



Universidad Tecnológica de la Mixteca

**IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE UNA  
SUSPENSIÓN DE UN CUARTO DE AUTOMÓVIL  
CON ABSORBEDORES DE VIBRACIÓN BASADOS  
EN INERSOR**

Tesis para obtener el título de:

**INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

Presenta:

**EDREI YAEL SANTOS GARCÍA**

Director de tesis:

**DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS**

Co-Director de tesis:

**DR. EDUARDO BARREDO HERNÁNDEZ**

H. Cd. de Huajuapán de León, Oaxaca

Febrero de 2023

## *Dedicatoria*

*El presente trabajo de tesis es dedicado con mucho cariño a toda mi familia.*

*A mis padres José y Betzabe por su amor y apoyo incondicional.*

*A mis hermanos Chelayito y Kami que son mi motivación para seguir aprendiendo y ser  
su ejemplo a seguir.*

*En honor a las familias que perdieron algún ser querido debido al covid 19 y a mi querida  
abuela Inelva Leticia Velasco que en paz descanse.*

# Agradecimientos

En primer lugar le agradezco profundamente a mis padres, José Hilario Santos Ziga y Betzabe Leticia García Velasco, por ser los autores principales de mi vida, por sus consejos, su amor, dedicación y sacrificio. A mis hermanos José y Kamilah, que los adoro con toda mi alma y son mi motivación para seguir adelante; a mis abuelos gracias por su apoyo y su amor; y a mis tíos Fredy, Mara, Adan, Fátima, Abi y Bonfilio por su apoyo y sus palabras de aliento.

A toda la familia Santos Ziga y Garcia Velasco, que siempre los querré y respetaré.

A mi novia Reyna por su amor, apoyo y sus consejos, gracias por acompañarme en la mayor parte de mi carrera, a mis amigos Santiago, Hugo, Yael, Jonatan, Elvis, Eli, Jona, Peña y Kevin por su gran amistad y cariño.

A todos mis compañeros y amigos: Ayotzin, Mario, Etzar, Gilberto, Luis, Jonatan, Kevin y Alejandro con quienes compartí toda mi estadía en la universidad.

Continúo agradeciendo al Dr. José Gabriel Mendoza Larios y al Dr. Eduardo Barredo Hernández por haberme dado su confianza y experiencia para realizar este trabajo de investigación y además de brindarme consejos para impulsar mi formación profesional.

A los profesores M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez, Ing. Gustavo Jimenez Santana, Ing. José Eduardo Cruz Mayo, Dr. Octavio Alberto Agustín Aquino y al Dr. Arturo Hernández Méndez quienes formaron un papel muy importante en mi desarrollo académico.

# Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el análisis enfocado a la metodología de identificación algebraica para el desarrollo de los identificadores de una suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores de vibración basados en inersor, al cual se le implementan tres distintas redes mecánicas basadas en inersor (C3, C4 y C6). Es importante mencionar que en un vehículo es muy común que se presenten ciertos grados de vibraciones y cuando estos niveles sobrepasan los niveles permisibles el sistema está expuesto a sufrir cierto descontrol o resonancia. Por ello los elementos que integran a la suspensión deben estar correctamente sintonizados, ya que si se encuentran en desintonización se pierde la efectividad de mitigación de vibración. Por lo tanto para conocer los parámetros físicos de estos dispositivos se pueden emplear métodos de identificación paramétrica.

Dentro del área de identificación de parámetros se encuentra la técnica de identificación algebraica, la cual ha demostrado tener buenas propiedades ante otros métodos. Es por ello que en el siguiente trabajo se planea realizar ciertas pruebas de robustez de los identificadores desarrollados.

## Nomenclatura

$k, c$	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento del sistema de suspensión del modelo de un cuarto de vehículo
$k_t$	Coefficiente de rigidez del neumático
$m_s$	Masa suspendida
$m_u$	Masa no suspendida
$b$	Inertancia
$x_s$	Desplazamiento de la masa suspendida $m_s$
$x_u$	Desplazamiento de la masa no suspendida $m_u$
$x_0$	Desplazamiento de la base
$\dot{x}_0$	velocidad de la base
$F$	Magnitud escalar de fuerza aplicada en las terminales del inersor
$\mathcal{L}$	Lagrangiana
$T$	Energía cinética
$U$	Energía potencial
$F(t)$	Fuerza de excitación
$E_{inersor}$	Energía cinética del inersor
$D$	Función de disipación de Rayleigh
$Y(s)$	Impedancia mecánica
DVA	Absorbedor dinámico de vibración
IDVA	Absorbedor dinámico de vibración basado en inersor
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
NDVA	Absorbedor dinámico de vibración no tradicional
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado
TID	Amortiguador de inercia sintonizado



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2. Justificación . . . . .	4
1.3. Hipótesis . . . . .	6
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.4.1. Objetivos generales . . . . .	6
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.5. Metas . . . . .	7
1.6. Alcances y Limitantes . . . . .	7
1.6.1. Alcances . . . . .	7
1.6.2. Limitantes . . . . .	8
1.7. Metodología . . . . .	8
1.8. Estructura de la tesis . . . . .	10

<b>2. Estado del arte</b>	<b>11</b>
2.1. Identificación de sistemas . . . . .	11
2.1.1. Modelo del sistema . . . . .	12
2.1.2. Señales . . . . .	13
2.1.3. Criterios . . . . .	13
2.2. Identificación algebraica . . . . .	14
2.3. Sistema de suspensión . . . . .	15
2.3.1. Modelo de un cuarto de automóvil . . . . .	17
2.4. Absorbedor dinámico de vibración . . . . .	17
2.5. Analogía fuerza-corriente . . . . .	22
2.6. Inersor . . . . .	23
2.6.1. Impedancias mecánicas basadas en inersor . . . . .	25
2.6.2. Diseños comunes de inersores . . . . .	27
2.6.3. Aplicaciones del inersor . . . . .	30
<b>3. Marco teórico</b>	<b>33</b>
3.1. Resorte . . . . .	33
3.2. Amortiguamiento . . . . .	35
3.3. Elemento masa o inercia . . . . .	37
3.4. Excitación armónica . . . . .	38
3.5. Formulismo de Euler-Lagrange . . . . .	39
3.5.1. Principio de Hamilton . . . . .	39
3.5.2. Lagrangiano con ecuaciones de Newton . . . . .	40

3.5.3.	Función disipativa de Rayleigh . . . . .	41
3.5.4.	Modelado matemático de un absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA). . . . .	41
3.6.	Transformada de Laplace . . . . .	43
3.7.	Identificación algebraica . . . . .	45
3.7.1.	Base matemática . . . . .	45
3.7.2.	Metodología algebraica . . . . .	47
3.7.3.	Modelo matemático para la identificación de los parámetros de un absorbedor dinámico de vibración tradicional. . . . .	48
3.7.4.	Resultados de simulación del sistema DVA . . . . .	54
<b>4.</b>	<b>Modelo matemático</b>	<b>59</b>
4.1.	Modelo de un cuarto de vehículo . . . . .	59
4.2.	Identificación algebraica . . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Resultados</b>	<b>67</b>
5.1.	Simulaciones . . . . .	67
5.1.1.	Configuración mecánica C4 basada en inersor . . . . .	68
5.1.2.	Configuración mecánica C3 basada en inersor . . . . .	70
5.1.3.	Configuración mecánica C6 basada en inersor . . . . .	73
5.2.	Pruebas de robustez . . . . .	75
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
6.1.	Trabajos futuros . . . . .	82

<b>A. Modelo dinámico de la red C4</b>	<b>85</b>
<b>B. Identificación algebraica de la red C3</b>	<b>87</b>
<b>C. Diagramas a bloques</b>	<b>91</b>

---

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Modelo de una suspensión de un cuarto de automóvil basado en inersor. . . .	4
2.1. Modelo mecánico de una suspensión pasiva [39]. . . . .	16
2.2. Modelo de un cuarto de automóvil con sistema de suspensión pasiva [39]. . .	17
2.3. Absorbedor dinámico de vibración (DVA) [9]. . . . .	18
2.4. Absorbedor dinámico de vibración no amortiguado [9]. . . . .	20
2.5. Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad [46]. . . . .	22
2.6. Símbolo del inersor [9]. . . . .	24
2.7. Nueva analogía entre sistemas mecánicos y eléctricos [9]. . . . .	25
2.8. Impedancias mecánicas basadas en inersor más representativas [9] . . . . .	27
2.9. Dibujo esquemático del inersor husillo de bolas [32]. . . . .	28
2.10. Prototipo de un inersor piñón cremallera [32]. . . . .	28
2.11. Esquema de un inersor hidráulico [49]. . . . .	29

---

2.12. Dibujo esquemático de un inersor hidráulico helicoidal [52]. . . . .	29
2.13. Esquema de un inersor electromagnético [56]. . . . .	30
2.14. Kimi Raikkonen en el Gran Premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo llevó a la victoria empleando un inersor. Foto de LAT Photographic [10]. . . . .	31
2.15. Red mecánica implementada en la dirección de una motocicleta de alto rendimiento [14]. . . . .	31
3.1. Resorte helicoidal. . . . .	33
3.2. Resorte sometido a fuerza de tensión. . . . .	34
3.3. Gráfica fuerza contra alargamiento [29]. . . . .	34
3.4. Arreglo en serie. . . . .	35
3.5. Arreglo en paralelo. . . . .	35
3.6. Amortiguador viscoso (pistón y cilindro) [43]. . . . .	36
3.7. Gráfica fuerza contra separación de velocidad. . . . .	36
3.8. Masa bajo efecto por una fuerza [42]. . . . .	37
3.9. Tres ejemplos de excitaciones periódicas comunes [25]. . . . .	38
3.10. Modelo de un absorbedor dinámico de vibración tradicional. . . . .	42
3.11. Señal de fuerza de entrada $f(t)$ tipo armónica. . . . .	55
3.12. Desplazamiento de la coordenada $x_s$ . . . . .	55
3.13. Desplazamiento de la coordenada $x_1$ . . . . .	55
3.14. Identificación algebraica del parámetro de la masa $M_s$ . . . . .	56
3.15. Identificación algebraica del parámetro de la masa $m_1$ . . . . .	57

---

---

3.16. Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de amortiguamiento $C_1$ .	57
3.17. Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de rigidez $K_s$ .	57
3.18. Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de rigidez $k_1$ .	58
4.1. Modelo de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la impedancia mecánica C4.	60
5.1. Señal de entrada tipo armónica.	67
5.2. Identificador del coeficiente de inercia $b$ .	69
5.3. Identificador del coeficiente de rigidez $k_1$ .	69
5.4. Identificador del coeficiente de rigidez $k_2$ .	69
5.5. Identificador del coeficiente de amortiguamiento $c$ de la red C4.	70
5.6. Identificador de la masa suspendida $m_s$ de un cuarto de automóvil.	70
5.7. Identificador del coeficiente de inercia $b$ de la red C3.	71
5.8. Identificador del coeficiente de rigidez $k_1$ de la red C3.	71
5.9. Identificador del coeficiente de rigidez $k_2$ de la red C3.	72
5.10. Identificador de la masa suspendida $m_s$ de la red C3.	72
5.11. Identificador del coeficiente de amortiguamiento $c$ de la red C3.	72
5.12. Identificador del coeficiente de inercia $b$ de la red C6.	73
5.13. Identificador del coeficiente de rigidez $k_1$ de la red C6.	73
5.14. Identificador del coeficiente de rigidez $k_2$ de la red C6.	74
5.15. Identificador del coeficiente de amortiguamiento $c$ de la red C6.	74
5.16. Identificador de la masa suspendida $m_s$ de la red C6.	74
5.17. Perfiles artificiales de carretera de clase A-D.	76

---

---

5.18. Coeficiente de rigidez $k_1$ real vs estimado. . . . .	76
5.22. Inertancia $b$ real vs estimada. . . . .	76
5.19. Coeficiente de rigidez $k_2$ real vs estimado. . . . .	77
5.20. Masa suspendida $m_s$ real vs estimada. . . . .	77
5.21. Coeficiente de amortiguamiento $c$ real vs estimado. . . . .	78
5.23. Identificador del parámetro $b$ aplicando variación $\pm 2\%$ de $m_s$ . . . . .	78
5.24. Identificador del parámetro $k_1$ aplicando variación $\pm 2\%$ de $m_s$ . . . . .	79
5.25. Identificador del parámetro $k_2$ aplicando variación $\pm 3\%$ de $m_u$ . . . . .	79
5.26. Identificador del parámetro $c$ aplicando variación $\pm 3\%$ de $m_u$ . . . . .	79
C.1. Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C3. . . . .	91
C.2. Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C3. . . . .	92
C.3. Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C4. . . . .	92
C.4. Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C4. . . . .	93
C.5. Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C6. . . . .	93

---

C.6. Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C6. . . . . 94



---

# ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Analogía fuerza-corriente entre sistema mecánico y eléctrico. . . . .	23
3.1. Transformada de Laplace de funciones usuales en el área de vibraciones. . . .	44
3.2. Parámetros de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil [8]. . . . .	56
5.1. Parámetros óptimos de la suspensión basado en inersor con la red C4 [57]. . .	68
5.2. Parámetros del modelo [57]. . . . .	68
5.3. Parámetros óptimos de la suspensión basado en inersor con la red C3 [4]. . .	71
5.4. Niveles de rugosidad de la carretera norma ISO 8608 [4], [57]. . . . .	75



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

La vibración es un fenómeno físico ocasionado principalmente por fuerzas dinámicas externas, y por lo tanto, cualquier elemento mecánico o estructura está expuesto a sufrir vibraciones no deseadas. Por este motivo, es de vital importancia tener un análisis de vibraciones dentro del proceso del diseño en sistemas mecánicos, especialmente aquellos que se someterán a fuerzas de excitación externas. Conviene destacar que cuando un sistema es sometido a una excitación por una fuerza externa cuya frecuencia es igual a la frecuencia natural del sistema, se desarrolla el fenómeno conocido como resonancia. Tal fenómeno ocasiona un incremento en la amplitud de vibración, y por lo tanto, pone en riesgo su integridad estructural. En efecto, es importante hacer un análisis dinámico al sistema de suspensión y aplicar una serie de tratamientos matemáticos para obtener un alto nivel de mitigación de vibración. A lo largo del tiempo se han propuesto sistemas que disminuyen la amplitud de vibración, los cuales se conocen como absorbedores de vibración. En aplicaciones de ingeniería, los absorbedores dinámicos de vibración se emplean a menudo en sistemas que

constantemente están sometidos a fuerzas de vibración, algunas aplicaciones son: ingeniería civil, componentes en transportes aéreos y múltiples sistemas mecánicos o estructurales. El absorbedor está constituido por un elemento inercial y un arreglo de resorte-amortiguador conectados en paralelo. Asimismo, al sintonizar correctamente los parámetros de rigidez y amortiguamiento, el equilibrio dinámico entre la estructura principal y el absorbedor ofrece una mejor respuesta dinámica. Para este dispositivo han surgido diferentes arreglos a lo largo del tiempo, el primer diseño fue propuesto por Frahm, quien sólo agregó un resorte, el cual resultó útil para el control de vibración en una banda estrecha de frecuencias de excitación. Más tarde, Den Hartog añadió el mecanismo de amortiguamiento y como resultado la banda de frecuencia efectiva se amplió de forma favorable.

Para aumentar el rendimiento de los sistemas de amortiguamiento, varios investigadores han propuesto diferentes tipos de dispositivos pasivos para mejorar las respuestas vibratorias de sistemas mecánicos, como es el caso de la invención del inersor. Este dispositivo se desarrolló inicialmente para suspensiones de automóviles de alto rendimiento de la Fórmula 1 y al ser implementado se obtuvieron amplitudes mínimas de vibración.

Por otro lado, para que una suspensión trabaje eficazmente es indispensable que los parámetros de los dispositivos que integran al sistema estén correctamente sintonizados, esto ayuda a que el automóvil provea una mayor calidad de comodidad y mantener una buena adherencia entre el neumático y el terreno. Por ello, en este trabajo de tesis se presenta la estrategia de identificación algebraica para identificar los parámetros de los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor integrados en una suspensión de un cuarto de automóvil.

## 1.1. Planteamiento del problema

En la suspensión de un automóvil, es importante considerar su capacidad de disipación de energía vibratoria, ya que al presentarse altos niveles de vibración, se pueden generar condiciones perjudiciales en el sistema bajo resonancia. Este fenómeno se genera cuando las frecuencias de excitación externa aplicadas se igualan con alguna de las frecuencias naturales del sistema. Al momento en que la resonancia afecta directamente al sistema provocará un gran número de problemas tales como: desgaste, fatiga, descontrol del funcionamiento en elementos mecánicos y en casos extremos la fractura del sistema.

Las vibraciones pueden ser causadas por frecuencias generadas por el mismo sistema o de igual manera por frecuencias de perturbaciones externas. Por ello, el estudio de sistemas de amortiguamiento se ha vuelto de gran importancia. Estos dispositivos tienen como objetivo reducir las amplitudes vibratorias, esto se logra gracias a la correcta sintonización de los elementos que integran al sistema, además, de implementar dispositivos y materiales novedosos. Con todo esto se puede lograr una suspensión pasiva de alto rendimiento.

Ahora bien, el inersor es un dispositivo novedoso que se integra al sistema de amortiguamiento, con el objetivo de mejorar el desempeño de las redes tradicionales de amortiguador-resorte. Smith [47] planteó que el inersor es un dispositivo mecánico que almacena energía vibratoria del sistema. Desde su invención, se han realizado múltiples investigaciones, por ello se ha experimentado en varias aplicaciones en sistemas mecánicos y especialmente en aplicaciones automotrices como en suspensiones automotrices y sistemas de dirección para motocicletas.

Esta tesis tiene como propósito obtener los parámetros físicos de una suspensión de un cuarto de automóvil, la cual se compone por configuraciones de absorbedores dinámicos de vibraciones basados en inersor al integrar tres distintas redes mecánicas (C3, C4 y C6), ver la figura 1.1. Cada red está compuesta por: un resorte, un amortiguador de fluido viscoso y un inersor, respectivamente. Posteriormente, para determinar los parámetros se implementará

la técnica de identificación algebraica y para su desarrollo se usará el software de Matlab Simulink.

Por último, es importante destacar que la metodología que se pretende desarrollar en este trabajo de tesis, se puede extrapolar para su combinación con las leyes de control para el desarrollo de suspensiones semi-activas.

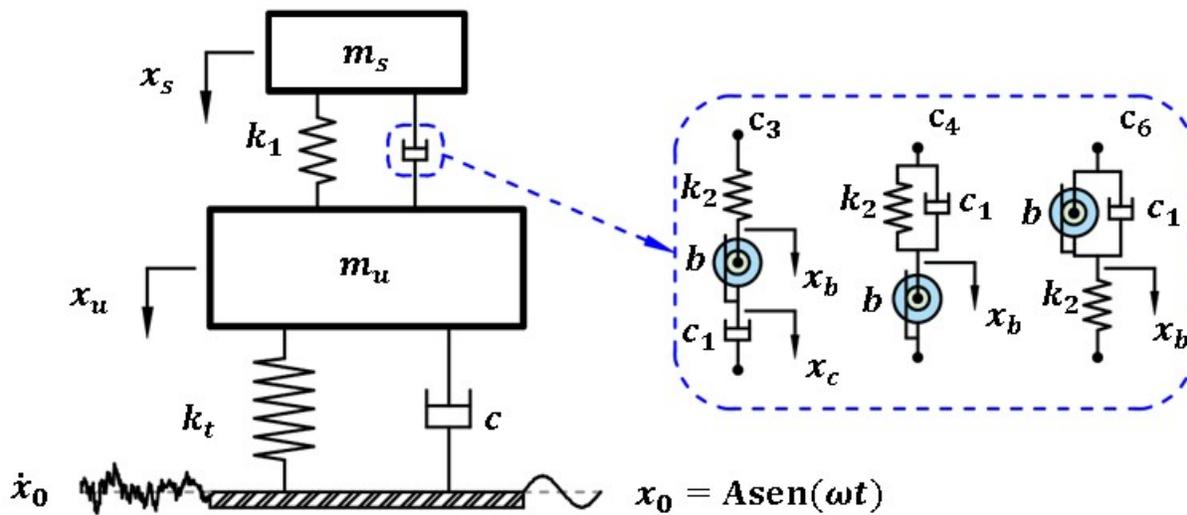


Figura 1.1: Modelo de una suspensión de un cuarto de automóvil basado en inersor.

## 1.2. Justificación

Es común que en los vehículos se presenten cierto grado de vibración, por lo general, está vibración es ocasionada por: fuerzas externas, desajuste de los parámetros del sistema, etc. Cuando estos niveles sobrepasan los límites permisibles, es necesario aplicar acciones correctivas en cuanto a la supresión de vibración se refiere y de esta forma asegurar niveles de vibración permisibles. Por esta razón, se les agregan sistemas de amortiguamiento comúnmente conocido como suspensión, donde sus elementos disminuyen las amplitudes vibratorias, gracias a sus propiedades físicas. Este dispositivo de control pasivo reduce la amplitud vibratoria por medio de configuraciones mecánicas, que principalmente están constituidas por resortes y amortiguadores. Es importante destacar que en los sistemas de amortiguamiento

se ha incorporado un nuevo elemento mecánico llamado inersor, el cual ha demostrado tener importantes mejoras de rendimiento en varios sistemas mecánicos o estructurales, por ejemplo: suspensiones de vehículos, suspensiones de trenes, diseño y construcción de sistemas de control en trenes de aterrizaje, turbinas, recolectores de energía, puentes, etc.

Cuando los dispositivos que integran a un absorbedor de vibraciones se encuentran correctamente optimizados, se obtiene un sistema que desarrolla niveles de vibración mínimas, a esto se le conoce como *sintonización*. Esta sintonización se obtiene mediante varios procesos de optimización. Sin embargo, por ser un sistema de control pasivo está constantemente sujeto a lo que se le conoce como desintonización, es decir, uno o más de los valores de los parámetros del sistema tendrán variaciones y por ende esto genera pérdida de efectividad de mitigación vibratoria. Por lo anterior, es necesario determinar las variaciones de los parámetros, con el fin de realizar las correcciones necesarias para llevar de nuevo al sistema a su funcionamiento óptimo.

Por otro lado, la técnica de identificación algebraica ha sido de interés para investigadores e ingenieros, ya que con esta herramienta se pueden estimar los parámetros físicos de diferentes sistemas de ingeniería, además, es importante destacar que este método presenta propiedades de robustez con respecto a la variedad de perturbaciones y que no es necesario conocer las condiciones iniciales del sistema. Cabe mencionar, que en la literatura no se ha implementado la técnica de identificación algebraica para la identificación de los parámetros físicos de una suspensión de un cuarto de vehículo con absorbedores de vibración basados en inersor. Es por ello que, en este trabajo de tesis se empleará la técnica de identificación algebraica para determinar los parámetros físicos del sistema y si en dado caso existen ciertos desajustes, se observará la variación obtenida.

## 1.3. Hipótesis

Con la implementación de la técnica de identificación algebraica se logrará el desarrollo de identificadores de los parámetros físicos de una suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores de vibración basados en inersor, al mismo tiempo, estos identificadores servirán para el proceso de re-sintonización.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivos generales

Implementación de la técnica de identificación algebraica para el desarrollo de los identificadores de parámetros de una suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor.

