Universidad Tecnológica de la Mixteca

ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON APLICACIONES EN ECONOMÍA

Tesis para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

REYNA GUADALUPE PALACIOS CUEVAS

Director de tesis:

DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

Codirectora de tesis:

DRA. ANAHÍ ROJAS CARRASCO

H. Cd. de Huajuapan de León, Oaxaca

Marzo de 2023

Dedicatoria

A aquellos sin quienes no lo habría logrado;
Angelina Cuevas, José Palacios y Aldo Méndez.

Agradecimientos

A mi madre Angelina Reyna Cuevas Vásquez le agradezco por ser mi mayor mentora y mi mejor amiga. Por estar siempre para mí, dándome las palabras adecuadas en los momentos más complicados, siendo mi mayor ejemplo de superación y la persona que más admiro. También le agradezco por brindarme todo el apoyo que he necesitado durante toda mi vida y por toda la confianza depositada en mí.

A mi padre José Guadalupe Palacios Villa le agradezco por todas las palabras de aliento y la paciencia que me ha brindado. Por darme tantos consejos llenos de sabiduría y por no haber dudado de mí en ningún momento. Además, agradezco por ser un excelente ejemplo a seguir tanto personal, como profesionalmente.

A mi hermano Aldo Méndez Cuevas le agradezco por todo el cariño incondicional que me ha brindado a lo largo de mi vida. Por no dejarme sola nunca y darme tranquilidad cada vez que lo he requerido. Por último, le agradezco por ser un referente para la persona que quiero llegar a ser.

A mi novio Edrei Yael Santos García le agradezco por motivarme a seguir siempre adelante. Por todas las veces que escuchó mis problemas y me ayudó a resolverlos.

A Carlos Acevedo González por ser mi mejor amigo durante mi estadía en la universidad y por hacer todas las clases más agradables y amenas.

Al Dr. Franco Barragán Mendoza le agradezco por todo el apoyo brindado y el tiempo invertido en la elaboración de la tesis. Por impulsarme a seguir avanzando profesionalmente y motivarme a realizar siempre trabajos de calidad, demostrando que sin constancia y disciplina no se llega a nada. Finalmente, le agradezco por ser un excelente profesor que ha cultivado en mí el interés por las matemáticas en general.

A la Dra. Anahí Rojas Carrasco le agradezco su apoyo en todo momento en la realización de la tesis y por todas las sugerencias para mejorarla.

A mis revisores el Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, el Dr. Sergio Palafox Delgado y el Dr. Armando Romero Morales por el tiempo prestado en la lectura de la tesis y por realizar las correcciones pertinentes que sirvieron para mejorarla.

A todos los profesores por los conocimientos que me han compartido a lo largo de la licenciatura. Paricularmente, agradezco al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide por motivarme a mejorar mi desempeño académico, al Dr. Sergio Palafox Delgado por ser un ejemplo de disciplina y al Dr. Raúl Juárez Amaro por todos los consejos que me brindó.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Existen muchas cuestiones del mundo real de gran importancia que para su resolución requieren de la elaboración de modelos matemáticos que representen dicha situación, los cuales están conformados en su mayoría de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias, ya que son herramientas muy útiles de análisis [11]. Sin embargo, debido a sus diversas aplicaciones en áreas como Economía, Biología, Ingeniería, Sociología, Fisiología, entre otras, y como resultado de múltiples aportaciones para formulación de nueva teoría tanto de física como de matemáticas, se ha dado más difusión y énfasis a las ecuaciones diferenciales, por lo que las ecuaciones en diferencias son un poco menos conocidas, pero no por eso menos importantes, puesto que surgieron con la necesidad de describir un fenómeno en el transcurso del tiempo cuando es considerado discreto, algo que no podía ser representado mediante ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones en diferencias a pesar de su reciente aparición (durante la década de los cincuenta [22]), ya se habían utilizado, aunque de forma simple, desde la antigüedad por civilizaciones como la egipcia, la babilónica y la griega, principalmente.

Tiempo después, durante los siglos XII - XIX, fue el mayor desarrollo que tuvieron las ecuaciones en diferencias, sobre todo en Europa, al cual contribuyeron grandes matemáticos como Fibonacci (1180 - 1250), Taylor (1685 - 1731), Stirling (1692 - 1770), entre otros.

El primer método sistemático para resolver una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes es atribuido a Abraham de Moivre (1667 - 1754) [15].

En el siglo XVIII, H. Poincaré (1854 - 1912) brindó la mayoría de los aportes para crear los fundamentos de la teoría moderna de ecuaciones en diferencias lineales [9].

Adicionalmente, durante el siglo XVII, la construcción de algunos métodos para resolver diversas ecuaciones en diferencias fueron brindados por Broggi (1880 - 1965) y Milne - Thompson (1891 - 1974) [9].

Las ecuaciones en diferencias tuvieron un crecimiento notable en los últimos años, tal que desde mediados del siglo XX se considera como una rama de las matemáticas consolidada como parte de los sistemas dinámicos.

Por su carácter discreto, con el paso de los años y con el avance de la teoría matemática se han hallado diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento tales como Biomatemáticas, Física, Epidemiología, Finanzas, Economía, Ingeniería, entre otras. Por lo que puede decirse que esta área sigue en ascendencia y podría desarrollarse más teoría y hallarse nuevas aplicaciones.

Debido a que en el área de Economía hay diversos problemas que requieren de la utilización de variables económicas a intervalos fijos de tiempo se dice que el tiempo es de carácter discreto, por lo que es necesaria la implementación de las ecuaciones en diferencias, las cuales se ocupan para expresar el comportamiento de dichas variables [20].

Existen múltiples aplicaciones de las ecuaciones en diferencias en el área de Economía y Finanzas, tanto en el ámbito de microeconomía como de macroeconomía que no podrían ser resueltas de otra forma y en ocasiones la resolución de ecuaciones en diferencias son consideradas como una herramienta complementaria o alternativa de algunos modelos clásicos económicos, puesto que con ellas se pueden modelar problemas de la Matemática Financiera que representan situaciones más complejas que las que se resuelven utilizando técnicas clásicas [17].

En este trabajo de tesis estudiamos las ecuaciones en diferencias y analizamos su aplicación en la deducción y planteamiento de algunos modelos económicos, dependiendo de las ecuaciones en diferencias que utilicen, examinando principalmente la parte matemática y algunos conceptos económicos necesarios para una adecuada compresión de dichos modelos. Para la teoría referente a ecuaciones en diferencias, nuestra referencia principal fue [4].

Para lograr tales objetivos, el trabajo de tesis lo hemos organizado como se indica a continuación.

En el Capítulo 1 proporcionamos las notaciones y conceptos básicos que son necesarios para el buen desarrollo y entendimiento de los resultados que se analizan durante el trabajo.

Posteriormente, en el Capítulo 2 iniciamos con el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden; analizamos la parte cuantitativa proporcionando métodos de solución y examinamos la parte cualitativa a través del análisis de criterios de estabiliad. Finalizamos este capítulo proporcionando algunos modelos de Economía que son planteados y resueltos mediante este tipo de ecuaciones: Modelo de la telaraña, modelo simple sobre la tasa de empleo, modelo simple sobre consumo y renta, modelo simplificado de Harrod y modelo de amortización.

Las ecuaciones en diferencias de orden superior son analizadas en el Capítulo 3, iniciando con las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, para estas últimas se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Luego, examinamos el método de variación de parámetros para hallar soluciones de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes no constantes. También estudiamos las ecuaciones en diferencias no lineales, particularmente las que son de tipo Riccati. Para la aplicación de la parte teórica de este capítulo, se proporcionaron los modelos en Economía: Modelo de interacción de multiplicador con acelerador de Samuelson, modelo de Hicks, modelo de ingreso nacional y la ruina del apostador.

El Capítulo 4 lo dedicamos a estudiar los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales, donde hacemos un análisis teórico general, para despúes centrarnos en los sistemas de ecuacionen en diferencias lineales con coeficientes consatantes, para hallar la solución de estos sistemas nos auxuliamos del algoritmo de Putzer, la teoría de diagonalización de matrices y la teoría de la forma de Jordan para faciliar el cálculo de matrices fundamentales. Las aplicaciones de esta última parte las utilizamos en: Modelo de comercio, modelo dinámico de insumo-producto y modelo de ajuste de capital social.

Ecuaciones en diferencias con aplicaciones en Economía

Reyna Guadalupe Palacios Cuevas

Marzo de 2023

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo, se proporcionan los conceptos básicos que utilizamos a lo largo del desarrollo de la tesis. Las ecuaciones en diferencias generalmente describen la evolución de un fenómeno determinado en el tiempo, por lo que debido a su enfoque de tipo discreto, es importante estudiar conceptos previos tales como funciones discretas, cálculo de diferencias y operadores, entre otros temas, los cuales serán analizados de manera detallada en el trabajo de tesis. Por ahora, introducimos los conceptos básicos y fundamentales que nos ayudan a comprender los objetivos del presente proyecto, además de proporcionar un panorama teórico de los alcances que se pretenden cubrir.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

Como es usual $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los números enteros no negativos y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Dados dos conjuntos X y Y, una función de X en Y la denotamos por $f : X \to Y$. Particularmente, dados X un conjunto, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{Z}_+$, la n-ésima iteración de f se define como la composición reiterada de f consigo misma n veces y la denotamos por f^n, donde $f^1 = f$ y $f^0 = id_X$ (identidad en X). Si $A \subseteq X$, denotamos por $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k, cuando $k \geq 0$, y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. El conjunto A' es aquel que contiene todos los puntos de acumulación de A. Dada una matriz A, A^n denota el producto de dicha matriz consigo misma n veces y $A^0 = I$, además A^T representa la matriz transpuesta de A.

Por otra parte, proposiciones y acuerdos que utilizamos en los capítulos posteriores, sin hacer mención específica, son los siguientes:

- Binomio de Newton: Para a, $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

  (a) $(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

  (b) $(a-b)^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

- Sean a, $b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que:

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}. \tag{1.1.1}$$

- Sea $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ una función real. La suma telescópica:

$$\sum_{k=0}^{n} (x(k+1) - x(k)) = x(n+1) - x(0).$$

- Considerando $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y $n, n_0 \in \mathbb{Z}_+$, se denotan y definen:

  (a)

$$\prod_{i=n_0}^{n} x(i) = \begin{cases} x(n_0)x(n_0+1)\cdots x(n) & \text{si } n \geq n_0, \\ 1 & \text{si } n < n_0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

  (b)

$$\sum_{i=n_0}^{n} x(i) = \begin{cases} x(n_0) + x(n_0+1) + \cdots + x(n) & \text{si } n \geq n_0, \\ 0 & \text{si } n < n_0. \end{cases}$$

  (c) Si $a \in \mathbb{R}$ y $x(i) = a$, para cada $i \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que:

$$\prod_{i=n_0}^{n} x(i) = a^{n-n_0}.$$

  (d) Si $a \in \mathbb{R}$ y $x(i) = a$, para cada $i \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que:

$$\sum_{i=n_0}^{n} x(i) = (n - n_0)a.$$

A continuación mostramos otros resultados que son usados en el presente trabajo, que por ser básicos y conocidos omitimos las demostraciones, los interesados pueden consultar tales demostraciones en [16] y [1].

Proposición 1.1.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío con $a \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)| = |L|$.

Proposición 1.1.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$, $c \in \mathbb{R}$ con $c \geq 0$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) < c$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x-a| < \delta$, se cumple que $f(x) < c$.

(b) Si $c < \lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x-a| < \delta$, se cumple que $c < f(x)$.

Teorema 1.1.3. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $x(n) = x^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$:

(a) Si $|x| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$.

(b) Si $|x| > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \infty$.

Teorema 1.1.4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es continua en $p \in A$ si y sólo si para cada $\{x(n)\} \subseteq A$ con $x(n) \to p$, se tiene que $f(x(n)) \to f(p)$.

1.2. Funciones discretas y diferencia de funciones

Definición 1.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{R}$ es *discreta* si A es numerable.

Ejemplo 1.2.2. Un bien material costó originalmente \$1 000.00. Teniendo en cuenta que está sujeto a cierta depreciación con cada año que pasa, su valor depreciado puede calcularse de la forma siguiente:

$$f(n) = 1000(1 - 0.05)^n,$$

donde $n \in \mathbb{Z}_+$ representa el año de envejecimiento. En este caso $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Así, f es una función discreta.

Álgebra de funciones

Definición 1.2.3. Sean $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dos funciones.

1. La *suma de las funciones f y g* se denota por $f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y se define por:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

2. La *resta de las funciones f y g* se denota por $f - g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y se define por:

$$(f - g)(n) = f(n) - g(n),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

3. El *producto de las funciones f y g* se denota por $fg : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y se define por:
$$(fg)(n) = f(n)g(n),$$
para cada $n \in \mathbb{Z}$.

4. El *cociente de las funciones f y g* se denota por $\frac{f}{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y se define por:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}, \quad g(n) \neq 0,$$
para cada $n \in \mathbb{Z}$.

5. El *producto de un escalar $c \in \mathbb{R}$ por la función f* se denota por $cf : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y se define por:
$$(cf)(n) = cf(n),$$
para cada $n \in \mathbb{Z}$.

El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, esto es:
$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \{x | x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}.$$

No es difícil verificar que $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ con las dos operaciones usuales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Diferencia de una función

Definición 1.2.4. Sea $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ una función.

(a) La *función diferencia* de f se denota por $\Delta f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y se define por:
$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$
para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

(b) La *función incremento o corrimiento (shift)* de f se denota por $Ef : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ y se define por:
$$Ef(n) = f(n+1),$$
para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Por la Definición 1.2.4-(a), dada $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, se tiene que la Δf también es una función. Esto es, podemos obtener la diferencia de Δf, la cual denotamos por $\Delta^2 f$ y se le llama doble diferencia de f. De manera similar, se obtiene la triple diferencia de f, es decir, $\Delta^3 f$. Así, de manera inductiva, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima diferencia de f, está dada por:
$$\Delta^k f = \Delta\Delta^{k-1} f.$$

Ejemplo 1.2.5. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tales que $f(n) = c$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

- La función diferencia de f es $\Delta f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta f(n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= f(n+1) - f(n)\\ &= c - c\\ &= 0.\end{aligned}$$

- La función incremento de f es $Ef : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $Ef(n) = c$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$\begin{aligned}Ef(n) &= f(n+1)\\ &= c.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.6. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tales que $f(n) = cn$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

- La función diferencia de f es $\Delta f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta f(n) = c$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= f(n+1) - f(n)\\ &= c(n+1) - cn\\ &= cn + c - cn\\ &= c.\end{aligned}$$

- La función incremento de f es $Ef : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $Ef(n) = cn + c$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

  En efecto:

$$\begin{aligned}Ef(n) &= f(n+1)\\ &= c(n+1)\\ &= cn + c.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.7. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tales que $f(n) = an + b$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

- La función diferencia de f es $\Delta f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta f(n) = a$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= f(n+1) - f(n)\\ &= (a(n+1) + b) - (an + b)\\ &= an + a + b - an - b\\ &= a.\end{aligned}$$

- La función incremento de f es $Ef : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $Ef(n) = a(n+1) + b$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

  En efecto:

$$\begin{aligned} Ef(n) &= f(n+1) \\ &= a(n+1) + b. \end{aligned}$$

1.3. Cálculo en diferencias y operadores

Iniciamos esta sección proporcionando algunos aspectos esenciales del cálculo en diferencias que se utilizan después en la resolución de las ecuaciones en diferencias de orden superior.

El cálculo en diferencias es análogo al cálculo diferencial, utilizando el tiempo discreto. El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}_+$ en $\mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, esto es:

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) = \{x | x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}\}.$$

Notar que $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, con las operaciones usuales.

Definición 1.3.1. Definimos los siguientes operadores sobre $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$:

1. El *operador incremento o corrimiento (shift)* se denota por $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y se define como:

$$E(x) = Ex, \text{ para cada } x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

   donde Ex es la función incremento de x, es decir, $Ex(n) = x(n+1)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. El *operador diferencia* se denota por $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y se define como:

$$\Delta(x) = \Delta x, \text{ para cada } x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

   donde Δx es la función diferencia de x, es decir, $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

3. El *operador identidad* se denota por $I : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y se define como:

$$I(x) = Ix, \text{ donde } Ix(n) = x(n), \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Referente a estos operadores, con el objetivo de hacer práctica y accesible la notación, en este trabajo también usamos la notación $\Delta(x(n))$ para $\Delta x(n)$, de acuerdo a las necesidades, de manera similar para los operadores E e I.

Proposición 1.3.2. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Se cumple que:

$$E^k(x(n)) = x(n+k),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para $k = 1$, se tiene que:

$$E^1(x(n)) = x(n+1).$$

Supongamos que $E^k(x(n)) = x(n+k)$. Veamos que $E^{(k+1)}(x(n)) = x(n+(k+1))$.

$$\begin{aligned} E^{k+1}(x(n)) &= E(E^k(x(n))) \\ &= E(x(n+k)) \\ &= x(n+(k+1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E^k(x(n)) = x(n+k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. ■

Otra propiedad de los tres operadores, que no es difícil de verificar es: $\Delta = E - I$.

Teorema 1.3.3. El operador diferencia $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es lineal.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \Delta(x(n) + y(n)) &= (x(n+1) + y(n+1)) - (x(n) + y(n)) \\ &= (x(n+1) - x(n)) + (y(n+1) - y(n)) \\ &= \Delta x(n) + \Delta y(n). \end{aligned}$$

Ahora, sea $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta(ax(n)) &= ax(n+1) - ax(n) \\ &= a(x(n+1) - x(n)) \\ &= a\Delta x(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Δ es lineal. ■

Teorema 1.3.4. El operador incremento $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es lineal.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} E(x(n) + y(n)) &= x(n+1) + y(n+1) \\ &= Ex(n) + Ey(n). \end{aligned}$$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} E(ax(n)) &= ax(n+1) \\ &= aEx(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, E es lineal. ■

Proposición 1.3.5. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia. Se cumple que, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i).$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Considerando el operador incremento $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y el operador identidad $I : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, se tiene que $\Delta = E - I$. Luego:

$$\Delta^k x(n) = (E-I)^k(x(n)).$$

Luego, usando la fórmula del Binomio de Newton, se tiene que:

$$(E-I)^k(x(n)) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} I^i(x(n)) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i).$$

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i).$$

Con todo, se tiene el resultado. ∎

Con argumentos similares se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3.6. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador incremento y $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia. Se cumple que, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i}(x(n)).$$

Teorema 1.3.7 (Fundamental del cálculo, versión discreta)**.** Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, n, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ y $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(a)
$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0).$$

(b)
$$\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n). \tag{1.3.1}$$

Demostración. (a) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) &= \sum_{k=n_0}^{n-1} (x(k+1) - x(k)) \\ &= (x(n_0+1) - x(n_0)) + (x(n_0+2) - x(n_0+1)) \\ &\quad + \cdots + (x(n) - x(n-1)) \\ &= x(n) - x(n_0).\end{aligned}$$

(b) Notemos que:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) &= \sum_{k=n_0}^{n} x(k) - \sum_{k=n_0}^{n-1} x(k) \\ &= (x(n_0) + x(n_0+1) + \cdots + x(n-1) + x(n)) \\ &\quad - (x(n_0) + x(n_0+1) + \cdots + x(n-1)) \\ &= (x(n_0) - x(n_0)) + (x(n_0+1) - x(n_0+1)) \\ &\quad + \cdots + (x(n-1) - x(n-1)) + x(n) \\ &= x(n).\end{aligned}$$

De (a) y (b) se sigue el resultado. ■

Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia, $k \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que p es un polinomio de grado k, digamos que $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ para cualquier $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta p(n) &= (a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k) - (a_0 n^k + a_1^{k-1} + \cdots + a_k) \\ &= a_0 k n^{k-1} + \text{términos de grado menor a } k-1 \\ \Delta^2 p(n) &= a_0 k(k-1) n^{k-2} + \text{términos de grado menor a } k-2 \\ \Delta^k p(n) &= a_0 k!\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

La potencia incremento o corrimiento (shift)

Sean $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador incremento, $I : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador identidad, $k \in \mathbb{N}$ y p un polinomio de grado k con variable E, esto es:

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I,$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, para cualquier $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Sea $b \in \mathbb{R}$ una constante. Se sigue que:

$$\begin{aligned}
p(E)(b^n) &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)(b^n) \\
&= a_0E^k(b^n) + a_1E^{k-1}(b^n) + \cdots + a_kI(b^n) \\
&= a_0b^{n+k} + a_1b^{n+k-1} + \cdots + a_kb^n \\
&= (a_0b^k + a_1b^{k-1} + \cdots + a_k)b^n \\
&= p(b)b^n.
\end{aligned}$$

Esto se puede generalizar de la forma siguiente:

Lema 1.3.8. Sean $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador incremento, $I : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador identidad, $k \in \mathbb{N}$, p un polinomio de grado k con variable E, digamos $p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI$, donde $a_i \in \mathbb{R}$, para cualquier $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ y $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que:

$$p(E)(b^ng(n)) = b^np(bE)(g(n)),$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es una constante.

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
p(E)(b^ng(n)) &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)(b^ng(n)) \\
&= a_0E^k(b^ng(n)) + a_1E^{k-1}(b^ng(n)) + \cdots + a_k(b^ng(n)) \\
&= a_0b^{n+k}g(n+k) + a_1b^{n+k-1}g(n+k-1) + \cdots + a_kb^ng(n) \\
&= b^n(a_0b^kg(n+k) + a_1b^{k-1}g(n+k-1) + \cdots + a_kg(n)) \\
&= b^n(a_0b^kE^k(g(n)) + a_1b^{k-1}E^{k-1}(g(n)) + \cdots + a_kI(g(n))) \\
&= b^n(a_0(b^kE^k) + a_1(b^{k-1}E^{k-1}) + \cdots + a_kI)g(n) \\
&= b^np(bE)g(n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(E)(b^ng(n)) = b^np(bE)g(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

Polinomios factoriales

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. El *k-ésimo factorial de x* se denota y define como:

$$x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

Adicionalmente, se define:

$$x^{(-k)} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}.$$

y $x^{(0)} = 1$.

Si $x = n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$, se tiene que:

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ y } n^{(n)} = n!$$

Podemos extender las definiciones del operador diferencia $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y del operador incremento $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ a funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la forma siguiente, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Delta f(t) &= f(t+1) - f(t), \\ Ef(t) &= f(t+1). \end{aligned}$$

Con esto, podemos definir $\Delta f(x)$ y $Ef(x)$ donde $f(x) = x^{(k)}$, con $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. Esto significa que:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= (x+1)^{(k)} - x^{(k)}, \\ Ex^{(k)} &= (x+1)^{(k)}. \end{aligned}$$

Lema 1.3.9. Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia, $x \in \mathbb{R}$ y k, $n \in \mathbb{N}$. Son verdaderas las siguientes afirmaciones:

(a)
$$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}. \tag{1.3.2}$$

(b)
$$\Delta^n \left(x^{(k)}\right) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{(k-n)}.$$

(c)
$$\Delta^k \left(x^{(k)}\right) = k!$$

Demostración. (a) Se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \\ &= ((x+1)(x)(x-1)\cdots(x-k+2)) - (x(x-1)\cdots(x-k+2)(x-k+1)) \\ &= ((x+1) - (x-k+1))(x(x-1)\cdots(x-k+2)) \\ &= kx^{(k-1)}. \end{aligned}$$

(b) Para $n = 1$, del inciso (a), se sigue que:

$$\Delta^1 \left(x^{(k)}\right) = kx^{(k-1)}.$$

Para $n = 2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta^2\left(x^{(k)}\right) &= \Delta\left(\Delta x^{(k)}\right)\\ &= \Delta\left(kx^{(k-1)}\right)\\ &= k\Delta\left(x^{(k-1)}\right)\\ &= k(k-1)x^{(k-2)}.\end{aligned}$$

Para $n = 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta^3\left(x^{(k)}\right) &= \Delta\left(\Delta^2\left(x^{(k)}\right)\right)\\ &= \Delta\left(k(k-1)x^{(k-2)}\right)\\ &= k(k-1)\Delta\left(x^{(k-2)}\right)\\ &= k(k-1)(k-2)x^{(k-3)}.\end{aligned}$$

Si se realiza esto inductivamente para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\Delta^n\left(x^{(k)}\right) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{(k-n)}$.

(c) Del inciso (b), si $n = k$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\Delta^k\left(x^{(k)}\right) &= k(k-1)\cdots(k-k+1)x^{(k-k)}\\ &= k(k-1)\cdots(1)(1)\\ &= k!\end{aligned}$$

De (a), (b) y (c), se sigue el resultado. ■

De forma similar, se puede probar el Lema 1.3.9 para $k \in \mathbb{Z}^-$. Con esto, las afirmaciones de dicho lema son válidas para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Existen las reglas del producto y del cociente para el cálculo en diferencias, como lo vemos a continuación.

Proposición 1.3.10. Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia y $E : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador incremento, x, $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Los siguientes enunciados son verdaderos:

(a)

$$\Delta\left[x(n)y(n)\right] = E(x(n))\Delta(y(n)) + y(n)\Delta(x(n)). \tag{1.3.3}$$

(b)

$$\Delta\left[\frac{x(n)}{y(n)}\right] = \frac{y(n)\Delta(x(n)) - x(n)\Delta(y(n))}{y(n)E(y(n))}.$$

Demostración. (a) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[x(n)y(n)\right] &= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n) \\
&= x(n+1)y(n+1) - x(n+1)y(n) + x(n+1)y(n) - x(n)y(n) \\
&= x(n+1)(y(n+1) - y(n)) + y(n)(x(n+1) - x(n)) \\
&= E(x(n))\Delta(y(n)) + y(n)\Delta(x(n)).
\end{aligned}$$

(b) Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{x(n)}{y(n)}\right] &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)} \\
&= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1)}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n) + x(n)y(n) - x(n)y(n+1)}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{y(n)(x(n+1) - x(n)) - x(n)(y(n+1) - y(n))}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{y(n)\Delta(x(n)) - x(n)\Delta(y(n))}{y(n)E(y(n))}.
\end{aligned}$$

De (a) y (b), se sigue el resultado. ■

El operador antidiferencia

Definición 1.3.11. Para cada $f,\ F \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, el *operador antidiferencia* se denota por $\Delta^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y se define como:

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c, \text{ si } \Delta F(n) = f(n),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

Ejemplo 1.3.12. Sean $F \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que F es la función constante a, donde $a \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que g es la función constante cero. Notemos que en este caso $\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = a - a = 0$. De donde, $\Delta^{-1} g(n) = \Delta^{-1}(0) = F(n) + c_1 = a + c_1 = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es alguna constante. En resumen, la antidiferencia de la función constante cero, es una constante.

Ejemplo 1.3.13. Sea $F \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $F(n) = an$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $a \in \mathbb{R}$ es alguna constante. En este caso $\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = a(n+1) - an = a$. De donde, $\Delta^{-1}(a) = F(n) + c_1 = na + c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es alguna constante. Así, la antidiferencia de la función constante a es $na + c$, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.3.14. Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador diferencia, $\Delta^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador antidiferencia f, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) $\Delta(\Delta^{-1} f(n)) = f(n)$.

(b) $\Delta^{-1}(\Delta F(n)) = F(n) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.

Demostración. (a) Del Teorema 1.3.3, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta^{-1} f(n)) &= \Delta(F(n) + c)\\ &= \Delta F(n) + \Delta(c)\\ &= f(n) + 0\\ &= f(n).\end{aligned}$$

(b) Se sigue que:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(\Delta F(n)) &= \Delta^{-1}(f(n))\\ &= F(n) + c.\end{aligned}$$

El resultado se sigue de (a) y (b). ∎

Proposición 1.3.15. Sean $\Delta^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador antidiferencia, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $c \in \mathbb{R}$ una constante. Se cumple que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c. \tag{1.3.4}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. De (1.3.1) y la Proposición 1.3.14-(b), se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right) &= f(n)\\ \Delta^{-1}\left(\Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right)\right) &= \Delta^{-1} f(n)\\ \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c &= \Delta^{-1} f(n).\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ∎

Teorema 1.3.16. El operador $\Delta^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es lineal.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. De la Proposición 1.3.15, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(x(n)+y(n)) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x(i)+y(i))+c \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}x(i)+\sum_{i=0}^{n-1}y(i)+c_1+c_2,\ c=c_1+c_2 \\ &= \Delta^{-1}(x(n))+\Delta^{-1}(y(n)).\end{aligned}$$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(ax(n)) &= \sum_{i=0}^{n-1}(ax(i))+c \\ &= a\sum_{i=0}^{n-1}x(i)+c \\ &= a\Delta^{-1}(x(n)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, Δ^{-1} es lineal. ∎

Lema 1.3.17. Sean $\Delta^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ el operador antidiferencia y $n \in \mathbb{Z}_+$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumplen los siguientes argumentos:

(a) $\Delta^{-k}(0) = c_1n^{k-1} + c_2n^{k-2} + \cdots + c_k$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

(b) $\Delta^{-k}(1) = \frac{n^k}{k!} + c_1n^{k-1} + c_2n^{k-2} + \cdots + c_k$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

(c) $\Delta^{-1}n^{(k)} = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1} + c$, con $k \neq 1$ y $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) Para $k = 1$, se tiene que:

$$\Delta^{-1}(0) = c_1.$$

Para $k = 2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta^{-2}(0) &= \Delta^{-1}(\Delta^{-1}(0)) \\ &= \Delta^{-1}(c_1) \\ &= c_1n + c_2.\end{aligned}$$

Para $k = 3$, se tiene que:

$$\Delta^{-3}(0) = \Delta^{-1}(\Delta^{-2}(0))$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^{-1}(a_1 n + a_2), \quad \text{donde } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \\
&= a_1 \Delta^{-1}(n) + \Delta^{-1}(a_2) \quad \text{(Teorema 1.3.16)} \\
&= a_1 \left(\frac{n^2}{2}\right) + b_1 + a_2 n + b_2, \quad \text{donde } b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\
&= \left(\frac{a_1}{2}\right) n^2 + a_2 n + a_3, \;\; \text{con } a_3 = b_1 + b_2 \\
&= c_1 n^2 + c_2 n + c_3.
\end{aligned}$$

donde $c_1 = \frac{a_1}{2}$, $c_2 = a_2$ y $c_3 = a_3$.

Si se realiza esto inductivamente para $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\Delta^{-k}(0) = c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k.$$

(b) Para $k = 1$, se tiene que:

$$\Delta^{-1}(1) = n + c_1.$$

Para $k = 2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta^{-2}(1) &= \Delta^{-1}(\Delta^{-1}(1)) \\
&= \Delta^{-1}(n + a_1), \quad \text{donde } a_1 \in \mathbb{R} \\
&= \Delta^{-1}(n) + \Delta^{-1}(a_1) \quad \text{(Teorema 1.3.16)} \\
&= \frac{n^2}{2} + b_1 + a_1 n + b_2, \quad \text{donde } b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{n^2}{2!} + c_1 n + c_2.
\end{aligned}$$

donde $c_1 = a_1$ y $c_2 = b_1 + b_2$.

Para $k = 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta^{-3}(1) &= \Delta^{-1}(\Delta^{-2}(1)) \\
&= \Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{2!} + a_1 n + a_2\right), \quad \text{donde } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2!}\Delta^{-1}(n^2) + a_1 \Delta^{-1}(n) + \Delta^{-1}(a_2) \quad \text{(Teorema 1.3.16)} \\
&= \frac{1}{2!}\left(\frac{n^3}{3}\right) + b_1 + a_1\left(\frac{n^2}{2}\right) + b_2 + a_2 n + b_3, \quad \text{donde } b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{n^3}{3!} + \left(\frac{a_1}{2}\right) n^2 + a_2 n + b_1 + b_2 + b_3 \\
&= \frac{n^3}{3!} + c_1 n^2 + c_2 n + c_3.
\end{aligned}$$

donde $c_1 = \frac{a_1}{2}$, $c_2 = a_2$ y $c_3 = b_1 + b_2 + b_3$.

Si se realiza esto inductivamente para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $\Delta^{-k}(1) = \frac{n^k}{k!} + c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k$.

(c) De (1.3.2), se sigue que:

$$\Delta n^{(i)} = i n^{(i-1)},$$

donde $i \in \mathbb{N}$.

Pongamos $i = k+1$. De la Proposición 1.3.14-(b) y el Teorema 1.3.3, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(k+1)} &= (k+1)n^{(k)} \\
n^{(k)} &= \frac{1}{k+1}\Delta n^{(k+1)} \\
\Delta^{-1}\left(n^{(k)}\right) &= \frac{1}{k+1}\Delta^{-1}\left(\Delta n^{(k+1)}\right) \\
&= \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + c.
\end{aligned}$$

con $k \neq -1$.

De (a), (b) y (c) se sigue el resultado. ■

Adicionalmente, existe una versión discreta de la fórmula de integración por partes del cálculo integral que podemos denominar suma por partes.

Proposición 1.3.18. Dados $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

Demostración. De (1.3.3), se tiene que:

$$\Delta[x(n)y(n)] = E(x(n))\Delta(y(n)) + y(n)\Delta(x(n)).$$

Lo cual implica que:

$$y(n)\Delta(x(n)) = \Delta[x(n)y(n)] - E(x(n))\Delta(y(n)).$$

De aquí, por la Proposición 1.3.14-(b), se deduce que:

$$\Delta^{-1}(y(n)\Delta x(n)) = x(n)y(n) - \Delta^{-1}(Ex(n)\Delta y(n)) + c_1, \qquad \text{donde } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, de (1.3.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) + c_2 &= x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c_3 + c_1, \qquad \text{donde } c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\
\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) &= x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c,
\end{aligned}$$

donde $c = c_1 - c_2 + c_3$.

Como se quería demostrar. ■

1.4. Formulación general de una ecuación en diferencias

En esta sección introducimos el concepto que es la parte fundamental de este trabajo, a saber, las ecuaciones en diferencias.

Definición 1.4.1. Sean $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Una *ecuación en diferencias* determinada por x es una relación entre la variable n, la función x y una o más de sus diferencias Δx, $\Delta^2 x$, ..., $\Delta^k x$. Tal relación generalmente se expresa de manera explícita como:

$$G(\Delta^k x(n), \Delta^{k-1} x(n), \ldots, \Delta x(n), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.4.1}$$

donde $G : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es alguna función real.

Notemos que usando (1.3.5), se tiene que toda ecuación en diferencias (1.4.1) se puede expresar de la siguiente manera, y viceversa:

$$F(x(n+k), x(n+k-1), \ldots, x(n-1), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.4.2}$$

donde $F : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es alguna función real.

Ejemplo 1.4.2. Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la ecuación en diferencias:

$$G(\Delta x(n), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.4.3}$$

donde $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ está dada por $G(u, v, n) = au + bv$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Así, por (1.4.3) y la forma de G, se sigue que son equivalentes:

$$\begin{aligned} a\Delta x(n) + bx(n) &= 0 \\ a(x(n+1) - x(n)) + bx(n) &= 0 \\ ax(n+1) - ax(n) + bx(n) &= 0 \\ ax(n+1) + (b-a)x(n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Considerando la función $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $F(u, v, n) = au + (b-a)v$, se tiene que la ecuación (1.4.4) se puede escribir como:

$$F(x(n+1), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.4.5}$$

De esta manera, la ecuación (1.4.3) se puede expresar como la ecuación (1.4.5), y viceversa.

