



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

**Modelación matemática de motor, diferencial electrónico y diseño
de un controlador PID para un prototipo de automóvil eléctrico
con cuatro motores en rueda**

TESIS

que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas
presenta

Carlos Acevedo González

Directora de tesis:
Dra. Silvia Reyes Mora
Codirector de tesis:
M. C. Juan Carlos Felipe Figueroa

Huajuapán de León, Oaxaca

Junio de 2023

A mi familia por todo el apoyo incondicional que me han brindado desde que tengo uso de razón.

A mi madre Petra, por darme siempre lo que me hacía falta aun cuando no lo tenía.

A mis abuelos, Isidro y Ana, por ser mis segundos padres y brindarme ese apoyo que solo ellos saben dar.

A mi hermano, José, por estar allí cuando necesitaba un respiro.

Y por último, a mi yo de niño: todo resultará bien.

Con este trabajo doy por concluido un logro más en esta vida y no hay mejor manera de celebrarlo que agradeciendo a las personas que me han llevado hasta donde estoy.

A mi madre Petra Josefina González Ramírez, por el apoyo y sacrificio que hace diariamente por la familia; gracias por darme la mejor herencia que es una buena educación.

A mi hermano José Antonio Acevedo González, gracias por apoyarme con tu comida cuando se me hacía tarde por estar ocupado con la universidad.

A mis abuelos Arcadio Isidro González Vázquez y Ana Ramírez Rodríguez, nunca dudaron de mí y no hay mayor satisfacción para mí que me puedan ver titulándome.

A la Dra. Silvia Reyes Mora por dirigir esta tesis, tenerme paciencia con los tiempos y confiar en mi forma de trabajo.

Al M. C. Juan Carlos Felipe Figueroa por participar en este trabajo de tesis como codirector y brindarme el conocimiento necesario para entender adecuadamente la parte eléctrica.

Al Dr. Sergio Palafox Delgado, gracias por leer y revisar esta tesis; además de con sus clases nació mi gusto por las ecuaciones diferenciales.

Al M. C. Juan Luis Hernández López, por leer y revisar a detalle este trabajo; gracias también por enseñarnos a mí y a mis compañeros en el primer semestre de la licenciatura.

Al Dr. Virgilio Vázquez Hipólito le agradezco el tiempo dedicado a revisar y leer esta tesis; también por sus clases de modelación matemática.

Al Dr. Franco Barragán Mendoza por darme la bienvenida a la carrera de la mejor manera.

A mi tío Isidro González Ramírez por confiar siempre en mí y darme apoyo cuando lo necesitaba.

A mi tía Norma Guadalupe González Ramírez, gracias por apoyarme en lo que hiciera falta e interesarse en mis avances.

A Reyna Guadalupe Palacios Cuevas, por ser una gran amiga dentro y fuera de la carrera, sólo tú sabes reírte de todo como yo.

A Yulisa de Jesús García Rojas, gracias por hacer la vida universitaria tan divertida y tener el mismo sentido del humor que yo.

A Jennifer Salazar Ramírez, por ser una buena amiga y por supuesto aportar una gran ayuda cuando no entendía cosas en varias materias.

A Verónica Morales Santos, gracias por ayudarme con varias tareas y por tu gran humor.

A Uriel David Ramírez Zurita, por ser un buen amigo y también confidente; algún día iremos todos a la playa.

A Gustavo Cortés Herrera e Itzel Ramírez Rafael, amigos gracias por estar allí, sí se pudo.

A David Germán Castro Ortíz, gracias por darme la bienvenida a la universidad y por estar allí cuando te necesitaba.

A Jersain Margarito Sánchez, por haberme motivado a ser mi mejor versión.

Oyó el motor del coche, adelereando de nuevo. Otra vez aquel horrible chirrido de la parte inferior del coche contra el cemento. Moochie se volvió, jadeando penosamente. Christine estaba dando la vuelta en la cuneta, y, al pasar ante él, vio. Vio.

No había nadie al volante.

Stephen King

**Modelación matemática de motor, diferencial
electrónico y diseño de un controlador PID
para un prototipo de automóvil eléctrico con
cuatro motores en rueda**

Carlos Acevedo González

Junio de 2023

Índice general

Presentación	XI
Introducción	XIII
1. Conceptos básicos	1
1.1. Funcionamiento de un vehículo eléctrico	1
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Conceptos de electrónica	5
1.4. Conceptos básicos de matemáticas	7
2. Modelo matemático del diferencial electrónico	19
2.1. Antecedentes del Diferencial electrónico	19
2.1.1. Tipos de diferenciales	20
2.2. Diferencial electrónico	22
2.2.1. Funcionamiento del diferencial	22
2.2.2. Modelo matemático del diferencial electrónico	24
3. Modelo matemático de un motor BLDC	31
3.1. Composición y funcionamiento de un motor BLDC	31
3.1.1. Composición	32
3.1.2. Funcionamiento	34
3.1.3. Tipos de motores BLDC	35
3.2. Modelo matemático de un motor BLDC	36
3.2.1. Modelo matemático de un motor DC	36
3.2.2. Modelo matemático de un motor BLDC	38
4. Diseño del controlador PID	47
4.1. Teoría de control	47
4.2. Tipos de control	52
4.2.1. Controles de dos posiciones (on-off)	53
4.2.2. Controles proporcionales (P)	53

4.2.3. Controles integrales (I)	54
4.2.4. Controles proporcionales e integrales (PI)	55
4.2.5. Controles proporcionales y derivativos (PD)	56
4.2.6. Controles proporcionales, integrales y derivativos (PID)	57
4.3. Estudio del control PID	58
4.3.1. Funcionamiento del controlador PID	59
4.3.2. Importancia de los parámetros en el controlador PID	60
4.4. Sintonización de un control PID	61
4.4.1. Métodos de Ziegler-Nichols	61
5. Relación entre el diferencial electrónico, motor BLDC y el control PID	73
5.1. Relación entre el diferencial electrónico, el motor y el controlador	73
5.2. Resultados analíticos	76
5.3. Resultados numéricos	84
5.4. Análisis del sistema de control	93
Conclusiones	103
Referencias	105

Presentación

El modelado y simulación de vehículos eléctricos ha atraído cada vez más la atención de los investigadores a medida que los vehículos eléctricos se convierten en alternativas prometedoras para reducir las emisiones contaminantes al ambiente con el uso de energía más limpia y sostenible en el transporte ([6]).

Existen numerosos paquetes de simulación y modelado para estudiar la operación de vehículos eléctricos e híbridos, las cuales varían dependiendo del tipo de propulsión usada: un solo motor acoplado a un diferencial para dar tracción a un par de ruedas del mismo eje; dos motores acoplados a un igual número de diferenciales que dan tracción independiente al conjunto de ruedas acopladas en el mismo eje, o propuestas incluso con cuatro motores, como la de este trabajo, en el que cada rueda lleva incorporado un motor eléctrico, denominado motor en rueda, produciendo una tracción 4X4 de manera totalmente independiente en cada rueda.

Evidentemente esto conlleva un trabajo adicional en el modelado y control para este tipo de configuración ya que las velocidades y los pares deben ser sincronizados en tiempo real ante las diferentes situaciones de manejo, ya sea en línea recta o en curvas, en pendientes ascendentes o descendentes, en caminos planos o sinuosos, etc. Sin embargo, también existen diversas ventajas como el hecho de no requerir sistemas mecánicos adicionales como diferenciales o sistemas de transmisión.

Los vehículos eléctricos con cuatro motores en rueda, cuentan con diversas partes, y entre las principales se encuentran los motores eléctricos, el diferencial electrónico, el controlador, la batería y el sistema de frenado. En este trabajo se considera el análisis y modelo matemático para un prototipo de automóvil eléctrico que cuenta con un motor eléctrico sin escobillas en cada rueda, un diferencial electrónico y un controlador proporcional integral derivativo.

La función del motor eléctrico es la de convertir energía eléctrica en energía mecánica mediante interacción electromagnética para hacer que el automóvil pueda moverse, esta función es primordial pues lleva a cabo el funcionamiento parcial y total del vehículo. En este trabajo se consideran motores BLDC (por sus siglas en inglés Brushless direct current) ya que tienen la ventaja de no producir rozamiento y desgaste como los motores tradicionales. Este motor trabaja mediante variadores de velocidad, que transforman la tensión de continua a alterna, para poder alimentar los bobinados del motor según la

posición del rotor, y lograr una secuencia de giro.

El diferencial es un mecanismo imprescindible para que un vehículo pueda tomar curvas, ya que permite que las ruedas giren a diferentes velocidades. Por otro lado, el controlador es un dispositivo electrónico en el que se pueden programar instrucciones para regular la potencia que fluye entre las baterías y el motor, así como la carga de las baterías, entre otras funciones. Aunque existen distintos tipos de control, en este proyecto se ha optado por utilizar el control PID. A pesar de que la batería y el frenado regenerativo son aspectos importantes en un vehículo eléctrico, en este caso solo se trabajará con el motor, el diferencial y el controlador.

Ahora bien, a lo largo de la tesis encontraremos cinco capítulos los cuales se centran en distintos ámbitos. A continuación veremos de qué habla cada uno de ellos.

En el primer capítulo se explica el funcionamiento de un vehículo eléctrico, se habla de los vehículos más recientes y de las principales partes que lo conforman. También se expone el planteamiento del problema y se muestran los conceptos básicos de electrónica y matemáticas que se ocuparán para el desarrollo de los modelos matemáticos en los capítulos siguientes.

En el segundo capítulo, se establecen los antecedentes del diferencial electrónico y se mencionan los diferenciales más utilizados en la actualidad; también se describe el funcionamiento del diferencial electrónico así como de la condición de Ackermann. Luego, se plantea el modelo matemático del diferencial electrónico donde se estudian los ángulos de dirección de las ruedas delanteras y al radio de giro del vehículo utilizando la geometría de Ackerman, además de analizar cómo se incorpora al diferencial electrónico y las consecuencias que esto conlleva a un vehículo eléctrico cuando este está en movimiento.

En el capítulo 3 se muestran la composición y el funcionamiento de un motor BLDC y se presentan dos tipos de motores sin escobillas. También se analiza el modelo matemático del motor CC, tanto la parte eléctrica como la parte mecánica para poder llegar al estudio del modelo matemático del motor BLDC y su solución.

En el cuarto capítulo nos enfocaremos en la teoría de control, se verán algunos conceptos clave así como el análisis de los sistemas de control de lazo cerrado y abierto. También se estudiarán los diversos tipos de control existentes como el control de dos posiciones, el control P, el control I, el control PI, el control PD para llegar al control PID. Para el diseño del controlador PID estudiaremos a fondo la teoría que se necesita para su construcción y repasaremos los conocimientos adquiridos a lo largo de la licenciatura en cuanto a ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y modelación matemática. Será en este capítulo también donde se realizará la sintonización del control PID mediante uno de los métodos de Ziegler-Nichols.

Finalmente, en el capítulo 5 comprenderemos cómo se vinculan los motores BLDC, el diferencial electrónico y el controlador PID para que la velocidad de cada rueda del automóvil eléctrico sea óptima. Luego de esto, revisaremos los resultados analíticos y numéricos correspondientes al sistema de control para concluir con el análisis de estabilidad de dicho sistema.

Introducción

Desde el principio de su existencia, la humanidad ha necesitado desplazarse o transportar sus objetos de un lugar a otro. Para atender esta necesidad, ha inventado distintos medios de transporte, e inclusive ha logrado llegar a la luna, a finales de la década de los sesenta del siglo pasado; sin embargo, para llegar a esto último fue indispensable un importante desarrollo y evolución en la física y a su vez, en las matemáticas.

Lo primero que uno podría pensar al oír la palabra transporte es en un automóvil, pues este es un vehículo que vemos todos los días al comenzar nuestra rutina diaria. Cuando uno necesita trasladarse a la escuela, al trabajo o a cualquier otro lugar que se encuentre a una distancia considerable de nuestro hogar hacemos uso de un taxi, o en otros casos de nuestros vehículos privados. No obstante, la mayoría de nosotros desconocemos cómo es el funcionamiento que tiene este para poder avanzar, desconocemos todo el trabajo que realiza el motor; la función del diferencial al momento que tomamos una curva en la carretera y más aún, cuál es la diferencia entre un vehículo ordinario contra un vehículo eléctrico.

Es indispensable tener claras estas nociones para poder desarrollar este trabajo de investigación. Por lo que, a continuación se expondrán brevemente los antecedentes y puntos importantes para el planteamiento del problema.

Fue entre los años 1832 y 1839 cuando el primer vehículo eléctrico fue inventado por el escocés Robert Davidson, incluso antes de que fueran desarrollados los motores de ciclos Diesel de los vehículos convencionales ([7]). Esta clase de vehículos se continuó implementando a lo largo del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Sin embargo, debido a las limitaciones tecnológicas de los sistemas de almacenamiento de energía y el posterior progreso de los motores de combustión interna, los vehículos eléctricos pausaron su desarrollo.

Hoy en día, la gran concentración de gases de efecto invernadero provoca graves consecuencias en la calidad del aire de las ciudades; esto conlleva a sufrir problemas de salud en un futuro cercano. Es por esto, además de situaciones con recursos no renovables como lo es el petróleo, que varias instituciones de los gobiernos de todo el mundo busquen una alternativa económica y viable para la movilidad, eliminando la propagación de gases nocivos. Así es como surge nuevamente la opción de los vehículos eléctricos.

Ahora bien, así como los seres humanos necesitamos de un corazón para estar vivos y

poder realizar cualquier acción, los vehículos también necesitan de uno. En este caso, una analogía que podríamos considerar válida sería la de referirnos al corazón de un automóvil como su motor, pues esta es una máquina que se encarga de convertir el calor producido por la explosión (en el caso de los de gasolina) o la combustión (en el caso de los diésel) del combustible en un movimiento con suficiente fuerza como para que las ruedas giren y el vehículo pueda desplazarse; además, ambos son fuentes de alimentación que mantienen cuerpos en movimiento.

De esta forma, hemos de enfocarnos en la historia del motor de un automóvil y cómo este ha evolucionado a lo largo de los años; desde los comienzos, con la máquina de vapor y sus posteriores modificaciones por el escocés James Watt ([2]), pasando por el novedoso motor de combustión interna de Karl Benz y posteriormente mejorado con la invención del motor diésel a finales del siglo XIX. A comienzos del siglo XX, Luis Renault tuvo la idea de sobrealimentar en aire un motor y esto dio paso a su vez al turbo (o motor sobrealimentado por turbo) ([31]). Años más tarde, se implementaron los sistemas de inyección Common Rail, que normalmente son los que los vehículos utilizan hoy en día; no obstante, en la actualidad se nos presenta una novedosa y ecológica alternativa: el motor eléctrico.

Para dar principio, los motores eléctricos son máquinas eléctricas giratorias que procesan la energía eléctrica hasta convertirla en energía mecánica; dado que cuenta con un gran número de ventajas tales como la facilidad de manejo, ausencia de emisión de gases, podemos ver cómo poco a poco comienza a reemplazar a otras formas de energía en diversos ámbitos; tenemos a la fecha una gran variedad de motores eléctricos, sin embargo, los que requerirán toda nuestra atención son los motores BLDC.

Estos tienen un papel fundamental en la actualidad, pues son utilizados ampliamente en gran variedad de áreas: la industria del automóvil, la industria aeroespacial, la tecnología médica, la robótica o la comunicación, entre otras. Estas aplicaciones requieren motores con un mayor rendimiento con cada día que pasa. Podemos ver que los motores BLDC permiten cubrir la mayoría de estas necesidades, presentando una alta fiabilidad y eficiencia; su funcionamiento viene a ser un tanto distinto a cualquier otro motor, pues este consiste en que, al instante de energizar dos polos de las tres bobinas que contiene, induzca un campo magnético en las mismas para poder así ser repelido por los imanes que tiene en su interior. Al momento de girar el rotor hacia una dirección, es al mismo tiempo repelido por un imán y atraído por otro; es aquí cuando se induce potencial eléctrico en otra terminal para librarse de una de las anteriormente conectadas.

Ya que conocemos algunas preliminares de estos motores, podemos hacer una comparativa con los motores CC con escobillas: los motores BLDC tienen la principal característica de que no utilizan escobillas para la conmutación en la transmisión de energía; a diferencia de los motores CC que necesitan de estas en los cuales se disminuye el rendimiento, ocasionan rozamiento, emanan calor, son bastante ruidosos y demandan de una sustitución periódica; es por esto que requieren un mantenimiento mayor y más costoso.

Para centrarnos en la modelación matemática del motor BLDC se requiere un conocimiento físico del sistema, unidades de las constantes que aparezcan en el modelo, selección adecuada de las variables de estado y conocimientos de desarrollo de ecuaciones

diferenciales utilizando la transformada de Laplace.

En segundo lugar, tenemos al diferencial; el cual es un dispositivo mecánico cuya función es la de permitir que las llantas de la izquierda y de la derecha giren a velocidades distintas dependiendo de la curva que tome el automóvil. Los antecedentes del diferencial datan de cientos de años atrás. Antiguamente las ruedas de los coches estaban montadas directamente sobre el eje, lo cual no permitía que estos giraran de la mejor manera; es por esto que se vio la necesidad de implementar un sistema que ayudara a la maniobrabilidad del vehículo en todo tipo de circunstancia y terreno, es así que el alemán Karl Benz, creó el primer sistema de diferencial en el año de 1878 ([30]).

Desde aquella época hasta la actualidad, los sistemas de diferenciales han ido evolucionando para conseguir que se adapten a las diferentes condiciones de los terrenos a transitar, para poder lograr esto se han ido implementando mecanismos de apoyo a la labor que realiza este mecanismo; un ejemplo de esto es que, en algunos casos se han colocado implementos que permitan bloquear por momentos la acción del diferencial para conseguir que todo el par generado por el motor sea transmitido a las dos ruedas por igual.

Finalmente, este trabajo se concentra en el diseño de un controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) para cada motor de las cuatro ruedas del prototipo del vehículo eléctrico.

La historia de los controladores del pasado da inicio en el siglo I, con el ingeniero y matemático griego, Herón de Alejandría, quien creó un dispositivo para la apertura de puertas en un templo ([1]). La señal de mando del sistema comenzaba cuando el fuego era encendido, el aire se calentaba, dilatándose y conducía la traslación del agua de un tanque de depósito a una cuba. Cuando la cuba aumentaba de peso, esta descendía y abría la puerta del altar gracias a una cuerda; la puerta se cerraba apagando el fuego.

Otras etapas relevantes en el desarrollo de la teoría de control son debido a Nicolas Minorsky; quien trabajó en centrales automáticas de dirección en barcos y mostró cómo se podía determinar la estabilidad a partir de ecuaciones diferenciales ([27]).

En las décadas de los cuarenta y cincuenta, una gran cantidad de sistemas de control industrial utilizaban controladores PID para el control de la temperatura, presión, velocidad, entre otras; no obstante, en los años cuarenta, Nichols y Ziegler definieron reglas para concordar controladores PID, es así que se crean las llamadas reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. Concorde las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más y más complicadas, la explicación de un sistema de control moderno necesita de una mayor cantidad de ecuaciones.

Conforme pasaban los años, se investigaron a profundidad el control óptimo tanto de sistemas estocásticos y de sistemas determinísticos. Desde la década de los ochenta hasta la de los noventa, los avances en la teoría de control moderna se basaron casi por completo en el control robusto.

En la actualidad, la teoría de control estudia el análisis en el dominio temporal de los sistemas de ecuaciones diferenciales. La teoría de control moderna ha ayudado a facilitar el diseño de los sistemas de control; sin embargo, la solidez del sistema está sujeto al error entre el modelo y su procedimiento ([29]).

Un sistema de control PID cuenta con un lazo de retroalimentación que permite regular la aceleración, velocidad, flujo, presión además de otras variables en un proceso general, como su nombre lo indica, se compone de tres parámetros diferentes: el valor proporcional que depende del error presente; el valor integral, sujeto a errores pasados y el valor derivativo que pronostica el error futuro.

Ahora bien, la teoría de control desde el punto de vista matemático se encarga del control de sistemas dinámicos en procesos y máquinas. Así, su objetivo es implementar un modelo que mande las salidas del sistema a un estado requerido y consolida un nivel de estabilidad de control. Es aquí donde entra en juego el controlador, pues este supervisa la variable de proceso controlada y la compara con la referencia. Un controlador PID se conoce por tener tres valores: Proporcional, Integral y Derivativo. La suma de estos tres es usada para ajustar el proceso de un elemento de control, en este caso la velocidad que exigimos a las ruedas del vehículo. La parte proporcional se basa en tener el producto entre la señal de error y una constante proporcional para conseguir que el error en estado estacionario sea lo más cercano a cero; mientras que la parte integral se encarga de reducir y suprimir el error en dicho estado, se enfoca en los valores pasados del error y los integra a lo largo del tiempo. Por último, tener el valor derivativo es tener una mejor valoración de la tendencia futura del error basada en su tasa de cambio actual.

Después de haber hablado del motor, el diferencial electrónico y el controlador PID, es importante mencionar a la batería de un automóvil; esta es sumamente relevante, pues es la encargada de brindar energía para su movimiento, por lo que no debemos olvidarnos de ella en este trabajo de investigación. En particular, en un vehículo eléctrico la batería puede recargarse enchufándose a la red mientras este esté estacionado.

A su vez, la batería puede recargarse gracias a que los autos eléctricos cuentan sobre todo con un motor eléctrico unido al eje de las cuatro ruedas para generar movimiento en las mismas o para transformar la energía cinética de las ruedas en energía eléctrica mediante el frenado regenerativo.

El freno regenerativo está basado en el principio de que un motor eléctrico puede ser utilizado como generador eléctrico. El motor eléctrico de tracción se reconecta como generador durante el frenado y las terminales de alimentación se convierten en suministradoras de energía la cual se conduce hacia una carga eléctrica; es esta carga la que brinda el efecto de frenado.

En esta tesis no se alcanzarán a abordar los temas de la batería y el freno regenerativo, sin embargo, este queda como un problema abierto.

En conclusión, con estos tres factores ya mencionados podemos relacionarlos entre sí para poder trabajar con un prototipo de automóvil con cuatro motores en rueda y hacer que su funcionamiento sea óptimo.

Modelación matemática de motor, diferencial
electrónico y diseño de un controlador PID
para un prototipo de automóvil eléctrico con
cuatro motores en rueda

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este primer capítulo se presentan los conceptos básicos de matemáticas y electrónica que utilizaremos a lo largo del desarrollo de esta tesis, en cuanto a electrónica, se estudian conceptos y definiciones básicas como el de inductancia, resistencia y fuerza contraelectromotriz. Por otro lado, en la parte matemática se revisan algunos temas de estabilidad de sistemas de control, transformada de Laplace, funciones de transferencia, entre otros. Se dan a conocer los tipos de sistemas dinámicos que revisaremos y se estudia la relación de estos con la modelación matemática de cada uno de los elementos de un vehículo eléctrico.

1.1. Funcionamiento de un vehículo eléctrico

Fue entre los años 1832 y 1839 cuando el escocés Robert Davidson inventó el primer vehículo eléctrico, esto incluso con tiempo de antelación de que fueran desarrollados los motores de ciclos diesel de los vehículos convencionales ([7]). Esta clase de vehículos se continuó implementando a lo largo del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Sin embargo, debido a las limitaciones tecnológicas de los sistemas de almacenamiento de energía y el posterior progreso de los motores de combustión interna, los vehículos eléctricos pausaron su desarrollo.

Entre los vehículos eléctricos más actuales tenemos a los siguientes:

- **Vehículos híbridos “ligeros”:**

También conocidos como híbridos paralelo. En estos, el motor de combustión deja de funcionar cuando el vehículo se detiene y, brinda energía adicional cuando se acelera. El consumo de gasolina disminuye aproximadamente en un 10 % en comparación con los vehículos de combustión ([23]).

- **Vehículos híbridos:**

Al igual que los vehículos híbridos ligeros, una de sus fuentes de energía es el combustible. Este vehículo cuenta con una batería que, en lugar de recargarse mediante

la corriente eléctrica, utilizando la energía generada por el motor y el frenado regenerativo, provoca que la batería funcione alternamente en ciclos de carga y descarga. La empresa Porsche, a inicios del siglo XX, construyó un vehículo eléctrico que utilizaba un motor de combustión interna para ejecutar un generador eléctrico, que a su vez, encendía los motores eléctricos en cada rueda; este vehículo lograba recorrer cerca de aproximadamente 65 km ([34]).

■ **Vehículos eléctricos de batería:**

Estos vehículos son impulsados por un motor eléctrico, cuya fuente de energía proviene únicamente de la batería, la cual se carga a través de la red eléctrica u otras fuentes de energía como el frenado regenerativo.

La mecánica y el funcionamiento de un vehículo eléctrico son mucho más sencillos que en los autos de combustión, debido a que utilizan uno o varios motores eléctricos ensamblados mecánicamente a los ejes del vehículo; el tamaño del motor también se reduce considerablemente comparándolo con los motores de combustión.

Un vehículo eléctrico, específicamente un PEV (Vehículo eléctrico enchufable) es alimentado con electricidad almacenada normalmente en baterías recargables y es impulsado mediante uno o más motores eléctricos.

En la actualidad, la mayor parte de las empresas e industrias comienzan a tomar conciencia de la necesidad de cuidar el medio ambiente, por ello intentan trabajar con modelos cada vez más sostenibles desde un punto de vista ecológico. Es por eso que ha habido un realce en los últimos años en cuanto al estudio e implementación de los vehículos eléctricos con la finalidad de que algún día estos sustituyan a los automóviles convencionales. En la Figura 1.1 podemos ver al modelo JAC E10X 2022, se trata del vehículo eléctrico más asequible del mercado mexicano.



Figura 1.1: Vehículo eléctrico modelo: JAC E10X 2022 ([32]).

Los vehículos eléctricos cuentan con diversas partes, sin embargo, mencionaremos las que son fundamentales y las cuales tendrán una mayor significancia en el desarrollo de la tesis.

- **Motor eléctrico**

Los vehículos eléctricos necesitan un motor eléctrico que convierta la energía eléctrica en mecánica para hacer que el automóvil pueda moverse, el papel que juegan los motores eléctricos es primordial pues lleva a cabo el funcionamiento parcial del vehículo al darle movilidad.

En esta tesis estamos considerando que el prototipo de automóvil cuenta con motores BLDC en cada rueda, el cual presenta una serie de ventajas respecto a otros tipos, puesto que se desarrolló sobre la base de los motores CC con escobillas.

- **Diferencial electrónico**

El diferencial es un mecanismo que permite que las ruedas giren a diferentes velocidades; esto es necesario para permitir que el vehículo haga giros hacia la izquierda o derecha. Por lo general, en un automóvil a combustión, las ruedas son manipuladas por un diferencial mecánico, que permite cambiar la velocidad de las ruedas y, por lo tanto, evita que el vehículo derrape al tomar una curva.

Este tipo de transmisión manual no sería efectivo en un auto eléctrico porque sería demasiado pesado y con esas condiciones la batería del vehículo no duraría mucho. En discrepancia con el diferencial mecánico, un diferencial electrónico es un dispositivo especial cuya finalidad es sustituir instrumentos o mecanismos pesados que dificulten la movilidad de un vehículo eléctrico.

El diferencial está construido a partir de componentes electrónicos semiconductores que se pueden conectar a los motores del vehículo eléctrico, este hecho ofrece grandes ventajas puesto que las ruedas del automóvil se pueden controlar de manera independiente y de esta forma, proporcionar mecanismos de seguridad cuando se conduce en condiciones severas como lluvia, lodo, nieve, por mencionar algunas.

- **Controlador**

Un vehículo eléctrico necesita una unidad o dispositivo para controlar algunas funciones del vehículo, por ejemplo la salida del motor, la carga de las baterías, etc. Este dispositivo es electrónico y recibe el nombre de controlador, en el cual se programan las instrucciones adecuadas para poder controlar, por ejemplo, la potencia entre las baterías y el motor.

En nuestro caso, el controlador del motor será el encargado de controlar la cantidad de energía que se brindará a los motores BLDC en función del giro del vehículo y la velocidad lineal a la que va este; cabe aclarar que los motores estarán situados en cada una de las ruedas del vehículo eléctrico.

En este trabajo se hablará de diferentes tipos de control pero en particular del control PID.

- **Batería**

Es un acumulador de energía donde se almacena electricidad que será transmitida al motor eléctrico para el funcionamiento del vehículo. Mientras mayor sea la capacidad de la batería, mayor es el alcance del vehículo.

La batería es el principal medio a través del cual se alimenta todo el vehículo eléctrico, es por esto que en los autos que tienen un motor eléctrico de corriente continua la batería va directamente conectada al motor. Por otra parte, en los vehículos eléctricos que funcionan con motores eléctricos de corriente alterna, la batería está conectada a un inversor, este es un equipo que transforma la corriente continua en corriente alterna.

El prototipo de vehículo que se está considerando, cuenta con seis baterías de plomo de ciclado profundo de $12V$ y $80Ah$.

- **Freno regenerativo**

Es un dispositivo que permite reducir la velocidad de un vehículo convirtiendo una parte de su energía cinética en energía eléctrica, la cual es almacenada en una batería para un uso posterior. En vehículos de baterías y vehículos híbridos, la energía es almacenada en un banco de baterías o un banco de condensadores para un uso posterior.

En esta tesis trabajaremos con el modelo del motor, el diferencial electrónico y el controlador PID, y mostraremos las relaciones entre ellos, pero no analizaremos el freno regenerativo ni la gestión de las baterías, debido a que su análisis requiere más tiempo, y escapa a los objetivos planteados de esta tesis. De esta forma, una revisión que englobe los elementos restantes queda como un problema pendiente.

1.2. Planteamiento del problema

Normalmente, cuando vamos en un vehículo y este debe tomar una curva, nosotros como pasajeros no notamos los procesos que suceden debajo de nuestros asientos. Podemos asumir que las cuatro ruedas van a la misma velocidad o, que en el momento del giro, estas ruedas giran al mismo ángulo o que mantienen una aceleración similar; sin embargo, esto es completamente erróneo pues al momento de girar en una curva las velocidades y los ángulos a los que giran las ruedas son todos distintos entre sí. A diferencia de un auto tradicional, donde el motor se encuentra debajo del capó, en el automóvil eléctrico planteado en esta tesis tenemos un motor eléctrico y un controlador PID en cada rueda, haciendo un total de cuatro.

Por otra parte, sabemos que los motores BLDC son utilizados ampliamente en áreas industriales tales como del automóvil, aeroespacial, robótica, entre otras, ya que requieren motores con un mayor rendimiento que cubra la mayoría de sus necesidades presentando una alta fiabilidad y eficiencia; tales características son cumplidas por los motores BLDC.

En el prototipo de vehículo eléctrico los cuatro motores BLDC serán manipulados por el controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo); estos motores cuentan con sensores

de efecto Hall que se usan para determinar la secuencia de activación de las bobinas de los mismos. La velocidad angular de las ruedas jugará un rol muy importante pues esta será constantemente comparada con la velocidad angular de referencia que nos dará el diferencial electrónico gracias a la velocidad y al ángulo de giro que el usuario aporte a través del pedal del acelerador y el volante. El controlador de cada rueda, provocará que cada rueda gire a una velocidad adecuada.

Por otro lado, comprender la estructura del motor, su forma de operación y su modelo matemático es indispensable para el diseño del sistema de control PID.

1.3. Conceptos de electrónica

Para poder analizar y comprender de forma adecuada el modelo matemático del motor BLDC es indispensable tener un ligero acercamiento a la electrónica. En primer lugar, se establecerán algunas definiciones importantes de conceptos básicos de la parte eléctrica, además de leyes fundamentales para poder elaborar los modelos matemáticos del motor eléctrico y del diferencial electrónico que se pueden encontrar en [6] y [33].

La **inductancia** (L), es una propiedad de las bobinas eléctricas (cable en forma de espiral) gracias a la cual podemos conocer cuánto se opone la bobina a un cambio en la corriente. Esta depende del número de espiras y de la longitud de la bobina.

La **inductancia mutua** (M), es la proporción entre la fuerza electromotriz generada por una primer bobina, y el cambio en la corriente en la segunda bobina que origina esa fuerza electromotriz.

La **resistencia** (R), es la característica física que mide la dificultad que tiene un conductor para que pase corriente a través de este.

La **fuerza contraelectromotriz** (e), es la fuerza electromotriz que resulta cuando los conductores de la armadura se mueven a través del flujo de campo establecido por la corriente del campo.

Ahora bien, en nuestro caso, una vez que comienza a circular corriente por las bobinas del rotor se produce una acción dinámica entre la corriente y el campo magnético de las expansiones polares, haciendo que el motor comience a funcionar. Sin embargo, en cuanto los conductores del rotor se mueven, cortan las líneas de fuerza del campo y por tal motivo se inducirá una fuerza electromotriz en ellos. De acuerdo con la Ley de Lenz, la fuerza electromotriz tiende a oponerse a la causa que la genera, es decir, que en el caso que nos ocupa tenderá a frenar el rotor. De aquí que el sentido de esta fuerza será opuesto al de la corriente principal y recibe el nombre de fuerza contraelectromotriz también conocida como Back E.M.F.

