g$.

Nótese que si el funcional Φ es monótono creciente, para demostrar que es de mejora con respecto a una función g, lo único que se necesita probar es que $\Phi g \leq g$.

Los algoritmos del tipo «divide y vencerás probabilistas» tienen una estructura recursiva que sirve como base para establecer relaciones de recurrencia [35], [1]. Dada una ecuación de recurrencia, se le asocia un funcional que tiene un único punto fijo, mismo que es la solución de la recurrencia correspondiente.

Esto se logra construyendo un funcional monótono Φ asociado a una relación de recurrencia dada T, para el que existe una función de complejidad g tal que $g \leq \Phi g$. Dada la completitud según Smyth [85] del espacio (C, d_C), la secuencia de iteraciones $(\Phi^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en (C, d_C^s) a alguna función $f_T \in C$ la cual es el único punto fijo de Φ, y por lo tanto también es la solución a la ecuación de recurrencia T. Además, si Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C$, entonces $f_T \leq g$, lo que implica $f_T(n) \in O(g(n))$, especificando así el orden de complejidad de f_T.

Observación 8.1.2. En [29], al estudiar algunos tipos de algoritmos «divide y vencerás probabilistas», los autores utilizan la notación $\mathcal{C}_0$ con un significado diferente al que le da Schellekens en [81]. En lo sucesivo, $\mathcal{C}_0$ denota el subespacio de $\mathcal{C}$ formado por las funciones que toman solamente valores finitos, es decir, $\mathcal{C}_0 = \{f \in \mathcal{C} \mid \forall n \in \omega : f(n) < \infty\}$.

Proposición 8.1.2. *[29] Sea $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funcional monótono creciente y sea $g \in \mathcal{C}$ una función tal que $g \leq \Phi g$. Se tiene:*

(1) $\exists f \in \mathcal{C} : \text{lím}_{k \to \infty} (d_{\mathcal{C}})^s \left(f, \Phi^k g\right) = 0$.

(2) $\forall k \in \omega : \Phi^k g \leq f \leq \Phi f$.

Proposición 8.1.3. *Sea $(f_k)_k$ una sucesión en $\mathcal{C}_0$ y sea $f \in \mathcal{C}_0$ una función que cumpla con $\lim_{k\to\infty} (d_{\mathcal{C}})^s (f, f_k) = 0$. La sucesión $(f_k)_k$ converge puntualmente a f con respecto a la métrica Euclideana, es decir que $\forall n \in \omega, \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : |f(n) - f_k(n)| < \varepsilon$.*

Teorema 8.1.4. *Sea T una ecuación de recurrencia y sea $n_0 \geq 2$ tal que para $n \geq n_0$,*

$$T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)T(k),$$

donde $u \in \mathcal{C}_0$ y $(v_k)_k$ es una sucesión de funciones positivas definidas sobre $\mathbb{N}$ para las cuales

$$\exists K > 0 : \forall n > n_0, \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) \leq K.$$

El funcional $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definido para toda $f \in \mathcal{C}$ mediante

$$\Phi f(n) = \begin{cases} T(1) & si \quad n = 0, \\ T(n) & si \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \\ u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)f(k) & si \quad n \geq n_0, \end{cases}$$

tiene un punto fijo único $f_T \in \mathcal{C}_0$ que es la solución de T. Además, si Φ es de mejora con respecto a alguna $g \in \mathcal{C}$, entonces $f_T \leq g$ y por lo tanto $f_T \in O(g)$.

En el caso general de los algoritmos «divide y vencerás probabilistas» [29], la ecuación de recurrencia asociada es de la forma

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \sum_{k=1}^{n-1} q(n,k)T(k),$$

donde $T(1) \geq 0$, $c_1 > 0$, $2c_1 + c_2 > 0$ y los valores $q(n,k)$ (con $1 \leq k < n \in \mathbb{N}$) son proporcionales a la probabilidad de que la división de una tarea de tamaño n involucre una subtarea de tamaño k. Nótese que $T(2) = 2c_1 + c_2 + q(2,1)T(1) > 0$ y por lo tanto $T(n) > 0$ para todo $n \geq 2$.

Existen muchas formas posibles para la función $q(n,k)$. En [29] se exponen los análisis correspondientes a cuatro ejemplos importantes de este tipo.

Caso (A). Este coeficiente probabilístico se usa en algunos algoritmos de búsqueda mediante árboles binarios.

$$q(n,k) = \frac{\alpha}{n}.$$

En este caso la ecuación de recurrencia se plantea como sigue

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

El funcional de mejora está dado por

$$\Phi f(n) = \frac{c_1(2n-1) + c_2}{n} + \frac{n + \alpha - 1}{n} f(n-1) \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

y se obtiene como resultado que $0 < \alpha \leq 2 \Rightarrow f_T(n) \in O\,(nlog_a n)$.

Caso (B). Este coeficiente se usa en búsquedas totalmente especificadas en árboles de cuadrantes bidimensionales.

$$q(n,k) = \frac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}.$$

La ecuación de recurrencia correspondiente es

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)T(k) \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

El funcional de mejora queda expresado, para $n \geq 4$, como

$$\Phi f(n) = \frac{c_1(3n-1)+2c_2}{n} + \frac{n-1}{n+1} f(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \left(T(1) + T(2) + \sum_{k=3}^{n-1} f(k) \right)$$

y la conclusión es que $0 < \alpha \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f_T(n) \in O\,(nlog_a n)$.

Caso (C). Este coeficiente se aplica a algunos algoritmos de consulta por subconjuntos de propiedades en árboles de cuadrantes bidimensionales.

$$q(n,k) = \frac{\alpha}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Aquí la ecuación de recurrencia, para $n \geq 2$, viene siendo

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (H_n - H_k)\, T(k) \quad ; \quad \text{donde} \quad H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

El funcional de mejora, para valores de $n \geq 3$, está dado por

$$\Phi f(n) = \frac{c_1(2n-1)+c_2}{n} + \left(\frac{n-1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} \right) f(n-1) + \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{n-2} f(k)$$

y se obtiene el mismo resultado que en el caso (A), es decir, $0 < \alpha \leq 2 \Rightarrow f_T(n) \in O\,(nlog_a n)$.

Caso (D). Se aplica en la variante del algoritmo *Quicksort* llamada «mediana de tres».

$$q(n,k) = \frac{2\alpha(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}.$$

En este caso la ecuación de recurrencia queda planteada, para valores de $n \geq 3$, como

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{2\alpha}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)(n-k)T(k).$$

El funcional de mejora se expresa, para $n \geq 3$, de esta forma

$$\Phi f(n) = \frac{c_1(4n-3)+3c_2}{n} + \frac{n-3}{n} f(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=2}^{n-1} (k-1) f(k)$$

y también se obtiene el resultado de que $0 < \alpha \leq 2 \Rightarrow f_T(n) \in O\,(nlog_a n)$.

8.2. El espacio de complejidad dual C^*

Después de que Schellekens definió el espacio de complejidad, Romaguera y Schellekens [75] introdujeron el espacio cuasimétrico de complejidad dual, con el objetivo de obtener resultados adicionales sobre las propiedades cuasimétricas y topológicas del espacio de complejidad. El espacio de complejidad dual también es un cono (o espacio semilineal) normado asimétricamente [14], [72], mientras que el espacio de complejidad original no admite esta estructura.

El espacio de complejidad dual se denota por (C^*, d_{C^*}) y se define como

$$C^* = \left\{ f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n) < \infty \right\}$$

donde d_{C^*} es la cuasimétrica sobre C^* dada por

$$d_{C^*}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[(g(n) - f(n)) \vee 0]$$

para cada $f, g \in C^*$. De hecho, si $u(x)$ denota la norma asimétrica en $\mathbb{R}$ definida como $u(x) = x \vee 0 = max\,\{x, 0\}$, entonces C^* resulta ser un cono normado asimétricamente por la función real no negativa $q_{C^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(f(n))$ de tal forma que la cuasimétrica d_{C^*} puede obtenerse de la norma asimétrica q_{C^*} de la manera siguiente:

$$d_{C^*}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(g(n) - f(n))$$

para cada $f, g \in C^*$.

El espacio de complejidad dual también es un espacio cuasimétrico pesable, por lo que también es Smyth-completable. Su función de peso se define de la siguiente manera. Para cada $f \in \mathcal{C}^*$,

$$w_{\mathcal{C}^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n).$$

Dado un valor $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, usaremos la notación $\overline{c}$ para representar a la función constante $\overline{c}(n) = c$, para todo $n \in \omega$. Si $n \in \mathbb{N}$, la notación $\widehat{n}$ indica a la sucesión f tal que $f(k) = 1$ si $k < n$ y $f(k) = 0$ si $k \geq n$. La función $\overline{0}$ es el elemento mínimo de $\mathcal{C}^*$ y corresponde directamente al mínimo $\perp$ de los dominios semánticos [28].