Ejemplo 1.4.3. Sean $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la ecuación en diferencias:

$$G(\Delta^2 x(n), \Delta x(n), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.4.6}$$

donde $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ está definida como $G(u, v, z, n) = 5u + 16v + 21z$.

Así, por (1.4.6) y la forma de G, se sigue que son equivalentes:

$$\begin{aligned}
5\Delta^2 x(n) + 16\Delta x(n) + 21x(n) &= 0\\
5\Delta(x(n+1) - x(n)) + 16(x(n+1) - x(n)) + 21x(n) &= 0\\
5(x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)) + 16(x(n+1) - x(n)) + 21x(n) &= 0\\
5x(n+2) - 10x(n+1) + 5x(n) + 16x(n+1) - 16x(n) + 21x(n) &= 0\\
5x(n+2) + (16-10)x(n+1) + (21+5-16)x(n) &= 0\\
5x(n+2) + 6x(n+1) + 10x(n) &= 0. \qquad (1.4.7)
\end{aligned}$$

Considerando la función $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $F(u,v,z,n) = 5u + 6v + 10z$, se tiene que la ecuación (1.4.7) se puede escribir como:

$$F(x(n+2), x(n+1), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (1.4.8)$$

De esta forma, la ecuación (1.4.6) se puede expresar como la ecuación (1.4.8), y viceversa.

La ecuación (1.4.2) es la más usada en la literatura para definir una ecuación en diferencias. Además, la ecuación (1.4.2) también se denota por:

$$F(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \ldots, x_{n-1}, x_n, n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

En este trabajo usamos la notación dada en (1.4.2) para denotar una ecuación en diferencias, de manera general.

Notar que la ecuación (1.4.2), es equivalente a:

$$F(x(n+1), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-k+1), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (1.4.9)$$

1.5. Clasificación de ecuaciones en diferencias

Definición 1.5.1. El *orden* de una ecuación en diferencias es el mayor índice menos el menor índice de los términos de la respectiva ecuación.

Así, el orden de la ecuación (1.4.2) es k.

En la teoría de ecuaciones en diferencias existe una clasificación muy útil de dichas ecuaciones, que hace referencia a si estas dependen o no del parámetro n.

Definición 1.5.2. Se dice que la ecuación en diferencias de orden k, (1.4.2), es *homogénea o autónoma* si no depende explícitamente del parámetro n, es decir, (1.4.2) se puede escribir como:

$$F(x(n+k), x(n+k-1), \ldots, x(n-1), x(n)) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

En caso contrario (cuando (1.4.2) sí depende explícitamente de n), se dice que la ecuación (1.4.2) es *no homogénea o no autónoma*.

En este proyecto de tesis trabajamos con ecuaciones en diferencias del tipo (1.4.2) que se pueden resolver para $x(n+k)$, las cuales se definen a continuación:

Definición 1.5.3. La ecuación en diferencias de orden k, (1.4.2), se dice que es:

1. *Normal* si existe alguna función real $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que:

$$x(n+k) = f(x(n+k-1), \ldots, x(n-1), x(n), n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

2. *Lineal* si existe alguna función real $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que f es lineal y:

$$x(n+k) = f(x(n+k-1), \ldots, x(n-1), x(n), n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.5.1}$$

En general, las ecuaciones en diferencias se pueden clasificar según su orden, propiedades de la función f (lineales, no lineales, etc), homogeneidad y tipo de coeficientes, principalmente.

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias y la clasificación que se les puede dar mediante los criterios mencionados.

Ejemplo 1.5.4 (Método de Newton-Raphson)**.** Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Este método es uno de los métodos numéricos más famoso para hallar las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. El algoritmo de Newton para hallar un cero x^* de dicha función se determina mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) = x(n) - \frac{g(x(n))}{g'(x(n))}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}$.

Esta ecuación en diferencias es de primer orden, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes.

Ejemplo 1.5.5 (Factorial)**.** Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. El número $n!$ puede representarse mediante la ecuación en diferencias siguiente:

$$x(n+1) = (n+1)x(n),$$

donde $x(0) = 1$.

Esta ecuación en diferencias es de primer orden, lineal, homogénea y de coeficientes no constantes.

Ejemplo 1.5.6. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Considere la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(n+2) - y(n) = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Esta ecuación en diferencias es de segundo orden, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes.

Ejemplo 1.5.7. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Considere la ecuación en diferencias siguiente:

$$y^2(n+1) - (n+2)y(n+1)y(n) + 2ny^2(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Esta ecuación en diferencias es de primer orden, no lineal, homogénea y de coeficientes no constantes.

En este proyecto estamos interesados, entre otras cosas, en estudiar las propiedades numéricas de las ecuaciones en diferencias, es decir, estudiar los métodos para hallar soluciones numéricas.

Definición 1.5.8. Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Se dice que u es una *solución* de la ecuación en diferencias (1.4.2), si al reemplazar dicha función y sus diferencias en la ecuación, se obtiene una identidad, es decir:

$$F(u(n+k), u(n+k-1), \ldots, u(n-1), u(n), n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ejemplo 1.5.9. La función $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $u(n) = \frac{3}{1+3n}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$(1 + y(n))y(n+1) - y(n) = 0,$$

donde $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(1+u(n))u(n+1) - u(n) &= \left(1 + \frac{3}{1+3n}\right)\left(\frac{3}{1+3(n+1)}\right) - \frac{3}{1+3n} \\
&= \left(\frac{1+3n+3}{1+3n}\right)\left(\frac{3}{1+3(n+1)}\right) - \frac{3}{1+3n} \\
&= \frac{3(1+3n+3)}{(1+3n)(1+3(n+1))} - \frac{3}{1+3n} \\
&= \frac{3(1+3n+3) - 3(1+3n+3)}{(1+3n)(1+3(n+1))} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.10. La función $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $u(n) = n^2$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0,$$

donde $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

En efecto, se sigue que:

$$\begin{aligned} u(n+3) - 3u(n+2) + 3u(n+1) - u(n) &= (n+3)^2 - 3(n+2)^2 + 3(n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 6n + 9 - 3(n^2 + 4n + 4) \\ &\quad + 3(n^2 + 2n + 1) - n^2 \\ &= n^2 + 6n + 9 - 3n^2 - 12n - 12 + 3n^2 \\ &\quad + 6n + 3 - n^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La *solución general* de una ecuación en diferencias es el conjunto de todas las soluciones, mientras que una *solución particular* es la que se obtiene al analizar las condiciones iniciales brindadas en el problema para la determinación de los parámetros requeridos. Se analizan los principales métodos de resolución para cada tipo de ecuación y la aplicación relacionada con el ámbito de economía.

No siempre es sencillo hallar la solución de una ecuación en diferencias. En lo que resta de la tesis mostramos métodos para hallar dichas soluciones, de acuerdo al tipo de ecuaciones en diferencias, todo esto, con la teoría necesaria correspondiente a cada método.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN

2.1. Ecuaciones en diferencias lineales

El estudio de ecuaciones en diferencias lineales en general es muy importante, puesto que la mayoría de este tipo de ecuaciones pueden resolverse explícitamente. Adicionalmente, como ya se ha mencionado, son de gran utilidad en modelos aplicados a la economía, que en general sirven para plantear el problema económico y dar una solución a dicha interrogante, la cual (dependiendo del modelo) influye ampliamente en la economía personal o colectiva. En este capítulo, nos encargamos de las ecuaciones lineales de primer orden.

Observación 2.1.1. Una función real $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es *lineal* si existen $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$, para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

De esta manera, por la Observación 2.1.1 y (1.5.1), se tiene que una ecuación en diferencias lineal de primer orden y no homogénea, digamos $x(n+1) = f(x(n), n)$, se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1.1}$$

donde $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es una función tal que $a(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es una función tal que $g(n) \neq 0$, para algún $n \in \mathbb{Z}_+$.

Luego, la correspondiente ecuación en diferencias lineal de primer orden y homogénea, digamos $x(n+1) = f(x(n))$, es de la forma siguiente:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1.2}$$

donde $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es una función tal que $a(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ahora, considerando $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ y la ecuación (2.1.1), se tiene el problema con condiciones iniciales:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con} \quad n \geq n_0 \geq 0. \tag{2.1.3}$$

De manera similar, para el caso homogéneo, considerando $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ y la ecuación (2.1.2), se tiene el problema con condiciones iniciales:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con} \quad n \geq n_0 \geq 0. \tag{2.1.4}$$

En este capítulo investigamos métodos para hallar la solución de estas ecuaciones con condiciones iniciales (2.1.3) y (2.1.4), además analizamos algunos casos particulares. El capítulo siguiente abarca las soluciones generales para las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2), esto cuando se analizan métodos para hallar la solución general para ecuaciones de orden superior.

Antes de continuar, es importante mencionar que en las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4), sin pérdida de generalidad, puede considerarse $n_0 = 0$, por lo siguiente:

Supongamos que $x(n)$ está definida para cada $n \geq n_0$ y $x(n_0) = x_0$. Para reparametrizar $x(n)$, ponemos:

$$y(n) = x(n + n_0).$$

Así, $y(n)$ está definido para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $y(0) = x_0$.

Inversamente, supongamos que $x(n)$ está definido para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $x(0) = x_0$. Para reparametrizar $x(n)$, ponemos:

$$y(n) = x(n - n_0).$$

Así, $y(n)$ está definida para cada $n \geq n_0$ y $y(n_0) = x_0$.

Por lo tanto, cuando tengamos una ecuación en diferencias, sin perder generalidad, podemos considerar la parametrización a partir de algún $n_0 > 0$, o bien con $n_0 = 0$.

2.2. Ecuaciones en diferencias lineales homogéneas

La solución de (2.1.4) se puede obtener mediante iteración. Esto significa que:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)\, x(n_0) \\ &= a(n_0)\, x_0, \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)\, x(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)\, a(n_0)\, x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_0+3) &= a(n_0+2)\, x(n_0+2) \\ &= a(n_0+2)\, a(n_0+1)\, a(n_0)\, x_0, \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

En la siguiente proposición, se establece esto de manera formal.

Proposición 2.2.1. La solución de (2.1.4) es la siguiente:

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0. \tag{2.2.1}$$

Demostración. Veamos que se puede realizar por inducción.

Para $n = n_0 + 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)\, x_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n_0} a(i)\right] x_0. \end{aligned}$$

Sea $n > n_0 + 1$ y supongamos que se cumple que $x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0$. Luego, para $n+1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= a(n)\, x(n) \\ &= a(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] x_0. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que el enunciado se cumple para $n+1$.

Por lo tanto, $x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ es la solución de (2.1.4). ∎

2.3. Ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas

Para hallar la solución de (2.1.3), se puede proceder mediante iteración, pues:

$$y(n_0+1) = a(n_0)\, y_0 + g(n_0),$$

$$\begin{aligned} y(n_0+2) &= a(n_0+1)\, y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)\, a(n_0)\, y_0 + a(n_0+1)\, g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

La siguiente proposición se demuestra utilizando inducción.

Proposición 2.3.1. La solución única de la ecuación no homogénea (2.1.3) es la siguiente:

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \tag{2.3.1}$$

Demostración. Para $n = n_0 + 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)\, y_0 + g(n_0) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n_0} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n_0} \left[\prod_{i=r+1}^{n_0} a(i)\right] g(r). \end{aligned}$$

Sea $n > n_0 + 1$ y supongamos que se cumple lo siguiente:

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r).$$

Por la ecuación (2.1.3) y utilizando , se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= a(n)\, y(n) + g(n) \\ &= a(n) \left(\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \right) + g(n) \\ &= a(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + a(n) \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) + g(n) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} a(n) \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) + g(n) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r) + (1) g(n) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r) + \left[\prod_{i=n+1}^{n} a(i)\right] g(n), \qquad \text{por (1.1.2)} \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n} \left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r). \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que el enunciado se cumple para $n+1$, y así, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq n_0$. Por lo tanto:

$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Veamos que $y(n)$ es única. Supongamos que $\overline{y}(n)$ es solución de la ecuación (2.1.3), esto significa que además, satisface la condición inicial. Sea $m = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z}_+ : y(n) \neq \overline{y}(n)\}$. Ya que $y(0) = \overline{y}(n) = y_0$, se tiene que $m \geq 1$. Por la definición de m, se sigue que $y(n_0 - 1) = \overline{y}(n_0 - 1)$. Lo cual implica que:

$$y(m) = a(m-1)y(m-1) + g(m-1) = a(m-1)\overline{y}(m-1) + g(m-1) = \overline{y}(m),$$

lo que es una contradicción. Por lo que la única posibilidad es que $m = n_0$. Pero $y(n_0) = \overline{y}(m)$, debido a que las dos ecuaciones satisfacen la misma condición inicial.

Por lo tanto, la solución de (2.1.3) es única. ■

Casos destacados

Existen dos casos destacados de la ecuación no homogénea (2.1.3) que son utilizados ampliamente.

1. La ecuación de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) + g(n); \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

Utilizando (2.3.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a\right] g(r) \\ &= a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

2. La ecuación:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) + b; \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$ son constantes.

Por (2.3.2), se sigue que:

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b. \tag{2.3.3}$$

De (1.1.1), se tiene que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1)$.

Así, la ecuación (2.3.3) queda de la forma siguiente:

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right] & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{si } a = 1. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

A manera de comparativo, notemos que la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(t); \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

es la siguiente:

$$x(t) = e^{at} x_0.$$

Mientras que la solución de la ecuación diferencial no homogénea:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay(t) + g(t); \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

l es de la siguiente forma:

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} g(s)\, ds.$$

Lo que quiere decir que e^{at} en las ecuaciones diferenciales corresponde a a^n y $\int_0^t e^{a(t-s)} g(s)\, ds$ corresponde a la expresión $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k)$.

Veamos algunos ejemplos en los que se utiliza lo obtenido anteriormente.

Ejemplo 2.3.2. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Considere la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 3^n x(n); \\ x(0) &= 8, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

De (2.2.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 3^i\right] 8 \\ &= 8 \cdot 3^{\frac{1}{2}n(1-n)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.3. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Veamos cómo resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!; \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n > 0$. De (2.3.1), se sigue que:

$$\begin{aligned} y(n) &= \prod_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right]2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!\, 2^r \\ &= 2^n\, n! \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Para la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 2x(n) + 3^n; \\ x(1) &= 0.5, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Utilizando (2.3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1}3^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) \\ &= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Considere la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1}{2}y(n) + 2; \\ y(0) &= 9, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

De (2.3.4), se sigue que:

$$\begin{aligned} y(n) &= 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] \\ &= 9 \cdot 2^{-n} - 4 \cdot 2^{-n} + 4 \\ &= 5 \cdot 2^{-n} + 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.6 (Administración de un medicamento)**.** Supongamos que se administra un medicamento una vez cada cuatro horas.

Sea $D \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $D(n)$ es la cantidad de medicamento en el sistema sanguíneo en el n-ésimo intervalo, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. El cuerpo elimina un cierto porcentaje $0 < p < 1$ del medicamento en cada intervalo de tiempo n.

Sea D_0 la cantidad de medicamento administrada durante cada intervalo n.

Debido a que la cantidad de medicamento en el sistema sanguíneo en el momento $(n+1)$ es igual a la cantidad de medicamento que había en el momento n menos la fracción p que el cuerpo elimina, más la dosis administrada D_0 en el presente intervalo, se tiene que la ecuación que representa todo lo anterior es la siguiente:

$$\begin{aligned} D(n+1) &= D(n) - pD(n) + D_0 \\ &= (1-p)D(n) + D_0. \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación, utilizamos (2.3.4):

$$\begin{aligned} D(n) &= (1-p)^n D_0 - D_0 \left(\frac{(1-p)^n - 1}{p} \right) \\ &= \left(D_0 - \frac{D_0}{p} \right) (1-p)^n + \frac{D_0}{p}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De (2.3.5), se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} D(n) = \frac{D_0}{p}.$$

Esto significa que $\frac{D_0}{p}$ es la cantidad de medicamento en equilibrio en el cuerpo.

2.4. Puntos de equilibrio

También, en este trabajo de tesis, estudiamos brevemente algunas propiedades cualitativas de la ecuación en diferencias autónoma de primer orden, $x(n+1) = f(x(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, cuando $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uno de los conceptos importantes son los **puntos de equilibrio**, puesto que son la noción central del estudio de la dinámica de cualquier sistema físico. En muchas aplicaciones en Biología, Economía, Física, Ingeniería, entre otras, es deseable que todas las soluciones de un sistema tiendan a su estado de equilibrio, por lo que son utilizados en diversos modelos que se analizan en este trabajo.

En las ecuaciones en diferencias de primer orden tenemos dos casos particularmente interesantes:

1. La ecuación en diferencias de primer orden y autónoma:

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{2.4.1}$$

2. La ecuación en diferencias de primer orden y no autónoma:

$$x(n+1) = f(x(n), n). \tag{2.4.2}$$

Una ecuación en diferencias de orden k del tipo (1.4.2) puede llevarse a una ecuación en diferencias de primer orden. Por lo cual, es de gran importancia estudiar las ecuaciones en diferencias de primer orden (autónomas y no autónomas).

Definición 2.4.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Al conjunto de todas las iteraciones de f sobre el punto x_0 se le llama *órbita* de x_0 bajo f y se denota y define como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x_0, f) &= \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}_+\}\\ &= \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}.\end{aligned}$$

Ahora pongamos: $x(0) = x_0$, $x(1) = f(x_0)$, $x(2) = f^2(x_0)$, ..., $x(n) = f^n(x_0)$.

De esta manera, se tiene que:

$$x(n) = f^n(x_0).$$

Notemos que esta es una ecuación en diferencias de primer orden y autónoma. Cabe señalar que esta ecuación en diferencias es ampliamente estudiada en el área de los sistemas dinámicos discretos, donde se analizan las propiedades dinámicas cualitativas.

Definición 2.4.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $z \in A$ y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Se dice que z es un *punto de equilibrio* de $x(n+1) = f(x(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, o bien, que z es un *punto fijo* de f si $f(z) = z$.

Se puede decir que z es una solución constante de (2.4.1), puesto que si $x(0) = z$ es un punto inicial, se tiene que $x(1) = f(z) = z$, $x(2) = f(x(1)) = f(z) = z$ y así sucesivamente.

Gráficamente, un punto de equilibrio es la coordenada x del punto donde la gráfica de f intersecta a la función identidad $y = x$.

Ejemplo 2.4.3. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = v^4$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f está dada por:

$$x(n+1) = x(n)^4, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Para hallar los puntos de equilibrio de dicha ecuación, pongamos $f(z) = z$ o bien, $x(n+1) = x(n)$. Así, $z^4 = z$, de donde $z^4 - z = 0$ y así, $z(z^3 - 1) = 0$. Esto implica que $z = 0$ o $z = 1$. Obteniendo 0 y 1 como puntos de equilibrio (Figura 2.1).

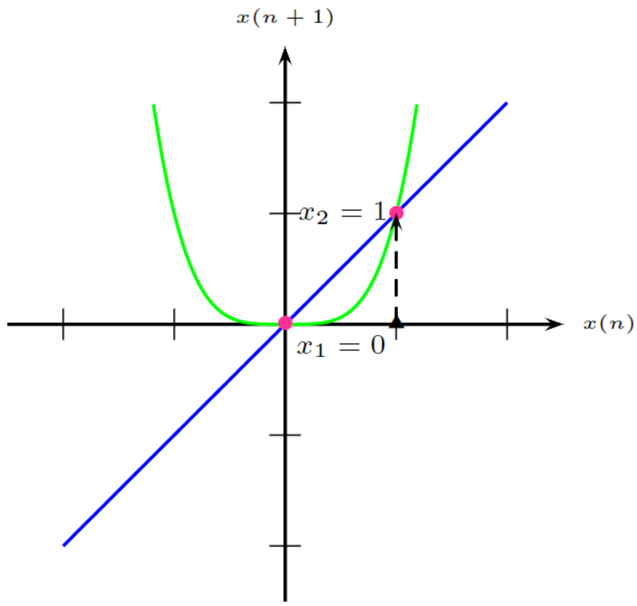

Figura 2.1: Puntos de equilibrio de $f(v) = v^4$.

Esto es lo referente al equilibrio estacionario, debido a que los puntos de equilibrio son constantes.

Adicionalmente, existe el equilibrio móvil, que es cuando se obtiene una expresión que depende de n.

En contraste con las ecuaciones diferenciales, para las ecuaciones en diferencias, un estado de no equilibrio puede pasar a un estado de equilibrio en un tiempo finito.

Definición 2.4.4. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $v \in A$. Si existe un $r \in \mathbb{Z}_+$ y un punto de equilibrio z de $x(n+1) = f(x(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $f^r(v) = z$ y $f^{r-1}(v) \neq z$, se dice que v es *punto de equilibrio eventual* de $x(n+1) = f(x(n))$.

Ejemplo 2.4.5. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $T : [0,1] \to [0,1]$ tal que:

$$T(v) = \begin{cases} 2v & \text{si } 0 \leq v \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-v) & \text{si } \frac{1}{2} < v \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente ecuación:

$$x(n+1) = T(x(n)), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Recordemos que T es conocida como *la función tienda.*

Para $v \in [0, \frac{1}{2}]$, se cumple que v es un punto de equilibrio si y sólo si $2v = v$. De aquí que $v = 0$ es el único punto de equilibrio en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

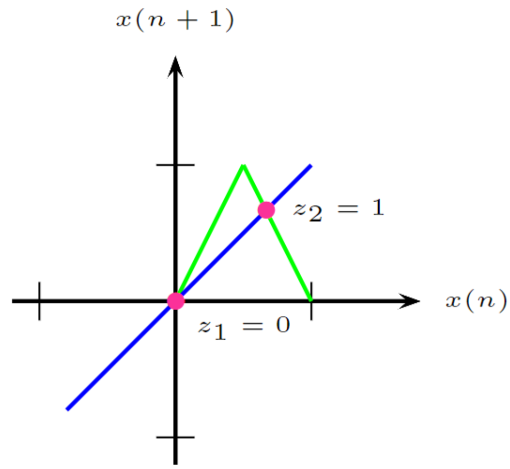

Figura 2.2: Puntos de equilibrio de la función tienda.

Para $v \in (\frac{1}{2}, 1]$, se sigue que v es un punto de equilibrio si y sólo si $2(1-v) = v$. Con lo que se obtiene $v = \frac{2}{3}$ como único punto de equilibrio en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$.

Lo que quiere decir que hay dos puntos de equilibrio, $z_1 = 0$ y $z_2 = \frac{2}{3}$ (Figura 2.2). Sin embargo, hallar algebraicamente los puntos de equilibrio eventuales puede no ser tan simple.

Se cumple que $v = \frac{1}{4}$ es un punto de equilibrio eventual de $T(x(n))$ con $r = 3$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{1}{4} \\
x(1) &= f(x(0)) \\
&= \frac{1}{2} \\
x(2) &= f(x(1)) \\
&= 1 \\
x(3) &= f(x(2)) \\
&= 0 \\
x(4) &= f(x(3)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Veamos que si $v = \frac{k}{2^m}$ tal que k, $m \in \mathbb{Z}_+$ con $0 < \frac{k}{2^m} \leq 1$, se tiene que v es un punto de equilibrio eventual.

Sea $x(0) = \frac{k}{2^m}$.

Caso 1: k es impar.

Subcaso 1.1: $x(0) \in [0, \frac{1}{2}]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} T(x(0)) &= x(1) \\ &= 2 \cdot \frac{k}{2^m} \\ &= \frac{k}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Debido a que k es impar, $x(2)$ nuevamente entra en el Caso 1, lo que hace que la potencia de 2 del denominador decrezca una unidad.

Si se continúa realizando esto, después de m iteraciones, obtenemos que $x(m) = \frac{k}{2^0} = k$. Puesto que k es impar y el rango de la función T es $[0, 1]$, se tiene que $x(m) = 1$. Esto es, $x(m+1) = 0$, que es un punto de equilibrio. Lo que quiere decir que $v = \frac{k}{2^m}$ es un punto de equilibrio eventual.

Subcaso 1.2: $x(0) \in (\frac{1}{2}, 1]$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} T(x(0)) &= x(1) \\ &= 2\left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \\ &= 2 - \frac{k}{2^{m-1}} \\ &= \frac{2^m - k}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Notemos que $2^m - k$ es impar. Por lo que $x(2)$ nuevamente entra en el Caso 1, que de forma similar al Subcaso 1.1, la potencia de 2 del denominador decrece una unidad, hasta obtener $x(m) = \frac{2^m-k}{2^0} = 2^m - k$, después de m iteraciones.

Debido a que $2^m - k$ es impar y el rango de la función T es $[0, 1]$, se sigue que, al igual que en el Subcaso 1.1, $x(m) = 1$.

Así, $x(n + 1) = 0$ y 0 es un punto de equilibrio.

De todo lo anterior, $v = \frac{k}{2^m}$ es un punto de equilibrio eventual.

Caso 2: k es par.

En este caso, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $k = 2p$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{k}{2^m} \\ &= \frac{2 \cdot p}{2^m} \\ &= \frac{p}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Subcaso 2.1: $\frac{p}{2^{m-1}}$ es impar. Se continúa como en el Caso 1. Con lo cual se obtiene que $v = \frac{k}{2^m}$ es un punto de equilibrio eventual.

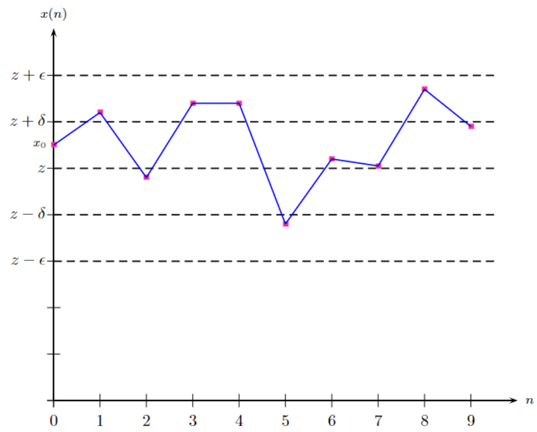

Figura 2.3: Punto de equilibrio z estable.

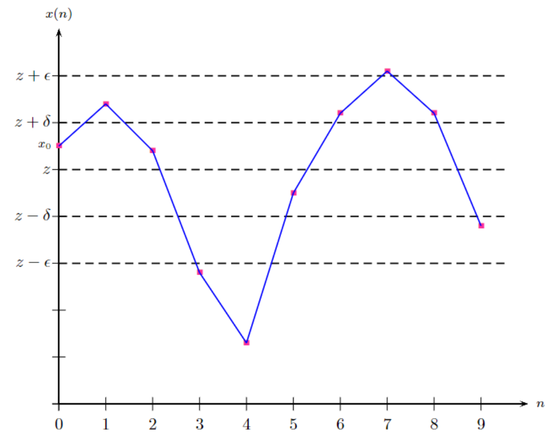

Figura 2.4: Punto de equilibrio z inestable.

Subcaso 2.2: $\frac{p}{2^{m-1}}$ es par. Se prosigue como en el Caso 2, hasta obtener $x(m) = \frac{1}{2^0} = 1$.
Lo que quiere decir que, $x(m+1) = 0$, donde 0 es un punto de equilibrio.
Se sigue que, $v = \frac{k}{2^m}$ es un punto de equilibrio eventual.

Uno de los principales propósitos del estudio de los sistemas dinámicos es el análisis del comportamiento que tienen sus soluciones conforme se acercan a los puntos de equilibrio, lo que es mejor conocido como análisis de estabilidad.

Definición 2.4.6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Se dice que z es:

(a) *Estable* (Figura 2.3) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in A$ y $|x_0 - z| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) - z| < \epsilon$, para todo $n > 0$. Si z no es estable, se dice que es *inestable* (Figura 2.4).

(b) *Atractor* si existe $\eta > 0$ tal que si $x_0 \in A$ y $|x_0 - z| < \eta$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = z.$$

Si $\eta = \infty$, z es llamado *atractor global.*

(c) *Repulsor* si existe $\eta > 0$ tal que si $x_0 \in A$ y $|x_0 - z| < \eta$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f^m(x_0) - z| \geq \eta$.

(d) *Asintóticamente estable* (Figura 2.5) si es estable y atractor. Si $\eta = \infty$, se dice que z es *asintóticamente estable global* (Figura 2.6).

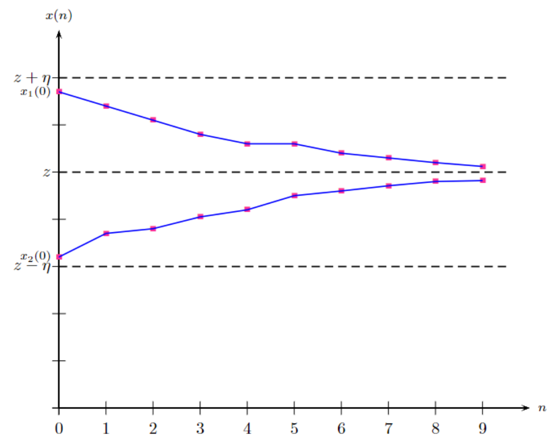

Figura 2.5: Punto de equilibrio z asintóticamente estable.

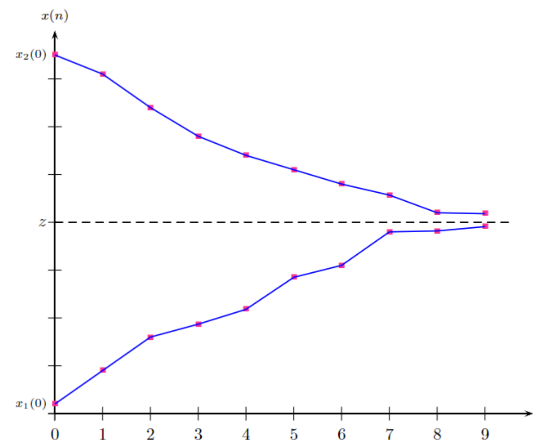

Figura 2.6: Punto de equilibrio z asintóticamente estable global.

Notemos que en términos de la ecuación en diferencias $x(n) = f^n(x_0)$, se tiene que z es estable si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in A$ y $|x_0 - z| < \delta$, entonces $|x(n) - z| < \epsilon$, para cada $n > 0$.

En ocasiones no es simple determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio mediante las definiciones, por lo que se puede recurrir a técnicas gráficas para analizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación (2.4.1) en la vecindad del punto de equilibrio.

Diagramas de Cobweb

Veamos un método gráfico para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de (2.4.1). Podemos dibujar la gráfica de f en el plano $(x(n), x(n+1))$. Considerando $x_0 \in \mathbb{R}$, para $x(0) = x_0$, señalamos el valor de $x(1)$ dibujando una línea vertical perpendicular al eje $x(n)$ tal que pasa por x_0 y que corte a la gráfica de f en el punto $(x_0, x(1))$. Después, se dibuja una línea horizontal del punto $(x_0, x(1))$ a la recta $y = x$ y se marca el punto $(x(1), x(1))$. Luego, se traza una línea de este punto al punto $(x(1), x(2))$ situado en la gráfica de f y así se continúa, hasta hallar $x(n)$, para cada $n > 0$ (Figura 2.7).

Ejemplo 2.4.7. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $y(n)$ el tamaño de una población en el tiempo n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Si μ es la tasa de crecimiento de la población de una generación a otra, podemos considerar un modelo matemático de la siguiente forma:

$$y(n+1) = \mu y(n), \quad \mu > 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Si $y(0) = y_0$, por (2.3.4), la solución de esta ecuación es la siguiente:

$$y(n) = \mu^n y_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

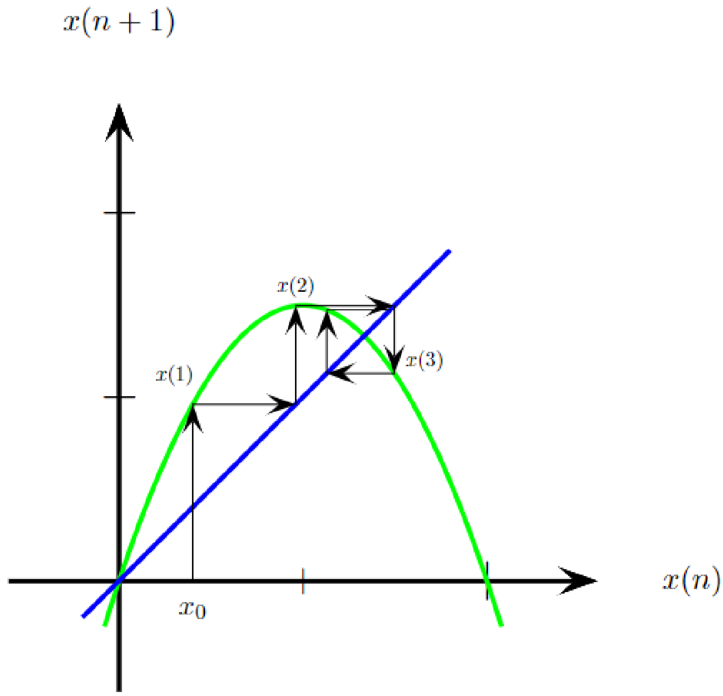

Figura 2.7: Diagrama de Cobweb.

Caso 1: $\mu > 1$. Se tiene que $\lim_{n\to\infty} y(n) = \infty$, lo cual quiere decir que $y(n)$ crece indefinidamente.

Caso 2: $\mu = 1$. La solución de la ecuación en diferencias es $y(n) = y_0$. Así, $\lim_{n\to\infty} y(n) = y_0$. Lo que quiere decir que la población es constante para el futuro indefinido.

Caso 3: $\mu < 1$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$. De esta manera, $y(n)$ decrece indefinidamente hasta que la población se extingue.

Sin embargo, en la realidad, para ninguna especie se cumple que su dinámica de crecimiento poblacional esté representada por alguno de los tres casos anteriores. Esto debido a que la población aumenta hasta alcanzar un determinado límite superior. Se suele producir este comportamiento, ya que los recursos no son ilimitados, lo que ocasionará competencia intraespecífica en la población. Dicha competencia es proporcional al número de riñas entre los individuos de la especie, representada por $y^2(n)$. Un modelo más apegado a la realidad, considera una constante de proporcionalidad $b > 0$, que representa la competencia intraespecífica. Lo que quiere decir que:

$$y(n+1) = \mu y(n) - by^2(n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.4.3}$$

Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. De (2.4.3), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{b} x(n+1) &= \mu \left(\frac{\mu}{b} x(n) \right) - b \left(\frac{\mu^2}{b^2} x^2(n) \right) \\
&= \frac{\mu^2}{b} x(n) - \frac{\mu^2}{b} x^2(n). \\
x(n+1) &= \mu x(n) - \mu x^2(n) \\
&= \mu x(n)(1 - x(n)). \qquad (2.4.4)
\end{aligned}$$

Esta ecuación comúnmente es conocida como ecuación *logística discreta*. Sin embargo, a excepción de ciertos valores de μ, no se dispone de una solución de forma cerrada de (2.4.4), es decir, no es posible dar un resultado exacto para una cantidad de datos finita. Por este motivo, es útil analizar el diagrama de Cobweb de esta ecuación. Para hallar los puntos de equilibrio hacemos $x(n+1) = x(n)$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mu x(n)(1 - x(n)) &= x(n) \\
\mu x(n)(1 - x(n)) - x(n) &= 0 \\
x(n)(\mu(1 - x(n)) - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Esto significa que:

$$x(n) = 0 \quad \text{o} \quad \mu(1 - x(n)) - 1 = 0.$$

Para el caso en el que $\mu(1 - x(n)) - 1 = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
1 - x(n) &= \frac{1}{\mu} \\
-x(n) &= \frac{1}{\mu} - 1 \\
x(n) &= 1 - \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{\mu - 1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Esto es, $z_1 = 0$ y $z_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$ son los puntos de equilibrio de la ecuación logística discreta.