### 1.4.2. Objetivos específicos

1. Obtener los modelos matemáticos de la suspensión aplicando las tres distintas redes mecánicas basadas en inersor (C3, C4 y C6).
2. Implementar la técnica de identificación algebraica para el desarrollo de los identificadores.
3. Programar los identificadores propuestos mediante la generación de código en Matlab Simulink.
4. Análisis y simulación de los identificadores de parámetros propuestos.
5. Realizar un análisis de la robustez de los identificadores propuestos.

## 1.5. Metas

En este trabajo de investigación se plantea alcanzar las siguientes metas:

1. Revisar los fundamentos teóricos relacionados a la técnica de identificación algebraica, de los absorbedores dinámicos de vibración (DVA, Dynamic Vibration Absorber) y los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor (IDVA, Inerter-based Dynamic Vibration Absorber).
2. Desarrollar las ecuaciones dinámicas de los modelos de suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor (C3, C4 Y C6) utilizando el formulismo de Euler Lagrange.
3. Desarrollar, programar y validar los identificadores obtenidos mediante la técnica de identificación algebraica.
4. Análisis de los resultados y de la robustez de los identificadores desarrollados ante dinámicas no modeladas e incertidumbre paramétrica.

## 1.6. Alcances y Limitantes

### 1.6.1. Alcances

Se implementará una técnica de identificación capaz de estimar los parámetros físicos de los absorbedores de vibración basados en inersor. Al modelo de la suspensión se le implementará tres redes mecánicas C3, C4 y C6 las cuales tienen diferentes arreglos. Dicha técnica será lo suficientemente eficiente para estimar los parámetros, aún con la presencia de ciertas incertidumbres en el sistema.

### 1.6.2. Limitantes

El desarrollo de los identificadores se realizarán solamente en software, debido a la complejidad y falta de equipo como: sensores, actuadores, tarjetas y las redes mecánicas físicas.

## 1.7. Metodología

Para realizar este documento de tesis se propone usar la metodología de investigación tecnológica propuesta por Canales [7]. En el siguiente listado se observa la estructuración que se llevará a cabo para la investigación:

- 1. Documentación.** Antes de empezar una investigación es recomendable recaudar información sobre el tema a desarrollar, puesto que, amplía el panorama de acción al que se deberá de enfrentar, además de incrementar el conocimiento sobre el tema de investigación. Como por ejemplo para el desarrollo de esta tesis se recaudaron artículos científicos y/o documentos relacionados a los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersor, posteriormente, con este material se procedió a realizar el desarrollo de la investigación como: el estado del arte, marco teórico y bases importantes para la elaboración de la tesis. De la misma forma, con la literatura disponible es importante conocer la técnica de identificación algebraica para la obtención de los parámetros óptimos del sistema de amortiguamiento.
- 2. Determinación del problema.** En esta parte se da a conocer el problema general que se va a tratar. De modo particular, este documento de tesis tendrá como problema el identificar los parámetros de una suspensión de un cuarto de automóvil, a la cual se le implementarán tres rede mecánicas basadas en inersor (C3, C4 y C6). Es importante destacar que para abordar el problema se requiere conocer la técnica de identificación algebraica para estimar correctamente los parámetros físicos del sistema.

**3. Creación de la hipótesis.** El objetivo principal de esta parte es la formulación aceptable de una proposición realizada mediante la información y datos recaudados, durante el paso de la *documentación*. Asimismo, la hipótesis es usada como una propuesta tentativa de lo que se quiere obtener y/o demostrar, además, esta predicción se puede desarrollar aplicando el método científico y con esto verificar si la solución del problema se trató de manera correcta.

Para esta investigación en particular, la hipótesis se formuló de la siguiente manera: Con la implementación de la técnica de identificación algebraica se logrará el desarrollo de identificadores de los parámetros físicos de una suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores de vibración basados en inersor, al mismo tiempo, estos identificadores servirán para el proceso de sintonización.

**4. Definición del método.** El formulismo de Euler-Lagrange se usó para obtener los modelos matemáticos de la suspensión pasiva aplicando los IDVA's. Asimismo, ya con las ecuaciones de movimiento conocidas, se dará paso a emplear la transformada de Laplace, para obtener las ecuaciones algebraicas en función de frecuencia. Posteriormente, se empleará la técnica de identificación algebraica para obtener los identificadores.

**5. Resolución, validación y verificación.** Por medio de la herramienta computacional Matlab Simulink se obtuvieron los resultados numéricos y sus gráficas correspondientes. Posteriormente, se observaron las respuestas de los identificadores obtenidos.

**6. Análisis de resultados y conclusiones.** Ya obtenidos todos los resultados, se realizó una comparación detallada con los reportados en el documento y se dará un informe si los resultados obtenidos avalan la hipótesis y los objetivos escritos al inicio de la investigación de tesis.

**7. Redacción del informe final.** Para este punto, se redactaron los resultados con claridad y coherencia. Lo anterior se hizo al momento de terminar el desarrollo de la investigación.

## 1.8. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis se estructura en seis capítulos, los cuales se mencionan a continuación:

- **Capítulo uno.** Se muestra la introducción del tema de investigación, asimismo se presenta el planteamiento del problema, la justificación, la hipótesis, los objetivos generales y específicos, metas planteadas, alcances y limitantes y la metodología a seguir para el desarrollo de la tesis.
- **Capítulo dos.** Se dedica a la revisión del estado del arte de identificación, absorbedores de vibración e información sobre los inersores (redes mecánicas, tipos de diseños y sus aplicaciones más comunes en el área automotriz y otros).
- **Capítulo tres.** Se presenta la teoría fundamental para el desarrollo de la tesis, posteriormente, se efectúa un repaso a los temas de: ecuaciones de Euler-Lagrange, transformada de Laplace y la técnica de identificación algebraica. Asimismo, se ejemplifica la técnica de identificación algebraica a través del desarrollo de los identificadores de un absorbedor dinámico de vibración tradicional, para así tener un mayor entendimiento.
- **Capítulo cuatro.** Se encuentra el desarrollo matemático para los estimadores de los parámetros de una suspensión de un cuarto automóvil con redes mecánicas basadas en inersor, propuestas en este trabajo de tesis.
- **Capítulo cinco.** En esta parte se muestran los resultados analíticos y numéricos obtenidos a través de la técnica de identificación algebraica, además, se muestran los análisis de robustez de los identificadores y del efecto de desintonización en la respuesta vibratoria de los sistemas propuestos.
- **Capítulo 6.** Por último, se exponen las conclusiones de acuerdo a los resultados obtenidos con la realización de la tesis.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## ESTADO DEL ARTE

### 2.1. Identificación de sistemas

Los sistemas dinámicos se encuentran en todo momento en nuestro medio ambiente, por lo tanto, las técnicas de identificación de sistemas se han vuelto de gran importancia en distintas áreas del conocimiento, tales como: economía, biotecnología, ingeniería, entre otros. Estas ramas requieren de modelos precisos para así lograr un buen análisis, simulación, detección de fallas y control. Para sistemas que tienen un comportamiento complejo, donde requieren un modelo matemático más exacto para su análisis y diseño, necesitan técnicas sofisticadas, ya que tales modelos no se pueden obtener de manera sencilla. Es por ello que, la técnica de identificación de sistemas dinámicos, es una herramienta capaz de brindar métodos necesarios para obtener de manera más sencilla los parámetros desconocidos de algún sistema y con un alto rango de exactitud.

Basado en la investigación realizada por Zadeh [55], esta metodología se compone por:

- Clase del modelo utilizado.
- Tipo de señales a utilizar.
- Criterio de estimación.

Si estos tres factores son diseñados correctamente se obtendrán buenos resultados.

Por otro lado, existen dos enfoques para la identificación de sistemas:

**Identificación no paramétrica** En este caso de identificación, no se supone ningún tipo de estructura para el modelo, por lo tanto, no se integra un vector de parámetros en el modelo matemático. Por lo general, este tipo de identificación se apoya de funciones espectrales o alguna información de entrada o salida, para determinar características del sistema.

**Identificación paramétrica** En este enfoque sí es necesario tener un modelo matemático con cierta estructura y por ende, establecer un conjunto de parámetros con la información obtenida por la entrada o salida del sistema. En la mayoría de los casos, no es posible conocer todos los parámetros del modelo, por ello se procede a realizar una estimación con valores mínimos de error entre el modelo y el proceso físico.

### 2.1.1. Modelo del sistema

Para iniciar un análisis de algún comportamiento de un sistema es necesario experimentar sobre él para observar la respuesta que tiene, sin embargo, hay casos en sistemas complejos que llega a ser imposible su experimentación, por lo tanto, se debe optar en realizar una representación que simule la realidad, a esto se le conoce como modelo. Existe diferentes clases de modelos de sistemas físicos, en función del grado de formulismo matemático en la que se encuentren [2]:

- Mentales, intuitivos o verbales.
- Gráficos y tablas.

- Matemáticos.

En caso particular, en esta tesis se ajusta al modelo matemático, donde se tiene una serie de expresiones matemáticas (ecuaciones diferenciales) que reflejan las relaciones entre las variables del sistema.

### **2.1.2. Señales**

Uno de los factores esenciales que integran a la identificación de sistemas es el manejo de las señales, la evolución digital que se ha desarrollado permite que las señales continuas de la mayoría de sistemas físicos sean leídas y medidas de forma discreta, en otras palabras, se refiere a tomar muestras en cada intervalo de tiempo de muestreo de señales continuas, a esto se le conoce como señales discretas en el tiempo. Sin embargo, esta secuencia trae un error aparejado al periodo de muestreo, esto sucede ya que entre muestra y muestra no se observa la trayectoria real de la señal.

Generalmente, se trabaja con señales discretas en el dominio del tiempo, pero también se puede realizar una transformación en el dominio de la frecuencia, mediante la aplicación de la transformada de Fourier. De forma que se puedan representar sistemas físicos continuos en el tiempo, que se deben identificar con señales discretas en el tiempo o en el dominio de la frecuencia.

### **2.1.3. Criterios**

Uno de los últimos componentes antes mencionados para la solución de identificadores de sistemas, es la elección de un criterio de ajuste de parámetros del modelo seleccionado ante el conjunto de datos leídos en las señales. Esto significa que se crea una expresión matemática que brinde una evaluación exacta del modelo, para describir el proceso generador de los datos observados en las señales, por ejemplo, para expresar lo anterior se toma el error de

---

predicción de un modelo  $M(\Phi^*)$  de la siguiente forma:

$$\epsilon(t, \Phi^*) = y(t) - \hat{y}(t, \Phi^*) \quad (2.1)$$

cuando se tiene el siguiente conjunto de datos:

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad (2.2)$$

donde los errores de predicción se calculan para  $t = 1, 2, \dots, N$ . Posteriormente, se seleccionan parámetros del modelo que den un menor error de predicción. Pero, para hallar a este valor mínimo se puede usar una norma escalar o alguna función que pueda medir el tamaño de  $\epsilon$ , si no, otra opción es, requerir que  $\epsilon(t, \Phi^*) = 0$ .

## 2.2. Identificación algebraica

Las técnicas clásicas de identificación paramétrica utilizan el criterio de minimizar el error para ajustar los datos de un modelo, además, dependiendo de la característica de la señal variará la rapidez con la que se identifiquen los parámetros óptimos. Posteriormente, existe una metodología de identificación de parámetros, que tiene como objetivo obtener los parámetros exactos desconocidos, donde las fórmulas matemáticas se obtienen mediante tratamientos algebraicos específicos de las ecuaciones del modelo. Asimismo, al momento de aplicar estas operaciones matemáticas se elimina la dependencia de las condiciones iniciales.

Carvajal et al. [5], utilizaron la metodología de identificación algebraica para estimar parámetros y señales de sistemas vibratorios, donde para hallar la frecuencia y la amplitud usaron únicamente las mediciones de las posiciones. Demostraron por medio de sus resultados el desempeño dinámico y robustez al aplicar esta técnica. Ocampo et al. [12], desarrollaron un modelo matemático de identificación para determinar la magnitud y posición angular

del desbalance de un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad, demostraron que la técnica de identificación algebraica obtiene los parámetros desconocidos con gran rapidez, sin necesidad de llevar al rotor a su velocidad nominal. Luego, Larios et al. [30], presentaron el balanceo automático de un sistema rotor-cojinete mediante discos de balanceo activo, emplearon la metodología de identificación algebraica para determinar la magnitud del desbalance y la posición angular del rotor y tomaron como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor.

Adicionalmente, en la literatura se encontraron trabajos relacionados a la estimación de parámetros en suspensiones de vehículos: Hernández Alcántara et al. [21] usaron la técnica de identificación paramétrica para encontrar el deterioro del coeficiente de amortiguamiento de una suspensión semi-activa que integraba un amortiguador magnetorreológico. Conde et al. [8], implementaron la técnica de identificación algebraica para obtener los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil, todo esto con la finalidad de monitorear los parámetros físicos y dar mantenimiento a los elementos que integran a la suspensión.

## 2.3. Sistema de suspensión

La función principal de este sistema es absorber las vibraciones generadas por las irregularidades del terreno por donde se desplaza, esto se logra al implementar mecanismos de disipación de energía correctamente sintonizados. Asimismo, mantiene el contacto de los neumáticos con la superficie. Por lo tanto, sus objetivos principales son: el confort de los pasajeros y la estabilidad del vehículo.

En el caso del confort, se enfoca a la minimización de los niveles de aceleración del chasis. Por otro lado, la estabilidad está orientada a minimizar la fuerza del sistema de suspensión que proporciona a los neumáticos para que permanezcan en contacto con la carretera.

Posteriormente, este sistema tiene otras funciones aparte de las antes ya mencionadas, tales como:

- Proveer una correcta maniobrabilidad del vehículo al mantener la correcta posición de los neumáticos.
- Mitigar la fuerzas de aceleración, frenado y de giro, que se transmiten en las ruedas.
- Contrarrestar las fuerzas dinámicas no sincronizadas del chasis.

Es importante mencionar que existe una gran variedad de suspensiones, sin embargo la suspensión pasiva es la que más destaca (ver figura 2.1). En esta suspensión sólo se agregan elementos mecánicos, los cuales sólo pueden almacenar o disipar energía y no existe ninguna fuente de energía externa. Por lo tanto, este sistema suele ser más sencillo y económico en el diseño y construcción. Por lo general, una suspensión debe presentar dos características fundamentales: la elasticidad y la amortiguación. En primer lugar, la elasticidad ayuda a aislar las perturbaciones de la carretera y la amortiguación disminuye las oscilaciones de carga [38], [23]. Es bien sabido que estos objetivos no pueden lograrse independientemente con un suspensión pasiva. Sin embargo, al emplear inersores, además de resortes y amortiguadores, se mejoran las características fundamentales de una suspensión pasiva [47].

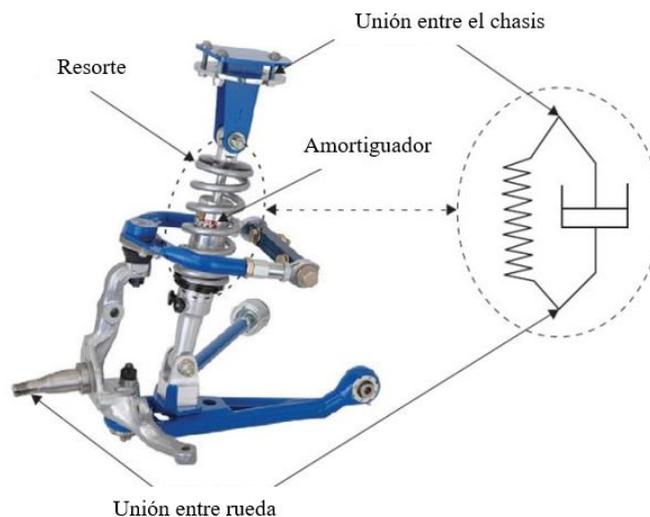


Figura 2.1: Modelo mecánico de una suspensión pasiva [39].

### 2.3.1. Modelo de un cuarto de automóvil

Por otra parte, la dinámica que presenta un vehículo se divide comúnmente en cuatro partes debido a que la cinemática de los mecanismos de sujeción del sistema de suspensión es independiente. Por ende, sólo se utiliza una cuarta parte del automóvil para el desarrollo del desempeño de un sistema de suspensión (ver figura 2.2) [38]. Este modelo por lo general está conformado por la masa del chasis (masa suspendida) y la masa del neumático (masa no suspendida). Al implementar esta idea, el análisis se simplifica ya que sólo tenemos presencia de dinámicas verticales y esto es suficiente para realizar el estudio de desempeño de una suspensión. Adicionalmente, el coeficiente de amortiguamiento del neumático se puede despreciar, ya que en la práctica este factor es mucho menor que el del amortiguador del sistema de suspensión.



Figura 2.2: Modelo de un cuarto de automóvil con sistema de suspensión pasiva [39].

## 2.4. Absorbedor dinámico de vibración

Para el buen funcionamiento de un sistema mecánico, es indispensable contar con un dispositivo el cual pueda proporcionar una fuerza que contrarreste la fuerza armónica de vibración externa. Sin embargo, es imposible aplicar directamente dicha fuerza por razones de dimensiones de los dispositivos mecánicos. Por ello se propone la implementación de absorbedores dinámicos de vibración (DVA's), que también se conocen en la literatura como absorbedores de masa sintonizada (TMD). En la figura 2.3, se observa un DVA clásico el cual

consiste en dos partes principales: la estructura principal (sistema primario) y un sistema auxiliar o amortiguador (sistema secundario), el cual está compuesto por tres elementos: masa, resorte y amortiguador.

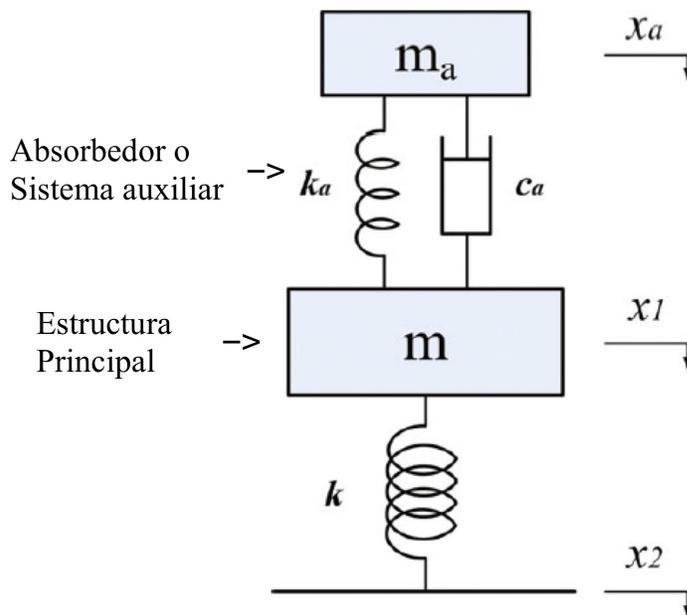


Figura 2.3: Absorbedor dinámico de vibración (DVA) [9].

A continuación, el control de los absorbedores dinámicos de vibración se clasifican en dos categorías: control activo o semi-activo y control pasivo.

El control activo consiste en adaptar una serie de materiales inteligentes, sensores y actuadores a los elementos de los absorbedores de vibración, los cuales son manipulados electrónicamente, este control de tipo lazo cerrado, configura y/o actualiza los parámetros óptimos del sistema con base en las necesidades para disminuir la fuerza vibratoria. Cheung et al. [11], con un amortiguador activo, re-optimizaron la respuesta dinámica de un absorbedor híbrido (HVA). Posteriormente, Gao et al. [20], mejoraron el rendimiento dinámico de un sistema de transmisión de potencia automotriz, al implementar un DVA basado en un esquema de ajuste de frecuencia adaptativo. Luego, Alujevic et al. [1], propusieron implementar actuadores inerciales (IA's) sobre una estructura principal de un sistema y por ello obtuvieron fuerzas activas de amortiguamiento y así, observaron un mayor rendimiento

dinámico en comparación con el TMD.

Sin embargo, a la hora de implementar elementos de control activo para la disipación de energía vibratoria del sistema, se obtienen algunas desventajas tales como: incremento de costos en manufactura, complejidad en el diseño del controlador y su instalación, incertidumbre en el modelado por las no linealidades del sistema y mayor costo de mantenimiento.

Con respecto al control pasivo, básicamente consiste en agregar masa, rigidez y amortiguamiento al sistema. Este control de lazo abierto analiza la respuesta en frecuencia del sistema. Los absorbedores dinámicos de vibración pasivos (DVA), contrarrestan fuerzas vibratorias sin utilizar ninguna fuente de energía externa. Debe señalarse, que la selección minuciosa de los parámetros de los DVA's da como resultado un diseño eficiente, de manera que la frecuencia de excitación y la amplitud del sistema sean mínimas y, además, se obtenga una banda de frecuencia de atenuación más amplia. No obstante, el control pasivo no es recomendable en situaciones donde la banda de frecuencias del espectro de potencia de excitación sea muy amplio.

Frahm [18], en 1909 propuso el DVA no amortiguado, que se muestra en la figura 2.4, el cual consiste en integrar un solo resorte al sistema, asimismo, gracias a esta aportación hizo que nacieran múltiples investigaciones en absorbedores. Por otra parte, el amortiguador fue introducido por Ormolndroyd y Den-Hartog [31] en 1928, donde el amortiguador y el resorte se conectaron en paralelo, y además, aplicaron la técnica de los puntos fijos para calcular las soluciones óptimas del DVA. Hay que hacer notar, que un gran número de investigaciones se han llevado a cabo con la finalidad de incrementar el rendimiento dinámico del DVA clásico, como en el caso de Krenk et al. [27] conectaron un DVA en una estructura flexible con el objetivo de reducir el factor de magnificación dinámica de la estructura, sometida a un solo modo de vibración.

Por otra parte, los DVA's conectados en paralelo han sido investigados con el fin de alcanzar un mínimo factor de magnificación dinámica y un máximo ancho de banda efectivo.

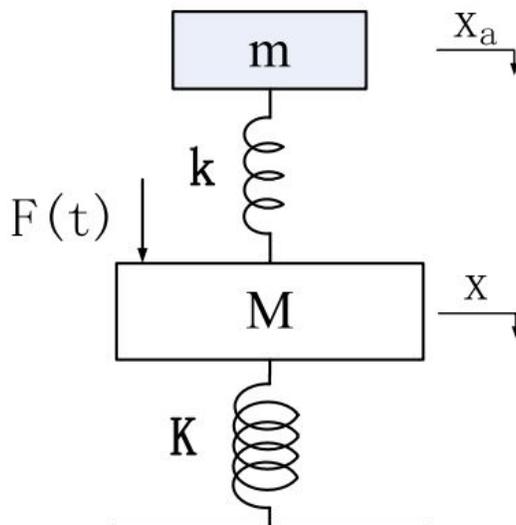


Figura 2.4: Absorbedor dinámico de vibración no amortiguado [9].

Estos DVA's en paralelo han demostrado un buen rendimiento en la disipación de energía vibratoria, cuando las masas sintonizadas son distribuidas en la estructura principal. Por el contrario, las aplicaciones de estos dispositivos son pocas, considerando que el espacio de instalación es reducido. En relación con lo anterior, Kim et al. [26] implementaron un instructivo de diseño que contempla tres factores: limitación de espacio de instalación, transportación y facilidad de uso.