Ley de Lenz

La corriente inducida en una espira está en la dirección donde se crea un campo magnético, el cual se opone al cambio del flujo magnético en el área encerrada por el circuito.

Ley de tensión de Kirchhoff

La suma algebraica de caídas de voltaje alrededor de un camino cerrado es cero, en cualquier instante de tiempo.

En cuanto a la parte mecánica de este trabajo de tesis se tienen las siguientes leyes y conceptos obtenidos de [10].

El **torque eléctrico** (T_e), es la medida de fuerza física necesaria que se ha de aplicar a un eje para hacerlo girar a una determinada velocidad.

El **torque de carga** (T_L), es una fuerza que se manifiesta en el eje del motor e intenta frenarlo. Para acelerar, la fuerza del motor debe ser más fuerte que la fuerza del torque de carga.

La **inercia** (J), es la propiedad que poseen los objetos de oponerse a cambios de su estado en reposo o en movimiento en el que se encuentran.

La **velocidad angular** (ω), es la rapidez con la que cambia de posición un cuerpo en un movimiento circular; es decir, la velocidad a la que recorre el ángulo barrido por el radio con respecto al tiempo.

Segunda ley de Newton

La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él e inversamente proporcional a la masa del objeto; podemos notar que de esta ley se desprende la segunda ley de Newton para la rotación que se enuncia a continuación.

Segunda ley de Newton para la rotación

La aceleración angular de un cuerpo rígido es directamente proporcional a la suma de los torques que actúan sobre él e inversamente proporcional a la inercia del objeto, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = I\alpha,$$

donde:

τ_i son los diferentes torques que actúan sobre el cuerpo rígido, I es la inercia y α es la aceleración angular.

1.4. Conceptos básicos de matemáticas

De igual forma que con la parte electrónica, a continuación se abordará una sección sobre conceptos de matemáticas que se necesitan para el trabajo de tesis; se definen algunos conceptos, teoremas y definiciones que nos ayudarán en la parte analítica. Cabe mencionar que se revisará teoría estudiada a lo largo de la licenciatura, como la transformada de Laplace, así como temas que no se vieron en la carrera como los relacionados a funciones de transferencia y algunos criterios de estabilidad que se ocuparán en los últimos capítulos de este documento.

Definición 1.4.1. Un **sistema invariante en el tiempo** es aquel que cuando provocamos un corrimiento en el tiempo en la señal de entrada, entonces se tendrá como consecuencia el mismo deslizamiento en la señal de salida ([35]).

Definición 1.4.2. Un **sistema lineal invariante en el tiempo** es aquel que cumple con ambas condiciones, es decir, que es lineal e invariante en el tiempo ([35]).

Como ejemplo tenemos a:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n x^{(n)}(t) + b_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 x(t),$$

donde $t \in [c, d] \subset \mathbb{R}$, a_i, b_i son constantes reales con a_n y b_n distintas de cero, $y(t)$ y $x(t)$ son la salida y entrada del sistema, respectivamente.

Transformada de Laplace

Definición 1.4.3. Sea $f(t)$ una función definida para $t > 0$. La **transformada de Laplace** de $f(t)$, se define y denota como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \text{si la integral converge.}$$

En caso de que la integral no converja, se dice que la transformada de Laplace no existe.

Propiedades más importantes de la transformada de Laplace

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones cuyas transformadas de Laplace son $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente, entonces se cumplen las siguientes propiedades ([37]):

- Linealidad
 $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s).$
- Primer teorema de traslación
 $\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s - a).$

- Teorema de la convolución
 $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$
- Teorema de la transformada de la derivada
 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$
- Teorema de la transformada de la integral
 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}.$
- Multiplicación por t^n
 $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s),$ donde $n \in \mathbb{N}.$
- Transformada de una función escalón unitario H
 $\mathcal{L}\{H(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$

Transformada inversa de Laplace

Se sabe que la definición de la transformada inversa de Laplace de una función, se expresa mediante la teoría de variable compleja ([21]); sin embargo, en esta tesis trabajaremos con la transformada inversa de Laplace, usando la propiedad de la composición que debe satisfacer. Así, si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es $F(s)$, entonces $f(t)$ recibe el nombre de **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y se expresa por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

donde \mathcal{L}^{-1} denota el operador transformada inversa de Laplace.

Propiedades más importantes de la transformada inversa de Laplace

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $F(s)$ y $G(s)$ las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Linealidad
 $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(t) + bg(t).$
- Primera propiedad de traslación
 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = f(t)e^{at}.$
- Transformada inversa del producto
 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t).$
- Transformada inversa de la derivada
 $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t).$
- Multiplicación por s
 $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t),$ si $f(0) = 0.$

- Transformada inversa de $\frac{e^{-as}}{s}$
 $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{s} \right\} = H(t - a)$, donde $H(t)$ es la función escalón unitario.

Un teorema de mucha utilidad en el campo de la teoría de control, para estudiar la estabilidad o el comportamiento de las funciones de transferencia es el siguiente.

Teorema 1.4.4. (Teorema del valor final) Sea $f(t)$ una función continua y derivable en $[0, \infty)$, si $f(t)$ y $f'(t)$ tienen transformada de Laplace, entonces se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

Demostración. Usando el teorema de la transformada de Laplace de una derivada se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt. \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Posteriormente, aplicando límite cuando s tiende a cero en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0). \quad (1.1)$$

Luego, por la definición de integral impropia se sigue que la integral en la ecuación (1.1) cumple:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f'(t)e^{-st} dt \right). \quad (1.2)$$

Además, puesto que $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe, entonces se puede ingresar el límite dentro de la integral en la ecuación (1.2); de modo que:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^N \lim_{s \rightarrow 0} f'(t)e^{-st} dt \right). \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^N f'(t) dt \right). \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) - f(0). \end{aligned}$$

Puesto que la variable N es muda se tiene que podemos cambiarla por t , de esta forma

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0).$$

Sustituyendo en la ecuación (1.1), se obtiene la conclusión del teorema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

■

Este teorema es importante pues nos ayuda a conocer el valor en el que $f(t)$ llega a un estado estacionario, es decir cuando las derivadas se vuelven cero. Por otra parte, este teorema es útil pues nos permite encontrar el valor final de una función $f(t)$ directamente de su transformada de Laplace $F(s)$ sin necesidad de encontrar la transformada inversa de Laplace de $F(s)$.

Ya que hemos recordado la teoría de transformadas de Laplace podemos acercarnos a las funciones de transferencia, pues estas serán de gran ayuda al momento de la resolución del modelo matemático del motor BLDC y el control.

Funciones de transferencia

Definición 1.4.5. La **función de transferencia** de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la función de salida y la transformada de Laplace de la función de entrada, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Por ejemplo, consideremos al siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 x(t),$$

donde y es la función incógnita, llamada función de salida del sistema y x es una función conocida, llamada función de entrada del sistema. La función de transferencia $C(s)$ de este sistema es el cociente de las transformadas de Laplace cuando todas las condiciones iniciales son cero; así, al tomar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior tenemos:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s);$$

factorizando a $Y(s)$ en la parte izquierda de la igualdad y a $X(s)$ en la derecha se tiene:

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = X(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0).$$

Posteriormente, dividiendo en ambas partes de la igualdad por $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ y $X(s)$, se obtiene la función de transferencia:

$$C(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (1.3)$$

Cuando la potencia más alta de s en la función $X(s)$ es igual a n , entonces el sistema se denomina sistema de orden n -ésimo.

Ceros y polos de una función de transferencia

Si, en la función de transferencia dada en (1.3), el grado de $X(s)$ es mayor que el grado de $Y(s)$, entonces a las raíces del polinomio $X(s)$ se les llama **polos** mientras que las raíces de $Y(s)$ se les llama **ceros** del sistema.

Estabilidad en sistemas de control

El objetivo de un controlador, consiste en estabilizar al sistema; así, cuando un sistema reacciona a variaciones finitas de sus señales de entrada con una variación finita se dice que es estable. Tomando un sistema lineal e invariante en el tiempo, la inestabilidad del sistema ocasionará una salida oscilatoria donde la amplitud aumentará exponencialmente o bien, una respuesta que aumenta o disminuye de forma exponencial. Si llegase a ocurrir algo de esta índole el sistema no responderá adecuadamente a las acciones de control, por lo que se dirá que el sistema se ha salido de control; teniendo como consecuencias fallos peligrosos e indeseables, es por eso que viene la importancia de estudiar la estabilidad.

Por otra parte, recordaremos la siguiente definición de punto estable, inestable y asintóticamente estable que se vio a lo largo de la licenciatura.

Consideremos el sistema estacionario $\dot{x} = f(x)$, donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz con un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de la ecuación anterior, es decir, $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 1.4.6. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es,

- **estable**, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ y si para cualquier trayectoria $x(t)$ con $x(0) = x_0$, se cumple:
si $\|x(0)\| < \delta$, entonces

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- **inestable**, si no es estable.
- **asintóticamente estable**, si es estable y δ puede elegirse tal que
si $\|x(0)\| < \delta$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

En el siguiente apartado se verán procedimientos para determinar la estabilidad de un sistema de control mediante diversas formas.

Estabilidad del sistema mediante el análisis de la función de transferencia

Los ceros y polos pueden ser graficados en el plano complejo; y si ocurre que, al menos un polo se encuentra en el semiplano derecho, entonces tendremos que el sistema es inestable. Ahora, si cuando graficamos nos encontramos con que todos los polos se hallan en la parte del semiplano izquierdo tendremos un sistema estable.

Para ilustrar lo anteriormente dicho, podemos ver en la Figura ?? un ejemplo del comportamiento de los polos de una función de transferencia arbitraria $C_1(s)$; en ella podemos apreciar que la función $X(s)$ del denominador es un polinomio de al menos tercer grado cuyas raíces tienen su parte real negativa.

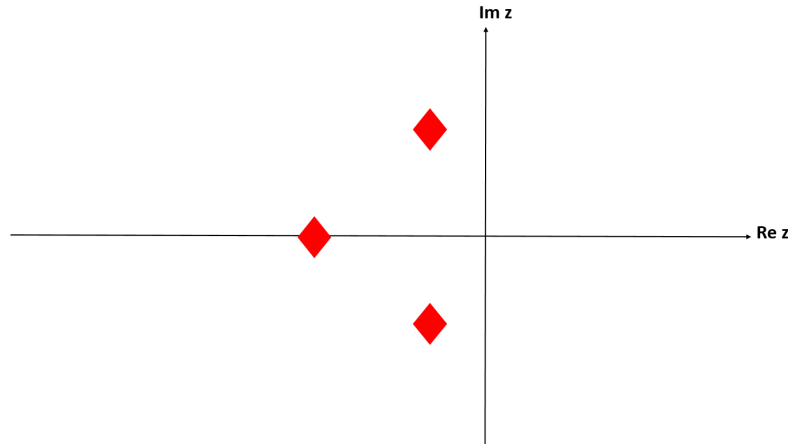


Figura 1.2: Sistema estable en el plano complejo donde se representan los polos de la función de transferencia $C_1(s)$.

Por lo que se refiere a la Figura ??, esta ilustra un nuevo ejemplo de una función de transferencia $C_2(s)$ la cual tiene como denominador un polinomio de grado mayor o igual a cinco; sin embargo, este polinomio tiene tres raíces con parte real negativa y las restantes dos con su parte real positiva lo que convierte al sistema en inestable.

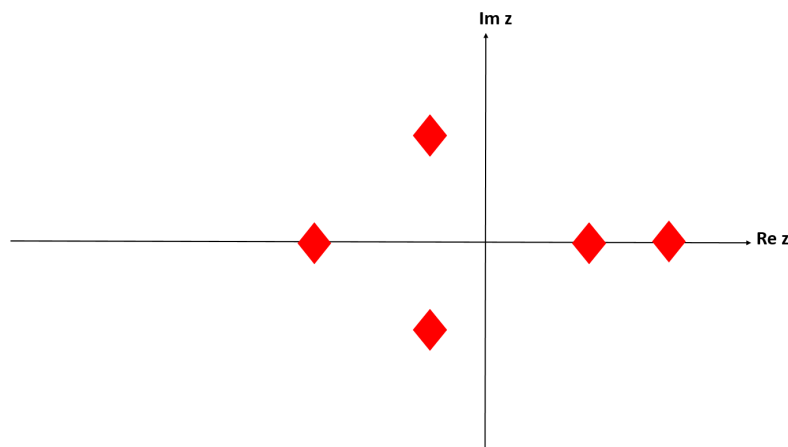


Figura 1.3: Sistema inestable en el plano complejo donde se representan los polos de la función de transferencia $C_2(s)$.

Para comprender mejor lo anteriormente dicho, vale la pena revisar la teoría de esta-

bilidad de Routh-Hurwitz.

Definición 1.4.7. Un **polinomio Hurwitz** es aquel polinomio con coeficientes reales en el cual todas sus raíces tienen parte real negativa, es decir, gráficamente las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Dicho esto, se iniciará con revisar el caso de los polinomios de grado dos.

Teorema 1.4.8. Sea $p(t) = t^2 + at + b$ un polinomio de segundo grado con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $p(t)$ es Hurwitz si y sólo si $a > 0$ y $b > 0$.

Demostración. Primero supongamos que $p(t)$ es Hurwitz y queremos ver que $a > 0$ y $b > 0$.

Del teorema fundamental del álgebra sabemos que

$$p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};$$

luego, desarrollando el producto se sigue que:

$$p(t) = t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 = t^2 + at + b, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};$$

donde

$$a = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad b = \lambda_1\lambda_2.$$

Caso 1. Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, como $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que ambos números son conjugados, así

$$\lambda_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = a_1 - ib_1 \quad \text{con} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Dado que $p(t)$ es Hurwitz se tiene que $Re(\lambda_1) < 0$ y $Re(\lambda_2) < 0$, por lo cual:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = -(a_1 + ib_1 + a_1 - ib_1) = -2a_1 = a > 0,$$

$$\text{y} \quad \lambda_1\lambda_2 = (a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1) = a_1^2 + b_1^2 = b > 0.$$

Por tanto $a > 0$ y $b > 0$, que es lo que se quería demostrar.

Caso 2. Ahora supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Debido a que $p(t)$ es Hurwitz, entonces $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. Luego se tiene que

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = a > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1\lambda_2 = b > 0;$$

por lo tanto se concluye que $a > 0$ y $b > 0$, que es lo que se quería demostrar.

Ahora vamos a demostrar la otra implicación. Para ello, supongamos que $a > 0$ y $b > 0$ para llegar a que $p(t)$ es Hurwitz.

Caso 1. Nuevamente supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. A partir de la forma de λ_1 y λ_2 dada en (1.4), se tiene que:

$$a = -2a_1,$$

pero, por hipótesis, sabemos que $a > 0$, por lo cual

$$a_1 < 0.$$

Puesto que λ_1 y λ_2 son conjugados, y se probó que la parte real de λ_1 y λ_2 es negativa; por tanto, $p(t)$ es Hurwitz.

Caso 2. Supongamos ahora que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Por la hipótesis se sabe que: $a > 0$ y $b > 0$, pero ya habíamos mostrado que $b = \lambda_1 \lambda_2$ luego, se sigue que λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo. Ahora bien, por la hipótesis también se tiene que $a = -(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$.

Por lo tanto, para que la suma de dos números del mismo signo sea negativa, es necesario que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ dando como resultado que $p(t)$ sea Hurwitz, que es lo que se quería demostrar. ■

Una forma de saber si un polinomio no es Hurwitz, es observando el signo de sus coeficientes, así como lo indica la contrarecíproca del siguiente teorema.

Teorema 1.4.9. Si $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ es un polinomio Hurwitz de grado n entonces todos sus coeficientes son del mismo signo.

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra se tiene que $p(t)$ se puede escribir como:

$$p(t) = a_n(t + \alpha_1) \dots (t + \alpha_s)(t^2 + \beta_1 t + \gamma_1) \dots (t^2 + \beta_r t + \gamma_r), \quad \alpha_j, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}.$$

Esta descomposición está dada de forma que los valores de $-\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, s$ son las raíces reales de $p(t)$, mientras que los polinomios de la forma $t^2 + \beta_k t + \gamma_k$, $k = 1, 2, \dots, r$; son los que tienen raíces complejas.

Dado que $p(t)$ es Hurwitz, por definición sus raíces tienen parte real negativa, es por esto que $\alpha_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, s$.

Por otra parte, analizando los polinomios cuadráticos que conforman a $p(t)$ se tiene que sus raíces son de la forma $\lambda_1 = -c_k + id_k$ y $\lambda_2 = -c_k - id_k$ con $c_k > 0$ puesto que $p(t)$ es Hurwitz. De esta forma, un polinomio de segundo grado en la factorización de $p(t)$ es de la forma:

$$(t - (-c_k + id_k))(t - (-c_k - id_k)) = t^2 + \beta_k t + \gamma_k;$$

donde, para cada β_k y γ_k se tiene que

$$\beta_k = 2c_k \quad \text{y} \quad \gamma_k = c_k^2 + d_k^2.$$

Entonces $\beta_k, \gamma_k > 0, \quad \forall k = 1, \dots, r$.

Por las observaciones anteriores, el polinomio $p(t)$ cuenta con todos sus coeficientes positivos.

Por lo tanto, todos los coeficientes de $p(t) = a_n q_1(t) q_2(t)$ tienen el mismo signo sin importar el signo de a_n ; donde $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son los polinomios formados por las raíces reales y complejas de $p(t)$, respectivamente. ■

El teorema anterior parte del supuesto que un polinomio es Hurwitz; sin embargo, en las aplicaciones se necesitan teoremas que garanticen que el polinomio sea Hurwitz a partir de información sobre sus coeficientes. El siguiente teorema habla de las condiciones que deben cumplir los coeficientes de un polinomio de tercer grado, para garantizar que es Hurwitz; este teorema será utilizado más adelante para probar la estabilidad de un sistema de control.

Teorema 1.4.10. El polinomio $p(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ es Hurwitz si y sólo si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $ab - c > 0$.

Demostración. Supongamos que $p(t)$ es Hurwitz, veamos que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $ab - c > 0$.

Del teorema fundamental del álgebra sabemos que

$$p(t) = (t + \alpha)(t^2 + \beta t + \gamma) = t^3 + (\alpha + \beta)t^2 + (\alpha\beta + \gamma)t + \alpha\gamma.$$

Luego, sean:

$$a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha\beta + \gamma, \quad c = \alpha\gamma. \quad (1.5)$$

Por el teorema (1.4.9) se sigue que $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ dado que $p(t)$ es Hurwitz.

Por otro lado, analicemos la siguiente expresión que ocuparemos más adelante

$$\begin{aligned} ab - c &= (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \gamma) - \alpha\gamma. \\ &= \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\gamma. \\ &= \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma. \end{aligned}$$

Analizando el polinomio $p(t) = (t + \alpha)(t^2 + \beta t + \gamma)$ podemos ver que $-\alpha$ es una raíz de $p(t)$, dado que $p(t)$ es Hurwitz se tiene que $-\alpha < 0$, o bien $\alpha > 0$; luego, de las relaciones dadas en (1.5) se sigue que $\gamma > 0$ y dado que $t^2 + \beta t + \gamma$ es Hurwitz se tiene $\beta > 0$. Por lo anterior, se obtiene que :

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma > 0.$$

Por tanto $ab - c > 0$.

Ahora vamos a demostrar la segunda implicación. Para ello, vamos a suponer que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y que $ab - c > 0$ para llegar a que $p(t)$ es Hurwitz. Bajo estas hipótesis y utilizando las relaciones (1.5) tenemos:

$$\alpha + \beta > 0, \quad \alpha\beta + \gamma > 0, \quad \alpha\gamma > 0, \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma > 0.$$

Analizando la última desigualdad se sigue que $\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \gamma) > 0$. Como $\alpha\beta + \gamma > 0$ vemos que $\alpha^2 + \alpha\beta + \gamma > 0$, por tanto $\beta > 0$.

Dado que $\alpha\gamma > 0$ se tiene que $\alpha < 0, \gamma < 0$ ó $\alpha > 0, \gamma > 0$.

Puesto que $\alpha\beta + \gamma > 0$ y $\beta > 0$ podemos ver que α y γ no pueden ser negativos a la vez ya que tendríamos que $\alpha\beta + \gamma < 0$; de esta forma se tiene por consecuencia que $\alpha > 0, \gamma > 0$.

Luego, los polinomios $(t + \alpha)$ y $(t^2 + \beta + \gamma)$ son Hurwitz, por lo tanto $p(t)$ es Hurwitz.

■

Existen varios métodos y criterios para analizar la estabilidad de un sistema mediante su función de transferencia. A continuación estableceremos algunos, pero primero definiremos el concepto de matriz de Hurwitz.

Definición 1.4.11. Dado un polinomio $p(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$, denotaremos por $H(p)$ a la **matriz de Hurwitz**, definida como

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, esta matriz es muy importante para analizar la estabilidad de un sistema pues será llenada con los coeficientes del denominador de la función de transferencia, como lo indica el criterio que se menciona a continuación.

Teorema 1.4.12. (Criterio de Routh-Hurwitz) Sea $p(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_0 > 0$, $p(s)$ es Hurwitz si y sólo si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, donde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ son los menores principales diagonales de $H(p)$.

La prueba de este teorema puede encontrarse en [25].

Existe un algoritmo, llamado algoritmo de Routh, que nos proporciona el número de raíces de un polinomio que se encuentran en el semiplano derecho del plano complejo. Es decir, el número de polos que hacen que el sistema sea inestable.

El **algoritmo de Routh** nos dice si existen o no raíces en una ecuación polinomial en el semiplano derecho del plano complejo, que hacen que el sistema sea inestable, sin la necesidad de tener que calcularlas; este algoritmo de estabilidad suele aplicarse a los polinomios de grado n , que explicaremos con mayor detalle.

Pasos del algoritmo de Routh

- El punto de inicio para determinar la estabilidad de un sistema usando el algoritmo de Routh es tomar el denominador de la función de transferencia. Es decir, se tiene el denominador $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$.

- Se construye una tabla donde la primera columna sirve como una guía y contiene las potencias del polinomio $P(s)$ de forma descendente, luego se van rellenando las primeras dos filas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & & \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & \\
 s^{n-2} & & & & & & \\
 s^{n-3} & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 s^2 & & & & & & \\
 s & & & & & & \\
 s^0 & & & & & &
 \end{array}$$

- Los demás elementos que conformarán la tabla son desconocidos, de esta forma procedemos a llenar la tabla con coeficientes $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots, e_1, e_2, \dots, f_1, \dots, g_1, \dots$, etc., que serán las incógnitas, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & & \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 s^2 & e_1 & e_2 & & & & \\
 s & f_1 & & & & & \\
 s^0 & g_1 & & & & &
 \end{array}$$

- Una vez realizado esto, los coeficientes desconocidos se calculan mediante:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_2}{b_3}$$

y así, sucesivamente se calculan los coeficientes restantes.

- La columna que nos interesa es la formada por los coeficientes con subíndice uno, la que será la primera columna del algoritmo de Routh. Ahora bien, esta columna será la encargada de informarnos la estabilidad del sistema y esto se ve reflejado en el teorema (1.4.13).

Teorema 1.4.13. (Routh)

Un polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n$ y $a_n \neq 0$ es estable si y sólo si todos los $n + 1$ elementos de la primera columna obtenida del algoritmo de Routh

$$\begin{array}{cccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\
 \vdots & \vdots & & \\
 e_1 & e_2 & & \\
 f_1 & & & \\
 g_1 & & &
 \end{array}$$

son distintos de cero y tienen el mismo signo.

Una forma de ver este teorema es la siguiente: supongamos tenemos un polinomio $P(s)$, el cual es el denominador de una función de transferencia $C(S)$.

Si al efectuar el algoritmo de Routh al polinomio $P(s)$ se observa que en el esquema resultante los resultados de la primera columna no tienen el mismo signo, entonces el número de cambios de signo en dicha columna es igual al número de raíces del polinomio $P(s)$ que se encuentran en la mitad derecha del plano s , es decir, es igual al número de raíces con partes reales positivas.

Es a partir de este resultado que podemos obtener otros como el siguiente corolario.

Corolario 1.4.14. Todas las raíces del polinomio real $p(t)$ tienen parte real negativa si y sólo si al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.

Este trabajo de tesis tiene gran importancia pues es un aporte a la electrónica y a su vez a las matemáticas; dado que los nuevos controladores tienen sus fundamentos en la teoría de análisis funcional y en otras ramas. En particular, quien desee inventar un nuevo control debe tener sólidos conocimientos de matemáticas.

Después de haber estudiado la teoría necesaria de matemáticas y de electrónica que se emplearán a lo largo de la tesis podemos dar inicio con el análisis del diferencial electrónico en el capítulo próximo.

Capítulo 2

Modelo matemático del diferencial electrónico

En este capítulo abordaremos el funcionamiento del diferencial electrónico, revisaremos algunos antecedentes y tipos de este dispositivo a lo largo de los años. Además, se verá a fondo el estudio matemático del principio de Ackermann en el cual conoceremos cómo a partir de la velocidad lineal y el ángulo de giro del vehículo podemos llegar finalmente a la ecuación de la velocidad angular de cada una de las cuatro ruedas, pues son estos resultados los que estaremos buscando controlar.

2.1. Antecedentes del Diferencial electrónico

El diferencial mecánico fue inventado en 1827 por el mecánico francés Onesiphore Pecqueur (1792-1852), maestro de taller del Conservatorio de Artes y Oficios de París. Posiblemente concibió la idea del diferencial mientras se encontraba trabajando en un modelo del carro de Cugnot.

A partir de la creación del primer diferencial mecánico, se empezó a utilizar en los primeros vehículos de vapor de la segunda mitad del siglo XIX; como por ejemplo, en 1985 por Clayton & Shuttleworth.

Como los años fueron transcurriendo, tanto las nuevas propuestas de construcción del diferencial mecánico, como la del resto de los componentes de los vehículos ha ido evolucionando y perfeccionándose con mayor rapidez, a la par con los progresos de la industria metalúrgica y sobre todo, de la tecnología.

El diferencial mecánico, en su forma más conocida y común, está formado por dos piñones cónicos, que toman el nombre de planetarios, unidos a los extremos de los semiejes, generalmente de perfiles estriados, y otros dos piñones cónicos, llamados satélites, montados en los extremos de un eje porta satélites y que engranan con los planetarios como se ve en la Figura ???. Debido a que los ejes de los satélites no se encuentran fijos en el espacio, el diferencial recibe el nombre de engranaje epicicloidal. Tanto los planetarios como los satélites son de dientes rectos, dadas las moderadas velocidades de funcionamiento y el bajo porcentaje de tiempo en el que existe movimiento relativo entre tales piñones: de hecho sólo existe movimiento relativo entre estos cuando el vehículo toma una curva.

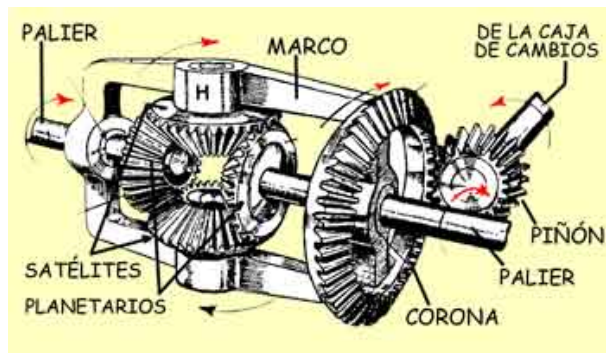


Figura 2.1: Diferencial mecánico y sus componentes ([11]).

2.1.1. Tipos de diferenciales

Diferencial autoblocante

Es un sistema diferencial que iguala las rotaciones distintas que se crean entre las ruedas de un mismo eje o entre los dos, haciendo que se optimice la tracción del vehículo y su agarre; también se le conoce como diferencial de deslizamiento mecánico. Es en la Figura 2.1 donde podemos apreciar a este diferencial.

Diferencial autoblocante electrónico

Este tipo de diferencial es una imitación de un diferencial autoblocante. La electrónica del vehículo utiliza sensores para descubrir si una de las ruedas giran demasiado por haber perdido el agarre; si es así, se usa el freno para detenerla haciendo que la otra rueda reciba la fuerza de giro de forma normal.

No obstante, no es una buena solución puesto que ocasiona un mayor desgaste y calentamiento de los frenos al recurrir a ellos más veces de lo normal.

Diferencial autoblocante electrónico tipo Torsen

Este dispositivo elimina el problema de los diferenciales autoblocantes de forma práctica pues funciona gracias a que un engranaje cilíndrico helicoidal puede mover una rueda dentada; sin embargo, este diferencial es muy caro, además de que los vehículos que contienen a este diferencial no pueden ser arrastrados. En la Figura 2.1 se ilustra este diferencial.

Diferencial de deslizamiento limitado

Este tipo de diferencial funciona dado a la existencia de varios embragues colocados en fila que controlan la tracción; al momento de detectar que una rueda pierde agarre, se acoplan para que no lo continúe haciendo.

Aunque un diferencial de deslizamiento limitado puede restar potencia de una llanta que ha perdido tracción y dar más potencia a las otras que si lleven tracción, esto ayuda a prevenir el desgaste excesivo de las llantas. Por otro lado, aunque el diferencial de deslizamiento limitado envía algo de potencia a las ruedas que pierden tracción, no será un

continuo suministro de energía. Podemos ver una imagen de este diferencial en la Figura 2.1.

Diferencial de tipo Ferguson

También conocido como de acoplamiento viscoso. Este dispositivo funciona debido a un aceite especial que al elevarse su temperatura por la fricción generada se vuelve más denso y comienza a transferir circulación a las ruedas.

Es un sistema habitual en los vehículos 4×4, por ser un sistema económico y compacto; el principal problema que representan es que, en ocasiones la tracción a las cuatro ruedas solo se activa en superficies resbaladizas. Es en la Figura 2.1 donde podemos observar a este tipo de diferencial.

Diferencial de deslizamiento controlado

Este tipo de diferencial funciona con un sistema de embrague multidisco. No obstante, lo hace gracias a la electrónica y a un sistema hidráulico con lo que es capaz de controlar la cantidad de torque que llega a cada rueda mediante la presión de los discos entre sí. En la Figura 2.1 vemos una ilustración de este diferencial.

Diferencial electrónico

A diferencia de los vehículos ordinarios, en un vehículo eléctrico los motores se instalan en las ruedas para reducir el aumento de masa del vehículo debido a las baterías y al uso de trenes de transmisión. De esta forma el diferencial mecánico conformado por engranajes queda sustituido por el diferencial electrónico.

Este utiliza la señal de comando del volante y las señales de velocidad de los motores para controlar la potencia de cada rueda, así, se obtiene una respuesta rápida de los motores y se proporciona un control del torque independiente de cada rueda. Un diferencial electrónico debe asegurar que la velocidad de cada rueda que forman al vehículo sean reguladas de acuerdo al ángulo de giro y velocidad deseada.

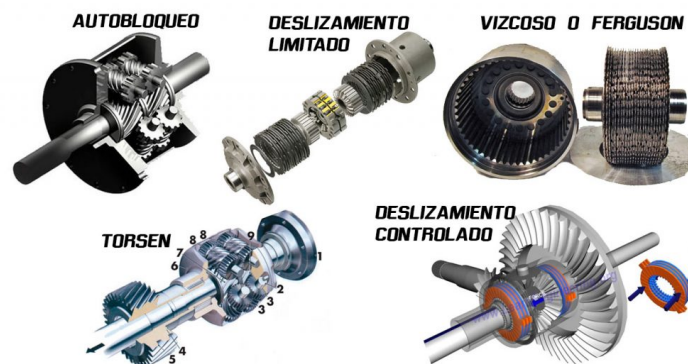


Figura 2.2: Algunas clases de diferenciales existentes ([12]).

La geometría de Ackerman es una estructura geométrica entre las ruedas delanteras

de un vehículo de cuatro ruedas, es decir, la rueda interna y la externa; además precisa el ángulo de giro adecuado de las ruedas delanteras cada vez que el vehículo toma una curva.

Por ende, en una curva, las ruedas delanteras están dirigidas de tal forma que sus ejes de giro se cortan en un punto (O) colocado en la prolongación del eje trasero como se aprecia en la Figura 2.2. Este punto (O) es el centro de giro del vehículo, es decir, es el punto de intersección de las cuatro rectas imaginarias que atraviesan el centro de las ruedas.

Al momento de tomar una curva, la rueda delantera interior tiene un ángulo de giro δ_1 mayor que el ángulo de giro de la rueda exterior δ_2 , dado que la rueda interior tiene un radio de giro menor, como se ve en la Figura 2.2. Ambos ángulos de giro son respecto al centro de giro (O).