Se muestra en la Figura 2.8 el diagrama de Cobweb de $(x(n), x(n+1))$ con $\mu = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. En este caso, el punto de equilibrio $z_1 = 0$ es inestable y $z_2 = \frac{2.5-1}{2.5} = 0.6$ es asintóticamente estable.

2.5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales

Como ya se ha dicho con anterioridad, tanto las ecuaciones diferenciales como las ecuaciones en diferencias son útiles para describir objetos, fenómenos o poblaciones que

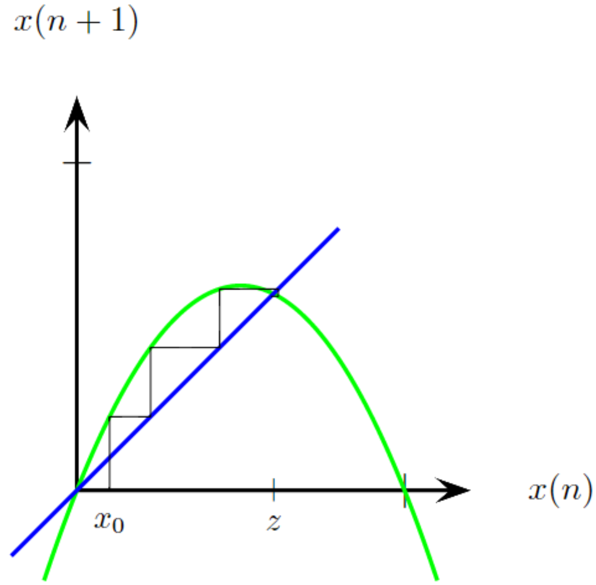

Figura 2.8: Diagrama de Cobweb.

están sujetos a una evolución en el tiempo, ya sea continuo en el caso de las ecuaciones diferenciales (ED) o discreto para las ecuaciones en diferencias (EED). Sin embargo, en ocasiones no es posible resolver las ecuaciones diferenciales, por lo que se utiliza un esquema numérico para poder aproximar las soluciones, el cual conduce a la construcción de una ecuación en diferencias asociada de tal forma que es más fácil calcular, ya sea mediante calculadoras gráficas o computadoras. En este trabajo se analizan algunos esquemas simples que ejemplifican lo mencionado.

Puesto que en este tema se involucran ecuaciones diferenciales, recordemos que un *punto de equilibrio* de una ecuación diferencial es una solución constante, es decir, una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(t) = a$, para algún $a \in \mathbb{R}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$.

Método de Euler

Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Considere la ecuación diferencial de primer orden:

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.5.1}$$

donde $t_0 \leq t \leq b$ y $b \in \mathbb{R}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[t_0, b]$ en N subintervalos. El tamaño de cada subintervalo, $h = \frac{b-t_0}{N}$, es llamado tamaño del paso del método y define los nodos t_1, t_2, $\ldots$, t_N como $t_j = t_0 + jh$, $j = 1, 2, \ldots, N$. El método de Euler aproxima $x'(t)$ mediante $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

Sustituyendo esta expresión en (2.5.1), se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} &= g(t,x(t))\\ x(t+h)-x(t) &= hg(t,x(t))\\ x(t+h) &= x(t)+hg(t,x(t)).\end{aligned}$$

Pongamos $t = t_0 + nh$. De aquí que:

$$\begin{aligned}x((t_0+nh)+h) &= x(t_0+nh)+hg(t_0+nh,x(t_0+nh))\\ x(t_0+h(n+1)) &= x(t_0+nh)+hg(t_0+nh,x(t_0+nh)),\end{aligned}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Adaptando esta última expresión a la notación de ecuación en diferencias y reemplazando $x(t_0 + nh)$ por $x(n)$, se sigue que:

$$x(n+1) = x(n) + hg(n, x(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.5.2}$$

Así, la ecuación en diferencias (2.5.2) define el algoritmo de Euler, que aproxima las soluciones de la ecuación diferencial (2.5.1) a los puntos nodo.

Notemos que z es un punto de equilibrio de (2.5.2) si y sólo si $g(n, z) = 0$.

Ejemplo 2.5.1. Sea $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Utilicemos el método de Euler para aproximar la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = -x^2(t), \quad x(0) = 1,$$

donde $t \in [0, 1]$.

Utilizando el método de separación de variables se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x^2\\ -\frac{1}{x^2}\,dx &= dt\\ \int -\frac{1}{x^2}\,dx &= \int dt\\ \frac{1}{x} &= t+c.\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$x(t) = \frac{1}{t+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Debido a que $x(0) = 1$, se sigue que $x(0) = \frac{1}{c} = 1$. Esto es, $c = 1$.

n	t	***EED* Euler** $h = 0.2$ $x(n)$	***EED* Euler** $h = 0.1$ $x(n)$	***ED* exacta** $x(t)$
0	0	1	1	1
1	0.1		0.9	0.9090
2	0.2	0.8	0.819	0.8333
3	0.3		0.7519	0.7692
4	0.4	0.672	0.6953	0.7142
5	0.5		0.6469	0.6666
6	0.6	0.5816	0.6050	0.625
7	0.7		0.5683	0.5882
8	0.8	0.5139	0.5360	0.5555
9	0.9		0.5072	0.5263
10	1	0.4610	0.4814	0.5

Tabla 2.5.1: Aproximaciones con las EED.

Así, la solución exacta de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Ahora veamos cómo es la ecuación en diferencias correspondiente, utilizando el método de Euler:

$$x(n+1) = x(n) - hx(n)^2, \quad x(0) = 1, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

La Tabla 2.5.1 muestra las aproximaciones de Euler para $h = 0.1$ y $h = 0.2$, además del valor exacto de la ecuación diferencial. Notemos que mientras más pequeño sea el tamaño de paso que utilicemos, más exacta será la aproximación obtenida.

Ejemplo 2.5.2. Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Considere la ecuación diferencial logística siguiente:

$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0, \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{2.5.3}$$

Los puntos de equilibrio se obtienen cuando $x'(t) = 0$. Esto es $ax(t)(1-x(t)) = 0$. Por lo que se obtienen $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = 1$ como puntos de equilibrio.

La solución exacta de la ecuación diferencial se obtiene mediante separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(1-x) \\ \frac{1}{x(1-x)}\, dx &= a\, dt \\ \int \frac{1}{x(1-x)}\, dx &= \int a\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx &= at + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\
\ln(x) - \ln(x-1) &= at + c_1 \\
\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) &= at + c_1 \\
\frac{x}{x-1} &= ce^{at},\ c = e^{c_1} \\
x &= ce^{at}(x-1) \\
&= cxe^{at} - ce^{at} \\
x(1 - ce^{at}) &= -ce^{at} \\
x &= \frac{ce^{at}}{ce^{at} - 1}.
\end{aligned} \tag{2.5.4}
$$

Puesto que $x(0) = x_0$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \frac{ce^{a \cdot 0}}{ce^{a \cdot 0} - 1} \\
x_0 &= \frac{c}{c-1} \\
cx_0 - x_0 &= c \\
c(x_0 - 1) &= x_0 \\
c &= \frac{x_0}{x_0 - 1}.
\end{aligned} \tag{2.5.5}
$$

De (2.5.4) y (2.5.5), se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\left(\frac{x_0}{x_0 - 1} \right) e^{at}}{1 + \left(\frac{x_0}{x_0 - 1} \right) e^{at}} \\
&= \frac{x_0 e^{at}}{1 + x_0(e^{at} - 1)}.
\end{aligned}
$$

Si $a > 0$, se tiene que $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 1$, lo que quiere decir que las soluciones convergen al punto de equilibrio $x_2(t) = 1$ (Figura 2.9).

Si $a < 0$, entonces $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, esto es, las soluciones convergen al punto de equilibrio $x_1(t) = 0$ (Figura 2.10).

Utilizando el método de Euler en la ecuación diferencial logística, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= x(n) + h\, ax(n)(1 - x(n)); \\
x(0) &= x_0,
\end{aligned} \tag{2.5.6}
$$

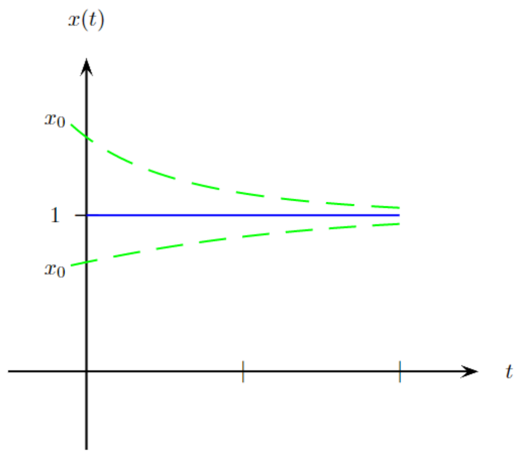

Figura 2.9: Gráfica para $a = 1$ con $x_0 > 0$.

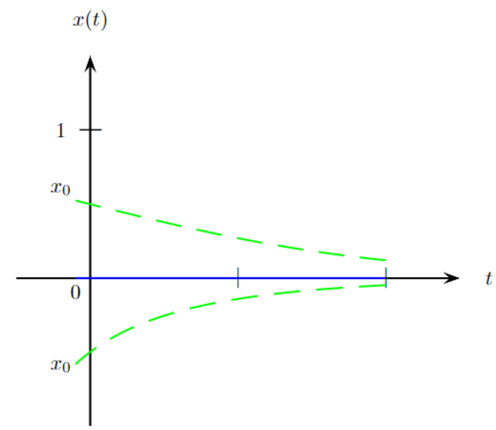

Figura 2.10: Gráfica para $a = -1$ con $x_0 < 1$.

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Para hallar los puntos de equilibrio de esta ecuación en diferencias hacemos $x(n+1) = x(n)$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n) + h\,ax(n)(1 - x(n)) \\ 0 &= h\,ax(n)(1 - x(n)) \\ &= x(n)(1 - x(n)). \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ son los puntos de equilibrio.

Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $y(n) = \frac{ha}{1+ha}x(n)$, esto, para expresar la ecuación (2.5.6) de forma similar a (2.5.3) y se obtiene la ecuación siguiente:

$$y(n+1) = (1 + ha)y(n)(1 - y(n)), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Pongamos $\mu = 1 + ha$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \mu y(n)(1 - y(n)) \\ y(0) &= \frac{ha}{1+ha}x(0). \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Los puntos de equilibrio de (2.5.7) son $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{ha}{ha+1}$ correspondientes a $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, respectivamente.

Utilizando el diagrama de Cobweb, se pueden obtener los casos siguientes:

Caso 1: Para $1 < \mu < 3$, es decir, $0 < ha < 2$, todas las soluciones tales que el punto inicial y_0 está en $(0, 1)$ convergen a $y_2 = \frac{ha}{ha+1}$ (Figura 2.11).

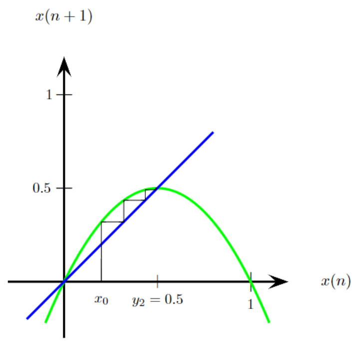

Figura 2.11: $0 < ha < 2$.

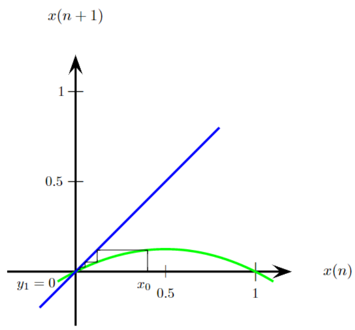

Figura 2.12: $-1 < ha < 0$.

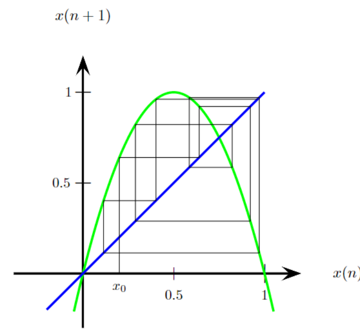

Figura 2.13: $ha > 2.75$.

Caso 2: Para $0 < \mu < 1$, o equivalentemente, $-1 < ha < 0$, todas las soluciones tales que el punto inicial y_0 está en $(0, 1)$ convergen a $y_1 = 0$ (Figura 2.12).

Caso 3: Para $\mu > 3$, es decir, $ha > 2$, casi todas las soluciones en las que los puntos iniciales y_0 están en $(0, 1)$ no convergen a y_1 ni a y_2. Específicamente, si $\mu > 3.57$, o equivalentemente, $ha > 2.57$, las soluciones de la ecuación en diferencias tienen un comportamiento "caótico" (Figura 2.13), es decir, puntos cercanos al punto de equilibrio no tienen un comportamiento que se pueda describir por medio de propiedades dinámicas, esto es, su comportamiento no sigue un orden.

Un esquema no estándar

Nuevamente, considere la ecuación diferencial logística (2.5.3), dado $n \in \mathbb{Z}_+$, sustituyendo $x^2(n)$ por $x(n)x(n+1)$ en el método de Euler, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= x(n) + hax(n) - hax(n)x(n+1) \\
x(n+1) + hax(n)x(n+1) &= x(n) + hax(n) \\
x(n+1)(1 + hax(n)) &= x(n)(1 + ha) \\
x(n+1) &= \frac{(1 + ha)x(n)}{1 + hax(n)} \\
&= \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)},
\end{aligned}
$$

donde $\alpha = 1 + ha$ y $\beta = \alpha - 1 = ha$.

Para hallar los puntos de equilibrio de esta ecuación hacemos $x(n+1) = x(n)$. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)} \\
x(n)(1 + \beta x(n)) &= \alpha x(n)
\end{aligned}
$$

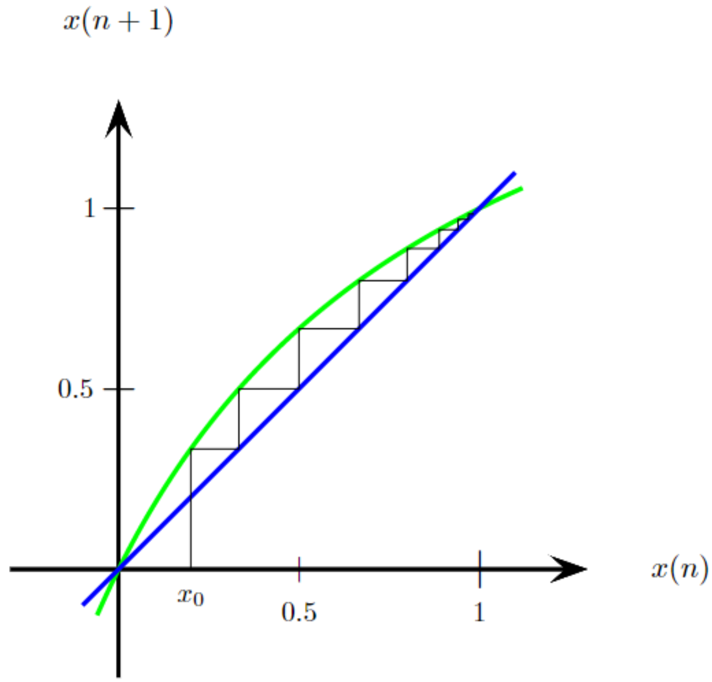

Figura 2.14: $ha = 1$.

$$\begin{aligned} x(n)(1+\beta x(n)) - \alpha x(n) &= 0 \\ x(n)((1+\beta x(n)) - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$x(n) = 0 \quad \text{o} \quad 1 + \beta x(n) = \alpha.$$

Para el caso en el que $1 + \beta x(n) = \alpha$, se sigue que:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{(\beta+1)-1}{\beta} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto es, $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ son los puntos de equilibrio. Además, del diagrama de Cobweb (Figura 2.14), se tiene que $\lim_{n\to\infty} x(n) = 1$ si $\alpha > 0$, sin importar el tamaño de paso h.

2.6. Criterios para la estabilidad de puntos de equilibrio

En esta sección mencionamos algunos de los resultados más importantes acerca de los criterios de estabilidad, específicamente de estabilidad asintótica.

Teorema 2.6.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Se cumplen las proposiciones siguientes:

(a) Si $|f'(z)| < 1$, entonces z es un atractor.

(b) Si $|f'(z)| > 1$, entonces z es un repulsor.

Demostración. (a) Supongamos que $|f'(z)| < 1$. Se tiene que existe $c \in (0,1)$ tal que $|f'(z)| < c < 1$. Por definición de derivada, $|f'(z)| = \left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|$. Se sigue que $\left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right| < c$. Por ser z un punto de equilibrio, $f(z) = z$, y así, $\left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-z}{x-z}\right| < c$. Por la Proposición 1.1.1, se tiene que $\lim\limits_{x\to z} \left|\frac{f(x)-z}{x-z}\right| < c$. Equivalentemente, $\lim\limits_{x\to z} \frac{|f(x)-z|}{|x-z|} < c$.

Así, por el inciso (a) de la Proposición 1.1.2, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x-z| < \delta, \text{ entonces } \frac{|f(x)-z|}{|x-z|} < c. \tag{2.6.1}$$

Sea $x \in A$ tal que $0 < |x-z| < \delta$. Puesto que $c \in (0,1)$, se sigue que $c|x-z| < |x-z| < \delta$. De (2.6.1), se tiene que $|f(x)-z| < c|x-z|$ y así, $|f(x)-z| < \delta$. Nuevamente, por (2.6.1), se tiene que $\frac{f(f(x))-z}{|f(x)-z|} < c$.

Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} |f^2(x) - z| &< c|f(x)-z| \\ &< c \cdot c|x-z| \\ &= c^2|x-z|. \end{aligned}$$

Si se realiza esto inductivamente para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $|f^n(x)-z| < c^n|x-z|$. De aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x)-z| \leq \lim\limits_{n\to\infty} c^n|x-z|$.

Debido a que $c \in (0,1)$, se tiene que $|c| < 1$, lo que quiere decir, por el Teorema 1.1.3-(a) que $\lim\limits_{n\to\infty} c^n|x-z| = 0$. Esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x)-z| \leq 0$. Por la Proposición 1.1.1, $\left|\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)-z\right| \leq 0$. Además, $\left|\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)-z\right| \geq 0$. De esto, $\left|\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)-z\right| = 0$, lo cual implica que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = z$. Por lo tanto z es un atractor.

(b) Supongamos que $|f'(z)| > 1$. Se tiene que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c < |f'(z)|$. Por definición de derivada, $|f'(z)| = \left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|$. Se sigue que $c < \left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|$. Por ser z un punto de equilibrio, $c < \left|\lim\limits_{x\to z} \frac{f(x)-z}{x-z}\right|$. Por la Proposición 1.1.1, se tiene que $c < \lim\limits_{x\to z} \left|\frac{f(x)-z}{x-z}\right|$. Equivalentemente, $c < \lim\limits_{x\to z} \frac{|f(x)-z|}{|x-z|}$.

Así, por el inciso (b) de la Proposición 1.1.2, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - z| < \delta, \text{ entonces } c < \frac{|f(x) - z|}{|x - z|}. \tag{2.6.2}$$

Sea $x \in A$ tal que $0 < |x - z| < \delta$.

De (2.6.2), se tiene que:

$$c|x - z| < |f(x) - z|. \tag{2.6.3}$$

Caso 1: Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f^n(x) - z| \geq \delta$.

Caso 2: Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f^n(x) - z| < \delta$. Lo que quiere decir que se puede realizar (2.6.2) para cada iteración de la función, obteniendo:

$$c^n|x - z| < |f^n(x) - z|. \tag{2.6.4}$$

Debido a que $c > 1$, por el Teorema 1.1.3-(b), $c^n|x - z|$ diverge. Así, por (2.6.4), se tiene que $|f^n(x) - z|$ diverge. Por lo que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $|f^m(x) - z| \geq \delta$.

Por lo tanto z es repulsor.

De (a) y (b) se sigue el resultado. ■

Teorema 2.6.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Si z es repulsor, entonces z es inestable.

Demostración. Supongamos que z es repulsor. Esto es, existe $\gamma > 0$ tal que, para cada $x \in A$,

$$\text{si } |x - z| < \gamma, \text{ entonces existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f^m(x) - z| \geq \gamma. \tag{2.6.5}$$

Pongamos $\epsilon_0 = \gamma$.

Sea $\delta > 0$ y definimos $\lambda := \text{mín}\{\gamma, \delta\}$. Sea $x_0 \in A$ tal que $0 < |x_0 - z| < \lambda$. Notemos que $|x_0 - z| < \delta$ y $|x_0 - z| < \gamma$.

Debido a que $|x_0 - z| < \gamma$ y por (2.6.5) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f^m(x) - z| \geq \gamma$. Esto es, $|f^m(x) - z| \geq \epsilon_0$.

Por lo tanto z es inestable. ■

Teorema 2.6.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Los siguientes argumentos son ciertos:

(a) Si $|f'(z)| < 1$, entonces z es estable.

(b) Si $|f'(z)| > 1$, entonces z es inestable.

Demostración. (a) Supongamos que $|f'(z)| < 1$. Se tiene que existe $M \in (0,1)$ tal que $|f'(z)| < M < 1$. Veamos que existe $\gamma > 0$ tal que para cada $x \in A$, si $|x - z| < \gamma$, entonces $|f'(x)| \leq M$. Para probar esto supongamos lo contrario, es decir que para cada $\gamma > 0$, existe $x \in A$ tal que $|x - z| < \gamma$ y $|f'(x)| > M$.

Pongamos $\gamma = \frac{1}{k}$. Se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in A$ tal que $|x_k - z| < \frac{1}{k}$ y $|f'(x_k)| > M$.

Considerando la sucesión $\{x_k\}$, se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z$. Por otra parte, debido a que $|f'(x_k)| > M$, se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} |f'(x_k)| \geq \lim\limits_{k\to\infty} M$. Esto es, $\lim\limits_{k\to\infty} |f'(x_k)| \geq M$. Por la Proposición 1.1.1:

$$\left|\lim_{k\to\infty} f'(x_k)\right| \geq M. \tag{2.6.6}$$

Puesto que f' es continua, se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = f'(z)$. Esto es, $\left|\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k)\right| = |f'(z)|$. Por (2.6.6), $|f'(z)| \geq M$, que es una contradicción, pues $|f'(z)| < M$.

Así, existe $\gamma > 0$ tal que para cada $x \in A$:

$$\text{Si } |x - z| < \gamma, \text{ entonces } |f'(x)| \leq M. \tag{2.6.7}$$

Sea $x_0 \in A$ tal que $|x_0 - z| < \gamma$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_0 < z$.

Por el Teorema del valor medio, existe $c_0 \in (x_0, z) \subset A$ tal que:

$$|f(x_0) - f(z)| = |f'(c_0)||x_0 - z|. \tag{2.6.8}$$

Notemos que $|c_0 - z| < \gamma$. Por (2.6.7), $|f'(c_0)| \leq M$. De aquí, por (2.6.8), $|f(x_0) - f(z)| \leq M|x_0 - z|$.

Puesto que $M < 1$, $|x_0 - z| < \gamma$ y z es un punto de equilibrio, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - z| &= |f(x_0) - f(z)| \\
&\leq M|x_0 - z| \\
&< |x_0 - z| \\
&< \gamma.
\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $f(x_0) \in A$ y $|f(x_0) - z| < \gamma$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x_0) < z$. Por el Teorema del valor medio, existe $c_1 \in (f(x_0), z) \subset A$ tal que:

$$|f^2(x_0) - f(z)| = |f'(c_1)||f(x_0) - z|. \tag{2.6.9}$$

Notemos que $|c_1 - z| < \gamma$. Por (2.6.7), $|f'(c_1)| \leq M$. Esto es, por (2.6.9), $|f^2(x_0) - f(z)| \leq M|f(x_0) - z|$. Lo que quiere decir que:

$$|f^2(x_0) - z| = |f^2(x_0) - f(z)|$$

$$\begin{aligned}&\le M|f(x_0)-z|\\&\le M\cdot M|x_0-z|\\&= M^2|x_0-z|.\end{aligned}$$

Si se realiza esto inductivamente para $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $|f^n(x_0)-z| \le M^n|x_0-z|$. Sea $\epsilon > 0$ y pongamos $\gamma = \epsilon$. Puesto que $M < 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}|f^n(x_0)-z| &\le M^n|x_0-z|\\&\le |x_0-z|\\&< \gamma\\&= \epsilon.\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $|f^n(x_0)-z| < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto z es estable.

(b) Supongamos que $|f'(z)| > 1$. Por la parte (b) del Teorema 2.6.1, z es repulsor, y por el Teorema 2.6.2, z es inestable.

De (a) y (b) se sigue el resultado. ■

Teorema 2.6.4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Si $|f'(z)| < 1$, entonces z es asintóticamente estable.

Demostración. Supongamos que $|f'(z)| < 1$. Por el Teorema 2.6.1, z es atractor y por el Teorema 2.6.3, z es estable.

Por lo tanto z es asintóticamente estable. ■

Parte de la demostración del resultado siguiente, se puede consultar en [4, Teorema 1.15].

Teorema 2.6.5. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 y z un punto de equilibrio de (2.4.1) tal que $f'(z) = 1$. Los siguientes argumentos son ciertos:

(a) Si $f''(z) \neq 0$, entonces z es inestable.

(b) Si $f''(z) = 0$ y $f'''(z) > 0$, entonces z es inestable.

(c) Si $f''(z) = 0$ y $f'''(z) < 0$, entonces z es asintóticamente estable.

Definición 2.6.6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3. La *derivada de Schwarzian* de la función f está dada por:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right]^2.$$

Notemos que, para $z \in A$, si $f'(z) = -1$, se tiene que:

$$Sf(z) = -f'''(z) - \frac{3}{2}(f''(z))^2.$$

Proposición 2.6.7. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(v) = f^2(v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$ y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1). Se tiene que z es un punto de equilibrio de $y(n+1) = g(y(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Supongamos que z es un punto de equilibrio de (2.4.1). Se tiene que:

$$\begin{aligned} g(z) &= f^2(z) \\ &= f(f(z)) \\ &= f(z) \\ &= z. \end{aligned}$$

Esto es, $g(z) = z$. Por lo tanto z es un punto de equilibrio de $y(n+1) = g(y(n))$. ■

Proposición 2.6.8. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(v) = f^2(v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$ y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1) tal que $f'(z) = -1$. Si z es atractor para $y(n+1) = g(y(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces z es atractor para (2.4.1).

Demostración. Supongamos que z es atractor para $y(n+1) = f^2(y(n))$. Lo que quiere decir que existe $\gamma > 0$ tal que para cada $x \in A$, se sigue que si $|x - z| < \gamma$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2n}(x) = z$.

Sea $x \in A$ tal que $|x - z| < \gamma$. Se tiene que $f^{2n}(x) \to z$. Puesto que f es continua para cada $x \in A$, por el Teorema 1.1.4, se tiene que $f(f^{2n}(x)) \to f(z)$. Esto es, $f^{2n+1}(x) \to z$. De donde, $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2n+1}(x) = z$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2n}(x) = z$. Esto es, para cada $\epsilon > 0$, existen N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1$, entonces $|f^{2n}(x) - z| < \epsilon$ y si $n > N_2$, entonces $|f^{2n+1}(x) - z| < \epsilon$.

Pongamos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se tiene que para cada $n \geq N$, $|f^n(x) - z| < \epsilon$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = z$. Esto es, para cada $\gamma > 0$ y para cada $x \in A$, si $|x - z| < \gamma$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = z$.

Por lo tanto, z es atractor para (2.4.1). ■

El siguiente resultado puede consultarse en [4, Ejercicio 1.5, 12)].

Proposición 2.6.9. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(v) = f^2(v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$ y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1) tal que $f'(z) = -1$. Si z es estable para $y(n+1) = g(y(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces z es estable para (2.4.1).

Proposición 2.6.10. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1), tal que $f'(z) = -1$. Si z es asintóticamente estable para $y(n+1) = g(y(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces z es asintóticamente estable para (2.4.1).

Demostración. Supongamos que z es asintóticamente estable para $y(n+1) = f^2(y(n))$. Esto es, z es atractor y estable para $y(n+1) = f^2(y(n))$. Por la Proposición 2.6.8, z es atractor para (2.4.1) y por la Proposición 2.6.9, z es estable para (2.4.1). Por lo tanto z es asintóticamente estable para (2.4.1). ∎

Proposición 2.6.11. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(v) = f^2(v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$ y $z \in A$ un punto de equilibrio de (2.4.1), tal que $f'(z) = -1$. Si z es inestable para $y(n+1) = g(y(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces z es inestable para (2.4.1).

Demostración. Supongamos que z es inestable para $y(n+1) = f^2(y(n))$. Lo que quiere decir que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $x \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ y $|f^{2m}(x) - z| \geq \epsilon$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\delta > 0$. Así, existe $x \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ y $|f^{2m}(x) - z| \geq \epsilon$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Pongamos $n = 2m$. De aquí, $|f^n(x) - z| \geq \epsilon$, con $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $x \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ y $|f^n(x) - z| \geq \epsilon$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto es, z es inestable para (2.4.1). ∎

Teorema 2.6.12. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 y z un punto de equilibrio de (2.4.1) tal que $f'(z) = -1$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $Sf(z) < 0$, entonces z es asintóticamente estable.

(b) Si $Sf(z) > 0$, entonces z es inestable.

Demostración. (a) Supongamos que $Sf(z) < 0$. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(v) = f^2(v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$. Consideremos la ecuación:

$$y(n+1) = g(y(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.6.10}$$

Por la Proposición 2.6.7, se tiene que el punto de equilibrio z de (2.4.1), también es un punto de equilibrio de (2.6.10). Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(g(y)) &= \frac{d}{dy}(f(f(y))) \\ &= f'(f(y))f'(y). \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(g(z)) &= f'(f(z))f'(z)\\ &= f'(z)\cdot f'(z)\\ &= (f'(z))^2\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar el Teorema 2.6.5 como criterio de estabilidad.

Lo que quiere decir que necesitamos calcular $\dfrac{d^2}{dy^2}(g(z))$. Para esto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}(g(y)) &= \frac{d^2}{dy^2}(f(f(y)))\\ &= (f'(f(y))f'(y))'\\ &= f''(f(y))f'(y)\cdot f'(y) + f'(f(y))f''(y)\\ &= f''(f(y))(f'(y))^2 + f'(f(y))f''(y).\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}(g(z)) &= f''(f(z))(f'(z))^2 + f'(f(z))f''(z)\\ &= f''(z)(1) + f'(z)f''(z)\\ &= f''(z) + (-1)f''(z)\\ &= 0.\end{aligned}$$

También, para poder utilizar el resultado del Teorema 2.6.5, debemos calcular $\dfrac{d^3}{dy^3}(g(z))$. Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dy^3}(g(y)) &= \frac{d^3}{dy^3}(f(f(y)))\\ &= (f''(f(y))(f(y))^2 + f'(f(y))f''(y))'\\ &= (f''(f(y))(f'(y))^2)' + (f'(f(y))f''(y))'\\ &= f'''(f(y))f'(y)\cdot(f'(y))^2 + f''(f(y))(2f''(y))f'(y)\\ &\quad + f''(f(y))f'(y)\cdot f''(y) + f'(f(y))f'''(y)\\ &= f'''(f(y))\cdot(f'(y))^3 + 2f''(f(y))f''(y)f'(y)\\ &\quad + f''(f(y))f'(y)f''(y) + f'(f(y))f'''(y).\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$\frac{d^3}{dy^3}(g(z)) = f'''(f(z))\cdot(f'(z))^3 + 2f''(f(z))f''(z)f'(z)$$

$$
\begin{aligned}
&+ f''(f(z))f'(z)f''(z) + f'(f(z))f'''(z)\\
&= f'''(z)(-1)^3 + 2f''(z)f''(z)(-1)\\
&\quad + f''(z)f'(z)f''(z) + f'(z)f'''(z)\\
&= -f'''(z) - 2(f''(z))^2 + f'(z)(f''(z))^2 + (-1)f'''(z)\\
&= -2f'''(z) - 2(f''(z))^2 + (-1)(f''(z))^2\\
&= -2f'''(z) - 3(f''(z))^2.
\end{aligned}
$$

De aquí que:

$$
\begin{aligned}
g'''(z) &= -2f'''(z) - 3(f''(z))^2\\
&= \frac{Sf(z)}{2},
\end{aligned}
$$

pues $f'(z) = -1$.

Puesto que $Sf(z) < 0$, se tiene que $\frac{Sf(z)}{2} < 0$. Esto es, $g'''(z) < 0$. Por el inciso (c) del Teorema 2.6.5, z es asintóticamente estable para (2.6.10). Por lo tanto, z es asintóticamente estable para (2.4.1), por la Proposición 2.6.10.

(b) Supongamos que $Sf(z) > 0$. Considerando la ecuación (2.6.10) y realizando el mismo procedimiento que en el inciso (a) de este teorema, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
g'''(z) &= -2f'''(z) - 3(f''(z))^2\\
&= \frac{Sf(z)}{2},
\end{aligned}
$$

ya que $f'(z) = -1$. Puesto que $Sf(z) > 0$, se tiene que $\frac{Sf(z)}{2} > 0$. Esto es, $g'''(z) > 0$. Por el inciso (b) del Teorema 2.6.5, z es inestable para (2.6.10).

Por lo tanto, z es inestable para (2.4.1) por la Proposición 2.6.11. ■

Por el Teorema 2.6.2, si $z \in A$ es un punto de equilibrio de (2.4.1) y es repulsor, entonces z es inestable. Sin embargo, el recíproco no es verdadero, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.6.13. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = v^2 - v + 1$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f es $x(n+1) = x^2(n) - x(n) + 1$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ [8, pág. 25].

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos para v en la ecuación $v^2 - v + 1 = v$, se obtiene $z = 1$ como punto de equilibrio, el cual es inestable y no es repulsor (Figura 2.15).

Además, notemos que la repulsión no es la negación de la atracción. Es decir, existen puntos fijos que no son atractores y no son repulsores. Se muestra un ejemplo a continuación.

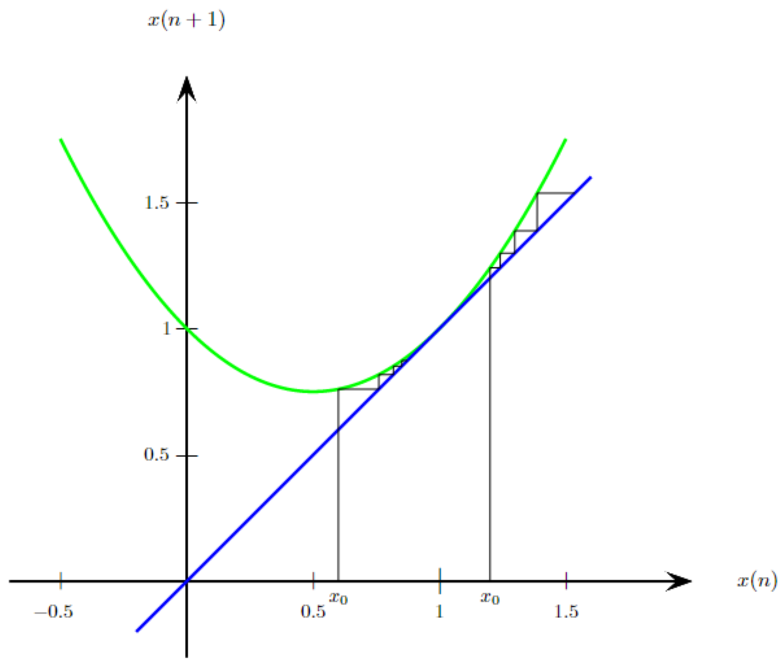

Figura 2.15: Diagrama de $x(n+1) = x^2(n) - x(n) + 1$.