Adicionalmente, los DVA's conectados en serie han demostrado mayor robustez y efectividad dinámica, y en relación con la aplicación, estos dispositivos son mas fáciles de implementar que los DVA's en paralelo. De hecho Barredo et al. [3], reportaron que los DVA's en serie brindan más del 13 % de mitigación de vibración de la estructura primaria sujeto a vibración aleatoria en la base y en cuanto a reducción de vibración presenta más del 10 %, en comparación de un DVA clásico, además, tienen un 30 % más de ancho de banda efectiva que otros DVA's.

El siguiente punto trata de un dispositivo cuyo arreglo es distinto al DVA clásico. Este sistema se le conoce como absorbedor dinámico de vibración no tradicional (NDVA), lo distintivo de este absorbedor es el tener un amortiguador viscoso conectado directamente

a tierra en lugar de la estructura primaria. Ren [37], Liu y Liu [28], usaron un NDVA para investigar si la amplitud de vibración de la estructura primaria se reducía, a lo que demostraron que los resultados obtenidos eran más efectivos que los de un DVA clásico. Adicionalmente, Wong y Cheung [54] implementaron la técnica de los puntos fijos para obtener los parámetros óptimos de supresión de vibración de la estructura principal de un NDVA, bajo fuerzas armónicas en la base.

Posteriormente, Smith [46] implementó un dispositivo mecánico para el control de vibración conocido como *inersor*, este elemento es diseñado principalmente para sistemas de suspensión en vehículos de la Fórmula 1, demostró un alto rendimiento en supresión de vibración y ancho de banda efectivo en comparación del DVA conectado en serie o en paralelo con arreglos de resortes y amortiguadores [38], [23], [41]. Asimismo, el inersor ha sido propuesto para aplicaciones de ingeniería civil, de hecho Ikago [24] implementó un nuevo diseño para el control de vibración sísmica en sistemas de estructuras lineales llamado amortiguador de masas viscosas sintonizadas (TVMD), el cual resultó ser más eficiente que un DVA clásico. Luego, Lazar et al. [24] propusieron un sistema inersor amortiguador sintonizado (TID), donde obtuvieron mejores resultados en control de la respuesta vibratoria de la estructura principal sometida a movimientos sísmicos que el TMD, además, presenta mayor robustez en cuanto a espacio de implementación y costo de fabricación.

Por otra parte, el amortiguador de un DVA es sustituido por impedancias mecánicas, las cuales son arreglos mecánicos constituidos por: resorte, amortiguador e inersor. Este nuevo sistema es conocido como absorbedor dinámico de vibración basado en inersor IDVA. Hu y Chen [22] por medio de soluciones numéricas en Matlab, demostraron que las impedancias mecánicas C3, C4 y C6, mejoran el rendimiento dinámico del DVA clásico. Más tarde Barredo et al. [3] propusieron la técnica de los puntos fijos extendida para obtener los parámetros óptimos de los arreglos mecánicos (C3, C4 y C6) propuestos anteriormente por Hu y Chen [22].

## 2.5. Analogía fuerza-corriente

A lo largo del tiempo la teoría de analogía fuerza-corriente ha sufrido su evolución, primeramente, la analogía usada para referirse a la relación entre sistemas eléctricos y mecánicos era fuerza-voltaje. Después, Firestone [15] atribuyó la analogía fuerza-corriente.

Una configuración mecánica formulada de tipo translacional se compone por elementos mecánicos tales como: resortes, amortiguadores y palancas, los cuales se conectan entre sí de manera rígida [48], [40]. Es frecuente reducir el movimiento para que sea paralelo al eje fijo y relativo a un punto de referencia estable en un marco inercial, conocido como tierra o suelo. Los resortes y amortiguadores tienen un par de puntos finales llamados *nodos o terminales*. Por otro lado, uno de los nodos de la masa es la posición del centro de gravedad de la misma, mientras, que el otro nodo es la tierra o suelo.

Asimismo, un *puerto* es un par de nodos o terminales en un sistema mecánico que sufre la presencia de fuerzas  $F$  igual u opuesta y posteriormente, causan una velocidad relativa  $v$ . Alternativamente, se puede aplicar una velocidad que resulta en una fuerza. El diagrama de cuerpo libre de la configuración mecánica de un puerto (dos terminales) se muestra en la figura 2.5, donde se observa la convención de signos para la cual una  $F$  positiva brinda una fuerza de compresión, y una  $v = v_2 - v_1$  positiva ( $v_2 > v_1$ ), corresponde a los nodos que se mueven juntos. El producto de  $F$  y  $v$  tienen unidades de potencia  $W$  y se denomina par fuerza-velocidad. Sin embargo, no es necesario que ninguna de las terminales en un puerto estén conectadas a tierra.

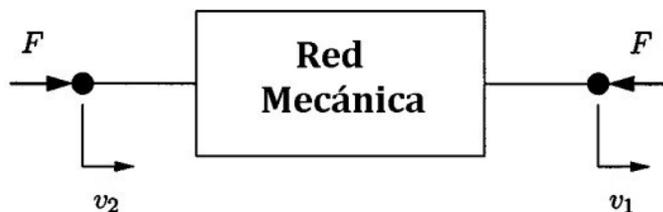


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad [46].

En la tabla 2.1 se muestran las analogías entre fuerza corriente, a veces llamada movilidad en elementos mecánicos y eléctricos.

Sistema mecánico	Equivalencia	Sistema eléctrico
Fuerza	$\leftrightarrow$	Corriente
Velocidad	$\leftrightarrow$	Voltaje
Tierra mecánica	$\leftrightarrow$	Tierra eléctrica
Resorte	$\leftrightarrow$	Inductor
Amortiguador	$\leftrightarrow$	Resistencia
Energía cinética	$\leftrightarrow$	Energía eléctrica
Energía potencial	$\leftrightarrow$	Energía magnética
Palanca	$\leftrightarrow$	Transformador
Velocidad en el punto cero	$\leftrightarrow$	Potencial en el punto cero

Tabla 2.1: Analogía fuerza-corriente entre sistema mecánico y eléctrico.

La correspondencia entre la masa-capacitor (o condensador) se omite de la lista anterior porque una terminal del elemento de masa es una tierra mecánica, a lo que lleva que la ecuación es análoga a la del capacitor, pero no es tan general [46].

## 2.6. Inersor

El *inersor* es un dispositivo mecánico novedoso propuesto por el profesor Malcolm C. Smith de la Universidad de Cambridge, el cual lo define como: *un dispositivo mecánico de dos terminales (o dos nodos) con la propiedad de que su fuerza generada es directamente proporcional al producto de su constante de inercancia por la diferencia de aceleraciones de sus terminales.* [46].

En la figura 2.6 se observa el símbolo del inersor.

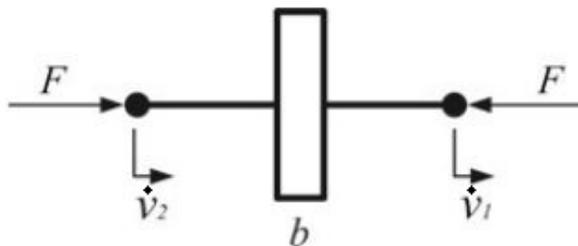


Figura 2.6: Símbolo del inersor [9].

En cuanto a la fuerza desarrollada por el inersor se cuantifica con la siguiente ecuación 2.3 con  $(v_2 > v_1)$  [9] :

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (2.3)$$

Donde,  $(\dot{v}_2 - \dot{v}_1)$  es la diferencia de aceleraciones de las terminales y la constante de proporcionalidad  $b$  es nombrada como *inertancia* y tiene unidades de kilogramos (masa). La energía almacenada por el inersor se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$E_{Inersor} = \frac{d}{2}(v_2 - v_1)^2 \quad (2.4)$$

donde,  $d$  es el diámetro equivalente del sistema de transmisión del inersor y  $(v_2 - v_1)$  es la diferencia de velocidades de las terminales del inersor.

La situación que llevó a implementar y proponer el inersor fue la incompleta analogía entre fuerza-corriente en los sistemas mecánicos y eléctricos. En la literatura se identifica que entre los sistemas mecánicos y eléctricos tienen dinámicas similares, en la figura 2.7 se muestra detalladamente las analogías.

Posteriormente, el resorte y el amortiguador son comparados con el inductor y la resistencia, respectivamente. Para el capacitor eléctrico, inicialmente se comparaba con la masa mecánica, sin embargo, la segunda ley de Newton estipula que la aceleración de la masa se mide con respecto a un punto fijo, a lo que lleva que la masa no es un elemento de dos nodos, por la razón, que una de sus terminales es el centro de masa y la otra la tierra mecánica y

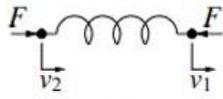
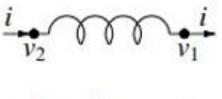
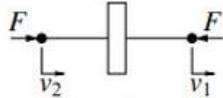
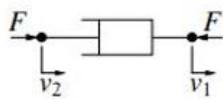
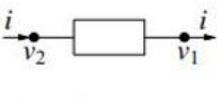
Mecánico		Eléctrico
 $Y(s) = \frac{k}{s}$ $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$ <p>Resorte</p>		 $Y(s) = \frac{1}{Ls}$ $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$ <p>Inductor</p>
 $Y(s) = bs$ $F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ <p>Inersor</p>		 $Y(s) = Cs$ $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ <p>Capacitor</p>
 $Y(s) = c$ $F = c(v_2 - v_1)$ <p>Amortiguador</p>		 $Y(s) = \frac{1}{R}$ $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$ <p>Resistencia</p>

Figura 2.7: Nueva analogía entre sistemas mecánicos y eléctricos [9].

por lo tanto, la masa simula a un capacitor conectado a tierra y por lo tanto se procedió a implementar el inersor. Este dispositivo tiene la particularidad de agregarle masa al sistema y a modo de comparación para los otros dispositivos se considera despreciable, además, es capaz de almacenar energía y proporciona el efecto dinámico de rigidez negativa.

### 2.6.1. Impedancias mecánicas basadas en inersor

La propuesta del inersor completa la analogía entre configuraciones mecánicas de resorte-amortiguador-inersor y las configuraciones eléctricas de inductor-resistencia-capacitor, respectivamente. Por lo tanto, gracias a esto se pueden diseñar redes mecánicas basadas en inersor para el control de vibraciones mecánicas.

La impedancia mecánica  $Z(s)$  se define como la relación entre fuerza y velocidad, como se presenta a continuación en la ecuación (2.5), notar que se encuentra en el dominio de la transformada de Laplace. La admitancia mecánica se define como el recíproco de la

impedancia mecánica (2.6).

$$Z(s) = \frac{v(s)}{F(s)} \quad (2.5)$$

$$Y(s) = Z(s)^{-1} \quad (2.6)$$

Ahora bien, si una red de dos terminales tiene impedancia o admitancia real positiva se trata de una red *pasiva* [46]. Es relevante mencionar que Smith y Wang [47] estudiaron seis redes mecánicas basadas en inersor, las cuales se aplicaron en suspensiones respectivamente, al momento de ser aplicadas se compararon con el tradicional resorte-amortiguador, los resultados obtenidos mostraron un 10 % de mejora en el desempeño contra el absorbedor tradicional, por lo tanto, el uso de redes mecánicas basadas en inersor cuenta con mayor eficiencia en términos de confort y mejor conducción (rendimiento de carga y manipulación dinámica).

A continuación, se describen las seis configuraciones de impedancias mecánicas basadas en inersor con dos terminales:

- C1.** Esta conexión consiste en un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.
- C2.** Esta conexión consiste en serie de un inersor y un amortiguador.
- C3.** Esta conexión consiste en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador.
- C4.** Esta conexión consiste en paralelo de un resorte y un amortiguador conectados en serie con un inersor.
- C5.** Esta conexión consiste en paralelo de un resorte y un inersor conectados en serie con un amortiguador.
- C6.** Esta conexión consiste en paralelo de un inersor y un amortiguador conectados en serie con un resorte.

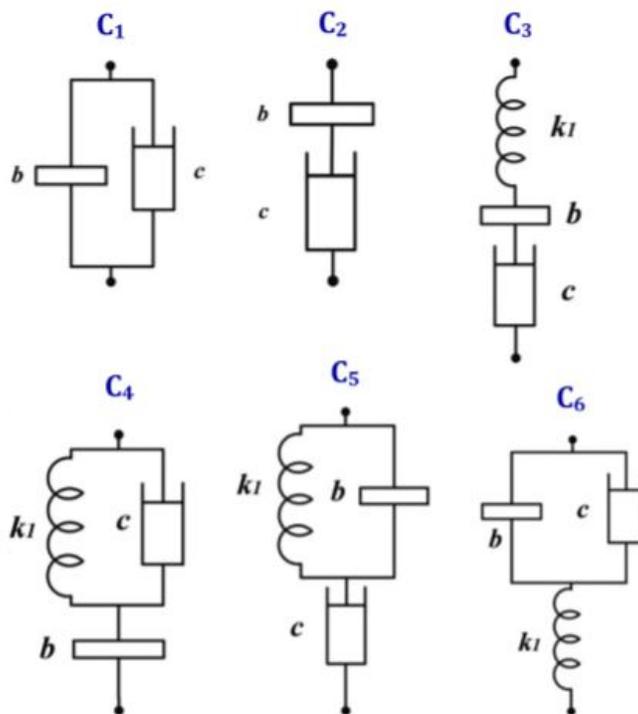


Figura 2.8: Impedancias mecánicas basadas en inersor más representativas [9] .

**Nota:**  $b$  es la inercancia,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $k$  es la constante de rigidez [22], [34].

### 2.6.2. Diseños comunes de inersores

A lo largo del tiempo se han diseñado diferentes prototipos de inersores los cuales comúnmente se integran con mecanismos, estos pueden ser: mecánicos, hidráulicos, electromagnéticos, entre otros. A continuación, se hablará de los diseños más comunes que se encontraron en la literatura.

#### **Inersor tipo husillo de bolas.**

Este inersor está integrado principalmente por: husillo de bolas (tornillo de bolas), tuerca de bolas, cojinete radial, una carcasa y un volante de inercia. Este dispositivo transforma el movimiento lineal de sus terminales a movimiento rotativo, el cual se transfiere al volante

por medio del tornillo de bolas. Idealmente la inercancia se calcula con  $b = (2\pi/l)^2 I$ , donde  $I$  es el momento de inercia del volante y  $l$  es la longitud del husillo de bolas.

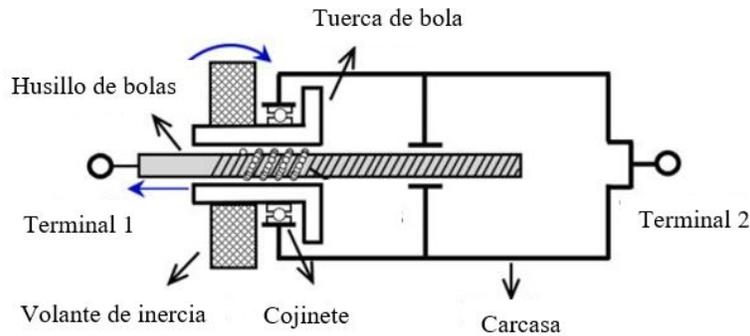


Figura 2.9: Dibujo esquemático del inersor husillo de bolas [32].

### Inersor tipo piñon-cremallera.

Este inersor está integrado principalmente por: una cremallera, piñón, engranes, un volante de inercia y una carcasa. Su funcionamiento consiste en que la cremallera se desliza en la carcasa y por lo tanto, se vence la inercia del volante de inercia por medio de los engranes y piñones. La inercancia se obtiene con  $b = \eta^2 I$ , donde  $I$  es el momento de inercia y  $\eta$  es la relación de engranajes. En la figura 2.10 se muestra un diseño de inersor piñon cremallera propuesto por Papageorgiou [32].

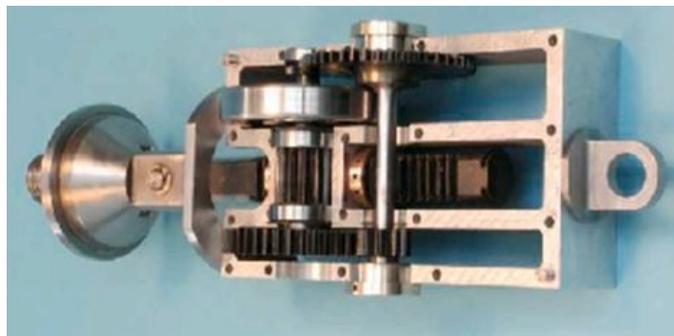


Figura 2.10: Prototipo de un inersor piñon cremallera [32].

### Inersor hidráulico.

Un inersor hidráulico impulsa el volante de inercia por medio de un mecanismo hidráulico, que está conformado por un motor hidráulico, un cilindro, un pistón, volante y tubos de

conexión. En la figura 2.11 se observa el inersor hidráulico y con la siguiente ecuación  $b = (A/D)^2 I$  se calcula la inercancia  $b$ , donde  $A$  es el área anular del cilindro,  $D$  es el paso del motor, y por último  $I$  es el momento de inercia [49].

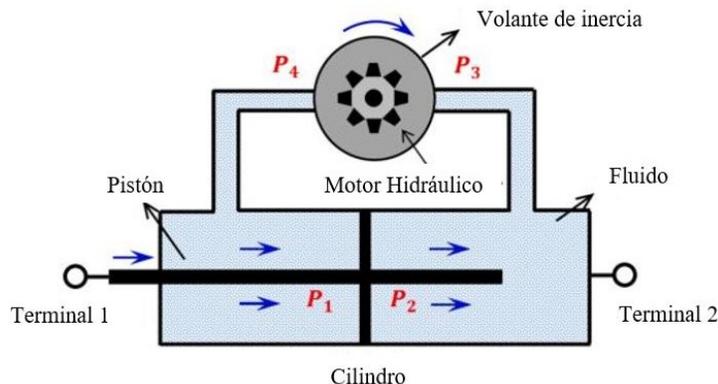


Figura 2.11: Esquema de un inersor hidráulico [49].

### Inersor hidráulico basado en canal helicoidal.

El inersor hidráulico basado en canal helicoidal tiene como elementos principales: un pistón, un cilindro, y un canal helicoidal. El movimiento del pistón dentro del cilindro provoca una diferencia de presión entre las dos cámaras y por lo tanto, el fluido circula a través del canal helicoidal. La inercancia se calcula con  $b = l_h \rho (A_1^2 / A_2)$ , donde  $l_h$  es la longitud del canal helicoidal,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $A_1$  es el área anular del cilindro y  $A_2$  es el área transversal del canal helicoidal [52].

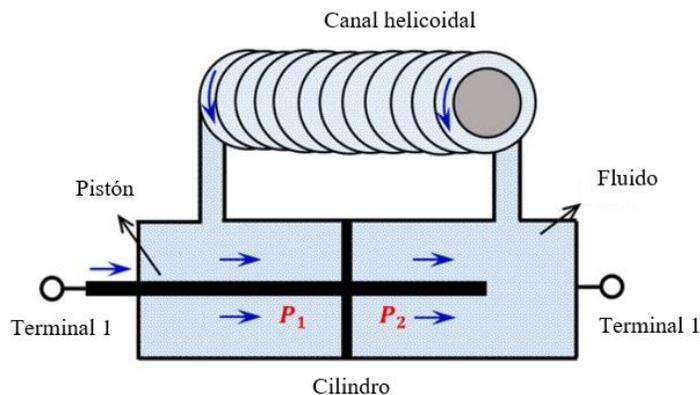


Figura 2.12: Dibujo esquemático de un inersor hidráulico helicoidal [52].

### Inersor electromagnético.

El inersor electromagnético consta de un devanado de bobina, una varilla magnética y un capacitor. Cuando la varilla magnética se mueve a través del devanado por terminales, se genera un voltaje eléctrico debido al cambio del flujo magnético, posteriormente, se obtiene una fuerza resistente por el campo magnético opuesto por la corriente que fluye por la bobina. La inercancia se obtiene con  $b = (Bl)^2 C_a$ , donde  $Bl$  es el coeficiente de acoplamiento y  $C_a$  la capacitancia, en la figura 2.13 se muestra el esquema de un inersor electromagnético [56].

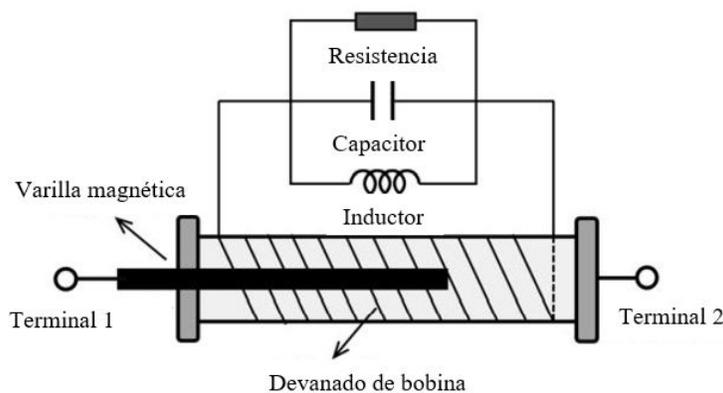


Figura 2.13: Esquema de un inersor electromagnético [56].

### 2.6.3. Aplicaciones del inersor

Las aplicaciones automotrices son las más relevantes del inersor, ya que ha demostrado tener un alto rendimiento dinámico y capacidad de amortiguamiento. Posteriormente, el profesor Smith fue quien dio origen a este dispositivo por el motivo de mejorar el desempeño dinámico de las suspensiones de vehículos de la Fórmula 1, MacLaren implementó este dispositivo a su automóvil y gracias a este obtuvieron la victoria en el Gran Premio de España en 2005 [10].

Asimismo, en las motocicletas de alto rendimiento se le sustituyó el amortiguador de una dirección convencional por una red mecánica compuesta por: un resorte, un amortiguador y un inersor (ver figura 2.15), donde demostraron un mayor rendimiento y mejor conducción



Figura 2.14: Kimi Raikkonen en el Gran Premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo llevó a la victoria empleando un inersor. Foto de LAT Photographic [10].

a altas velocidades [14].

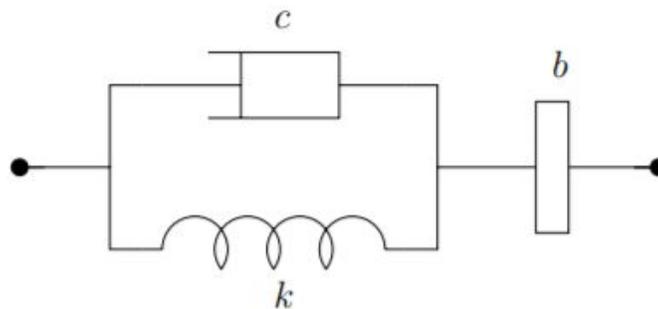


Figura 2.15: Red mecánica implementada en la dirección de una motocicleta de alto rendimiento [14].

Wang et al. [53], aplicaron inersores en la suspensión de trenes, donde observaron que las estructuras fijas mejoran el índice de comodidad del pasajero y concluyeron que el inersor mejora el desempeño general del sistema. Por otra parte, se ha demostrado que el inersor brinda un gran desempeño en atenuación de vibración aleatoria en edificios, causados por alguna excitación externa tales como viento, sismos y terremotos. Takewaki et al. [50], implementaron inersores en los aisladores de vibración y obtuvieron resultados de rendimiento superiores que los aisladores tradicionales, donde pueden reducir el desplazamiento, aceleración absoluta y desplazamiento de la base.