En $\mathcal{C}^*$, la distancia cuasimétrica es un peso, ya que $d_{\mathcal{C}^*}(f,g) = w_{\mathcal{C}^*}((g-f) \vee \overline{0})$ para toda $f, g \in \mathcal{C}^*$. Además el peso es una distancia puesto que $w_{\mathcal{C}^*}(f) = d_{\mathcal{C}^*}(\overline{0}, f)$.

A diferencia de lo que sucede en el espacio de complejidad $\mathcal{C}$, en su dual $\mathcal{C}^*$ el preorden puntual de las sucesiones no coincide con el preorden cuasimétrico $\leq_{d_{\mathcal{C}^*}}$, sino que es su opuesto, es decir $f \leq_{d_{\mathcal{C}^*}} g \Leftrightarrow g \leq f$ para todas $f, g \in \mathcal{C}^*$.

Definición 8.2.1 ([75] Mapeo de inversión)**.** La función $\Psi : \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$ dada por $\Psi(f) = \frac{1}{f}$, donde $\frac{1}{f}(n) = \frac{1}{f(n)}$, para toda $n \in \omega$ (con la convención de que $\frac{1}{0} = \infty$), se llama el **mapeo de inversión**.

Mediante un breve desarrollo se puede verificar que el mapeo de inversión es una isometría de $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ a $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, ya que $d_{\mathcal{C}}(\Psi(f), \Psi(g)) = d_{\mathcal{C}^*}(f, g)$, para $f, g \in \mathcal{C}^*$. Esto permite transportar algunas propiedades del espacio dual al espacio de complejidad (aquellas que se mantienen bajo isometría). Por ejemplo, si denotamos simplemente por Φ al funcional Φ_T del teorema 8.1.1, es posible definir un funcional correspondiente $\Phi^* : \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ mediante la composición $\Phi^* = \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$ (con la convención de que $\frac{1}{\infty} = 0$) [75]. Si $f \in \mathcal{C}^*$, se tiene

$$[\Phi^*(f)]\,(n) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & n = 1, \\ \frac{f(\frac{n}{b})}{a + h(n) f(\frac{n}{b})}, & n \in \left\{ b^k \mid k \geq 1 \right\}. \end{cases}$$

Como se ha mencionado, la distancia de complejidad $d_{\mathcal{C}}(f, g)$ entre dos funciones $f, g \in \mathcal{C}$ mide el progreso relativo que se hace al bajar la complejidad remplazando un programa P con función de complejidad f por un programa Q con función de complejidad g. Esta misma cantidad se puede expresar como $d_{\mathcal{C}^*}\left(\Psi^{-1}(f), \Psi^{-1}(g)\right)$. Además, si $f, g \in \mathcal{C}^*$, la igualdad $d_{\mathcal{C}^*}(f, g) = 0$ puede ser interpretada como que Q es más eficiente que P.

Lema 8.2.1 ([75])**.** *El espacio de complejidad dual (C^*, d_{C^*}) no es precompacto y por lo tanto, como consecuencia de la proposición 4.1.8, tampoco es totalmente acotado.*

8.3. Propiedades Métricas del Espacio de Complejidad

Se ha mencionado ya que un espacio cuasimétrico genera un espacio cuasiuniforme, si este espacio es además Smyth-completable (como fue definido para los espacios cuasiuniformes) entonces el espacio cuasimétrico cumple los siguientes enunciados:

- Un espacio cuasimétrico (X, ρ) es Smyth-completable si y solo si toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que sea de K-Cauchy por la izquierda en (X, ρ), es de Cauchy en (X, ρ^s).
- Un espacio cuasimétrico (X, ρ) es Smyth-completo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea de K-Cauchy por la izquierda en (X, ρ), es convergente en (X, ρ^s).

Otro concepto importante en los espacios cuasimétricos, el cual se define de manera análoga a como se define en los espacios cuasiuniformes, es la bicompletitud: un espacio cuasimétrico (X, ρ) es bicompleto si (X, ρ^s) es completo [75].

Utilizando los conceptos anteriores, es fácil deducir el siguiente teorema.

Teorema 8.3.1. *Un espacio cuasimétrico (X, ρ) Smyth-completable y bicompleto es Smyth-completo.*

Aplicando el teorema siguiente en combinación con el anterior se puede concluir que el espacio de complejidad C es Smyth-completo.

Teorema 8.3.2 ([75])**.** *El espacio de complejidad dual (C^*, d_{C^*}) es bicompleto.*

Del resultado anterior se deduce que el espacio de complejidad dual C^* es Smyth-completo. Dada la isometría entre C y C^*, como la completitud de Smyth es una propiedad que se mantiene bajo isometría, el espacio de complejidad C también es Smyth-completo.

Parte III

Resultados obtenidos

Capítulo 9

Aportaciones

Todos los resultados expuestos en este capítulo se obtuvieron de manera independiente durante la fase de investigación de este trabajo de tesis. Asimismo, todos ellos están ligados al objetivo de identificar propiedades del producto convolución en los espacios de complejidad. La mayor parte de estos resultados se consideraron del nivel y la relevancia suficientes para ser incluidos en el artículo de investigación [39], de próxima aparición. Las demostraciones de dichos resultados aparecen en su totalidad en el artículo mencionado. Con el propósito de ilustrar algunas de las técnicas utilizadas, en este capítulo se muestran dos demostraciones completas, otra se presenta sin todos sus detalles, y además se incluyen comentarios breves acerca de otras tres demostraciones.

9.1. La convolución en los espacios de complejidad

En esta sección se expone la cerradura algebraica de los espacios $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ bajo la operación de convolución de sucesiones. También se presentan algunas desigualdades que relacionan a la convolución con el mapeo de inversión, con el orden puntual en cada espacio $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, con el orden de crecimiento asintótico en $\mathcal{C}^*$ y con la distancia cuasimétrica $d_{\mathcal{C}^*}$ y su función de peso $w_{\mathcal{C}^*}$ en $\mathcal{C}^*$.

Definición 9.1.1 ([33] Convolución de sucesiones)**.** Dadas dos sucesiones reales $f, g : \omega \to \mathbb{R}$, su convolución $f \otimes g$ está dada por la fórmula

$$(f \otimes g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) \quad \text{para todo} \;\; n \in \omega.^1$$

La convolución es una operación asociativa y conmutativa. Además es distributiva sobre la suma de sucesiones y tiene un elemento neutro en $\mathcal{C}^*$, al que denotamos como $\widehat{1}$.

Observación 9.1.1. La función $\widehat{1} \in \mathcal{C}^*$ es el elemento neutro de la convolución de sucesiones. Esto significa que la terna ordenada $\left(\mathcal{C}^*, \otimes, \widehat{1}\right)$ es un monoide abeliano.

En general, para $n \in \mathbb{N}$, utilizamos la notación $\widehat{n}$ para indicar a la sucesión $f \in \mathcal{C}^*$ tal que $f(k) = 1$ si $k < n$ y $f(k) = 0$ en caso contrario. Además, en referencia a ambos espacios

[1] La convolución de sucesiones es muy utilizada en el procesamiento electrónico de señales digitales.

de complejidad, tanto $\mathcal{C}$ como $\mathcal{C}^*$, utilizamos la notación $\leq$ para representar el orden puntual de las sucesiones, es decir $f \leq g \Leftrightarrow \forall n \in \omega : f(n) \leq g(n)$. Al final de esta subsección usamos el símbolo $\prec$ para indicar la relación $f \prec g \Leftrightarrow \forall n \in \omega : f(n) < g(n)$.

Nótese que si $f, g \in \mathcal{C}^*$, los valores que produce la fórmula de la convolución están en $\mathbb{R}^+$. Similarmente, cuando $f, g \in \mathcal{C}$, los valores de la fórmula están en el intervalo $(0, \infty]$. La convolución se puede usar para expresar algunas ecuaciones de recurrencia. Por ejemplo, si f representa a la sucesión de Fibonacci, entonces

$$f(n) = \begin{cases} n & si \quad n \leq 1, \\ \left(f \otimes \widehat{2}\right)(n-1) & si \quad n > 1. \end{cases}$$

En esta sección utilizamos exponentes sobre las sucesiones para indicar los resultados de convoluciones repetidas de una sucesión consigo misma, es decir $f^0 = \widehat{1}$ and $f^n = f \otimes f^{n-1}$ para todo $n > 0$. Además, la notación $\mathcal{C}_0^*$ indicará el subespacio de funciones positivas

$$\mathcal{C}_0^* = \{f \in \mathcal{C}^* \mid \forall n \in \omega : f(n) > 0\}.$$

9.1.1. Cerradura y desigualdades

Enseguida mencionamos algunas de las propiedades que tiene la convolución de funciones de complejidad, incluyendo aquellas que la relacionan con las funciones de peso y de distancia en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$.