Ejemplo 2.6.14. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = -v$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f es $x(n+1) = -x(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ [8, pág. 25].

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos para v en la ecuación $-v = v$, se obtiene $z = 0$ como punto de equilibrio (Figura 2.16).

Se tiene que la órbita de x_0 bajo f es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x(0) &= x \\
x(1) &= f(x(0)) \\
&= -x \\
x(2) &= f(x(1)) \\
&= x \\
x(3) &= f(x(2)) \\
&= -x \\
&\vdots \\
x(n) &= f(x(n-1)) \\
&= (-1)^n x.
\end{aligned}$$

Veamos que $z = 0$ no es atractor. Esto es, para cada $\gamma > 0$ se tiene que $|v - 0| < \gamma$ y $\lim_{n\to\infty} f^n(v) \neq 0$.

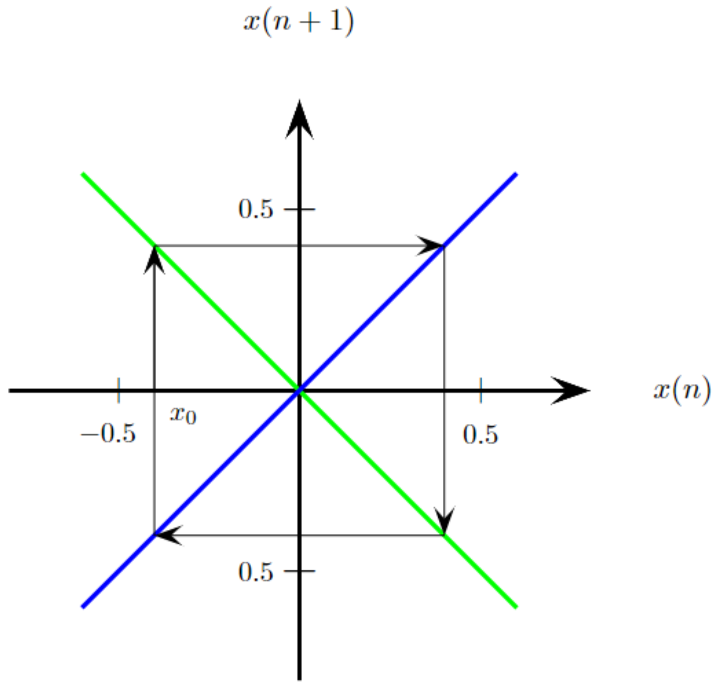

Figura 2.16: Diagrama de $x(n+1) = -x(n)$.

Sean $\gamma > 0$ y $v \in \mathbb{R}$ tal que $|v| < \gamma$. Puesto que $x(n) = f^{n+1}(v) = (-1)^n v$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{n+1}(v)$ no converge.

Esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(v)$ no converge. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(v) \neq 0$. Lo que quiere decir que v no es atractor.

Veamos que $z = 0$ no es repulsor. Esto es, para cada $\gamma > 0$, se tiene que $|v - 0| < \gamma$ y $|f^n(v) - 0| < \gamma$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Sean $\gamma > 0$ y $v \in \mathbb{R}$ tal que $|v| < \gamma$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} |f^n(v)| &= |-x(n-1)| \\ &= |x(n-1)| \\ &< \gamma, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lo que quiere decir que z no es repulsor.

Debemos considerar que si z es un punto de equilibrio atractor puede no ser estable. Para ello, veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.6.15. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = v + \frac{1}{2}v(1-v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f es $x(n+1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n)(1 - x(n)) \pmod 1$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ [14, pág. 367].

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos para v en la ecuación $v + \frac{1}{2}v(1 - v) \pmod 1 = v$, se obtienen $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ como puntos de equilibrio. Se tiene que $z_1 = 0$ es atractor, debido a que todas las iteraciones convergen a 0. Sin embargo, este punto de equilibrio no es estable.

En contraste con los ejemplos anteriores, a continuación analizamos ecuaciones en diferencias utilizando los teoremas de caracterización que se mencionan.

Ejemplo 2.6.16. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \frac{1}{2}(v^3 + v)$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f es $x(n+1) = \frac{1}{2}(x^3(n) + x(n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos para v en la ecuación $\frac{1}{2}(v^3 + v) = v$. Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(v^3 + v) &= v \\
v^3 + v &= 2v \\
v^3 - v &= 0 \\
v(v^2 - 1) &= 0 \\
v(v-1)(v+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Esto es $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = -1$ son los puntos de equilibrio.

Se tiene que:

$$f'(v) = \frac{1}{2}(3v^2 + 1).$$

Para $z_1 = 0$, $f'(0) = \frac{1}{2}$. De aquí que $|f'(z_1)| < 1$. Por el Teorema 2.6.4, z_1 es asintóticamente estable.

Para $z_2 = 1$, $f'(1) = 2$. De aquí que $|f'(z_2)| > 1$. Por el Teorema 2.6.1, z_2 es repulsor. Además, por el Teorema 2.6.3, z_2 es inestable.

Para $z_3 = -1$, $f'(-1) = 2$. Por lo que al igual que z_2, el punto de equilibrio z_3 es inestable y repulsor (Figura 2.17).

Ejemplo 2.6.17. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = v^2 + \frac{1}{8}$, para cada $v \in \mathbb{R}$. La ecuación en diferencias determinada por f es $x(n+1) = x^2(n) + \frac{1}{8}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos para v en la ecuación $v^2 + \frac{1}{8} = v$. Lo que quiere decir que:

$$v^2 + \frac{1}{8} = v$$

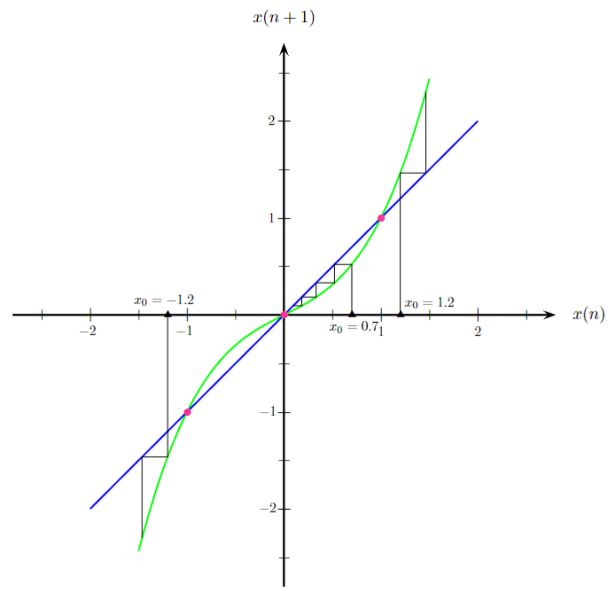

Figura 2.17: Diagrama de $x(n+1) = \frac{1}{2}(x^3(n) + x(n))$.

$$8v^2 - 8v + 1 = 0$$

$$v = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Esto es, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ y $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ son los puntos de equilibrio.

Se tiene que:

$$f'(v) = 2v.$$

Para $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f'(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. De aquí que $|f'(z_1)| > 1$.

Por el Teorema 2.6.1, z_1 es repulsor. Además, por el Teorema 2.6.3, z_1 es inestable.

Para $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f'(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. De aquí que $|f'(z_2)| < 1$.

Por el Teorema 2.6.4, z_1 es asintóticamente estable (Figura 2.18).

Como ya se ha mencionado, se analizan algunos modelos aplicados a la economía en los que se haga uso de las ecuaciones en diferencias, en este caso mencionamos algunos modelos que utilizan las ecuaciones en diferencias de primer orden, que a pesar de que son modelos simples, son muy útiles para obtener resultados cualitativos y en ocasiones una fórmula explícita del valor que se está estudiando.

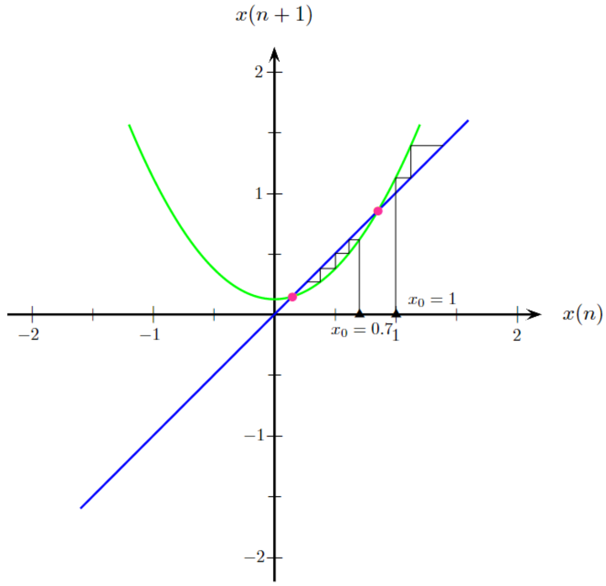

Figura 2.18: Diagrama de $x(n+1) = x^2(n) + \frac{1}{8}$.

2.7. Aplicaciones en economía

En esta sección abordamos las aplicaciones que tienen las ecuaciones en diferencias de primer orden en la formulación y la resolución de algunos modelos de economía. Para analizar estos modelos, se tomaron como guías pricipales las siguientes referencias [2], [4], [12] y [13].

2.7.1. Modelo de la telaraña

Es una variante del modelo de mercado para un solo artículo. Específicamente, describe los precios de mercado de equilibrio temporal en un mercado único con un cierto retraso en la oferta [7].

Sean $S \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $S(n)$ es el número de unidades ofertadas en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $D \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $D(n)$ es el número de unidades demandadas en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $p(n)$ es el precio por unidad en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Podemos suponer lo siguiente:

- $D(n)$ sólo depende linealmente de $p(n)$ y es representada mediante la curva de demanda:
$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.7.1}$$
donde m_d, $b_d > 0$ tal que m_d es la sensibilidad de los consumidores al precio.

Notemos que la pendiente de la curva de demanda $-m_d$ es negativa debido a que un aumento en una unidad en el precio produce una disminución de m_d unidades en la demanda.

- $S(n)$ sólo depende linealmente de $p(n)$ y mediante la curva de oferta, relaciona la oferta de un determinado período con la oferta de un período anterior:

$$S(n+1) = m_s p(n) - b_s, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.7.2}$$

donde m_s, $b_s > 0$ tal que m_s es la sensibilidad de los productores al precio.

A diferencia de la curva de demanda, la curva de oferta tiene pendiente positiva m_s, esto porque un aumento de una unidad en el precio provoca un aumento de m_s unidades en la oferta.

- El precio de mercado es el precio en el que la cantidad demandada y la cantidad ofertada están en equilibrio, lo que quiere decir que son iguales:

$$D(n+1) = S(n+1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.3}$$

Sustituyendo (2.7.1) y (2.7.2) en (2.7.3), se tiene que:

$$\begin{aligned} -m_d p(n+1) + b_d &= m_s p(n) - b_s \\ p(n+1) &= -\frac{m_s}{m_d} p(n) + \frac{b_s + b_d}{m_d}. \end{aligned}$$

Pongamos $a = -\frac{m_s}{m_d}$ y $b = \frac{b_s+b_d}{m_d}$. Se sigue que:

$$p(n+1) = ap(n) + b, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.4}$$

Para resolver esta ecuación, utilizamos (2.3.4). Lo que quiere decir que:

$$p(n) = a^n p_0 + b\left[\frac{a^n - 1}{a-1}\right], \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Notemos que $a \neq 1$, debido a que en caso contrario, $m_s = -m_d$, que es una contradicción puesto que m_s, $m_d > 0$.

Para hallar el punto de equilibrio de la ecuación (2.7.4) hacemos $p(n+1) = p(n)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(n) &= ap(n) + b \\ (1-a)p(n) &= b \\ p(n) &= \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Esto es, $z = \frac{b}{1-a}$ es el punto de equilibrio.

Notemos que:

$$f'(v) = a, \quad \text{para cada } v \in \mathbb{R}.$$

Lo que quiere decir que:

$$f'(z) = a. \tag{2.7.5}$$

Puesto que a es la razón de las pendientes de las curvas de oferta y demanda, esta relación determina el comportamiento de la secuencia de precios.

Hay tres casos a considerar:

Caso 1: $-1 < a < 0$. Se tiene que $-1 < -\frac{m_s}{m_d} < 0$. Esto significa que $m_s < m_d$.

Los precios alternan arriba y abajo pero convergen al precio de equilibrio $z = \frac{b}{1-a}$.

De (2.7.5), se tiene que $|f'(z)| < 1$. Esto es, z es asintóticamente estable.

Caso 2: $a = -1$. Esto significa que $-\frac{m_s}{m_d} = -1$. Lo que quiere decir que $m_s = m_d$.

Los precios oscilan entre dos valores únicamente. Si $p(0) = p_0$, entonces $p(1) = -p_0 + b$ y $p(2) = p_0$.

De (2.7.5), se sigue que $f'(z) = -1$. Esto significa que z es estable.

Caso 3: $a < -1$. Se tiene que $-\frac{m_s}{m_d} < -1$. Lo que quiere decir que $m_d < m_s$.

Los precios oscilan infinitamente alrededor del punto de equilibrio z y progresivamente se alejan más de él.

De (2.7.5), se tiene que $|f'(z)| > 1$. Esto es, z es inestable.

Para ilustrar el modelo (2.7.4), procedemos con el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 2.7.1. Supongamos que $m_d = 3$, $b_d = 18$, $m_s = 4$, $b_s = 3$ y $p_0 = 5$.

Se sigue que $a = -\frac{4}{3}$ y $b = 7$. De aquí que la ecuación en diferencias obtenida es la siguiente:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= -\frac{4}{3}p(n) + 7, \\ p(0) &= 5. \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación:

$$\begin{aligned} p(n) &= (5) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^n + 7\left[\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^n - 1}{-\frac{4}{3} - 1}\right] \\ &= (5) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^n + 3\left(1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^n\right). \end{aligned}$$

El precio de equilibrio es $z = \frac{7}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)} = 3$ y debido a que $a = -\frac{4}{3}$, se tiene que z es inestable.

Así, la interacción de la oferta y la demanda produce una oscilación explosiva. Esto significa que existe una tendencia a que el precio amplíe su desviación respecto a z a medida que pasa el tiempo.

2.7.2. Modelo simple sobre la tasa de empleo

Se observa la evolución de la tasa de empleo, respecto a la población activa de una región.

Sean L la población activa de una región determinada, tal que es constante en el tiempo, debido a que las nuevas incorporaciones se compensan con las salidas, $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $y(n)$ es la población empleada en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $x(n)$ es la tasa de empleo en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Esta se puede expresar de la forma siguiente:

$$x(n) = \frac{y(n)}{L}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Podemos asumir lo siguiente:

- De la población ocupada $y(n)$ en el período $n-1$, cierto porcentaje P_N, tal que $0 < P_N < 1$, continuará empleada en el período siguiente n, mientras que un porcentaje P_D, tal que $0 < P_D < 1$, pasará a estar desempleada.
- De la población desempleada $L - y(n)$ en el período $n - 1$, un porcentaje Q_N, tal que $0 < Q_N < 1$, ingresará al mercado laboral en el período siguiente n, mientras que un porcentaje Q_D, tal que $0 < Q_D < 1$, continuará desempleada.

De lo anterior, se sigue que:

- $P_N + P_D < 1$. Lo que quiere decir que, $1 - (P_N + P_D)$ será el porcentaje de la población que deje de ser activa y en el período siguiente n se repondrá.
- $Q_N + Q_D < 1$. Esto es, $1 - (Q_N + Q_D)$ será el porcentaje de la población que deje de ser activa y en el período siguiente n se repondrá.
- $(1-(P_N+P_D))y(n-1)+(1-(Q_N+Q_D))(L-y(n-1))$ son las nuevas incorporaciones a la población activa, de las que un porcentaje r, tal que $0 < r < 1$, halla trabajo y el resto permanecerá desempleada.

Tomando en cuenta esto, la población ocupada al final del período n es la siguiente:

$$y(n) = P_N y(n-1) + Q_N(L - y(n-1)) + r((1 - (P_N + P_D))y(n-1)$$

$$
\begin{aligned}
&+ (1-(Q_N+Q_D))(L-y(n-1)))\\
&= (P_N - Q_N + r(1-(P_N+P_D)) - r(1-(Q_N+Q_D)))y(n-1)\\
&+ L(Q_N + r(1-(Q_N+Q_D))),
\end{aligned}
$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Pongamos $\alpha = P_N - Q_N + r(1-(P_N+P_D)) - r(1-(Q_N+Q_D))$ y $\beta = Q_N + r(1-(Q_N+Q_D))$. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \alpha y(n-1) + L\beta\\
\frac{y(n)}{L} &= \alpha\left(\frac{y(n-1)}{L}\right) + \beta\\
x(n) &= \alpha x(n-1) + \beta, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

Esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$$
x(n+1) = \alpha x(n) + \beta, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.6}
$$

De (2.3.4), se sigue que:

$$
x(n) = \alpha^n x_0 + \beta\left[\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right], \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,
$$

tal que $\alpha \neq 1$ y $x(0) = x_0$ es la tasa de empleo inicial, que es conocida.

Notemos que $-1 < \alpha < 1$, debido a que $\alpha = P_N - Q_N + r(1-(P_N+P_D)) - r(1-(Q_N+Q_D))$, tal que $0 < r < 1$. Esto se puede interpretar como que α es un punto del segmento que une los puntos $P_N - Q_N \in (-1,1)$ y $P_D - Q_D \in (-1,1)$.

Veamos en qué valor se estabilizará la tasa de empleo a largo plazo. Para esto, se deben hallar los puntos de equilibrio de (2.7.6), lo que quiere decir que:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \alpha x(n) + \beta\\
x(n)(1-\alpha) &= \beta\\
x(n) &= \frac{\beta}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Esto es, $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$ es el punto de equilibrio.

Sea $v \in \mathbb{R}$. Para analizar su estabilidad, debemos calcular $f'(v)$. Se tiene que:

$$
f'(v) = \alpha.
$$

Por lo que $f'(z) = \alpha$. Debido a que $|\alpha| < 1$, se sigue que $|f'(z)| < 1$. Por el Teorema 2.6.4, z es asintóticamente estable.

Para ilustrar el modelo (2.7.6), realizamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 2.7.2. Supongamos que $P_N = 0.4$, $P_D = 0.55$, $Q_N = 0.85$, $Q_D = 0.1$, $r = 0.2$ y $x_0 = 0.3$.

Se tiene que $\alpha = -0.45$ y $\beta = 0.86$. Lo que quiere decir que la ecuación en diferencias es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= -0.45x(n) + 0.86, \\ x(0) &= 0.3. \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación:

$$\begin{aligned} x(n) &= (0.3) \cdot (-0.45)^n + 0.86 \left[\frac{(-0.45)^n - 1}{-0.45 - 1} \right] \\ &\approx (0.3) \cdot (-0.45)^n + \frac{1 - (-0.45)^n}{0.5931}. \end{aligned}$$

De acuerdo con lo obtenido, el punto de equilibrio es $z = \frac{0.86}{1-(-0.45)} \approx 0.5931$, que como se mencionó con anterioridad, es asintóticamente estable.

Por lo tanto, existe una tendencia a que la tasa de empleo se estabilice en z conforme pasa el tiempo.

2.7.3. Modelo simple sobre consumo y renta

Permite estudiar el comportamiento del consumo en función de la renta y las inversiones en determinados períodos.

Este modelo sirve para analizar la economía familiar de forma simple.

Sean $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es la renta disponible en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $C \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $C(n)$ es el consumo de una familia en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $\omega(n)$ el salario que se recibe al final del período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

El modelo se basa en lo siguiente:

- Una familia consume una parte proporcional de su renta disponible en cada período n:
$$C(n) = cY(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$
donde $0 < c < 1$ y c es la propensión marginal al consumo.

- La renta de la familia proviene del salario que se recibe al final del período n y crece a una tasa constante $r > 0$, que es la inflación del salario:
$$\begin{aligned} \omega(n+1) &= \omega(n) + r\omega(n) \\ &= \omega(n)(1+r), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

De esto, se obtiene la ecuación en diferencias siguiente:

$$\begin{aligned}\omega(n+1) &= (1+r)\omega(n),\\ \omega(0) &= \omega_0.\end{aligned}$$

Si utilizamos (2.3.4) para resolver esta ecuación en diferencias, se tiene que:

$$\omega(n) = (1+r)^n\omega_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Pongamos $\omega_0 = 1$. Esto significa que se está normalizando la unidad monetaria y se considera que será el salario inicial. Lo que quiere decir que:

$$\omega(n) = (1+r)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

De aquí que la renta disponible al comienzo del período $n+1$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}Y(n+1) &= Y(n) - C(n) + \omega(n)\\ &= Y(n) - cY(n) + (1+r)^n\\ &= (1-c)Y(n) + (1+r)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (2.7.7)\end{aligned}$$

Esto es, la renta disponible en el período $n+1$ es el ahorro en el período n más el salario recibido al final del período n.

Podemos utilizar (2.3.2) para resolver esta ecuación en diferencias. Se tiene que:

$$\begin{aligned}Y(n) &= (1-c)^nY_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(1-c)^{n-k-1}(1+r)^k\\ &= \frac{((\frac{-1-r}{c-1})^n - 1 + (r+c)Y_0)(1-c)^n}{r+c}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,\end{aligned}$$

tal que $Y(0) = Y_0$ es la producción inicial, que es conocida.

Notemos que $r + c \neq 0$, debido a que r, $c > 0$.

Para hallar el equilibrio de la ecuación (2.7.7), hacemos $Y(n+1) = Y(n)$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}Y(n) &= (1-c)Y(n) + (1+r)^n\\ (1-(1-c))Y(n) &= (1+r)^n\\ Y(n) &= \frac{(1+r)^n}{c}.\end{aligned}$$

Esto significa que $z(n) = \frac{(1+r)^n}{c}$ es el equilibrio.

Notemos que es un equilibrio móvil, debido a que se obtuvo una expresión en términos de n.

Puesto que $0 < 1 - c < 1$, se sigue que $\lim_{n\to\infty}(1-c)^n = 0$. Esto es, el equilibrio es asintóticamente estable.

Para ilustrar el modelo (2.7.7), procedemos con el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 2.7.3. Supongamos que $c = 0.6$, $r = 0.2$ y $Y_0 = 5$.

Se tiene que la ecuación en diferencias es la siguiente:

$$\begin{aligned} Y(n+1) &= 0.4Y(n) + (1.2)^n, \\ Y(0) &= 5. \end{aligned}$$

Si resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} Y(n) &= \frac{((\frac{-1.2}{0.4})^n - 1 + 0.8 \cdot 5)(0.4)^n}{0.8} \\ &= \frac{((-3)^n + 3)(0.4)^n}{0.8}. \end{aligned}$$

De acuerdo con lo obtenido, la trayectoria de equilibrio es $z(n) = \frac{(1.2)^n}{0.6}$, que como ya mencionamos, es asintóticamente estable.

Por lo tanto, existe una tendencia a que la renta disponible siga la trayectoria $z(n)$ a medida que pasa el tiempo.

2.7.4. Modelo simplificado de Harrod

Sirve para explicar el crecimiento económico a largo plazo como consecuencia del ahorro y la inversión, y es muy importante, puesto que ayuda a obtener la trayectoria que debe seguir la economía para que haya un equilibrio entre los ahorros y las inversiones, ya que un cambio en los niveles de inversión tiene una repercusión en la demanda agregada y la capacidad productiva de una economía.

Esta formalización es una versión simplificada del modelo original [18, pág. 16].

Sean $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es la renta disponible en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $I(n)$ es la inversión ex-ante en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $S \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $S(n)$ es el ahorro ex-ante en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Podemos suponer lo siguiente:

- El ahorro ex-ante está determinado por la función siguiente:

$$S(n) = sY(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.7.8}$$

  tal que $s > 0$ y s es una constante que representa la propensión marginal y media a ahorrar.

- La inversión ex-ante es de la forma siguiente:

$$I(n) = k(Y(n) - Y(n-1)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.7.9}$$

  tal que $k > 0$ y k es el coeficiente de aceleración al incremento de demanda o renta y es constante.

- Para que exista un equilibrio económico, el ahorro ex-ante debe ser igual a la inversión ex-ante, esto significa que:

$$S(n) = I(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.10}$$

Sustituyendo (2.7.8) y (2.7.9) en (2.7.10), se sigue que:

$$\begin{aligned} sY(n-1) &= k(Y(n) - Y(n-1)) \\ kY(n) - (k+s)Y(n-1) &= 0 \\ Y(n) - \frac{k+s}{k}Y(n-1) &= 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Esta ecuación rige la dinámica del equilibrio económico de este modelo y es equivalente a la siguiente:

$$Y(n+1) = \left(1 + \frac{s}{k}\right) Y(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.11}$$

Para resolver esta ecuación, utilizamos (2.3.4). Lo que quiere decir que:

$$Y(n) = \left(1 + \frac{s}{k}\right)^n Y_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.7.12}$$

donde Y_0 es el valor inicial de la renta.

De esta forma, se puede interpretar que la renta aumenta en el tiempo a una tasa de crecimiento constante $\frac{s}{k}$, que es lo que Harrod llama tasa de crecimiento garantizada. Esto debido a que si la renta crece de esta forma, permite alcanzar un crecimiento sostenido con una tasa de crecimiento constante.

Para hallar el punto de equilibrio de la ecuación (2.7.11) hacemos $Y(n+1) = Y(n)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(n) &= \left(1 + \frac{s}{k}\right) Y(n) \\ 0 &= \left(1 + \frac{s}{k}\right) Y(n) - Y(n) \\ &= \left(\left(1 + \frac{s}{k}\right) - 1\right) Y(n) \\ &= \frac{s}{k} Y(n). \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $z = 0$ es el punto de equilibrio.

Notemos que (2.7.11) está determinada por la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(v) = \left(1 + \frac{s}{k}\right) v$, para cada $v \in \mathbb{R}$.

Sea $v \in \mathbb{R}$. Para analizar su estabilidad, debemos calcular $f'(v)$. Se sigue que:

$$f'(v) = \left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

Por lo que $f'(z) = \left(1 + \frac{s}{k}\right)$. Debido a que s, $k > 0$, se tiene que $\frac{s}{k} > 0$. Esto es, $\left|1 + \frac{s}{k}\right| > 1$. Lo que quiere decir que $|f'(z)| > 1$. Por el Teorema 2.6.3, z es inestable.

Adicionalmente, podemos obtener la trayectoria del ahorro. De (2.7.8) y (2.7.12), se tiene que:

$$S(n) = sY_0 \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

De forma similar, podemos obtener la trayectoria de la inversión. De (2.7.9) y (2.7.12), se sigue que:

$$\begin{aligned}
I(n) &= k\left(\left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n} Y_0 - \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n-1} Y_0\right) \\
&= kY_0 \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n-1} \left(\left(1 + \frac{s}{k}\right) - 1\right) \\
&= kY_0 \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{s}{k}\right) \\
&= sY_0 \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{n-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Con esto podemos verificar que las trayectorias del ahorro y de la inversión son iguales.

Para ilustrar el modelo (2.7.11), realizamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 2.7.4. Supongamos que $k = 0.632$, $s = 0.816$ y $Y_0 = 17.4$. Esto de acuerdo a datos del Fondo Monetario Internacional (FMI) y el Producto Interno Bruto (PIB) del año 2012 en billones de dólares para varios países de la Zona Euro [13, pág. 20].

La ecuación en diferencias obtenida es la siguiente:

$$\begin{aligned}
Y(n+1) &\approx 2.2911Y(n), \\
Y(0) &= 17.4.
\end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Notemos que la ecuación (2.7.13) rige la dinámica de equilibrio económico para los países estudiados. También, indica que la renta en el período $n+1$ es proporcional a la renta en el período anterior n.

Resolviendo esta ecuación:

$$Y(n) \approx 17.4(2.2911)^n. \tag{2.7.14}$$

Adicionalmente, la trayectoria del ahorro y de la inversión es la siguiente:

$$\begin{aligned} S(n) &= I(n) \\ &\approx 0.816 \cdot 17.4 \cdot (2.2911)^{n-1} \\ &\approx 14.1984 \cdot (2.2911)^{n-1}. \end{aligned}$$

En conclusión, si por algún motivo la renta se desvía de la trayectoria de crecimiento económico determinada por (2.7.14), la renta seguirá creciendo y apartándose de dicha situación balanceada.

2.7.5. Modelo de amortización

La amortización es el proceso mediante el cual se paga un préstamo a través de pagos periódicos, cada uno de los cuales es un pago parcial de intereses y un pago parcial para reducir el capital pendiente.

Sean $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $g(n)$ es el n-ésimo pago, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $p(n)$ es el capital pendiente principal después de $g(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Supongamos que los cargos por intereses se capitalizan a la tasa r por período de pago.

La formulación de este modelo se basa en el hecho de que el capital pendiente de pago $p(n+1)$ después del $(n+1)$-ésimo primer pago es igual al capital pendiente de pago $p(n)$ después del n-ésimo pago más el interés $rp(n)$ incurridos durante el $(n+1)$-ésimo período menos el n-ésimo pago $g(n)$. Se sigue que:

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Lo que quiere decir que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= (1+r)p(n) - g(n); \\ p(0) &= p_0, \end{aligned}$$

donde p_0 es la deuda inicial. De (2.3.2), se tiene que:

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

En la práctica, el pago $g(n)$ es constante, digamos que es igual a T. Esto se traduce a lo siguiente:

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - ((1+r)^n - 1)\left(\frac{T}{r}\right), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.15}$$

Para saber cuánto sería el pago mensual T si queremos liquidar el préstamo en exactamente n pagos, podemos asumir que $p(n) = 0$. Por lo que, de (2.7.15), se sigue que:

$$T = p_0 \left[\frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \right], \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7.16}$$

Para ilustrar la utilización de la ecuación (2.7.16) proporcionamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 2.7.5. Supongamos que un préstamo de \$80 000 debe amortizarse en pagos mensuales iguales. Si la tasa de interés compuesto es del 10 % mensualmente, calculemos el pago mensual requerido para liquidar el préstamo en 30 años.

En este caso, se tiene que $p_0 = 80\,000$, $r = 0.1$ y $n = 30(12) = 360$.

Así, de (2.7.16):

$$\begin{aligned} T &= 80\,000 \left[\frac{0.1}{1 - (1.1)^{-360}} \right] \\ &= 8\,000. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el pago mensual debe ser de \$8 000.

CAPÍTULO 3

ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR

Las ecuaciones en diferencias lineales de orden superior son una generalización de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, y su teoría sirve para poder resolver una ecuación en diferencias lineal de cualquier orden, lo que permite atender diversas aplicaciones de estas ecuaciones en áreas como Física, Biología (más específicamente en la dinámica de poblaciones) y Economía, que es el área de mayor interés en este proyecto, por lo que estudiamos algunos modelos específicos.

3.1. Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

Por la Observación 2.1.1 y (1.5.1), se tiene la siguiente observación.

Observación 3.1.1. Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $k \in \mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Una ecuación en diferencias lineal no homogénea de orden k es de la forma siguiente:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = g(n), \tag{3.1.1}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$, $p_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $p_k(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \geq n_0$.

La correspondiente ecuación en diferencias homogénea de (3.1.1) se obtiene cuando $g(n) = 0$, para cada $n \geq n_0$. Esto es:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0. \tag{3.1.2}$$

La ecuación (3.1.1) puede escribirse de la forma siguiente:

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - \cdots - p_k(n)y(n) + g(n). \tag{3.1.3}$$

Puesto que necesitamos conocer los valores específicos de $y(n+k)$ en (3.1.3), para cada $n \geq n_0$, para el caso cuando $n = n_0$, obtenemos:

$$y(n_0+k) = -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - p_2(n_0)y(n_0+k-2) - \cdots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0).$$

Dado que $p_1(n_0)$, $p_2(n_0)$, ...,$p_k(n_0)$ y $g(n_0)$ son conocidos, para hallar $y(n_0+k)$, se necesita conocer los valores $y(n_0+k-1), y(n_0+k-2), \ldots, y(n_0)$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1.2. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la siguiente ecuación en diferencias de orden $k = 3$ y $n_0 = 1$:

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n, \tag{3.1.4}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq 1$. Añadiendo las condiciones $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ y $y(3) = 1$. Hallaremos los valores de $y(4)$, $y(5)$, $y(6)$ y $y(7)$.

Reescribimos la ecuación (3.1.4) de la forma siguiente:

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n.$$

Para $n = n_0 = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(4) &= y(1+3) \\ &= \frac{1}{2}y(3) - y(2) + 3y(1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(1) - (-1) + 3(0) + 1 \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Para $n = n_0 + 1 = 2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(5) &= y(2+3) \\ &= \frac{2}{3}y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right) - 2(1) + 3(-1) + 2 \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Para $n = n_0 + 2 = 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(6) &= y(3+3) \\ &= \frac{3}{4}y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 \\ &= \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) - 3\left(\frac{5}{2}\right) + 3(1) + 3 \\ &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Para $n = n_0 + 3 = 4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(7) &= y(4+3) \\ &= \frac{4}{5}y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 \\ &= \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{2}\right) - 4\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\left(\frac{5}{2}\right) + 4 \\ &= \frac{89}{6}. \end{aligned}$$

De esta forma surge el problema con valores iniciales, que establece lo siguiente.

Definición 3.1.3. El *problema con valores iniciales* correspondiente a la ecuación (3.1.1) es como sigue:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n) \tag{3.1.5}$$

$$y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \ldots, y(n_0+k-1) = a_{k-1}, \tag{3.1.6}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Teorema 3.1.4. El problema con valores iniciales (3.1.5) y (3.1.6) tiene solución única.

Demostración. Usando recurrencia, definimos:

$$\begin{aligned} y(n_0) &= a_0 \\ y(n_0+1) &= a_1 \\ &\vdots \\ y(n_0+k-1) &= a_{k-1} \\ y(n_0+k) &= -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - \cdots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0). \\ y((n_0+1)+k) &= -p_1(n_0+1)y((n_0+1)+k-1) - \cdots - p_k(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1). \\ &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - \cdots - p_k(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1). \\ y(n_0+2)+k) &= -p_1(n_0+2)y((n_0+2)+k-1) - \cdots - p_k(n_0+2)y(n_0+2) + g(n_0+2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -p_1(n_0+2)y(n_0+k+1) - \cdots - p_k(n_0+2)y(n_0+2) + g(n_0+2).\\
&\ \vdots\\
y((n_0+p)+k) &= -p_1(n_0+p)y((n_0+p)+k-1) - \cdots - p_k(n_0+p)y(n_0+p) + g(n_0+p)\\
&= -p_1(n_0+p)y(n_0+k+(p-1)) - \cdots - p_k(n_0+p)y(n_0+p) + g(n_0+p).
\end{aligned}
$$

Lo que quiere decir que para cada $n \geq n_0$, $y(n+k)$ existe. Además, puesto que $n = n_0 + k + (n - n_0 - k)$, $y(n) = y(k + n_0 + (n - n_0 - k))$. Así, y es solución de (3.1.5) con (3.1.6).