---

---

# CAPÍTULO 3

---

## MARCO TEÓRICO

### 3.1. Resorte

El resorte es uno de los componentes que constituyen a un sistema vibratorio, que tiene como característica principal, que cuando se desplaza del equilibrio, proporciona fuerzas que tratan de restaurar el equilibrio del sistema y comúnmente esta peculiaridad se debe a la elasticidad. La mayoría de los dispositivos elásticos almacenan energía potencial de modo que vayan aumentando los desplazamientos y liberan energía potencial a medida que disminuyen los desplazamientos. El resorte helicoidal es el tipo de resorte más representativo en sistemas vibratorios [35].

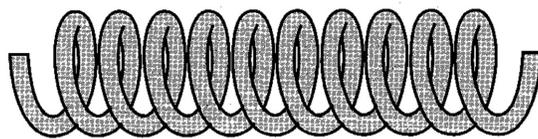


Figura 3.1: Resorte helicoidal.

Generalmente, la masa de los resortes se considera nula, por lo tanto, la fuerza  $F_s$  de un nodo 1 del resorte debe equilibrarse con una fuerza  $F_s$  que se ejerce en el nodo 2. En la figura 3.2 se observa que el resorte esta sometido a una fuerza  $F_s$ , donde provoca un alargamiento  $\delta$ , el cual es igual a la diferencia de los desplazamientos  $x_2$  y  $x_1$ .

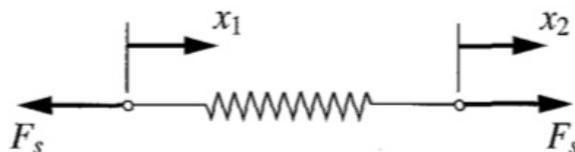


Figura 3.2: Resorte sometido a fuerza de tensión.

En la figura 3.3 se presenta una gráfica típica de una función de alargamiento  $\delta$ , el cual muestra un rango lineal en  $\delta$  donde es proporcional a  $F$  y la constante de rigidez  $K$  es igual a la pendiente. La relación entre  $F$  y  $\delta$  en un rango lineal se representa como [29]

$$F_s = K\delta = K(x_2 - x_1) \tag{3.1}$$

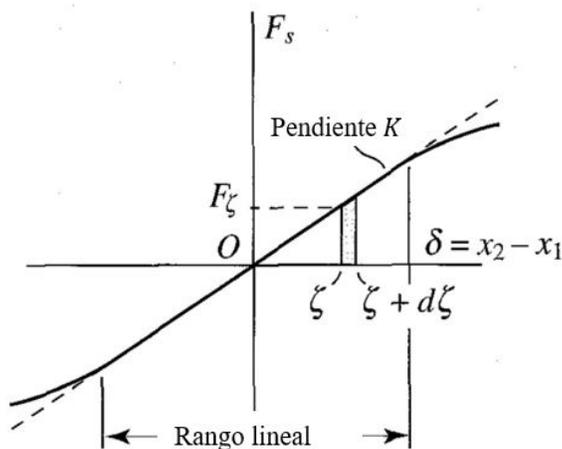


Figura 3.3: Gráfica fuerza contra alargamiento [29].

La constante de rigidez de un resorte se relaciona directamente con sus propiedades geométricas y del material. Cuando un sistema se compone por varios resortes conectados

en serie o en paralelo, la rigidez equivalente se determina de acuerdo a lo siguiente [42]:

**Conexión en serie:**

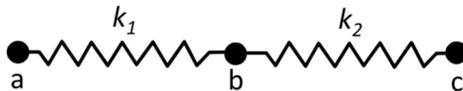


Figura 3.4: Arreglo en serie.

$$K_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \tag{3.2}$$

**Conexión en paralelo:**

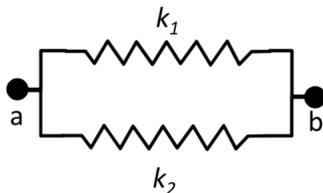


Figura 3.5: Arreglo en paralelo.

$$K_{eq} = k_1 + k_2 \tag{3.3}$$

## 3.2. Amortiguamiento

Cuando existe un sistema masa-resorte, por lo general se obtiene una respuesta vibratoria indefinida. Por ello, añadiendo un amortiguador en términos de  $c\dot{x}(t)$  en la ecuación de movimiento, se obtiene una respuesta oscilatoria que decaerá en el tiempo, esto se le conoce como amortiguamiento. El amortiguador viscoso, es el más representativo en sistemas vibratorios. Este dispositivo representa un modelo físico para disipar energía y, por lo tanto, amortigua las oscilaciones de un sistema mecánico. En el caso del amortiguador viscoso, su funcionamiento principal depende del desplazamiento de un pistón agujereado dentro de un cilindro lleno de aceite o algún otro fluido viscoso que sea capaz de entrar en los orificios del

pistón, luego, de acuerdo con el movimiento de traslación del pistón el fluido pasa a través de él y finalmente se encuentra al otro lado del pistón.

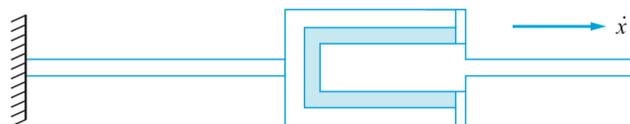


Figura 3.6: Amortiguador viscoso (pistón y cilindro) [43].

De igual manera que el resorte, la masa del amortiguador se considera despreciable, a lo que lleva que ambas fuerzas de los extremos deben equilibrarse. Cuando el pistón se desliza en el cilindro a causa de una fuerza, se provoca un corte al fluido viscoso, en la gráfica de fuerza contra diferencia de velocidades de la figura 3.7, se observa que el corte del fluido es lineal, donde  $\dot{\delta} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$  es la separación total de velocidades de los puntos finales [29].

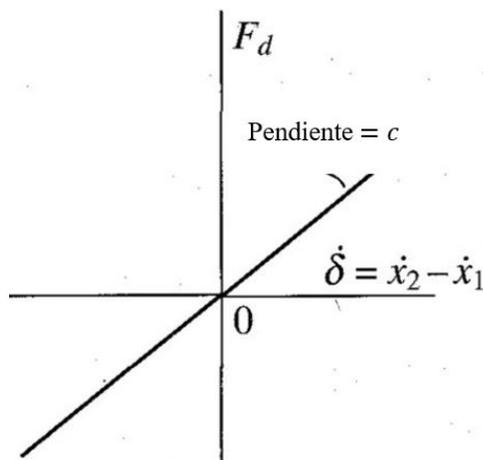


Figura 3.7: Gráfica fuerza contra separación de velocidad.

La fuerza de amortiguamiento suele ser proporcional a la separación de velocidad

$$F = c\dot{\delta} = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{3.4}$$

donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento con dimensiones (fuerza)(tiempo)/(longitud).

### 3.3. Elemento masa o inercia

Para el elemento masa o inercia se supone como un cuerpo rígido el cual puede ganar o perder energía cinética al cambiar su velocidad. Para el caso de una partícula de masa  $m$  que tiene un movimiento traslacional en dirección  $x$ , se tiene que la fuerza  $F$  aplicada es igual al producto de la masa por la aceleración

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} \quad (3.5)$$

lo anterior se debe a la segunda ley de movimiento de Newton [42]. Para estudiar las

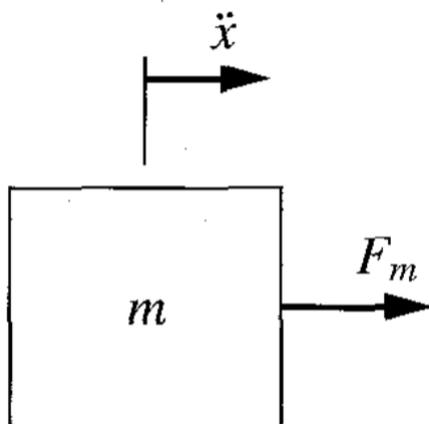


Figura 3.8: Masa bajo efecto por una fuerza [42].

intervenciones energéticas de la masa como un elemento, se procede a considerar la siguiente ecuación:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.6)$$

se observa que cuando existe una velocidad, en este caso traslacional en  $x$ , a medida que va aumentando se almacena energía cinética, sin embargo, cuando disminuye la velocidad se pierde energía cinética.

### 3.4. Excitación armónica

La ecuación que rige el movimiento de un sistema masa-resorte amortiguado lineal con excitación armónica, está dado por:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F_{eq}(t) \tag{3.7}$$

donde  $m_{eq}$ ,  $c_{eq}$  y  $k_{eq}$ , es la masa equivalente, el coeficiente de amortiguamiento equivalente y la rigidez equivalente, respectivamente. Por otra parte,  $F_{eq}(t)$  representa la fuerza de entrada armónica al sistema [13].

Un movimiento oscilatorio puede repetirse con regularidad como por ejemplo en el caso de una máquina en funcionamiento o el movimiento de la tierra en el caso de un sismo. Si este movimiento es repetitivo en lapsos de tiempo iguales, se le conoce como movimiento periódico y el tipo más simple de este es el movimiento armónico [36]. Las funciones de seno y coseno son las representaciones matemáticas más comunes de las fuerzas armónicas. Esta fuerza de perturbación externa es la más usada para actuar en un sistema, en la figura 3.9 se ilustran los diferentes tipos de movimientos periódicos, los cuales producen vibraciones forzadas a mecanismos o estructuras.

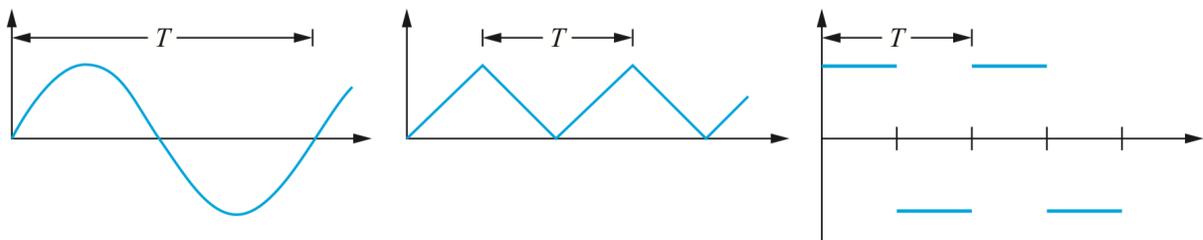


Figura 3.9: Tres ejemplos de excitaciones periódicas comunes [25].

Anteriormente, se habló que las funciones seno y coseno son las representaciones más comunes de las fuerzas armónicas, sin embargo, si tomamos una fuerza de excitación armónica

compleja, se representa de la siguiente manera:

$$F_0 e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria,  $F_0$  representa la magnitud o amplitud máxima,  $\omega$  representa la frecuencia denominada también como frecuencia de entrada o frecuencia de excitación o frecuencia de funcionamiento y unidades de rad/s.

## 3.5. Formulismo de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento de algún sistema mecánico se pueden desarrollar por medio de las leyes de Newton, sin embargo, este formulismo tiene el inconveniente de usar de forma vectorial sus variables, por lo tanto, complica el análisis de un diseño que tiene múltiples grados de libertad. En este caso es conveniente aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, debido a que este formulismo es de modo escalar ya que se basa en condiciones puramente energéticas. Luego, se apoya en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales explican la dinámica del sistema.

### 3.5.1. Principio de Hamilton

Este principio estipula que la retroalimentación de un sistema se puede obtener al minimizar una integral  $s$ , conocida como integral de acción, la cual se define como la integral de una función lagrangiana  $\mathcal{L}$ , donde es desconocida en dos intervalos de tiempo [33]:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (3.9)$$

donde  $\mathcal{L}(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) = 0$ , tal que  $x_i$  son las coordenadas generalizadas y  $\dot{x}_i$  son las velocidades generalizadas. A continuación, la siguiente ecuación es denominada integral de

acción:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) dt \quad (3.10)$$

y finalmente, la ecuación 3.11 son las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11)$$

### 3.5.2. Lagrangiano con ecuaciones de Newton

Como se mencionó anteriormente, estas ecuaciones tienen la ventaja de trabajar con variables escalares, ahora bien, en la mecánica clásica, el lagrangiano de un sistema se iguala a la diferencia entre la energía cinética  $T$  y la potencial  $U$ . En la literatura se dice que la energía es la capacidad de realizar un trabajo. Entonces, la energía cinética de una partícula de masa  $m$  moviéndose con una velocidad  $v$  es un escalar positivo [6]

$$T = (x(t), \dot{x}(t)) \quad (3.12)$$

el movimiento del cuerpo que puede ser traslacional o rotacional está en función de la posición o velocidad.

Por otro lado, la energía potencial se debe a las fuerzas conservativas como las producidas por la gravedad o resortes, esta energía está en función de la posición:

$$U = (x(t)) \quad (3.13)$$

de la ecuación 3.11 sustituimos la siguiente expresión  $\mathcal{L} = T - U$  y se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para sistemas conservativos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (3.14)$$

### 3.5.3. Función disipativa de Rayleigh

Para sistemas no conservativos tales como el amortiguador viscoso, se utiliza la función de disipación de Rayleigh. Esta función asume que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad [29], por lo tanto, para hallar las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico con fricción se usan las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F_i \quad (3.15)$$

donde:  $i = 1, 2, \dots, n$  es el número de coordenadas generalizadas,  $F_i$  son las fuerzas no conservativas generalizadas,  $D$  es la función de velocidades generalizadas. Por último en términos del lagragiano se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F_i \quad (3.16)$$

### 3.5.4. Modelado matemático de un absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA).

En la figura 3.10 se muestra el sistema al cual se le realizó un modelado Lagrangiano, primeramente se definió la función lagrangiana y la disipativa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_s \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K_s x_s^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_s)^2 \quad (3.17)$$

$$D = \frac{1}{2} C_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_s)^2 \quad (3.18)$$

En el modelo se tienen dos coordenadas generalizadas, por lo tanto, se tiene el siguiente sistema no conservativo:

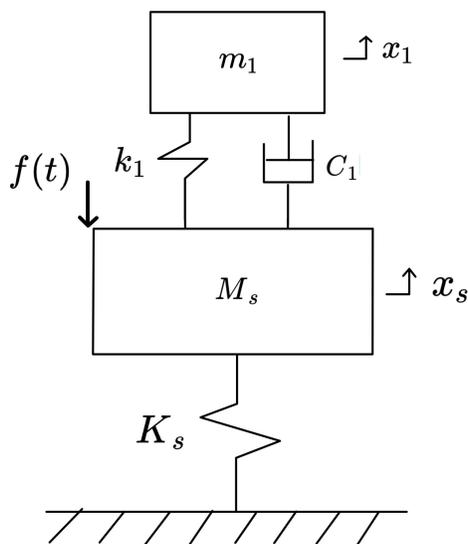


Figura 3.10: Modelo de un absorbedor dinámico de vibración tradicional.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_s} &= f(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, de las ecuaciones (3.17) y (3.18) se aplica la metodología lagrangiana. Para la coordenada generalizada  $x_s$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_s} \right) &= M_s \ddot{x}_s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} &= -K_s x_s + k_1(x_1 - x_s) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_s} &= -C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente EDO:

$$M_s \ddot{x}_s - C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + K_s x_s - k_1(x_1 - x_s) = f(t) \quad (3.19)$$

Ahora, para la coordenada generalizada  $x_1$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= -k_1(x_1 - x_s) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} &= C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s)\end{aligned}$$

de igual manera, de las ecuaciones anteriores se construye la siguiente EDO:

$$m_1 \ddot{x}_1 + C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + k_1(x_1 - x_s) = 0 \quad (3.20)$$

por último, de las ecuaciones (3.19) y (3.20) obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\begin{aligned}M_s \ddot{x}_s - C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + K_s x_s - k_1(x_1 - x_s) &= f(t) \\ m_1 \ddot{x}_1 + C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + k_1(x_1 - x_s) &= 0\end{aligned}$$

## 3.6. Transformada de Laplace

En la literatura de cálculo se dice que la derivación e integración son transformadas, lo que significa que estas metodologías transforman funciones a otras. La transformada de Laplace es un método que con sus propiedades transforma una ecuación diferencial ordinaria a una ecuación algebraica. La ecuación algebraica se resuelve más fácilmente para encontrar la transformada de solución, esta transformada se invierte mediante el uso de reglas o tablas de transformaciones conocidas. Esta técnica es útil para determinar la respuesta de un sistema sometido a cualquier fuerza de excitación, como periódicas o no periódicas [25].

Por definición, la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  está dado por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.21)$$

La variable  $s$  es un número complejo [58]. Además, este método tiene la ventaja de transformar

diferenciaciones en multiplicaciones

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{3.22}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = sF^2(s) - sF(s) - \dot{f}(0) \tag{3.23}$$

En la tabla se muestran algunas transformadas de Laplace más empleadas para condiciones iniciales iguales a cero.

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(0)$ impulso unitario
$\frac{1}{s}$	1, escalón unitario $\Phi(t)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{at}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	sen $\omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	cos $\omega_n t$
$\frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n t)$
$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t, \zeta < 1, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi), \phi = \cos^{-1} \zeta, \zeta < 1$
$\frac{1}{s(s+\omega_n)}$	$\frac{1}{\omega_n}(1 - e^{-\omega_n t})$
$\frac{1}{s^2(s+\omega_n)}$	$\frac{1}{\omega_n^2}(e^{-\omega_n t} + \omega_n t - 1)$
$e^{-as}$	$\delta(t - a)$
$F(s - a)$	$e^{at} f(t), t \geq 0$
$e^{-as} F(s)$	$f(t - a)\Phi(t - a)$

Tabla 3.1: Transformada de Laplace de funciones usuales en el área de vibraciones.

## 3.7. Identificación algebraica

En el área de identificación se obtienen modelos con precisión para así conocer ciertas propiedades dinámicas de algún sistema. En la literatura, se encontraron un gran número de metodologías de identificación clásicas, las cuales utilizan el criterio de minimizar el error para ajustar los datos del modelo. Donde pueden ser empleados en el dominio de la frecuencia o del tiempo [45].

Por otro lado, no hace mucho se desarrolló una nueva técnica de identificación, que en comparación de las técnicas clásicas de identificación, se centra en el álgebra diferencial y cálculo operacional para así llegar a una serie de estimadores, que permiten la determinación de parámetros físicos desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Los estimadores se realizan en línea y en tiempo continuo. Una de las características de la identificación algebraica, es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. Además, este método presenta buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones como: incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas y ruido [44], [19], [16], [51].

### 3.7.1. Base matemática

Los fundamentos matemáticos de la identificación algebraica pueden ser muy complejos, sin embargo, la implementación de esta técnica es bastante sencilla.

#### Para sistemas lineales.

Sea  $k$  el campo de los números reales y/o complejos. Se define  $K$  como la extensión algebraica finita del campo  $k(\Theta)$  generado por el conjunto finito  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  de parámetros desconocidos. Considere el anillo  $K[\frac{d}{dt}]$  de operadores diferenciales con coeficientes en  $k$ :

$$\sum_{finito} c_v \frac{d^v}{dt^v}, c_v \in K \quad (3.24)$$

Se supone que los parámetros son constantes, es decir,  $\frac{d\theta_i}{dt} = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Por lo tanto,  $K[\frac{d}{dt}]$  es un dominio de ideales principales conmutativos. Los anillos de operadores diferenciales lineales también pueden ser nombrados *anillos diferenciales*. Se toma un conjunto finito de perturbaciones o indeterminaciones, tal que  $(y_1, \dots, y_m)$ , en asociación con un anillo de operadores lineales diferenciales.

Estas indeterminaciones representan las variables que describen, en el dominio del tiempo, las señales de donde se obtienen los parámetros desconocidos. La forma más general en que los parámetros pueden aparecer en los coeficientes de una expresión diferencial incluyen expresiones algebraicas involucrando sumas, multiplicaciones, raíces, etc., de tales parámetros. Resumiendo lo anterior, las expresiones de los parámetros provienen de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que envuelven los parámetros desconocidos.

Sea  $S/K$  una extensión algebraica de dimensión finita, donde una señal es un elemento de  $S$ . Sea  $L/K$  una expresión algebraica diferencial y  $N$  un subconjunto de  $L$ . El sobre-campo diferencial  $k$  generado por  $N$  se describe tal que  $k \langle N \rangle$ .

**Identificable.**

El conjunto de  $\Theta$  de parámetros desconocidos se dice ser algebraicamente identificable si y sólo si cualquier componente de  $\Theta$  es algebraico sobre  $k \langle t, y \rangle$ . Se dice ser linealmente identificable si y sólo si:

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q \tag{3.25}$$

donde:

- $P$  y  $Q$  son matrices  $r \times r$  y  $r \times 1$ .
- Las entradas de  $P$  y  $Q$  pertenecen al rango  $K[\frac{d}{dt}](1, y)$ .
- $\det(P) \neq 0$ .

Donde el rango  $K[\frac{d}{dt}](1, y)$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $(1, y_1, \dots, y_m)$ , es decir  $D_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m D_i y_i$ . Los coeficientes  $D_i$  pertenecen a  $K \frac{d}{dt}$ . Por lo tanto,  $D_i$  es un operador diferencial de la forma:

$$\sum_{j=i}^n \left( \frac{\sum_{k=0}^{k_j} a_{k,j} t^k}{\sum_{l=0}^{l_j} b_{l,j} t^l} \right) \frac{d^j}{dt^j} \tag{3.26}$$

con  $a_{k,j}, b_{l,j} \in K$  [17].

### 3.7.2. Metodología algebraica

1. Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial de un modelo y luego se reordena como un polinomio en  $s$ .
2. Para que el sistema sea independiente de las condiciones iniciales se deriva tantas veces sea necesario para eliminar las condiciones iniciales.
3. Dividir la ecuación independiente de las condiciones iniciales por una potencia de  $s$  para evitar las derivadas.
4. Realizar la transformación inversa de la ecuación resultante, devolviéndola al dominio del tiempo:  $P \cdot \Theta = Q$  donde  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$  es el conjunto de los parámetros desconocidos,  $P$  y  $Q$  son, respectivamente, matrices  $rxr$  y  $rx1$  cuyas entradas pertenecen al espacio vectorial generado  $k[t, \frac{d}{dt}](u, y)$ .
5. Despejar el parámetro desconocido.

### 3.7.3. Modelo matemático para la identificación de los parámetros de un absorbedor dinámico de vibración tradicional.

El objetivo principal del identificador algebraico propuesto, es encontrar los parámetros del absorbedor de vibraciones tales como: coeficiente de rigidez, coeficiente de amortiguamiento y la masa principal y secundaria del sistema DVA. Para el desarrollo del modelo del identificador, se toman las ecuaciones de movimiento del DVA obtenidas en la subsección 3.5.4

$$M_s \ddot{x}_s - C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + K_s x_s - k_1(x_1 - x_s) = f(t) \quad (3.27)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_s) + k_1(x_1 - x_s) = 0 \quad (3.28)$$

Asimismo, se considera que los valores de las posiciones se conocen (respuesta vibratoria) y por lo tanto, esta disponible como dato de entrada para usarse en la identificación del sistema.