Proposición 9.1.1. *El espacio de complejidad $\mathcal{C}$ es cerrado bajo la convolución de sucesiones. Además, dadas dos sucesiones cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}$, se tiene $w_{\mathcal{C}}(f \otimes g) \leq w_{\mathcal{C}}(f) \cdot w_{\mathcal{C}}(g)$.*

El ejemplo siguiente muestra un caso general en el que la desigualdad anterior es estricta.

Ejemplo 9.1.1. Sea $f \in \mathcal{C}$. Se tiene

$$w_{\mathcal{C}}\left(\overline{1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{1} = 2.$$

$$\text{Para } n \geq 1, \; \left(\overline{1} \otimes f\right)(n) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot f(n-k) > f(n).$$

$$w_{\mathcal{C}}\left(\overline{1} \otimes f\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\left(\overline{1} \otimes f\right)(n)} < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} = w_{\mathcal{C}}(f).$$

$$w_{\mathcal{C}}\left(\overline{1} \otimes f\right) < 2 \cdot w_{\mathcal{C}}(f) = w_{\mathcal{C}}\left(\overline{1}\right) \cdot w_{\mathcal{C}}(f).$$

Para el espacio de complejidad dual se cumple algo más fuerte, esto es:

Proposición 9.1.2. *El espacio de complejidad dual $\mathcal{C}^*$ también es cerrado bajo la convolución de sucesiones. Dadas dos sucesiones cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^*$, se da la igualdad entre el peso de su convolución y el producto de sus pesos: $w_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g) = w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot w_{\mathcal{C}^*}(g)$.*

En la demostración de la proposición 9.1.2 se utiliza la igualdad

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} \sum_{n=0}^{s} f(n)g(s-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n-k} f(n)g(k).$$

Las demostraciones de las proposiciones 9.1.1 y 9.1.9 usan el mismo cambio de variable entre la doble serie y la serie de sumas finitas, aunque con sumandos algo más complicados. Consecuencias inmediatas de las proposiciones 9.1.1 y 9.1.2, fáciles de verificar, son las mencionadas enseguida.

Corolario 9.1.3. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^+$ es cerrado bajo la multiplicación, entonces el subespacio de $\mathcal{C}^*$ definido como $W_A = \{f \in \mathcal{C}^* \mid w_{\mathcal{C}^*}(f) \in A\}$ es cerrado bajo la convolución de sucesiones.*

Corolario 9.1.4. *Si $f \in \mathcal{C}$, entonces la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum f$ también está en $\mathcal{C}$, ya que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = \left(f \otimes \overline{1}\right)(n)$. Lo mismo sucede en $\mathcal{C}^*$.*

Corolario 9.1.5. *Dadas $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$, dos sucesiones de funciones en $\mathcal{C}^*$, cada una determina una sucesión de pesos: $(w_{\mathcal{C}^*}(f_n))_n$ y $(w_{\mathcal{C}^*}(g_n))_n$, respectivamente. Estas sucesiones de pesos son a su vez elementos de $\mathcal{C}^*$ y su convolución es*

$$(w_{\mathcal{C}^*}(f_n))_n \otimes (w_{\mathcal{C}^*}(g_n))_n = \left(\sum_{n=0}^{s} w_{\mathcal{C}^*}(f_n)\, w_{\mathcal{C}^*}(g_{s-n})\right)_s = \left(w_{\mathcal{C}^*}\left(\sum_{n=0}^{s} f_n \otimes g_{s-n}\right)\right)_s.$$

Lema 9.1.6. *En ambos espacios de complejidad, tanto en $\mathcal{C}$ como en $\mathcal{C}^*$, la convolución es consistente con el orden puntual. Es decir, dadas las funciones f, g, h tales que $g \leq h$, se cumple $f \otimes g \leq f \otimes h$. Más aún,*

$$f \otimes (g \wedge h) \leq (f \otimes g) \wedge (f \otimes h) \leq (f \otimes g) \vee (f \otimes h) \leq f \otimes (g \vee h).$$

La forma en que interactúa la convolución con el mapeo de inversión Ψ (y con su función inversa) es como se menciona a continuación.

Proposición 9.1.7. *Dadas cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^*$, se cumple $\Psi(f \otimes g) \leq \Psi f \otimes \Psi g$ en $\mathcal{C}$, mientras que si $f, g \in \mathcal{C}$, se tiene $\Psi^{-1}(f \otimes g) \leq \Psi^{-1} f \otimes \Psi^{-1} g$ en $\mathcal{C}^*$.*

Ahora mencionaremos un resultado y dos ejemplos ilustrativos acerca del orden de complejidad del producto convolución en el espacio dual, en términos del orden de complejidad de uno de sus factores.

Proposición 9.1.8. *Si $f, g, h \in \mathcal{C}_0^*$ y se cumple $f \in \mathcal{O}(g)$, entonces $f \otimes h \in \mathcal{O}(g \otimes h)$.*

En general, para funciones arbitrarias en $\mathcal{C}^*$, el resultado anterior no es necesariamente cierto, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 9.1.2. $\widehat{1} \in \mathcal{O}\left(\overline{0}\right)$, sin embargo $\widehat{1} \otimes (n)_n = (n)_n \notin \mathcal{O}\left(\overline{0}\right) = \mathcal{O}\left(\overline{0} \otimes (n)_n\right)$.

Ejemplo 9.1.3. Sea $f = \widehat{2}$ y considérese la función h definida por $h(n) = (n/2+1)^2$ si n es par y $h(n) = (n+1)/2$ si n es impar. Entonces todos los términos de $f \otimes h$ son de un orden cuadrático y por lo tanto tenemos $f \in \mathcal{O}\left(\widehat{1}\right)$ pero $f \otimes h \notin \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}\left(\widehat{1} \otimes h\right)$.

Proposición 9.1.9. *Dadas cualesquiera $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{C}^*$, se tiene la siguiente cota superior para la distancia dirigida entre dos convoluciones*

$$d_{\mathcal{C}^*}\left(f \otimes g, f_1 \otimes g_1\right) \leq w_{\mathcal{C}^*}\left(f_1\right) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(g, g_1\right) + w_{\mathcal{C}^*}(g) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, f_1\right).$$

Corolario 9.1.10. *Si $f, g, a, b \in \mathcal{C}^*$ satisfacen $d_{\mathcal{C}^*}(f, a) < \varepsilon$ y $d_{\mathcal{C}^*}(g, b) < \delta$, entonces $d_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, a \otimes b) < (\varepsilon \vee \delta) \cdot w_{\mathcal{C}^*}(f+g) + \varepsilon\delta$.*

Corolario 9.1.11. *Como la convolución es conmutativa, dadas $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{C}^*$, tenemos que las cinco expresiones siguientes también son cotas superiores para la distancia dirigida $d_{\mathcal{C}^*}\left(f \otimes g, f_1 \otimes g_1\right)$.*

(i) $w_{\mathcal{C}^*}\left(f_1\right) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, g_1\right) + w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(g, f_1\right)$.

(ii) $w_{\mathcal{C}^*}\left(g_1\right) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(g, f_1\right) + w_{\mathcal{C}^*}(g) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, g_1\right)$.

(iii) $w_{\mathcal{C}^*}\left(g_1\right) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, f_1\right) + w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(g, g_1\right)$.

(iv) $\frac{1}{2}\left(d_{\mathcal{C}^*}\left(f, f_1\right)\left[w_{\mathcal{C}^*}(g) + w_{\mathcal{C}^*}\left(g_1\right)\right] + d_{\mathcal{C}^*}\left(g, g_1\right)\left[w_{\mathcal{C}^*}(f) + w_{\mathcal{C}^*}\left(f_1\right)\right]\right)$.

(v) $\frac{1}{2}\left(d_{\mathcal{C}^*}\left(f, g_1\right)\left[w_{\mathcal{C}^*}(g) + w_{\mathcal{C}^*}\left(f_1\right)\right] + d_{\mathcal{C}^*}\left(g, f_1\right)\left[w_{\mathcal{C}^*}(f) + w_{\mathcal{C}^*}\left(g_1\right)\right]\right)$.

Corolario 9.1.12. *Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^*$, se cumple:*

(i) $d_{\mathcal{C}^*}\left(f^3, g^3\right) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f)^2 \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, g^2\right) + w_{\mathcal{C}^*}(g)^2 \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f^2, g\right)$.

(ii) Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$d_{\mathcal{C}^*}\left(f^n, g^n\right) \leq d_{\mathcal{C}^*}(f, g) \sum_{k=1}^{n}\left[w_{\mathcal{C}^*}\left(f^{n-k}\right) \cdot w_{\mathcal{C}^*}\left(g^{k-1}\right)\right].$$

Usando el hecho de que $\widehat{1} \in \mathcal{C}^*$ es el elemento neutro de la convolución de sucesiones, se obtienen los dos corolarios siguientes.