Ahora, supongamos que z también es solución de (3.1.5) con (3.1.6). Puesto que y y z cumplen con ((3.1.6)), se tiene que $x(n_0+i) = z(n_0+i)$, apara cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Esto último implica que $y(n_0+k) = z(n_0+k)$ y así $y(n_0+k+1) = z(n_0+k+1)$, procediendo de manera inductiva, se tiene que $y(n+k) = z(n+k)$, para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, y es única. ■

Por el Teorema 3.1.4, se tiene que la ecuación (3.1.5) con las condiciones iniciales (3.1.6), tiene solución única. De esta manera para cada conjunto de condiciones iniciales, se puede obtener una solución única. Así, la ecuación en diferencias (3.1.5) tiene una infinidad de soluciones. Uno de los objetivos es obtener una solución general para la ecuación (3.1.5), lo cual no es una tarea fácil. Para lograr nuestro objetivo es necesario estudiar la ecuación homogénea asociada a (3.1.5)y posteriormente a la ecuación (3.1.5).

En lo que resta de esta sección, analizamos la ecuación lineal homogénea de orden k (3.1.2).

Definición 3.1.5. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_r$ son:

1. *Linealmente dependientes* si existen constantes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ no todas cero tales que:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_r f_r = 0. \tag{3.1.7}$$

2. *Linealmente independientes* si no son linealmente dependientes, es decir, si $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_r f_r = 0$, entonces $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$.

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ linealmente dependientes. Luego, sea $j \in \{1, 2 \ldots, r\}$ tal que $a_j \neq 0$ y $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_r f_r = 0$. En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
f_j(n) &= -\frac{a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{a_2}{a_j} f_2(n) - \cdots - \frac{a_r}{a_j} f_r(n)\\
&= -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \qquad (3.1.8)
\end{aligned}
$$

De la ecuación (3.1.8), se tiene que cada f_j con coeficiente distinto de cero es una combinación lineal de los otros f_i.

Ejemplo 3.1.6. Se tiene que las funciones 3^n, $n3^n$ y $n^2 3^n$ son linealmente independientes para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq 1$.

Supongamos que existen a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$, tales que:

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0.$$

Esto significa que:

$$3^n (a_1 + a_2 n + a_3 n^2) = 0.$$

De aquí $a_1+a_2n+a_3n^2 = 0$. Esto sólo puede ser cierto si $a_1 = 0$. A la vez, $a_2n+a_3n^2 = 0$. Lo que quiere decir que $n(a_2 + a_3 n) = 0$. Se sigue que $a_2 + a_3 n = 0$. Esto es, $a_2 = a_3 = 0$. Por consiguiente, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Por lo tanto 3^n, $n3^n$ y $n^2 3^n$ son linealmente independientes.

Definición 3.1.7. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ un conjunto de k soluciones de (3.1.2). Se dice que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un *conjunto fundamental* de soluciones de la ecuación en diferencias (3.1.2) si $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es linealmente independiente.

Una forma más simple de verificar si un conjunto de soluciones es linealmente independiente o no, es utilizando el Casoratiano, denominado de esta forma por ser el determinante de la matriz de Casorati, llamada así en honor al matemático Felice Casorati (1835-1890).

Definición 3.1.8. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. El *Casoratiano* de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es una función $W \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida como:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \cdots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ejemplo 3.1.9. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la ecuación en diferencias siguiente:

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

(a) Demostremos que las sucesiones 1, $(-3)^n$ y 2^n son soluciones de la ecuación en diferencias.

(b) Hallemos el Casoratiano de las sucesiones del inciso (a).

(a) Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $x_1(n) = 1$, $x_2(n) = (-3)^n$ y $x_3(n) = 2^n$.

Se tiene que x_1 es solución de la ecuación en diferencias debido a que:

$$x_1(n+3) - 7x_1(n+1) + 6x_1(n) = 0$$

$$1 - 7 + 6 = 0.$$

Se sigue que x_2 es solución de la ecuación en diferencias puesto que:

$$\begin{aligned} x_2(n+3) - 7x_2(n+1) + 6x_2(n) &= 0 \\ (-3)^{n+3} - 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n &= 0 \\ (-3)^n(-27 + 21 + 6) &= 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, x_3 es solución de la ecuación en diferencias. En efecto:

$$\begin{aligned} x_3(n+3) - 7x_3(n+1) + 6x_3(n) &= 0 \\ 2^{n+3} - 7 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n &= 0 \\ 2^n(8 - 14 + 6) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Se tiene que:

$$\begin{aligned} W(n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\ &= (1) \begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n \begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\ &= (-3)^{n+1}2^{n+2} - 2^{n+1}(-3)^{n+2} - (-3)^n(2^{n+2} - 2^{n+1}) + 2^n((-3)^{n+2} - (-3)^{n+1}) \\ &= -12(2^n(-3)^n) - 18(2^n(-3)^n) - 4(2^n(-3)^n) + 2(2^n(-3)^n) + 9(2^n(-3)^n) \\ &\quad + 3(2^n(-3)^n) \\ &= -20(2^n(-3)^n). \end{aligned}$$

El siguiente lema es útil para verificar si las soluciones son linealmente independientes.

Lema 3.1.10 (Abel)**.** Sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son soluciones de (3.1.2), se tiene que:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \text{con } n \geq n_0.$$

Demostración. Veamos que el resultado es válido para $k = 2$.

Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ dos soluciones linealmente independientes de:

$$x(n+2) + p_1(n)x(n+1) + p_2(n)x(n) = 0. \tag{3.1.9}$$

Se sigue que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) \end{pmatrix}. \tag{3.1.10}$$

De (3.1.9), se tiene que:

$$x_i(n+2) = -p_2(n)x_i(n) - p_1(n)x_i(n+1), \tag{3.1.11}$$

con $i = 1, 2$.

Sean $R_1 = -p_2(n)x_1(n) - p_1(n)x_1(n+1)$ y $R_2 = -p_2(n)x_2(n) - p_1(n)x_2(n+1)$.

Si utilizamos (3.1.11) para sustituir $x_1(n+2)$ y $x_2(n+2)$ en (3.1.10), se sigue que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ R_1 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Por la propiedad de invarianza [21, p. 5], se tiene que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ -p_2(n)x_1(n) & -p_2(n)x_2(n) \end{pmatrix}.$$

Ahora, utilizando la propiedad de intercambiar filas en los determinantes:

$$\begin{aligned} W(n) &= -p_2(n)\ \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ x_1(n) & x_2(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_2(n)(-1)\ \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+2) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^2 p_2(n)W(n). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Si utilizamos (2.2.1) para resolver la ecuación (3.1.12), se sigue que:

$$\begin{aligned} W(n) &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^2 p_2(i) \right) W(n_0) \\ &= (-1)^{(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_2(i)W(n_0) \\ &= (-1)^{2(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_2(i)W(n_0). \end{aligned}$$

Esto es, el lema es válido para $k = 2$.

Ahora, veamos que es válido para $k = 3$.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, tres soluciones linealmente independientes de:

$$x(n+3) + p_1(n)x(n+2) + p_2(n)x(n+1) + p_3(n)x(n) = 0. \tag{3.1.13}$$

Se sigue que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{pmatrix}. \tag{3.1.14}$$

De (3.1.13), se tiene que:

$$x_i(n+3) = -p_3(n)x_i(n) - (p_1(n)x_i(n+2) + p_2(n)x_i(n+1)), \tag{3.1.15}$$

con $i = 1, 2, 3$.

Definimos S_1, S_2 y S_3 de la forma siguiente:

$$S_1 = -p_3(n)x_1(n) - (p_2(n)x_1(n+1) + p_1(n)x_1(n+2)).$$

$$S_2 = -p_3(n)x_2(n) - (p_2(n)x_2(n+1) + p_1(n)x_2(n+2)).$$

$$S_3 = -p_3(n)x_3(n) - (p_2(n)x_3(n+1) + p_1(n)x_3(n+2)).$$

Si utilizamos (3.1.15) para sustituir $x_1(n+3)$, $x_2(n+3)$ y $x_3(n+3)$ en (3.1.14), se sigue que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{pmatrix}.$$

Por la propiedad de invarianza [21, p. 5], se tiene que:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ -p_3(n)x_1(n) & -p_3(n)x_2(n) & -p_3(n)x_3(n) \end{pmatrix}.$$

Ahora, utilizando la propiedad de intercambiar filas en los determinantes:

$$\begin{aligned} W(n+1) &= -p_3(n) \ \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_3(n)(-1)^2 \ \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^3 p_3(n) W(n). \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Si utilizamos (2.2.1) para resolver la ecuación (3.1.16), se sigue que:

$$W(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i) \right) W(n_0)$$

$$= (-1)^{(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) W(n_0)$$
$$= (-1)^{3(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) W(n_0).$$

Lo que quiere decir que el lema es válido para $k = 3$.

Si se realiza esto inductivamente para $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0).$$

De esto, se sigue el resultado. ■

Si en la ecuación (3.1.2), $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son constantes, se sigue que:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{(n-n_0)} W(n_0), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{con } n \geq n_0.$$

Corolario 3.1.11. Sea $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Supongamos que $p_k(n) \neq 0$ en (3.1.2), para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$. El Casoratiano $W(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$ si y sólo si $W(n_0) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $W(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$.

Pongamos $n = n_0$. Se tiene que $W(n_0) \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $W(n_0) \neq 0$. Por el Lema 3.1.10, se sigue que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0).$$

Puesto que $W(n_0) \neq 0$ y $p_k(n) \neq 0$, de la ecuación anterior se tiene que $W(n) \neq 0$, para cada $n \geq n_0$. ■

Este corolario se puede interpretar como que el Casoratiano es idénticamente cero o nunca es cero, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$. Esto significa que para verificar que $W(n) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, sólo necesitamos probar que $W(n_0) \neq 0$, para algún n_0 adecuado.

Ahora, analizamos la relación que existe entre la independencia lineal de las soluciones y el Casoratiano.

Para realizar esto, veamos que el conjunto de k soluciones de (3.1.2), puede representarse de forma matricial.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ soluciones de la ecuación (3.1.2). Supongamos que existen constantes $a_1, a_2, \ldots, a_k, n_0 \in \mathbb{Z}_+$, tales que:

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_kx_k(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{con } n \geq n_0.$$

Se tiene que, a partir de esta combinación lineal podemos generar las siguientes $k-1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1x_1(n+1) + a_2x_2(n+1) + \cdots + a_kx_k(n+1) &= 0 \\ &\vdots \\ a_1x_1(n+k-1) + a_2x_2(n+k-1) + \cdots + a_kx_k(n+k-1) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando las k ecuaciones, se sigue que:

$$X(n)\xi = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1.17}$$

donde:

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \cdots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Notemos que $W(n) = \det(X(n))$.

Teorema 3.1.12. El conjunto de soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de (3.1.2) es un conjunto fundamental si y sólo si el Casoratiano $W(n_0) \neq 0$, para algún $n_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto fundamental.

Así, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es linealmente independiente. Se sigue que $X(n_0)$ es invertible. Esto significa que $W(n_0) \neq 0$, para algún $n_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Recíprocamente, supongamos que $W(n_0) \neq 0$, para algún $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Luego, la matriz $X(n_0)$ es invertible. De donde, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son linealmente dependientes. Lo que quiere decir que, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un conjunto fundamental. ∎

Ejemplo 3.1.13. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Verifiquemos que $\{n, 2^n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $x_1(n) = n$ y $x_2(n) = 2^n$.

Veamos que x_1 es solución de la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
x_1(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x_1(n+1) + \frac{2n}{n-1}x_1(n) &= 0\\
n+2 - \frac{3n-2}{n-1}(n+1) + \frac{2n}{n-1}(n) &= 0\\
n+2 - \frac{3n^2+n+2}{n-1} + \frac{2n^2}{n-1} &= 0\\
n+2 - \frac{n^2+n-2}{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Veamos que x_2 es solución de la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
x_2(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x_2(n+1) + \frac{2n}{n-1}x_2(n) &= 0\\
2^{n+2} - \frac{3n-2}{n-1}(2^{n+1}) + \frac{2n}{n-1}(2^n) &= 0\\
2^n\left(4 - \frac{6n-4}{n-1} + \frac{2n}{n-1}\right) &= 0\\
2^n\left(4 + \frac{-4n+4}{n-1}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Se tiene que el Casoratiano de x_1 y x_2 en n es el siguiente:

$$W(n) = \det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1}\end{pmatrix}.$$

Si $n_0 = 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
W(0) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= -1\\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.12, $\{n, 2^n\}$ es un conjunto fundamental.

Ejemplo 3.1.14. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Probemos que $\{2^n, (-2)^n, (-3)^n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de tercer orden:

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $x_1(n) = 2^n$, $x_2(n) = (-2)^n$ y $x_3(n) = (-3)^n$.

Veamos que x_1 es solución de la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} x_1(n+3)+3x_1(n+2)-4x_1(n+1)-12x_1(n)&=0\\ 2^{n+3}+3\cdot 2^{n+2}-4\cdot 2^{n+1}-12\cdot 2^n&=0\\ 2^n(8+12-8-12)&=0. \end{aligned}$$

Probemos que x_2 es solución de la ecuación en diferencias. En efecto:

$$\begin{aligned} x_2(n+3)+3x_2(n+2)-4x_2(n+1)-12x_2(n)&=0\\ (-2)^{n+3}+3(-2)^{n+2}-4(-2)^{n+1}-12(-2)^n&=0\\ (-2)^n(-8+12+8-12)&=0. \end{aligned}$$

Además, x_3 también es solución de la ecuación en diferencias, pues:

$$\begin{aligned} x_3(n+3)+3x_3(n+2)-4x_3(n+1)-12x_3(n)&=0\\ (-3)^{n+3}+3(-3)^{n+2}-4(-3)^{n+1}-12(-3)^n&=0\\ (-3)^n(-27+27+12-12)&=0. \end{aligned}$$

Se tiene que el Casoratiano de x_1, x_2 y x_3 en n es el siguiente:

$$W(n)=\det\begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n\\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1}\\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Si $n_0=0$, se sigue que:

$$\begin{aligned} W(0)&=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}\\ &=-6-30+16\\ &=-20\\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.12, $\{2^n,(-2)^n,(-3)^n\}$ es un conjunto fundamental.

Teorema 3.1.15 (Fundamental de las ecuaciones en diferencias homogéneas lineales)**.** Si $p_k(n)\neq 0$, para cada $n\in\mathbb{Z}_+$ con $n\geq n_0$, entonces la ecuación (3.1.2) tiene un conjunto fundamental de soluciones para cada $n\in\mathbb{Z}_+$ con $n\geq n_0$.

Demostración. Consideremos la ecuación (3.1.2) y supongamos que $p_k(n)\neq 0$, para cada $n\in\mathbb{Z}_+$ con $n\geq n_0$. Para las condiciones iniciales $x_1(n_0)=1, x_1(n_0+1)=\cdots=x_1(n_0+k-1)=0$, por el Teorema 3.1.4, existe una solución x_1 para (3.1.2) que cumple tales condiciones.

Ahora, para las condiciones iniciales $x_2(n_0) = 0, x_2(n_0 + 1) = 1, x_2(n_0 + 2) = \cdots = x_2(n_0 + k - 1) = 0$, por el Teorema 3.1.4, existe una solución x_2 para (3.1.2) que cumple tales condiciones.

Así, de manera inductiva, para las condiciones iniciales $x_k(n_0) = x_k(n_0+1) = \cdots x_k(n_0+k-2) = 0, x_k(n_0 + k - 1) = 1$, por el Teorema 3.1.4, existe una solución x_k para (3.1.2) que cumple tales condiciones.

De esta manera, se tiene que $W(n_0) = \det(I) = 1$. Luego, por el Teorema 3.1.12, se tiene que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.1.2). ■

Se tiene que existen infinitos conjuntos fundamentales de soluciones de (3.1.2), tales que se pueden generar a partir de un conjunto conocido.

Lema 3.1.16. Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ dos soluciones de (3.1.2), los siguientes argumentos son ciertos:

(a) $x = x_1 + x_2$ es solución de (3.1.2).

(b) $\overline{x} = ax_1$ es solución de (3.1.2), para cada constante a.

Demostración. (a) Puesto que x_1 y x_2 son soluciones de (3.1.2), considerando $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que:

$$x_1(n + k) + p_1(n)x_1(n + k - 1) + \cdots + p_k(n)x_1(n) = 0 \tag{3.1.18}$$

$$x_2(n + k) + p_1(n)x_2(n + k - 1) + \cdots + p_k(n)x_2(n) = 0. \tag{3.1.19}$$

De (3.1.18) y (3.1.19), se sigue que:

$$\begin{aligned}(x_1(n + k) + x_2(n + k)) + \cdots + p_k(n)(x_1(n) + x_2(n)) = 0\\ x(n + k) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, x es solución de (3.1.2).

(b) Sea a una constante. Considerando $n \in \mathbb{Z}_+$, de (3.1.18), se tiene que:

$$\begin{aligned}(ax_1(n + k)) + p_1(n)(ax_1(n + k - 1)) + \cdots + p_k(n)(ax_1(n)) = 0\\ \overline{x}(n + k) + p_1(n)\overline{x}(n + k - 1) + \cdots + p_k(n)\overline{x}(n) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{x}$ es solución de (3.1.2). ■

Una consecuencia inmediata del Lema 3.1.16 es el siguiente:

Teorema 3.1.17 (Principio de superposición)**.** Si $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ son soluciones de (3.1.2), entonces:

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_rx_r(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

nuevamente es solución de (3.1.2).

Por otro lado, sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ un conjunto fundamental de soluciones de (3.1.2) y x alguna solución de (3.1.2). Se tiene que existen constantes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Para esto, utilizamos la representación matricial obtenida en (3.1.17) para escribir $X(n)\xi = \hat{x}(n)$, donde:

$$\hat{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto fundamental, se tiene que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es linealmente independiente. Así $X(n)$ es una matriz invertible. Luego:

$$\xi = X^{-1}(n)\hat{x}(n).$$

Si $n = n_0$, se sigue que:

$$\xi = X^{-1}(n_0)\hat{x}(n_0).$$

Con esto, podemos escribir el concepto de solución general de (3.1.2).

Definición 3.1.18. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ un conjunto fundamental de soluciones de (3.1.2). La *solución general* de (3.1.2) es de la forma $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, con a_i constantes, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Notemos que cada solución de (3.1.2) puede obtenerse de la solución general mediante una elección adecuada de constantes a_i.

Los resultados anteriores se pueden reformular utilizando herramienta del álgebra lineal.

Sea $S = \{x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) : x \text{ es solución de } (3.1.2)\}$. Se sigue que $S \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

Teorema 3.1.19. El conjunto S es un subespacio vectorial de dimensión k, del espacio vectorial $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, con las operaciones usuales.

Demostración. Veamos que $(S, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+), +, \cdot)$ donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

Sean $x_1, x_2 \in S$. Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$(x_1 + x_2)(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

Por el inciso (a) del Lema 3.1.16, se sigue que $x_1 + x_2$ es solución de la ecuación (3.1.2). Así, $x_1 + x_2 \in S$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$(ax_1)(n) = ax_1(n).$$

Por el inciso (b) del Lema 3.1.16, se sigue que ax_1 es solución de la ecuación (3.1.2). Así, $ax_i \in S$.

Lo que quiere decir que $(S, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+), +, \cdot)$.

Ahora, veamos que $(S, +, \cdot)$ es de dimensión k.

Por el Teorema 3.1.15, se tiene que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un conjunto fundamental de (3.1.2), para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$.

Adicionalmente, por el Teorema 3.1.17, se tiene que toda solución es combinación lineal de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Esto significa que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ forma una base para $(S, +, \cdot)$. Por lo tanto, $(S, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión k. ■

3.2. Ecuaciones en diferencias lineales homogéneas con coeficientes constantes

Sean $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $k \in \mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos la ecuación en diferencias homogénea de orden k de la forma siguiente:

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{3.2.1}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$, $p_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in 1, 2, \ldots, k$ y $p_k \neq 0$.

En esta sección nuestro objetivo es hallar la solución general de la ecuación (3.2.1), para ello, basta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.1).

Supongamos que las soluciones de (3.2.1) son de la forma λ^n, donde λ es un número complejo. Sustituyendo esto en la ecuación (3.2.1), se sigue que:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + p_2 \lambda^{n+k-2} + \cdots + p_k \lambda^n &= 0 \\ \lambda^n \left(\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k\right) &= 0 \\ \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

La ecuación (3.2.2) se llama *ecuación característica* de (3.2.1) y sus raíces λ son denominadas *raíces características*.

Notemos que si $p_k \neq 0$, ninguna de las raíces características son iguales a cero.

Supongamos que $p_k = 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1} \lambda &= 0 \\ \lambda \left(\lambda^{k-1} + p_1 \lambda^{k-2} + p_2 \lambda^{k-3} + \cdots + p_{k-1}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Esto es, $\lambda = 0$ es una raíz característica.

Respecto a las raíces características existen dos casos:

Caso 1: Supongamos que las raíces características $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son distintas.

Veamos que $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.1).

Pongamos $n_0 = 0$. Se tiene que:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

Notemos que (3.2.3) es el determinante de Vandermonde. Luego, por [5, pág. 230]:

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j). \tag{3.2.4}$$

Debido a que todas las raíces características son distintas, de (3.2.4), se tiene que $W(0) \neq 0$.

Por el Teorema 3.1.12, $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.1).

Esto significa que la solución general de (3.2.1) es de la forma:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

donde, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, a_i, es un número complejo.

Caso 2: Supongamos que las raíces características distintas son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_r$ tales que $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$, respectivamente. Utilizando el operador incremento E, podemos escribir (3.2.1) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) &= p_0 x(n+k) + p_1 x(n+k-1) \\ &\quad + \cdots + p_k x(n) \\ &= (p_0 E^k + p_1 E^{k-1} + \cdots + p_k I) x(n) \\ &= p(E) x(n), \end{aligned}$$

donde $p(E)$ es un polinomio de grado k con $p_0 = 1$.

Debido a que las soluciones son de la forma $\lambda_i^{m_i}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(E)x(n) &= (E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Notemos que si $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m_i}$ son soluciones de la ecuación:

$$(E-\lambda_i)^{m_i}x(n) = 0, \tag{3.2.6}$$

también son soluciones de (3.2.5). Esto significa que si Ψ_s es solución de (3.2.6), entonces $(E-\lambda_i)^{m_i}\Psi_s(n) = 0$.

Se sigue que:

$$\begin{aligned}(E-\lambda_1)^{m_1}\cdots(E-\lambda_i)^{m_i}\cdots(E-\lambda_r)^{m_r}\Psi_s(n) &= (E-\lambda_1)^{m_1}\\ &\quad\cdots(E-\lambda_{i-1})^{m_{i-1}}(E-\lambda_{i+1})^{m_{i+1}}\\ &\quad\cdots(E-\lambda_r)^{m_r}(E-\lambda_i)^{m_i}\Psi_s(n)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Supongamos que podemos hallar un conjunto fundamental de soluciones para cada (3.2.6), $1 \leq i \leq r$. De hecho, la unión de estos r conjuntos fundamentales podría ser un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.2.5). Veamos que esto es cierto con los siguientes dos resultados.

Recordemos que $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$. Además, si $n < r$, $\binom{n}{r} = 0$.

Lema 3.2.1. El conjunto $G_i = \{\lambda_i^n, \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}, \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2}, \ldots, \binom{n}{m_i-1}\lambda_i^{n-m_i+1}\}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.6).

Demostración. Veamos que $\binom{n}{r}\lambda_i^{n-r}$ es solución de (3.2.6). Por el Lema 1.3.8, se sigue que:

$$\begin{aligned}(E-\lambda_i)^{m_i}\binom{n}{r}\lambda_i^{n-r} &= \lambda_i^{n-r}(\lambda_i E-\lambda_i)^{m_i}\binom{n}{r}\\ &= \lambda_i^{n+m_i-r}(E-I)^{m_i}\binom{n}{r}\\ &= \lambda_i^{n+m_i-r}\Delta^{m_i}\binom{n}{r}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto es, $\binom{n}{r}\lambda_i^{n-r}$ es solución de (3.2.6).

Pongamos $n_0 = 0$. Se tiene que:

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \lambda_i^0 & \binom{0}{1}\lambda_i^{0-1} & \binom{0}{2}\lambda_i^{0-2} & \cdots & \binom{0}{m_i-1}\lambda_i^{0-(m_i-1)} \\ \lambda_i^1 & \binom{1}{1}\lambda_i^{1-1} & \binom{1}{2}\lambda_i^{1-2} & \cdots & \binom{1}{m_i-1}\lambda_i^{1-(m_i-1)} \\ \lambda_i^2 & \binom{2}{1}\lambda_i^{2-1} & \binom{2}{2}\lambda_i^{2-2} & \cdots & \binom{2}{m_i-1}\lambda_i^{2-(m_i-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & \binom{m_i-1}{1}\lambda_i^{(m_i-1)-1} & \binom{m_i-1}{2}\lambda_i^{(m_i-1)-2} & \cdots & \binom{m_i-1}{m_i-1}\lambda_i^{(m_i-1)-(m_i-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & (m_i-1)\lambda_i^{m_i-2} & \frac{(m_i-1)(m_i-2)}{2!}\lambda_i^{m_i-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Debido a que la matriz es triangular superior, se sigue que:

$$\begin{aligned} W(0) &= 1 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.12, $\{\lambda_i^n, \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}, \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2}, \ldots, \binom{n}{m_i-1}\lambda_i^{n-m_i+1}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.6). ∎

Teorema 3.2.2. El conjunto $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.5).

Demostración. Por el Lema 3.2.1, se tiene que las funciones en el conjunto G son soluciones de (3.2.5).

Veamos que G forma un conjunto fundamental.

Pongamos $n_0 = 0$. Se sigue que:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_r & 1 & \cdots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \cdots & \lambda_r^2 & 2\lambda_r & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-2} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & (k-1)\lambda_r^{k-2} & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

Notemos que (3.2.7) es el determinante de Vandermonde generalizado. Esto significa que:

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j)^{m_i m_j}. \tag{3.2.8}$$

Debido a que $\lambda_i \neq \lambda_j$, de (3.2.8), se tiene que $W(0) \neq 0$.

Por el Teorema 3.1.12, $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.2.5). ∎

Una consecuencia inmediata del Lema 3.2.1 y del Teorema 3.2.2 es el corolario siguiente:

Corolario 3.2.3. La solución general de la ecuación (3.2.5) es de la forma siguiente:

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n \left(a_{i,0} + a_{i,1}n + a_{i,2}n^2 + \cdots + a_{i,m_i-1}n^{m_i-1}\right).$$

Ejemplo 3.2.4. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la siguiente ecuación en diferencias de tercer orden con coeficientes constantes, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(2) = 1.$$

Se tiene que su ecuación característica es:

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0.$$

Esto significa que sus raíces características son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.

Lo que quiere decir que la solución general de la ecuación en diferencias es de la forma:

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

donde a_0, a_1, $b_1 \in \mathbb{R}$.

De las condiciones iniciales se tiene que:

$$\begin{aligned} x(0) &= a_0 + b_1 \\ &= 0 \\ x(1) &= 2a_0 + 2a_1 + 3b_1 \\ &= 1 \\ x(2) &= 4a_0 + 8a_1 + 9b_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones forman un sistema, que al resolverlo se obtiene $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ y $b_1 = -3$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación en diferencias es la función $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Veamos cómo resolver una ecuación en diferencias de segundo orden homogénea con raíces características complejas.

Ejemplo 3.2.5 (Raíces características complejas)**.** Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Supongamos que $x(n+2)+p_1x(n+1)+p_2x(n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, tiene raíces características complejas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. La solución de esta ecuación es la función $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ dada de la siguiente forma:

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.2.9}$$

Respecto a las coordenadas polares, se tiene que:

$$\alpha = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\beta &= r \operatorname{sen}\theta\\ r &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

De (3.2.9), se sigue que:

$$\begin{aligned}x(n) &= c_1(r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta)^n + c_2(r\cos\theta - ir\operatorname{sen}\theta)^n\\ &= c_1(r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta))^n + c_2(r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta))^n\\ &= c_1 r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) + c_2 r^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)\\ &= r^n((c_1+c_2)\cos(n\theta) + i(c_1-c_2)\operatorname{sen}(n\theta))\\ &= r^n(a_1\cos(n\theta) + a_2\operatorname{sen}(n\theta)),\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

donde $a_1 = c_1 + c_2$ y $a_2 = i(c_1 - c_2)$.

Pongamos $\cos\omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$, $\operatorname{sen}\omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ y $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

De (3.2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned}x(n) &= r^n\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos\omega\cos(n\theta) + \sqrt{a_1^2+a_2^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n\theta)\right)\\ &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}(\cos\omega\cos(n\theta) + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n\theta))\\ &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos(n\theta-\omega)\\ &= Ar^n\cos(n\theta-\omega),\end{aligned}$$

donde $A = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

A manera de aplicación de la teoría desarrollada en esta sección, a continuación mostramos y resolvemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2.6 (La sucesión de Fibonacci)**.** La principal interrogante que dio origen a este problema fue: ¿cuántas parejas de conejos habrá después de un año si se comienza con una pareja de conejos maduros? Esto tomando en cuenta que cada pareja de conejos da a luz a una nueva pareja cada mes, después de que los conejos alcanzaron su madurez después de dos meses.

Así, la primera pareja da a luz a una pareja de conejos al final del primer mes, con lo que tendremos dos parejas. Finalizando el segundo mes solamente la primera pareja tiene descendencia, debido a que la segunda pareja aún no tiene madurez, por lo que tenemos tres parejas. En la Tabla 3.2.1 se muestra cómo se prosigue en los demás meses.

Sea $F \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $F(n)$ es el número de parejas de conejos al final de n meses, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que la relación de recurrencia de este modelo puede representarse

Meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parejas de conejos	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabla 3.2.1: Tamaño de la población de conejos.

mediante la ecuación de diferencia lineal de segundo orden siguiente:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad n \geq 0. \tag{3.2.11}$$

Se tiene que la ecuación característica (3.2.11) es:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Lo que quiere decir que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Esto significa que la solución general de (3.2.11) es:

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1. \tag{3.2.12}$$

De las condiciones iniciales se sigue que:

$$\begin{aligned} F(1) &= a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 1 \\ F(2) &= a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones que se forma, se tiene que $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq 1$.

Notemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \alpha$. Este número es conocido como la razón áurea.

3.3. Ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas: Método de coeficientes indeterminados

Debido a que ya hemos analizado las ecuaciones en diferencias homogéneas de orden k, incluyendo la construcción de las soluciones de estas ecuaciones cuando sus coeficientes son constantes, ahora, en esta sección estudiamos las ecuaciones en diferencias no homogéneas de orden k de la forma (3.1.1).

La sucesión $g(n)$ de (3.1.1) es conocida como término forzado, fuerza externa, control o entrada del sistema. Esto debido a la interpretación que tiene en áreas como la Ingeniería.

Sabemos que en las ecuaciones en diferencias homogéneas de orden k la suma de dos soluciones de dicha ecuación nuevamente es solución, al igual que el producto por un escalar. Ahora, analicemos si ocurre lo mismo con las ecuaciones en diferencias no homogéneas de orden k.

Ejemplo 3.3.1. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3.1}$$

Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $y_1(n) = n \cdot 3^{n-1}$ y $y_2(n) = (1+n) \cdot 3^{n-1}$.

Se tiene que y_1 es solución de la ecuación en diferencias. En efecto:

$$\begin{aligned} y_1(n+2) - y_1(n+1) - 6y_1(n) &= 5 \cdot 3^n \\ (n+2) \cdot 3^{n+1} - (n+1) \cdot 3^n - 6n \cdot 3^{n-1} &= 5 \cdot 3^n \\ 3^n(3(n+2) - (n+1) - 2n) &= 5 \cdot 3^n \\ 3^n(3n + 6 - n - 1 - 2n) &= 5 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Además, y_2 también es solución de la ecuación en diferencias, pues:

$$\begin{aligned} y_2(n+2) - y_2(n+1) - 6y_2(n) &= 5 \cdot 3^n \\ (n+3) \cdot 3^{n+1} - (n+2) \cdot 3^n - 6(n+1) \cdot 3^{n-1} &= 5 \cdot 3^n \\ 3^n(3(n+3) - (n+2) - 2(n+1)) &= 5 \cdot 3^n \\ 3^n(3n + 9 - n - 2 - 2n - 2) &= 5 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Sin embargo, $\overline{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $\overline{y}(n) = y_2(n) - y_1(n) = 3^{n-1}$, no es solución de la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} \overline{y}(n+2) - \overline{y}(n+1) - 6\overline{y}(n) &= 3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n(3 - 1 - 2) \\ &\neq 5 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

De igual forma, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $\phi(n) = cy_1(n) = cn \cdot 3^{n-1}$, no es solución de la ecuación en diferencias, pues:

$$\begin{aligned}\phi(n+2) - \phi(n+1) - 6\phi(n) &= c(n+2) \cdot 3^{n+1} - c(n+1) \cdot 3^n - 6cn \cdot 3^{n-1} \\ &= c \cdot 3^n(3(n+2) - (n+1) - 2n) \\ &= c \cdot 3^n(3n + 6 - n - 1 - 2n) \\ &\neq 5 \cdot 3^n.\end{aligned}$$

Del ejemplo anterior podemos concluir que la suma y la multiplicación por un escalar de soluciones de la ecuación en diferencias de orden k no homogénea no es una solución de dicha ecuación. Adicionalmente, se tiene que la diferencia de dos soluciones de la ecuación en diferencias no homogénea es solución de la ecuación en diferencias homogénea asociada.

Teorema 3.3.2. Si $y_1, y_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ son soluciones de (3.1.1), entonces $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ dada por $y(n) = y_1(n) - y_2(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente (3.1.2).

Demostración. Puesto que y_1 y y_2 son soluciones de (3.1.1), se sigue que:

$$y_1(n+k) + p_1(n)y_1(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_1(n) = g(n) \tag{3.3.2}$$

$$y_2(n+k) + p_1(n)y_2(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_2(n) = g(n). \tag{3.3.3}$$

De (3.3.2) y (3.3.3), se tiene que:

$$\begin{aligned}(y_1(n+k) - y_2(n+k)) + \cdots + p_k(y_1(n) - y_2(n)) &= g(n) - g(n) \\ y(n+k) + \cdots + p_k(n)y(n) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, y es solución de la ecuación (3.1.2). ■

Definición 3.3.3. La solución general de la ecuación homogénea (3.1.2) es comúnmente conocida como *solución complementaria* $y_c \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de la ecuación no homogénea (3.1.1).

Definición 3.3.4. Una solución de la ecuación no homogénea (3.1.1) se dice que es una *solución particular* $y_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

Teorema 3.3.5. Dada $y_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ solución de (3.1.1), se tiene que toda solución y de (3.1.1) puede escribirse de la forma:

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.3.4}$$

donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (3.1.2).

Demostración. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ una solución de (3.1.1). Puesto que y y y_p son soluciones de la ecuación (3.1.1), por el Teorema 3.3.2, $y - y_p$ es solución de la ecuación (3.1.2).

Lo que quiere decir que $y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (3.1.2).