Para el análisis, primeramente, se toma la ecuación (3.27) del sistema de EDO's y se le aplica la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0)$$

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} M_s \{s^2 X_s(s) - s x_s(0) - \dot{x}_s(0)\} - C_1 \{s(X_1(s) - X_s(s)) - (x_1(0) - x_s(0))\} + \\ + K_s X_s(s) - k_1 \{X_1(s) - X_s(s)\} = f(s) \end{aligned}$$

A continuación, como la ecuación es de segundo orden y se tienen dos condiciones de frontera se procede a derivar dos veces:

**Primera derivada:**

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2sX_s(s) + s^2 \frac{d}{ds} X_s(s) - x_s(t_0) \right\} - C_1 \left\{ (X_1(s) - X_s(s)) + s \frac{d}{ds} (X_1(s) - X_s(s)) \right\} + \\
 & K_s \left\{ \frac{d}{ds} X_s(s) \right\} - k_1 \left\{ \frac{d}{ds} (X_1(s) - X_s(s)) \right\} = \frac{d}{ds} f(s)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

**Segunda derivada:**

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2X_s(s) + 4s \frac{d}{ds} X_s(s) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} X_s(s) \right\} - C_1 \left\{ 2 \frac{d}{ds} (X_1(s) - X_s(s)) + s \frac{d^2}{ds^2} (X_1(s) - X_s(s)) \right\} \\
 & + K_s \left\{ \frac{d^2}{ds^2} X_s(s) \right\} - k_1 \left\{ \frac{d^2}{ds^2} (X_1(s) - X_s(s)) \right\} = \frac{d^2}{ds^2} f(s)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Posteriormente, ya con las condiciones iniciales canceladas se multiplica (3.30) por  $s^{-2}$ :

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2s^{-2} X_s(s) + 4s^{-1} \frac{d}{ds} X_s(s) + \frac{d}{ds} X_s(s) \right\} - \\
 & C_1 \left\{ 2s^{-2} \frac{d}{ds} (X_1(s) - X_s(s)) + s^{-1} \frac{d^2}{ds^2} (X_1(s) - X_s(s)) \right\} + \\
 & K_s \left\{ s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} X_s(s) \right\} - k_1 \left\{ [s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} (X_1(s) - X_s(s))] \right\} = s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} f(s)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

luego, se aplica la transformada inversa de Laplace de la derivada

$$\mathcal{L}^{-1} \{ f^{(n)}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^n}{ds^n} f(s) \right\} = (-1)^n t^n F(t)$$

y, además, la transformada inversa de Laplace del cociente por  $s$  tiene la forma de integración de  $F(t)$  desde 0 a  $t$ ,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s} \right\} = \int_0^t F(u) du$$

por lo tanto, se aplican estas dos transformadas a la ecuación (3.31) para obtener la expresión

en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2 \int^2 x_s(t) - 4 \int tx_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} - C_1 \left\{ -2 \int^2 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} \\
 & + K_s \left\{ \int^2 t^2 x_s(t) \right\} - k_1 \left\{ \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} = \int^2 t^2 f(t)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

**Nota:** En la ecuación (3.32) aparecen integrales iteradas en el tiempo y su notación es la siguiente:

$$\int_{t_0}^j t^p x(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dots \int_{t_0}^{\sigma_{j-1}} (\sigma_j - t_0)^p x(\sigma_j) d(\sigma_j) \dots d(\sigma_1)$$

Ahora bien, los parámetros a identificar son:  $M_s$ ,  $C_1$ ,  $K_s$  y  $k_1$  y solo se tiene una ecuación, así que es necesario integrar tres veces la ecuación (3.32) con respecto al tiempo, para así obtener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2 \int^3 x_s(t) - 4 \int^2 tx_s(t) + \int t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & C_1 \left\{ -2 \int^3 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} + K_s \left\{ \int^3 t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & k_1 \left\{ \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} = \int^3 t^2 f(t)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2 \int^4 x_s(t) - 4 \int^3 tx_s(t) + \int^2 t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & C_1 \left\{ -2 \int^4 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} + K_s \left\{ \int^4 t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & k_1 \left\{ \int^4 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} = \int^4 t^2 f(t)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 & M_s \left\{ 2 \int^5 x_s(t) - 4 \int^4 tx_s(t) + \int^3 t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & C_1 \left\{ -2 \int^5 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^4 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} + K_s \left\{ \int^5 t^2 x_s(t) \right\} - \\
 & k_1 \left\{ \int^5 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} = \int^5 t^2 f(t)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Las ecuaciones (3.32), (3.33), (3.34) y (3.35) conducen a un sistema de ecuaciones simultáneas de la forma:

$$P(t)\Theta = Q(t) \tag{3.36}$$

de modo que  $\Theta = \{M_s, C_1, K_s, k_1\}^T$  muestra el vector de parámetros a identificar y  $P(t)$ ,  $Q(t)$  son matrices de  $4 \times 4$  y  $4 \times 1$ , respectivamente, las cuales están dadas:

$$P(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

cuyas componentes están en función del tiempo:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(t) &= 2 \int^2 x_s(t) - 4 \int tx_s(t) + t^2 x_s(t) \\
 a_{21}(t) &= 2 \int^3 x_s(t) - 4 \int^2 tx_s(t) + \int t^2 x_s(t) \\
 a_{31}(t) &= 2 \int^4 x_s(t) - 4 \int^3 tx_s(t) + \int^2 t^2 x_s(t) \\
 a_{41}(t) &= 2 \int^5 x_s(t) - 4 \int^4 tx_s(t) + \int^3 t^2 x_s(t) \\
 a_{12}(t) &= -2 \int^2 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
 a_{22}(t) &= -2 \int^3 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{32}(t) &= -2 \int^4 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
a_{42}(t) &= -2 \int^5 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^4 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
a_{13}(t) &= \int^2 t^2 x_s(t) \\
a_{23}(t) &= \int^3 t^2 x_s(t) \\
a_{33}(t) &= \int^4 t^2 x_s(t) \\
a_{43}(t) &= \int^5 t^2 x_s(t) \\
a_{14}(t) &= \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
a_{24}(t) &= \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
a_{34}(t) &= \int^4 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
a_{44}(t) &= \int^5 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\
b_1(t) &= \int^2 t^2 f(t) \\
b_2(t) &= \int^3 t^2 f(t) \\
b_3(t) &= \int^4 t^2 f(t) \\
b_4(t) &= \int^5 t^2 f(t)
\end{aligned}$$

En la ecuación (3.36) se define que el vector de parámetros  $\{\Theta\}$  es algebraicamente identificable, si y sólo si se cumple la condición  $\det[P(t)] \neq 0$ . En general esta condición se mantiene al menos en un pequeño intervalo de tiempo  $(t_0, t_0 + \epsilon)$ , donde  $\epsilon$  es un valor positivo y suficientemente pequeño. De la solución de la ecuación (3.36) se obtiene el identificador de los parámetros desconocidos.

$$\left. \begin{aligned} M_s &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ C_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \\ K_s &= \frac{\Delta_3(t)}{\det[P(t)]} \\ k_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

De igual manera, se realiza el proceso para la ecuación diferencial ordinaria de movimiento (3.28), como el desarrollo del identificador es similar al antes ya explicado, se omiten algunos pasos. En la ecuación (3.38) se muestra la expresión en el dominio del tiempo de (3.28) ya con los tratamientos matemáticos adecuados:

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ 2 \int^2 x_1(t) - 4 \int tx_1(t) + t^2 x_1(t) \right\} + C_1 \left\{ -2 \int^2 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} \\ = -k_1 \left\{ \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es importante destacar, que en esta ecuación no se tiene una señal de entrada  $f(t)$ , sin embargo,  $k_1$  se identificó anteriormente, por lo tanto, se toma como dato de entrada. Entonces, se tiene una ecuación con dos incógnitas, por lo que es necesario integrar una vez la ecuación (3.38) con respecto al tiempo, para obtener un sistema de ecuaciones lineales determinadas:

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ 2 \int^3 x_1(t) - 4 \int^2 tx_1(t) + \int t^2 x_1(t) \right\} + C_1 \left\{ -2 \int^3 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} \\ = -k_1 \left\{ \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

De igual manera las ecuaciones (3.38) y (3.39) conducen a un sistema de ecuaciones de la forma (3.36), donde el vector de parámetros a identificar se denota como:  $\Theta = \{m_1, C_1\}^T$ , y

$P(t)$ ,  $Q(t)$  son matrices de  $2 \times 2$  y  $2 \times 1$ , las cuales están dadas por:

$$P(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{Bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

cuyas componentes están en función del tiempo:

$$\begin{aligned} c_{11}(t) &= 2 \int^2 x_1(t) - 4 \int tx_1(t) + t^2 x_1(t) \\ c_{21}(t) &= 2 \int^3 x_1(t) - 4 \int^2 tx_1(t) + \int t^2 x_1(t) \\ c_{12}(t) &= -2 \int^2 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\ c_{22}(t) &= -2 \int^3 t(x_1(t) - x_s(t)) + \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\ d_1(t) &= \int^2 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \\ d_2(t) &= \int^3 t^2(x_1(t) - x_s(t)) \end{aligned}$$

De la solución del sistema se obtiene el identificador de los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ C_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

### 3.7.4. Resultados de simulación del sistema DVA

Se hace uso de MATLAB/Simulink<sup>TM</sup> para programar las ecuaciones para las soluciones numéricas, Runge-Kutta es el método numérico seleccionado y el paso de integración es de 0.1s. Para la fuerza de entrada se aplica una excitación armónica de la forma  $f(t) = 10000\text{sen}(90t)$ , la señal se observa en la figura 3.11.

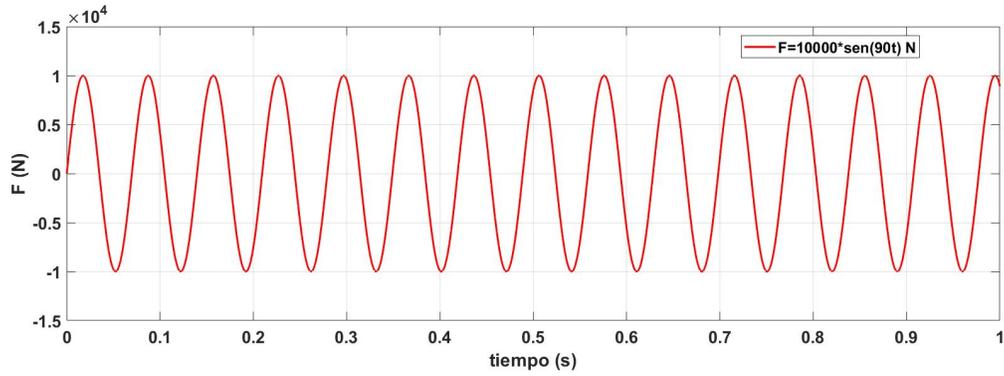


Figura 3.11: Señal de fuerza de entrada  $f(t)$  tipo armónica.

Posteriormente, el sistema fue excitado por la fuerza ya antes mencionada, en las figuras 3.12 y 3.13 se observa los desplazamientos obtenidos del DVA. En la tabla 3.2 se muestran

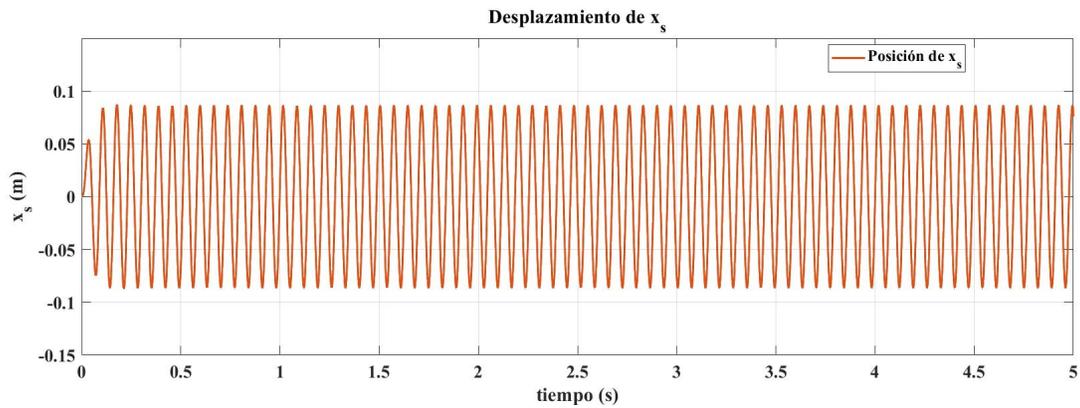


Figura 3.12: Desplazamiento de la coordenada  $x_s$ .

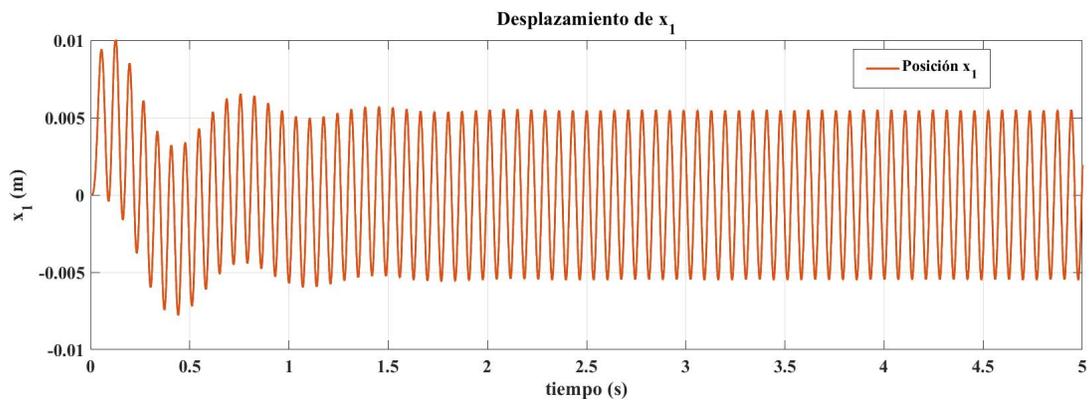


Figura 3.13: Desplazamiento de la coordenada  $x_1$ .

los parámetros a aplicar en la solución del sistema, notar que estos valores se obtuvieron en

[8]. En las figuras 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18 se muestran los resultados de simulación de

Parámetro	Valor
$M_s$	28.85 kg
$m_1$	216.75 kg
$K_s$	184000 $\frac{N}{m}$
$k_1$	21700 $\frac{N}{m}$
$C_1$	1200 $\frac{N.s}{m}$

Tabla 3.2: Parámetros de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil [8].

la identificación de parámetros ( $M_s$ ,  $m_1$ ,  $C_1$ ,  $K_s$  y  $k_1$ ) del DVA, para la realización de esta técnica es necesario la medición de las posiciones del absorbedor. Notar, que la identificación de los parámetros es casi instantánea.

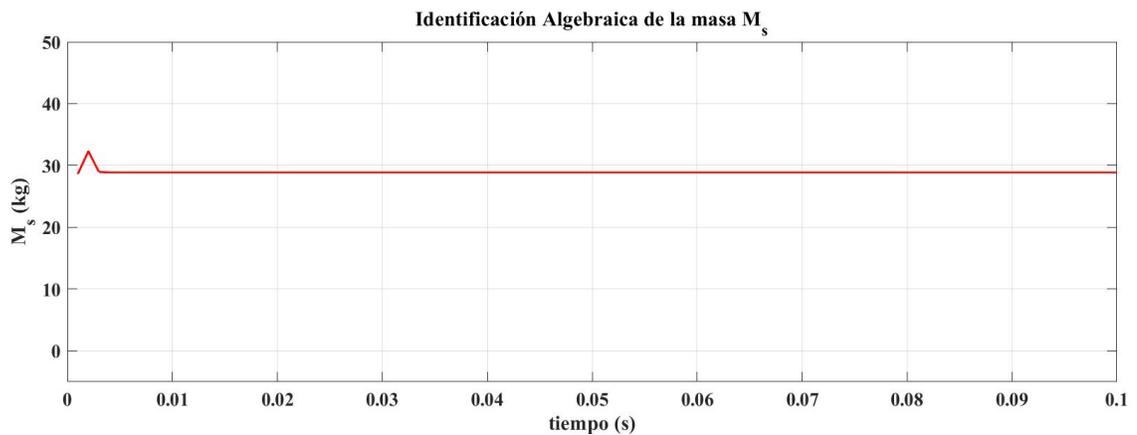


Figura 3.14: Identificación algebraica del parámetro de la masa  $M_s$ .

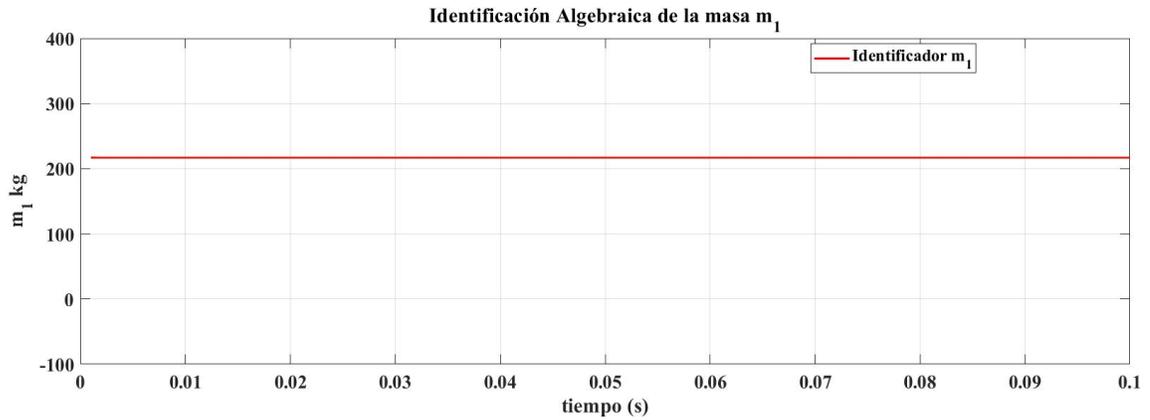


Figura 3.15: Identificación algebraica del parámetro de la masa  $m_1$ .

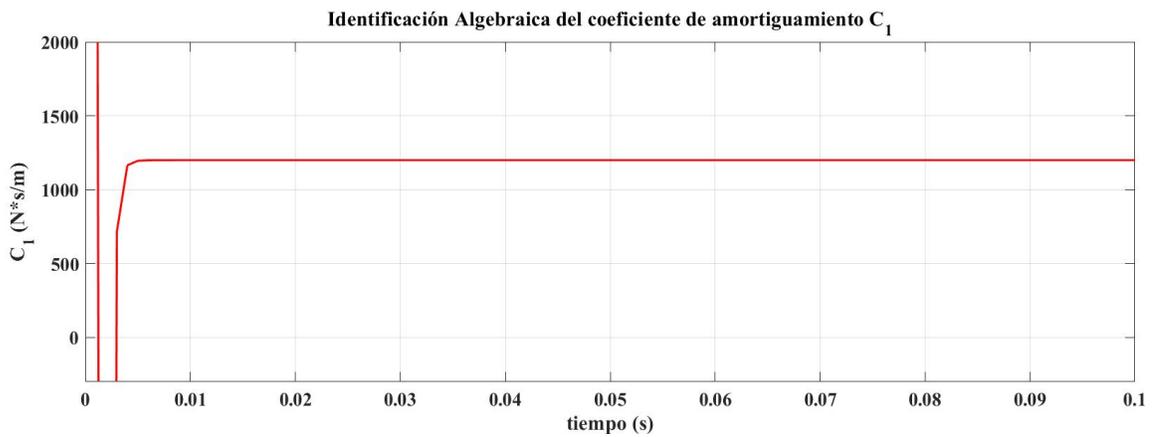


Figura 3.16: Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de amortiguamiento  $C_1$ .

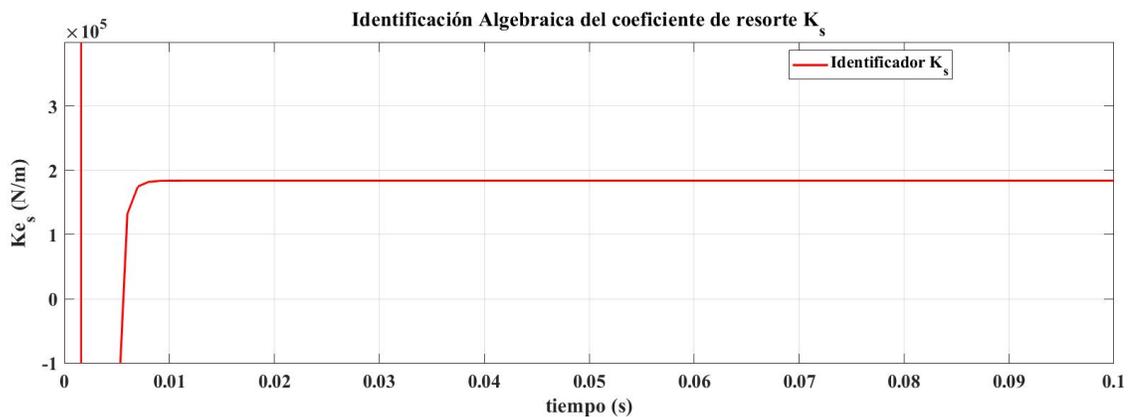


Figura 3.17: Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de rigidez  $K_s$ .

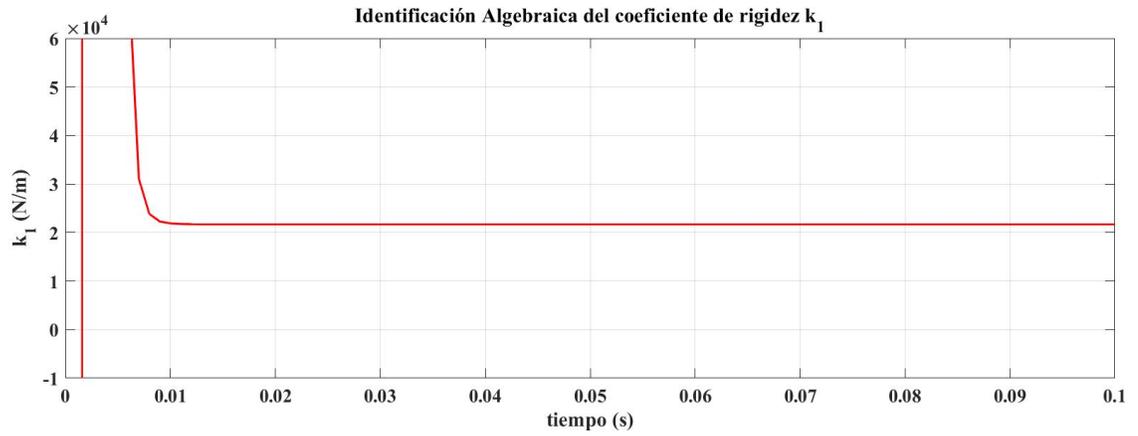


Figura 3.18: Identificación algebraica del parámetro del coeficiente de rigidez  $k_1$ .

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se desarrollaron e implementaron los modelos matemáticos descritos dentro del marco teórico a una suspensión de un cuarto de automóvil basado en inersor, cabe mencionar que, en el siguiente apartado sólo se reporta el desarrollo matemático de la suspensión implementando la red C4, ya que en estudios previos [57] se ha demostrado que es más eficiente mitigar vibración en una suspensión en comparación con las otras dos redes y además el proceso del desarrollo de identificación es similar.