Corolario 9.1.13. *Si $f, g \in \mathcal{C}^*$, entonces*

(i) $d_{\mathcal{C}^*}(f, f \otimes g) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(\widehat{1}, g\right)$.

(ii) $d_{\mathcal{C}^*}(f, f \otimes g) \leq w_{\mathcal{C}^*}(g) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(\widehat{1}, f\right) + d_{\mathcal{C}^*}(f, g)$.

Para $f = g$, estas desigualdades se reducen a: $d_{\mathcal{C}^*}\left(f, f^2\right) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(\widehat{1}, f\right)$.

Corolario 9.1.14. *Si $f, g \in \mathcal{C}^*$, entonces*

(i) $d_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(g, \widehat{1}\right)$.

(ii) $d_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f) \leq d_{\mathcal{C}^*}(g, f) + w_{\mathcal{C}^*}(g) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, \widehat{1}\right)$.

Si $f = g$, entonces las dos desigualdades del corolario anterior se reducen a la siguiente: $d_{\mathcal{C}^*}(f^2, f) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}\left(f, \widehat{1}\right)$.

Ahora, para la distancia dirigida entre dos convoluciones con un factor común, se tiene,

Corolario 9.1.15. *Si $f, g, h \in \mathcal{C}^*$, entonces*

(i) $d_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f \otimes h) \leq w_{\mathcal{C}^*}(f) \cdot d_{\mathcal{C}^*}(g, h)$.

(ii) $d_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f \otimes h) \leq w_{\mathcal{C}^*}(h) \cdot d_{\mathcal{C}^*}(g, f) + w_{\mathcal{C}^*}(g) \cdot d_{\mathcal{C}^*}(f, h)$.

Corolario 9.1.16. *La desigualdad de la Proposición 9.1.9 y las tres primeras desigualdades del Corolario 9.1.11, cuando se expresan en términos de la métrica parcial $p_{\mathcal{C}^*}$ asociada a la cuasimétrica pesable $d_{\mathcal{C}^*}$, quedan como sigue.*

(i) $p_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f_1 \otimes g_1) \leq p_{\mathcal{C}^*}(f_1, f_1)\left[p_{\mathcal{C}^*}(g, g_1) - p_{\mathcal{C}^*}(g, g)\right] + p_{\mathcal{C}^*}(g, g) \cdot p_{\mathcal{C}^*}(f, f_1)$.

(ii) $p_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f_1 \otimes g_1) \leq p_{\mathcal{C}^*}(f_1, f_1)\left[p_{\mathcal{C}^*}(f, g_1) - p_{\mathcal{C}^*}(f, f)\right] + p_{\mathcal{C}^*}(f, f) \cdot p_{\mathcal{C}^*}(g, f_1)$.

(iii) $p_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f_1 \otimes g_1) \leq p_{\mathcal{C}^*}(g_1, g_1)\left[p_{\mathcal{C}^*}(g, f_1) - p_{\mathcal{C}^*}(g, g)\right] + p_{\mathcal{C}^*}(g, g) \cdot p_{\mathcal{C}^*}(f, g_1)$.

(iv) $p_{\mathcal{C}^*}(f \otimes g, f_1 \otimes g_1) \leq p_{\mathcal{C}^*}(g_1, g_1)\left[p_{\mathcal{C}^*}(f, f_1) - p_{\mathcal{C}^*}(f, f)\right] + p_{\mathcal{C}^*}(f, f) \cdot p_{\mathcal{C}^*}(g, g_1)$.

Una de las consecuencias más importantes de la proposición 9.1.9 es la continuidad del producto convolución en el espacio dual, ya que el resultado dado a continuación se puede generalizar a una cierta clase de operaciones binarias en espacios cuasimétricos pesables, como se verá en la siguiente sección.

Lema 9.1.17. *La convolución, vista como una función $\otimes : (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})^2 \to (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$, es continua con respecto a la topología cuasimétrica de $\mathcal{C}^*$ y a la topología producto correspondiente en $\mathcal{C}^* \times \mathcal{C}^*$.*

Corolario 9.1.18. $(\mathcal{C}^*, \otimes, \tau(d_{\mathcal{C}^*}))$ *es un monoide topológico.*

Lema 9.1.19. *Sean $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ sucesiones K-Cauchy por la izquierda en $\mathcal{C}^*$. Entonces la sucesión de convoluciones $(f_n \otimes g_n)_n$ también es K-Cauchy por la izquierda en $\mathcal{C}^*$.*

En la demostración de este lema se utilizan las desigualdades

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^*}(f_n \otimes g_n, f_m \otimes g_m) &\leq w_{\mathcal{C}^*}(g_n)\, d_{\mathcal{C}^*}(f_n, f_m) + w_{\mathcal{C}^*}(f_m)\, d_{\mathcal{C}^*}(g_n, g_m) \\ &< \delta\left(w_{\mathcal{C}^*}(f_m) + w_{\mathcal{C}^*}(g_n)\right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

donde δ se define como $\delta = \varepsilon/(a+b)$, usando dos constantes a y b que existen en virtud de la hipótesis. También se tiene $m \geq n$, con ambas lo suficientemente grandes para garantizar que $w_{\mathcal{C}^*}(f_m) < a$, que $w_{\mathcal{C}^*}(g_n) < b$ y que $\max\left\{d_{\mathcal{C}^*}(f_n, f_m), d_{\mathcal{C}^*}(g_n, g_m)\right\} < \delta$.

Corolario 9.1.20. *Si $(f_n)_n$ es una sucesión K-Cauchy por la izquierda en $\mathcal{C}^*$, dado $m \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(f_n \otimes f_{n+m})_n$ también es K-Cauchy por la izquierda.*

Proposición 9.1.21. *Sean $f, g \in \mathcal{C}^*$, y supóngase que $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son sucesiones en $\mathcal{C}^*$. Entonces:*

(i) *Si* $(f_n)_n$ *y* $(g_n)_n$ *convergen a* f *y a* g*, respectivamente, con respecto a* $d_{\mathcal{C}^*}$*, entonces la sucesión de convoluciones* $(f_n \otimes g_n)_n$ *converge a* $f \otimes g$ *con respecto a* $d_{\mathcal{C}^*}$*.*

(ii) *Si* $(f_n)_n$ *y* $(g_n)_n$ *convergen a* f *y a* g*, respectivamente, con respecto a* $d^s_{\mathcal{C}^*}$*, entonces la sucesión de convoluciones* $(f_n \otimes g_n)_n$ *converge a* $f \otimes g$ *con respecto a* $d^s_{\mathcal{C}^*}$*.*

(iii) *Si* $(f_n)_n$ *y* $(g_n)_n$ *convergen a* f *y a* g*, respectivamente, con respecto a* $d^{-1}_{\mathcal{C}^*}$*, y alguna de sus sucesiones de pesos, ya sea* $(w_{\mathcal{C}^*}(f_n))_n$ *o* $(w_{\mathcal{C}^*}(g_n))_n$*, está acotada, entonces la sucesión de convoluciones* $(f_n \otimes g_n)_n$ *converge a* $f \otimes g$ *con respecto a* $d^{-1}_{\mathcal{C}^*}$*.*

(iv) *Si* $(f_n)_n$ *y* $(g_n)_n$ *convergen hacia adelante estadísticamente a* f *y a* g*, respectivamente, entonces la sucesión de convoluciones* $(f_n \otimes g_n)_n$ *converge hacia adelante estadísticamente a* $f \otimes g$*.*

9.1.2. Funcionales basados en la convolución

Un concepto fundamental para el análisis que hace Schellekens [81] sobre la complejidad de los algoritmos del tipo «divide y vencerás», es el de los funcionales de mejora en el espacio de complejidad $\mathcal{C}$. En esta subsección se observa que la convolución permite definir funcionales en $\mathcal{C}^*$ que a su vez, componiéndolos con el mapeo de inversión Ψ y con su inversa Ψ^{-1}, producen funcionales de mejora en $\mathcal{C}$.

Lema 9.1.22. *Para cualesquiera funciones* $f, g, h \in \mathcal{C}^*$ *tales que* $f \otimes g = f \otimes h$*, si* $f(0) > 0$*, entonces* $g = h$*.*

Para una función fija f en el espacio dual $\mathcal{C}^*$, la operación de convolución nos induce de manera natural un funcional.

Definición 9.1.2 (El funcional de convolución)**.** Como $\mathcal{C}^*$ es cerrado bajo la convolución, dada una $f \in \mathcal{C}^*$ fija, podemos definir el **funcional de convolución asociado** a f como $\Phi_f : \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ de tal manera que $\Phi_f(g) = f \otimes g$ para toda $g \in \mathcal{C}^*$.

La proposición que enseguida se da, lista algunas propiedades del funcional Φ_f.