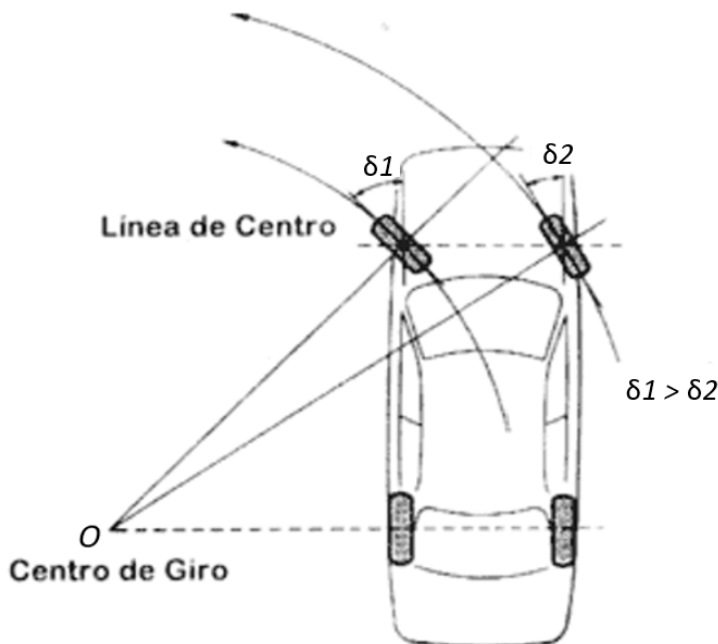


Figura 2.3: Radio de giro de un vehículo cuando gira a la izquierda ([13]).

2.2. Diferencial electrónico

2.2.1. Funcionamiento del diferencial

Todo diferencial tiene dos funciones específicas que ayudan al funcionamiento correcto y adecuado del vehículo; la primera de ellas es poder cambiar el eje del giro, mientras que la segunda función primordial es permitir que las ruedas giren a distintas velocidades. En esta tesis nos centraremos en esta última función, sin embargo, también se mencionará la

primera función y veremos cómo esta se resuelve gracias al uso del diferencial electrónico.

A fin de que ambas ruedas delanteras se guíen adecuadamente en el punto origen, es necesario un trapecio articulado llamado dirección de Ackermann; este dispositivo está definido por un eje delantero, los brazos de dirección y una barra de acoplamiento.

En caso de que se diseñe un vehículo sin tomar en cuenta el principio de Ackermann y las dos ruedas delanteras giren el mismo ángulo, estas no estarán girando con respecto al mismo punto por lo que se generará una fuerte inestabilidad y un desgaste excesivo de los neumáticos. Por otro lado, si se aplica el principio de Ackermann, la rueda interior girará con mayor ángulo de forma que el centro instantáneo de rotación sea el mismo para todas las ruedas como ya se ha dicho. Para que esto se lleve a cabo, las bieletas de dirección formarán cierto ángulo con el eje longitudinal, es decir, el vehículo debe contar con el trapecio de Ackermann.

En la Figura 2.3 podemos apreciar al llamado trapecio de Ackermann remarcado de color rojo; es este artefacto el que permite que las ruedas delanteras de un vehículo tengan una mayor maniobrabilidad al momento de tomar una curva. Es por el trapecio de Ackerman que las ruedas delanteras giren con un mayor ángulo que las traseras.

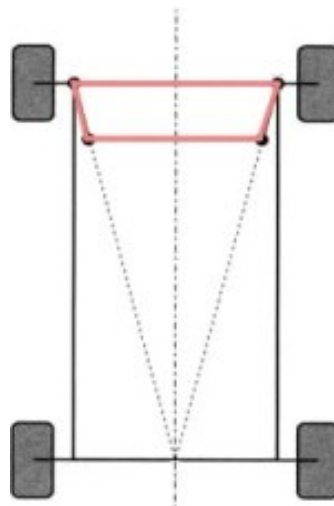


Figura 2.4: Trapecio de Ackermann ([14]).

Para estudiar a fondo cómo se comporta un diferencial electrónico nos basaremos en la geometría de Ackerman, la cual también nos ayudará a estudiar la velocidad angular adecuada a la que deben girar las llantas de un vehículo cuando se toma una curva.

Condición de Ackermann

La condición de Ackermann se enuncia como la relación entre la rueda interna y externa; para verlo de mejor manera consideramos a la Figura 2.4, donde podemos apreciar gráficamente qué es lo que sucede cuando un vehículo toma una curva, en este caso hacia la izquierda. Podemos notar que en la posición de las ruedas delanteras se forman dos

ángulos, δ_o y δ_i , respectivamente. La condición de Ackermann estará dada por la relación existente entre estos dos últimos ángulos;

donde:

δ_o es el ángulo de la rueda externa respecto al centro de giro del VE.

δ_i es el ángulo de la rueda interna respecto al centro de giro del VE.

B es la distancia entre las ruedas delanteras.

L es la distancia entre los ejes del vehículo.

r es el radio de giro del vehículo.

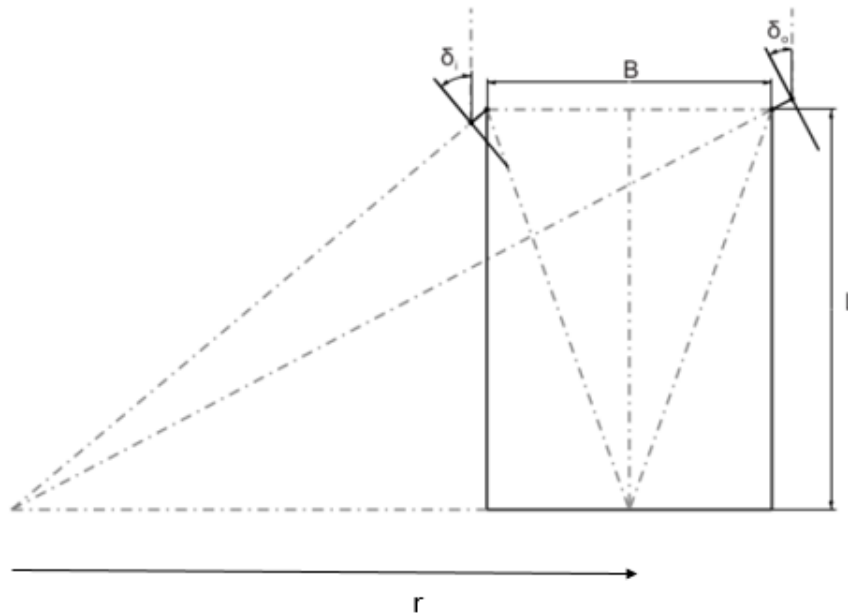


Figura 2.5: Condición de Ackermann aplicada al giro de un vehículo ([14]).

Más adelante se mostrará este diagrama de una forma más completa; ahora bien, siguiendo con el análisis de la Figura 2.4 tenemos que revisar la relación entre las ruedas delanteras interna y externa; para esto, notemos cómo se forman dos triángulos rectángulos; uno con catetos de longitudes L y $r - \frac{B}{2}$, mientras que el otro tiene catetos de longitudes L y $r + \frac{B}{2}$. Posteriormente, calculamos la tangente a los dos ángulos para obtener así:

$$\tan(\delta_i) = \frac{L}{r - \frac{B}{2}}$$

$$\tan(\delta_o) = \frac{L}{r + \frac{B}{2}}$$

Luego, puesto que $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, entonces

$$\cot(\delta_o) - \cot(\delta_i) = \frac{r + \frac{B}{2}}{L} - \frac{r - \frac{B}{2}}{L}.$$

De esta forma podemos llegar a la condición de Ackermann entre los ángulos δ_o y δ_i , en término de las longitudes B y L , dada por:

$$\cot(\delta_o) - \cot(\delta_i) = \frac{B}{L}.$$

Es interesante notar la relación de las ruedas delanteras; sin embargo, como ya se dijo con anterioridad esto no es influyente en el estudio que se hará a continuación del modelo matemático del diferencial electrónico. De esta forma, una revisión que trabaje con la condición de Ackermann queda como un problema pendiente.

2.2.2. Modelo matemático del diferencial electrónico

Dado que el vehículo eléctrico con el que estamos trabajando tiene un motor BLDC en cada rueda el diferencial mecánico, entonces se elimina del tren motriz, por lo que se hace indispensable la construcción e implementación de un sistema electrónico que replazce a este último. Así, la finalidad del modelo del diferencial electrónico es relacionar la velocidad lineal del vehículo, la cual es introducida por el conductor por medio del acelerador, con las velocidades angulares de cada una de las ruedas. Una vez realizado esto, serán las velocidades angulares las que se utilizarán como futuras referencias para las velocidades de cada uno de los motores en rueda en el diseño del controlador PID que se utilizará en este trabajo de tesis.

Ahora bien, el principio de Ackermann se basa en hacer girar las cuatro ruedas del vehículo alrededor de un punto en común al momento de girar el cual recibe el nombre de centro de radio de giro; es en este principio en que se basa el diferencial electrónico.

A continuación estudiaremos el giro de un vehículo de cuatro ruedas mediante el modelo de Ackermann.

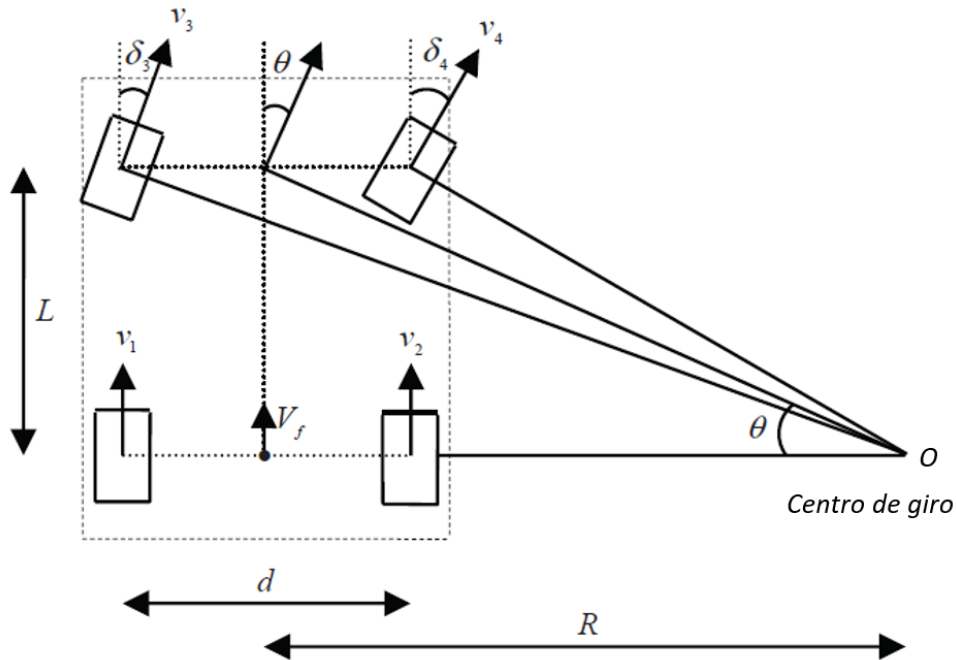


Figura 2.6: Giro de un vehículo de cuatro ruedas de acuerdo al principio de Ackermann ([26]).

En la Figura 2.5:

v_1 es la velocidad lineal de la rueda 1.

v_2 corresponde a la velocidad lineal de la rueda 2.

v_3 es la velocidad lineal de la rueda 3.

v_4 corresponde a la velocidad lineal de la rueda 4.

θ es el ángulo del radio de giro del vehículo respecto al centro de giro del VE.

δ_3 y δ_4 son los desplazamientos en ángulos del eje de giro respecto al eje vertical de cada una de las ruedas, también conocidos como ángulos de avance o caster.

L la distancia entre el eje delantero y el trasero.

d la distancia horizontal entre las ruedas.

R el radio de giro del vehículo.

V_f la velocidad lineal del vehículo.

Ahora bien, de los triángulos rectángulos que se forman en la Figura 2.5 podemos obtener ecuaciones para:

Ángulos de dirección de las ruedas delanteras

Analizando el ángulo δ_3 , vemos que se forma un triángulo rectángulo formado por los catetos L y $R + \frac{d}{2}$ cuya hipotenusa es la distancia del centro de giro del VE al centro de

giro de la rueda delantera izquierda, por lo cual se tiene

$$\tan(\delta_3) = \frac{L}{R + \frac{d}{2}}.$$

Aplicando la tangente inversa en ambos lados de la igualdad se tiene

$$\delta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{L}{R + \frac{d}{2}} \right). \quad (2.1)$$

De manera similar, al analizar al ángulo δ_4 , se forma un triángulo rectángulo formado ahora por los catetos L y $R - \frac{d}{2}$ cuya hipotenusa es la distancia del centro de giro del VE al centro giro de la rueda delantera derecha, de allí que

$$\tan(\delta_4) = \frac{L}{R - \frac{d}{2}}.$$

Aplicando la tangente inversa en ambos lados de la igualdad resulta

$$\delta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{L}{R - \frac{d}{2}} \right). \quad (2.2)$$

Radio de giro del vehículo

De igual forma, para el ángulo θ se tiene que:

$$\tan(\theta) = \frac{L}{R}.$$

Despejando a R se tiene

$$R = \frac{L}{\tan(\theta)}. \quad (2.3)$$

Tomando en cuenta la velocidad angular del vehículo observada ω y el radio de giro R , por la fórmula de la velocidad tangencial tendremos que la velocidad lineal V_f del vehículo estará dada por ([8]):

$$V_f = R\omega. \quad (2.4)$$

Posteriormente, dado que la velocidad angular es la medida vectorial de la tasa de rotación que se refiere a qué tan rápido gira un objeto en relación con otro punto, se tiene que para un objeto que gira alrededor de un eje, todos los puntos del objeto tienen la misma velocidad angular. Sin embargo, los puntos más alejados del eje de rotación se mueven a una velocidad tangencial diferente que los puntos más cercanos al eje de

rotación. En nuestro caso, consideramos que la velocidad angular en cualquier punto del vehículo es la misma si estimamos que este es un solo cuerpo en movimiento.

No obstante, tomemos en cuenta que las velocidades lineales dependen del radio de giro; es decir, la distancia de cualquier punto del vehículo hacia el centro del radio de giro; en consecuencia, obtendremos las siguientes ecuaciones que son las velocidades lineales de cada rueda:

$$v_1 = \omega \left(R + \frac{d}{2} \right). \quad (2.5)$$

Podemos apreciar en la ecuación 2.5 que v_1 denota la velocidad lineal de la primer rueda del vehículo eléctrico, además que esta ecuación proviene de utilizar (2.4) para la primer rueda respecto a la Figura 2.5, donde cambiamos la velocidad lineal de vehículo eléctrico V_f por la velocidad lineal de la rueda 1, la velocidad angular w permanece igual y lo único que cambia es el radio de giro de la rueda respecto al centro de giro del VE. Dado que la distancia del eje del centro de giro de la rueda se encuentra a una distancia horizontal de $R + \frac{d}{2}$ del centro de giro, esta se sustituye en el radio de giro de la rueda.

De manera similar a la ecuación anterior, hacemos uso de (2.4) donde lo único que va a diferir de nueva cuenta es el radio de giro de la rueda trasera derecha como se ve en la Figura 2.5. La distancia del centro de giro del vehículo eléctrico al centro del eje de giro de la rueda se encuentra en sentido horizontal a una longitud de $R - \frac{d}{2}$; por lo que:

$$v_2 = \omega \left(R - \frac{d}{2} \right). \quad (2.6)$$

Para las ecuaciones de la velocidad lineal de las ruedas delanteras se hace el mismo proceso, donde lo único que cambia es la obtención del radio de giro de cada una de las ruedas 3 y 4; para esto, nos seguiremos apoyando de la Figura 2.5. Como se mencionó en (2.1), se forman dos triángulos rectángulos, el primero de ellos con catetos de longitudes L y $R + \frac{d}{2}$, donde se tiene como longitud de la hipotenusa a $\sqrt{\left(R + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$ que representa la distancia del centro de giro del vehículo eléctrico al centro de giro del eje de la rueda 3. Así, la velocidad lineal de la rueda 3 es:

$$v_3 = \omega \sqrt{\left(R + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}. \quad (2.7)$$

Finalmente para la velocidad lineal de la cuarta rueda se hace uso de la misma ecuación (2.4) y de lo anterior dicho para obtener (2.2). Es decir, la visualización del segundo triángulo rectángulo con catetos de longitud L y $R - \frac{d}{2}$; como previamente se hizo, se calcula

la longitud de la hipotenusa del triángulo dando como resultado $\sqrt{\left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$, luego

$$v_4 = \omega \sqrt{\left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}. \quad (2.8)$$

Anteriormente consideramos al vehículo como un solo cuerpo en movimiento. Supongamos ahora que se sitúa una rueda de radio r en cada una de las esquinas del vehículo; podemos ver que en este caso cada una de las ruedas va a girar con una velocidad angular propia que dependerá de su velocidad lineal y de su propio radio de giro r . Gracias a esto, encontramos las ecuaciones de las velocidades angulares de cada rueda.

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{\omega}{r} \left(R + \frac{d}{2}\right). \quad (2.9)$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{\omega}{r} \left(R - \frac{d}{2}\right). \quad (2.10)$$

$$\omega_3 = \frac{v_3}{r} = \frac{\omega}{r} \sqrt{\left(R + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}. \quad (2.11)$$

$$\omega_4 = \frac{v_4}{r} = \frac{\omega}{r} \sqrt{\left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}. \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.4) tenemos que $\omega = \frac{V_f}{R}$ y sustituyendo (2.3), se obtiene:

$$\omega = V_f \frac{\tan(\theta)}{L} \quad (2.13)$$

Sustituyendo la ecuación (2.13) en (2.9) se tiene que:

$$\omega_1 = \frac{V_f}{Lr} \tan(\theta) \left(R + \frac{d}{2}\right).$$

$$\omega_1 = \frac{V_f}{r} \left(\frac{R \tan(\theta)}{L} + \frac{d \tan(\theta)}{2L}\right).$$

De (2.4) se tiene que $R = \frac{V_f}{\omega}$ y por (2.13) se llega a que $R = \frac{L}{\tan(\theta)}$, o bien

$\frac{R}{L} = \frac{1}{\tan(\theta)}$. De esta forma:

$$\omega_1 = \frac{V_f}{r} \left(1 + \frac{d}{2L} \tan(\theta)\right).$$

Ahora bien, sustituyendo (2.13) en (2.11) se sigue que:

$$\omega_3 = \frac{V_f \tan(\theta)}{Lr} \sqrt{\left(\frac{L}{\tan(\theta)} + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}.$$

$$\omega_3 = \frac{V_f}{r} \sqrt{\frac{\tan^2 \theta}{L^2} \left(\left(\frac{L}{\tan(\theta)} + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2\right)}.$$

$$\omega_3 = \frac{V_f}{r} \sqrt{\left(1 + \frac{d \tan(\theta)}{2L}\right)^2 + \tan^2 \theta}.$$

$$\omega_3 = \frac{V_f}{r} \sqrt{1 + \frac{d}{L} \tan(\theta) + \left(1 + \frac{d^2}{4L^2}\right) \tan^2 \theta}.$$

De manera similar, para las ecuaciones (2.10) y (2.12) llegamos a las velocidades angulares de cada rueda en términos de la velocidad lineal del vehículo que son las que vamos a utilizar para este trabajo de tesis.

$$\omega_1 = \frac{V_f}{r} \left(1 + \frac{d}{2L} \tan(\theta)\right). \quad (2.14)$$

$$\omega_2 = \frac{V_f}{r} \left(1 - \frac{d}{2L} \tan(\theta)\right). \quad (2.15)$$

$$\omega_3 = \frac{V_f}{r} \sqrt{1 + \frac{d}{L} \tan(\theta) + \left(1 + \frac{d^2}{4L^2}\right) \tan^2 \theta}. \quad (2.16)$$

$$\omega_4 = \frac{V_f}{r} \sqrt{1 - \frac{d}{L} \tan(\theta) + \left(1 + \frac{d^2}{4L^2}\right) \tan^2 \theta}. \quad (2.17)$$

De las anteriores ecuaciones tenemos como constantes a r , d y L pues son datos que podemos encontrar ya que dependen de la geometría del vehículo.

Ahora bien, en cuanto a V_f y θ tendremos que estos valores son variables, pues dependen de la decisión del usuario para conocer con qué velocidad lineal y a qué ángulo de giro se tomará una determinada curva.

En definitiva, las ecuaciones (2.14) a (2.17) se denominan señales de referencia; es decir, una vez establecidas las funciones θ y V_f se procederá a sustituirlas en las ecuaciones antes mencionadas; serán estas nuevas ecuaciones con las que se vamos a comparar las velocidades angulares reales posteriormente en el capítulo 5.

Capítulo 3

Modelo matemático de un motor BLDC

En este capítulo iniciaremos estudiando el funcionamiento, composición y tipos de motores, posteriormente analizaremos un modelo matemático para el motor DC ya que permitirá estudiar el modelo matemático de un motor BLDC. Como observaremos en el transcurso del capítulo para obtener el modelo matemático, estudiamos la parte eléctrica y la parte mecánica. Finalmente, veremos la resolución del modelo matemático del motor BLDC y concluiremos al obtener la función de transferencia del motor; esto con el objetivo de relacionarla con el controlador PID que se verá en el capítulo 4.

3.1. Composición y funcionamiento de un motor BLDC

Con motivo de conocer un poco más el tipo de motores que se estudiarán en este capítulo, así como su funcionalidad, iniciamos exponiendo algunos conceptos.

Un **motor trifásico** es una máquina eléctrica que transforma energía eléctrica en energía mecánica por medio de interacciones electromagnéticas; algunos son reversibles, pueden transformar energía mecánica en energía eléctrica funcionando como generadores; funcionan a través de una fuente de potencia trifásica y son impulsados por tres corrientes alternas de la misma frecuencia, los cuales alcanzan sus valores máximos de forma alternada.

Los motores trifásicos son más económicos que los motores monofásicos para suministrar la energía ya que requieren de un menor cableado para funcionar. Una ventaja de estos motores es su flexibilidad para dividir la carga de electricidad en tres fases; esto hace que se reduzca la carga en una sola fase. Una fase es la corriente o el voltaje entre dos cables; en caso del motor BLDC una fase se activa cuando entra voltaje en dos electroimanes que tiene como consecuencia el movimiento del motor.

Como corriente continua entendemos cuando el flujo de la corriente eléctrica se da en un solo sentido, desde un polo a otro; es decir, esta corriente la podemos encontrar en pilas, baterías u otros aparatos de baja tensión eléctrica. Para el estudio de este motor

primero debemos conocer los elementos que lo conforman y la función que cumple cada uno de ellos.

3.1.1. Composición

Estátor

El estátor de un motor BLDC, como se ve en la Figura 3.1, está formado por unas láminas de acero apiladas, con devanados, es decir un conjunto de bobinas localizadas en las ranuras que son cortados axialmente a lo largo de la periferia interior. La mayoría de los motores BLDC tienen 3 devanados en el estátor, conectados en estrella, que se localizan sobre la periferia del estátor, para así tener un número determinado de pares de 13 polos. A su vez, cada uno de estos devanados, está formado por bobinas que se ubican en las ranuras, y son interconectadas entre ellas.

El estátor tiene la notable función de utilizar la energía eléctrica para producir con ella un campo magnético, que guiará al rotor.

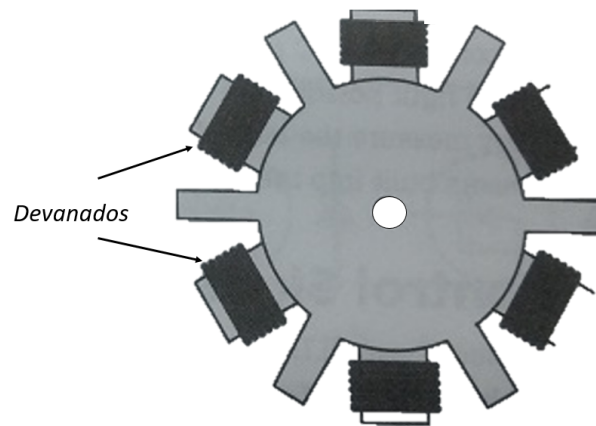


Figura 3.1: Estátor de motor BLDC ([15]).

Rotor

El rotor de un motor consiste en imanes fijos y un número concreto de pares de polos acoplados en el interior del núcleo como se aprecia en la Figura 3.2. Mientras más polos tenga, mayor será la intensidad de corriente, no obstante, se llegará a un punto donde, debido al espacio necesario entre imanes, el par disminuirá. Por otra parte, mientras más pares de imanes tenga, el coste de fabricación del rotor incrementará, por lo que se tiene que llegar a un balance entre par, número de polos y coste.

El rotor es un elemento que estará magnetizado y que como ya se dijo en la sección del estátor, el rotor va siguiendo al campo magnético. De esta forma, la electricidad se usa para crear un campo magnético, y el movimiento del rotor que siguiendo siempre ese campo se ocupa para poder mover las ruedas del vehículo eléctrico. Es decir, se genera

energía cinética mediante energía eléctrica.

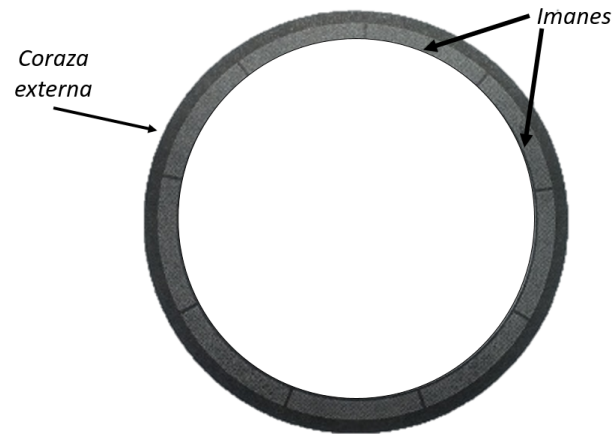


Figura 3.2: Rotor de motor BLDC ([15]).

Sensores de posición

Debido a que los motores BLDC carecen de escobillas para energizar los devanados y a que la conmutación se debe hacer electrónicamente, es necesario conocer continuamente la posición del rotor para, de esta forma, poder energizar los devanados del motor BLDC trifásico; es de esto de lo que se encargan los sensores. Normalmente, los sensores de posición se encuentran separados 120° entre sí; uno para cada bobina del motor, siempre y cuando se hable de motores con 3 fases.

Sensores de efecto Hall

El sensor de efecto Hall se basa en el efecto Hall para la medición de corrientes, campos magnéticos o para la determinación de la posición en la que estos se encuentran.

Algunos motores BLDC tienen tres sensores Hall internos que brindan retroalimentación a los circuitos externos, lo que facilita el control preciso de los devanados del estátor. Algunos controladores BLDC utilizan la fuerza electromotriz del motor y omiten los sensores Hall. En ambos casos, los sensores Hall también se pueden usar para identificar ubicaciones con precisión; los sensores producen una señal cuando detectan la presencia de los polos.

Diversos diagramas colocan a los sensores de efecto Hall etiquetados comúnmente como U, V y W equidistantes (120 grados) alrededor de las bobinas del estátor; no obstante, los sensores de efecto Hall se encuentran por lo regular en un lado del estátor equidistantes entre sí.

Como podemos ver en la Figura 3.3, los sensores de efecto Hall se centran en las caras de las bobinas; de esta forma, el intervalo entre dos sensores es de tres bobinas, lo que resulta en 40 grados de separación, así:

2 bobinas completas + 2 medias bobinas = 3 intervalos de bobina

360 grados/27 bobinas * 3 intervalos de bobina = 40 grados

Esta configuración produce los mismos valores de salida que si los sensores estuvieran físicamente separados 120 grados ([16]).

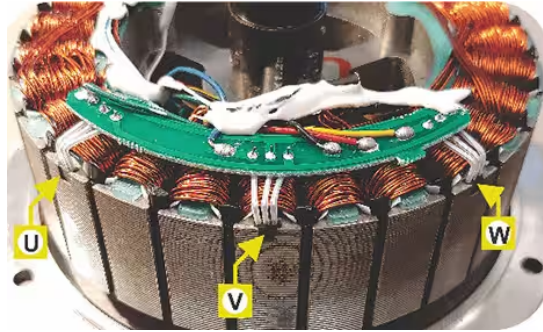


Figura 3.3: Sensores de efecto Hall en un motor BLDC ([16]).

3.1.2. Funcionamiento

Los motores eléctricos transforman potencia de la energía eléctrica en energía mecánica usando la interacción magnética; en los motores BLDC, esta interacción magnética ocurre entre los cables de las bobinas del estator y los imanes permanentes del rotor.

Estos motores son superiores a los motores tradicionales conocidos como DC; aunque ambos funcionan con bobinas, la principal diferencia entre ambos motores es el rozamiento, pues un motor con escobillas tiene fricción y esto ocasiona que haya un mayor desgaste.

Los motores BLDC suelen ser trifásicos, por lo tanto, tienen que ser alimentados por una fuente de alimentación trifásica; es decir, tener tres cables para alimentar el motor. Por su parte, la posición del rotor debe ser conocida en ciertos ángulos, con el fin de alinear el voltaje aplicado con la fuerza contraelectromotriz por lo que por lo regular se suelen encontrar sensores de efecto Hall en la parte de su base; la alineación entre la fuerza contraelectromotriz y los eventos de conmutación son de suma importancia pues hacen que el rotor tenga movilidad.

Generalmente el estator está compuesto por doce bobinas embobinadas de forma intercalada, separadas en tres grupos de electroimanes; o con otras palabras, son tres electroimanes constituidos de tal forma que se arman cuatro bobinas por cada electroimán, haciendo un total de doce bobinas.

En la Figura 3.4 se logra apreciar gráficamente lo que se ha dicho en el párrafo anterior donde se pueden ver tres fases: amarillo, verde y magenta. Cada una de estas fases con cuatro electroimanes.

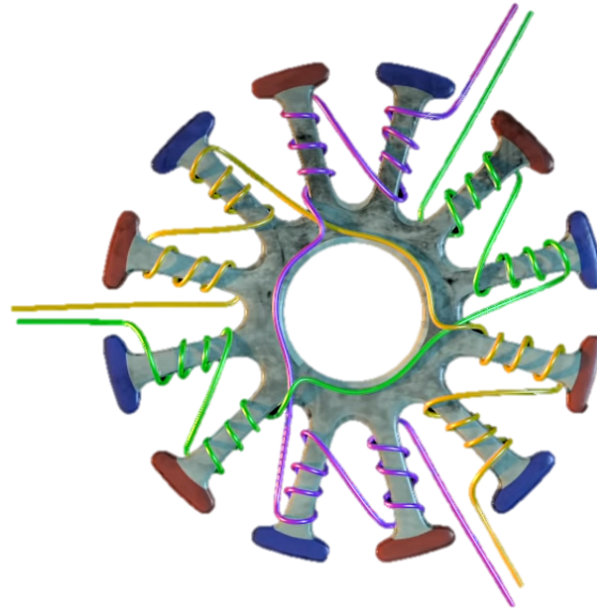


Figura 3.4: Motor BLDC trifásico de cuatro polos ([39]).

La estructura del rotor cuenta con aproximadamente catorce imanes colocados de tal manera que su polaridad quede intercalada, positivo, negativo, positivo, etc.; de esta forma, al momento de que los tres electroimanes se activan, uno a la vez, en un orden específico para atraer a los catorce imanes del rotor, lo que ocasionará el movimiento del motor. Por ejemplo, cuando se activa el electroimán de color magenta, los imanes del rotor son atraídos a dichas bobinas como se aprecia en la Figura ??.

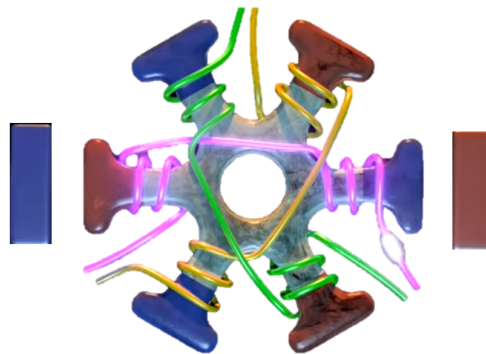


Figura 3.5: Imanes del rotor que son atraídos cuando se activa el electroimán de color magenta ([39]).

Inmediatamente después, se desactiva el de color magenta pero ahora se activa el de color amarillo con la polaridad invertida y los imanes del rotor son nuevamente atraídos a esta nueva posición; esto podemos verlo en la Figura ??.

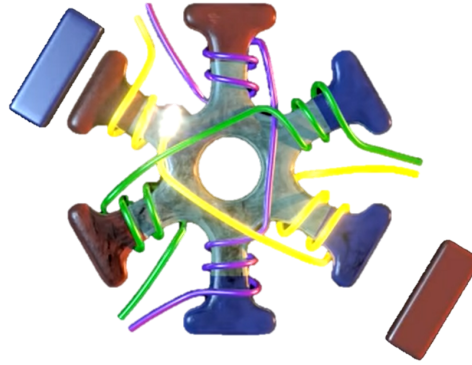


Figura 3.6: Nueva posición del rotor cuando se activa el electroimán amarillo ([39]).

Nuevamente y de forma muy rápida, se desactiva el electroimán de color amarillo y se activa el electroimán de color verde, ocasionando nuevamente un movimiento en los imanes del rotor como se ve en la Figura ??.