### 4.1. Modelo de un cuarto de vehículo

En esta parte se empieza con un análisis de un modelo pasivo de dos grados de libertad para representar un cuarto de vehículo, después, se agrega la red mecánica basada en inersor C4, figura 4.1, la cual consiste en una conexión en paralelo entre el amortiguador y el resorte y posteriormente, estos se conectan en serie con un inersor. Es importante señalar que al

implementar esta configuración de elementos mecánicos se añade un grado de libertad al sistema de suspensión, por lo tanto se tienen las siguientes coordenadas  $x_1, x_2, x_s$ , donde estas variables representan los desplazamientos verticales del modelo. Y la variable  $x_0$  representa el movimiento del terreno que en este caso se tomará de tipo oscilante.

Empleando el formulismo de Euler-Lagrange, se definen las coordenadas y fuerzas generalizadas, asimismo se determina la energía disipativa y el Lagrangiano (a partir de las energías cinética y potencial). Luego, se calculan las derivadas parciales respecto al tiempo. En el apéndice A se muestra el análisis y el desarrollo matemático completo del modelo. A continuación, se observa el sistema de ecuaciones de segundo orden las cuales rigen el comportamiento dinámico del modelo mostrado en la figura 4.1

$$m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t(x_u - x_0) + k_1(x_u - x_s) = 0 \tag{4.1}$$

$$m_s \ddot{x}_s + c(\dot{x}_s - \dot{x}_b) + k_1(x_s - x_u) + k_2(x_s - x_b) = 0 \tag{4.2}$$

$$b(\ddot{x}_b - \ddot{x}_u) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_s) + k_2(x_b - x_s) = 0 \tag{4.3}$$

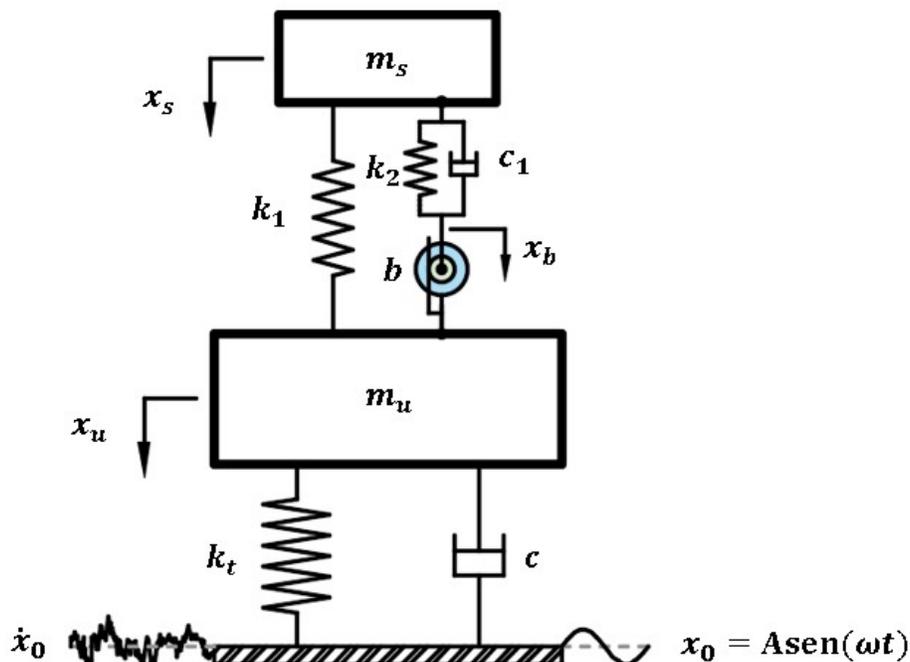


Figura 4.1: Modelo de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la impedancia mecánica C4.

## 4.2. Identificación algebraica

En este apartado, se desarrollan los identificadores de los parámetros tales como: los coeficientes de rigidez  $k_1$  y  $k_2$ , coeficiente de amortiguamiento  $c$ , inercia del inersor  $b$  y la masa  $m_s$  de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red C4. En el caso de los parámetros:  $m_u$ ,  $k_t$ , se toman como datos ya establecidos en el modelo.

Para el desarrollo de los estimadores se inicia tomando la ecuación diferencial del sistema de ecuaciones de movimiento:

$$m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t(x_u - x_0) + k_1(x_u - x_s) = 0 \quad (4.4)$$

ahora, como se muestra en el modelo existe perturbación en la base la cual es representada por:  $x_0$ , siendo una señal de entrada de tipo armónica, así que, al tener el producto de  $k_t$ ,  $x_0$  obtenemos la fuerza de resorte  $F_0 = k_t x_0$ , por lo tanto despejamos  $F_0$  de la ecuación (4.4), y se tiene lo siguiente:

$$m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t x_u + k_1(x_u - x_s) = F_0 \quad (4.5)$$

luego, se le aplica la transformada de Laplace a la ecuación y por ende, queda en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} m_u \{s^2 X_u(s) - s x_u(0) - \dot{x}_u(0)\} + b \{s^2 (X_u(s) - X_b(s)) - s(x_u(0) - x_b(0)) - (\dot{x}_u(0) - \dot{x}_b(0))\} \\ + k_t X_u(s) + k_1 \{(X_u(s) - X_s(s))\} = F_0(s) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Posteriormente, se deriva dos veces la expresión resultante respecto a la variable compleja  $s$ ,

con esto se cancela la influencia de las condiciones iniciales de la ecuación (4.6),

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2X_u(s) + 4s \frac{d}{ds} X_u(s) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + \\
 & b \left\{ 2(X_u(s) - X_b(s)) + 4s \frac{d}{ds} (X_u(s) - X_b(s)) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_b(s)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + k_1 \left\{ \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_s(s)) \right\} = \frac{d^2}{ds^2} F_0(s)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Luego, se multiplica a ambos miembros de la ecuación (4.7) por  $s^{-2}$ , esto nos lleva a una expresión libre de derivadas,

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2s^{-2} X_u(s) + 4s^{-1} \frac{d}{ds} X_u(s) + \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + \\
 & b \left\{ 2s^{-2} (X_u(s) - X_b(s)) + 4s^{-1} \frac{d}{ds} (X_u(s) - X_b(s)) + \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_b(s)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + k_1 \left\{ s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_s(s)) \right\} = s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} F_0(s)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Recordando, la ecuación (4.8) aún se encuentra en el dominio de la frecuencia, así que ahora la pasamos al dominio del tiempo usando las transformadas inversas de la derivada y del cociente:

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2 \int^2 x_u(t) - 4 \int t x_u(t) + t^2 x_u(t) \right\} + \\
 & b \left\{ 2 \int^2 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t (x_u(t) - x_b(t)) + t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ \int^2 t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^2 t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^2 t^2 F_0(t)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ahora, para determinar los dos parámetros desconocidos  $b$  y  $k_1$ , se requiere una ecuación adicional para poder tener un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, para ello, se integra la ecuación (4.9) y se obtiene otra ecuación variante en el tiempo:

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2 \int^3 x_u(t) - 4 \int^2 tx_u(t) + \int t^2 x_u(t) \right\} + \\
 & b \left\{ 2 \int^3 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int^2 t(x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ \int^3 t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^3 t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^3 t^2 F_0(t)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

despejando los parámetros desconocidos se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 & b \left\{ 2 \int^2 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t(x_u(t) - x_b(t)) + t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + \\
 & k_1 \left\{ \int^2 t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^2 t^2 F_0(t) - m_u \left\{ 2 \int^2 x_u(t) - 4 \int tx_u(t) + t^2 x_u(t) \right\} - \\
 & k_t \left\{ \int^2 t^2 x_u(t) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b \left\{ 2 \int^3 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int^2 t(x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + \\
 & k_1 \left\{ \int^3 t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^3 t^2 F_0(t) - m_u \left\{ 2 \int^3 x_u(t) - 4 \int^2 tx_u(t) + \int t^2 x_u(t) \right\} - \\
 & k_t \left\{ \int^3 t^2 x_u(t) \right\}
 \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores, conducen a un sistema de ecuaciones simultaneas de la forma:

$$P(t)\Theta = Q(t) \tag{4.11}$$

de modo que  $\Theta = \{b, k_1\}^T$  muestra el vector de parámetros a identificar y  $P(t)$ ,  $Q(t)$  son matrices de  $2 \times 2$  y  $2 \times 1$ , respectivamente,

$$P(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

De la solución de (4.11) se obtiene el identificador de los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ k_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

De la misma forma, se realiza el procedimiento para las ecuaciones de movimiento (4.2) y (4.3), para la identificación de los parámetros restantes desconocidos.

Para la ecuación (4.3), se tiene la siguiente expresión en el dominio del tiempo,

$$\begin{aligned} m_s \left\{ 2 \int^2 x_s(t) - 4 \int tx_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} + c \left\{ -2 \int^2 t(x_s(t) - x_b(t)) + \int t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} + \\ k_1 \left\{ \int^2 t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^2 t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ahora bien, se identificará  $m_s$  y  $k_2$  de la ecuación (4.13), así que se despejan estos parámetros y por lo tanto, los coeficientes  $c$  y  $k_1$  se toman como datos de entrada y por ende se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} m_s \left\{ 2 \int^2 x_s(t) - 4 \int tx_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^2 t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} \\ = c \left\{ 2 \int^2 t(x_s(t) - x_b(t)) - \int t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^2 t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Después, se integra una vez la ecuación (4.14) y de esta manera se tiene dos ecuaciones y dos incógnitas,

$$\begin{aligned} m_s \left\{ 2 \int^3 x_s(t) - 4 \int^2 tx_s(t) + \int t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^3 t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} \\ = c \left\{ 2 \int^3 t(x_s(t) - x_b(t)) - \int^2 t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^3 t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

así pues, las ecuaciones (4.14) y (4.15) conducen a un sistema de ecuaciones de la forma

(4.11), las cuales se muestran a continuación,

$$P(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{Bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

al solucionar el sistema se obtienen los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ c &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

De modo similar, se realiza el tratamiento matemático para la ecuación (4.3), que en su caso particular se identificarán los siguientes parámetros:  $c$  y  $k_2$ , a continuación se muestra la expresión en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} & b \left\{ 2 \int^2 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t(x_u(t) - x_b(t)) + t^2(x_u(t) - x_b(t)) \right\} + \\ & c \left\{ -2 \int^2 t(x_b(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^2 t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

En el caso de  $b$  se toma como dato de entrada ya que anteriormente ya fue identificado, entonces, se despejan las variables desconocidas:

$$\begin{aligned} & c \left\{ -2 \int^2 t(x_b(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^2 t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} \\ & = -b \left\{ 2 \int^2 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t(x_u(t) - x_b(t)) + t^2(x_u(t) - x_b(t)) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

de nuevo, en la ecuación (4.18) se tiene una ecuación con dos incógnitas, por lo tanto, para hallar las soluciones se integra una vez, y se obtiene la ecuación (4.19):

$$\begin{aligned}
& c \left\{ -2 \int^3 t(x_b(t) - x_s(t)) + \int^2 t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^3 t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} \\
& = -b \left\{ 2 \int^3 (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int^2 t(x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2(x_u(t) - x_b(t)) \right\} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

y de esta manera, ya se pueden obtener los parámetros desconocidos, asimismo las ecuaciones de sistema se expresan como:

$$P(t) = \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Finalmente, al solucionar se obtienen los valores de los coeficientes de amortiguamiento  $c$  y de rigidez  $k_2$ :

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ k_2 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## RESULTADOS

### 5.1. Simulaciones

Las siguientes simulaciones numéricas se realizaron mediante el entorno MATLAB-SIMULINK para las estimaciones de los parámetros de una suspensión de un cuarto de automóvil con absorbedores de vibración basados en inersor. El método numérico Runge-Kutta es el utili-

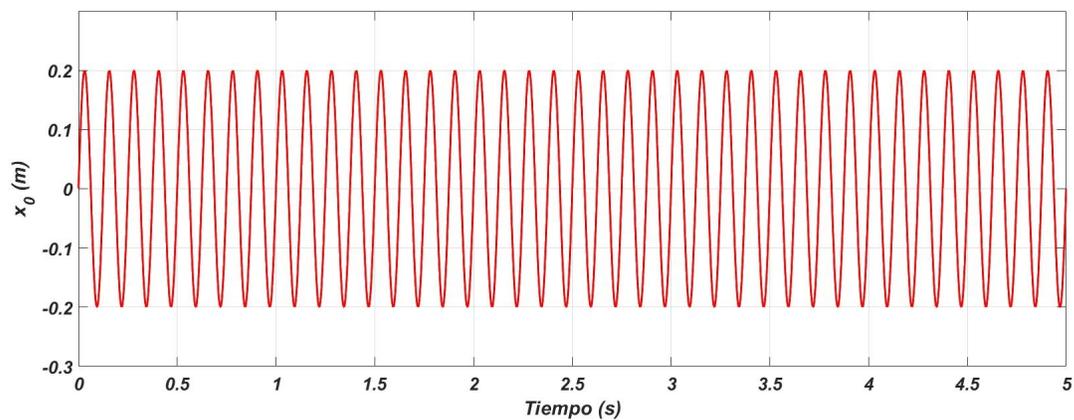


Figura 5.1: Señal de entrada tipo armónica.

zado para las soluciones numéricas y además se emplea un paso de integración de  $1ms$  para las simulaciones de cada red mecánica basada en inersor .

Para solucionar cada modelo fue necesario excitar las entradas con una señal armónica (ver figura 5.1) de la forma:

$$x_0 = 0.2 \text{ sen}(10t) \tag{5.1}$$

y de esta manera se representa el desplazamiento adquirido en la base del sistema que va de  $\pm 0.2 m$  y a una frecuencia de  $10 \text{ rad/s}$ .

### 5.1.1. Configuración mecánica C4 basada en inersor

Se programaron las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), correspondientes al modelo matemático de la suspensión implementando la impedancia mecánica basada en inersor C4 y las fórmulas para la identificación de los coeficientes desconocidos.

Posteriormente, en la tabla 5.1 se muestran los parámetros utilizados para el proceso de identificación, es importante mencionar que estos valores tuvieron su proceso optimización y cálculo [57] y por lo tanto se tiene un sistema con elementos correctamente sintonizados.

Parámetros	Valor
$b$	$217 \text{ kg}$
$k_1$	$22000 \frac{N}{m}$
$k_2$	$10000 \frac{N}{m}$
$c$	$1067 \frac{N.s}{m}$

Tabla 5.1: Parámetros óptimos de la suspensión basado en inersor con la red C4 [57].

Parámetros	Valor
$m_s$	$320 \text{ kg}$
$m_u$	$45 \text{ kg}$
$k_t$	$190000 \frac{N}{m}$

Tabla 5.2: Parámetros del modelo [57].

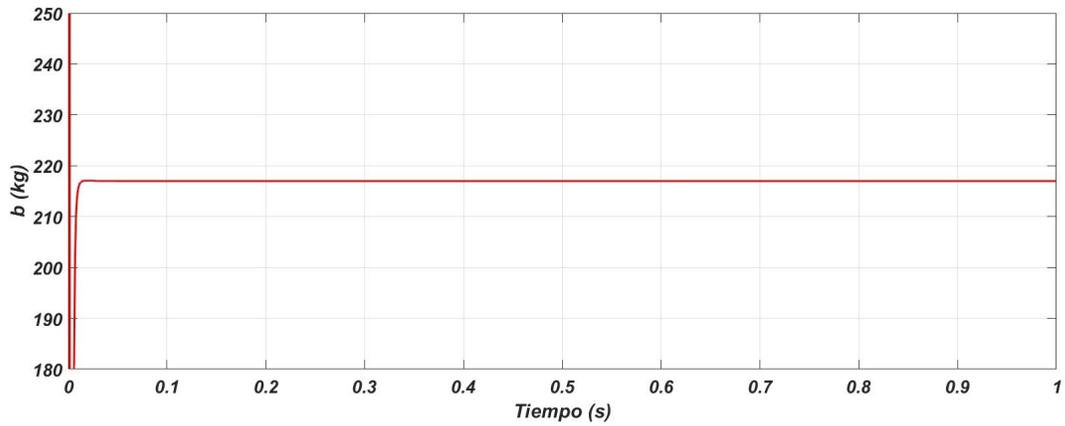


Figura 5.2: Identificador del coeficiente de inercia  $b$ .

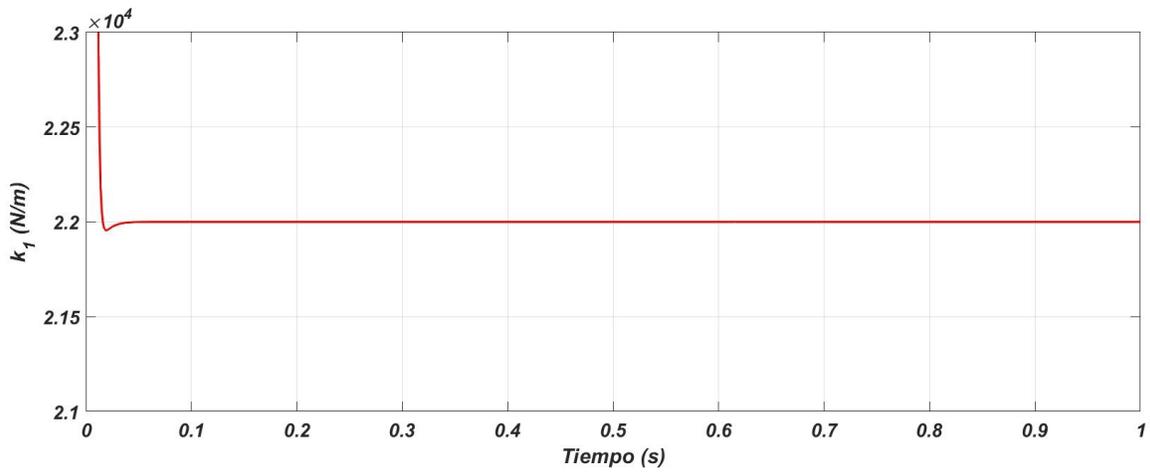


Figura 5.3: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_1$ .

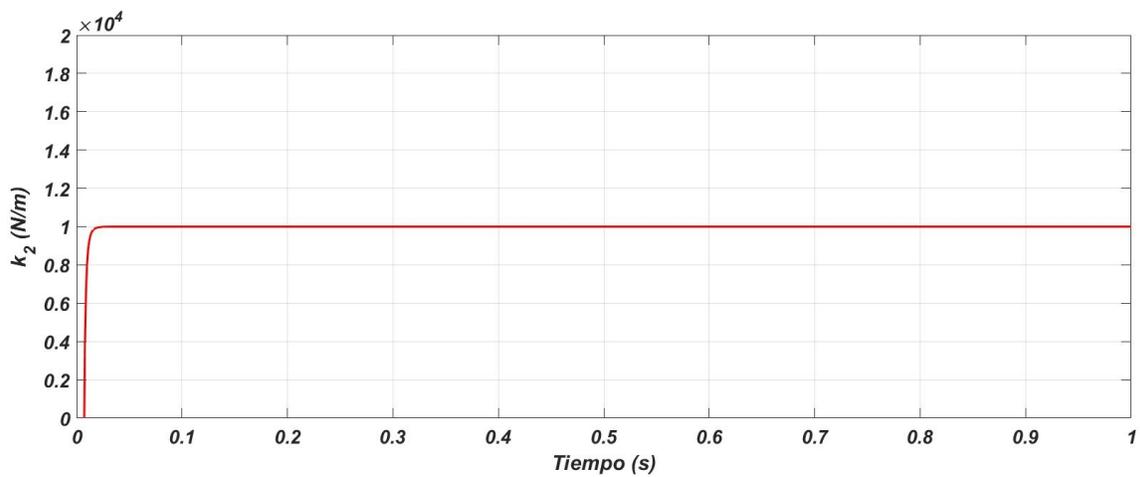


Figura 5.4: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_2$ .

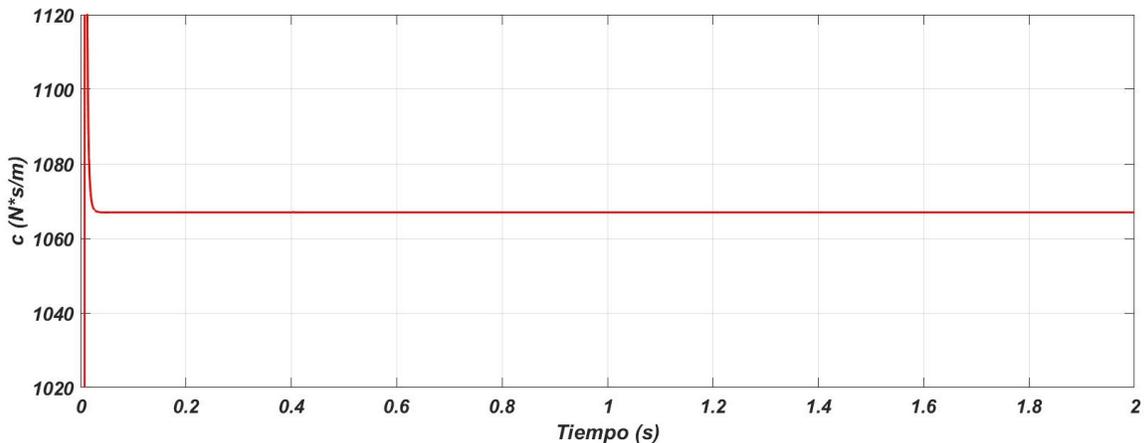


Figura 5.5: Identificador del coeficiente de amortiguamiento  $c$  de la red C4.

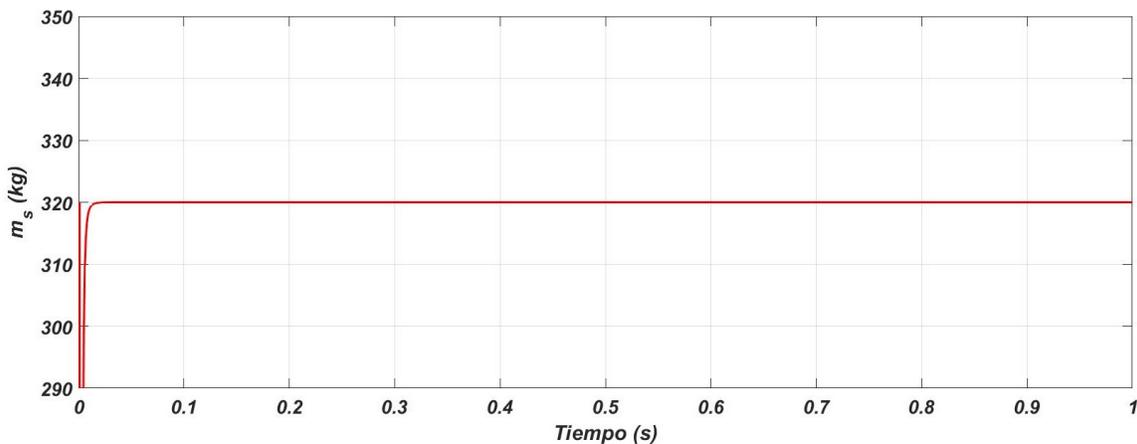


Figura 5.6: Identificador de la masa suspendida  $m_s$  de un cuarto de automóvil.