Proposición 9.1.23. *Sea* $f \in \mathcal{C}^*$*. Entonces, el funcional de convolución* Φ_f *satisface:*

(i) Φ_f *es un funcional monótono.*

(ii) *En caso de que* $w_{\mathcal{C}^*}(f) < 1$*, el funcional* Φ_f *es un mapeo de contracción.*

(iii) *Si* $f(0) > 0$*, entonces* Φ_f *es una función inyectiva.*

(iv) *Si* $f(0) \geq 1$*, se tiene que* $\Phi_f(g) \geq g$ *para toda* $g \in \mathcal{C}^*$*.*

(v) *Cuando* $f(0) > 0$*, dados dos subconjuntos* $A, B \subseteq \mathcal{C}^*$ *tales que* $\Phi_f A \ll \Phi_f B$*, entonces se cumple que* $A \ll B$*.*

(vi) $\Phi_f : (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*}) \to (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ *es una función cuasiuniformemente continua.*

Corolario 9.1.24. *(i)* *Si* $f \in \mathcal{C}^*$ *y la sucesión* $(g_n)_n$ *es K-Cauchy por la izquierda en* $\mathcal{C}^*$*, entonces la sucesión* $(\Phi_f(g_n))_n$ *también es K-Cauchy por la izquierda.*

(ii) Dado un filtro $\mathcal{F}$ en $\mathcal{C}^*$ y una función $h \in \mathcal{C}^*$ tal que $\mathcal{F}$ converge a h, el filtro imagen $\mathcal{G}$ generado por la base de filtro $\Gamma = \{\Phi_f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$, converge a $\Phi_f(h)$.

A continuación se define otro funcional, ahora con dominio en el espacio de complejidad $\mathcal{C}$, pero basado en el funcional de convolución Φ_f.

Definición 9.1.3 (El funcional ICI)**.** A cada función f en el espacio dual de complejidad $\mathcal{C}^*$, se le puede asociar un funcional $\Upsilon_f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido en el espacio de complejidad $\mathcal{C}$ mediante esta composición: $\Upsilon_f = \Psi \circ \Phi_f \circ \Psi^{-1}$. Al funcional Υ_f lo llamamos **el funcional ICI** asociado con f. ICI es acrónimo de inversión, convolución, inversión.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Upsilon_f} & \mathcal{C} \\ \Psi^{-1}\downarrow & & \uparrow\Psi \\ \mathcal{C}^* & \xrightarrow{\Phi_f} & \mathcal{C}^* \end{array}$$

Proposición 9.1.25. *Si $f \in \mathcal{C}^*$, entonces Υ_f, el funcional ICI asociado con f, satisface*

(i) Υ_f es monótono.

(ii) Si $f(0) \geq 1$, entonces Υ_f es de mejora con respecto a cualquier función $g \in \mathcal{C}$.

Cuando Schellekens probó que cualquier espacio cuasiuniforme $(X, \mathcal{U})$ de base numerable tiene una completación secuencial [81], como parte de su demostración define una relación de equivalencia $\approx$ entre sucesiones que son de Cauchy en $\mathcal{U}^s$. En el caso particular del espacio cuasimétrico de complejidad dual, la operación de convolución se puede definir entre las clases de equivalencia de dicha relación utilizando representantes. La relación de equivalencia para sucesiones en $\mathcal{C}^*$ se define de la siguiente manera.

Definición 9.1.4. Si $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son sucesiones de Cauchy en $d^s_{\mathcal{C}^*}$, entonces $(x_n)_n \approx (y_n)_n$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d^s_{\mathcal{C}^*}(x_m, y_n) < \varepsilon$, siempre que $m, n \geq n_0$.

Lema 9.1.26. *Supóngase que una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathbb{R}^+$ tiene la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$, existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \leq x_n + \varepsilon$ siempre que $m \geq n \geq z$. Entonces $(x_n)_n$ converge.*

Corolario 9.1.27. *Dada una sucesión K-Cauchy por la izquierda $(f_n)_n$ en $\mathcal{C}^*$, su sucesión de pesos $(w_{\mathcal{C}^*}(f_n))_n$ converge en $\mathbb{R}^+$.*

Proposición 9.1.28. *Dadas $(a_n)_n, (b_n)_n, (f_n)_n, (g_n)_n$, sucesiones de Cauchy en $d^s_{\mathcal{C}^*}$ que satisfacen las condiciones $(a_n)_n \approx (f_n)_n$ y $(b_n)_n \approx (g_n)_n$, entonces $(a_n \otimes b_n)_n \approx (f_n \otimes g_n)_n$.*

9.1.3. La convolución en otras dos topologías de $\mathcal{C}^*$

Por el corolario 9.1.18 sabemos que $(\mathcal{C}^*, \otimes, \tau(d_{\mathcal{C}^*}))$ es un monoide topológico. En esta subsección se consideran otras dos topologías de $\mathcal{C}^*$ relacionadas con la topología cuasimétrica y se ve que en una de ellas la convolución es continua y en la otra no.

Proposición 9.1.29. *La mínima topología de Alexandrov en $\mathcal{C}^*$, más fina que $\tau(d_{\mathcal{C}^*})$, es la generada por la base $\mathcal{B} = \{\downarrow\{f\} \mid f \in \mathcal{C}^*\}$.*

Proposición 9.1.30. *En el espacio topológico $(\mathcal{C}^*, \alpha)$, donde α es la topología de Alexandrov generada por la base $\mathcal{B} = \{\downarrow \{f\} \mid f \in \mathcal{C}^*\}$, la operación binaria de convolución, considerada como una función $\otimes : (\mathcal{C}^*, \alpha)^2 \to (\mathcal{C}^*, \alpha)$, es continua con respecto a las topologías correspondientes. Como consecuencia, la terna $(\mathcal{C}^*, \otimes, \alpha)$ es un monoide topológico.*

Demostración. Sean $f, g, h \in \mathcal{C}^*$ tales que $f \otimes g \leq h$. Dados $a, b \in \mathcal{C}^*$, si $a \leq f$ y $b \leq g$, entonces $a \otimes b \leq f \otimes g$. Esto implica que $\otimes (\downarrow \{f\} \times \downarrow \{g\}) \subseteq \downarrow \{h\}$. Por lo tanto, la imagen inversa (bajo la convolución) de cualquier conjunto básico de α es la unión de conjuntos básicos de la topología producto en $(\mathcal{C}^*, \alpha)^2$. QED

A continuación mostramos otra topología en $\mathcal{C}^*$. Esta topología es estrictamente más fina que $\tau(d_{\mathcal{C}^*})$ y estrictamente más gruesa que α. Sin embargo, la convolución no es continua con respecto a esta topología intermedia. Si para cada $h \in \mathcal{C}_0^*$, se define el conjunto básico $U_h = \left\{(f, g) \in \mathcal{C}^* \times \mathcal{C}^* \mid (g - f) \vee \overline{0} \prec h\right\}$, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 9.1.31. *La familia $\mathcal{B} = \{U_h \mid h \in \mathcal{C}_0^*\}$ es base de una cuasiuniformidad $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}^*$ con las propiedades siguientes:*

(i) $\tau(\mathcal{U})$ *es estrictamente más fina que* $\tau(d_{\mathcal{C}^*})$.

(ii) α *es estrictamente más fina que* $\tau(\mathcal{U})$.

(iii) $\otimes : (\mathcal{C}^*, \tau(\mathcal{U}))^2 \to (\mathcal{C}^*, \tau(\mathcal{U}))$ *no es continua.*

9.2. Operaciones firmes y submultiplicativas

Las desigualdades que figuran en las proposiciones 9.1.1 y 9.1.9 no son necesariamente válidas para cualquier operación binaria en un espacio cuasimétrico pesable arbitrario. Aquí se dan algunos ejemplos de espacios cuasimétricos pesables con operaciones binarias que sí satisfacen esas desigualdades. También se muestran algunas propiedades de continuidad, de continuidad uniforme y de convergencia de sucesiones que resultan como consecuencia de que una operación binaria dada en un espacio cuasimétrico pesable cumpla con dichas desigualdades.

Definición 9.2.1 (Operaciones firmes y submultiplicativas)**.** Sea (X, d, w) un espacio cuasimétrico pesable. Dada una operación binaria $* : X \times X \to X$, la llamamos

(i) **firme** con respecto a d y a w, si para toda $x, y, u, v \in X$, se cumple

$$d(x * y, u * v) \leq w(y)d(x, u) + w(u)d(y, v).$$

(ii) **submultiplicativa** con respecto a w, siempre y cuando $w(x * y) \leq w(x)w(y)$, para toda $x, y \in X$.

Una operación binaria constante es trivialmente firme con respecto a cualquier cuasimétrica pesable y a sus funciones de peso. El lema siguiente es una generalización del inciso (i) del corolario 9.1.15.