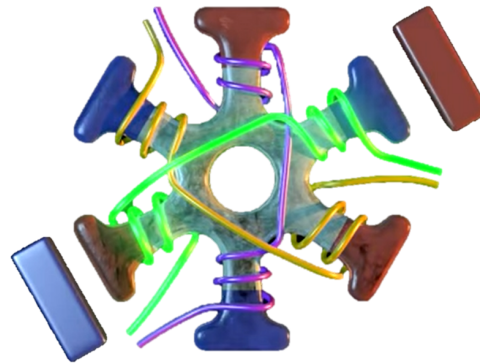


Figura 3.7: Cambio de posición del rotor al activar el electroimán de color verde ([39]).

De este modo, se vuelven a activar los electroimanes en el mismo orden pero variando su polaridad teniendo como consecuencia que el rotor de una vuelta completa. Este proceso se repite una y otra vez a una alta velocidad para que el motor funcione correctamente.

Es este pues, a grandes rasgos el funcionamiento de un motor BLDC; en este trabajo se contará con un total de cuatro, uno para cada rueda del vehículo eléctrico y más adelante se verá su modelo matemático.

3.1.3. Tipos de motores BLDC

A continuación se exponen los dos tipos principales de motores BLDC que existen en la industria, los motores BLDC de rotor exterior y los motores BLDC de rotor interior. La principal semejanza es que trabajan mediante el mismo principio de funcionamiento

que se vio en la sección anterior, mientras que su única diferencia como su nombre lo dice, es la ubicación del rotor. Estos tipos de motores son conocidos también como motores BLDC outrunner e inrunner, respectivamente.

Motor sin escobillas de rotor interior

En estos motores el rotor está presente dentro del estator, como se ve en la Figura 3.5, los imanes se colocan en el rotor, y los devanados del estator se encuentran fijos. Este tipo de motor tiene una precisión relativamente baja; su tamaño total es pequeño y su diámetro es más pequeño en comparación con un motor sin escobillas de rotor exterior; pero axialmente más largo en longitud; tiene un menor número de polos magnéticos, lo que da como resultado un flujo de entrehierro más bajo.

Por último, estos motores requieren imanes de alta energía, lo que puede aumentar su costo.

Motor sin escobillas de rotor exterior

En este tipo de motores el rotor está presente fuera del estator; los brazos de torsión y la superficie del entrehierro son relativamente más grandes, como se ve en la Figura 3.6 los imanes están presentes en el rotor y, las bobinas del estator forman el núcleo. A diferencia del motor con estator interior, este tiene una precisión relativamente alta además de contar con una eficiencia relativamente menor debido a la alta inercia, ya que un impulso más significativo genera más torque.

Por último hay una mayor cantidad de polos magnéticos, lo que da como resultado un alto flujo de espacio de aire; más aún, se pueden utilizar imanes de baja energía.

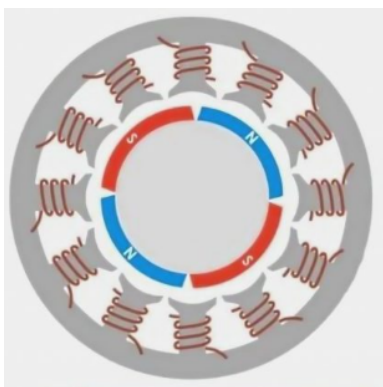


Figura 3.8: Motor sin escobillas de rotor interior ([17]).

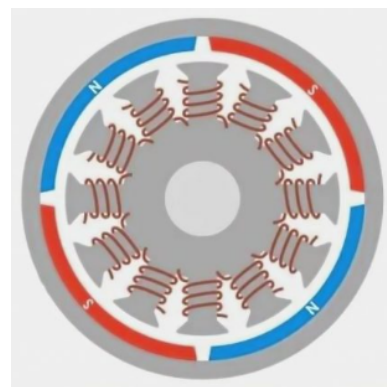


Figura 3.9: Motor sin escobillas de rotor exterior ([17]).

3.2. Modelo matemático de un motor BLDC

3.2.1. Modelo matemático de un motor DC

Para poder estudiar el modelo matemático del motor BLDC primero vamos a describir un modelo matemático de un motor DC. Primero observemos la Figura 3.7:

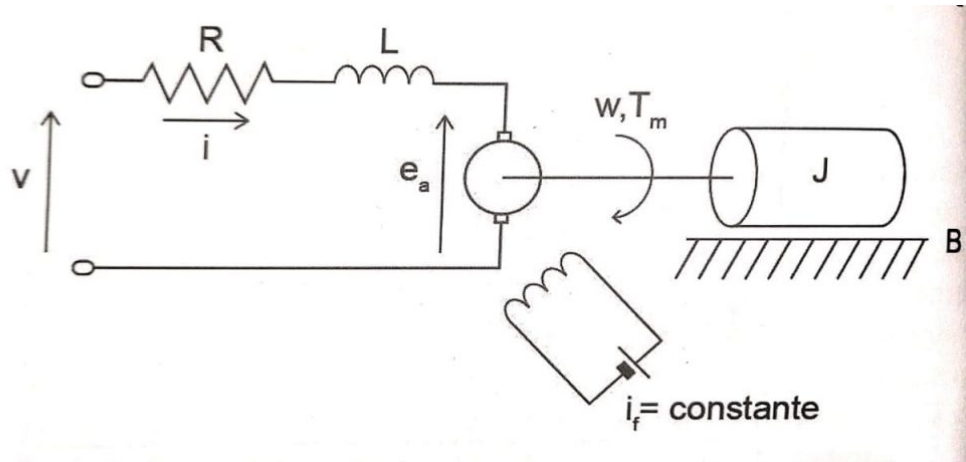


Figura 3.10: Circuito de un motor DC ([18]).

La parte izquierda de la imagen mostrada en la Figura 3.7 representa la sección eléctrica, mientras que la parte de la derecha representa la sección mecánica del motor.

A continuación explicaremos la deducción del modelo matemático de un motor DC, para ello utilizaremos la ley de voltaje de Kirchhoff y la segunda ley de Newton.

Recordemos que la ley de tensión o de voltaje de Kirchhoff nos dice que la suma algebraica de caídas de voltaje alrededor de un camino cerrado es cero, en cualquier instante de tiempo. Matemáticamente esto se traduce en la siguiente ecuación, que representa el comportamiento eléctrico del motor.

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + e;$$

donde V representa la fuente voltaje, R simboliza la resistencia, L representa la inductancia, i la corriente de armadura y e es la fuerza contraelectromotriz.

Para el lado mecánico analizamos la Figura 3.8, en la que se aprecian las fuerzas que actúan sobre un motor DC.

$$T_e = b\omega + J \frac{d\omega}{dt} + T_L;$$

donde ω es la velocidad angular; T_e el par eléctrico o torque eléctrico; T_L el par de la carga que actúa sobre el eje del rotor o torque de carga; b la constante de fricción del rotor y J es su inercia.

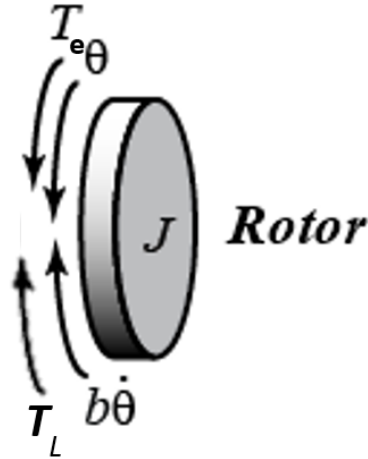


Figura 3.11: Fuerzas que actúan sobre el rotor de un motor DC ([19]).

Aplicando la Segunda ley de Newton a la figura anterior tenemos que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el rotor es proporcional a la masa de este por la aceleración del cuerpo. Ahora bien, dado que el movimiento del rotor del motor no es en forma rectilínea sino en rotacional procedemos a utilizar la Segunda ley de Newton para la rotación; que es prácticamente análoga a la anterior ([38]).

Esto es, la suma de los torques es igual al momento de inercia por la aceleración angular; de esta forma:

$$T_e - b\omega - T_L = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Se puede apreciar que los términos $b\omega$ y T_L van acompañados de un signo negativo, dado que estos son torques que se oponen al giro del rotor.

Es indispensable conocer el trasfondo del modelo matemático del motor DC, pues el modelo que estudiaremos en la siguiente sección se desprende de él en su totalidad.

3.2.2. Modelo matemático de un motor BLDC

El modelo del motor DC nos sirve de ayuda para modelar el motor BLDC. Lo primero que vamos a analizar será su parte eléctrica; así, lo que vemos en la imagen de la Figura ?? es el circuito de un motor BLDC, considerando sus tres fases.

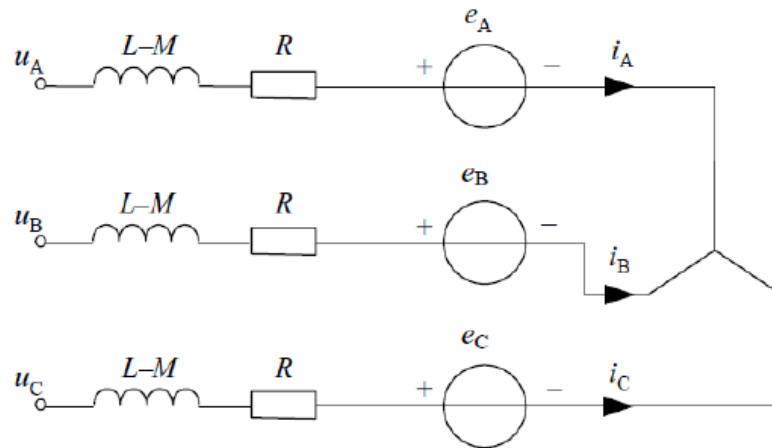


Figura 3.12: Circuito eléctrico de un motor BLDC ([18]).

A continuación aplicamos la Ley de tensiones de Kirchhoff en cada fase para obtener las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_A &= Ri_A + L_M \frac{di_A}{dt} + e_A; \\ v_B &= Ri_B + L_M \frac{di_B}{dt} + e_B; \\ v_C &= Ri_C + L_M \frac{di_C}{dt} + e_C; \end{aligned}$$

donde:

v_A, v_B, v_C simbolizan los voltajes de las fases A, B y C, respectivamente; R simboliza la resistencia; $L_M = L - M$ simboliza la inductancia menos la inductancia mutua; i_A, i_B, i_C son las corrientes de salida del motor y e_A, e_B, e_C son las fuerzas contraelectromotrices.

Posteriormente, restando las ecuaciones anteriores, se pueden obtener las tensiones de línea v_{AB} , v_{BC} y v_{CA} .

$$\begin{aligned} v_{AB} &= R(i_A - i_B) + L_M \frac{di_A}{dt} - L_M \frac{di_B}{dt} + e_A - e_B. \\ v_{BC} &= R(i_B - i_C) + L_M \frac{di_B}{dt} - L_M \frac{di_C}{dt} + e_B - e_C. \\ v_{CA} &= R(i_C - i_A) + L_M \frac{di_C}{dt} - L_M \frac{di_A}{dt} + e_C - e_A. \end{aligned}$$

En el motor BLDC trifásico, la fuerza contraelectromotriz está relacionada con la función de la posición del rotor y la velocidad del rotor; esto es, existe una relación proporcional entre el voltaje en el rotor y la velocidad angular de este.

La fuerza contraelectromotriz de cada fase tiene una diferencia de ángulo de fase de 120° , por lo que la ecuación de cada fase debe ser la siguiente:

$$\begin{aligned} e_A &= Kf(\theta)\omega; \\ e_B &= Kf\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\omega; \\ e_C &= Kf\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\omega; \end{aligned}$$

donde:

K es la constante de la fuerza contraelectromotriz,
 θ es el ángulo eléctrico del rotor; es decir, el ángulo entre los polos,
 ω es la velocidad angular del rotor.

La función f que aparece en las ecuaciones anteriores debe representar el hecho que no siempre tendremos alimentadas las tres fases; también debe representar el recorrido de una circunferencia dado que estamos hablando del ciclo que realiza el rotor, por lo tanto, debe estar acotada en el intervalo $[0, 2\pi]$. Además debe representar el momento en que estará alimentada cada fase, pues se puede apreciar que cada $\frac{2\pi}{3}$ ocurre un desfase en la alimentación. Más aún, los cuatro valores que puede tomar f indican las pendientes de las fuerzas contraelectromotrices de cada fase al momento de que se activa o se apaga como se ve en la Figura 3.9. De lo anterior, una propuesta de la función $f(\theta)$ está dada por:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{3}; \\ 1 - \frac{6}{\pi} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right), & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi; \\ -1, & \text{si } \pi \leq \theta < \frac{5\pi}{3}; \\ -1 + \frac{6}{\pi} \left(\theta - \frac{5\pi}{3} \right), & \text{si } \frac{5\pi}{3} \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

En la Figura 3.9 podemos ver a las tres fases del motor BLDC con 6 bloques, cada uno equivale a $\frac{\pi}{3}$ (o bien 60 grados) de giro del rotor y cada sector corresponde a una revolución eléctrica. Donde en el primer bloque se ilustra cómo el devanado rojo tiene una carga positiva, el de color verde tiene una carga negativa y el de color azul se encuentra apagado; en el segundo bloque el rojo continúa con carga positiva, el devanado verde se apaga y el azul tiene carga negativa; este proceso se continúa hasta llegar al bloque 6 y nuevamente se inicia con el bloque 1; es decir, este es el ciclo de funcionamiento interno de un motor BLDC. Cuando se encuentra activa una fase AB quiere decir que se coloca

una carga positiva a A y una carga negativa a B, mientras que a C lo apagamos.

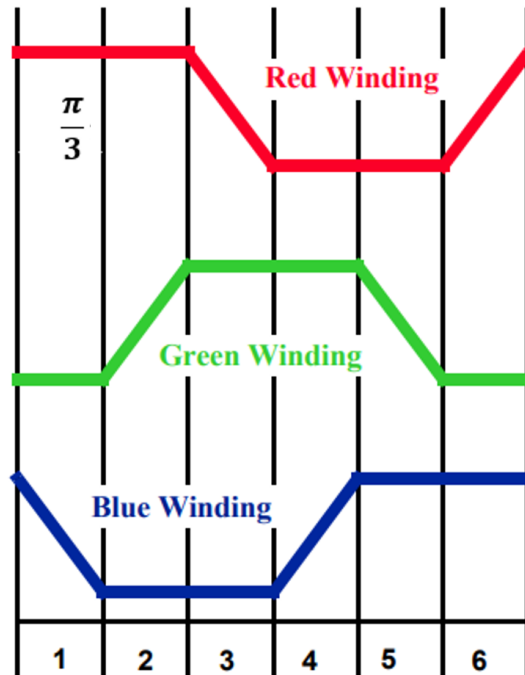


Figura 3.13: Fases del motor BLDC con 6 bloques ([24]).

Ahora bien, notemos que en la parte eléctrica del modelo lo que necesitamos encontrar son las corrientes i_A , i_B e i_C ; mientras que los datos que ya debemos conocer son la inductancia, la inductancia mutua, la resistencia y los voltajes con su fuerza electromotriz correspondiente a cada fase.

Por su parte, para la parte mecánica del modelo matemático del motor BLDC lo que necesitamos encontrar es la velocidad angular, a partir de los datos conocidos como los torques, la inercia y la constante de viscosidad.

Puesto que ya se han analizado tanto la parte eléctrica como la parte mecánica del motor BLDC, a continuación vamos a analizar la relación que existe entre ellas. Se puede ver que la potencia rotacional total es la suma de la potencias generada por cada fase, en otras palabras, esta potencia rotacional P es igual a la suma de los productos de cada fase con su fuerza contraelectromotriz. Así:

$$P = i_A e_A + i_B e_B + i_C e_C.$$

Por otro lado, la fórmula de la potencia rotacional es:

$$P = T_e \omega;$$

de aquí que tengamos que el torque total de salida o el torque eléctrico se puede representar mediante la suma de las tres fases. En consecuencia, se tiene la siguiente ecuación:

$$T_e = \frac{i_A e_A + i_B e_B + i_C e_C}{\omega};$$

que al sustituir las fuerzas contraelectromotrices obtenemos:

$$T_e = i_A K f(\theta) + i_B K f\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C K f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Dado que ya hemos obtenido las ecuaciones principales que describen la parte eléctrica y la parte mecánica de un motor BLDC, lo que haremos ahora es buscar relaciones entre las ecuaciones para obtener un modelo matemático del funcionamiento del motor, que contenga menos ecuaciones.

A continuación, vamos a reunir las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$L_M \frac{di_A(t)}{dt} = v_A(t) - R i_A(t) - e_A(t). \quad (3.1)$$

$$L_M \frac{di_B(t)}{dt} = v_B(t) - R i_B(t) - e_B(t). \quad (3.2)$$

$$L_M \frac{di_C(t)}{dt} = v_C(t) - R i_C(t) - e_C(t). \quad (3.3)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_e(t) - b\omega(t) - T_L(t). \quad (3.4)$$

$$e_A(t) = K f(\theta) \omega(t). \quad (3.5)$$

$$e_B(t) = K f\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \omega(t). \quad (3.6)$$

$$e_C(t) = K f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \omega(t). \quad (3.7)$$

$$T_e(t) = i_A(t) K f(\theta) + i_B(t) K f\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C(t) K f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (3.8)$$

Puesto que se supone que únicamente dos devanados de fase están conectados y sus corrientes son iguales y opuestas tenemos que, por ejemplo tomando la conducción de bobinado de las fases A y B:

$$i_A = -i_B.$$

Si denotamos por:

$$i_A = i;$$

entonces las ecuaciones de las tensiones de línea vistas en la sección anterior, estas se pueden reescribir como:

$$v_{AB} = 2Ri + 2L_M \frac{di}{dt} + e_A - e_B.$$

Indistintamente del proceso transitorio de conmutación, esto es, cuando las fases A y B son de conducción constante, el tamaño de e_A y e_B son iguales y el signo es opuesto; por lo tanto, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$v_{AB} = V_D = 2Ri + 2L_M \frac{di}{dt} + 2e_A = ri + l \frac{di}{dt} + K\omega; \quad (3.9)$$

donde $r = 2R$ y $l = 2L_M$.

Por otra parte, se tiene que en un motor de corriente continua con excitación independiente, la corriente de campo es constante y el torque eléctrico se puede representar mediante la ecuación:

$$T_e = K_t i.$$

donde T_e es la constante del torque eléctrico.

Sustituyendo la ecuación anterior en 3.4, se sigue que:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_t i(t) - b\omega(t) - T_L(t).$$

Considerando la condición sin torque de carga puesto que la podemos considerar despreciable ya que para acelerar, el motor debe ser más fuerte que la carga, se tiene que:

$$i = \frac{J}{K_t} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{b}{K_t} \omega(t). \quad (3.10)$$

Luego, sustituyendo 3.10 en 3.9

$$V_D = r \left(\frac{J}{K_t} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{b}{K_t} \omega(t) \right) + l \frac{d}{dt} \left(\frac{J}{K_t} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{b}{K_t} \omega(t) \right) + K\omega(t); \quad (3.11)$$

de aquí que,

$$V_D = \frac{Jl}{K_t} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{Jr + bl}{K_t} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{br + KK_t}{K_t} \omega(t). \quad (3.12)$$

Es con esta última ecuación con la que vamos a trabajar, pues se trata de la ecuación diferencial ordinaria de segundo grado que vamos a resolver, teniendo como constantes conocidas a J , l , K_t , r , b y K ; y como incógnita a la función $\omega(t)$ la cual es la velocidad angular del motor. Por otra parte, V_D es el voltaje necesario y conocido mediante el controlador (que veremos en el siguiente capítulo) que entrará a este sistema para poner en funcionamiento al motor y así mover las ruedas del vehículo.

En particular, esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea estará resolviéndose varias veces dentro del sistema de control con un voltaje distinto en cada ocasión. De igual forma, las soluciones que tenga 3.12 van a ser comparadas mediante una resta con las señales de referencia obtenidas gracias al diferencial electrónico; esto a su vez ocasionará una nueva función de error $e(t)$ la cual entrará a un bloque de control que se estudiará más adelante.

Posteriormente, en el capítulo 5 veremos la relación entre la última ecuación diferencial ordinaria, el controlador PID y las ecuaciones de las velocidades angulares obtenidas en el capítulo anterior.

Una vez estudiado este capítulo ya conocemos hasta el momento las ecuaciones de Ackerman que funcionan como una señal de referencia dependiendo de a qué velocidad y con qué ángulo se tome la curva en el vehículo eléctrico. Además, no nos son desconocidos los procesos que se llevan a cabo en cada uno de los motores BLDC ubicados en cada una de las ruedas del auto, y por supuesto, la función de transferencia que recibirá un voltaje determinado por un dispositivo de control que se estudiará en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Diseño del controlador PID

En este capítulo veremos conceptos de la teoría de control, explicaremos lo que es un control y algunos tipos de controladores más utilizados en la ingeniería, sus características y propiedades fundamentales.

Al final del capítulo, nos enfocaremos en el análisis del controlador proporcional-integral-derivativo o con sus siglas controlador PID donde conoceremos sus parámetros y la utilidad que tiene cada uno de ellos, para llegar a la función de transferencia de este control.

4.1. Teoría de control

Para empezar a adentrarnos en la teoría de control y el diseño del PID es importante conocer algunos conceptos y palabras clave que se usarán a lo largo de este capítulo.

Un **sistema** es una mezcla de componentes que trabajan juntos y efectúan un objetivo específico. Podemos ver que un sistema no está limitado a los sistemas físicos, pues se puede aplicar a otros fenómenos abstractos como algunos que se encuentran en la economía. Por tanto, la palabra sistema debe comprenderse en un sentido amplio que se interprete en sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

El **control**, en la teoría de control es una herramienta que se encarga de manipular ciertas variables de un sistema con el objetivo de desarrollar un algoritmo que controle las entradas del sistema para conducir a este a un estado donde sea óptimo o deseado.

En nuestro caso, estamos buscando un control cuya función sea la de aportar un voltaje adecuado en los motores BLDC de un vehículo eléctrico para que las ruedas de estos respondan adecuadamente comparadas con unas señales de referencia al momento de tomar una curva.

La **señal de control o variable manipulada** es la condición o cantidad que el controlador debe modificar para afectar el valor de la variable controlada. Habitualmente,

la variable controlada es la salida del sistema. Controlar significa medir el valor de la variable controlada del sistema para así aplicar la variable manipulada al sistema y poder corregir o limitar la desviación del valor medido con respecto del valor deseado.

En el caso particular de esta tesis, la variable manipulada será el voltaje que se le aplicará a cada uno de los motores BLDC de las cuatro ruedas del vehículo eléctrico para que la salida sea la velocidad angular de las ruedas.

Una **planta** en teoría de control puede tratarse de una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo general es ejecutar una operación en específico. Así, se llamará planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (como un dispositivo mecánico, un aparato de calefacción, un reactor químico, etc). A menudo se hace referencia a una planta con una función de transferencia (comúnmente en el dominio s) que indica la relación entre una señal de entrada y la señal de salida de un sistema.

Podemos notar que será a los motores BLDC a los que consideraremos las plantas de este sistema de control, ya que cada uno va a recibir un voltaje diferente pero todos estarán restringidos al mismo control PID.

Un **proceso** es una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios notables que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado; o una operación artificial o voluntaria que se hace de forma progresiva y que consta de una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinado. Así, denominaremos proceso a cualquier operación que pueda ser controlada.

Una **perturbación** es una señal que afecta de forma negativa al valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se produce dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa se produce fuera del sistema y se debe considerar como una entrada al sistema.

El **control realimentado** indica una operación que, siempre y cuando haya perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y funciona teniendo en consideración esta diferencia.

Un **sistema de control realimentado** es aquel que mantiene una relación preestablecida entre la entrada de referencia y la salida, comparándolas y usando la diferencia como medio de control. Podemos poner como ejemplo, el sistema de control de temperatura de una habitación midiendo la temperatura real y comparándola con la temperatura deseada; de esta manera, el termostato aumenta o disminuye la temperatura para asegurar que esta se conserva en un nivel adecuado, ignorando las condiciones externas.

Existen diversos sistemas de control realimentados, entre ellos están algunos que tienen campos ajenos a las ingenierías. Por ejemplo, en sí mismo, el cuerpo humano es un sistema de control realimentado. Tanto la temperatura corporal como la presión sanguínea

se conservan constantes mediante una realimentación fisiológica.

Controles de lazo

En el **control de lazo abierto**, la acción de control del controlador es independiente de la salida del proceso, es decir, la salida obtenida del proceso no es comparada con la señal de referencia. Por otro lado, la regulación se hace mediante los resultados de mediciones previas.

Los sistemas de control de lazo abierto son sencillos y fáciles de implementar, no obstante, cuentan con algunas desventajas como que no compensan las posibles variaciones que puede tener la planta, ni las perturbaciones externas que puedan ocurrir.

En la Figura ?? podemos ver el diagrama correspondiente a un sistema de lazo abierto; en el cual tenemos una entrada, un bloque de control, un bloque de la planta y finalmente la salida correspondiente del sistema.

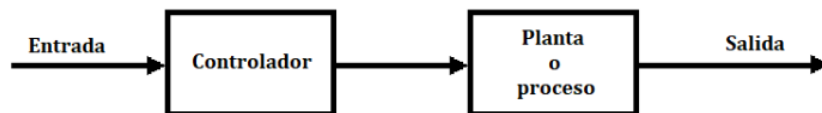


Figura 4.1: Diagrama de un sistema de lazo abierto.

Para clarificar este tipo de lazo, en la Figura ?? se tiene un control de lazo abierto para una lavadora, puesto que en ella opera un sistema en base al tiempo y a un programa ya establecido, sin embargo, este lazo no mide ni regula la limpieza actual de la ropa.

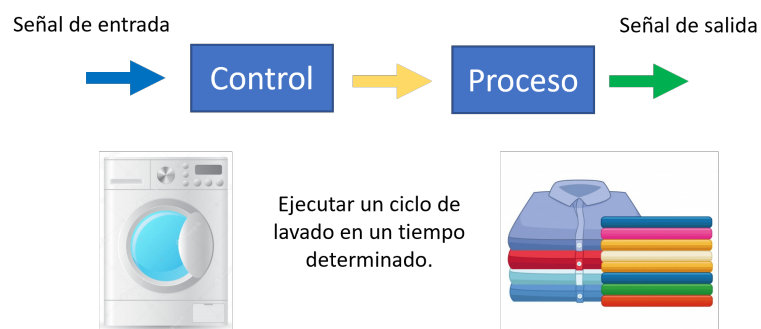


Figura 4.2: Diagrama de sistema de lazo abierto de una lavadora.

Un sistema de **control de lazo cerrado** es aquel en el que existe una retroalimentación de la señal de salida; es decir, en este tipo de controles la acción de control se ve afectada

por la señal de salida como se ve en la Figura 4.1. En esta, podemos apreciar una entrada al sistema, luego los bloques correspondientes al controlador y la planta, no obstante, cuando se consigue la salida del sistema esta regresa al bloque de control no sin antes pasar por un bloque de medición.

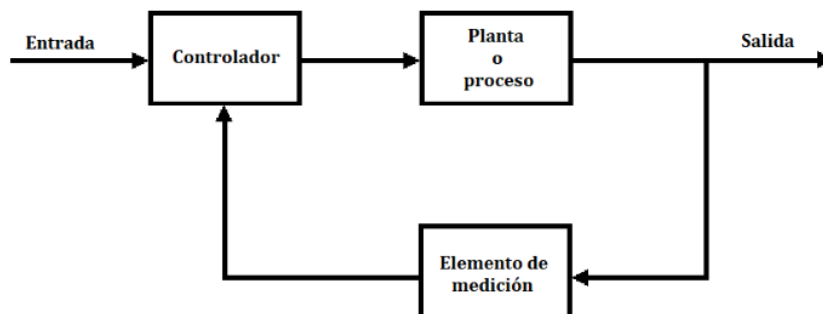


Figura 4.3: Diagrama de un sistema de lazo cerrado.

A diferencia del sistema de control de lazo abierto, una ventaja que tiene el sistema de control de lazo cerrado es que gracias al uso de la retroalimentación se tiene como consecuencia que la respuesta del sistema sea relativamente insensible a perturbaciones externas y a variaciones internas de parámetros del sistema.

Como ejemplo de un sistema de control de lazo cerrado tenemos a una caldera que necesitaría tener un termostato para comparar la temperatura del edificio con la temperatura establecida en el termostato. De esta forma, se generaría una salida del controlador para mantener el edificio a la temperatura esperada encendiendo y apagando la caldera, dependiendo del caso. En la Figura 4.2 se aprecia gráficamente el diagrama correspondiente a este ejemplo.

Podemos ver que en un controlador de lazo cerrado, el lazo de retroalimentación garantiza que el controlador realice una acción de control para poder dirigir la variable del proceso haciendo que sea aproximadamente igual o similar a la señal de referencia. Por ende, los controladores de lazo cerrado son llamados también controladores de retroalimentación.

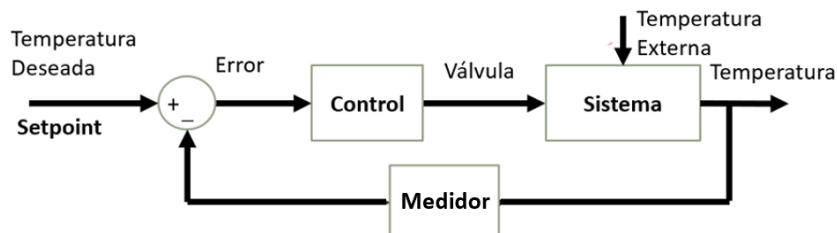


Figura 4.4: Diagrama de un sistema de lazo cerrado de una caldera.

En el capítulo de conceptos básicos podemos encontrar el concepto de función de transferencia, dicho esto; en un sistema con retroalimentación, la planta sigue teniendo la misma función de transferencia, pero se agregan al sistema una unidad de control y un lazo de retroalimentación (con sus respectivas funciones de transferencia).

Definición 4.1.1. La **sensibilidad** de un sistema se define como la relación entre el cambio porcentual en la función de transferencia del sistema y el cambio porcentual de la función de transferencia del proceso.

Lo que haremos a continuación, es encontrar la función de transferencia del control de lazo cerrado que usaremos en esta tesis. Para esto, nos apoyaremos de la Figura 4.3, en la que se muestra el diagrama del sistema de lazo cerrado con el que trabajaremos en esta tesis.

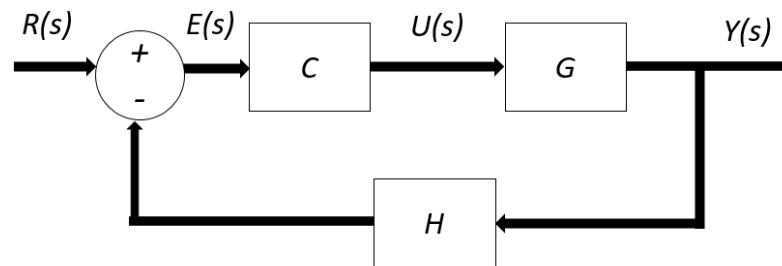


Figura 4.5: Diagrama de sistema de lazo cerrado.

En el diagrama,

$R(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de referencia en términos de s .

$E(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de error, es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la salida del sistema.

$U(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de control.

$Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida del sistema.

C indica la función de transferencia del controlador.

G es la función de transferencia de la planta.

H es el bloque de medición.

Una manera de simplificar este diagrama es englobar en un solo bloque G' a las funciones de transferencia del controlador y de la planta, de manera que

$$G' = CG.$$

De esta forma, se llega al diagrama de la Figura ??.

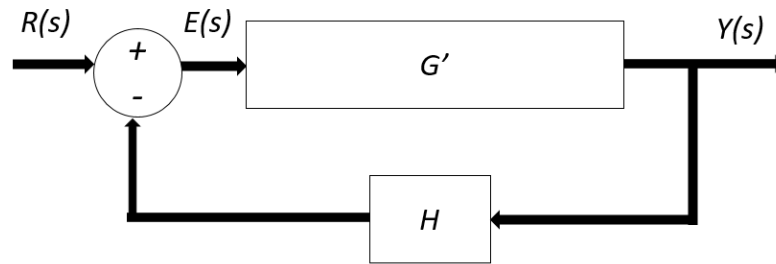


Figura 4.6: Diagrama de sistema de lazo cerrado simplificado.

Luego

$$Y(s) = E(s)G'(s).$$

$$Y(s) = (R(s) - H(s)Y(s))G'(s).$$

$$Y(s)(1 + H(s)G'(s)) = G'(s)R(s).$$

$$Y(s) = \frac{G'(s)R(s)}{1 + H(s)G'(s)}.$$

De aquí que, al calcular la función de transferencia del proceso de control $T(s)$ queda de la siguiente forma

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}.$$

Sustituyendo $Y(s)$ en la ecuación anterior queda finalmente

$$T(s) = \frac{G'(s)}{1 + H(s)G'(s)}. \quad (4.1)$$

Retomando el tema de la sensibilidad tenemos, que la ecuación de transferencia del sistema es $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, por lo tanto, por definición de sensibilidad, se tiene que

$$S = \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta G}{G}}.$$

Posteriormente en el límite, para pequeños cambios incrementales, obtenemos que:

$$S = \frac{G}{T} \frac{\partial T}{\partial G}.$$

Sensibilidad en sistemas de lazo abierto

En la Figura ?? tenemos al diagrama de un sistema de lazo abierto, será gracias a este con el que podemos apreciar las operaciones correspondientes para calcular la sensibilidad.