### 5.1.2. Configuración mecánica C3 basada en inersor

En la siguiente parte, se emplea la impedancia mecánica C3 basada en inersor a la suspensión de un cuarto de automóvil, en el apéndice B se muestran las ecuaciones de movimiento del modelo y las expresiones correspondientes a los identificadores. En el transcurso de revisión de la literatura se obtuvieron los parámetros físicos de los dispositivos que integran esta red mecánica, los cuales se muestran en la tabla 5.3. Adicionalmente, los parámetros de la masa y rigidez del neumático y la masa suspendida se consideran los mismos que se emplearon en el análisis de la configuración mecánica C4.

Parámetros	Valor
$b$	1016 $kg$
$k_1$	22000 $\frac{N}{m}$
$k_2$	294624 $\frac{N}{m}$
$c$	1903 $\frac{N \cdot s}{m}$

Tabla 5.3: Parámetros óptimos de la suspensión basado en inersor con la red C3 [4].

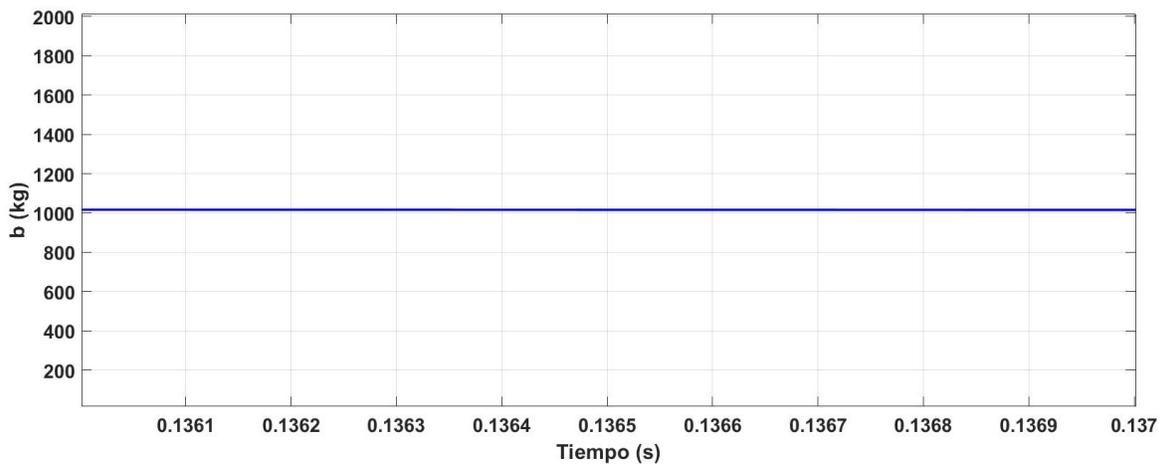


Figura 5.7: Identificador del coeficiente de inercia  $b$  de la red C3.

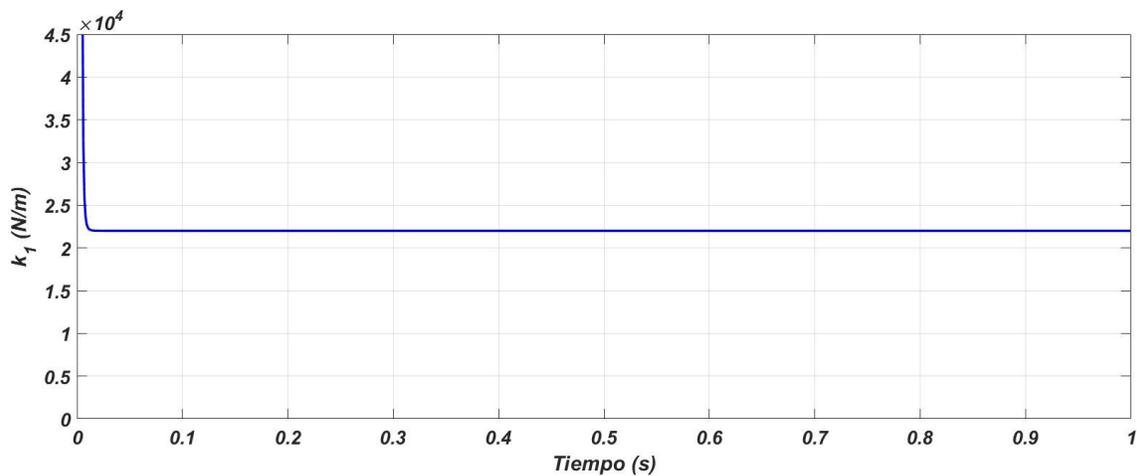


Figura 5.8: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_1$  de la red C3.

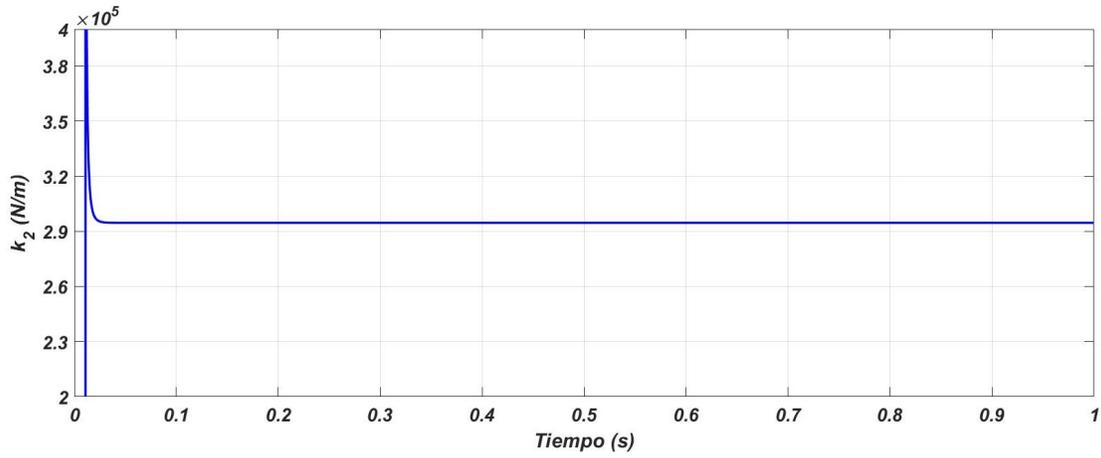


Figura 5.9: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_2$  de la red C3.

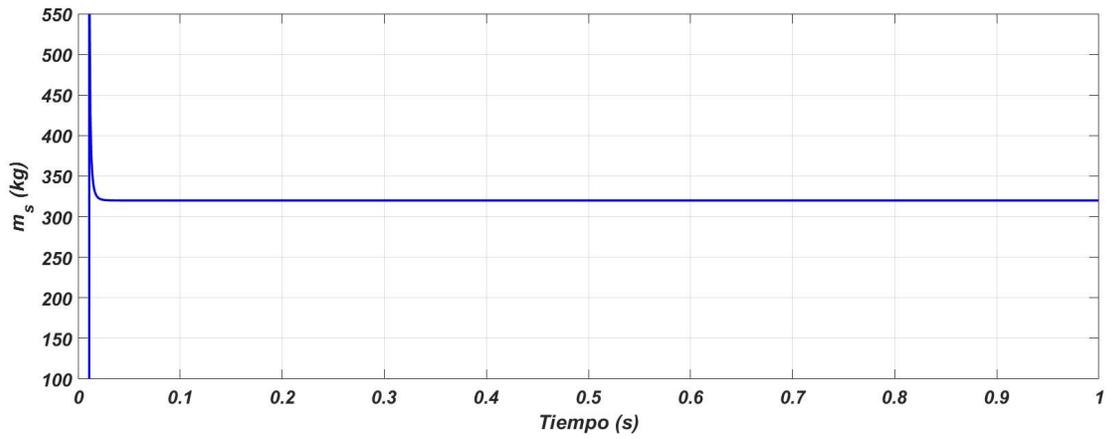


Figura 5.10: Identificador de la masa suspendida  $m_s$  de la red C3.

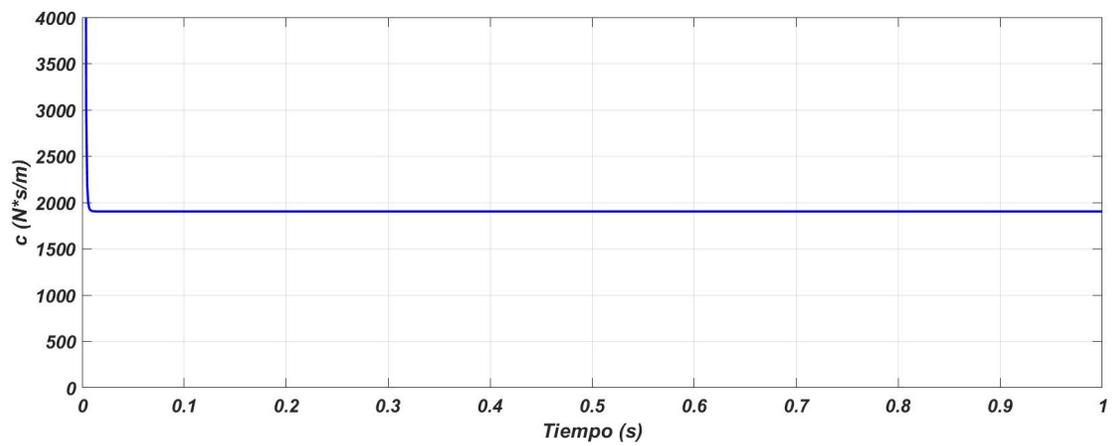


Figura 5.11: Identificador del coeficiente de amortiguamiento  $c$  de la red C3.

### 5.1.3. Configuración mecánica C6 basada en inersor

En cuanto a las soluciones óptimas de la red C6 no se encontraron en la literatura, dado que al ser implementada la configuración mecánica esta no brinda un mejor rendimiento en la suspensión, sin embargo para fines de simulación se toman los parámetros utilizados en la red mecánica C4 (ver la tabla 5.1), puesto que estas dos redes mecánicas son casi similares en cuanto a su conexión.

Ahora, del mismo modo se toman los siguientes parámetros de la tabla 5.2 que son correspondientes al modelo para así realizar las simulaciones.

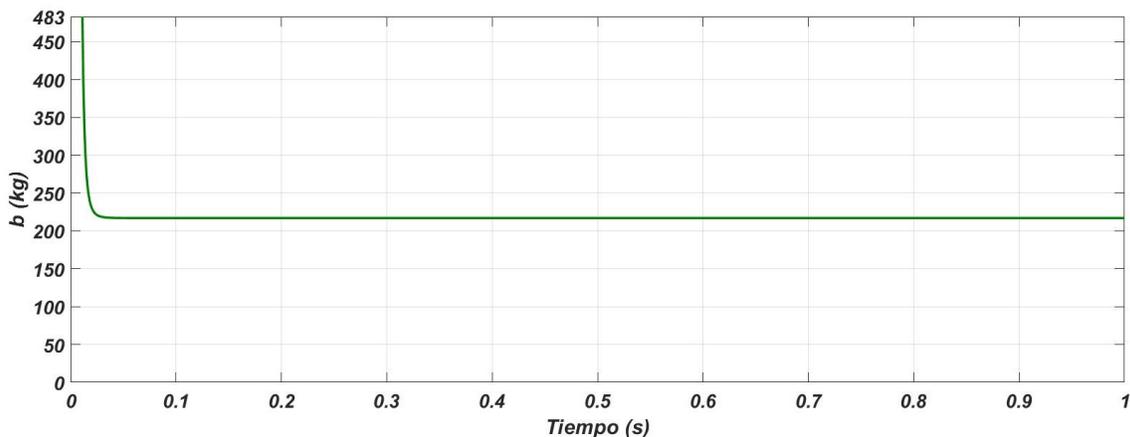


Figura 5.12: Identificador del coeficiente de inercancia  $b$  de la red C6.

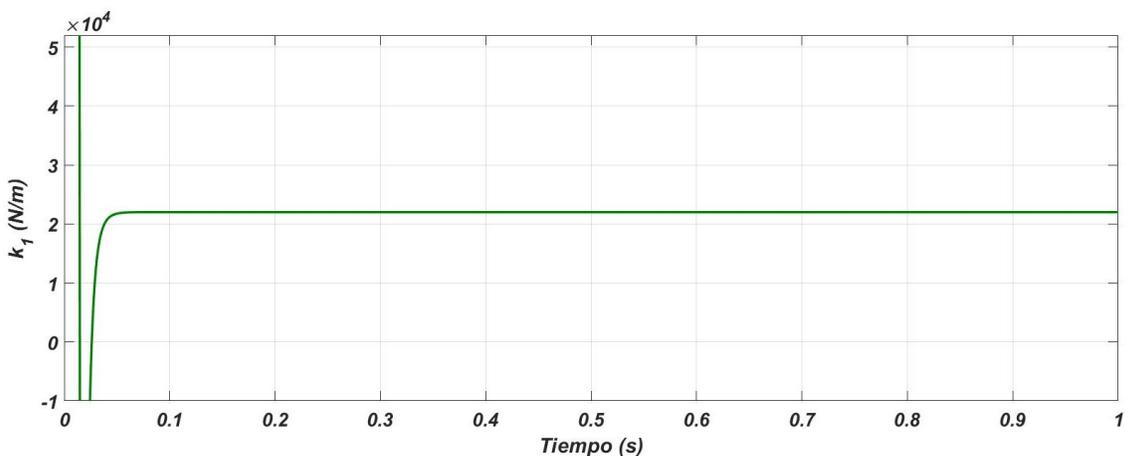


Figura 5.13: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_1$  de la red C6.

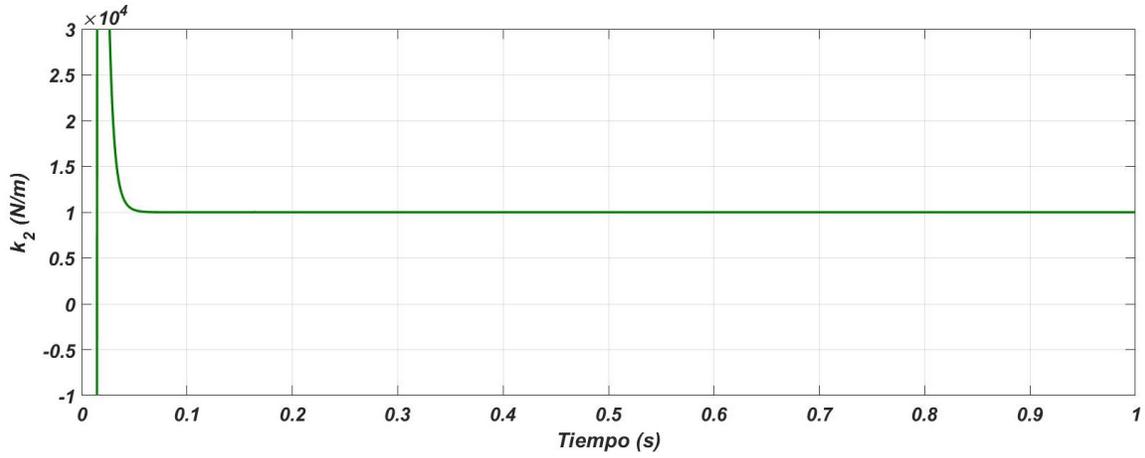


Figura 5.14: Identificador del coeficiente de rigidez  $k_2$  de la red C6.

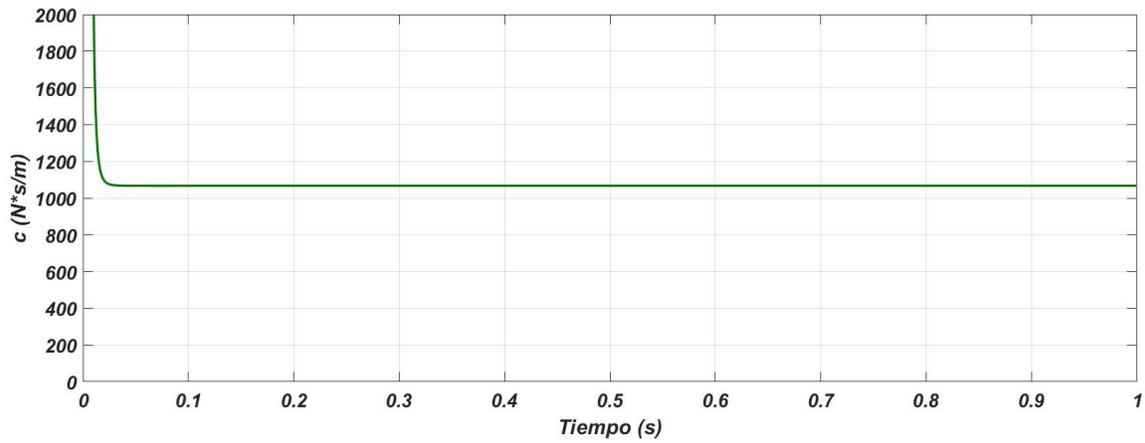


Figura 5.15: Identificador del coeficiente de amortiguamiento  $c$  de la red C6.

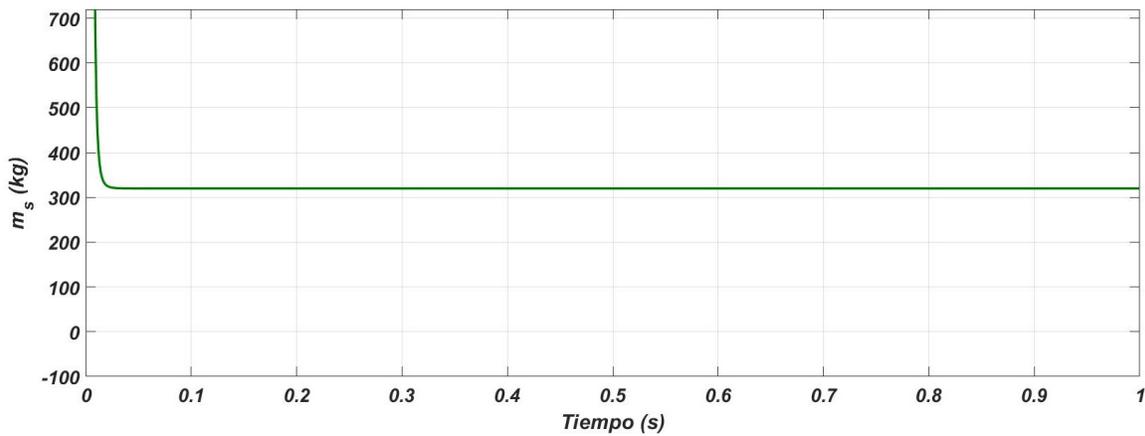


Figura 5.16: Identificador de la masa suspendida  $m_s$  de la red C6.

## 5.2. Pruebas de robustez

En la siguiente sección se realizan pruebas de robustez de la técnica de identificación algebraica. Sólo se aplican a la red mecánica C4, puesto que anteriormente se mencionó que esta configuración es la que mejor rendimiento ofrece en cuestión de aplicación en una suspensión de automóvil, además, el proceso de análisis que se realiza para la red mecánica C4, es básicamente similar para las otras impedancias mecánicas.

Primeramente, a la suspensión con la red C4 se le aplica una señal de entrada aleatoria la cuál simula un perfil irregular de carretera, en la tabla 5.4 se observan los valores necesarios para obtener las excitaciones estocásticas de la carretera.

Grado del perfil de la carretera	$G_x(\eta_0)(10^{-6})m^3$ $\eta_0 = 0.1[m^{-1}]$ Media geométrica
Clase A	16
Clase B	46
Clase C	256
Clase D	1024
Clase E	4096
Clase F	65536
Clase G	262144

Tabla 5.4: Niveles de rugosidad de la carretera norma ISO 8608 [4], [57].

Esta señal irregular de carretera se obtiene a partir de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\dot{x}_0 = -2\pi f_0 x_0(t) + 2\pi\eta W(t)\sqrt{G_x(\eta_0)V(t)}$$

donde,  $f_0 = 0.0628 \text{ Hz}$  es la frecuencia de corte,  $\eta = 0.1m^{-1}$  representa la frecuencia espacial,  $G_x(\eta_0)$  es el coeficiente de rugosidad de la carretera,  $W(t)$  es un proceso estocástico estacionario (ruido blanco gaussiano) y  $x_0$  el perfil irregular del camino [4], [57]. Así pues, los perfiles artificiales son el resultado de la ecuación diferencial. Posteriormente, para la simulación se considera el perfil de clase C para la excitación de entrada ya que con este

perfil se puede simular un comportamiento más aproximado al movimiento de un automóvil en movimiento y, asimismo, se considera una velocidad constante de  $108 \frac{Km}{h}$ .

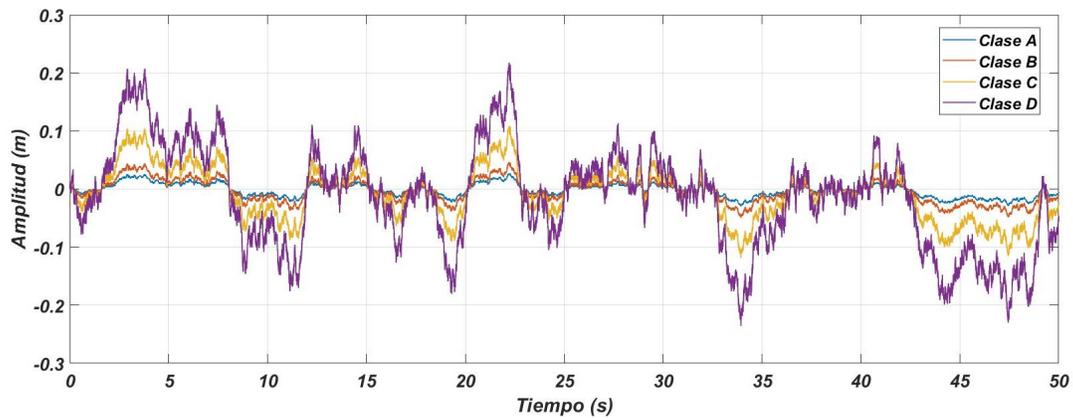


Figura 5.17: Perfiles artificiales de carretera de clase A-D.

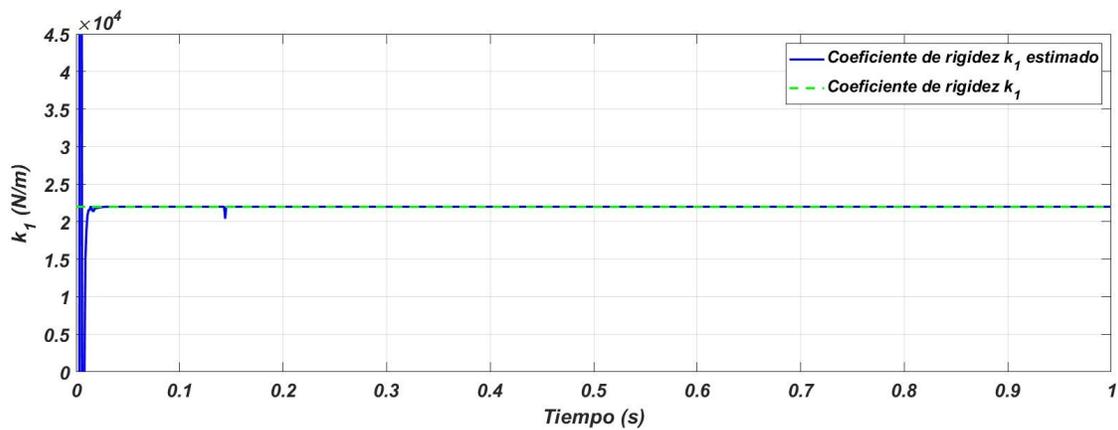


Figura 5.18: Coeficiente de rigidez  $k_1$  real vs estimado.