Lema 9.2.1. *Sea (X, d, w) un espacio cuasimétrico pesable y sea $*$ una operación binaria en X. Si $*$ es firme con respecto a d y a w, entonces, para toda $a, x, y \in X$*

$$\max\{d(a*x, a*y),\ d(x*a, y*a)\} \leq w(a)d(x,y).$$

Lema 9.2.2. *Si (X, d, w) es un espacio cuasimétrico pesable y $*$ es una operación binaria X, firme con respecto a d y a w, entonces $*$ es firme con respecto a d^{-1} y a w si y solo si d es una métrica.*

Ejemplo 9.2.1. En el espacio dual de complejidad, $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*}, w_{\mathcal{C}^*})$, la convolución de sucesiones $\otimes$ es firme con respecto a $d_{\mathcal{C}^*}$ y a $w_{\mathcal{C}^*}$. También es submultiplicativa con respecto a $w_{\mathcal{C}^*}$.

Ejemplo 9.2.2. Sea X el intervalo $(0,1)$. Si se define $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = y$ para $x \neq y$ y $w(x) = x$, para todos $x, y \in X$, entonces (X, d, w) es un espacio cuasimétrico pesable en el que la multiplicación es firme con respecto a d y a w, así como submultiplicativa con respecto a w. La función $r(x) = 1 - x$ es una función de peso para d^{-1}, la cuasimétrica conjugada. Sin embargo, la multiplicación no es submultiplicativa con respecto a r, y tampoco es firme con respecto a d^{-1} y a r.

Ejemplo 9.2.3. Como se afirma en [56], el espacio $(\mathbb{R}^+, u, w)$, con $u(x,y) = (y-x)\vee 0$, y con la función de peso dada por $w(x) = x$, es un espacio cuasimétrico pesable. En este espacio, la multiplicación es firme con respecto a u y a w, y también es submultiplicativa con respecto a w. La función w no es una función de peso para u^{-1}, así que $*$ no es firme con respecto a u^{-1} y a w, aún cuando la desigualdad $u^{-1}(a*b, x*y) \leq w(b)u^{-1}(a,x) + w(x)u^{-1}(b,y)$ es válida para todos $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$.

Ejemplo 9.2.4. Un espacio métrico (X, d) es pesable mediante cualquier función constante $w(x) = c \in \mathbb{R}^+$. En particular, sea $X \subseteq \mathbb{R}$ cerrado bajo la suma. Si se toma a d como la métrica Euclideana y se define $w(x) = 1$ para toda $x \in X$, entonces la operación de la suma es firme con respecto a d y a w, y también es submultiplicativa con respecto a w.

Ejemplo 9.2.5. Sea F un conjunto finito no vacío y sea $X = \mathcal{P}(F)$. Si se definen las funciones $d(A,B) = |B \setminus A|$, y $w(A) = |A|$ para $A, B \subseteq F$, entonces (X, d, w) es un espacio cuasimétrico pesable. Aquí, la operación binaria dada por la intersección de subconjuntos de F es firme con respecto a d y a w, así como también submultiplicativa con respecto a w.

Ejemplo 9.2.6. Este ejemplo es muy similar al espacio dual de complejidad, ya que solo se extienden las operaciones al caso continuo. Considérese el espacio de funciones Riemann-integrables que se define a continuación, junto con la cuasimétrica d y la función de peso w, así como la siguiente operación de convolución continua.

$$X = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx < \infty \right\},$$

$$d(f,g) = \int_0^\infty e^{-x}\left[(g(x) - f(x)) \vee 0\right] dx,$$

$$w(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx.$$

$$(f * g)(s) = \int_0^s f(t)g(s-t)dt.$$

(X, d, w) es un espacio cuasimétrico pesable y es cerrado bajo la operación $*$, que es submultiplicativa con respecto a w y es firme con respecto a d y a w.

Lema 9.2.3. *Sea $*$ una operación binaria en el espacio cuasimétrico pesable (X, d, w). Para cada $x \in X$, definimos sus potencias derechas con respecto a la operación $*$, de la siguiente forma: $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n * x$, para exponentes enteros $n \geq 1$. Supóngase que $*$ es firme con respecto a d y a w y también que es submultiplicativa con respecto a w. En tal caso, la siguiente desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.*

$$d\left(x^n, y^n\right) \leq d(x, y) \sum_{k=1}^{n} w(x)^{n-k} w(y)^{k-1}.$$

Demostración. El caso $n = 1$ es trivial. Procediendo por inducción, se tiene:

$$\begin{aligned} d\left(x^{n+1}, y^{n+1}\right) &= d\left(x^n * x, y^n * y\right) \\ &\leq w(x) d\left(x^n, y^n\right) + w\left(y^n\right) d(x, y) \\ &\leq w(x) d(x, y) \sum_{k=1}^{n} w(x)^{n-k} w(y)^{k-1} + w\left(y^n\right) d(x, y) \\ &= d(x, y)\left(\sum_{k=1}^{n}\left[w(x)^{n-k+1} w(y)^{k-1}\right] + w\left(y^n\right)\right) \\ &\leq d(x, y) \sum_{k=1}^{n+1} w(x)^{n+1-k} w(y)^{k-1}. \end{aligned}$$

QED

El lema anterior es una generalización del inciso (ii) del corolario 9.1.12.

Proposición 9.2.4. *Dado un espacio cuasimétrico pesable (X, d, w), dotado de una operación binaria $* : X \times X \to X$, si esta operación es firme con respecto a d y a w, entonces es continua con respecto a la topología cuasimétrica $\tau(d)$ en X y a la correspondiente topología producto en $X \times X$. Este resultado es una generalización del lema 9.1.17.*

Corolario 9.2.5. *Bajo las hipótesis de la proposición 9.2.4, si la operación $*$ es asociativa y tiene un elemento neutro, entonces $(X, *, \tau(d))$ es un monoide topológico.*

Proposición 9.2.6. *Sea (X, d, w) un espacio cuasimétrico pesable. Si $* : X \times X \to X$ es una operación binaria firme con respecto a d y a w, entonces, dado un elemento fijo $a \in X$ de peso positivo, la función $f_a : X \to X$ definida por $f_a(x) = a * x$, $x \in X$, es cuasiuniformemente continua.*

El resultado anterior es una generalización del inciso (vi) de la proposición 9.1.23, mientras que el siguiente es una generalización del lema 9.1.19.

Proposición 9.2.7. *Sean $(x_n)_n, (y_n)_n$ sucesiones K-Cauchy por la izquierda en un espacio cuasimétrico pesable (X, d, w). Supóngase además que $* : X \times X \to X$ es una operación binaria firme con respecto a d y a w. En estas condiciones, la sucesión $(x_n * y_n)_n$ también es K-Cauchy por la izquierda.*

Proposición 9.2.8. *Como generalización de la proposición 9.1.21 se tiene que, dados un espacio cuasimétrico pesable (X, d, w) y una operación binaria $* : X \times X \to X$ firme con respecto a d y a w, supóngase que $x, y \in X$ y que $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son sucesiones en X. Se tiene lo siguiente:*

(i) Si la sucesión $(x_n)_n$ converge a x y la sucesión $(y_n)_n$ converge a y, ambas con respecto a d, entonces $(x_n * y_n)_n$ converge a $x * y$ con respecto a d.

(ii) Si la sucesión $(x_n)_n$ converge a x y la sucesión $(y_n)_n$ converge a y, ambas con respecto a d^s, entonces $(x_n * y_n)_n$ converge a $x * y$ con respecto a d^s.

(iii) Si la sucesión $(x_n)_n$ converge a x y la sucesión $(y_n)_n$ converge a y, ambas con respecto a d^{-1}, y además, o bien $(w(y_n))_n$ está acotada, o bien la operación $*$ es commutativa y la sucesión $(w(x_n))_n$ está acotada, entonces $(x_n * y_n)_n$ converge a $x * y$ con respecto a d^{-1}.

(iv) Si $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ convergen hacia adelante estadísticamente a x y a y, respectivamente, entonces la sucesión $(x_n * y_n)_n$ converge hacia adelante estadísticamente a $x * y$.

Conclusiones

Mediante la investigación desarrollada en este trabajo se encontraron las propiedades básicas que tiene la operación $\otimes$ de convolución de sucesiones en el espacio de complejidad de algoritmos $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ y en su espacio dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$, ambos espacios cuasimétricos pesables. En particular, se identificaron dos desigualdades, una que cumple la convolución en ambos espacios y otra que se cumple en el espacio dual $\mathcal{C}^*$. Se definieron como conceptos referentes al caso general de una operación binaria arbitraria en un espacio cuasimétrico pesable cualquiera. En este contexto generalizado, se demostraron algunas de las propiedades cuasimétricas y de convergencia que tienen necesariamente las operaciones binarias que cumplen dichas desigualdades en este tipo de espacios. También se encontró un método general para construir funcionales de mejora en el espacio de complejidad, utilizando la operación de convolución y el mapeo de inversión. Además, se consideraron tres topologías diferentes para el espacio de complejidad dual y se encontró que en dos de ellas la operación de convolución forma un monoide topológico. En vista de los resultados enunciados en el capítulo 9, podemos decir que se alcanzaron las metas y los objetivos planteados para este trabajo.