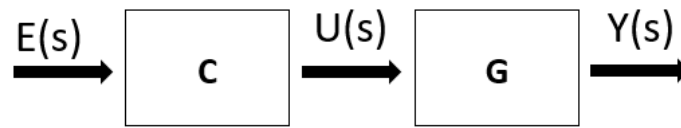


Figura 4.7: Diagrama de sistema de lazo abierto.

Tenemos que la función de transferencia T del sistema es

$$T = GC.$$

De esta forma, al calcular la sensibilidad

$$S = \frac{G}{GC} \frac{\partial}{\partial G}(GC);$$

luego:

$$S = 1;$$

por tanto, el sistema es completamente sensible.

Sensibilidad en sistemas de lazo cerrado

Por otro lado, tenemos a la Figura ??, en la cual se nos muestra un diagrama de un sistema de control de lazo cerrado con sus respectivas funciones de transferencia.

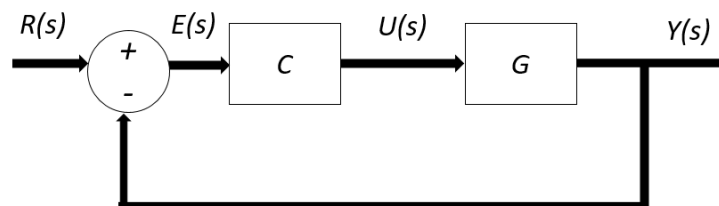


Figura 4.8: Diagrama de sistema de lazo cerrado.

Tenemos que la función de transferencia T del sistema está dada por

$$T(s) = \frac{GC}{1 + GC}.$$

Así, la sensibilidad

$$S = \frac{G}{GC} \frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{GC}{1 + GC} \right);$$

luego, calculando la ecuación diferencial parcial en el lado derecho de la igualdad se tiene

$$S = \frac{1 + GC}{C} \frac{(1 + GC)C - GC^2}{(1 + GC)^2};$$

posteriormente, simplificando la ecuación anterior nos queda:

$$S = \frac{1}{1 + GC}. \quad (4.2)$$

Este resultado de sensibilidad se calculará para el sistema de control resultante después de obtener a las funciones de transferencia del sistema de esta tesis. Es decir, la función de transferencia de la planta (3.15) y la función de transferencia que se obtendrá al final de este capítulo.

4.2. Tipos de control

Los controladores se pueden clasificar según el tipo de energía que utilizan para operar. Por ejemplo, los controladores hidráulicos utilizan fluidos, los controladores neumáticos utilizan aire comprimido. La mayoría de los controladores industriales emplean como fuente de energía la electricidad o un fluido presurizado, como el aceite o el aire; generalmente, se usan los tipos de controladores en función de la naturaleza de la planta.

En la siguiente subsección se explicarán algunos de los principales tipos de controladores industriales analógicos clasificados mediante sus acciones de control.

4.2.1. Controles de dos posiciones (on-off)

En un sistema de control de dos posiciones, el elemento de actuación sólo tiene dos posiciones fijas que, en la mayoría de los casos, son sencillamente encendido y apagado. El control de dos posiciones, de encendido y apagado o también llamado control bang-bang es relativamente barato y fácil de implementar, es por esto que su uso es muy común en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

Los controles de dos posiciones son usualmente dispositivos eléctricos que por lo regular cuentan con una válvula de acción por un solenoide eléctrico, además de que es uno de los controladores más básicos pero no de los más útiles.

En resumen, este tipo de control usa un algoritmo simple para revisar si la variable de proceso está por encima o por debajo de la señal de referencia como se ve en la Figura ??, donde la salida del control oscila alrededor del valor deseado.

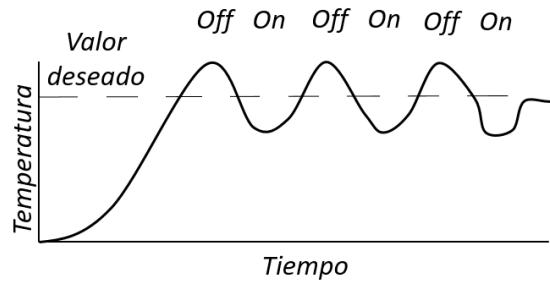


Figura 4.9: Diagrama de control on-off ([20]).

El control on-off está definido por la ecuación siguiente

$$u(t) = \begin{cases} U_1, & \text{si } e(t) > 0; \\ U_2, & \text{si } e(t) < 0; \end{cases}$$

donde $u(t)$ es la salida del controlador y $e(t)$ es la señal del error. Normalmente, U_1 y U_2 son constantes que cumplen $U_2 = -U_1$ o $U_2 = 0$.

4.2.2. Controles proporcionales (P)

El sistema de control proporcional es más complejo que un sistema de control de dos posiciones, pero menos complicado que un sistema de control proporcional integral derivativo.

Este tipo de control da una salida del controlador que es proporcional al error. Además, permite acercar el sistema a la señal de referencia y aumenta la velocidad del sistema; es decir, hace que el sistema reaccione al presente error, brindando una acción inmediata ante variaciones o perturbaciones.

Una desventaja de este tipo de controladores es el llamado offset o error en estado estacionario, el cual es solamente la diferencia entre el valor deseado y el valor real. El control proporcional por sí solo no puede eliminar este error ya que requiere un error para generar un ajuste de salida, es aquí de donde parten los demás tipos de controladores.

Ahora bien, el control proporcional está definido por la siguiente ecuación

$$u(t) = K_p e(t); \tag{4.3}$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad y $e(t)$ es la función de error; es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la señal obtenida en la realidad.

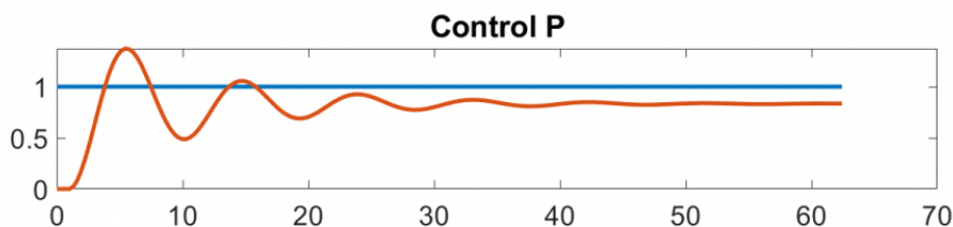


Figura 4.10: Gráfica de control P.

En la Figura 4.4 podemos ver la salida del sistema de control representada por la curva roja, mientras que la señal de referencia está dada por la recta de color azul. Podemos observar que en este ejemplo tenemos un error estacionario a partir de aproximadamente un tiempo $t = 40$.

El controlador P tiene como función de transferencia a:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p;$$

esta ecuación se obtuvo después de aplicarle la transformada de Laplace a la ecuación 4.3; donde como salida del sistema se tiene a $U(s)$ y como entrada a la función $E(s)$.

4.2.3. Controles integrales (I)

Este tipo de control da una salida del controlador que es proporcional a la integral de la señal de error. Los controladores integrales pueden devolver la variable controlada al punto de ajuste exacto después de una perturbación, por eso se conocen también como controladores de reinicio.

Así como los controles proporcionales, los controles integrales cuentan con algunas desventajas, una de ellas es que tiende a desestabilizar el sistema puesto que responde lentamente al error producido.

Normalmente este tipo de control no suele utilizarse por sí solo, por lo que regularmente se le suele ver acompañado del control proporcional o el control proporcional y derivativo.

La acción del control integral es la siguiente:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau; \quad (4.4)$$

donde K_i es la constante de integración y $e(t)$ es la función de error.

En la Figura 4.5 podemos ver el diagrama de control integral en lazo cerrado, donde en el bloque de control tenemos a la ecuación (4.4).

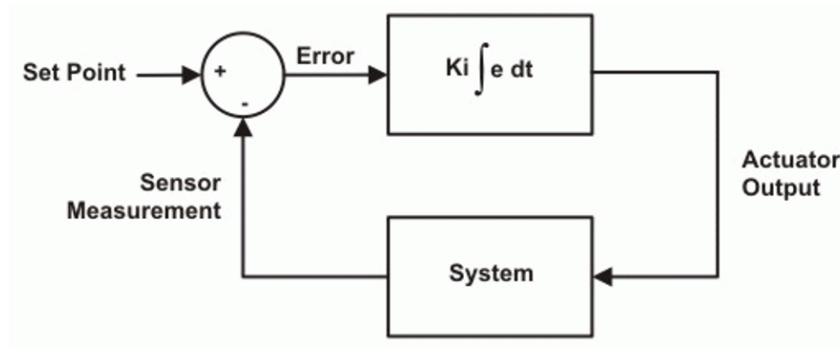


Figura 4.11: Diagrama control integral ([20]).

El controlador integral I tiene como función de transferencia a:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}.$$

De manera similar al control proporcional, esta última ecuación se obtiene al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de (4.4).

4.2.4. Controles proporcionales e integrales (PI)

Este tipo de control fusiona las características de los anteriores controles; la acción proporcional K_p ayuda a corregir más rápidamente el error como se vio anteriormente, mientras que la acción integral K_i tiene como misión eliminar en su totalidad el error en estado estacionario provocado por la parte proporcional, por lo que es uno de los controladores más utilizados. Con este tipo de control las condiciones de estabilidad son mejores que con el control integral solito.

Por otra parte, los pros y contras de este controlador son combinaciones de las ventajas y desventajas de los controladores proporcionales e integrales por sí solos.

La acción de este control es la siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau; \quad (4.5)$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad, K_i es la constante de integración y $e(t)$ es la función de error.

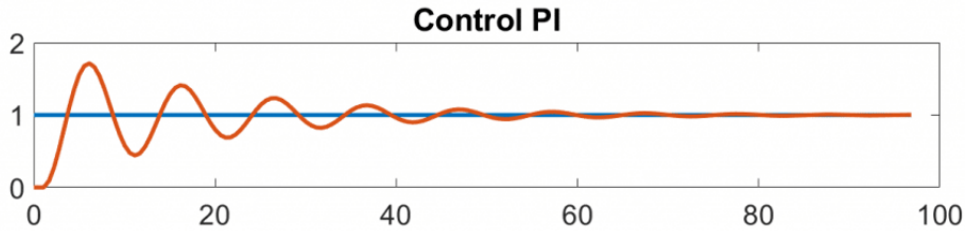


Figura 4.12: Gráfica de control proporcional integral.

En la Figura 4.6 se aprecia la salida del sistema de control representada por la curva de color rojo, a su vez, la recta de color azul ilustra la señal de referencia. Podemos notar que gracias a la inclusión del control integral no se presenta un error estacionario y se alcanza a la señal de referencia en un tiempo $t = 80$ aproximadamente; no obstante, tenemos la presencia de algunas oscilaciones que podemos eliminar con una parte derivativa.

El controlador *PI* tiene como función de transferencia a:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}.$$

Esta ecuación se obtuvo después de aplicarle la transformada de Laplace a la ecuación 4.5; donde como salida del sistema se tiene a $U(s)$ y como entrada a la función $E(s)$.

4.2.5. Controles proporcionales y derivativos (PD)

Este tipo de control añade a la parte proporcional una parte derivativa, esto ocasiona que si el error crece rápidamente, $u(t)$ será grande, ayudando a corregir el error en forma más efectiva. Es decir, la acción derivativa se presenta como un efecto anticipativo que impide un crecimiento brusco del error, por eso se dice que la parte derivativa de un controlador se basa en sumar los errores en un tiempo futuro mientras que la parte integral suma los errores pasados.

Por otra parte, el control PD es un control estabilizante, sin embargo, tiene la desventaja de amplificar las señales de ruido. Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir, que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande.

Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema. Por último, el control PD no es usado con frecuencia puesto que no cuenta con un término integral. Sin el término integral, el error en el funcionamiento no se minimiza en estado estacionario.

La acción de este control es la siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}; \quad (4.6)$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad, K_d es la constante de derivación y $e(t)$ es la función de error.

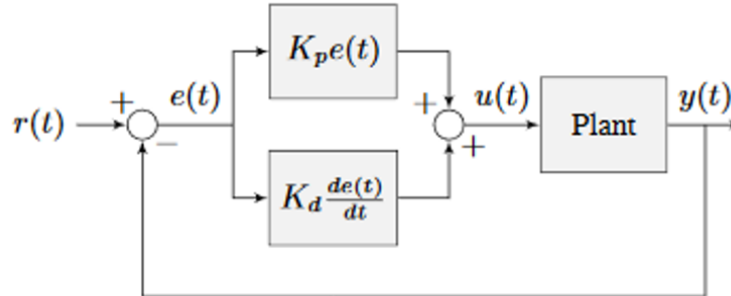


Figura 4.13: Diagrama de control proporcional derivativo.

En la Figura 4.7 podemos apreciar al sistema de control PD en lazo cerrado donde el bloque de control se separa en dos: uno para la acción proporcional que es $K_p e(t)$ y el otro para $K_d \frac{de(t)}{dt}$ que es la acción derivativa.

El controlador PD tiene como función de transferencia a:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s.$$

que para obtenerla, nuevamente fue necesario aplicar la transformada de Laplace pero ahora a la ecuación (4.6).

4.2.6. Controles proporcionales, integrales y derivativos (PID)

Este control es la unión del control proporcional derivativo y el integral, por lo que:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (4.7)$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad, K_i la constante de integración, K_d la constante de derivación y $e(t)$ es la función de error.

Podemos ver que lo que se ingresa a la ecuación (4.7) es el error $e(t)$, es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la salida del sistema; mientras que lo que se obtiene es la señal de control $u(t)$.

En la Figura 4.8 podemos apreciar la salida del sistema de control PID representada por la curva de color rojo, mientras que, con color azul se muestra la señal de referencia. A diferencia de los tipos de controles anteriores podemos notar que gracias a la inclusión

del control derivativo al control PI se alcanza a la señal de referencia en un tiempo aproximado de $t = 10$, no contamos con error en estado estacionario ni con oscilaciones muy pronunciadas.

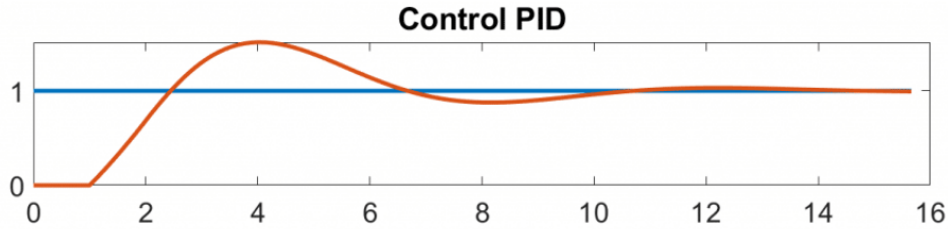


Figura 4.14: Diagrama de control proporcional integral derivativo.

Aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (4.7), asumiendo el hecho de que $E(0) = 0$ para trabajar en el dominio de s y obtener la función de transferencia del control PID:

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d s E(s).$$

Posteriormente dividimos la ecuación anterior por $E(s)$, puesto que la función $E(s)$ será nuestra señal de entrada del sistema; recordemos que una función de transferencia se establece como un cociente de la salida de un sistema entre la señal de entrada. De esta forma llegamos a:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d s E(s)}{E(s)}.$$

La siguiente ecuación a la que denominamos función de transferencia, es la que tiene como función de entrada a la función del error entre la señal de referencia y el valor real, y como función de salida la función del control:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (4.8)$$

Se puede ver que la acción proporcional K_p aumenta la rapidez de la respuesta y actúa solo en el transitorio, ya que al final la acción integral $\frac{K_i}{s}$ elimina el error de estado estacionario; la acción derivativa $K_d s$ actúa para mejorar la estabilidad.

4.3. Estudio del control PID

Los controladores tipo PID nacieron para el control automático de barcos, y puede atribuírsele la invención al científico Nicolás Minorsky ([27]). Minorsky había analizado

las propiedades de los controladores tipo PID en su publicación, la cual constituye una de las primeras discusiones sobre Teoría de Control, describe el uso de los controladores de tres términos para la dirección de un buque.

No obstante, la idea de un controlador que consistiera en tres términos fue introducida hasta finales de 1930; se dice que fue Taylor Instrument Company la que introdujo el primer controlador de este tipo, primero en 1936 con una constante derivativa fijada en fábrica y luego por fin, en 1939, con una acción derivativa variable ([3]).

4.3.1. Funcionamiento del controlador PID

La función vital del controlador PID y de todo controlador es lograr que la señal de salida del sistema sea lo más cercana posible a la señal de referencia dada.

Lo primero que se debe hacer en el análisis y diseño de un sistema de control es obtener un modelo matemático de la planta con el que se desea trabajar. Cuando no se conoce el modelo matemático de la planta y si la planta es tan compleja que su modelo matemático no se obtiene fácilmente, el método analítico para diseñar un controlador PID tampoco es posible. En este caso, se deben utilizar los procedimientos experimentales para poder sintonizar adecuadamente los controladores PID.

Si es posible obtener el modelo matemático de la planta lo siguiente es encontrar los valores de las ganancias del control PID, es decir, los valores de K_p , K_i y K_d pues serán estos valores los más importantes a la hora de que funcione correctamente nuestro sistema de control. Al proceso de calcular las ganancias se le denomina sintonización y para llevar a cabo este proceso existen diversos métodos que más adelante se explicarán con mayor detenimiento.

Una vez se ha sintonizado al controlador PID solo resta verificar si los valores de las ganancias encontrados son los adecuados, para esto podemos apoyarnos de algún software como SIMULINK de Matlab. Si la señal de salida del sistema se aproxima adecuadamente a la señal de referencia calculada entonces podemos decir que nuestro sistema de control es adecuado.

Muchos procesos industriales se controlan utilizando controladores proporcionales integrales derivativos; la popularidad de estos puede atribuirse en parte a su buen comportamiento en un amplio intervalo de condiciones de operación y en parte a su sencillez funcional, lo cual permite a los ingenieros operar con ellos de manera sencilla y directa.

Ventajas y desventajas del controlador PID

La principal ventaja del controlador PID es su viabilidad y su fácil implementación, es decir, las ganancias proporcional, integral y derivativa se pueden diseñar en función del sistema.

Sin embargo, el controlador PID generalmente tiene que equilibrar el impacto de las tres ganancias en todo el sistema y puede comprometer la respuesta transitoria, como el tiempo de estabilización, los sobreimpulsos y las oscilaciones. Si los parámetros del sistema no se pueden estimar o lograr con precisión, es posible que las ganancias PID diseñadas no resistan las incertidumbres y las perturbaciones y, por lo tanto, presenten una baja

robustez.

4.3.2. Importancia de los parámetros en el controlador PID

Es fundamental conocer los valores de los parámetros K_p , K_i y K_d puesto que son estas ganancias las que se calibran para que la respuesta del control sea lo más estable, rápida y sin oscilaciones posible. Se sabe que:

Cuanto más grande es el valor de K_p , más lenta es la aproximación del valor de la variable a la preselección, pues la acción proporcional empieza antes evitando así oscilaciones innecesarias. En cambio, el sistema también se vuelve lento en su reacción ante perturbaciones.

Por su parte, el tiempo integral τ_i influye en la eliminación del error estacionario del sistema. De este modo, al aumentar su valor se consigue un sistema más oscilante y menos preciso (se desvía más del valor de la preselección sobrepasando su set point).

La constante derivativa τ_d , desacelera tanto la subida y bajada del Process Value (PV), para intentar adelantarse a la acción de la inercia del sistema. Gracias a esta constante, si se aumenta el tiempo derivativo, se incrementa el frenado de la variable y hacemos el sistema más lento pero menos oscilante. En cambio, si se disminuye el valor de dicha constante, el sistema se vuelve más rápido pero menos estable (más oscilante) ya que se disminuye el freno de la inercia del sistema.

En algunos casos encontraremos que las constantes anteriores se pueden reescribir de manera un tanto diferente como se ve a continuación:

Para la constante de integración tenemos:

$$K_i = \frac{K_p}{\tau_i};$$

donde τ_i es el tiempo requerido para que la acción integral iguale el valor de la acción proporcional.

Por otro lado, para la constante de derivación:

$$K_d = K_p \tau_d;$$

en la cual τ_d es el tiempo requerido para que la acción derivativa iguale el valor de la acción proporcional.

Estos tiempos de integración vienen a partir de la ecuación (4.7), es decir

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt},$$

y lo único que se hace es factorizar el término de la ganancia proporcional

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right).$$

Fueron estos tiempos τ_i y τ_d , además de la ganancia proporcional K_p los que los autores Ziegler y Nichols propusieron cómo encontrar en [40].

Existen diversos métodos para ajustar estos parámetros, los cuales mencionaremos en la siguiente sección.

4.4. Sintonización de un control PID

4.4.1. Métodos de Ziegler-Nichols

El control PID es el algoritmo de control retroalimentado más usado en la industria, por lo que en muchos casos los valores K_p , τ_i y τ_d se encuentran ya definidos, no obstante algunas veces estos mismos valores no son por completo los adecuados para llevar a cabo el objetivo del control. Es por eso que suelen ser rectificadas por diversos métodos ya establecidos.

Al procedimiento de modificar las ganancias del controlador PID para lograr un comportamiento deseado del sistema se le llama sintonización del controlador. John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols crearon estas reglas de ajuste alrededor del año de 1942 y desde entonces son unos de los métodos de sintonización más utilizados y difundidos en la teoría de control.

Método de Ziegler-Nichols

Ziegler y Nichols propusieron especificaciones para determinar los valores adecuados de la ganancia proporcional K_p , del tiempo integral τ_i y del tiempo derivativo τ_d , basándose en respuestas de diversas plantas con sus respectivas funciones de transferencia. Algunas entradas experimentales al sistema fueron de tipo escalón y otras se basaron completamente en el valor de la ganancia proporcional K_p , estas últimas mostraban una salida de comportamiento oscilatorio con una misma amplitud cuando solo se usaba la acción de control proporcional ([40]). Existen dos métodos denominados reglas de sintonía de Ziegler-Nichols que son muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas, no obstante en este trabajo no se da ese caso pues ya hemos planteado el modelo matemático del motor BLDC. A continuación se enuncian estos dos métodos.

Método basado en la curva reacción

También conocido como método de lazo abierto; esta regla se puede utilizar siempre y cuando se cumplan algunas condiciones. La primera de ellas es que la entrada de la planta será de tipo escalón (normalmente de escalón unitario). Otra más y la más importante es que la salida de la planta se comporte de forma sigmoidal; es decir, que no posea una

dinámica integradora que aumente constantemente con el tiempo o que se comporte oscilatoriamente, sino que tenga la figura de una S.

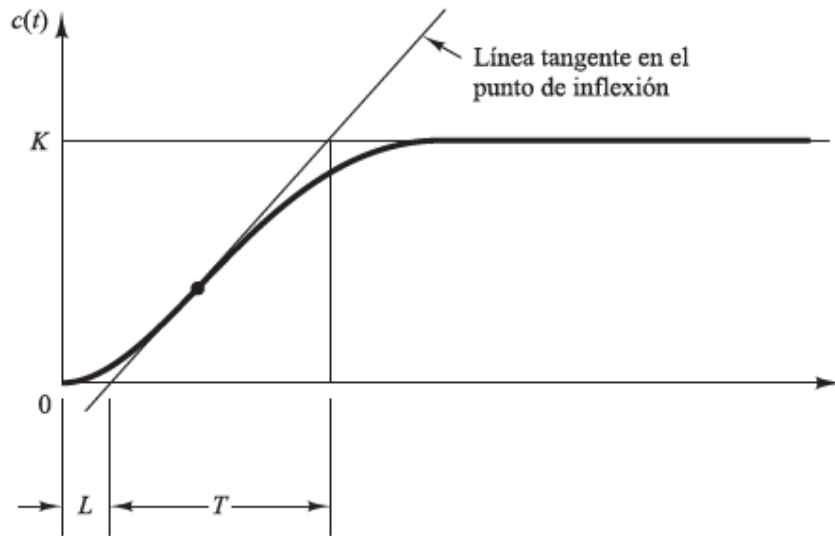


Figura 4.15: Curva en forma de S ([29]).

La curva con forma de S se define por dos parámetros: el tiempo de retardo L el cual es el tiempo que ocurre cuando la salida responde al cambio en la señal de entrada; por otro lado, la constante de tiempo T es el tiempo de subida. El tiempo de retardo y la constante de tiempo se obtienen graficando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la recta constante K , la cual es la ganancia del sistema; de esta forma, debemos encontrar una función de transferencia de forma que la función de salida de la planta se comporte como la Figura 4.9; una buena opción es fijarnos en los sistemas de primer orden, en este caso en particular, con retardo.

Recordemos que los sistemas de primer orden están representados por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de esta manera se tiene

$$T \frac{dc(t)}{dt} = KH(t-L)u(t-L) - c(t);$$

donde T , K y L son constantes distintas de cero y donde $H(t-L)$ es la función heaviside.

Aplicando la transformada de Laplace para poder llegar a una función de transferencia y asumiendo el hecho que $C(0) = 0$ se sigue que:

$$TsC(s) = Ke^{-Ls}U(s) - C(s).$$

Reagrupando términos se sigue que

$$TsC(s) + C(s) = Ke^{-Ls}U(s),$$

luego, al factorizar a $C(s)$:

$$(Ts + 1)C(s) = Ke^{-Ls}U(s),$$

posteriormente, se tiene que:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}e^{-Ls};$$

o bien:

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1};$$

donde $C(s)$ será la función de transferencia de la salida del sistema, $U(s)$ la función de transferencia del controlador y $G(s)$ la función de transferencia de un sistema de primer orden.

Lo que resta verificar es si la función de transferencia $G(s)$ se comporta de manera adecuada, esto es, si la salida del sistema $c(t)$ tiene una forma sigmoidal.

Así tenemos que:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1},$$

luego, al multiplicar en ambos lados de la igualdad por $U(s)$ se tiene:

$$C(s) = \frac{Ke^{-Ls}U(s)}{Ts + 1}.$$

Dado que se estableció que la función de salida es un escalón unitario tendremos que $U(s) = \frac{e^{-as}}{s}$, luego:

$$C(s) = \frac{K}{Ts + 1} \frac{1}{s} e^{-(L+a)s},$$

que se puede reescribir como:

$$C(s) = \left(\frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts + 1} \right) e^{-(L+a)s},$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, obtenemos:

$$c(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t-L-a}{T}} \right) H(t-L-a).$$

Ahora bien, podemos ver que cuando $a = 0$ en la ecuación anterior, la expresión para $c(t)$ se reduce a:

$$c(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t-L}{T}} \right) H(t-L);$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 4.9, para valores de $K = 1.38$, $L = 1.035$ y $T = 160$, que fueron obtenidos sintonizando un control PID de una planta aleatoria.

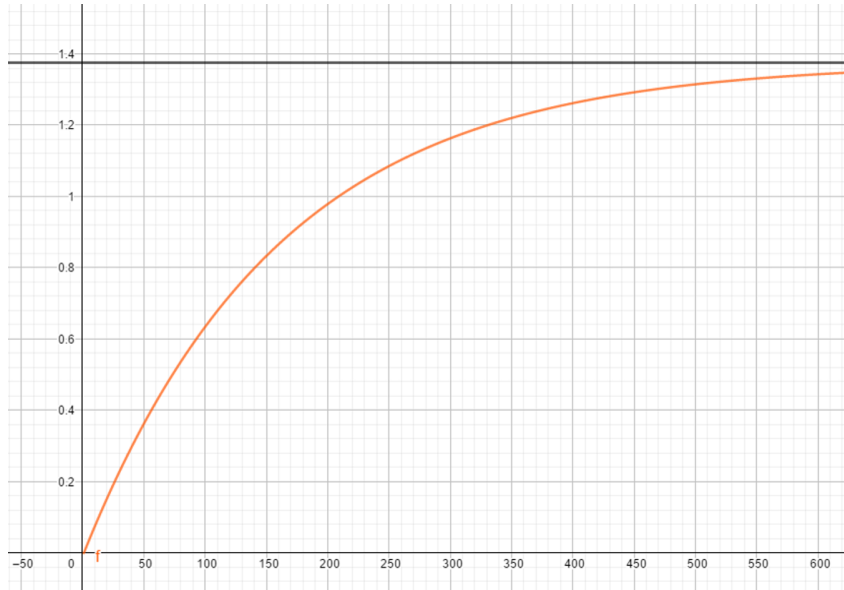


Figura 4.16: Salida de un sistema de control con una señal de tipo escalón unitario como entrada.

Podemos ver en la Figura 4.10 a la gráfica de la función de salida, mientras que la recta negra representa la ganancia $K = 1.38$.

Ahora bien, la siguiente tabla establecida por Ziegler-Nichols nos ayudará para determinar los valores de los parámetros K_p , K_i y K_d según sea el caso del controlador con el que trabajemos ([29]).

Tipo de controlador	K_p	τ_i	τ_d
<i>P</i>	T/L	∞	0
<i>PI</i>	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
<i>PID</i>	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

Cuadro 4.4.1: Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta ([29]).

Recordemos que las ganancias integral y derivativa se pueden escribir respectivamente como:

$$K_i = \frac{K_p}{\tau_i}.$$

$$K_d = K_p \tau_d.$$

A su vez, existen varios métodos para calcular el punto de inflexión de la salida del sistema. En este trabajo utilizaremos el método de Smith descrito en [36], ya que es un método gráfico y permite calcular analíticamente los parámetros L y T .

Método de Smith

El autor de este método menciona que para esta técnica no es necesario trazar la recta tangente en el punto de inflexión de la curva resultante de la salida del control de la planta con la que se está trabajando; para encontrar los parámetros aproximados basta con seleccionar dos puntos en la curva de reacción del proceso como se ve en la Figura ??.

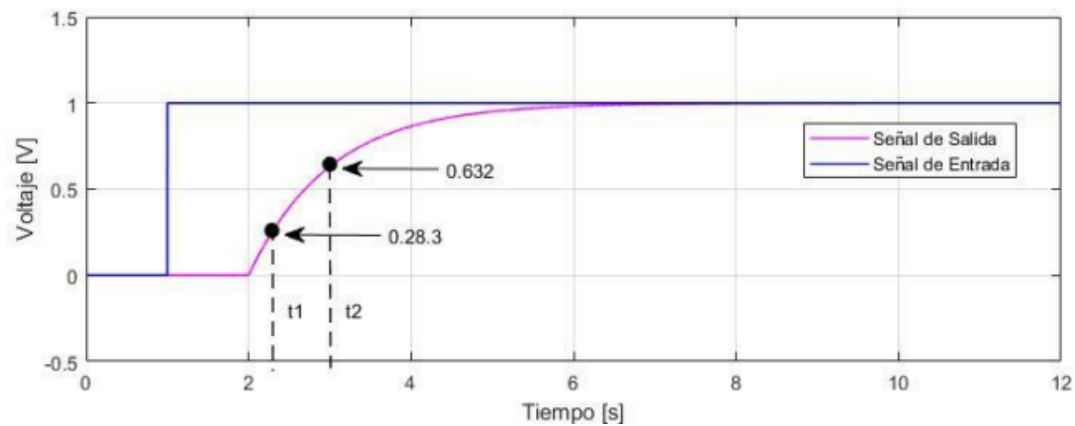


Figura 4.17: Método de Smith aplicado a la salida de control de una planta arbitraria ([22]).

Smith propuso que estos puntos fueran el 28.3% y 63.2% del valor final del proceso, luego de esto, vemos cuáles son los valores de las abscisas correspondientes a estos dos puntos, denotadas por t_1 y t_2 . En el caso de la gráfica ilustrada en la Figura ?? tenemos de manera aproximada que $t_1 = 2.2$ y $t_2 = 3$.

La finalidad del método de Smith es hallar dos tiempos L y T , para esto se construyen dos ecuaciones con dos incógnitas seleccionando adecuadamente los dos puntos dichos en la curva de reacción; una vez obtenidos los tiempos t_1 y t_2 lo que resta es calcular a L y T con las ecuaciones dadas en [36], así:

$$T = 1.5(t_2 - t_1).$$

$$L = 1.5 \left(t_1 - \frac{t_2}{3} \right).$$

Antes de pasar al siguiente método de sintonización podemos hacer uso de un ejemplo para que se logre apreciar de mejor manera el funcionamiento de este método.

Tenemos la función de transferencia de una planta en particular que es la siguiente

$$P_1(s) = \frac{0.0677}{s^2 + 13.4853s + 0.049}.$$

Posteriormente al darle una entrada de tipo escalón unitario, según el software SIMULINK se tiene el comportamiento de la Figura ??.