Por lo tanto, $y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. ∎

Definición 3.3.6. La solución general de la ecuación no homogénea (3.1.1) es la siguiente:

$$y = y_p + y_c.$$

Puesto que ya sabemos como obtener y_c, nos enfocamos en hallar y_p para ecuaciones en diferencias no homogéneas de orden k con coeficientes constantes, corresponiente a (3.2.1):

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n). \tag{3.3.5}$$

Analizamos el método de coeficientes indeterminados por ser uno de los más simples.

Este método consiste en elegir adecuadamente y_p de acuerdo a la forma del término $g(n)$, para posteriormente sustituir la función elegida en la ecuación en diferencias. De aquí que puede decirse que el método de coeficientes indeterminados no es muy útil cuando el término $g(n)$ es completamente arbitrario, por lo que suele ocuparse en casos en los que tiene alguna de las formas siguientes: a^n, $\operatorname{sen}(bn)$, $\cos(bn)$ o n^k, o bien, una combinación de ellas.

Definición 3.3.7. Sea $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Un operador polinomial $N(E) : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, donde E es el operador incremento, se dice que es un *aniquilador* de $g(n)$ si:

$$N(E)g(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3.6}$$

Es decir, $N(E)$ es un aniquilador de $g(n)$, si $g(n)$ es solución de (3.3.6). Por ejemplo, un aniquilador de $g(n) = 4^n$ es $N(E) = E - 4$ ya que $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $y(n) = 4^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, es solución de $(E-4)y(n) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}(E-4)y(n) &= y(n+1) - 4y(n)\\ &= 4^{n+1} - 4(4^n)\\ &= 4^{n+1} - 4^{n+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Podemos reescribir (3.3.5) de la forma siguiente:

$$p(E)y(n) = g(n), \tag{3.3.7}$$

donde $p(E) = E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \cdots + p_k I$.

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	c_1^n
n^k	$c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k$
$n^k a^n$	$c_0 a^n + c_1 n a^n + \cdots + c_k n^k a^n$
$\operatorname{sen}(bn)$, $\cos(bn)$	$c_1 \operatorname{sen}(bn) + c_2 \cos(bn)$
$a^n \operatorname{sen}(bn)$, $a^n \cos(bn)$	$(c_1 \operatorname{sen}(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$
$a^n n^k \operatorname{sen}(bn)$, $a^n n^k \cos(bn)$	$(c_0 + \cdots + c_k n^k)a^n \operatorname{sen}(bn) + (d_0 + \cdots + d_k n^k)a^n \cos(bn)$

Tabla 3.3.1: Soluciones particulares $y_p(n)$.

Supongamos que $N(E)$ es un aniquilador de $g(n)$ en (3.3.7). Esto es:

$$N(E)p(E)y(n) = 0. \tag{3.3.8}$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ las raíces características de la ecuación homogénea:

$$p(E)y(n) = 0,$$

y $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ las raíces características de:

$$N(E)y(n) = 0. \tag{3.3.9}$$

Respecto a estos dos conjuntos de raíces características, existen dos posibles casos:

Caso 1: Ninguno de los λ_i es igual a ninguno de los μ_i. En este caso $y_p(n)$ se escribe como la solución general de (3.3.9) con coeficientes indeterminados. Al sustituir la $y_p(n)$ que se ha elegido en la ecuación (3.3.5), se obtienen los valores de las constantes. En la Tabla 3.3.1 se muestran las soluciones particulares de algunas formas que puede tener $g(n)$, mencionando que las constantes $c_0, d_0, c_1, d_1, \ldots$ son los coeficientes a determinar.

Caso 2: $\lambda_i = \mu_j$, para algún i, j. En este caso, el conjunto de raíces características de (3.3.8) es igual a $\lambda_i \cup \mu_j$. De donde, la multiplicidad de algunas raíces características aumentará. Para hallar una solución particular $y_p(n)$, se procede a obtener la solución general de (3.3.8). Posteriormente, se eliminan todos los términos que aparecen en $y_c(n)$, para así continuar como en el Caso 1 para hallar las constantes.

Ejemplo 3.3.8. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Resolvamos la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3.10}$$

Las raíces características de la ecuación homogénea asociada son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -4$.

Luego, la solución complementaria está dada por:

$$y_c(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-4)^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Se tiene que $g(n) = n2^n$. Esto significa que su aniquilador es $N(E) = (E-2)^2$. Esto es, $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Debido a que ningún λ_i es igual a ningún μ_j, procedemos como en el Caso 1. Por la forma de $g(n)$ proponemos $y_p(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n$. Al sustituirla en (3.3.10), se sigue que:

$$\begin{aligned} a_0 2^{n+2} + a_1(n+2)2^{n+2} + a_0 2^{n+1} + a_1(n+1)2^{n+1} - 12a_0 2^n - 12a_1 n 2^n &= n2^n \\ (10a_1 - 6a_0)2^n - 6a_1 n 2^n &= n2^n. \end{aligned}$$

Con esto se obtiene:

$$\begin{aligned} 10a_1 - 6a_0 &= 0 \\ -6a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, se tiene que $a_0 = -\frac{5}{18}$ y $a_1 = -\frac{1}{6}$. Lo que quiere decir que:

$$y_p(n) = -\frac{5}{18} \cdot 2^n - \frac{1}{6} \cdot n2^n.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $y(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-4)^n - \frac{5}{18} \cdot 2^n - \frac{1}{6} \cdot n2^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 3.3.9. Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y E el operador incremento. Resolvamos la ecuación en diferencias:

$$(E-3)(E+2)y(n) = 5(3^n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3.11}$$

Las raíces características de la ecuación homogénea asociada son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$.

De donde, la solución complementaria es la siguiente:

$$y_c(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-2)^n.$$

Adicionalmente, el aniquilador de $g(n) = 5(3^n)$ es $N(E) = (E-3)$. Esto significa que $\mu_1 = 3$. Debido a que $\lambda_1 = \mu_1$, procedemos como en el Caso 2. Lo que quiere decir que:

$$(E-3)^2(E+2)y(n) = 0. \tag{3.3.12}$$

Se tiene que la solución de la ecuación homogénea (3.3.12) $\overline{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es de la forma siguiente:

$$\overline{y}(n) = (a_1 + a_2 n)3^n + b_1(-2)^n. \tag{3.3.13}$$

Eliminando los términos de $\overline{y}(n)$ que aparecen en $y_c(n)$, se tiene que $y_p(n) = a_2 n 3^n$. Al sustituirla en (3.3.11), se sigue que:

$$a_2(n+2)3^{n+2} - a_2(n+1)3^{n+1} + 6a_2 n 3^n = 5(3^n).$$

Esto es, $a_2 = \frac{1}{3}$. Lo que quiere decir que:

$$y_p(n) = n3^{n-1}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por $y(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-2)^n + n3^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 3.3.10. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Hallemos la solución de la ecuación en diferencias:

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3.14}$$

Las raíces características de la ecuación homogénea asociada son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$.

Esto significa que $r = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. De donde, la solución complementaria es la siguiente:

$$y_c(n) = 2^n\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right). \tag{3.3.15}$$

Por la forma de $g(n)$, proponemos $y_p(n) = 2^n\left(an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$. Al sustituirla en (3.3.14), se sigue que:

$$\begin{aligned} 2^{n+2}&\left(a(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right) + b(n+2)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)\right) \\ &\qquad + (4)2^n\left(an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Reemplazando $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)$ por $-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)$ por $-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ y comparando los términos similares, se tiene que $a = -1$ y $b = 0$.

Con lo anterior:

$$y_p(n) = -2^n n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Así, la solución general de (3.3.14) es $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ definida por:

$$y(n) = 2^n\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

3.4. Método de variación de constantes

Ya hemos analizado el proceso para obtener una solución particular y_p para una ecuación en diferencias no homogénea con coeficientes constantes.

El método de variación de constantes o variación de parámetros es útil para hallar y_p si los coeficientes de la ecuación en diferencias no homogénea no son constantes.

Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $p_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, para cada $i \in \{1,2\}$ tal que $p_2(n) \neq 0$. Consideremos la siguiente ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden:

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.4.1}$$

y su ecuación homogénea asociada:

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.4.2}$$

Este método asume que una solución particular y_p de (3.4.1) puede escribirse de la forma siguiente:

$$y_p(n) = u_1(n)y_1(n) + u_2(n)y_2(n), \tag{3.4.3}$$

donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (3.4.2) y u_1, u_2 son sucesiones que son determinadas como vemos en el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1. Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Para la solución particular de la forma (3.4.3) de la ecuación no homogénea con coeficientes no constantes (3.4.1), se tiene que $u_1(n) = -\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g(r)y_2(r+1)}{W(r+1)}$ y $u_2(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{g(r)y_1(r+1)}{W(r+1)}$, donde $W(n)$ es el Casoratiano de y_1 y y_2 en n.

Demostración. Pongamos $y(n) = u_1(n)y_1(n) + u_2(n)y_2(n)$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= u_1(n+1)y_1(n+1) + u_2(n+1)y_2(n+1) \\ &= (u_1(n) + u_1(n+1) - u_1(n))y_1(n+1) + (u_2(n) + u_2(n+1) - u_2(n))y_2(n+1) \\ &= (u_1(n) + \Delta(u_1(n)))y_1(n+1) + (u_2(n) + \Delta(u_2(n)))y_2(n+1) \\ &= u_1(n)y_1(n+1) + u_2(n)y_2(n+1) + \Delta(u_1(n))y_1(n+1) + \Delta(u_2(n))y_2(n+1). \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Añadiendo la siguiente condición:

$$\Delta(u_1(n))y_1(n+1) + \Delta(u_2(n))y_2(n+1) = 0. \tag{3.4.5}$$

De (3.4.4), se sigue que:

$$y(n+1) = u_1(n)y_1(n+1) + u_2(n)y_2(n+1).$$

Lo que quiere decir que:

$$y(n+2) = u_1(n+1)y_1(n+2) + u_2(n+1)y_2(n+2).$$

Sustituyendo en (3.4.1) las $y(n+2)$, $y(n+1)$ y $y(n)$ obtenidas y simplificando el resultado mediante el hecho de que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (3.4.2), se tiene que:

$$\Delta(u_1(n))y_1(n+2) + \Delta(u_2(n))y_2(n+2) = g(n). \tag{3.4.6}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq n_0$, podemos visualizar las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.6) como un sistema de ecuaciones lineales del que queremos obtener $\Delta(u_1(n))$ y $\Delta(u_2(n))$.

El determinante de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{pmatrix} = W(n+1),$$

donde $W(n)$ es el Casoratiano de y_1 y y_2 en n. Puesto que y_1 y y_2 son linealmente independientes, por el Teorema 3.1.12, se tiene que $W(n_0) \neq 0$. Esto es, $W(n+1) \neq 0$, por el Corolario 3.1.11. Lo que quiere decir que el sistema lineal tiene solución única y podemos utilizar el método de Cramer para hallar $\Delta(u_1(n))$ y $\Delta(u_2(n))$. Esto es:

$$\begin{aligned} \Delta(u_1(n)) &= \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2(n+1) \\ g(n) & y_2(n+2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{pmatrix}} \\ &= -\frac{y_2(n+1)g(n)}{W(n+1)}. \qquad (3.4.7) \\ \Delta(u_2(n)) &= \frac{\det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & 0 \\ y_1(n+2) & g(n) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{pmatrix}} \\ &= \frac{y_1(n+1)g(n)}{W(n+1)}. \qquad (3.4.8) \end{aligned}$$

Utilizamos Δ^{-1} en ambos lados de (3.4.7). Por la Proposición 1.3.15, se sigue que:

$$u_1(n) = -\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g(r)y_2(r+1)}{W(r+1)}.$$

Realizando el mismo procedimiento con (3.4.8), se tiene que:

$$u_2(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{g(r)y_1(r+1)}{W(r+1)}.$$

Así, se sigue el resultado. ■

3.5. Ecuaciones en diferencias no lineales

Hasta ahora, se ha hablado únicamente de ecuaciones en diferencias lineales, sin embargo, las ecuaciones en diferencias no lineales son muy útiles en diversas áreas. A pesar de esto, existe el inconveniente de que no tienen una solución explícita, pero algunas de estas ecuaciones sí pueden ser transformadas en ecuaciones lineales. Dependiendo de la forma de la ecuación en diferencias no lineal, es el procedimiento que se lleva a cabo para ser transformada en una ecuación lineal.

Tipo 1: Ecuaciones de tipo Riccati.

Sean $x, p, q \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Las ecuaciones de tipo Riccati homogéneas son de la forma siguiente:

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5.1}$$

Sea $z \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $z(n) = \frac{1}{x(n)}$. De (3.5.1), se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n)}{x(n+1)x(n)} &= 1 + p(n)\frac{1}{x(n)} + q(n)\frac{1}{x(n+1)} \\ &= 1 + p(n)z(n) + q(n)z(n+1).\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$q(n)z(n+1) + p(n)z(n) + 1 = 0.$$

Sean $y, p, q \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Las ecuaciones de tipo Riccati no homogéneas son de la forma siguiente:

$$y(n+1)y(n) + p(n)y(n+1) + q(n)y(n) = g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5.2}$$

Sea $y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} - p(n)$. De (3.5.2), se sigue que:

$$\begin{aligned}g(n) &= \left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)} - p(n+1)\right)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)} - p(n)\right) + p(n)\left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)} - p(n+1)\right) \\ &\quad + q(n)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)} - p(n)\right) \\ &= \left(\frac{z(n+2) - p(n+1)z(n+1)}{z(n+1)}\right)\left(\frac{z(n+1) - p(n)z(n)}{z(n)}\right) \\ &\quad + p(n)\left(\frac{z(n+2) - p(n+1)z(n+1)}{z(n+1)}\right) + q(n)\left(\frac{z(n+1) - p(n)z(n)}{z(n)}\right) \\ &= \frac{z(n+2)}{z(n)} - \frac{p(n)z(n+2)}{z(n+1)} - \frac{p(n+1)z(n+1)}{z(n)} + p(n+1)p(n) + \frac{p(n)z(n+2)}{z(n+1)} \\ &\quad - p(n+1)p(n) + \frac{q(n)z(n+1)}{z(n)} - p(n)q(n) \\ g(n)z(n) &= z(n+2) - p(n+1)z(n+1) + q(n)z(n+1) - p(n)q(n)z(n).\end{aligned}$$

Esto significa que:

$$z(n+2) + (q(n) - p(n+1))z(n+1) - (g(n) + p(n)q(n))z(n) = 0.$$

Ejemplo 3.5.1 (La ecuación logística de Pielou)**.** Sea $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La mayoría de los modelos que describen la dinámica poblacional son continuos, uno de ellos es el modelo de Verhulst-Pearl, siendo este el más popular para modelar el crecimiento poblacional y es de la forma siguiente:

$$x'(t) = x(t)(a + bx(t)), \quad a, b > 0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{3.5.3}$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, a es la tasa de crecimiento de la población y b es la competencia intraespecífica. Todo esto con las suposiciones de que la población no depende del espacio en el que está, no hay migración y los recursos no son ilimitados, debido a que existe la capacidad de carga del ambiente $\frac{a}{b}$. La solución de esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}}{cb}},$$

donde $c = \frac{x_0}{a - bx_0}$, tal que x_0 es la población inicial.

Se sigue que:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-a(t+1)}}{cb}} \\ &= \frac{e^a(\frac{a}{b})}{1 + \frac{e^{-at}}{cb} + (e^a - 1)} \\ &= \frac{e^a x(t)}{1 + \frac{b}{a}(e^a - 1)x(t)}. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

En muchas ocasiones, los datos con los que se realizará el modelo son para tiempos discretos, por lo que es útil tener una ecuación en diferencias en lugar de una ecuación diferencial para modelar esta situación.

De (3.5.4), se deriva la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}, \tag{3.5.5}$$

donde $\alpha = e^a$ y $\beta = \frac{b}{a}(e^a - 1)$.

La ecuación (3.5.5) es conocida como la ecuación logística de Pielou.

Esta ecuación es de tipo Riccati, por lo que realizamos la sustitución $z(n) = \frac{1}{x(n)}$. Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(n+1)} &= \frac{\alpha(\frac{1}{z(n)})}{1 + \beta(\frac{1}{z(n)})} \\ z(n+1) &= \frac{1 + \frac{\beta}{z(n)}}{\frac{\alpha}{z(n)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha} z(n) + \frac{\beta}{\alpha}. \tag{3.5.6}$$

Resolviendo la ecuación en diferencias (3.5.6), por (2.3.4), se sigue que:

$$z(n) = \begin{cases} \alpha^{-n} z_0 + \beta \left[\frac{a^{-n}-1}{1-\alpha}\right] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ z_0 + \beta n & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Esto significa que:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{a^n}{z_0} + \frac{1}{\beta}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha^{-n}-1}\right] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{z_0+\beta n} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Tipo 2: Ecuaciones de tipo Riccati general.

Sean $a, b, c, d, x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Estas ecuaciones son de la forma siguiente:

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n) + b(n)}{c(n)x(n) + d(n)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.5.7}$$

donde $c(n) \neq 0$ y $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$, para cada $n \neq 0$.

Sean $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$.

Pongamos $c(n)x(n) + d(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} c(n)x(n) &= \frac{y(n+1)}{y(n)} - d(n) \\ x(n) &= \frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Sustituyendo (3.5.8) en (3.5.7), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{y(n+2)}{c(n+1)y(n+1)} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} &= \frac{a(n)\left(\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}\right) + b(n)}{\frac{y(n+1)}{y(n)}} \\ \frac{y(n+2) - d(n+1)y(n+1)}{c(n+1)y(n+1)} &= \frac{\frac{a(n)y(n+1) - a(n)d(n)y(n)}{c(n)y(n)} + b(n)}{\frac{y(n+1)}{y(n)}} \\ &= \frac{\frac{a(n)y(n+1) - a(n)d(n)y(n) + b(n)c(n)y(n)}{c(n)y(n)}}{\frac{y(n+1)}{y(n)}} \\ &= \frac{a(n)y(n+1) - a(n)d(n)y(n) + b(n)c(n)y(n)}{c(n)y(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y(n+2)-d(n+1)y(n+1)}{c(n+1)} &= \frac{a(n)y(n+1)-a(n)d(n)y(n)+b(n)c(n)y(n)}{c(n)} \\
y(n+2) &= \frac{c(n)d(n+1)+a(n)c(n+1)}{c(n)}y(n+1) \\
&\quad - \frac{(a(n)d(n)-b(n)c(n))c(n+1)}{c(n)}y(n).
\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$y(n+2)+p_1(n)y(n+1)+p_2(n)y(n)=0,$$

$$y(0)=1, \quad y(1)=c(0)x(0)+d(0),$$

donde $p_1(n)=-\dfrac{c(n)d(n+1)+a(n)c(n+1)}{c(n)}$ y $p_2(n)=\dfrac{(a(n)d(n)-b(n)c(n))c(n+1)}{c(n)}$.

Ejemplo 3.5.2. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Resolvamos la ecuación en diferencias siguiente:

$$x(n+1)=\frac{2x(n)+3}{3x(n)+2}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

En este caso, $a(n)=2$, $b(n)=3$, $c(n)=3$ y $d(n)=2$.

Notemos que $a(n)d(n)-b(n)c(n) \neq 0$. Esto significa que podemos utilizar la sustitución siguiente:

$$3x(n)+2=\frac{y(n+1)}{y(n)}, \tag{3.5.9}$$

con lo que se obtiene:

$$y(n+2)-4y(n+1)-5y(n)=0, \quad y(0)=1, \quad y(1)=3x(0)+2.$$

Procedemos a resolver esta ecuación como una de coeficientes constantes homogénea.

Se tiene que su ecuación característica es:

$$r^2-4r-5=0.$$

De donde, sus raíces características son $\lambda_1=5$ y $\lambda_2=-1$.

Esto significa que la solución general de esta ecuación es de la forma siguiente:

$$y(n)=a_0 5^n + a_1(-1)^n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

De (3.5.9), se sigue que:

$$x(n)=\frac{1}{3}\frac{y(n+1)}{y(n)}-\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\frac{a_0 5^{n+1} + a_1(-1)^{n+1}}{a_0 5^n + a_1(-1)^n} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{a_0 5^n - a_1(-1)^n}{a_0 5^n + a_1(-1)^n} \\
&= \frac{5^n - \omega(-1)^n}{5^n + \omega(-1)^n}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{a_0}{a_1}$.

Tipo 3: Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Otro tipo de ecuaciones en diferencias no lineales son las ecuaciones homogéneas de la forma siguiente:

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5.10}$$

Sea $z \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. En este caso, se utiliza la sustitución $z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$ para convertir (3.5.10) en una ecuación lineal en $z(n)$ y así resolverla.

Ejemplo 3.5.3. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Hallemos la solución de la ecuacion en diferencias siguiente:

$$x^2(n+1) - 3x(n+1)x(n) + 2x^2(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5.11}$$

Si dividimos (3.5.11) entre $x^2(n)$ se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}\right)^2 - 3\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}\right) + 2 = 0.$$

Notemos que esta ecuación es de la forma (3.5.10).

Con la sustitución $z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
z^2(n) - 3z(n) + 2 &= 0 \\
(z(n) - 2)(z(n) - 1) &= 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Luego, $z(n) = 2$ o $z(n) = 1$.

De aquí, $x(n+1) = 2x(n)$ o $x(n+1) = x(n)$.

Iniciando con $x(0) = x_0$, existe una infinita cantidad de soluciones x de (3.5.11) de la forma $2^k x_0, \ldots, 2^k x_0$, con $k \in \mathbb{Z}_+$.

Tipo 4: Sean $y, g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$, $k \in \mathbb{N}$ y $r_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$. Las ecuaciones en diferencias de la forma siguiente:

$$(y(n+k))^{r_1}(y(n+k-1))^{r_2} \cdots (y(n))^{r_{k+1}} = g(n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

son ecuaciones en diferencias no lineales.

Sea $z \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Con la sustitución $z(n) = \ln y(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se obtiene:

$$r_1 z(n+k) + r_2 z(n+k-1) + \cdots + r_{k+1} z(n) = \ln g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ejemplo 3.5.4. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Resolvamos la ecuación en diferencias siguiente:

$$x(n+2) = \frac{x^2(n+1)}{x^2(n)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5.12}$$

Sustituyendo $z(n) = \ln x(n)$ en (3.5.12), se tiene que:

$$z(n+2) - 2z(n+1) + 2z(n) = 0.$$

Así, se procede a resolver esta ecuación como una ecuación en diferencias con coeficientes constantes homogénea. Sus raíces características son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda = 1 - i$.

Lo que quiere decir que:

$$z(n) = (2)^{\frac{n}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right).$$

Por lo tanto:

$$x(n) = \exp\left((2)^{\frac{n}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \right).$$

3.6. Aplicaciones en economía

En esta sección estudiamos las aplicaciones que tienen las ecuaciones en diferencias de orden superior en la formulación y la resolución de algunos modelos de economía. Para analizar estos modelos, se tomaron como guías pricipales las siguientes referencias [4] y [3].

3.6.1. Modelo de interacción de multiplicador con acelerador de Samuelson

Este modelo fue uno de los primeros modelos matemáticos formales aplicados a la Economía y fue propuesto por Paul Samuelson (1939) y modificado posteriormente por Sir John Hicks (1950).

El modelo de Samuelson es aplicado a la economía de un país, puesto que en él van implícitos la renta nacional del país, el consumo total y la inversión total y es muy útil puesto que exige la igualdad que define el equilibrio de la renta.

Sean $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es la renta nacional en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $I(n)$ es la inversión nacional en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $C \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $C(n)$ es el consumo durante el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Podemos suponer lo siguiente:

- Debe existir equilibrio entre los ingresos de la renta $Y(n)$ y los gastos generados por el consumo $C(n)$, la inversión $I(n)$ y el gasto público, denotado con G_0:

  $$Y(n) = C(n) + I(n) + G_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.1}$$

  donde $G_0 \geq 0$ es una constante y representa el gasto que realiza el gobierno en bienes.

- El consumo $C(n)$ depende de la renta disponible $Y(n-1)$ en el período anterior $n-1$:

  $$C(n) = zY(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.2}$$

  tal que $0 < z < 1$ y z es la propensión marginal al consumo.

- La inversión $I(n)$ en el período n es proporcional al incremento del consumo en los períodos consecutivos $n-1$ y n, tomando en cuenta la aceleración de la inversión, denotada con w:

  $$I(n) = w(C(n) - C(n-1)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.3}$$

  donde $w > 0$ es una constante y representa el efecto positivo que tiene el crecimiento económico sobre la inversión.

Sustituyendo (3.6.2) y (3.6.3) en (3.6.1), se tiene que:

$$Y(n) = zY(n-1) + w(C(n) - C(n-1)) + G_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Al sustituir (3.6.2) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(n) - zY(n-1) - w(zY(n-1) - zY(n-2)) &= G_0 \\ Y(n) - z(w+1)Y(n-1) + wzY(n-2) &= G_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo obtenido es el siguiente:

$$Y(n+2) - z(w+1)Y(n+1) + wzY(n) = G_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6.4}$$

Para ilustrar el modelo (3.6.4) proporcionamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 3.6.1. Supongamos que n se mide en años, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y la renta de un país Y es medida en millones de pesos. Además, $G_0 = 160$ millones de pesos es el gasto público constante, $z = \frac{1}{3}$ es la fracción de la renta nacional del año anterior que se dedica al consumo en el presente año y $w = \frac{1}{10}$ es el coeficiente de la aceleración de la inversión.

Sustituyendo estos valores en (3.6.4), la ecuación en diferencias obtenida es la siguiente:

$$Y(n+2) - \frac{11}{30}Y(n+1) + \frac{1}{30}Y(n) = 160, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6.5}$$

Notemos que la ecuación (3.6.5) es una ecuación en diferencias de segundo orden, con coeficientes constantes y no homogénea.

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de coeficientes indeterminados.

Las raíces características de la ecuación homogénea asociada son $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$.

Lo que quiere decir que la solución complementaria es la siguiente:

$$Y_c(n) = c_1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n.$$

Se tiene que $g(n) = 160$. Esto significa que su aniquilador es $N(E) = E - 160$ (3.3.6). Esto es, $\mu = 160$. Debido a que λ_i no es igual a μ, utilizamos el Caso 2 del método de coeficientes indeterminados, así, por la forma de $g(n)$ proponemos $y_p(n) = c$. Al sustituirla en (3.6.5), se sigue que:

$$\begin{aligned} c - \frac{11}{30}c + \frac{1}{30}c &= 160 \\ \frac{2}{3}c &= 160. \end{aligned}$$

Con esto se obtiene $c = 240$. De donde:

$$Y_p(n) = 240.$$

Así, la solución general de la ecuación en diferencias es $Y(n) = c_1 \cdot (-\frac{1}{6})^n + c_2 \cdot (-\frac{1}{5})^n + 240$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$,

Supongamos que la renta nacional en el período inicial fue de 200 millones de pesos y en el siguiente período fue de 204 millones de pesos. Esto se puede expresar como: $Y(0) = 200$ y $Y(1) = 204$.

Puesto que $Y(0) = 200$, se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(0) &= c_1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^0 + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^0 + 12 \\ 200 &= c_1 + c_2 + 240 \\ c_1 + c_2 &= -40. \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Además, $Y(1) = 204$. Esto significa que:

$$\begin{aligned}
Y(1) &= c_1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^1 + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^1 + 240 \\
204 &= -\frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{5}c_2 + 240 \\
\frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{5}c_2 &= 36. \qquad (3.6.7)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.6.6) y (3.6.7), se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= -40 \\
\frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{5}c_2 &= 36,
\end{aligned}$$

que al resolverlo, se obtiene $c_1 = -1320$ y $c_2 = 1280$.

De aquí que la solución del problema con valores iniciales es la siguiente:

$$Y(n) = -1320 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 1280 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n + 240, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

3.6.2. Modelo de Hicks

Este modelo está relacionado con los desfases distribuidos y la interacción acelerador-multiplicador. Este modelo, afirma que la inversión y el consumo en cualquier período dependen de los valores obtenidos de la renta nacional en los n períodos previos.

Sean $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es la renta nacional en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $I(n)$ es la inversión nacional en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $C \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $C(n)$ es el consumo durante el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Podemos suponer lo siguiente:

- Debe existir equilibrio entre los ingresos de la renta $Y(n)$ y los gastos generados por el consumo $C(n)$, la inversión $I(n)$ y los niveles autónomos de consumo y de inversión en cada período n, que los denotamos como $A(n)$:

$$Y(n) = C(n) + I(n) + A(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (3.6.8)$$

- El consumo $C(n)$ en un período n es una función lineal de la renta en los k períodos anteriores:

$$C(n) = z_1 Y(n-1) + z_2 Y(n-2) + \cdots + z_k Y(n-k), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (3.6.9)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y z_i es las propensión marginal al consumo, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, y $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_k$.

- La inversión total $I(n)$ es inducida por el cambio de la renta que sucede en cada período n. Además, considerando que existe una dependencia lineal:

$$\begin{aligned} I(n) &= a_1 \Delta Y(n-2) + a_2 \Delta Y(n-3) + \cdots + a_k \Delta Y(n-k-1) \\ &= a_1(Y(n-1) - Y(n-2)) + a_2(Y(n-2) - Y(n-3)) \\ &\quad + \cdots + a_k(Y(n-k) - Y(n-k-1)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

  donde a_i es la aceleración de la inversión, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, y $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Sustituyendo (3.6.9) y (3.6.10) en (3.6.8), se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(n) &= (z_1 Y(n-1) + z_2 Y(n-2) + \cdots + z_k Y(n-k)) + (a_1(Y(n-1) - Y(n-2)) \\ &\quad + a_2(Y(n-2) - Y(n-3)) + \cdots + a_k(Y(n-k) - Y(n-k-1))) + A(n) \\ &= (z_1 + a_1)Y(n-1) - (z_2 - a_1 + a_2)Y(n-2) + \cdots + (z_k - a_{k-1} + a_k)Y(n-k) \\ &\quad - a_k Y(n-k-1) + A(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el consumo y la inversión se distribuyen solamente en dos períodos consecutivos, podemos considerar $k = 2$, obteniendo la ecuación siguiente:

$$Y(n) - (z_1 + a_1)Y(n-1) - (z_2 - a_1 + a_2)Y(n-2) - a_2 Y(n-3) = A(n),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, el modelo obtenido es el siguiente:

$$Y(n+3) - (z_1 + a_1)Y(n+2) - (z_2 - a_1 + a_2)Y(n+1) - a_2 Y(n) = A(n),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

3.6.3. Modelo de ingreso nacional

En un país con un régimen capitalista, sea $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es el ingreso nacional en un período n, puede escribirse de la forma siguiente:

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.11}$$

donde $C \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y $C(n)$ es el gasto de consumo para la compra de bienes de consumo, $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ e $I(n)$ es la inversión privada inducida para comprar bienes de capital y $G \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ con $G(n)$ el gasto público. Esto teniendo en cuenta que n se suele medir en años.

Para este modelo, existen algunas suposiciones que son aceptadas por los economistas:

- El gasto del consumidor $C(n)$ es proporcional al ingreso nacional $Y(n-1)$ en el año anterior $n-1$, lo que quiere decir que:

$$C(n) = \alpha Y(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.12}$$

  donde $\alpha > 0$ es la propensión marginal al consumo.

- La inversión privada inducida $I(n)$ es proporcional al aumento en el consumo $C(n) - C(n-1)$, esto significa que:

$$I(n) = \beta(C(n) - C(n-1)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.13}$$

  donde $\beta > 0$ es una constante y representa el efecto positivo que tiene el crecimiento económico sobre la inversión.

- El gasto público $G(n)$ es constante a lo largo de los años, y podemos elegir nuestras unidades tal que:

$$G(n) = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6.14}$$

Sustituyendo (3.6.12), (3.6.13) y (3.6.14) en (3.6.11), se tiene que:

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + \beta(\alpha Y(n-1) - \alpha Y(n-2)) + 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Por lo tanto, se obtiene el modelo siguiente:

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6.15}$$

Para ilustrar el modelo (3.6.15) realizamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 3.6.2. Si $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$, de (3.6.15), se tiene que:

$$Y(n+2) - \frac{3}{4}Y(n+1) + \frac{1}{2}Y(n) = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

La solución de esta ecuación es la siguiente:

$$Y(n) = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} - \omega\right) + 2.$$

Si $Y(0) = 1$ y $Y(1) = 2$, se tiene que $A = -\sqrt{2}$ y $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Por lo tanto, $Y(n) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) + 2$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

3.6.4. La ruina del apostador

Sea $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Un apostador juega una serie de juegos contra un adversario en la que la probabilidad de que el apostador gane \$1.00 es q, por lo que la probabilidad de que pierda \$1.00 es $1-q$, donde $0 \leq q \leq 1$. Sale de la apuesta si pierde todo su dinero o si adquiere N dólares. Si el apostador se queda sin dinero primero, decimos que el apostador se ha arruinado. Sea $p(n)$ la probabilidad de que el apostador se arruine si tiene n dólares. Puede arruinarse de dos formas:

1. Ganar el siguiente juego. La probabilidad de este evento es q. Esto significa que su fortuna será $n+1$ y la probabilidad de arruinarse será $p(n+1)$.
2. Perder el próximo juego. La probabilidad de este evento es $1-q$ y la probabilidad de arruinarse es $p(n-1)$.

Lo que quiere decir que, por el Teorema de la probabilidad total [10, pág. 80], se tiene que:

$$p(n) = qp(n+1) + (1-q)p(n-1),$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} qp(n+2) - p(n+1) + (1-q)p(n) &= 0 \\ p(n+2) - \frac{1}{q}p(n+1) + \frac{1-q}{q}p(n) &= 0, \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

con $n = 0, 1, \ldots, N$.

De acuerdo a las condiciones del problema, $p(0) = 1$ y $p(N) = 0$.

La ecuación característica de (3.6.16) es la siguiente:

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0.$$

Luego, sus raíces características son $\lambda_1 = \frac{1}{2q} + \frac{1-2q}{2q} = \frac{1-q}{q}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2q} - \frac{1-2q}{2q} = 1$.

Así, obtenemos la solución general de la ecuación en diferencias es de la forma siguiente:

$$p(n) = c_1 + c_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^n, \quad q \neq \frac{1}{2}.$$

De las condiciones iniciales se tiene que:

$$\begin{aligned} p(0) &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 + c_2. \\ p(N) &= c_1 + c_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^N \end{aligned}$$

$$0 = c_1 + c_2 \left(\frac{1-q}{q} \right)^N .$$

Al resolver el sistema de ecuaciones que se forma, se obtiene $c_1 = \frac{-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$ y $c_2 = \frac{1}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$.

De donde:

$$p(n) = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}. \tag{3.6.17}$$

Notemos que el caso cuando $q = \frac{1}{2}$ debe examinarse por separado debido a que en este caso las raíces características son repetidas $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Con lo que puede decirse que hay un juego limpio. La solución general en este caso es la siguiente:

$$p(n) = a_1 + a_2 n.$$

Utilizando las condiciones iniciales, se sigue que $a_1 = 1$ y $a_2 = -\frac{1}{N}$.

Esto significa que:

$$p(n) = \frac{N-n}{N}. \tag{3.6.18}$$

Sea $\overline{p}(n)$ la probabilidad de que el apostador gane. Se tiene que $\overline{p}(n) = 1 - p(n)$. Esto significa que:

$$\overline{p}(n) = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N} & \text{si } q \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{n}{N} & \text{si } q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.6.3. Suponga que un apostador inicia con \$4. La probabilidad de que gane un dólar es de 0.3 y abandonará si se queda sin dinero o si tiene un total de \$10.