Considerando los resultados presentados en el capítulo anterior, se pueden plantear, como trabajo a futuro para continuar con esta línea de investigación, los problemas siguientes.

1. En la proposición 9.1.8 se da el orden de complejidad $\mathcal{O}$ de un producto convolución en términos del orden de uno de sus factores. ¿Hay resultados similares con respecto a otras cotas asintóticas, como Θ u Ω?

2. En el lema 9.1.17 se establece la continuidad de la operación convolución. No obstante, quedan abiertos estos dos problemas: ¿Es una función abierta? ¿Es cerrada?

3. Con relación a algunas de las propiedades que tiene la convolución en el espacio dual $\mathcal{C}^*$, como por ejemplo las enunciadas en las proposiciones 9.1.9, 9.1.21 o en el lema 9.1.19, se puede plantear la siguiente pregunta. ¿Son válidas estas propiedades también en el espacio de complejidad $\mathcal{C}$?

4. Dado un preorden, hay al menos tres topologías (no necesariamente distintas) que tienen al preorden dado como su preorden de especialización [32]. La más fina de estas topologías es la de Alexandrov, la más gruesa el la topología superior y entre estas dos se encuentra la topología de Scott. En este trabajo se estudió la continuidad de la convolución en $\mathcal{C}^*$ con respecto a la topología cuasimétrica, a la topología de Alexandrov del preorden opuesto al preorden cuasimétrico y con respecto a otra topología

intermedia. En el futuro se puede considerar la cuestión de la posible continuidad de la convolución con respecto a la topología de Scott o a la topología superior asociadas al preorden cuasimétrico de $\mathcal{C}^*$ o a su opuesto.

5. Es posible preguntarse qué relaciones hay entre las dos cuasimétricas, $d_{\mathcal{C}}$ y $d_{\mathcal{C}^*}$, en el espacio $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^*$, un subespacio común a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{C}^*$ que no es trivial, ya que contiene al menos a todos los polinomios estrictamente positivos.

6. En un contexto más general se pueden estudiar las posibles propiedades de las funciones definidas entre espacios cuasimétricos pesables dotados de una operación binaria, en el sentido de buscar condiciones sobre la función (ya sean necesarias o suficientes), para ver si la propiedad de que una de las dos operaciones sea firme, bien en el dominio o bien en el codominio, implique que la otra operación también lo sea.

Bibliografía

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. *Estructuras de datos y algoritmos*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

[2] F. G. Arenas. «Alexandroff spaces». En: *Acta Math. Univ. Comenianae* 68.1 (1999), págs. 17-25.

[3] W. Asness. *A brief overview of Alexandrov spaces*. The University of Chicago Mathematics REU. Mayo de 2018. eprint: `http://math.uchicago.edu.ezproxy.uindy.edu/~may/REU2018/REUPapers/Asness.pdf`.

[4] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*. Vol. 153. Mathematical Studies. Amsterdam New York: North-Holland, Elsevier Science Pub. Co., 1988.

[5] M. Baker. *Uniform structures and Berkovich spaces*. arXiv Mathematics e-prints. Jun. de 2006. arXiv: `math/0606252v1 [math.NT]`.

[6] T. Banakh y A. Ravsky. «Quasi-pseudometrics on quasi-uniform spaces and quasi-metrization of topological monoids». En: *Topology and its Applications* 200 (2016), págs. 19-43.

[7] H. J. Borchers y R. N. Sen. *Mathematical implications of Einstein-Weyl causality*. Vol. 709. Lect. Notes Phys. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, págs. 157-167.

[8] N. Bourbaki. *General topology I*. Berlin Heidelberg New York: Springer, 1989.

[9] P. J. Cameron. *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*. Cambridge New York Melbourne: Cambridge University Press, 1994.

[10] W. Chambers. *Topology*. 1st Edition. London: ETP, 2018.

[11] T. L. Chen. «The α-closure αX of a topological space X». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 22.3 (1969), págs. 620-624.

[12] O. Cheong, X. Goaoc y C. Nicaud. «Set systems and families of permutations with small traces». En: *European Journal of Combinatorics* 34 (2013), págs. 229-239.

[13] S. Cobzaş. «Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle». En: *Topology and its Applications* 58 (2011), págs. 1073-1084.

[14] S. Cobzaş. *Functional analysis in asymmetric normed spaces*. Basel Heidelberg New York: Birkhäuser - Springer, 2013.

[15] T. H. Cormen y col. *Introduction to Algorithms*. Second edition. New Delhi: Prentice-Hall of India, 2004.

[16] A. Császár. *Foundations of general topology.* New York: Pergamon Press, 1963.

[17] A. Dasdan. *Twelve simple algorithms to compute Fibonacci numbers.* arXiv Mathematics e-prints. Abr. de 2018. arXiv: `1803.07199v2 [cs.DS]`.

[18] A. S. Davis. «Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces». En: *The American Mathematical Monthly* 68.9 (1961), págs. 886-893.

[19] S. Diehl, P. Hartel y P. Sestoft. «Abstract machines for programming language implementation». En: *Future Generation Computer Systems* 16 (2000), págs. 739-751.

[20] D. Dikranjan y H. P. A. Künzi. «Separation and epimorphisms in quasi-uniform spaces». En: *Applied Categorical Structures* 8 (2000). Papers in Honour of Bernhard Banaschewski, págs. 175-207.

[21] D. Doitchinov. «A concept of completeness of quasi-uniform spaces». En: *Topology and its Applications* 38 (1991), págs. 205-217.

[22] J. Dugundji. *Topology.* Boston: Allyn y Bacon, Inc., 1966.

[23] H. B. Enderton. *Una introducción matemática a la lógica.* Primera edición en español. Filosofía Contemporánea. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1987.

[24] P. Fletcher y W. Hunsaker. «Symmetry conditions in terms of open sets». En: *Topology and its Applications* 45.1 (1992), págs. 39-47.

[25] P. Fletcher y W. F. Lindgren. «A construction of the pair completion of a quasi-uniform space». En: *Canad. Math. Bull.* 21.1 (1978), págs. 53-59.

[26] P. Fletcher y W. F. Lindgren. *Quasi-uniform spaces.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 77. New York Basel: Marcel Dekker, Inc., 1982.

[27] S. A. Gaal. *Point Set Topology.* Pure and Applied Mathematics 16. New York: Academic Press, 1966.

[28] L. M. García-Raffi, S. Romaguera y E. A. Sánchez-Pérez. «Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity». En: *Mathematical and Computer Modelling* 36.1-2 (2002), págs. 1-11.

[29] L. M. García-Raffi, S. Romaguera y M. P. Schellekens. «Applications of the complexity space to the general probabilistic divide and conquer algorithms». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 348.1 (2008), págs. 346-355.

[30] J. L. Gersting. *Mathematical Structures for Computer Science.* Third edition. New York: Computer Science Press : an imprint of W. H. Freeman y Company, 1993.

[31] A. Gibbons. *Algorithmic graph theory.* Cambridge New York Melbourne: Cambridge University Press, 1985.

[32] J. Goubault-Larrecq. *Non-Hausdorff topology and domain theory.* Vol. 22. New Mathematical Monographs. Cambridge New York Melbourne: Cambridge University Press, 2013.

[33] R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik. *Concrete Mathematics : a foundation for computer science.* Reading Menlo Park New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[34] V. Gregori y J. Ferrer. «Some classes of topological spaces with unique quasi-uniformity». En: *Canad. Math. Bull.* 29.4 (1986), págs. 446-449.

[35] R. P. Grimaldi. *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones*. Wilmington México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.

[36] C. A. Gunter, P. D. Mosses y D. S. Scott. *Semantic Domanis and Denotational Semantics*. Disponible en `https://repository.upenn.edu/cis_reports/845/` (2020/11/01). University of Pennsylvania Department of Computer and Information Science Technical Report No. MSCIS-89-16. Feb. de 1989.

[37] B. Iaffei H. Aimar y L. Nitti. «On the Macías-Segovia metrization of quasi-metric spaces». En: *Revista de la Unión Matemática Argentina* 41.2 (1998), págs. 67-75.

[38] K. Hart, J. Nagata y J. E. Vaughan. *Encyclopedia of general topology*. First edition. Amsterdam Boston: Elsevier North-Holland, 2004.

[39] J. M. Hernández-Morales, N. C. Castañeda-Roldán y L. C. Álvarez-Marín. «Properties of the convolution operation in the complexity space and its dual». En: *Revista de la Unión Matemática Argentina* (De próxima aparición).

[40] J. M. Hernández-Morales y M. A. Jiménez-Pozo. «Asymetric Hölder spaces of sign sensitive weighted integrable functions». En: *Communications in Mathematics and Applications* 3.1 (2012), págs. 39-50.