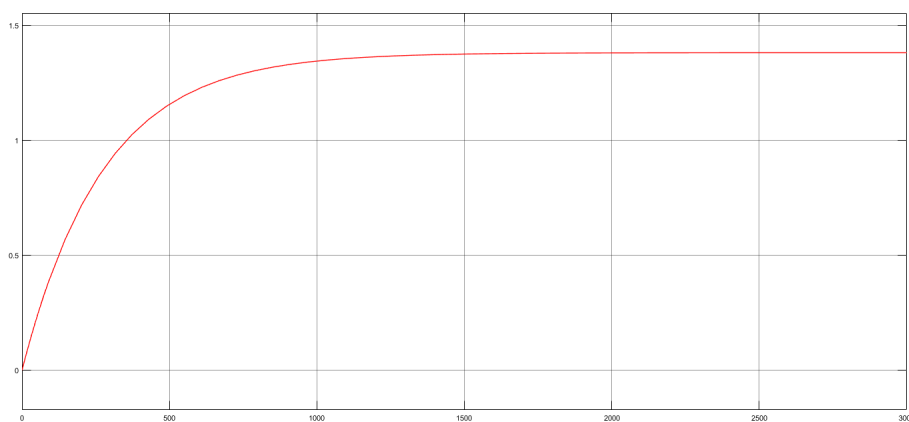


Figura 4.18: Salida del sistema en forma sigmoideal.

Una vez analizando gráficamente a la salida del sistema aplicamos el método de Smith teniendo como resultado los siguientes tiempos

$$t_1 = 60.24.$$

$$t_2 = 162.65.$$

Sustituyendo estos últimos datos en las ecuaciones correspondientes para hallar nuestros L y T :

$$T = 153.615.$$

$$L = 9.035.$$

Ahora bien; con estos valores de L y T y utilizando la información de la tabla 4.4.1, se tienen los valores de los parámetros del controlador PID.

$$K_p = 21.2507.$$

Que a su vez serán

$$K_i = 1.17602.$$

$$K_d = 96.$$

Una vez obtenidas las ganancias del controlador PID podemos ver cómo trabaja este mediante el software SIMULINK, para esto además de las mismas ganancias necesitamos una señal de referencia que en este caso será $r(t) = 6.08773$ y la propia función de transferencia de la planta $P_1(s)$; de esta forma se tendrá un diagrama de sistema de control de lazo cerrado cuya salida tiene el resultado de la Figura 4.11.

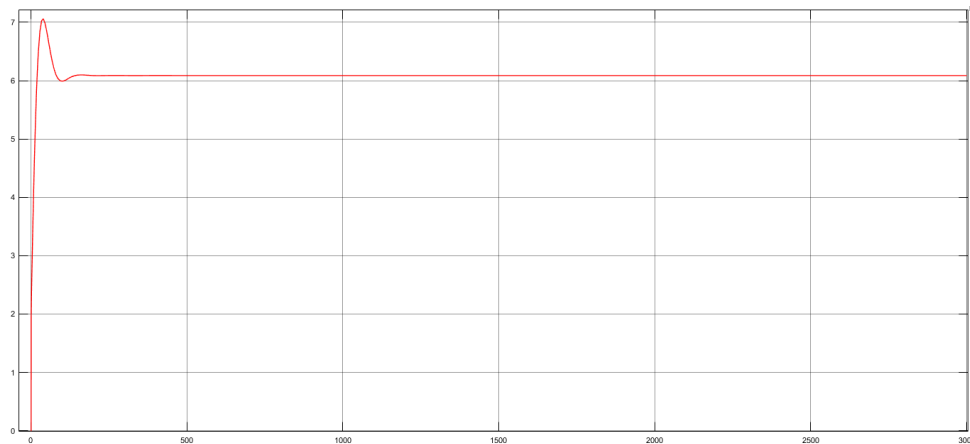


Figura 4.19: Salida del sistema de control PID aplicando el método basado en la curva de reacción a la función de transferencia de la planta $P_1(s)$.

Donde podemos apreciar que la salida del sistema de control alcanza a la señal de referencia $r(t) = 6.08773$ en un tiempo aproximado de $t = 150$, no se presentan oscilaciones ni el error en estado estacionario, por lo que podemos apreciar con claridad la finalidad del control PID usando el método de sintonización basado en la curva de reacción.

Método de oscilación

También conocido como método de lazo cerrado, es utilizado en sistemas que pueden tener oscilaciones sostenidas. Primero se eliminan los efectos de la parte integral y derivativa, y se mantiene la parte proporcional; gracias a esto, podemos encontrar un valor proporcional K_{cr} que haga que el sistema tenga oscilaciones sostenidas como las que se ven en la Figura 4.12; para esto podemos ir dando valores a la ganancia proporcional K_p desde 0 hasta algún valor $K^* > 0$, que provoque oscilaciones sostenidas; este valor K^* es el valor K_{cr} que buscamos.

Si no se logra encontrar alguna ganancia que consiga hacer oscilar al sistema, entonces este método de oscilación no puede ser aplicado.

Una vez obtenido el valor K_{cr} es primordial hallar ahora el periodo P_{cr} pues este será indispensable para sintonizar al control PID.

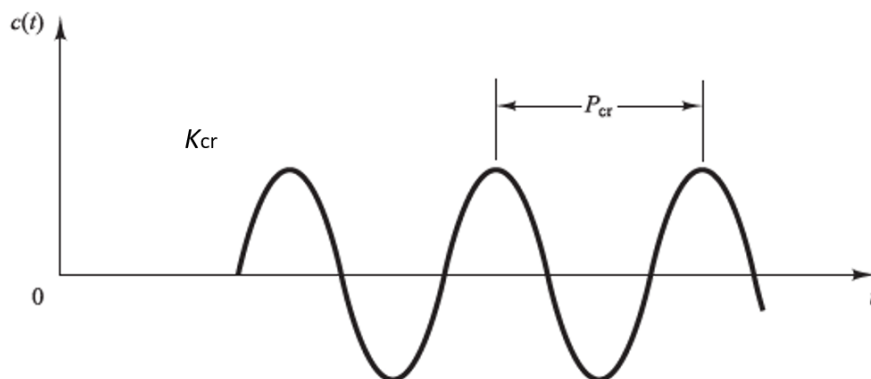


Figura 4.20: Oscilación de la curva $c(t)$ donde se tiene un periodo constante P_{cr} gracias al valor K_{cr} encontrado con anterioridad ([29]).

Mediante estos dos parámetros conocidos procedemos a encontrar las constantes de nuestro controlador PID, utilizando la regla de sintonía de Ziegler y Nichols, dada en la tabla 4.4.2:

Tipo de controlador	K_p	τ_i	τ_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Cuadro 4.4.2: Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica K_{cr} y periodo crítico P_{cr} ([29]).

Finalmente, se colocará un ejemplo para ilustrar el funcionamiento del método de oscilación tal como se hizo con el método anterior. Esta vez se contará con una nueva planta cuya función de transferencia es:

$$P_2(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}.$$

Primero vamos a hallar K_{cr} , dando valores al parámetro K_p , desde valores cercanos a cero hasta un valor positivo K^* , que provoque que la salida del sistema presente oscilaciones sostenidas con la misma amplitud en cada onda.

Así, dando valores a prueba y error tenemos las siguientes salidas del sistema, nuevamente gracias a SIMULINK.

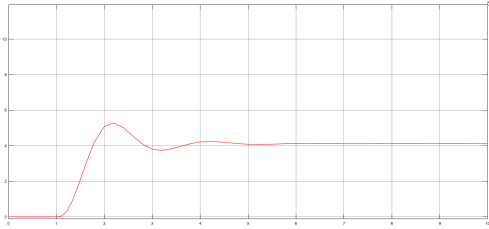


Figura 4.21: Salida del sistema de control con $K_p = 50$.

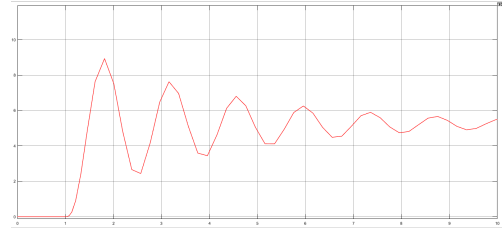


Figura 4.22: Salida del sistema de control con $K_p = 150$.

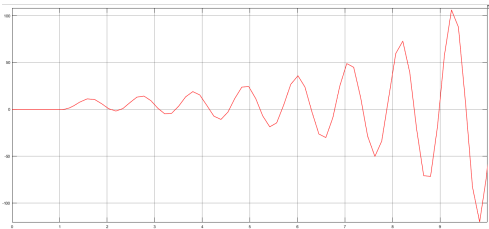


Figura 4.23: Salida del sistema de control con $K_p = 300$.

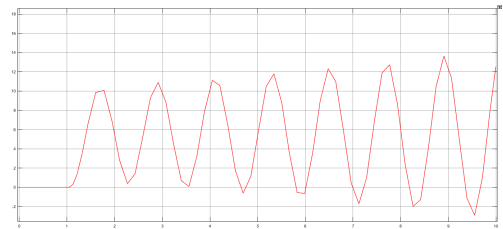


Figura 4.24: Salida del sistema de control con $K_p = 225$.

Así sucesivamente hasta llegar a

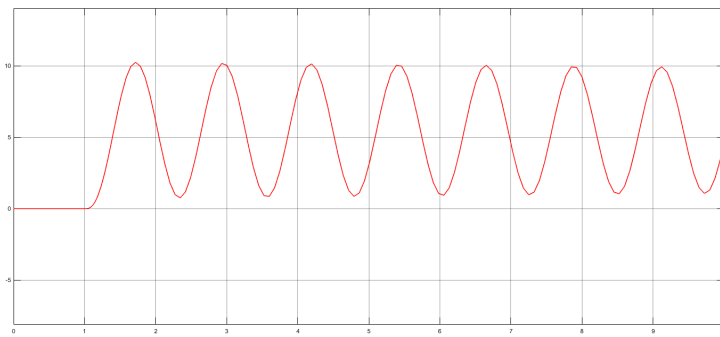


Figura 4.25: Salida del sistema de control con $K_p = 210$.

Analizando la figura anterior podemos ver que hemos encontrado un K_{cr} adecuado pues la salida del sistema tiene oscilaciones con una misma amplitud y por lo tanto, se puede ver que $P_{cr} = 1.2$ por lo que haciendo uso de la tabla 4.4.2 se tienen los siguientes parámetros:

$$K_p = 126.$$

$$K_i = 210.$$

$$K_d = 18.9.$$

Obtenidas las ganancias del controlador PID podemos ver cómo se comporta este, nuevamente mediante el software SIMULINK, recordemos que para esto además de las mismas ganancias se necesita una señal de referencia que en este caso será $r(t) = 6.125$ y la función de transferencia de la planta $P_2(s)$; de esta forma se tendrá un diagrama de sistema de control de lazo cerrado cuya salida tiene el resultado de la Figura 4.18.

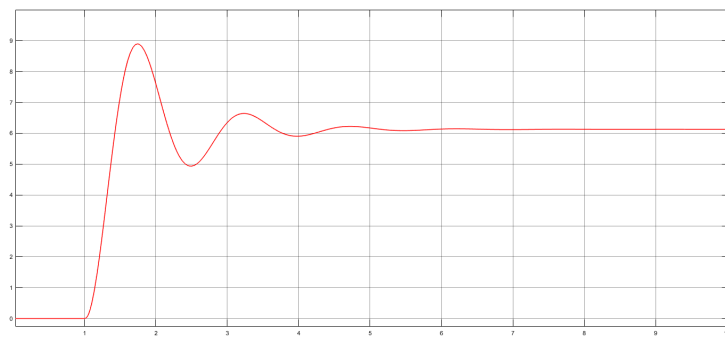


Figura 4.26: Salida del sistema de control PID aplicando el método de oscilación a la función de transferencia de la planta $P_2(s)$.

En la cual se puede apreciar que la salida del sistema de control alcanza a la señal de referencia $r(t) = 6.125$ en un tiempo aproximado de $t = 6$, no se presentan muchas oscilaciones ni el error en estado estacionario, por lo que podemos apreciar con claridad la finalidad del control PID usando el método para sintonizar de oscilación.

En el siguiente capítulo finalmente explicaremos la relación entre el diferencial electrónico, el modelo matemático del motor BLDC y el control PID.

Capítulo 5

Relación entre el diferencial electrónico, motor BLDC y el control PID

En este capítulo abordaremos la conexión entre el motor eléctrico, el diferencial electrónico y el controlador; para ello, utilizaremos los modelos matemáticos obtenidos en los capítulos 2, 3 y 4 de la tesis. También daremos algunos ejemplos sintéticos que muestran cómo funcionan los tres elementos en conjunto y mostraremos su implementación numérica, poniendo énfasis en la implementación del controlador PID a los motores BLDC para mostrar la respuesta del sistema a distintos tipos de señales de referencia que existen en la práctica.

5.1. Relación entre el diferencial electrónico, el motor y el controlador

Recordemos que el principal objetivo del dispositivo de control es controlar los motores BLDC ubicados en las ruedas del vehículo eléctrico al momento de tomar una curva; para esto, debe realizar una comparación entre la posición real de las llantas y la posición de referencia; a partir del error de comparación, el controlador envía una señal al motor indicando un voltaje adecuado que permita disminuir dicho error, esto se hace repetidas veces y de forma muy rápida.

Es en esta primera etapa donde el diferencial electrónico juega un papel importante, pues el usuario le indica al vehículo, con qué ángulo y velocidad viajará en una curva como se muestra en la Figura ?? en sus bloques color rosa; de esta forma, al diferencial electrónico entran dos señales, las cuales son: la velocidad deseada del VE y el ángulo de giro, ambas señales dependerán del tiempo y del tipo de curva que se tome. Por ejemplo, cuando el vehículo va en línea recta a una cierta velocidad lineal V_f indicada por el pedal del acelerador y de pronto el conductor decide girar el volante; este giro del volante se traduce en un giro de las llantas a un cierto ángulo θ ; es decir, estas acciones dependen del conductor y se convierten en los valores de θ y V_f que los datos de entrada del modelo del diferencial electrónico, que se ha revisado en el capítulo 2.

Posteriormente, a partir de las ecuaciones de la velocidad angular de cada rueda, de la velocidad lineal y el ángulo de giro, podemos encontrar las velocidades angulares de cada rueda en función del tiempo, estas son las ecuaciones 2.14 a 2.17 obtenidas después de haber estudiado la geometría de Ackermann.

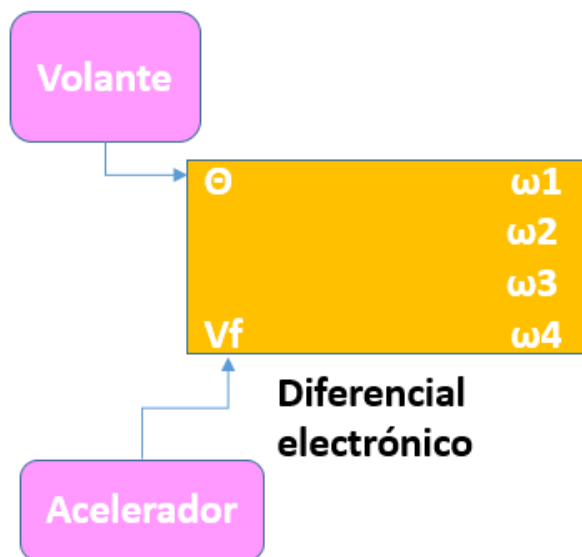


Figura 5.1: Diagrama del diferencial electrónico, donde θ y V_f representan el ángulo de giro y la velocidad lineal a la que se gira el vehículo eléctrico, respectivamente.

A continuación mostraremos la relación entre el diferencial electrónico y el motor. Para ello, observemos que, una vez que se conocen los valores del ángulo de giro y de la velocidad lineal del vehículo, se obtendrá que el diferencial electrónico recibirá estos datos y nos regresará como salida los valores de los ángulos ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 , que son las llamadas señales de referencia a las que debe girar cada rueda del vehículo.

Por su parte, cada motor recibe una señal de entrada que es el voltaje y devuelve como salida la velocidad angular real de la rueda en la que está colocado, esto gracias al análisis realizado en el capítulo 3.

De lo anterior, vemos la necesidad de relacionar estas dos partes importantes del vehículo eléctrico. Esta conexión entre el diferencial electrónico y el motor de cada rueda, resulta ser el control; ya que el control recibe como entrada a las velocidades angulares de referencia de cada rueda (salida del diferencial electrónico) y a las velocidades reales (salida del modelo del motor), los compara y envía un voltaje eléctrico al motor adecuado para disminuir el error entre las velocidades angulares de referencia y las reales.

En la Figura 5.1 podemos ver la relación que existe entre el diferencial electrónico y los motores BLDC; es decir, tenemos las señales de referencia denotadas por ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 que se comparan con las velocidades angulares reales de cada rueda ω'_1 , ω'_2 , ω'_3 y ω'_4 .

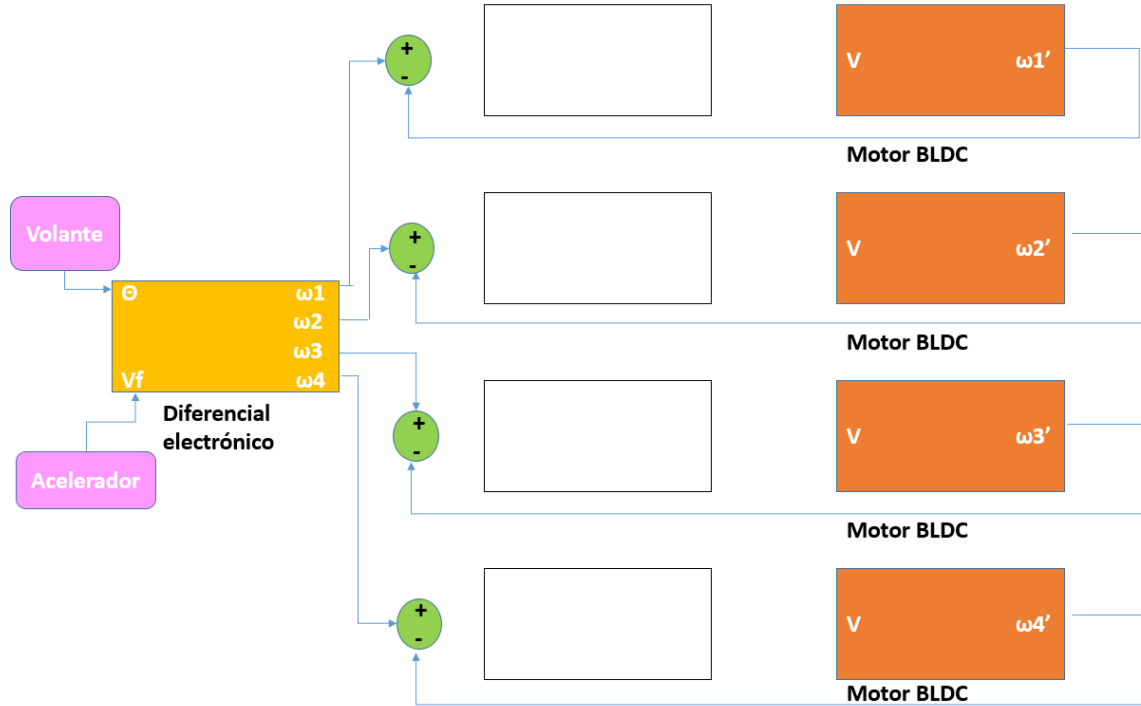


Figura 5.2: Diagrama del diferencial electrónico y el motor BLDC; donde V es el voltaje que entra a los motores BLDC, además los bloques vacíos corresponden a los espacios en los cuales se implementará el control PID.

Continuando con el análisis de la Figura 5.1, a la sustracción entre las velocidades angulares del diferencial electrónico y a las obtenidas de los motores BLDC le llamaremos función error $e(t)$ y será esta la que va a entrar al controlador PID que ya hemos trabajado. Es decir, formaremos a la ecuación $u(t)$ multiplicando a $e(t)$ por la constante proporcional K_p , a este resultado le sumaremos la integral de $K_i e(t)$ y por último le adicionamos la derivada de $K_d e(t)$, de la siguiente forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Una vez que se obtiene a la función $u(t)$, se transforma a un voltaje para poder ingresarlo como función de entrada del modelo del motor obtenido en el capítulo 3 y que está dado por:

$$V_D(t) = \frac{Jl}{K_t} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{Jr + bl}{K_t} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{br + KK_t}{K_t} \omega(t),$$

donde la única incógnita es ω que depende del tiempo, los demás términos son constantes ya conocidas, que en la Figura 5.1 están denotadas por ω' .

Recordemos que tenemos un motor BLDC por cada rueda, por lo que a cada rueda le llegará un voltaje distinto, que producirá velocidades angulares distintas de acuerdo a la formulación de Ackermann.

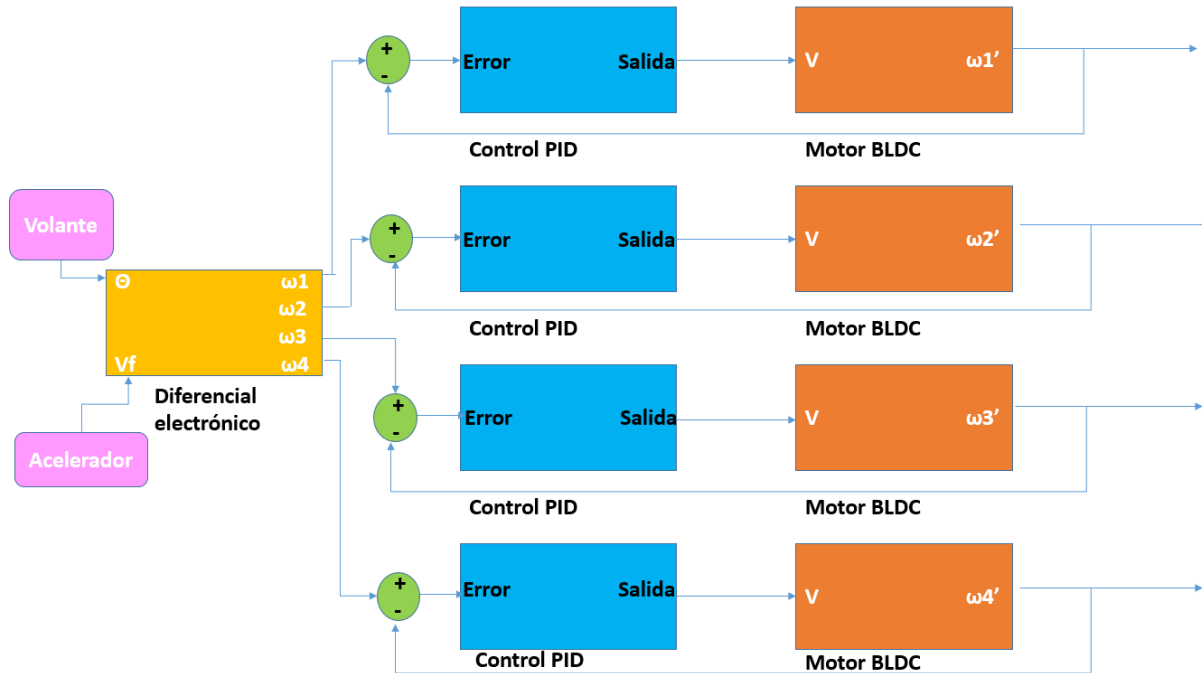


Figura 5.3: Diagrama del diferencial electrónico, controles PID y motores BLDC.

En el diagrama presentado en la Figura 5.2 podemos observar varios bloques de distintos colores que explicaremos a continuación. Del lazo izquierdo, los primeros bloques de color rosa indican al volante y el acelerador del vehículo eléctrico; de estos bloques sale una flecha que los conecta con el bloque amarillo del diferencial electrónico, es a este donde entran el ángulo de giro θ del volante y la velocidad lineal V_f del acelerador.

Después, dentro del bloque amarillo, mediante las ecuaciones de Ackermann, se obtienen las cuatro velocidades angulares ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 óptimas a las que deben girar cada una de las ruedas del vehículo, estas son las señales de referencia.

Los círculos de color verde representan la comparación que se lleva a cabo entre las velocidades de referencia ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 y las velocidades angulares de cada rueda ω_1' , ω_2' , ω_3' y ω_4' .

Una vez realizada cada una de estas comparaciones, se obtienen cuatro funciones error $e(t)$, que entran al bloque azul designado para el control PID. Podemos ver que son cuatro bloques, uno por cada rueda y, que dentro de cada uno de estos se lleva a cabo una acción de control donde tenemos como salida un voltaje determinado; cabe aclarar que cada voltaje es diferente y este entra a cada uno de los bloques color naranja cuyo modelo matemático está expresado por la ecuación diferencial (3.12).

En los cuatro bloques naranja se resuelve la EDO y se obtienen las velocidades angulares reales de las ruedas del vehículo, es decir, ω'_1 , ω'_2 , ω'_3 y ω'_4 .

Finalmente, de cada bloque naranja sale una flecha que entra al círculo verde, donde ya hemos dicho, se comparan las velocidades reales de la salida de los motores con las velocidades de referencia dadas por el diferencial electrónico. Como resultado de esta comparación se obtienen nuevas funciones de error $e(t)$ para cada rueda y el proceso se repite hasta que el vehículo se detenga.

5.2. Resultados analíticos

Para esta sección lo primero que vamos a realizar es recorrer el diagrama del sistema con datos supuestos y veremos cómo se comportan los resultados analíticos, con el fin de ilustrar las soluciones basadas en fórmulas matemáticas que se llevan a cabo dentro de cada elemento del diagrama mostrado en la Figura 5.2.

De esta forma, se pretenden mostrar todos los procesos que se llevan a cabo en el dominio t ; a diferencia de lo que se verá en la sección de los resultados numéricos para los cuales se trabaja en el dominio s y se hace uso de la programación; es decir, se usarán herramientas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y no haremos uso de funciones de transferencia.

Supondremos en primer lugar que en un tiempo determinado avanzamos en el vehículo eléctrico con una velocidad lineal constante para posteriormente hacer un barrido con un ángulo de 15° , de esta forma, tendremos dos funciones que dependerán del tiempo que entrarán a nuestro diferencial electrónico, así:

$$V_f(t) = 25 \frac{m}{s}.$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 15; \\ t - 15, & \text{si } 15 < t \leq 30; \\ -t + 45, & \text{si } 30 < t \leq 60; \end{cases}$$

donde:

$V_f(t)$ es la velocidad lineal del vehículo eléctrico en el tiempo t ;

$\theta(t)$ es el ángulo de giro del vehículo en el tiempo t ;

además, t estará corriendo en el intervalo $0 \leq t \leq 60$.

Cabe aclarar que para el siguiente análisis solo se trabajará en el intervalo cuando la función $\theta(t) = t - 15$; ahora bien, el análisis para los dos intervalos restantes es exactamente igual.

Es así como calculamos la velocidad angular de cada rueda con las ecuaciones 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17, estos resultados serán nuestras señales de referencia. Para esto, hacemos

el supuesto de que las medidas de nuestro vehículo son: $d = 1.75m$, $L = 4.5m$, $r = 0.4m$

$$\omega_1 = \frac{25 \frac{m}{s}}{0.4m} \left(1 + \frac{1.75m}{2(4.5m)} \tan(t - 15) \right).$$

$$\omega_1 = 62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72}.$$

$$\omega_2 = \frac{25 \frac{m}{s}}{0.4m} \left(1 - \frac{1.75m}{2(4.5m)} \tan(t - 15) \right).$$

$$\omega_2 = 62.5 - \frac{875 \tan(t - 15)}{72}.$$

$$\omega_3 = \frac{25 \frac{m}{s}}{0.4m} \sqrt{1 + \frac{1.75m}{2(4.5m)} \tan(t - 15) + \left(1 + \frac{(1.75m)^2}{4(4.5m)^2} \right) \tan^2(t - 15)}.$$

$$\omega_3 = \frac{125 \sqrt{2592 + 252 \tan(t - 15) + 49 \tan^2(t - 15)}}{72}.$$

$$\omega_4 = \frac{25 \frac{m}{s}}{0.4m} \sqrt{1 - \frac{1.75m}{2(4.5m)} \tan(t - 15) + \left(1 + \frac{(1.75m)^2}{4(4.5m)^2} \right) \tan^2(t - 15)}.$$

$$\omega_4 = \frac{125 \sqrt{2592 - 252 \tan(t - 15) + 49 \tan^2(t - 15)}}{72}.$$

Hasta aquí hemos obtenido las velocidades angulares de referencia a las que debe girar cada una de las llantas. Lo que sigue es comparar estas velocidades con las reales; sin embargo, en el tiempo inicial, las velocidades angulares de las cuatro llantas son iguales a cero, esto significa que los errores de comparación son iguales al valor absoluto de las velocidades de referencia.

Con esto en mente, tenemos que la función de error que entrará al controlador para la primera rueda será:

$$e(t) = 62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72}.$$

Suponemos que los valores de los parámetros son:

$$K_p = 34.$$

$$K_i = 72.6496.$$

$$K_d = 2.3766.$$

De esta forma

$$u(t) = 34 \left(62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72} \right)$$

$$+72.6496 \left(\int_0^t 62.5 + \frac{875 \tan(\tau - 15)}{72} d\tau \right) \\ + 2.3766 \left(\frac{d \left(62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72} \right)}{dt} \right).$$

O bien,

$$u(t) = 2125 + \frac{14875 \tan(t - 15)}{36} + 4540.6t - 882.8961 \ln |\cos(t - 15)| - 242.6198 + \frac{27727 \sec(t - 15)^2}{960}$$

$$= 1882.3802 + 413.1944 \tan(t - 15) + 4540.6t - 882.8961 \ln |\cos(t - 15)| + 28.8823 \sec(t - 15)^2.$$

Posteriormente, suponemos los valores de las siguientes constantes son: $J = 0.01 \frac{kgm^2}{s^2}$, $b = 0.1Nm$, $K = K_t = 0.01$, $r = 1\Omega$ y $l = 0.5H$.

Luego, procedemos a resolver la EDO de segundo orden no homogénea.

$$u(t) = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 6 \frac{d\omega(t)}{dt} + 10.01\omega(t).$$

Que tiene como solución homogénea a:

$$\omega_h(t) = C_1 e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + C_2 e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

Después resolvemos la ecuación particular por el método de variación de parámetros

$$\omega_p(t) = u_1 e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + u_2 e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

$$\omega_1 = e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

$$\omega_2 = e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

$$f(t) = 1882.3802 + 413.1944 \tan(t - 15) + 4540.6t - 882.8961 \ln |\cos(t - 15)| + 28.8823 \sec(t - 15)^2.$$

$$\omega'_1 = -3e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + \frac{\sqrt{4.04}}{2} e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

$$\omega'_2 = -3e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{4.04}}{2}e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

$$W = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{4.04}}{2}e^{-6t}.$$

$$u_1 = -\int \frac{\omega_2 f(t)}{W} dt.$$

$$u_2 = \int \frac{\omega_1 f(t)}{W} dt.$$

Debido a la complejidad de estas integrales procedemos a aproximarlas numéricamente por el método compuesto de Simpson. De esta forma, para el intervalo (15, 16) el resultado es:

$$u_1 = 330.6472797655413.$$

$$u_2 = -18.067973278357567.$$

Por lo cual

$$\omega_p(t) = 330.6473e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - 18.068e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \omega(t) &= C_1 e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + C_2 e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) \\ &+ 330.6473e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - 18.068e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\omega(0) = 0$, se sigue que

$$C_2 - 18.068 = 0.$$

O bien

$$C_2 = 18.068.$$

Por otro lado

$$\omega'(t) = -3(C_1 + 330.6473)e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}\right)(C_1 + 330.6473)e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

Bajo el supuesto de que $\omega'(0) = 1$, se tiene que

$$\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}\right) (C_1 + 330.6473) = 1.$$

$$C_1 = -329.6522.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega(t) &= -329.6522e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + 18.068e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) \\ &+ 330.6473e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) - 18.068e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right). \\ \omega(t) &= 0.9951e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right). \end{aligned}$$

Es ahora cuando hacemos una nueva comparación, es decir, calculamos una nueva función de error pues necesitamos conocer qué tan aproximada es la respuesta del sistema a la señal de referencia; recordemos que queremos hacer que la función error $e(t)$ sea lo más cercana a cero.

$$e(t) = 62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72} - 0.9951e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

Como ya hemos realizado con anterioridad procedemos a calcular $u(t)$ con la nueva función de error

$$\begin{aligned} u(t) &= 34 \left(62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72} - 0.9951e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) \right) \\ &+ 72.6496 \left(\int_0^t 62.5 + \frac{875 \tan(\tau - 15)}{72} - 0.9951e^{-3\tau} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} \tau \right) d\tau \right) \\ &+ 2.3766 \left(\frac{d \left(62.5 + \frac{875 \tan(t - 15)}{72} - 0.9951e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) \right)}{dt} \right). \end{aligned}$$

Haciendo la operaciones correspondientes

$$u(t) = 2125 + \frac{14875 \tan(t - 15)}{36} - 33.8334e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right)$$

$$+62.5t - 12.1528 \ln |\cos(t-15)| + 0.0998e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + 0.2982e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - 3.4399 \\ + 12.1528 \operatorname{sec}^2(t-15) - e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + 2.9853e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

O bien

$$u(t) = 2121.5601 + 413.1944 \tan(t-15) + 62.5t - 12.1528 \ln |\cos(t-15)| + 12.1528 \operatorname{sec}^2(t-15) \\ - 0.9002e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - 30.5499e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

Luego, procedemos a resolver la EDO de segundo orden no homogénea.

$$u(t) = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 6\frac{d\omega(t)}{dt} + 10.01\omega(t).$$

Que tiene como solución homogénea a:

$$\omega_h(t) = C_1 e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + C_2 e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

Después resolvemos la ecuación particular nuevamente por el método de variación de parámetros

$$\omega_p(t) = u_1 e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + u_2 e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right). \\ \omega_1 = e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right). \\ \omega_2 = e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

$$f(t) = 2121.5601 + 413.1944 \tan(t-15) + 62.5t - 12.1528 \ln |\cos(t-15)| + 12.1528 \operatorname{sec}^2(t-15) \\ - 0.9002e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - 30.5499e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right). \\ \omega_1' = -3e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{4.04}}{2} e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right). \\ \omega_2' = -3e^{-3t} \cos\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{4.04}}{2} e^{-3t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2}t\right).$$

$$W = -\frac{\sqrt{4.04}}{2}e^{-6t}.$$

$$u_1 = -\int \frac{\omega_2 f(t)}{W} dt.$$

$$u_2 = \int \frac{\omega_1 f(t)}{W} dt.$$

Debido a la complejidad de estas integrales procedemos a aproximarlas nuevamente numéricamente por el método compuesto de Simpson. De esta forma, para el intervalo (16, 17) el resultado es:

$$u_1 = 408.9265214651451.$$

$$u_2 = -63.312419268528743.$$

Por lo cual

$$\omega_p(t) = 408.9265e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) - 63.3124e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \omega(t) &= C_1 e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + C_2 e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) \\ &+ 408.9265e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) - 63.3124e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\omega(0) = 0$ se sigue que

$$C_2 - 63.3124 = 0.$$

O bien

$$C_2 = 63.3124.$$

Por otro lado

$$\omega'(t) = -3(C_1 + 408.9265)e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} \right) (C_1 + 408.9265)e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).$$

Bajo el supuesto de que $\omega'(0) = 1$ se tiene que

$$\left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} \right) (C_1 + 408.9265) = 1.$$

$$C_1 = -407.9315.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\omega(t) &= -407.9315e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) + 63.3124e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) \\ &+ 408.9265e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right) - 63.3124e^{-3t} \operatorname{cos} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right). \\ \omega(t) &= 0.995e^{-3t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{4.04}}{2} t \right).\end{aligned}$$

Este proceso se repite múltiples veces con la finalidad de que la función error sea muy cercana a cero. Por otro lado, se representa el proceso completo de lo que sucede en la realidad del sistema de control, esto a su vez, es posible de programar en algún software para poder llegar esta vez a resultados numéricos que se expondrán en la siguiente sección.