Se tiene que $n = 4$, $q = 0.3$ y $N = 10$.

De (3.6.17), la probabilidad de que el apostador se quede sin dinero es la siguiente:

$$\begin{aligned} p(4) &= \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^4 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}} \\ &\approx 0.9940. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.4. Supongamos que un apostador inicia con \$20. La probabilidad de que gane un dólar es de 0.5 y abandonará si se queda sin dinero o si tiene un total de \$100.

Se sigue que $n = 20$, $q = 0.5$ y $N = 100$.

De (3.6.18), la probabilidad de que el apostador se quede sin dinero es la siguiente:

$$\begin{aligned} p(20) &= \frac{100 - 20}{100} \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

Notemos que si $q \leq 0.5$, $\lim_{N \to \infty} p(n) = 1$ tanto en (3.6.17) como en (3.6.18), por lo que la ruina del apostador es segura.

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Hasta ahora en este trabajo, sólo se han estudiado ecuaciones en diferencias que consisten únicamente de una ecuación con una incógnita. Sin embargo, si al menos dos ecuaciones en diferencias contienen al menos dos funciones no conocidas, se dice que conforman un Sistema de ecuaciones en diferencias. Su implementación fue de gran ayuda puesto que en diversas áreas tales como Física, Biología, Economía, Electricidad, entre otras, no todos los problemas a resolver eran tan sencillos para necesitar solamente de una variable.

4.1. Teoría básica

Definición 4.1.1. Un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden es un conjunto de ecuaciones en diferencias que tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n), n) \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n), n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= f_k(x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n), n), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

donde $f_i : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es una función conocida y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $x_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ es una función desconocida.

Las funciones f_i en (4.1.1) pueden ser lineales o no lineales. Al igual que en los sistemas de ecuaciones diferenciales, los métodos analíticos para hallar soluciones de los sistemas de ecuaciones en diferencias conformados por ecuaciones no lineales son complicados y carecen de generalidad, además, salen de los objetivos del presente trabajo. Por otra parte, los sistemas de ecuaciones en diferencias conformados por ecuaciones lineales son accesibles y aceptan una teoría general para hallar sus respectivas soluciones. Por tal razón, en este trabajo estudiamos los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales, que definimos a continuación.

Definición 4.1.2. Si en el sistema (4.1.1), para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, f_i es una función lineal, se dice que (4.1.1) es un *sistema de ecuaciones en diferencias lineales*.

Por la Observación 3.1.1, se tiene la siguiente.

Observación 4.1.3. Dado $k \in \mathbb{N}$, un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, $k \times k$, tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n) + g_1(n) \\
x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n) + g_2(n) \\
&\vdots \\
x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \cdots + a_{kk}(n)x_k(n) + g_k(n),
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

donde $a_{ij}, g_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ son funciones conocidas, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definición 4.1.4. Considerando el sistema (4.1.2), se tiene que:

1. Si para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $g_i(n) = 0$, se dice que (4.1.2) es un *sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo*.
2. Si existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que $g_i(n) \neq 0$, para algún $n \in \mathbb{Z}_+$, se dice que (4.1.2) es un *sistema de ecuaciones en diferencias no homogéneo*.
3. Si para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, a_{ij} son constantes, se dice que (4.1.2) es un *sistema de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes*.

Usando notación matricial, un sistema de ecuaciones en diferencias lineales no homogéneo (4.1.2), se puede expresar de la manera siguiente:

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n), \tag{4.1.3}$$

donde $x(n+1) = (x_1(n+1), x_2(n+1), \ldots, x_k(n+1))^T$, $A(n) = (a_{ij}(n))$ es la matriz no singular de $k \times k$ formada con los coeficientes de (4.1.2), $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T$ y $g(n) = (g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n))^T$.

De esta manera, el correspondiente sistema de ecuaciones en diferencias lineales homogéneo, se representa de la forma siguiente:

$$x(n+1) = A(n)x(n). \tag{4.1.4}$$

Dados $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ y $x_0 \in \mathbb{R}^k$, añadiendo:

$$n \geq n_0 \text{ y } x(n_0) = x_0, \tag{4.1.5}$$

al sistema (4.1.3), se dice que se tiene un sistema de ecuaciones en diferencias lineales con condiciones iniciales (4.1.5).

Cabe señalar que hallar la solución de un sistema (4.1.2), consiste en determinar de manera explícita $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$, equivalentemente, de acuerdo a (4.1.3), determinar $x(n)$. En lo que resta de esta sección, nos ocupamos de estudiar la existencia de tales soluciones, de manera general, en secciones posteriores analizamos métodos específicos para hallar las soluciones de manera explícita, considerando la naturaleza de los sistemas.

Siguiendo la idea de lo realizado para ecuaciones en diferencias de orden superior, para garantizar la solución de (4.1.3), se necesita la solución general de (4.1.4) y una solución particular de (4.1.3).

Iniciamos con un resultado que garantiza la existencia y unicidad de soluciones para un sistema homogéneo, bajo condiciones iniciales.

Teorema 4.1.5. Considerando el sistema (4.1.4) con condiciones iniciales (4.1.5), existe una única solución $x(n, n_0, x_0)$ tal que $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.

Demostración. Mediante iteraciones, de (4.1.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}
x(n_0+1, n_0, x_0) &= A(n_0)x(n_0) \\
&= A(n_0)x_0 \\
x(n_0+2, n_0, x_0) &= A(n_0+1)x(n_0+1) \\
&= A(n_0+1)A(n_0)x_0 \\
x(n_0+3, n_0, x_0) &= A(n_0+2)x(n_0+2) \\
&= A(n_0+2)A(n_0+1)A(n_0)x_0. \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

De forma inductiva, se tiene que:

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) x_0, \tag{4.1.6}$$

donde:

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\cdots A(n_0) & \text{si } n > n_0, \\ I & \text{si } n = n_0, \end{cases}$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $k \times k$.

La ecuación (4.1.6) garantiza la solución única. ∎

Recordemos que se dice que las soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de (4.1.4) son *linealmente independientes* para $n \geq n_0 \geq 0$ si cada vez que existan constantes c_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tales que $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = 0$, se tiene que $c_i = 0$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Sea $\Phi(n)$ una matriz de tamaño $k \times k$ cuyas columnas son soluciones de (4.1.4), la cual denotamos por:

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)]. \tag{4.1.7}$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Phi(n+1) &= [x_1(n+1), x_2(n+1), \ldots, x_k(n+1)] \\
&= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)] \\
&= A(n)[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)] \\
&= A(n)\Phi(n).
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\Phi(n)$ satisface la ecuación en diferencias matricial siguiente:

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n). \tag{4.1.8}$$

Como una consecuencia inmediata de (4.1.7) y [6, Teorema 5.4.5], el cual nos indica que el determinante de una matriz es distinto de 0 si y sólo si las columnas de dicha matriz son linealmente independientes, se tiene la observación siguiente.

Observación 4.1.6. Para cada $n \geq n_0$, las soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ son linealmente independientes si y sólo si $\Phi(n)$ es no singular, para cada $n \geq n_0$.

A continuación, introducimos lo referente a matrices fundamentales, concepto primordial para nuestros objetivos.

Definición 4.1.7. Sea $\Phi(n)$ una matriz de tamaño $k \times k$. Se dice que $\Phi(n)$ es una *matriz fundamental* si $\Phi(n)$ es no singular, para cada $n \geq n_0$, y $\Phi(n)$ satisface (4.1.8).

Proposición 4.1.8. Si C es una matriz no singular de tamaño $k \times k$ y $\Phi(n)$ es una matriz fundamental, entonces $\Phi(n)C$ es una matriz fundamental.

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\Phi(n+1)C &= [x_1(n+1), x_2(n+1), \ldots, x_k(n+1)]\, C \\
&= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)]\, C \\
&= A(n)[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)]\, C \\
&= A(n)(\Phi(n)C).
\end{aligned}$$

Esto significa que $\Phi(n)C$ satisface la ecuación (4.1.8).

Adicionalmente, tenemos que $\det(\Phi(n)) \neq 0$ y $\det(C) \neq 0$, por ser matrices no singulares. Lo que quiere decir que $\det(\Phi(n))\det(C) \neq 0$. Como $\det(\Phi(n)C) = \det(\Phi(n))\det(C) \neq 0$, se sigue que $\det(\Phi(n)C) \neq 0$. De donde, $\Phi(n)C$ es no singular.

Por lo tanto, $\Phi(n)C$ es una matriz fundamental. ■

De aquí, podemos deducir que existen infinitas matrices fundamentales para un sistema específico. Sin embargo, hay una matriz fundamental que ya es conocida, a saber:

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \qquad \text{con } \Phi(n_0) = I. \tag{4.1.9}$$

Teorema 4.1.9. Existe una solución única Ψ de la ecuación matricial (4.1.8) con $\Psi(n_0) = I$.

Demostración. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea e_i, el vector canónico en $\mathbb{R}^k$. Por el Teorema 4.1.5, podemos suponer que existen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ soluciones de (4.1.8) con $\Phi_1(n_0) = e_1, \Phi_2(n_0) = e_2, \ldots, \Phi_k(n_0) = e_k$.

Notemos que estas soluciones están representadas por vectores columna de $1 \times k$, por lo que si ponemos estos vectores juntos, se forma la matriz de $k \times k$ siguiente:

$$\Psi(n) = [\Phi_1(n), \Phi_2(n), \ldots, \Phi_k(n)].$$

De donde:

$$\begin{aligned}\Psi(n_0) &= [\Phi_1(n_0), \Phi_2(n_0), \ldots, \Phi_k(n_0)]\\ &= [e_1, e_2, \ldots, e_k]\\ &= I.\end{aligned}$$

No es difícil verificar que la solución $\Phi(n)$ de (4.1.8) es única. ■

Por la Proposición 4.1.8, se tiene que dada una matriz fundamental $\Phi(n)$, se cumple que $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ también es una matriz fundamental. Lo anterior justifica el siguiente concepto.

Definición 4.1.10. La matriz fundamental de la forma $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ es denotada por $\Phi(n, n_0)$ y se denomina *matriz de transición de estado*. Dados m, $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq m$, se define $\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$.

Proposición 4.1.11. La matriz $\Phi(n, m)$ es solución de la ecuación matricial $\Phi(n+1, m) = A(n)\Phi(n, m)$.

Demostración. Se tiene que:

$$\Phi(n+1, m) = \Phi(n+1)\Phi^{-1}(m)$$

$$\begin{aligned} &= A(n)\Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ &= A(n)\Phi(n,m). \end{aligned}$$

De aquí, se sigue el resultado. ■

Proposición 4.1.12. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

(a)
$$\Phi^{-1}(n,m) = \Phi(m,n).$$

(b)
$$\Phi(n,m) = \Phi(n,r)\Phi(r,m).$$

(c)
$$\Phi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i). \tag{4.1.10}$$

Demostración. (a) Se cumple que:

$$\begin{aligned} \Phi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ \Phi^{-1}(n,m) &= \left(\Phi(n)\Phi^{-1}(m)\right)^{-1} \\ &= \Phi(m)\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(m,n). \end{aligned}$$

(b) Notemos que:

$$\begin{aligned} \Phi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ &= \Phi(n)I\Phi^{-1}(m) \\ &= \Phi(n)\left(\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\right)\Phi^{-1}(m) \\ &= \Phi(n,r)\Phi(r,m). \end{aligned}$$

(c) Puesto que $\Phi(n,m)$ es una matriz fundamental, de (4.1.9), se sigue que:

$$\Phi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i).$$

De (a), (b) y (c), se tiene el resultado. ■

Corolario 4.1.13. La solución única $x(n,n_0,x_0)$ de (4.1.4) con $x(n_0,n_0,x_0) = x_0$ es la siguiente:
$$x(n,n_0,x_0) = \Phi(n,n_0)x_0.$$

Demostración. Ya que $x(n, n_0, x_0)$ es un caso particular de (4.1.8), por el Teorema 4.1.9, se tiene que existe una solución única Ψ de $x(n, n_0, x_0)$ con $\Psi(n_0) = I$.

Por otra parte, por el Teorema 4.1.5, se sigue que:

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) x_0.$$

Puesto que la solución es única, se tiene que $\Psi(n) = x(n, n_0, x_0)$. De (4.1.10), se sigue que $\Phi(n, n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$.

Por lo tanto, $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0$. ∎

Verificar la independencia lineal de una matriz fundamental $\Phi(n)$ para cada $n \geq n_0$ no es simple. En su lugar, mostraremos que es suficiente establecer una independencia lineal en n_0.

Teorema 4.1.14 (Fórmula de Abel)**.** Sea $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Para cada $n \geq n_0 \geq 0$, se tiene que:

$$\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (\det A(i)) \right) \det \Phi(n_0). \tag{4.1.11}$$

Demostración. De (4.1.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} \det \Phi(n+1) &= \det(A(n)\Phi(n)) \\ &= \det A(n) \det \Phi(n). \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación en diferencias utilizando (2.2.1), se tiene que $\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (\det A(i))\right) \det \Phi(n_0)$. ∎

Corolario 4.1.15. La matriz fundamental $\Phi(n)$ es no singular para cada $n \geq n_0$ si y sólo si $\Phi(n_0)$ es no singular.

Demostración. Supongamos que $\Phi(n)$ es no singular para cada $n \geq n_0$. Luego, para $n = n_0$, se tiene que $\Phi(n_0)$ es no singular.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(n)$ es singular. Esto significa que $\det \Phi(n) = 0$, para cada $n \geq n_0$. De (4.1.11), se sigue que:

$$\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (\det A(i)) \right) \det \Phi(n_0) = 0.$$

Debido a que A es no singular, $\det A(i) \neq 0$, con $i \geq n_0$. Esto significa que $\prod_{i=n_0}^{n-1} \det A(i) \neq 0$. Lo que quiere decir que $\Phi(n_0) = 0$. Esto es, $\Phi(n_0)$ es singular. ∎

Una consecuencia inmediata del Corolario 4.1.15 es el siguiente:

Corolario 4.1.16. Las soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de la ecuación (4.1.4) son linealmente independientes para $n \geq n_0$ si y sólo si $\Phi(n_0)$ es no singular.

Teorema 4.1.17. Existen k soluciones linealmente independientes de (4.1.4) para cada $n \geq n_0$.

Demostración. Sea e_i el vector canónico en $\mathbb{R}^k$, con $i = 1, 2, \ldots, k$. Por el Teorema 4.1.5, para cada e_i, $1 \leq i \leq k$, existe una solución $x(n, n_0, e_i)$ de (4.1.4) con $x(n_0, n_0, e_i) = e_i$. Notemos que $\Phi(n_0) = [e_1, e_2, \ldots, e_k] = I$. Esto significa que $\Phi(n_0)$ es no singular. Por el Corolario 4.1.16, el conjunto $\{x(n, n_0, e_i) | 1 \leq i \leq k\}$ es linealmente independiente. ■

Teorema 4.1.18 (Principio de linealidad)**.** Sean x_1 y x_2 dos soluciones de (4.1.4). Los siguientes argumentos son ciertos:

(a) $x = x_1 + x_2$ es solución de (4.1.4).

(b) $\overline{x} = cx_1$ es solución de (4.1.4), para cada c constante.

Demostración. (a) Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x_1(n+1)x_2(n+1) \\ &= A(n)x_1(n) + A(n)x_2(n) \\ &= A(n)(x_1(n) + x_2(n)) \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

(b) Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, notemos que:

$$\begin{aligned} \overline{x}(n+1) &= cx_1(n+1) \\ &= c(A(n)x_1(n)) \\ &= A(n)cx_1(n) \\ &= A(n)\overline{x}(n). \end{aligned}$$

De (a) y (b) se sigue el resultado. ■

Sea $\overline{S} = \{x | x \text{ es solución de } (4.1.4)\}$. Por el Teorema 4.1.18, se tiene que $\overline{S}$, con las operaciones usuales, es un espacio vectorial de dimensión k, cuya base es cualquier conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de soluciones linealmente independientes. De esta manera, cada solución de (4.1.4), puede escribirse como combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, lo cual induce la definición siguiente:

Definición 4.1.19. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k)\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ un conjunto de soluciones linealmente independientes de (4.1.4). La *solución general* de (4.1.4) es una función $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de la forma siguiente:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n), \tag{4.1.12}$$

con c_i constante, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

La ecuación (4.1.12), puede escribirse como:

$$x(n) = \Phi(n)c, \tag{4.1.13}$$

donde $\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)]$ es una matriz fundamental y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Ahora, nos enfocaremos en los sistemas no homogéneos (4.1.3).

Definición 4.1.20. Se dice que y_p es una *solución particular* de (4.1.3) si y_p satisface el sistema no homogéneo (4.1.3).

Lema 4.1.21. Considerando a $y_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$y_p(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r),$$

se tiene que y_p es solución particular del sistema no homogéneo (4.1.3), con $y_p(n_0) = 0$.

Demostración. Sea $y_p(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r)$.

Veamos que $y_p(n)$ satisface el sistema de ecuaciones en diferencias (4.1.3). Se tiene que:

$$\begin{aligned}
y_p(n+1) &= \sum_{i=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1)g(r) \\
&= \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n+1, r+1)g(r) + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\
&= \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n+1, r+1)g(r) + \Phi(n+1)\Phi^{-1}(n+1)g(n) \\
&= \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n+1, r+1)g(r) + g(n).
\end{aligned}$$

De la Proposición 4.1.11, se tiene que:

$$\begin{aligned}
y_p(n+1) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)g(r) + g(n) \\
&= A(n)\sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r) + g(n) \\
&= A(n)y_p(n) + g(n).
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $y_p(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r)$ es solución particular de (4.1.3). Además, $y_p(n_0) = 0$. ■

A continuación, se menciona un resultado que proporciona un mecanismo para hallar la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias (4.1.3).

Teorema 4.1.22. Toda solución $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de (4.1.3) se puede escribir como:

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

para una elección apropiada del vector constante c y una solución particular $y_p(n)$.

Demostración. Sean y una solución de (4.1.3) y y_p una solución particular de (4.1.3).

Pongamos $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $x(n) = y(n) - y_p(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= y(n+1) - y_p(n+1) \\ &= (A(n)y(n) + g(n)) - (A(n)y_p(n) + g(n)) \\ &= A(n)y(n) - A(n)y_p(n) \\ &= A(n)(y(n) - y_p(n)) \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

Esto significa que x es solución del sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo (4.1.4).

Luego, por (4.1.13), se sigue que $x(n) = \Phi(n)c$ para algún vector constante c. En consecuencia, $y(n) = \Phi(n)c + y_p(n)$. ■

Teorema 4.1.23 (Fórmula de variación de parámetros)**.** Dados $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ y $y_0 \in \mathbb{R}^k$, la solución única del problema con valores iniciales (4.1.3):

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \ \text{para cada } n \geq n_0, \quad y(n_0) = y_0, \tag{4.1.14}$$

es:

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r).$$

Más aún:

$$y(n, n_0, y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) g(r).$$

Demostración. Por el Teorema 4.1.22, se tiene que:

$$y(n, n_o, y_0) = \Phi(n, n_0)c + y_p(n). \tag{4.1.15}$$

Ya que $\Phi(n)c$ es solución del sistema homogéneo asociado con condiciones iniciales, por el Corolario 4.1.13, se tiene que:

$$\Phi(n, n_0)c = \Phi(n, n_0)y_0. \tag{4.1.16}$$

Del Lema 4.1.21, se sigue que:

$$y_p(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r). \tag{4.1.17}$$

Sustituyendo (4.1.16) y (4.1.17) en (4.1.15), se tiene que:

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r). \tag{4.1.18}$$

De (4.1.18) y (4.1.10), obtenemos:

$$y(n, n_0, y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) g(r).$$

Lo cual prueba el resultado. ∎

Es importante notar que la solución que nos interesa hallar está en términos de productos de matrices, $\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$, lo cual en la práctica no es un tarea fácil y analizamos más adelante.

4.2. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Como ya se ha mencionado, existen ecuaciones en diferencias homogéneas o autónomas y no homogéneas o no autónomas, en relación si dependen o no del parámetro n.

Por la Observación 4.1.2, un sistema de ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas con coeficientes constantes es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n) + g_1(n)\\
x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) + g_2(n)\\
&\vdots\\
x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n) + g_k(n).
\end{aligned}$$

El correspondiente sistema de ecuaciones en diferencias lineales homogéneo con coeficientes constantes está dado por:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n)\\
x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n)\\
&\vdots\\
x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n).
\end{aligned}$$

Así, estos sistemas pueden ser escritos en forma matricial como:

$$x(n+1) = Ax(n) + g(n), \tag{4.2.1}$$

donde $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$, $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes real no singular de $k \times k$ y $g(n) = (g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$, y el correspondiente sistema homogéneo tiene la forma:

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{4.2.2}$$

En este caso, se dice que este sistema es invariante debido a que todos los valores de A son constantes.

Ejemplo 4.2.1 (Cadenas de Markov)**.** Veamos qué es una cadena de Markov. Supongamos que se hace un experimento con un conjunto de k estados (resultados), $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$. Dicho experimento se repite de modo que la probabilidad (p_{ij}) de que el estado s_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, ocurra en la $(n+1)$-ésima repetición depende únicamente del estado s_j que ocurra en la n-ésima repetición del experimento.

De lo anterior, se puede decir que el estado futuro depende únicamente del estado presente. Formalmente, $p_{ij} = p(s_i|s_j)$ es la probabilidad de que s_i ocurra en la siguiente repetición, dado que s_j ocurrió en la última repetición. Ya que s_j ha ocurrido en la última repetición, existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que ocurrió en la repetición anterior. Esto significa que:

$$p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + \cdots + p_{kj} = 1, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Sea $p_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $p_i(n)$ es la probabilidad de que el estado s_i ocurra en el n-ésimo experimento, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene que uno de los estados s_i debe ocurrir en la n-ésima repetición. Lo que quiere decir que:

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_k(n) = 1, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Para obtener un modelo matemático de este experimento, debemos definir $p_i(n+1)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, como la probabilidad de que el estado s_i ocurra en la $(n+1)$-ésima repetición del experimento. Hay k formas en que esto puede suceder.

Por una parte, la n-ésima repetición proporciona s_1 y la $(n+1)$-ésima repetición nos da s_i. Ya que la probabilidad de obtener s_1 en la n-ésima repetición es $p_1(n)$ y la probabilidad de obtener s_i después de s_1 es p_{i1}, se sigue que la probabilidad de que ocurra este caso es $p_{i1}p_1(n)$. Por otro lado, la n-ésima repetición proporciona s_2 y la $(n+1)$-ésima repetición nos da s_i. La probabilidad de que ocurra este caso es $p_{i2}p_2(n)$. Si repetimos este procedimiento para los casos restantes $3, 4, \ldots, k$, se obtiene el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\begin{aligned}
p_1(n+1) &= p_{11}p_1(n) + p_{12}p_2(n) + \cdots + p_{1k}p_k(n) \\
p_2(n+1) &= p_{21}p_1(n) + p_{22}p_2(n) + \cdots + p_{2k}p_k(n) \\
&\vdots \\
p_k(n+1) &= p_{k1}p_1(n) + p_{k2}p_2(n) + \cdots + p_{kk}p_k(n),
\end{aligned}$$

que se puede escribir en forma matricial:

$$p(n+1) = Sp(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_k(n))^T$ es el *vector de probabilidad* y $S = (p_{ij})$ es la *matriz de transición* de tamaño $k \times k$.

Cuando el sistema es autónomo, la matriz A es constante, esto es $\Phi(n) = A^{n-n_0}$ y en caso de que $n_0 = 0$,

$$\Phi(n) = A^n. \tag{4.2.3}$$

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.14 es el siguiente resultado:

Corolario 4.2.2. Si la matriz A es constante en (4.1.4), se sigue que:

$$\det \Phi(n) = (\det A)^{n-n_0} \det \Phi(n_0).$$

Por lo que sería más adecuado utilizar el algoritmo de Putzer, que se analiza más adelante, para calcular la matriz fundamental de un sistema autónomo.

Ejemplo 4.2.3. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= x_1(n) - 2x_2(n) \\
x_2(n+1) &= x_1(n) + 4x_2(n),
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Se tiene que es un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones en diferencias de primer orden y con coeficientes constantes. La función $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ a determinar es $x(n) = (x_1(n), x_2(n))^T$.

Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{gathered}
x(n+1) = Ax(n) \\
\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Si en (4.2.2), se tiene la condición adicional $x(n_0) = x_0$, para algún $n_0 \geq 0$, se dice que es un problema de valores iniciales.

Ejemplo 4.2.4. Sea $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_1(n) - 2x_2(n) - 2x_3(n) \\ x_2(n+1) &= -x_3(n) \\ x_3(n+1) &= 2x_2(n) + 3x_3(n), \end{aligned}$$

donde $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 0$.

Se tiene que es un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones en diferencias de primer orden, con coeficientes constantes y condiciones iniciales. Esto significa que es un problema de valores iniciales. La expresión $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ a determinar es $x(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))^T$.

Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$x(n+1) = Ax(n), \qquad\qquad x(n_0) = x_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de (4.2.2) se puede obtener mediante iteración. Como una consecuencia del Teorema 4.1.5, se tiene el corolario siguiente.

Corolario 4.2.5. Considerando el sistema (4.2.2) con condiciones iniciales $n \geq n_0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tal que $x(n_0) = x_0$, existe una única solución $x(n, n_0, x_0)$ tal que $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$, además:

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0. \tag{4.2.4}$$

Notemos que $x(n_0, n_0, x_0) = A^{n_0-n_0} x_0 = x_0$. Adicionalmente, si $n_0 = 0$, entonces la solución de la forma (4.2.4) puede escribirse como $x(n, x_0)$ o simplemente $x(n)$.

Usando el Teorema 4.1.23, obtenemos:

Corolario 4.2.6. Considerando el sistema (4.2.1) con condiciones iniciales $n \geq n_0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tal que $x(n_0) = x_0$, existe una única solución $x(n, n_0, x_0)$ tal que $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Además:

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1} g(r). \tag{4.2.5}$$

Obervemos que podemos considerar $n_0 = 0$ sin pérdida de generalidad.

Consideremos el sistema:

$$x(n+1) = Ax(n), \text{ para cada } n \geq n_0 \geq 0.$$

Para obtener un sistema equivalente, pongamos $y(n) = x(n + n_0)$, para cada $n \geq 0$.

De esta manera, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= x((n+1) + n_0) \\ &= x((n + n_0) + 1) \\ &= Ax(n + n_0) \\ &= Ay(n). \end{aligned}$$

Además, notemos que $y(0) = x(n_0)$ y:

$$y(n, 0, x_0) = y(n) = A^n y(0). \tag{4.2.6}$$

Es importante mencionar que existe una analogía con las ecuaciones diferenciales. Para el problema con valores iniciales:

$$\frac{dt}{dx} = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

donde A es una matriz de $k \times k$, $x \in \mathbb{R}^k$, la solución es la siguiente:

$$x(t) = e^{A(n-n_0)} x_0.$$

Notemos que (4.2.4) y (4.2.5) están en términos de potencias de una matriz, por tal razón se debe ver de qué manera podemos analizar potencias de raíces.

Análogo discreto del algoritmo de Putzer

En las ecuaciones diferenciales, el algoritmo de Putzer sirve para calcular e^{At}. En este caso, se utiliza para hallar A^n.

Sea A una matriz de $k \times k$. Tratamos de hallar una expresión para A^n de la forma siguiente:

$$A^n = \sum_{j=1}^{s} u_j(n) M(j-1), \tag{4.2.7}$$

donde los $M(j-1)$ son matrices de $k \times k$ y u_j son funciones escalares a determinar. Adicionalmente, se tiene que:

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1), \quad M(0) = I, \tag{4.2.8}$$

equivalentemente,

$$M(j+1) = (A - \lambda_{j+1} I) M(j), \quad M(0) = I.$$

Proposición 4.2.7. Se tiene que:

$$M(n) = \prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j I). \tag{4.2.9}$$

Demostración. Mediante iteraciones, se sigue que:

$$\begin{aligned}
M(0) &= I \\
M(1) &= (A - \lambda_1 I)M(0) \\
&= (A - \lambda_1 I)I \\
&= A - \lambda_1 I \\
M(2) &= (A - \lambda_2 I)M(1) \\
&= (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) \\
M(3) &= (A - \lambda_3 I)M(2) \\
&= (A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De forma inductiva, se sigue que:

$$M(n) = (A - \lambda_n I)(A - \lambda_{n-1} I) \cdots (A - \lambda_1 I).$$

Por lo tanto, $M(n) = \prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j I)$. ■

Recordemos que el Teorema de Cayley-Hamilton [6, Teorema 8.8.2] garantiza que toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. De esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned}
M(k) &= \prod_{j=1}^{k}(A - \lambda_j I) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De donde, $M(n) = 0$, para cada $n \geq k$. Luego, (4.2.7) puede reescribirse de la forma siguiente:

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1). \tag{4.2.10}$$

Pongamos $n = 0$ en (4.2.10). Se tiene que:

$$\begin{aligned}
M(0) &= I \\
&= u_1(0)I + u_2(0)M(1) + \cdots + u_k(0)M(k-1).
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Notemos que la ecuación (4.2.11) se satisface solamente si:

$$u_1(0) = 1 \text{ y } u_2(0) = u_3(0) = \cdots = u_k(0) = 0. \tag{4.2.12}$$

De la ecuación (4.2.10), se sigue que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)M(j-1) &= AA^n \\ &= A\left(\sum_{j=1}^{k} u_j(n)M(j-1)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n)AM(j-1).\end{aligned}$$

Sustituyendo $AM(j-1)$ de (4.2.8) en la ecuación anterior:

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)M(j-1) = \sum_{j=1}^{k} u_j(n)(M(j) - \lambda_j M(j-1)) \tag{4.2.13}$$

Comparando los coeficientes de $M(j)$, $1 \leq j \leq k$, en (4.2.13) y utilizando la condición (4.2.12), obtenemos:

$$u_1(n+1) = \lambda_1 u_1(n), \qquad u_1(0) = 1 \tag{4.2.14}$$

$$u_j(n+1) = \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), \quad u_j(0) = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, k. \tag{4.2.15}$$

De (2.2.1), la solución u_1 de (4.2.14) es de la forma:

$$u_1(n) = \lambda_1^n. \tag{4.2.16}$$

Luego, de (2.3.2), se tiene que la solución u_j de (4.2.15) es la siguiente:

$$u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-i-1} u_{j-1}(i), \tag{4.2.17}$$

con $j = 2, 3, \ldots, k$.

Las ecuaciones (4.2.9), (4.2.16) y (4.2.17) juntas constituyen el algoritmo de Putzer, que como se ha mencionado, sirve para calcular A^n.

Ejemplo 4.2.8. Calculemos A^n si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\
&= (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De donde, los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.

Luego,

$$\begin{aligned}
M(0) &= I \\
M(1) &= (A - 2I) \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
M(2) &= (A - 2I)^2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
u_1(n) &= 2^n \\
u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} \cdot 2^i \\
&= n2^{n-1} \\
u_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-i-1} \cdot i2^{i-1} \\
&= \frac{3^{n-1}}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i \left(\frac{2}{3}\right)^i \\
&= \frac{3^{n-1}}{2} \left(\frac{(\frac{2}{3} - 1)^n (\frac{2}{3})^n - (\frac{2}{3})^{n+1} + \frac{2}{3}}{(\frac{2}{3} - 1)^2} \right) \\
&= -2^n + 3^n - n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

De (4.2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n)M(j-1)\\
&= 2^n I + n2^{n-1}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix} + (-2^n+3^n-n2^{n-1})\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-n2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1}\\ -n2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1}\\ -3n2^n & n2^{n-1} & n2^n\end{pmatrix}\\
&\quad + \begin{pmatrix}2^n-3^n+n2^{n-1} & n-1 & -2^n+3^n-n2^{n-1}\\ 2^n-3^n+n2^{n-1} & 0 & -2^n+3^n-n2^{n-1}\\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n+n2^n & 0 & -2^{n+1}+2\cdot 3^n-n2^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2^{n-1}-3^n-n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n+3^n\\ 2^n-3^n-n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n+3^n\\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n-n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n+2\cdot 3^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.9. Encontremos la solución $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ del sistema $x(n+1) = Ax(n)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A-\lambda I)\\
&= \det\begin{pmatrix}4-\lambda & 1 & 2\\ 0 & 2-\lambda & -4\\ 0 & 1 & 6-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)(\lambda-4)^2\\
&= (\lambda-4)^3\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

De donde:

$$\begin{aligned}
M(0) &= I\\
M(1) &= (A-4I)\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M(2) &= (A-4I)^2\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Se sigue que:

$$
\begin{aligned}
u_1(n) &= 4^n\\
u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 4^{n-i-1}\cdot 4^i\\
&= n4^{n-1}\\
u_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 4^{n-i-1}\cdot i4^{i-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i4^{n-2}\\
&= 4^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1} i\\
&= \frac{n(n-1)}{2}\,4^{n-2}.
\end{aligned}
$$

De (4.2.10), se tiene que:

$$
\begin{aligned}
A^n &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n)M(j-1)\\
&= 4^nI + n4^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\,4^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n4^{n-1} & 2n4^{n-1}\\ 0 & -2n4^{n-1} & -n4^n\\ 0 & n4^{n-1} & 2n4^{n-1} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 2n4^{n-1}\\ 0 & 4^n-2n4^{n-1} & -n4^n\\ 0 & n4^{n-1} & 4^n+2n4^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La solución $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de la ecuación en diferencias es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= A^n x(0)\\
&= A^n \begin{pmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 4^n x_1(0) + n4^{n-1}x_2(0) + 2n4^{n-1}x_3(0) \\ (4^n - 2n4^{n-1})x_2(0) - n4^n x_3(0) \\ n4^{n-2}x_2(0) + (4^n + 2n4^{n-1})x_3(0) \end{pmatrix}.$$

En el siguiente ejemplo se muestra una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.23:

Ejemplo 4.2.10. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Resolvamos el sistema en diferencias $y(n+1) = Ay(n) + g(n)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De (4.2.4), se tiene que:

$$y(n) = A^n y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-r-1} g(r). \tag{4.2.18}$$

Lo cual indica que necesitamos calcular A^n, por lo que podemos utilizar el algoritmo de Putzer.

Se tiene que los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Esto significa que:

$$\begin{aligned} M(0) &= I \\ M(1) &= (A - 2I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} u_1(n) &= 2^n \\ u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} \cdot 2^i \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

De (4.2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1) \\ &= 2^n I + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

De (4.2.18), se tiene que:

$$\begin{aligned}
y(n) &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} r2^{n-r-1} + (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} r2^{-r-1} + (n-r-1)2^{-r-2} \\ 2^{-r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} r2^{-r-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (n-r-1)2^{-r-2} \\ \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 + (-n-1)2^{-n} + 2^{-n} + \frac{1}{2} - 1 \\ -2^{-n} + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -n2^{-n} + \frac{1}{2} \\ -2^{-n} + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n + 2^{n-1} \\ 2^n - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -n + 3 \cdot 2^{n-1} \\ 2^n - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_1(n) = -n + 3 \cdot 2^{n-1}$ y $y_2(n) = 2^n - 1$.

4.3. Conversión de una ecuación de orden n en un sistema de n ecuaciones de primer orden

Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ y consideremos una ecuación en diferencias no homogénea de orden k:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n). \tag{4.3.1}$$

Esta relación puede escribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden de dimensión k.