[41] J. M. Hernández-Morales y col. «Espacios con distancias no simétricas». En: *Temas de Ciencia y Tecnología* 18.53 (2014), págs. 3-9.

[42] J. E. Hopcroft, R. Motwani y J. D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Third edition. Boston San Francisco New York: Pearson Education - Addison Wesley, 2007.

[43] N. R. Howes. *Modern analysis and topology*. Universitext. New York: Springer-Verlag, 1995.

[44] T. Husain. *Topology and maps*. Vol. 5. International Scholars Forum. New York London: Plenum Press, 1977.

[45] B. Iaffei y L. Nitti. «A unified point of view on boundedness of Riesz type potentials». En: *Revista de la Unión Matemática Argentina* 59.1 (2018), págs. 99-121.

[46] M. Ilkhan y E. E. Kara. «On statistical convergence in quasi-metric spaces». En: *Demonstratio Mathematica* 52.1 (2019), págs. 225-236.

[47] I. M. James. *Topological and uniform spaces*. First edition. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987.

[48] I. M. James. *Topologies and uniformities*. Revised edition. Springer Undergraduate Mathematics Series. London: Springer-Verlag, 1999.

[49] J. L. Kelley. *General topology*. Reprint edition. Dover Books on Mathematics. Mineola New York: Dover Publications, 2017.

[50] J. C. Kelly. «Bitopological spaces». En: *Proc. London Math. Soc.* 3.13 (1963), págs. 71-89.

[51] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin. *Introductory real analysis*. First edition. Dover Books on Mathematics. New York: Dover Publications Inc., 1975.

[52] R. R. Korfhage. *Lógica y algoritmos, con aplicaciones a las ciencias de la computación e información*. Cuarta reimpresión. México, D. F.: Editorial Limusa, 1987.

[53] V. A. Kovalevsky. «Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes». En: *Proceedings of the Third International Colloquium "Discrete Geometry for Computer Imagery" (DGCI'93)*. University of Strasbourg. France, 1993, págs. 259-284.

[54] H. P. Künzi y M. P. Schellekens. «On the Yoneda completion of a quasi-metric space». En: *Theoretical Computer Science* 278 (2002), págs. 159-194.

[55] H. P. A. Künzi. «An introduction to quasi-uniform spaces». En: *Contemporary Mathematics* 486.(Beyond Topology) (2009), págs. 239-304.

[56] H. P. A. Künzi. «Nonsymmetric topology». En: *Colloq. Math. Soc. János Bolyai Math. Studies* 4.(Proc. Colloquium on Topology 1993 Szekszárd, Hungary) (1995), págs. 303-338.

[57] P. Th. Lambrinos. «On precompact (quasi) uniform structures». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 62.2 (1977), págs. 365-366.

[58] S. L. Lesseig. «Metrization of uniform spaces». Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree Master of Science. Tesis de mtría. Manhattan, Kansas: Kansas State University, Department of Mathematics, 1963.

[59] W. Li y D. Zhang. «Sober metric approach spaces». En: *Topology and its Applications* 233 (2018), págs. 67-88.

[60] S. G. Matthews. «Partial Metric Topology». En: *Proc. 8th Summer Conf. on General Topology and Applications; Ann. New York Acad. Sci.* 728 (1994), págs. 183-197.

[61] E. Minguzzi. «Quasi-pseudo-metrization of topological preordered spaces». En: *Topology and its Applications* 159 (2012), págs. 2888-2898.

[62] M. G. Murdeshwar y S. A. Naimpally. «R_1-Topological Spaces». En: *Canadian Mathematical Bulletin* 9.4 (1966), págs. 521-523.

[63] M. G. Murdeshwar y S. A. Naimpally. *Quasi-uniform topological spaces*. A. Groningen: Noordhoff, 1966.

[64] L. Nachbin. «Sur les espaces uniformes ordonnés». En: *Comptes Rendus Paris* 226 (1948), págs. 774-775.

[65] L. Nachbin. *Topology and order*. Princeton, NJ: D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.

[66] S. Oltra, S. Romaguera y E. A. Sánchez-Pérez. «Bicompleting weightable quasi-metric spaces and partial metric spaces». En: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 51 (2002), págs. 151-162.

[67] W. J. Pervin. «Quasi-uniformization of topological spaces». En: *Math. Annalen* 147 (1962), págs. 316-317.

[68] T. Pirttimäki. *A survey of Kolmogorov quotients*. arXiv Mathematics e-prints. Mayo de 2019. arXiv: `1905.01157v1 [math.GN]`.

[69] F. P. Preparata y M. I. Shamos. *Computational geometry : an introduction*. First edition. Texts and Monographs in Computer Science. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

[70] T. A. Richmond. *General Topology: an introduction*. De Gruyter Textbook. Berlin: De Gruyter, 2020.

[71] J. Rodríguez-López, S. Romaguera y O. Valero. «Denotational semantics for programming languages, balanced quasi-metrics and fixed points». En: *International Journal of Computer Mathematics* 85.3-4 (2008), págs. 623-630.

[72] S. Romaguera, E. A. Sánchez-Pérez y O. Valero. «The Dual Complexity Space as the Dual of a Normed Cone». En: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 161 (2006), págs. 165-174.

[73] S. Romaguera y M. Sanchis. «Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces». En: *Journal of Approximation Theory* 103.2 (2000), págs. 292-301.

[74] S. Romaguera y M. Schellekens. «Duality and quasi-normability for complexity spaces». En: *Applied General Topology* 3.1 (2002), págs. 91-112.

[75] S. Romaguera y M. Schellekens. «Quasi-metric properties of complexity spaces». En: *Topology and its Applications* 98.1 (1999), págs. 311-322.

[76] H. L. Royden. *Real analysis*. Third edition. New York London: Macmillan Collier Macmillan, 1988.

[77] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. New York Auckland Düsseldorf: McGraw-Hill Book Co., 1976.

[78] G. Salicrup. *Introducción a la topología*. México: Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[79] M. Schellekens. «On upper weightable spaces». En: *Annals of the New York Academy of Sciences* 806.1 (1996), págs. 348-363.

[80] M. Schellekens. «The correspondence between partial metrics and semivaluations». En: *Theoretical Computer Science* 315.1 (2004), págs. 135-149.

[81] M. Schellekens. «The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complexity analysis». En: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 1 (1995), págs. 535-556.

[82] M. Schellekens. «The Smyth completion: a common topological foundation for denotational semantics and complexity analysis». Tesis doct. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University, Department of Mathematics, sep. de 1995.

[83] D. S. Scott. «Outline of a mathematical theory of computation». En: *Proc. Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, 1970*. A revised and slightly expanded version is *Tech. Mono. PRG-2*, Programming Research Group, University of Oxford. 1970.

[84] D. S. Scott y C. Strachey. «Toward a mathematical semantics for computer languages». En: *Proc. Symp. on Computers and Automata, 1971*. Vol. 21. Microwave Research Institute Symposia Series. Polytechnic Institute of Brooklyn. Same text as *Tech. Mono. PRG-6*, Programming Research Group, University of Oxford. 1971.

[85] M. B. Smyth. «Completeness of quasi-uniform and syntopological spaces». En: *J. London Math. Soc.* 2.49 (1994), págs. 385-400.

[86] L. A. Steen y J. A. Seebach. *Counterexamples in topology*. Dover Books on Mathematics. New York: Dover Publications, 1995.

[87] E. Steinitz. «Beiträge zur Analysis situs». En: *Sitzungsberichte der Berliner Mathematische Gesellschaft* 7 (1908), págs. 29-49.

[88] R. E. Stong. «Finite topological spaces». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), págs. 325-340.

[89] P. Sünderhauf. «Quasi-uniform completeness in terms of Cauchy nets». En: *Acta Mathematica Hungarica* 69.1-2 (1995), págs. 47-54.

[90] P. Sünderhauf. «The Smyth completion of a quasi uniform space». En: *Semantics of Programming Languages and Model Theory*. Ed. por M. Droste e Y. Gurevich. Vol. 5. Algebra, Logic and Applications. Berlin Yverdon Amsterdam: Gordon y Breach Science Publishers, sep. de 1993, págs. 189-212.

[91] D. Tamari. «On a generalization of uniform structures and spaces». En: *Bull. Res. Council Israel* 3 (1954), págs. 417-428.

[92] V. A. Uspenski. *Máquina de Post*. Lecciones populares de matemáticas. Moscú: Editorial MIR, 1983.

[93] A. Weil. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Première édition. Actualités scientifiques et industrielles 551. Paris: Hermann & Cie Editeurs, 1937.

[94] J. D. Weston. «On the Comparison of Topologies». En: *Journal of the London Mathematical Society* s1-32.3 (1957), págs. 342-354. DOI: `https://doi.org/10.1112/jlms/s1-32.3.342`.

[95] Wikipedia. *Random-access machine*. Disponible en `https://en.wikipedia.org/wiki/Random-access_machine` (2023/05/18).