5.3. Resultados numéricos

El propósito de esta sección es implementar el control PID a los cuatro motores BLDC para que alcancen una velocidad angular adecuada, la cual será comparada con la que se obtenga mediante el diferencial electrónico con las ecuaciones de Ackermann. Así pues, en esta sección se presentan simulaciones realizadas en Matlab Simulink. Para esta sección se ha tomado como referencia el motor de la compañía SiAECOSYS, QS Motor tipo E-Car de 2000 W. La serie QS Motor 260 como se ve en la Figura ??, está diseñada para aplicaciones automotrices de baja velocidad. Este motor trifásico con devanados en conexión estrella de 24 pares de polos cuenta con un solo eje, es de transmisión directa, su voltaje nominal de 72 V, el par máximo pico es de 161.9 Nm, puede operar a una velocidad máxima de 50 km/h y tiene un peso de 23 kg.



Figura 5.4: Motor QS Motor 260 ([20])

En [9] se describe el procedimiento para la obtención de los parámetros de este motor, los cuales son:

$$\begin{aligned}
 J &= 0.224 \text{kgm}^2. \\
 r &= 0.2\Omega. \\
 b &= 3.02 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}. \\
 l &= 160\mu\text{H}. \\
 K &= 0.102 \frac{\text{v}}{\text{rpm}}. \\
 K_t &= 0.97041 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicamos transformada de Laplace a 3.12 con el fin de obtener la función de transferencia del motor BLDC, así:

$$V_D = \frac{Jl}{K_t} s^2 \omega(s) + \frac{Jr + bl}{K_t} s \omega(s) + \frac{br + KK_t}{K_t} \omega(s). \quad (3.13)$$

De esta forma, la ecuación de transferencia del voltaje queda:

$$\frac{\omega(s)}{V_D} = \frac{\omega(s)K_t}{Jls^2\omega(s) + s\omega(s)(Jr + bl) + \omega(s)(br + KK_t)}. \quad (3.14)$$

O bien:

$$\frac{\omega(s)}{V_D} = \frac{K_t}{Jls^2 + s(Jr + bl) + (br + KK_t)}. \quad (3.15)$$

Donde tenemos como función de entrada al voltaje del motor y como función de salida al voltaje de este; es importante decir que la obtención de esta función de transferencia es fundamental para trabajar en el sistema de control, pues además de que este trabaja en el dominio s en lugar de t , las funciones de transferencia contienen toda la información que necesitamos para analizar un sistema.

De esta forma, la función de transferencia de nuestra planta es la siguiente:

$$G(s) = \frac{K_t}{2Jls^2 + s(2Jr + 2bl) + (2br + KK_t)}.$$

La razón de multiplicar por 2 la inductancia y resistencia de armadura, l y r , es porque la alimentación del motor se realiza por pares de devanados.

Sustituyendo los valores de las constantes nos queda

$$G(s) = \frac{0.97041}{0.00007168s^2 + 0.0905664s + 1.30698182};$$

o bien

$$G(s) = \frac{13538.0859}{s^2 + 1263.4821s + 18233.5633}$$

Ahora bien, para empezar a implementar un controlador PID lo primero que debemos hacer es sintonizar el control de acuerdo a la planta con la que vamos a trabajar. Es en esta parte de este trabajo donde vamos a utilizar el método de Ziegler-Nichols establecido en el capítulo anterior.

Inicialmente se intentó sintonizar el control PID por medio del método de oscilación con una función de transferencia similar a la de la planta de los motores BLDC, conocido como método de lazo cerrado. A continuación se mostrarán las gráficas obtenidas mediante el software MatLab ocupando SIMULINK

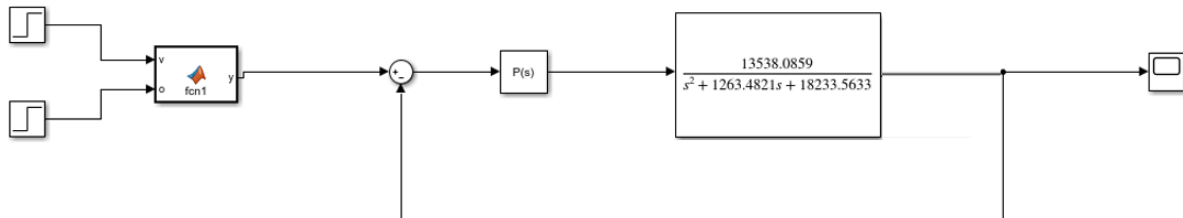


Figura 5.5: Diagrama de control con un controlador proporcional (P).

En la Figura 5.3 podemos ver el diagrama de control correspondiente a la sintonización, donde como entrada tenemos dos señales de tipo escalón que representan a una velocidad lineal del vehículo eléctrico y un ángulo de giro determinado como se ve en la Figura ??.

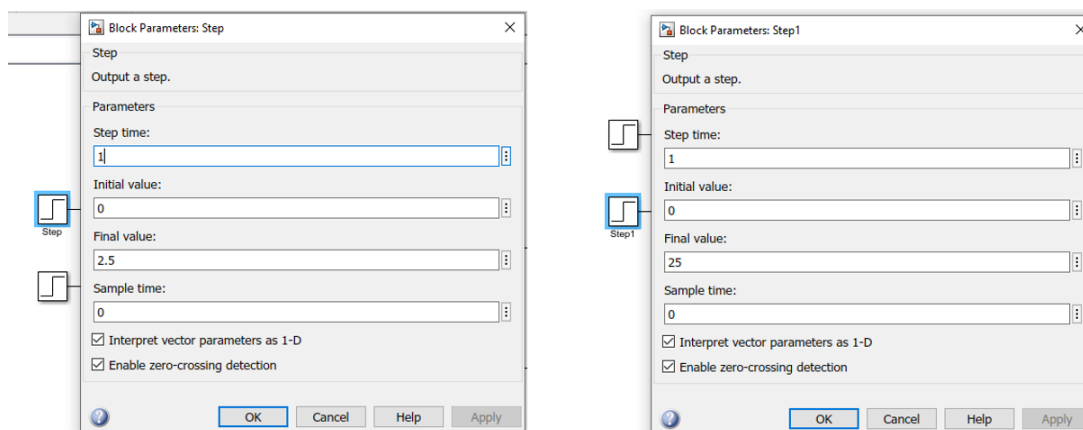


Figura 5.6: Bloque de parámetros con velocidad lineal de 2.5 y un ángulo de giro de 25 grados.

Posteriormente ambas señales llegan a un bloque de función de MatLab en la que se encuentra la ecuación de Ackerman correspondiente a la rueda 1 como el que se ve en la Figura ??.



Figura 5.7: Bloque de función.

De esta forma, lo que se estuvo modificando fue el valor de la ganancia proporcional en el bloque de control del diagrama; es decir, se estuvo buscando un valor adecuado que provocara que la salida del sistema tuviera un comportamiento oscilatorio con una misma amplitud, similar al comportamiento de una función senoidal. A continuación, se muestra de la Figura ?? a la Figura 5.5 los resultados obtenidos al variar el parámetro K_p .

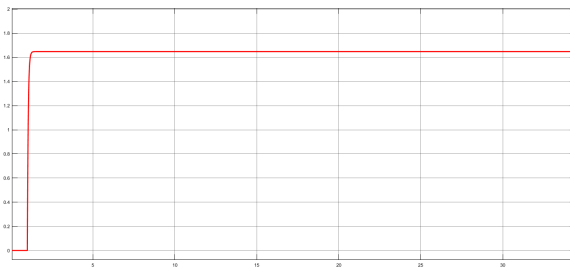


Figura 5.8: Salida del sistema de control con $K_p = 0.5$.

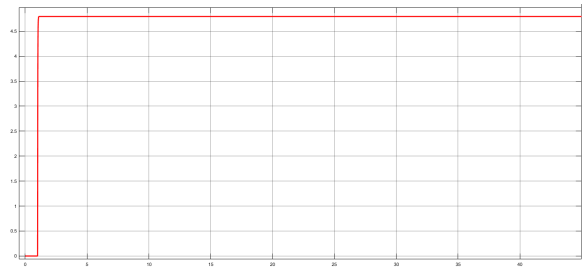


Figura 5.9: Salida del sistema de control con $K_p = 5$.

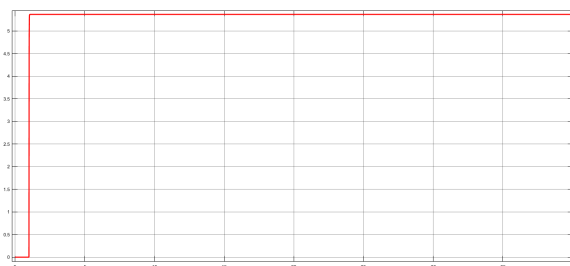


Figura 5.10: Salida del sistema de control con $K_p = 10$.

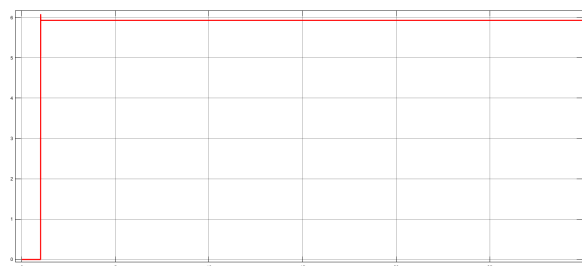


Figura 5.11: Salida del sistema de control con $K_p = 50$.

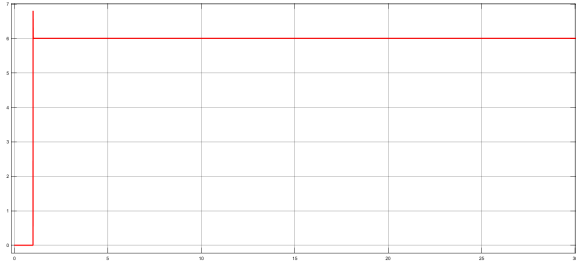


Figura 5.12: Salida del sistema de control con $K_p = 100$.

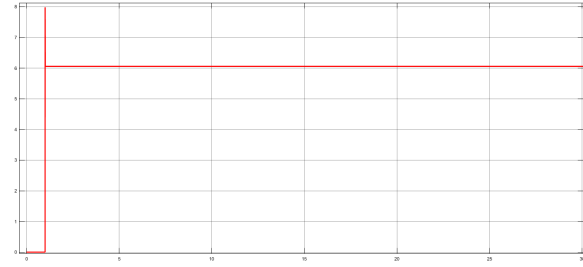


Figura 5.13: Salida del sistema de control con $K_p = 250$.

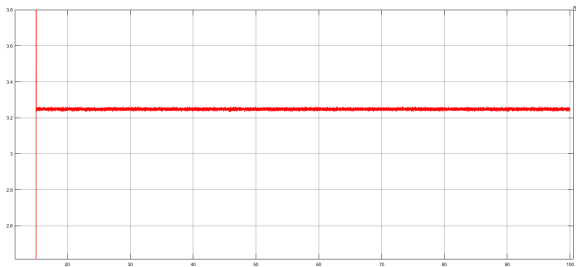


Figura 5.14: Salida del sistema de control con $K_p = 500$.

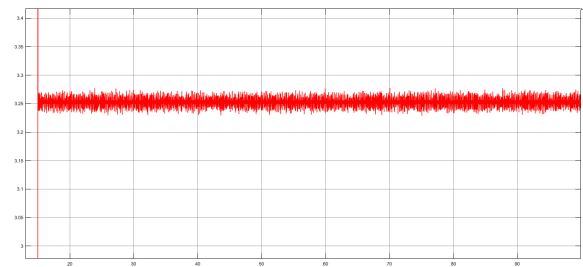


Figura 5.15: Salida del sistema de control con $K_p = 1000$.

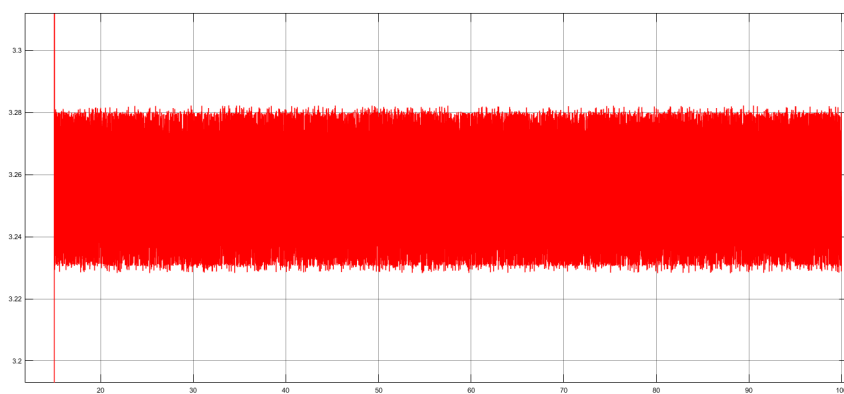


Figura 5.16: Salida del sistema de control con $K_p = 2500$.

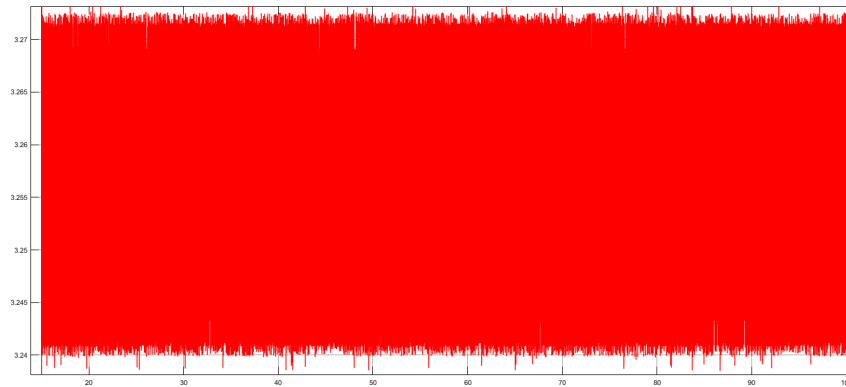


Figura 5.17: Salida del sistema de control con $K_p = 5000$.

Con las gráficas anteriores podemos concluir que el método de oscilación no es viable para la planta que vamos a trabajar, por lo que es necesario emplear el método basado en la curva de reacción. Por otra parte, podemos observar que nuestra función de transferencia de la planta no cuenta con polos complejos conjugados; es decir

$$s^2 + 1263.4821s + 18233.5633 = 0.$$

Tenemos que

$$s = -14.5999 \text{ y } s = -1248.8822.$$

Para iniciar la sintonización mediante el método de Ziegler-Nichols de lazo abierto necesitamos del diagrama de la Figura ??.

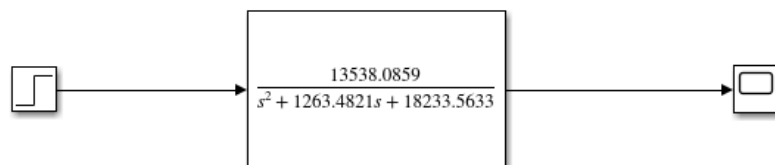


Figura 5.18: Diagrama de lazo abierto.

Donde tenemos como entrada una señal de tipo escalón unitaria que ocasionará la reacción que se ilustra en la Figura ??.

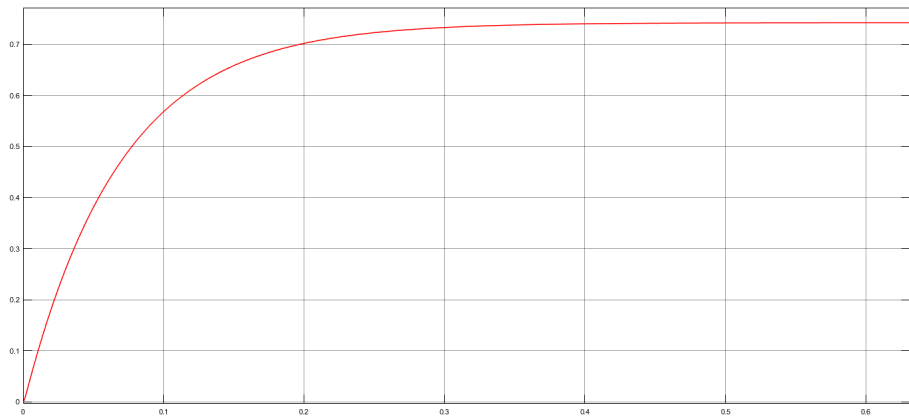


Figura 5.19: Comportamiento de la salida del sistema de control.

Posteriormente buscamos los tiempos t_1 y t_2 en los que alcanzan los porcentajes 28.3% y 63.27%, respectivamente. Para así poder calcular a los parámetros L y T mediante el método de Smith.

De esta forma

$$T = 1.5(t_2 - t_1).$$

$$L = 1.5 \left(t_1 - \frac{t_2}{3} \right).$$

Por lo que al momento de encontrar los tiempos en

$$t_1 = 0.0289.$$

$$t_2 = 0.03929.$$

se sigue que

$$T = 0.0155.$$

$$L = 0.0238.$$

Al utilizar la tabla de la Figura 4.4.1 vista en el capítulo 4 podemos encontrar los valores de las ganancias. Así

$$K_p = 0.782724531900029.$$

$$\tau_i = 0.0476 \text{ y } \tau_d = 0.0119.$$

Para finalmente quedarnos con los valores

$$K_p = 0.782724531900029, \quad K_i = 16.4648528828817 \text{ y } K_d = 0.$$

Por otra parte, para la implementación del diferencial electrónico se han tomado las dimensiones del vehículo eléctrico diseñado en [28], de donde se obtienen los siguientes parámetros.

Distancia entre ejes, $L = 1.485m$ (B en la Figura 5.6).

Ancho de vía, $d = 1.150m$ (E en la Figura 5.6).

Radio de la rueda, $r = 0.4m$.

Con estos datos es posible obtener las velocidades angulares de cada uno de los motores para una velocidad y giro deseados del vehículo.

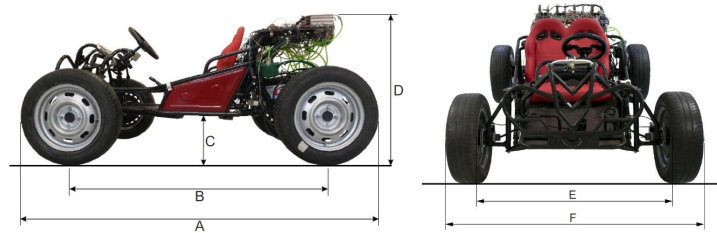


Figura 5.20: Dimensiones del vehículo eléctrico

Dado que ya contamos con todos los parámetros necesarios podemos continuar con la simulación, que se realiza en Matlab-Simulink mediante el esquema de la Figura ??.

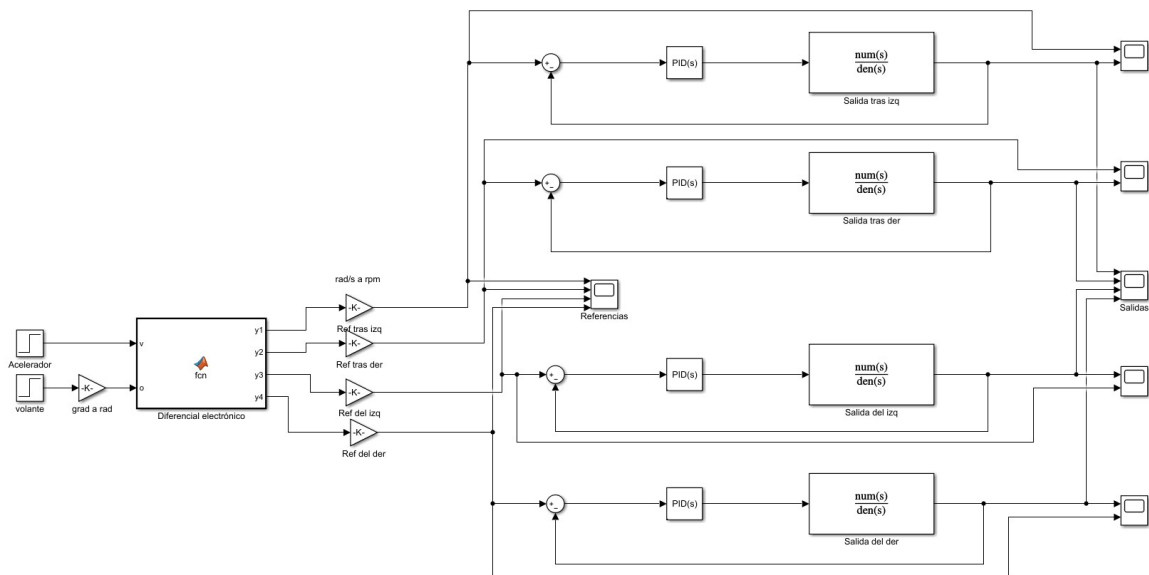


Figura 5.21: Diagrama de control de los cuatro motores BLDC

Donde en un inicio tenemos dos señales de tipo escalón, la primera de ellas es la velocidad lineal del vehículo eléctrico, mientras que la segunda es el ángulo de giro medido

en grados. La señal de los grados pasa por otro bloque para que los grados se conviertan en radianes.

Inmediatamente, las dos señales dadas por el usuario entran al bloque de función de MatLab donde tiene como salida a cuatro velocidades angulares, esto gracias a que en el interior del bloque se encuentran las cuatro ecuaciones de Ackermann. Posteriormente, estas cuatro salidas pasan por un bloque de ganancia que cambia sus unidades de rad/s a rpm .

Es así, como estas señales de referencia recién obtenidas se comparan una y otra vez con las señales que provienen de la salida del bloque con la función de transferencia de cada motor. Cabe aclarar que cada bloque de control PID y cada función de transferencia contienen los mismos parámetros, es decir, en cada bloque de control PID tenemos las mismas ganancias K_p , K_i y K_d .

Por último, se obtiene como resultado las siguientes gráficas que explicaremos caso por caso.

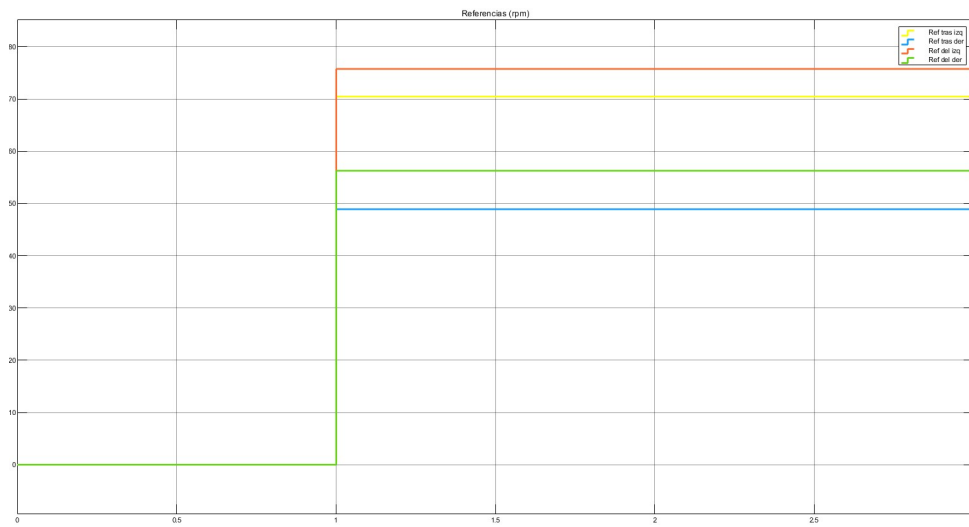


Figura 5.22: Gráfica de las cuatro señales de referencia.

En la gráfica de la Figura 5.7 podemos observar las cuatro entradas de nuestro sistema como funciones de tipo escalón, donde cada una de ellas representa las señales de referencia que debe alcanzar cada uno de los motores, es decir, cada una de las salidas del sistema debe aproximarse a cada una de estas señales de tipo escalón.

La señal amarilla es un escalón de aproximadamente $70rpm$ y corresponde a la primera ecuación de Ackermann, es decir a la primer rueda. La señal azul es un escalón de poco más de $50rpm$ y corresponde a la segunda rueda. Por otro lado, la señal de color rojo indica un escalón de poco más de $75rpm$ correspondiente a la tercer ecuación de Ackermann y por último, la señal amarilla se aproxima a $55rpm$ y se asocia a la cuarta rueda del vehículo eléctrico.

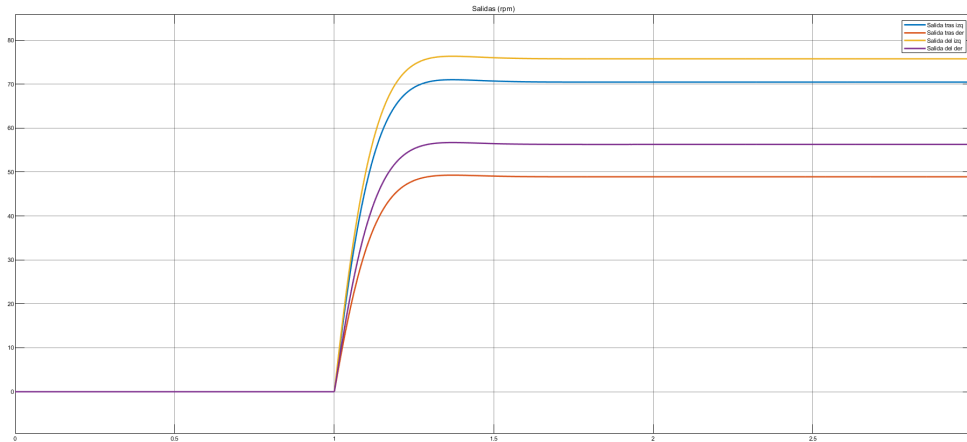


Figura 5.23: Gráfica de las cuatro salidas de control de cada rueda.

En la Figura 5.8 podemos observar las cuatro salidas del sistema representadas en *rpm*, la curva azul representa el comportamiento de la salida de la primer rueda, o bien, la rueda trasera izquierda; la curva roja corresponde la salida del comportamiento de la segunda rueda, o bien, la rueda trasera derecha; la curva amarilla corresponde a la tercer rueda, es decir, la rueda delantera izquierda y posteriormente la curva morada señala la cuarta rueda.

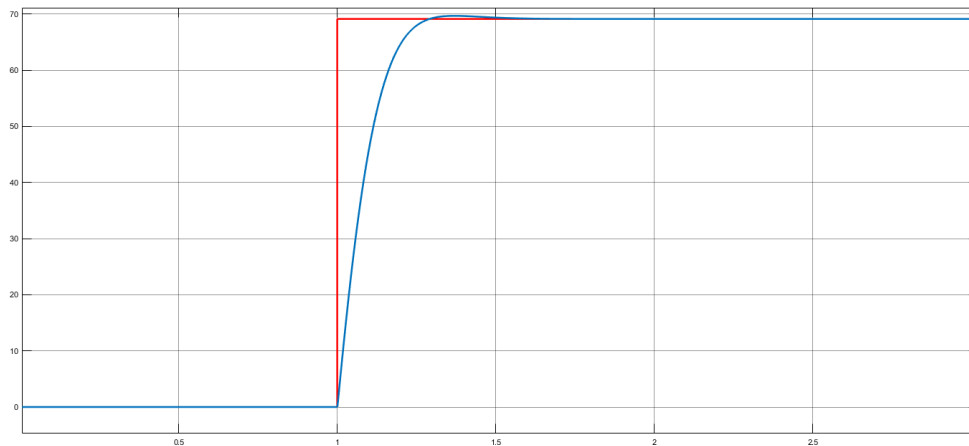


Figura 5.24: Gráfica de comparación entre señal de referencia y señal obtenida con el control para el primer motor.

En la Figura 5.9 la señal roja corresponde a la señal de referencia, mientras que la curva azul representa a la señal obtenida gracias al controlador; podemos apreciar que la señal azul alcanza a la señal de referencia y se estabiliza en un tiempo de aproximadamente 0.5s; es decir en un tiempo corto y adecuado.

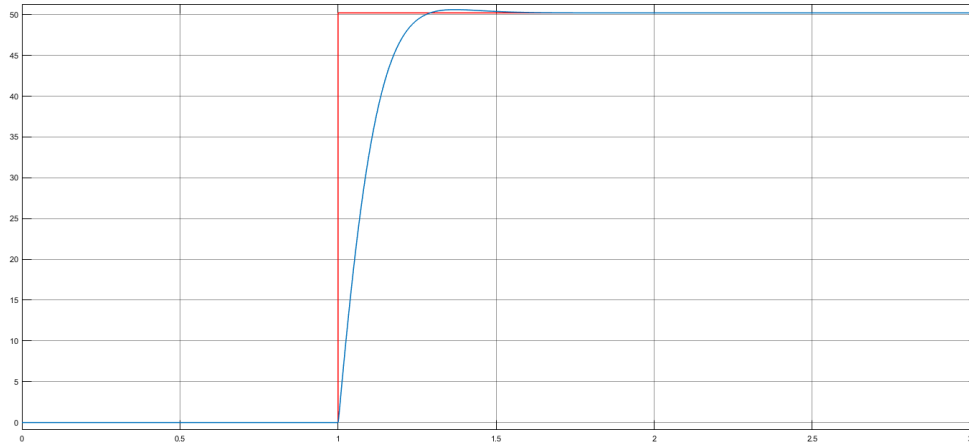


Figura 5.25: Gráfica de comparación entre señal de referencia y señal obtenida con el control para el segundo motor.

Como en la figura anterior, en la Figura 5.10 el escalón rojo representa la señal de referencia de la segunda rueda, mientras que la curva azul corresponde a la señal obtenida del controlador; de igual forma, la curva azul alcanza a la señal de referencia ($49rpm$) y se estabiliza en un tiempo de aproximadamente $0.5s$.