Sea $z(n) = [z_1(n), z_2(n), \ldots, z_k(n)]$, donde:

$$\begin{aligned}
z_1(n) &= y(n) \\
z_2(n) &= y(n+1) = z_1(n+1)
\end{aligned}$$

$$z_3(n) = y(n+2) = z_2(n+1)$$
$$\vdots$$
$$z_k(n) = y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} z_1(n+1) &= z_2(n) \\ z_2(n+1) &= z_3(n) \\ &\vdots \\ z_{k-1}(n+1) &= z_k(n). \end{aligned}$$

De aquí, podemos reescribir la ecuación (4.3.1) de la forma siguiente:

$$z_k(n+1) = -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n) - \cdots - p_1(n)z_k(n) + g(n).$$

Así, (4.3.1) puede escribirse en forma matricial como:

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n), \tag{4.3.2}$$

donde:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \cdots & -p_1(n) \end{pmatrix}, \quad h(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Si $g(n) = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo siguiente:

$$z(n+1) = A(n)z(n).$$

Definición 4.3.1. La matriz $A(n)$ asociada al sistema (4.3.2) es llamada *matriz compañera* de (4.3.1).

Para una ecuación en diferencias homogénea de orden k con coeficientes constantes:

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + \cdots + p_kx(n) = 0, \tag{4.3.3}$$

la matriz compañera A es una matriz constante. Así, el sistema de ecuaciones en diferencias correspondiente es de la forma:

$$z(n+1) = Az(n). \tag{4.3.4}$$

Sea $C(n)$ el Casoratiano de (4.3.3). Se tiene que $C(n) = \det \Phi(n)$, donde $\Phi(n)$ es la matriz fundamental de (4.3.4).

La ecuación característica de A es de la forma siguiente:

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k = 0,$$

la cual está correlacionada con (3.2.2). Esto significa que los valores propios de A son raíces de la ecuación característica de (3.1.2).

Ejemplo 4.3.2. Sea $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Veamos la manera de transformar la ecuación en diferencias de tercer orden:

$$y(n+3) - 6y(n+2) + 11y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 2^n + n^2, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.3.5)$$

en un sistema de ecuaciones de primer orden.

Se realizan las sustituciones siguientes:

$$\begin{aligned} z_1(n) &= y(n) \\ z_2(n) &= y(n+1) \\ &= z_1(n+1) \\ z_3(n) &= y(n+2) \\ &= z_2(n+1). \end{aligned}$$

Así, la ecuación (4.3.5) puede reescribirse como:

$$z_3(n+1) = 6z_1(n) - 11z_2(n) + 6z_3(n) + 5 \cdot 2^n + n^2.$$

De donde, su representación matricial es la siguiente:

$$\begin{aligned} z(n+1) &= Az(n) + h(n) \\ \begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \\ z_3(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ z_3(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \cdot 2^n + n^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.3. Sean Δ el operador diferencia y $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Resolvamos la siguiente ecuación en diferencias utilizando el método de sistemas de ecuaciones en diferencias:

$$\Delta^2 x(n) + \Delta x(n) - x(n) = 0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (4.3.6)$$

Se tiene que la ecuación (4.3.6) es equivalente a la siguiente:

$$x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0, \qquad (4.3.7)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Se realizan las sustituciones siguientes:

$$\begin{aligned} z_1(n) &= x(n) \\ z_2(n) &= x(n+1) \\ &= z_1(n+1). \end{aligned}$$

De esta manera, la ecuación (4.3.7) puede reescribirse como:

$$z_2(n+1) = z_1(n) + z_2(n).$$

Así, su representación matricial es la siguiente:

$$\begin{aligned} z(n+1) &= Az(n) \\ \begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1 \\ &= \left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Por lo tanto, la solución general de (4.3.6) es $x(n) = a_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

4.4. Forma de Jordan

Como ya se ha mencionado, una parte primordial de la resolución de los sistemas de ecuaciones en diferencias es la matriz fundamental, por lo que es necesario considerar las formas de Jordan para hallar dichas matrices.

Matrices diagonalizables

Para esta sección, necesitamos teoría de álgebra lineal, más específicamente algunos hechos referentes a diagonalización de matrices.

Recordemos que una matríz es diagonalizable si es normal o si todos sus vectores propios son linealmente independientes. Si la matriz A de los sistemas de ecuaciones en diferencias es diagonalizable, el cálculo de A^n es simple.

Supongamos que A es diagonalizable, sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de A y $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ los vectores propios linealmente independientes de A correspondientes a los valores propios de A. Como A es diagonalizable, existen matrices D y P tales que:

$$A = PDP^{-1}, \tag{4.4.1}$$

donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ y $P = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$.

De (4.4.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= PD^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Para hallar otra matriz fundamental $\Phi(n)$ del sistema en diferencias:

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{4.4.2}$$

hacemos:

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= A^nP \\ &= PD^nP^{-1}P \\ &= PD^n \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

De (4.4.3), se sigue que:

$$\Phi(0) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P.$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} A^n &= \Phi(n)P^{-1} \\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(0). \end{aligned}$$

Por un lado, de la ecuación (4.2.6), se tiene que:

$$x(n) = A^n x(0) = \Phi(n)\Phi^{-1}(0)x(0), \tag{4.4.4}$$

la cual es la solución particular con las condiciones iniciales.

Por otra parte, para hallar la solución general, procedemos de la siguiente manera. Sabemos que P es una matriz cuyas columnas son los vectores propios linealmente independientes de A. Así, de (4.4.3):

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k] \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} \\ &= [\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \ldots, \lambda_k^n \xi_k]. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Notemos que cada columna $\lambda_i^n \xi_i$, $1 \leq i \leq k$ de $\Phi(n)$ es solución de (4.4.2), por el Teorema 3.1.17.

Esto es, la solución general de (4.4.2) es de la forma siguiente:

$$x(n) = c_1\lambda_1^n \xi_1 + c_2\lambda_2^n \xi_2 + \cdots + c_k\lambda_k^n \xi_k, \tag{4.4.6}$$

donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, c_i es constante.

Ejemplo 4.4.1. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Hallemos la solución del problema con valores iniciales $x(n+1) = Ax(n)$, $n_0 = 0$, $x(n_0) = x(0)$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De donde, los valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Para hallar los vectores propios correspondientes a cada valor propio se resuelve la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$.

Para $\lambda_1 = 5$, se tiene que:

$$
\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que $\xi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 5$.

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, se tiene que:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Notemos que la única ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$
x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,
$$

por lo que para hallar los vectores propios damos valores al menos a dos de las variables. Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, entonces $x_3 = -1$. Con lo que se produce el vector propio $\xi_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ahora, si $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, se sigue que $x_3 = -2$, obteniendo el vector propio $\xi_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, aclarando que existen infinitas formas de elegir ξ_2 y ξ_3.

De la ecuación (4.4.6), se tiene que la solución general $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ está dada por:

$$
x(n) = c_1 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},
$$

equivalentemente:

$$x(n) = \begin{pmatrix} c_1 5^n + c_2 \\ c_1 5^n + c_3 \\ c_1 5^n - c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}. \tag{4.4.7}$$

Ahora, resolvamos el problema con valores iniciales. Debido a que $x(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{pmatrix} c_1 5^0 + c_2 \\ c_1 5^0 + c_3 \\ c_1 5^0 - c_2 - 2c_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= 1 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ y $c_3 = \frac{1}{2}$. Por tanto, la solución del problema con valores iniciales es:

$$x(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{para cada } n \geq n_0.$$

Veamos otra forma de resolver este sistema de ecuaciones.

De (4.4.5), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= [\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3] \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 1 & 0 \\ 5^n & 0 & 1 \\ 5^n & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Así:

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{4.4.9}$$

Puesto que $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y sustituyendo (4.4.8) y (4.4.9) en (4.4.4):

$$\begin{aligned} x(n) &= \begin{pmatrix} 5^n & 1 & 0 \\ 5^n & 0 & 1 \\ 5^n & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en el que la matriz A asociada al sistema (4.4.2) tenga algún valor propio complejo, digamos $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$ y vector propio correspondiente ξ. Luego, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es un valor propio de A y su vector propio es $\overline{\xi}$. La solución del sistema de ecuaciones en diferencias (4.4.2) se propone de la forma siguiente:

$$x(n) = (\alpha + i\beta)^n(\xi_1 + i\xi_2). \tag{4.4.10}$$

Usando coordenadas polares, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha &= r\cos\theta \\ \beta &= r \operatorname{sen}\theta \\ r &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

De (4.4.10), se sigue que:

$$\begin{aligned} x(n) &= (r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta)^n(\xi_1 + i\xi_2) \\ &= (r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta))^n(\xi_1 + i\xi_2) \\ &= r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)(\xi_1 + i\xi_2) \\ &= r^n((\cos n\theta)\xi_1 + i(\cos n\theta)\xi_2 + i(\operatorname{sen} n\theta)\xi_1 - (\operatorname{sen} n\theta)\xi_2) \\ &= r^n((\cos n\theta)\xi_1 - (\operatorname{sen} n\theta)\xi_2) + ir^n((\cos n\theta)\xi_2 + (\operatorname{sen} n\theta)\xi_1) \\ &= u(n) + iv(n), \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

donde $u(n) = r^n((\cos n\theta)\xi_1 - (\operatorname{sen} n\theta)\xi_2)$ y $v(n) = r^n((\cos n\theta)\xi_2 + (\operatorname{sen} n\theta)\xi_1)$.

Puesto que $x(n) = u(n) + iv(n)$ es solución de (4.4.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= u(n+1) + iv(n+1) \\ &= A(u(n) + iv(n)) \\ &= Au(n) + iAv(n). \end{aligned}$$

Igualando las partes reales y las complejas, obtenemos:

$$u(n+1) = Au(n)$$

$$v(n+1) = Av(n).$$

Esto significa que u y v son soluciones de (4.4.2). Adicionalmente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
W(n) &= \det \begin{pmatrix} u(n) & v(n) \\ u(n+1) & v(n+1) \end{pmatrix} \\
&= r^{2n+1}(\xi_1^2 + \xi_2^2)((\cos(n\theta))(\operatorname{sen}(n+1)\theta) - ((\cos(n+1)\theta)(\operatorname{sen} n\theta))) \\
&= r^{2n+1}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \operatorname{sen}(n\theta + \theta - n\theta) \\
&= r^{2n+1}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \operatorname{sen}\theta \\
&= \beta r^{2n}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Esto significa que u y v son soluciones linealmente independientes de (4.4.2). En consecuencia, no se necesita considerar la solución generada por $\overline{\lambda}$ y $\overline{\xi}$.

Ejemplo 4.4.2. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Hallemos la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias $x(n+1) = Ax(n)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De esta forma, los valores propios de A son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$.

Para hallar los vectores propios correspondientes a cada valor propio se resuelve la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$.

Para $\lambda_1 = 2i$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -5 \\ 1 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
(1-2i)x_1 - 5x_2 &= 0 \\
x_1 + (-1-2i)x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 2i$. Luego, $\xi_2 = \overline{\xi_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = -2i$.

De (4.4.10), se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n) &= (2i)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \cdot i^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Además, se sigue que:

$$\begin{aligned} i &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ i^n &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Sustituyendo (4.4.13) en (4.4.12), se tiene que:

$$\begin{aligned} x(n) &= 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i\frac{2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + i2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Comparando (4.4.14) con (4.4.11):

$$\begin{aligned} u(n) &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ v(n) &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tal que $u(n)$ y $v(n)$ son soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones en diferencias. Por tanto, la solución general es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}c_1\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}c_2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}c_2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}c_1 - \frac{2}{5}c_2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La forma de Jordan

Ya hemos analizado el caso cuando la matriz A del sistema de ecuaciones en diferencias es diagonalizable. Ahora, nos enfocamos en las matrices que no lo son, que como ya se ha mencionado, son las que tienen vectores propios linealmente dependientes. Para esto, necesitamos teoría de álgebra lineal referente a la forma canónica de Jordan, que puede consultarse en las siguientes referencias [6] y [5]. Sin embargo, se mencionan algunos de los conceptos más relevantes para un adecuado entendimiento de este tema.

Sea A una matriz de $k \times k$ no diagonalizable. Se tiene que esta matriz es *similar* a la forma de Jordan si:

$$P^{-1}AP = J, \tag{4.4.15}$$

donde:

$$\begin{aligned} P &= [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k] \\ J &= diag(J_1, J_2, \ldots, J_r), \quad \text{para cada } r \in \{1, \ldots, k\} \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

y para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{4.4.17}$$

La matriz J_i de la forma (4.4.17) es llamada *bloque de Jordan.*

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [6].

Teorema 4.4.3 (Forma canónica de Jordan)**.** Toda matriz A de $k \times k$ es similar a una forma de Jordan (4.4.16), donde cada J_i es un bloque de Jordan de $s_i \times s_i$ y $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$.

Definición 4.4.4. Sean A una matriz de $k \times k$ similar a una forma de Jordan J y λ un valor propio de A. Se dice que:

(a) La *multiplicidad algebraica* de λ es el número de veces que se repite este valor propio.

(b) La *multiplicidad geométrica* de λ es el número de bloques de Jordan correspondientes a este valor propio. Además, es igual al número de vectores propios correspondientes a λ.

Definición 4.4.5. Sean A una matriz de $k \times k$ similar a una forma de Jordan J y λ un valor propio de A.

(a) Si la multiplicidad algebraica de λ es 1, se dice que λ es *simple.*

(b) Si la multiplicidad algebraica de λ es igual a su multiplicidad geométrica, se tiene que λ es un valor propio *semisimple.*

Observación 4.4.6. Sean A una matriz de $k \times k$ similar a una forma de Jordan J y λ un valor propio de A. Si λ tiene multiplicidad geométrica igual a 1, entonces A tiene solamente un vector propio, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Esto significa que los vectores propios linealmente independientes de la forma de Jordan (4.4.16) son $e_1, e_{s_1+1}, e_{s_1+s_2+1}, \ldots, e_{s_1+s_2+\cdots+s_{r-1}+1}$.

De (4.4.15), se tiene que:

$$AP = PJ. \tag{4.4.18}$$

Sea $P = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$. Igualando las primeras s_i columnas de (4.4.18), se tiene que:

$$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1.$$

Luego, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, s_1\}$, sea $A\xi_i = \lambda_1 \xi_i + \xi_{i-1}$. Así, $(A - \lambda_1 I)\xi = \xi_{i-1}$, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, s_1\}$.

Notemos que para cada $i \in \{2, \ldots, s_1\}$, ξ_{i-1} es el vector propio generalizado de A.

Los vectores $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{s-1}$ son los vectores propios generalizados de A y se obtienen mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$(A - \lambda_1 I)\xi_i = \xi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, s_1.$$

Para el m-ésimo bloque de Jordan, se tiene que con la ecuación en diferencias:

$$(A - \lambda_m I)\xi_{m_i} = \xi_{m_i - 1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m,$$

se obtiene cada vector propio generalizado.

Adicionalmente, se tiene que:

$$\begin{aligned} A^n &= (PJP^{-1})^n \\ &= PJ^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k^n \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Notemos que para cada J_i, $i = 2, 3, \ldots, r$, se tiene que $J_i = \lambda_i I + N_i$, donde:

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz nilpotente de $s_i \times s_i$. Se sigue que:

$$J_i^n = (\lambda_i I + N_i)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_i^n I + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}N_i + \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2}N_i^2 + \cdots + \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1}N_i^{s_i-1} \\
&= \begin{pmatrix}
\lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\
0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n
\end{pmatrix}. \qquad (4.4.20)
\end{aligned}
$$

Utilizando (4.1.13), (4.2.3) y (4.4.19), se tiene que la solución general $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ de (4.4.2) es de la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= A^n c \\
&= PJ^nP^{-1}c,
\end{aligned}
$$

equivalentemente:

$$x(n) = PJ^n\tilde{c}, \qquad (4.4.21)$$

donde $\tilde{c} = P^{-1}c$. Esto significa que una matriz fundamental de (4.4.2) es de la forma $\Phi(n) = PJ^n$. Además, la matriz de transición de estado es $\Phi(n, n_0) = PJ^{n-n_0}P^{-1}$ y $x(n, n_0, x_0) = PJ^{n-n_0}P^{-1}x_0$.

Corolario 4.4.7. Sea A una matriz de $k \times k$. Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ si y sólo si $|\lambda| < 1$ para cada valor propio de A.

Demostración. La prueba se sigue de (4.4.20), debido a que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_i^n = 0$, para cada i. ■

Observación 4.4.8. Sea A una matriz de $k \times k$. Del Corolario 4.4.7, si $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x(n) &= \lim_{n\to\infty} A^n x(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De la Observación 4.4.8, si $|\lambda| < 1$, para cada valor propio de A, entonces todas las soluciones $x(n)$ de (4.4.2) tienden al vector cero conforme $n \to \infty$.

Ejemplo 4.4.9. Sea $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$. Hallemos la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias $x(n+1) = Ax(n)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$
\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-4)^3 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De donde, los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Para hallar los vectores propios correspondientes a cada valor propio se resuelve la ecuación $(A - \lambda I)\xi = 0$. Esto significa que:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
d_2 + 2d_3 &= 0 \\
-2d_2 - 4d_3 &= 0 \\
d_2 + 2d_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Esto es, $d_2 = -2d_3$. Si hacemos $d_3 = 1$ y damos valores de 0 y 1 a d_1, se generan los vectores propios $\xi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $\xi_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Podemos hallar un vector propio generalizado ξ_3 utilizando (4.4):

$$
\begin{gathered}
(A - 4I)\xi_3 = \xi_1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{gathered}
$$

el cual produce un sistema de ecuaciones inconsistente. Así, podemos intentar hallar ξ_3 a partir de ξ_2:

$$
\begin{gathered}
(A - 4I)\xi_3 = \xi_2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{gathered}
$$

Con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_2 + 2a_3 - 1 &= 0 \\
-2a_2 - 4a_3 + 2 &= 0 \\
a_2 + 2a_3 - 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Esto significa que $a_2 + 2a_3 = 1$. Si hacemos $a_3 = 1$ y $a_1 = 0$, se genera el vector propio $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notemos que ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son linealmente independientes.

De todo lo anterior, se sigue que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4.22}$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} J^n &= P^{-1}A^nP \\ &= \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

Sustituyendo (4.4.22) y (4.4.23) en (4.4.21):

$$x(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Matrices de bloques diagonales

Observación 4.4.10. Sea A una matriz de $k \times k$. Los vectores propios generalizados correspondientes a un valor propio de multiplicidad m se obtienen resolviendo la ecuación $(A - \lambda I)^m \xi = 0$.

De la ecuación (4.4.15), se tiene que λ es un valor propio de A si y sólo si es un valor propio de J. Adicionalmente, si ξ es un vector propio de A, entonces, $\tilde{\xi} = P^{-1}\xi$ es un vector propio de J.

Para hallar el vector propio $\tilde{\xi}$ podemos utilizar el siguiente resultado de álgebra lineal.

Lema 4.4.11. Sea $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ una matriz de bloques diagonales de $k \times k$ tal que A es una matriz de $r \times r$ y B es una matriz de $s \times s$, con $r + s = k$. Los siguientes argumentos son ciertos:

(a) Si λ es un valor propio de A, entonces es un valor propio de C. El vector propio y los vectores propios generalizados correspondientes a λ son de la forma $\xi = (a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)^T$ con $a_i \in \mathbb{R}$.

(b) Si λ es un valor propio de B, entonces es un valor propio de C. El vector propio y los vectores propios generalizados correspondientes a λ son de la forma $\xi = (0, \dots, 0, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_s)$, con $a_{r+i} \in \mathbb{R}$.

4.5. Aplicaciones en economía

En esta sección analizamos las aplicaciones que tienen los sistemas de ecuaciones en diferencias en la formulación y la resolución de algunos modelos de economía. Para analizar estos modelos, se tomaron como guías pricipales las referencias [4], [18] y [2].

4.5.1. Modelo de comercio

Analicemos un modelo de comercio entre dos países.

Podemos considerar los siguientes supuestos:

- Ingreso nacional = gastos de consumo + inversión neta + exportaciones − importaciones.
- Gastos de consumo nacional = consumo total − importaciones.
- El tiempo se divide en n períodos de igual duración.

Para el país $j = 1, 2$, se tiene que:

- $y_j(n)$ es el ingreso nacional en el período n.
- $c_j(n)$ es el consumo total en el período n.
- $i_j(n)$ es la inversión neta en el período n.
- $x_j(n)$ son las exportaciones en el período n.
- $m_j(n)$ son las importaciones en el período n.
- $d_j(n)$ es el consumo de productos nacionales en el período n.

Para el país 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= i_1(n) + c_1(n) + x_1(n) - m_1(n) \\ d_1(n) &= c_1(n) - m_1(n). \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

De (4.5.1), se sigue que:

$$c_1(n) = d_1(n) + m_1(n). \tag{4.5.2}$$

De (4.5.1) y (4.5.2), obtenemos:

$$y_1(n) = d_1(n) + x_1(n) + i_1(n). \tag{4.5.3}$$

De manera similar, para el país 2:

$$y_2(n) = d_2(n) + x_2(n) + i_2(n). \tag{4.5.4}$$

Podemos agregar el supuesto de que el consumo interno $d_j(n)$ y las importaciones $m_j(n)$ de cada país en el período $n+1$ son proporcionales al ingreso nacional del país $y_i(n)$ en un período de tiempo anterior n. Esto significa que:

$$d_1(n+1) = a_{11}y_1(n) \tag{4.5.5}$$
$$m_1(n+1) = a_{21}y_1(n) \tag{4.5.6}$$
$$d_2(n+1) = a_{22}y_2(n) \tag{4.5.7}$$
$$m_2(n+1) = a_{12}y_2(n), \tag{4.5.8}$$

donde $a_{ij} > 0$, $j = 1, 2$ son las propensiones marginales de cada país.

Como sólo estamos considerando el comercio entre dos países, la importación de uno debe ser igual a la exportación del otro y viceversa. Lo que quiere decir que:

$$m_1(n) = x_2(n)$$
$$m_2(n) = x_1(n),$$

equivalentemente:

$$m_1(n+1) = x_2(n+1) \tag{4.5.9}$$
$$m_2(n+1) = x_1(n+1). \tag{4.5.10}$$

De (4.5.3), se tiene que:

$$y_1(n+1) = d_1(n+1) + x_1(n+1) + i_1(n+1) \tag{4.5.11}$$

Haciendo las respectivas sustituciones de (4.5.5), (4.5.6) y (4.5.9) en (4.5.11), se sigue que:

$$y_1(n+1) = a_{11}y_1(n) + a_{12}y_2(n) + i_1(n+1). \tag{4.5.12}$$

De (4.5.4), obtenemos:

$$y_2(n+1) = d_2(n+1) + x_2(n+1) + i_2(n+1) \tag{4.5.13}$$

De forma similar, haciendo las respectivas sustituciones de (4.5.7), (4.5.8) y (4.5.10) en (4.5.13), se sigue que:

$$y_2(n+1) = a_{22}y_2(n) + a_{21}y_1(n) + i_2(n+1). \tag{4.5.14}$$

Escribiendo (4.5.12) y (4.5.14) en forma matricial, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1(n+1) \\ i_2(n+1) \end{pmatrix} \tag{4.5.15}$$

Adicionalmente, podemos suponer que la inversión neta de cada país es constante, esto es $i_1(n+1) = i_1$, $i_2(n+1) = i_2$. Con esto, la ecuación matricial (4.5.15) es de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (4.2.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n) &= A^n y(0) + \sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1}\overline{I} \\ &= A^n y(0) + \sum_{r=0}^{n-1} A^r \overline{I}, \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

donde $\overline{I} = (i_1, i_2)^T$.

Otro supuesto razonable que podemos hacer es que el consumo total $c_j(n+1)$ en el período $n+1$ debe ser menor que el ingreso nacional $y_j(n)$ en el período n:

$$\begin{aligned} c_j(n+1) &< y_j(n) \\ d_j(n+1) + m_j(n+1) &< y_j(n), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

Sustituyendo (4.5.5) y (4.5.6) en (4.5.17), se sigue que:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1(n) + a_{21}y_1(n) &< y_1(n) \\ a_{11} + a_{21} &< 1, \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

para el país 1.

De forma similar, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{22}y_2(n) + a_{12}y_2(n) &< y_2(n) \\ a_{22} + a_{12} &< 1, \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

para el país 2.

De las condiciones (4.5.18) y (4.5.19), inferimos que si λ es un valor propio de A, entonces $|\lambda| < 1$. En efecto, ya que λ es un valor propio de A, se tiene que $Av = \lambda v$. Comparando la j-ésima columna de ambos lados de esta igualdad, se sigue que:

$$a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 = \lambda v_i, \tag{4.5.20}$$

donde v_i, $i = 1, 2$ son las entradas del vector propio v de la matriz A correspondiente a λ.

Pongamos $|v_k| = \text{máx}\{|v_1|, |v_2|\}$.

Notemos que $|v_k| > 0$. Si $i = k$, por (4.5.20), se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\lambda v_k| &= |a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2| \\
|\lambda| \cdot |v_k| &\leq |a_{1k}||v_1| + |a_{2k}||v_2| \\
&\leq |a_{1k}||v_k| + |a_{2k}||v_k| \\
&= |v_k|(a_{1k} + a_{2k}) \\
&< |v_k|(1).
\end{aligned}$$

Esto es, $|\lambda| < 1$. Por el Corolario 4.4.7, se tiene que $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ y con esto, se genera la expansión de Neumann [19]:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} A^r &= \sum_{r=0}^{\infty} A^r \\
&= (I - A)^{-1}. \qquad (4.5.21)
\end{aligned}$$

De (4.5.21) y (4.5.16), se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = (I - A)^{-1}\overline{I}.$$

La interpretación de esta ecuación es que los ingresos nacionales de ambos países tienden a valores de equilibrio que son independientes de los valores iniciales de los ingresos nacionales $y_1(0)$ y $y_2(0)$.

4.5.2. Modelo dinámico de insumo-producto

Sirve para modelar la cantidad que debe producirse en cada industria tal que los requerimientos de insumos de todas las industrias y la demanda final se satisfagan con exactitud. Se dice que este modelo es dinámico, puesto que se emplean ciertas consideraciones económicas adicionales respecto al modelo estático.

Sea $X \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $X(n)$ es la producción (medida en dólares) de una industria en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

En un sistema de dos industrias, la producción X de cada industria i, $i = 1, 2$, debe establecerse al nivel de la demanda de la forma siguiente:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + d_i,$$

donde a_{ij}, $i, j = 1, 2$ es el coeficiente de insumos, que representa el valor en dólares del artículo i-ésimo requerido en la producción de una cantidad en dólares del artículo j-ésimo y d_i indica la demanda final del artículo i-ésimo.

Supongamos que hay un desfasamiento en un período en la producción $X(n)$ en el período n, tal que la cantidad demandada para el período n determina al producto del período $n+1$.

Para la industria 1, se tiene que:

$$X_1(n+1) = a_{11}X_1(n) + a_{12}X_2(n) + d_1(n), \tag{4.5.22}$$

donde $a_{11}, a_{12} > 0$.

Para la industria 2, se tiene que:

$$X_2(n+1) = a_{21}X_1(n) + a_{22}X_2(n) + d_2(n), \tag{4.5.23}$$

donde $a_{21}, a_{22} > 0$.

De (4.5.22) y (4.5.23) obtenemos el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\begin{pmatrix} X_1(n+1) \\ X_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(n) \\ d_2(n) \end{pmatrix}.$$

Notemos que este sistema es de la forma $X(n+1) = AX(n) + d(n)$. Así, de (4.2.5), su solución es de la forma siguiente:

$$X(n) = A^n X(0) + A^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{d(r)}{A^{r+1}}.$$

Por lo tanto, la producción de una industria depende de los insumos y de la demanda de los artículos.

4.5.3. Modelo de ajuste de capital social

Este modelo fue propuesto por Duesenberry (1959).

Sean $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $Y(n)$ es la renta en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $I(n)$ es la inversión en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $K \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $K(n)$ es el stock de capital en el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $C \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $C(n)$ es el consumo durante el período n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

Podemos asumir lo siguiente:

- Debe existir equilibrio entre los ingresos de la renta $Y(n)$ y los gastos generados por el consumo $C(n)$ y la inversión $I(n)$:

$$Y(n) = C(n) + I(n), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.24}$$

- La inversión $I(n)$ es una función creciente del ingreso del período anterior y una función decreciente del stock de capital pasado:

$$I(n) = a_1 Y(n-1) - a_2 K(n-1), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.25}$$

  donde a_i es constante para cada $i = 1, 2$.

- El consumo $C(n)$ es una función lineal creciente de la renta $Y(n-1)$ y el stock de capital $K(n-1)$ en el período anterior:

$$C(n) = b_1 Y(n-1) + b_2 K(n-1), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.26}$$

  donde b_i es constante para cada $i = 1, 2$.

- El stock de capital $K(n)$ depende de la inversión en el perído n y de una fracción del stock de capital $K(n-1)$ en el período anterior $n-1$:

$$K(n) = I(n) + (1-\delta)K(n-1), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.27}$$

  donde $0 < \delta < 1$ es una constante y representa la tasa de depreciación.

Sustituyendo (4.5.25) y (4.5.26) en (4.5.24), se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(n) &= b_1 Y(n-1) + b_2 K(n-1) + a_1 Y(n-1) - a_2 K(n-1) \\ &= (b_1 + a_1) Y(n-1) + (b_2 - a_2) K(n-1). \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

De las ecuaciones (4.5.27) y (4.5.28) podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden:

$$\begin{pmatrix} Y(n+1) \\ K(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ a_1 & 1 - \delta - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(n) \\ K(n) \end{pmatrix}.$$

Notemos que este sistema es de la forma $x(n+1) = Ax(n)$. Así, de (4.2.4), se tiene que su solución está dada por:

$$x(n) = A^n x_0.$$

Por lo tanto, la renta y el stock de capital dependen del comportamiento que hayan tenido en el periodo anterior.

CONCLUSIONES

En muchas ocasiones, los problemas de diversas áreas requieren ser interpretados y resueltos mediante la utilización de modelos matemáticos que representen de forma clara y concisa las características de cada problemática. Uno de sus principales objetivos es analizar el comportamiento de fenómenos específicos a lo largo del tiempo, ya sea para poder tomar decisiones de acuerdo al comportamiento de estos o bien, para poder predecir algunas situaciones. La forma más conocida para formular los modelos matemáticos es a través de las ecuaciones diferenciales, en las que el tiempo es continuo. Sin embargo, las condiciones a las que están sujetas algunos problemas a resolver necesitan considerar tiempo discreto en su formulación matemática, para que la interpretación de la solución de este tipo de modelos matemáticos sea más acertada. En este caso, se utilizan las ecuaciones en diferencias.

En esta tesis, nos enfocamos en el estudio de las ecuaciones en diferencias de primer orden, las ecuaciones en diferencias de orden superior y los sistemas de ecuaciones en diferencias, proporcionando métodos para resolver estos tipos de ecuaciones de acuerdo a las características que posean. Adicionalmente, analizamos algunas nociones previas que fueron necesarias para el entendimiento adecuado del resto de la tesis, como son: funciones discretas y cálculo en diferencias.

Respecto a las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con condiciones iniciales tanto homogéneas como no homogéneas, uno de los resultados más sobresalientes que revisamos fue que su solución existe y es única. Además, es importante mencionar que sin pérdida de generalidad puede considerarse $n_0 = 0$. También estudiamos los diagramas de Cobweb, los cuales son muy útiles para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio.

En relación con las ecuaciones en diferencias de orden superior lineales, estudiamos que existen distintos métodos de solución, por lo que hay que saber elegir el adecuado conforme las características de la ecuación en diferencias. También, analizamos algunos tipos de ecuaciones en diferencias de orden superior no lineales y las sustituciones que deben realizarse de acuerdo a la forma de dicha ecuación.

Referente a los sistemas de ecuaciones en diferencias, se tuvo como principal objetivo el análisis de la forma de la matriz de coeficientes, para así simplificar el cálculo de las matrices fundamentales y por ende, hallar la solución de estos sistemas en diferencias. Esto puede variar dependiendo si dicha matriz es diagonalizable o no lo es.

Adicionalmente, se proporcionaron modelos de Economía para estudiar las aplicaciones que pueden tener los distintos tipos de ecuaciones en diferencias, resolviéndolas y proporcionando ejemplos númericos en algunos casos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Apostol, Tom M. (2020). *Análisis matemático*. Reverté.

[2] Chiang, Alpha C. y Wainwright, Kevin. (2006) *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. McGraw-Hill.

[3] Contreras, Álvaro. (2020). *Ecuaciones en diferencias. Aplicaciones* [tesis de licenciatura]. Universidad de Jaén.

[4] Elaydi, Saber. (2005). *An Introduction to Difference Equations*. Springer.

[5] Friedberg, Stephen, Insel, Arnold, y Spence, Lawrence. (2003). *Linear Algebra*. Prentice Hall.

[6] Grossman, Stanley. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw Hill Educación.

[7] Hommes, Cars H. (1994). *Dynamics of the cobweb model with adaptative expectations and nonlinear supply and demand*. Journal of Economic Behavior & Organization, 24(3):315-335.

[8] Huerta, Alejandro. (2014). *Atracción local y global en dinámica discreta unidimensional* [tesis de licenciatura]. Repositorio de la Universidad de Murcia.

[9] Linero, Antonio. (2011). *Some results on periodicity of difference equations*. In Proceedings of the International Workshop Future Directions in Difference Equations. Citeseer.

[10] Montgomery, Douglas, George Runger y Edmundo Urbina. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. McGraw-Hill.

[11] Navarrete, G. Alexandra. (2003). *Introducción a las ecuaciones en diferencias* [tesis de licenciatura]. Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

[12] Pérez, Ana Alconchel y Vigneron-Tenorio, Alberto. (2004). *Ecuaciones lineales en diferencias: aplicaciones a la empresa y la economía*. Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, vol. 16.

[13] Peribañez, Guillermo. (2014). *Introducción a las ecuaciones en diferencias y sus aplicaciones en la economía* [tesis de licenciatura]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza.

[14] Robinson, Clark. (2012). *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. American Mathematical Soc.

[15] Ruch, Dave. (2017). *Investigating difference equations*. Discrete Mathematics, vol. 1.

[16] Spivak, Michael. (2019). *Calculus*. Reverté.

[17] Tenorio Villalón, Angel F., Martín Caraballo, Ana M., Paralera Morales, Concepción y Contreras Rubio, Ignacio. (2013). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros*. Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 16:165-199.

[18] Tu, Pierre. (2012). *Dynamical systems: an introduction with applications in economics and biology*. Springer.

[19] Yamazaki, Fumio, Shinozuka, Masanobu y Dasgupta, Gautam. (1988). *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*, Journal of engeneering mechanics, vol. 8.

[20] Ecuaciones en Diferencias. `https://personal.us.es/pnadal/Informacion/leccion5ecdiferencias.pdf`. Consultado: 2022-08-08.

[21] Mathematics. Determinants. `https://www.masterjeeclasses.com/wp-content/uploads/2019/01/2.DeterminantsTheory.pdf`. Consultado: 2022-09-08.

[22] Sistemas Dinámicos Discretos. `https://matema.ujaen.es/jnavas/web_recursos/archivos/matriciales/sistemas%20dinamicos%20intro.pdf`. Consultado: 2022-08-20.