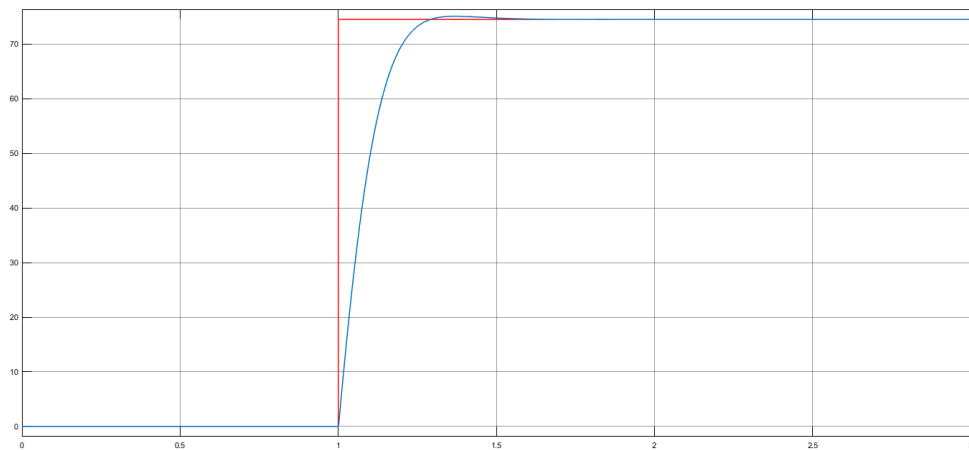


Figura 5.26: Gráfica de comparación entre señal de referencia y señal obtenida con el control para el tercer motor.

Para la tercera rueda observamos en la Figura 5.11 que la señal de salida del tercer motor alcanza a la señal de referencia señalada por el color azul en un tiempo de $0.5s$.

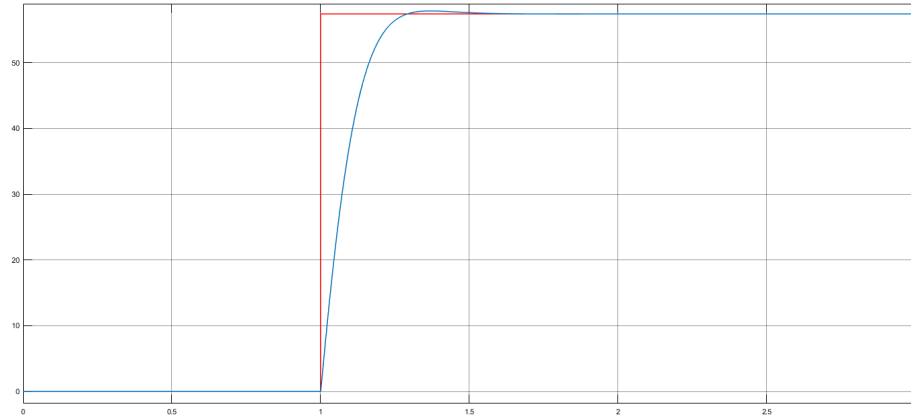


Figura 5.27: Gráfica de comparación entre la señal de referencia y la señal obtenida con el control para el cuarto motor.

Finalmente, en la gráfica de la Figura 5.12 logramos apreciar un resultado similar al de los tres anteriores motores, es decir, de nueva cuenta la señal obtenida mediante la cuarta ecuación de Ackermann es alcanzada por el motor en un tiempo aproximado de 0.5s.

De esta forma, hemos podido corroborar el buen funcionamiento del control PID diseñado en el capítulo 4; no obstante, para seguir analizando su comportamiento en distintos casos procederemos a realizar una simulación más. En este caso, se modifican las señales de entrada al diagrama del diferencial electrónico, ya que solo hemos trabajado con señales de tipo escalón.

Segunda simulación

A continuación se muestra la simulación configurando el ángulo de giro del vehículo, primero se comienza con una velocidad constante y posteriormente se hace un giro hacia la derecha, luego hacia la izquierda y así sucesivamente. Para esto se colocan adecuadamente los valores en el recuadro de SIMULINK correspondiente como se ve en la Figura 5.13.

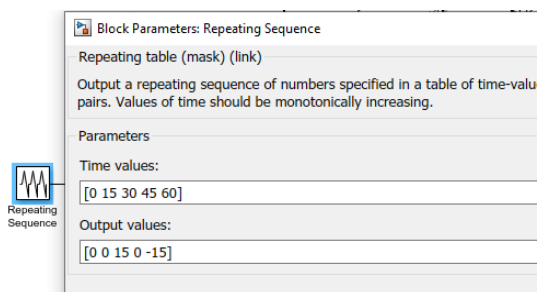


Figura 5.28: Bloque oscilante de diente de sierra.

La explicación de los valores que se aprecian en la Figura 5.13 es que a partir del segundo 0 al segundo 15 podemos suponer que el vehículo eléctrico lleva una velocidad constante de $2.5m/s$ que es la que brinda el usuario mediante el acelerador, a partir del segundo 15 hasta el segundo 30 el conductor realiza un giro del volante hacia la derecha, es por esto que en ese tiempo se le asigna el valor de 15 grados. Posteriormente, a partir del segundo 30 hasta el segundo 60, el usuario efectúa un giro hacia la izquierda, teniendo como resultado que a este tiempo se le asigne el valor de -15 grados. De esta manera, podemos suponer que el usuario se encuentra en un trayecto en el que debe sortear varios obstáculos, es por eso que gira a derecha o izquierda.

Podemos ver en la Figura 5.14 el diagrama que describe este comportamiento.

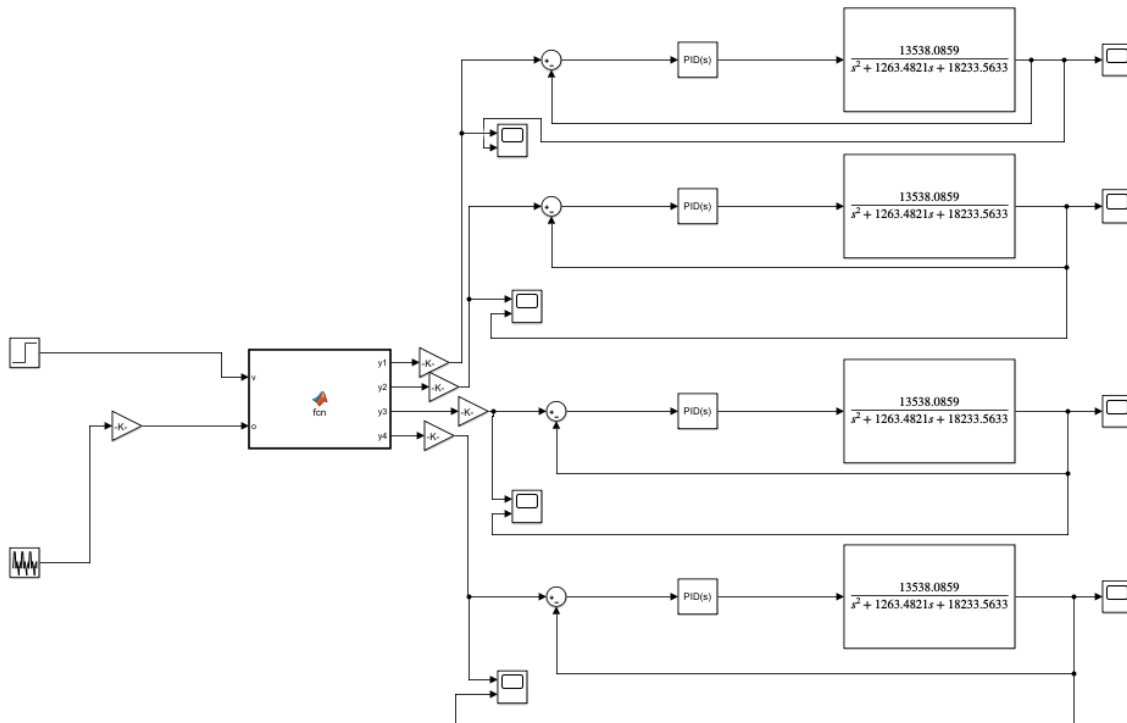


Figura 5.29: Diagrama de control para los cuatro motores con una entrada en forma oscilante de diente de sierra.

Seguidamente, tenemos el comportamiento de cada rueda con esta nueva señal de referencia como se ve en las siguientes gráficas. Podemos notar que la conducta de la salida de cada rueda, difiere en gran medida a la primera simulación realizada pues en la simulación de diente de sierra se supone que el vehículo realiza más de un giro.

En la Figura ?? la señal roja corresponde a la señal de referencia, mientras que la azul representa a la señal obtenida gracias al controlador; podemos apreciar que la señal azul alcanza a la señal de referencia y se estabiliza en un tiempo de aproximadamente $0.5s$ al igual que en el caso de la primera simulación; es decir, reiteramos que gracias al control

la señal real alcanza a la señal de referencia en un tiempo adecuado y corto.

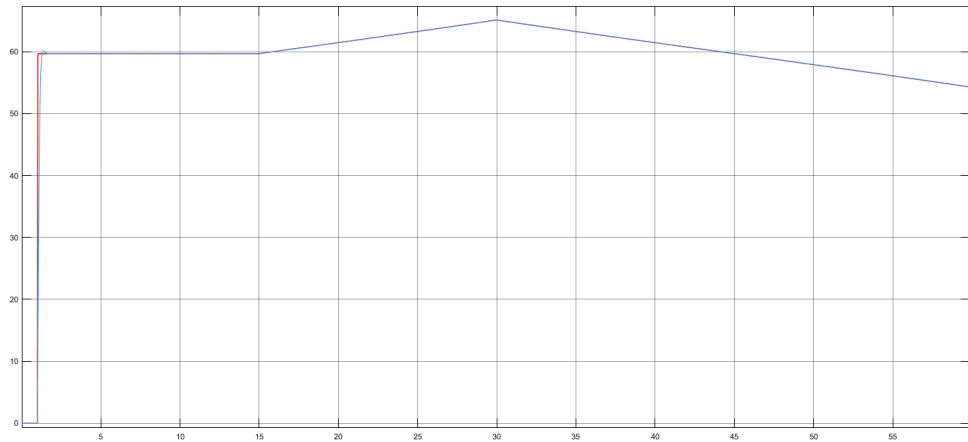


Figura 5.30: Comportamiento de la primera rueda con una entrada en forma oscilante de diente de sierra.

Ahora bien, en la Figura ?? tenemos a la gráfica de color rojo que representa la señal de referencia de la segunda rueda, mientras que la señal azul corresponde a la señal obtenida del controlador; podemos ver que dado que el vehículo lleva una velocidad lineal en los primeros segundos la curva azul alcanza a la señal de referencia y se estabiliza en un tiempo de aproximadamente 0.5s.

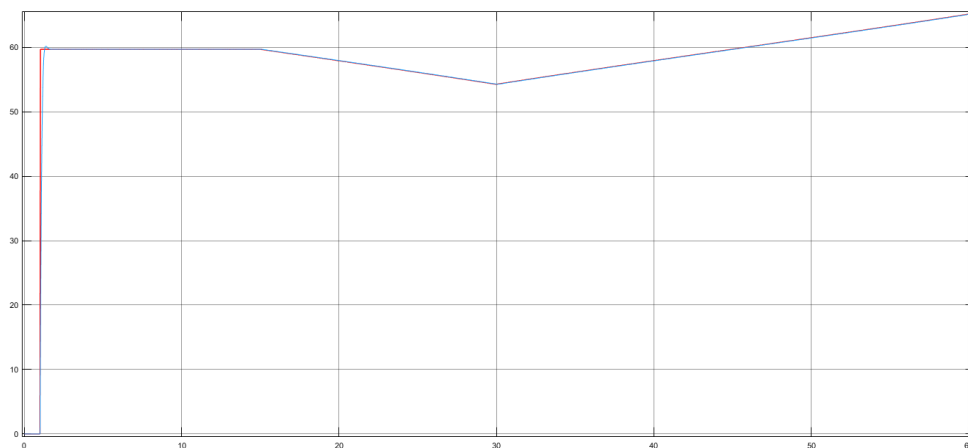


Figura 5.31: Comportamiento de la segunda rueda con una entrada en forma oscilante de diente de sierra.

Para la tercera rueda tenemos a la Figura ??, donde nuevamente la señal de salida del tercer motor alcanza a la señal de referencia señalada por el color azul en un tiempo de poco más 0.5s. Al igual que en la Figura ??, la señal de salida no tiene problemas para

igualar a la señal de referencia cuando el vehículo lleva una velocidad lineal; sin embargo, al momento de girar a derecha e izquierda la señal de salida no es tan exacta los primeros segundos.

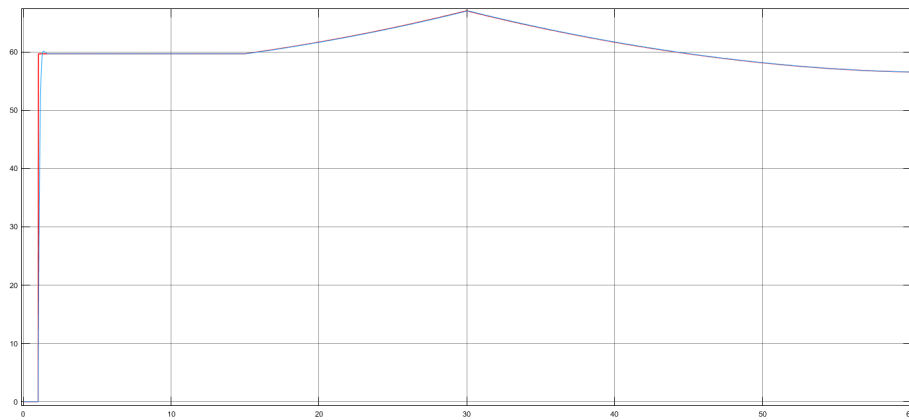


Figura 5.32: Comportamiento de la tercera rueda con una entrada en forma oscilante de diente de sierra.

En la gráfica de la Figura ?? logramos apreciar un resultado semejante al de los tres anteriores; esto es, de nueva cuenta la señal obtenida mediante la cuarta ecuación de Ackermann es alcanzada por la salida del controlador en un corto tiempo de casi $0.5s$. De esta forma, el controlador hace que la señal obtenida de color azul esté lo más cercana posible a la señal de referencia roja sin importar los giros que haga el usuario.

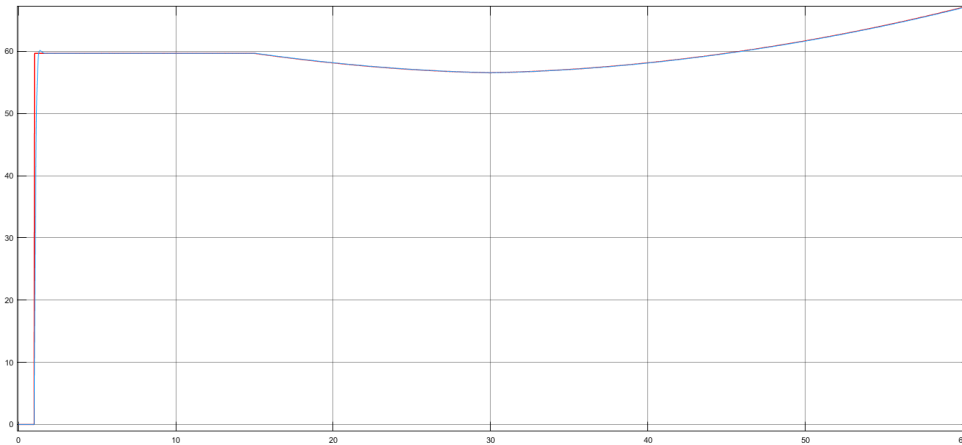


Figura 5.33: Comportamiento de la cuarta rueda con una entrada en forma oscilante de diente de sierra.

Finalmente, se puede observar que en los primeros 15 segundos de las cuatro gráficas anteriores las cuatro ruedas llevan la misma velocidad angular, a partir de ese segundo

las cuatro ruedas tienen velocidades angulares diferentes.

Como conclusión de esta sección tenemos que el control PID diseñado en este trabajo de tesis responde adecuadamente a los diversos problemas a los que un vehículo eléctrico se puede enfrentar; es decir, el tiempo de respuesta de la salida del sistema no tarda mucho tiempo en alcanzar a la señal de referencia, esto para los cuatro motores BLDC. Si bien la señal real no será siempre igual a la señal de referencia el control PID que se diseñó hace que sea lo más cercana posible.

5.4. Análisis del sistema de control

Después de asegurarnos del correcto funcionamiento del control PID de los motores BLDC al llegar a la señal de referencia en un pequeño tiempo podemos dedicarnos ahora al estudio completo del sistema de control. Es decir, recordar algunas definiciones como la estabilidad y la sensibilidad y ver qué resultados obtenemos de acuerdo a estas.

Recordemos del capítulo 4 a la ecuación 4.1 que nos representa la función de transferencia $T(s)$ de un sistema de control de lazo cerrado.

$$T(s) = \frac{G'(s)}{1 + H(s)G'(s)}.$$

donde $G'(s)$ es la función de transferencia en conjunto de la planta y el controlador. Además de que en nuestro caso tendremos $H(s) = 1$.

De acuerdo a nuestro sistema de control tendremos los siguientes datos

$$PID(s) = 0.7827 + \frac{16.4649}{s} + 0s = \frac{0.7827s + 16.4649}{s},$$

donde $PID(s)$ es la función de transferencia del controlador PID una vez sustituidos los valores de las ganancias obtenidas en el capítulo anterior.

Por otro lado, tenemos también la función de transferencia de la planta, es decir del motor BLDC con sus respectivas sustituciones

$$G(s) = \frac{13538.0859}{s^2 + 1263.4821s + 18233.5633}.$$

Con estas dos últimas ecuaciones podemos formar la función de transferencia $G'(s)$, así:

$$G'(s) = PID(s)G(s)$$
$$G'(s) = \frac{10596.2598s + 222903.2305}{s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s}.$$

Ahora bien, sustituyendo estos datos para encontrar a nuestra $T(s)$ se tiene:

$$T(s) = \frac{G'(s)}{1 + H(s)G'(s)};$$

$$T(s) = \frac{10596.2598s + 222903.2305}{s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10596.2598s + 222903.2305}{s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s}};$$

$$T(s) = \frac{10596.2598s + 222903.2305}{10596.2598s + 222903.2305 + s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s};$$

$$T(s) = \frac{10596.2598s + 222903.2305}{s^3 + 1263.4821s^2 + 28829.8231s + 222903.2305};$$

donde los polos de esta ecuación son:

$$s_1 = -1240.3843.$$

$$s_2 = -11.548888 + 6.8064799i.$$

$$s_3 = -11.548888 - 6.8064799i.$$

Podemos apreciar que la parte real de sus tres raíces es negativa, es decir los polos de $T(s)$ se encuentran gráficamente en la parte izquierda del plano complejo. Por lo tanto, podemos deducir que el sistema de control es estable.

Algunas herramientas más que nos dan este mismo resultado son el teorema 1.4.10, donde se tienen las hipótesis $a = 1263.4821$, $b = 28829.8231$ y $c = 222903.2305$ que cumplen que $a, b, c > 0$ y $36425965.433 > 222903.2305$, o bien, $ab > c$; y se tiene como resultado que el polinomio $P(s) = s^3 + 1263.4821s^2 + 28829.8231s + 222903.2305$ es Hurwitz. Es decir, las raíces del polinomio $P(s)$ tienen parte real negativa, por lo que el sistema con función de transferencia $T(s)$ es estable.

De la misma manera, al rellenar la matriz de Hurwitz correspondiente al polinomio $P(s)$ se tiene que:

$$H(P) = \begin{pmatrix} 1263.4821 & 222903.2305 & 0 \\ 1 & 28829.8231 & 0 \\ 0 & 1263.4821 & 222903.2305 \end{pmatrix}.$$

Analizando los menores principales diagonales de $H(P)$ podemos ver que

$$\Delta_1 = |1263.4821| = 1263.4821 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1263.4821 & 222903.2305 \\ 1 & 28829.8231 \end{vmatrix} = 36203062.20251 > 0.$$

5. Relación entre el diferencial electrónico, motor BLDC y el control PID 101

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1263.4821 & 222903.2305 & 0 \\ 1 & 28829.8231 & 0 \\ 0 & 1263.4821 & 222903.2305 \end{vmatrix} = 8069779518933.374 > 0.$$

Por lo cual, al utilizar el Criterio de Routh-Hurwitz 1.4.12 se tiene que el polinomio $P(s)$ es Hurwitz.

Finalmente, aplicando el algoritmo de Routh al polinomio $P(s)$ podemos construir la tabla correspondiente $P(s) = s^3 + 1263.4821s^2 + 28829.8231s + 222903.2305$

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1263.4821 \\ a_1 \\ b_1 \end{array} \begin{array}{l} 28829.8231 \\ 222903.2305 \end{array}$$

Posteriormente, calculamos la incógnita a_1

$$a_1 = \frac{(28829.8231)(1263.4821) - (1)(222903.2305)}{1263.4821}.$$
$$a_1 = 28653.4033.$$

Luego

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1263.4821 \\ 28653.4033 \\ b_1 \end{array} \begin{array}{l} 28829.8231 \\ 222903.2305 \end{array}$$

Calculando b_1 , se tiene

$$b_1 = \frac{(28653.4033)(222903.2305) - (1263.4821)(0)}{28653.4033}.$$
$$b_1 = 222903.2305.$$

Por tanto, la tabla queda:

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1263.4821 \\ 28653.4033 \\ 222903.2305 \end{array} \begin{array}{l} 28829.8231 \\ 222903.2305 \end{array}$$

Dado que en la columna principal no se tiene algún cambio de signo, por el corolario 1.4.14 se tiene que todas las raíces del polinomio $P(s)$ tienen parte real negativa, es decir, podemos reiterar que el polinomio $P(s)$ es Hurwitz y por lo tanto, el sistema representado por la función de transferencia $T(s)$ es estable.

Puesto que ya hemos analizado la estabilidad del sistema lo que revisaremos a continuación será su función de sensibilidad; recordemos que la función de sensibilidad de un sistema de lazo cerrado está dada por 4.2, así:

$$S = \frac{1}{1 + G(s)PID(s)}.$$
$$S = \frac{1}{\frac{10596.2598s + 222903.2305}{s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s}}.$$
$$S = \frac{s^3 + 1263.4821s^2 + 18233.5633s}{10596.2598s + 222903.2305}.$$

Esta ecuación nos sirve en el estudio del control robusto, este es aquel que es capaz de controlar un proceso a pesar de tener errores de modelo, ruidos de medición y diferentes perturbaciones y disturbios que ingresan al sistema de control de lazo. No obstante, esta última parte no se abordó en la realización de la tesis, por lo que si a alguien le interesa estudiar la robustez del control PID diseñado en este trabajo puede verse como un problema para resolver en otro trabajo de investigación.

Conclusiones

En el primer capítulo de este trabajo de tesis se estudiaron varias definiciones y conceptos para llevar a cabo un buen análisis en los siguientes capítulos; mientras que en la parte del modelo matemático del diferencial electrónico se logró encontrar cuatro ecuaciones de referencia, una por cada motor en rueda gracias a la geometría de Ackermann. En el capítulo 3 se pudo construir una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado a partir del modelo matemático del motor BLDC, donde se tiene como función de entrada al voltaje de este motor, mientras que como función de salida se tuvo a la velocidad angular con la que gira el rotor. Por lo que se refiere al capítulo 4 de este trabajo se estudiaron a fondo los métodos de sintonización para encontrar las ganancias correspondientes al controlador PID; así es como se llegó al último capítulo dónde, después de lograr una unión funcional entre el diferencial electrónico, el motor BLDC y el control PID, se concluyó que el control PID diseñado en este trabajo tiene un funcionamiento óptimo y adecuado al presentarse varios casos cuando un usuario tome una o varias curvas a bordo del prototipo de vehículo eléctrico.

Como objetivo general se tenía el estudiar modelos matemáticos de las principales partes del tren motriz de un prototipo de automóvil eléctrico de cuatro motores en rueda, e investigar las relaciones entre ellas para diseñar un control PID de velocidad del mismo; este objetivo fue llevado a cabo como se ve en el capítulo 5 de este trabajo de tesis. Por otra parte, también se cumplieron los objetivos específicos como el de conocer las partes principales del tren motriz de un automóvil eléctrico, así como su funcionamiento; además del análisis de los modelos matemáticos correspondientes al diferencial electrónico y al motor BLDC. Para efectuar cada uno de estos objetivos se realizó un seminario de investigación teniendo como material de ayuda diversos libros, tesis y más referencias que se encuentran en la sección de la bibliografía; esta información sirvió de guía para comprender los modelos matemáticos establecidos con anterioridad y con esta metodología se pudo entender el correcto funcionamiento de un motor BLDC, la geometría de Ackermann y la sintonización de un control PID.

Después de haber realizado este trabajo de tesis se tienen varios puntos por concluir. Fue posible llevar a cabo un estudio completo del modelo matemático del motor BLDC y del diferencial electrónico, por lo que ambos modelos de los elementos fueron relacionados con el controlador más utilizado en la actualidad en la industria automotriz, para poder

controlar la velocidad angular de los cuatro motores ubicados en cada una de las ruedas del vehículo eléctrico. Para que el controlador PID diseñado en este trabajo de tesis trabajara adecuadamente se investigaron métodos de sintonización; durante este proceso de investigación quedó claro que el método de Ziegler y Nichols para encontrar las ganancias proporcional, integral y derivativa del controlador PID no tiene una base teórica rigurosa, pues es una propuesta empírica que se basa en resultados que hicieron los autores en la década de los cuarenta del siglo pasado al analizar el comportamiento de diversas plantas.

Ahora bien, los resultados numéricos obtenidos muestran el correcto funcionamiento del controlador en los casos más comunes del giro de un vehículo; no obstante, todavía quedan tareas pendientes tal como lo es el problema abierto de trabajar con otros controladores más actuales y también el estudio de que con un mismo controlador para los cuatro motores BLDC se agregue el análisis de la batería y el freno regenerativo.

Como tercer trabajo pendiente se tiene el estudio más detallado de la robustez del control PID diseñado en este trabajo de tesis; para esto se debe retomar el tema de sensibilidad y examinar el tema de sensibilidad complementaria.

Finalmente, considero que trabajar con el tema de los vehículos eléctricos y aportar una pequeña parte en el desarrollo de esta actual investigación es muy importante pues poco a poco se espera que la humanidad vaya sustituyendo los autos de combustión por vehículos eléctricos para evitar más contaminación en nuestro planeta y en un futuro tengamos opciones de transporte más ecológicas.

Bibliografía

- [1] Alberto Pérez, M, Pérez Hidalgo, A. & Pérez Berenguer, E. (2007), Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo, Universidad Nacional de San Juan.
- [2] Ayres, Robert (1989). Technological Transformations and Long Waves.
- [3] Bennett, S. (1993). Development of the PID controller. IEEE Control Systems Magazine, 13(6), 58-62.
- [4] Bricio Barrios, E., E.,(2015), Implementación y análisis de estrategias numéricas estocásticas de optimización global sobre esquemas de control de proceso [Tesis de maestría], Universidad de Guanajuato.
- [5] Castro Heredia, O. (2022), Diseño e implementación de un diferencial electrónico para un vehículo eléctrico de tracción en cuatro ruedas, [Tesis de maestría], Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- [6] Contreras Villamizar, E. F., & Sánchez Rodríguez R., (2010), Diseño y construcción de un banco de prácticas en motores eléctricos, como apoyo a la asignatura "Diseño de máquinas II"[Tesis de ingeniería], Universidad Industrial de Santander.
- [7] Day, L., & McNeil, I. (2002). Biographical dictionary of the history of technology. Routledge.
- [8] Farina, J., Grigioni, L., Palmegiani, M., (2014), FISICA Movimiento Circular , Universidad Nacional de Rosario.
- [9] G. Curiel-Olivares, J. Linares Flores, A. Méndez, y R. Marquez-Contreras, "Identificación paramétrica y control de velocidad angular del motor de cd sin escobillas en rueda de aplicación para tracción eléctrica: Un enfoque basado en la propiedad de planitud diferencial," en Congreso Nacional de Control Automático, 10 2019.
- [10] Gómez Cárdenas R., J., (2018), Simulación de motores de inducción para diferentes estados de cargas [Trabajo de diploma], Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

-
- [11] Google. (s.f.). [Esquema de un diferencial abierto]. Recuperado el 10 de enero, 2023, de suzuki88.webcindario.com/varios-diferencial.htm
- [12] Google. (s.f.). [¿Cuántos tipos de diferenciales existen?]. Recuperado el 10 de enero, 2023, de <https://www.todo4x4.la/taller-4x4/que-es-un-diferencial-que-hace/>
- [13] Google. (s.f.). [Radio de giro]. Recuperado el 11 de enero, 2023, de <https://www.nexu.mx/blog/para-que-sirve-la-alineacion-y-el-balanceo-de-las-llantas-2-2/>
- [14] Google. (s.f.). [¿Qué es y como funciona el principio de Ackerman?]. Recuperado el 13 de enero, 2023, de <https://www.ingenieriaymecanicaautomotriz.com/que-es-y-como-funciona-el-principio-de-ackerman/>
- [15] Google. (s.f.). [Estructura de los BLCD]. Recuperado el 13 de enero, 2023, de <http://www.fullmecanica.com/definiciones/m/1836-motores-blcd?highlight=WyJibGRjIl0=>
- [16] Google. (s.f.). [Anatomía de un BLDC]. Recuperado el 15 de enero, 2023, de <https://www.digikey.com.mx/es/blog/using-blcd-hall-sensors-as-position-encoders-part-1>
- [17] Google. (s.f.). [HOW BRUSHLESS (BLDC) MOTORS WORK]. Recuperado el 18 de enero, 2023, de <https://nerdytechy.com/arduino-brushless-motor-control-tutorial/>
- [18] Google. (s.f.). [Modelo Electromecánico]. Recuperado el 18 de enero, 2023, de <https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/modelo-de-motor-dc/>
- [19] Google. (s.f.). [Modelo lineal de un motor DC]. Recuperado el 18 de enero, 2023, de <http://stg-pepper.blogspot.com/2016/04/modelo-simple-de-un-motor-dc.html>
- [20] Google. (s.f.). [QS Motor 3000 205 50H V3 E-Car Hub Motor]. Recuperado el 22 de enero, 2023, de <https://es.aliexpress.com/item/4001174187869.html>
- [21] Grigoletto, E. C., & de Oliveira, E. C. (2018). A note on the inverse Laplace transform. *Cadernos do IME-Série Matemática*, (12), 39-46.
- [22] Henríquez Novoa, J. A., Martínez Rodríguez, W. J, (2019), Identificación y sintonización de controladores PID para procesos de integración [Tesis de ingeniería], Universidad de la Costa-CUC.
- [23] IDAE, Mapa Tecnológico de Movilidad Eléctrica, Observatorio Tecnológico de la Energía, Ministerio de Industria, Energía y Fomento.
- [24] Lita, A., & Cheles, M. (2012). Sensorless BLDC Control with Back-EMF Filtering Using a Majority Function.
-

-
- [25] Loredó Villalobos, C. A. (2005), Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz [Tesis de licenciatura], Universidad Autónoma Metropolitana.
- [26] Maruenda Sanz, J., (2016), Modelo paramétrico de un vehículo para el estudio de su comportamiento dinámico en curva [Tesis de ingeniería], Universitat Politècnica de València.
- [27] Minorsky, N. (1922). Directional stability of automatically steered bodies. *Journal of the American Society for Naval Engineers*, 34(2), 280-309.
- [28] O. Castro-Heredia “Diseño e implementación de un diferencial electrónico para un vehículo eléctrico de tracción en cuatro ruedas”, Tesis de maestría. Universidad Tecnológica de la Mixteca, enero 2022.
- [29] Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- [30] Patil, U. A., Savant, V. J., Bharamgonda, R. S., & Gore, P. N. (2018). Recent Advances in Differential Drive Systems for Automobile Propulsion. *Recent Advances in Differential Drive Systems for Automobile*.
- [31] Payri González, F., & Desantes Fernández, J. M. (2011). *Motores de combustión interna alternativos*. Editorial Universitat politècnica de valencia.
- [32] Ponce, Esaú. (5 de abril de 2022). JAC E10X 2022 a prueba, el auto eléctrico más barato en México ¿vale la pena?. *Autocosmos*. <https://noticias.autocosmos.com.mx/2022/04/05/jac-e10x-2022-a-prueba-el-auto-electrico-mas-barato-en-mexico-vale-la-pena>
- [33] Pozo Pérez, J., & Chorbadjian, R. M. (2006). Tópicos de “Electricidad y Magnetismo”, Universidad Dirgo Portales.
- [34] Santos Silva, D. M. (2012), Impacto dos perfis de mobilidade eléctrica na adequação da reserva operacional [Tesis de maestría], FEUP, Porto.
- [35] Señales y sistemas. Una aproximación al laboratorio. (n.d.). (n.p.): Univ. Nacional de Colombia.
- [36] Smith, C. A., Corripio, A. B., & Basurto, S. D. M. (1991). *Control automático de procesos: teoría y práctica*. Limusa.
- [37] Spiegel, M. R., & Arias Paz, J. D. (1991). *Transformadas de laplace*.
- [38] Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. (2015). *Teoría y problemas de física 2*.
- [39] vt en línea. (3 de abril de 2019). *Cómo funciona un motor brushless o sin escobillas* [Archivo de Vídeo]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=NnUiAgUundw>
-

- [40] Ziegler, J. G., & Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. trans. ASME, 64(11).
-