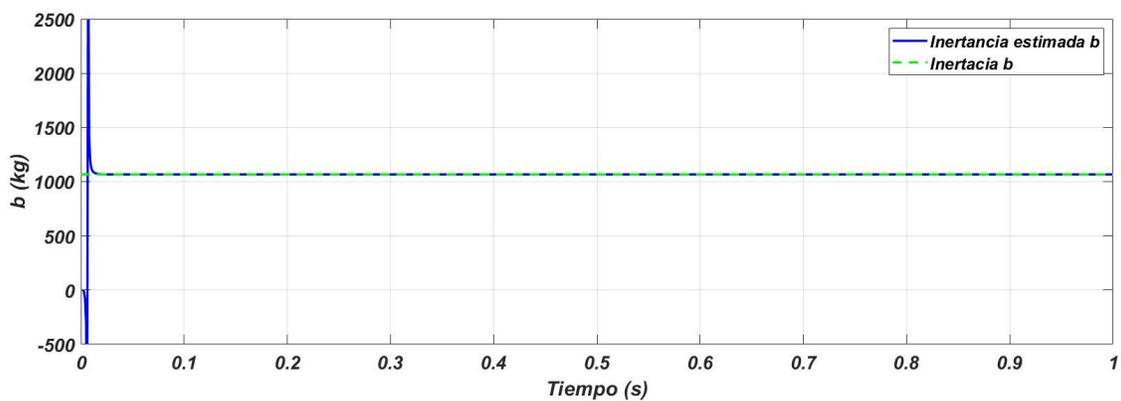


Figura 5.22: Inertancia  $b$  real vs estimada.

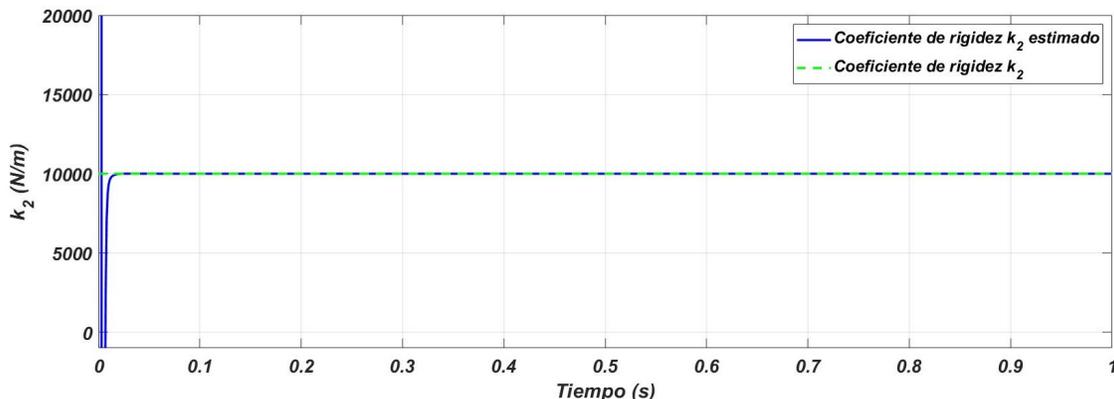


Figura 5.19: Coeficiente de rigidez  $k_2$  real vs estimado.

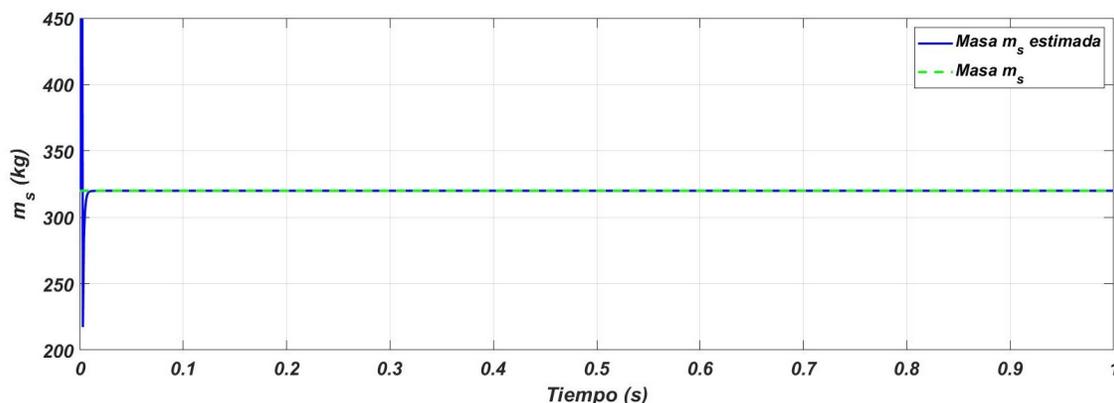


Figura 5.20: Masa suspendida  $m_s$  real vs estimada.

Adicionalmente, se propone otra prueba de robustez para el estimador algebraico diseñado para la identificación paramétrica de la suspensión de vehículo integrando la red mecánica C4 (ver figura 4.1). Para ello, se le aplican variaciones a la masa suspendida ( $m_s$ ) y a la masa no suspendida ( $m_u$ ). El ejercicio consiste en manifestar la problemática de: ¿Qué pasaría si existieran ciertas variaciones a la hora de realizar la identificación de parámetros en el modelo?

Así que, para este caso se puede llegar al problema donde la identificación podría no ser continua, sin embargo, según la teoría de identificadores algebraicos estos logran hacer la estimación al menos en un pequeño intervalo de tiempo. Para la realización de las simulaciones se aumentaron y disminuyeron las masas, para  $m_s$  se varía un  $\pm 2\%$  de su valor original que

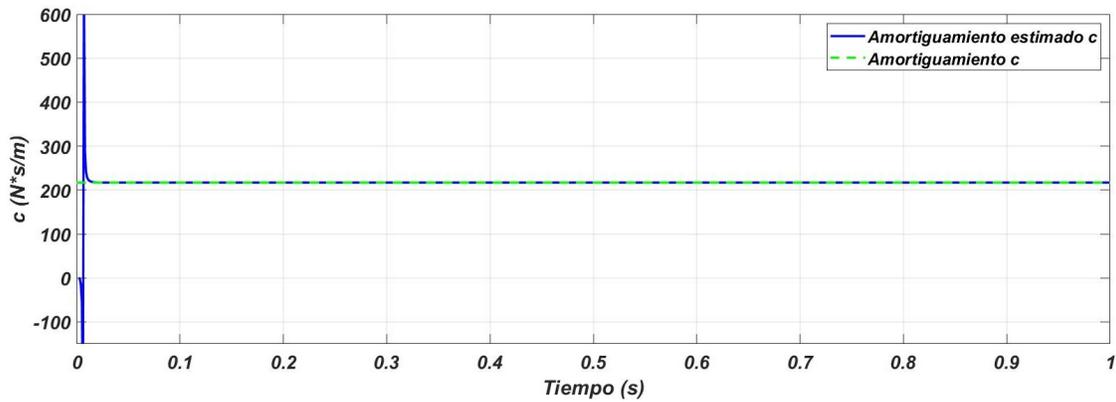


Figura 5.21: Coeficiente de amortiguamiento  $c$  real vs estimado.

es de 320  $kg$  y para  $m_u$  un  $\pm 3\%$  de 45  $kg$  y además se le aplica una señal aleatoria como la que se mostró anteriormente.

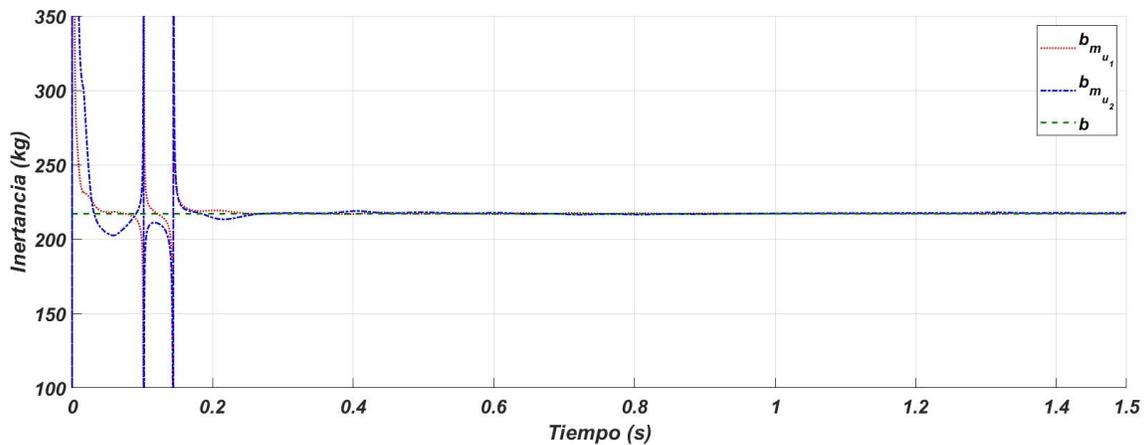


Figura 5.23: Identificador del parámetro  $b$  aplicando variación  $\pm 2\%$  de  $m_s$ .

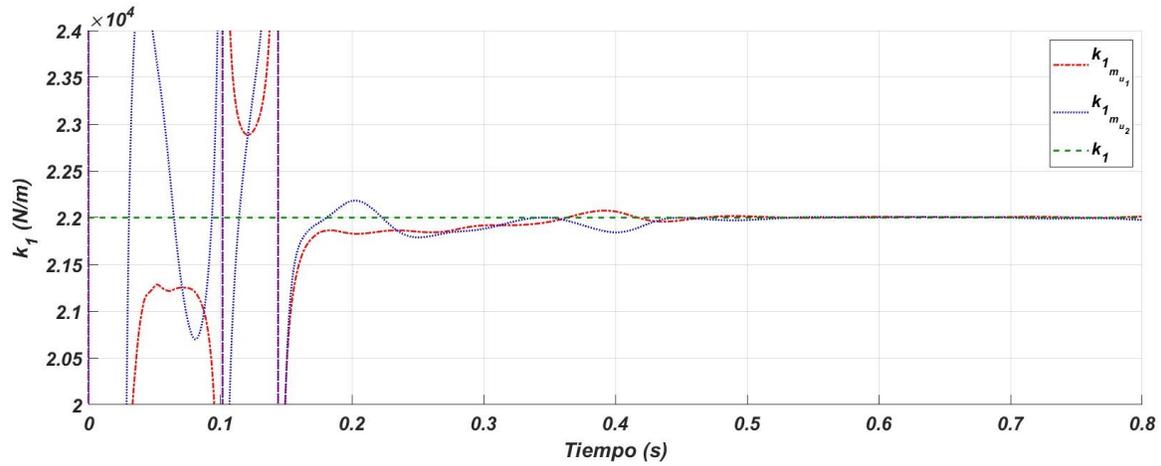


Figura 5.24: Identificador del parámetro  $k_1$  aplicando variación  $\pm 2\%$  de  $m_s$ .

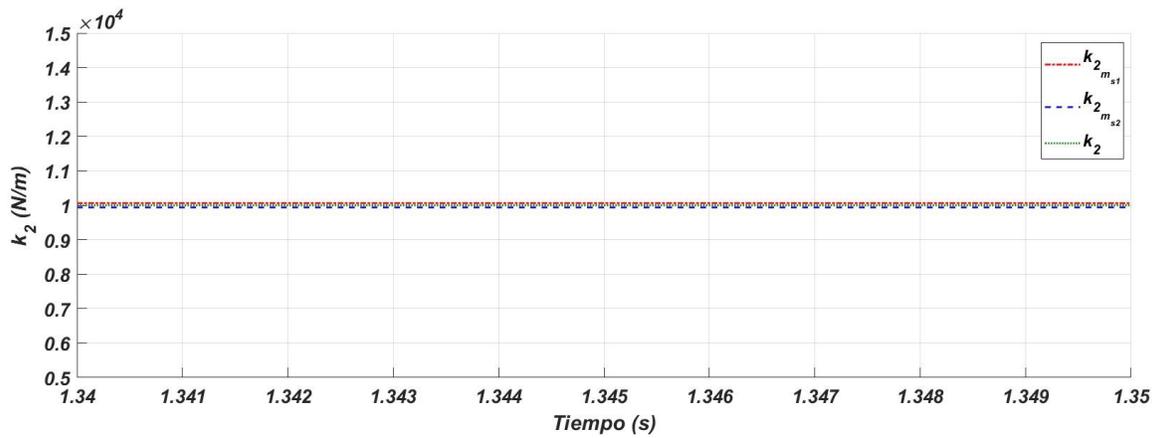


Figura 5.25: Identificador del parámetro  $k_2$  aplicando variación  $\pm 3\%$  de  $m_u$ .

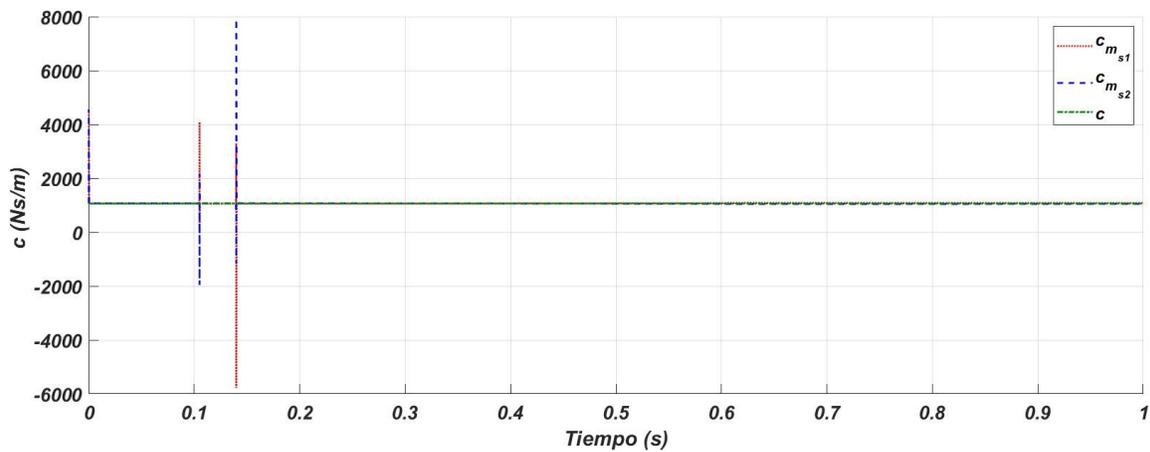


Figura 5.26: Identificador del parámetro  $c$  aplicando variación  $\pm 3\%$  de  $m_u$ .



---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se ha presentado el análisis enfocado a la aplicación de la técnica de identificación algebraica para el desarrollo de los identificadores. Esta investigación se efectúa sobre una suspensión de un cuarto de automóvil al momento de aplicarle una fuerza de excitación armónica en la base. La suspensión tradicional está constituida de la forma de un absorbedor dinámico de vibraciones (DVA), el cual integra un resorte y un amortiguador conectados en paralelo entre sí, pero en este caso en particular el amortiguador integrado en el DVA es sustituido por tres distintas configuraciones mecánicas basadas en inersor (C3, C4 y C6), cada arreglo se encuentra conformado por un resorte, un amortiguador y un inersor.

Al momento de llevar a cabo el análisis dinámico de cada una de las suspensiones integradas por su arreglo correspondiente, fue necesario desarrollar las ecuaciones de movimiento a partir del formulismo de Euler-Lagrange sin olvidar las fuerzas no conservativas. Luego de obtener las ecuaciones diferenciales se aplicó la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones y de esta manera transformarlas al dominio de la frecuencia. Seguido de esto,

por medio de la metodología de identificación algebraica se desarrollaron los identificadores de los parámetros físicos de los modelos. Para la solución de los identificadores se utilizó la herramienta de cómputo numérica Matlab-Simulink, al momento de realizar las simulaciones se compararon varias soluciones numéricas, el método de Runge-Kutta resultó ser el método más eficiente para este ejercicio. Una vez con las simulaciones realizadas se obtuvieron los identificadores de los parámetros, donde se observaron resultados favorables ya que todos los estimadores tendían a converger a su respectivas referencias rápidamente.

Posteriormente, se realizaron dos pruebas de robustez a los identificadores propuestos, la primera se le aplicó a los modelos una señal aleatoria la cual simula el comportamiento dinámico de una carretera, siendo esta la nueva fuerza de entrada, al realizar las simulaciones se notó que los identificadores tenían una respuesta similar a las que se obtuvieron anteriormente aplicando una fuerza armónica y para la segunda prueba se aplicaron variaciones en las masas suspendida y no suspendida, en este caso sí se vieron ciertos desajustes en las señales de los parámetros, sin embargo sí lograban alcanzar las señales de referencia, en un parámetro en particular sí se logra la identificación pero después de un cierto tiempo este se descontrola, no obstante, más adelante vuelve a identificar, así pues de esta manera se comprueba la definición que dice: la identificación se da  $\forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$  y de esta manera se comprobó la buena respuesta de los identificadores ante ciertas incertidumbres y dinámicas no modeladas.

## 6.1. Trabajos futuros

Para completar el trabajo desarrollado en esta investigación, se manifiestan los siguientes proyectos a futuro para así mejorar algunos aspectos del mismo y ampliar los resultados obtenidos.

- Realizar la implementación física del modelo matemático de la suspensión pero sólo con

la red mecánica basada en inersor C4, ya que como se mencionó durante el desarrollo del trabajo esta red proporciona una mejor respuesta vibratoria.

- Realizar una comparación de los resultados obtenidos de forma teórica contra resultados experimentales y de esta manera demostrar la efectividad de los identificadores desarrollados.
- Presentar una estrategia de estimación en línea para los parámetros basada en una combinación del método algebraico y alguna ley de control.



---

---

# APÉNDICE A

---

## MODELO DINÁMICO DE LA RED C4

A partir de la figura del modelo de suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C4 basada en inersor se definen las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_s} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_u} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_u} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_b} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_b} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} = 0 \quad (\text{A.3})$$

luego, se define la función Lagrangiana y la disipativa suponiendo que  $x_s > x_b > x_u > x_0$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_s\dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}m_u\dot{x}_u^2 + \frac{1}{2}b(\dot{x}_b + \dot{x}_u)^2 - \frac{1}{2}k_t(x_u - x_0)^2 - \frac{1}{2}k_1(x_s - x_u)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_s - x_b)^2 \quad (\text{A.4})$$

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{x}_s - \dot{x}_b)^2 \quad (\text{A.5})$$

donde,  $m_u$  es la masa no suspendida (masa del neumático),  $m_s$  es la masa suspendida (chasis del vehículo) y  $k_t$  es la rigidez del neumático.

Posteriormente, se desarrolla la metodología lagrangeana a las ecuaciones ( A.4) y (A.5), para las coordenadas generalizadas  $x_s, x_b, x_u$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_s} \right) &= m_s \ddot{x}_s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} &= k_1(x_s - x_u) + k_2(x_s - x_b) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_s} &= c(\dot{x}_s - \dot{x}_b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_u} \right) &= m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u + \ddot{x}_b) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_u} &= k_t(x_u - x_0) + k_1(x_u - x_s) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_b} \right) &= b(\ddot{x}_b + \ddot{x}_u) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_b} &= k_2(x_b - x_2) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_b} &= c(\dot{x}_b - \dot{x}_s) \end{aligned}$$

y de esta manera se obtienen las ecuaciones de movimiento que rigen al sistema:

$$\begin{aligned} m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t(x_u - X_0) + k_1(x_u - x_s) &= 0 \\ m_s \ddot{x}_s + c(\dot{x}_s - \dot{x}_b) + k_1(x_s - x_u) + k_2(x_s - x_b) &= 0 \\ b(\ddot{x}_b - \ddot{x}_u) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_s) + k_2(x_b - x_s) &= 0 \end{aligned}$$

---

---

## APÉNDICE B

---

### IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA DE LA RED C3

Las siguientes ecuaciones de movimiento se obtienen del modelo de un cuarto de automóvil al implementar la impedancia mecánica C3.

$$m_u \ddot{x}_u + c(\dot{x}_u - \dot{x}_c) + k_t(x_u - X_0) + k_1(x_u - x_s) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$m_s \ddot{x}_s + k_1(x_s - x_b) + k_2(x_s - x_b) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$b(\ddot{x}_b - \ddot{x}_c) + k_2(x_b - x_s) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$b(\ddot{x}_c - \ddot{x}_b) + c(\dot{x}_c - \dot{x}_u) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ahora, de las ecuaciones obtenidas anteriormente, se procede al desarrollo de los identificadores, de la primera ecuación del sistema (B.1) se tiene la siguiente expresión en el dominio

del tiempo (ya con los tratamientos matemáticos correspondientes),

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2 \int^2 x_u(t) - 4 \int tx_u(t) + t^2 x_u(t) \right\} + \\
 & c \left\{ -2 \int^2 t(x_u(t) - x_c(t)) + \int t^2(x_u(t) - x_c(t)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ \int^2 t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^2 t^2(x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^2 t^2 F_0(t)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

donde,  $m_u$  y  $k_t$  que representa la masa y la rigidez del neumático respectivamente, se toman como datos de entrada al igual que la fuerza de excitación  $F_0$ , por ende, sólo se identifican los parámetros  $c$  y  $k_1$ , visto que, se tiene una ecuación con dos incógnitas se integra una vez está ecuación y por lo tanto, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned}
 & m_u \left\{ 2 \int^3 x_u(t) - 4 \int^2 tx_u(t) + \int t^2 x_u(t) \right\} + \\
 & c \left\{ -2 \int^3 t(x_u(t) - x_c(t)) + \int^2 t^2(x_u(t) - x_c(t)) \right\} + \\
 & k_t \left\{ \int^3 t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^3 t^2(x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^3 t^2 F_0(t)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

luego, este sistema se representa de la siguiente forma:

$$P(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

de la solución se obtienen los identificadores, notar que estas soluciones se cumplen al menos en un pequeño intervalo de tiempo.

$$\left. \begin{aligned}
 c &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\
 k_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]}
 \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

A continuación, sólo se muestran las soluciones de los parámetros restantes, ya que el desarrollo es similar a lo ya antes expuesto, de la ecuación (B.2) se identificarán  $m_s$  y  $k_2$ ,

$$\begin{aligned} m_s \left\{ 2 \int^2 x_s(t) - 4 \int tx_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^2 t^2 (x_s(t) - x_b(t)) \right\} \\ = -k_1 \left\{ \int^2 t^2 (x_s(t) - x_u(t)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

por ser dos incógnitas se integra una vez esta ecuación:

$$\begin{aligned} m_s \left\{ 2 \int^3 x_s(t) - 4 \int^2 tx_s(t) + \int t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^3 t^2 (x_s(t) - x_b(t)) \right\} \\ = -k_1 \left\{ \int^3 t^2 (x_s(t) - x_u(t)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

entonces, de estas dos ecuaciones se tiene:

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ k_2 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

Finalmente, para identificar el parámetro restante  $b$  se toma la ecuación (B.3) y se realiza el desarrollo del identificador y se tiene la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} b \left\{ 2 \int^2 (x_b(t) - x_c(t)) - 4 \int t(x_b(t) - x_c(t)) + t^2 (x_b(t) - x_c(t)) \right\} + \\ k_2 \left\{ \int^2 t^2 (x_b(t) - x_s(t)) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

para concluir, se despeja  $b$  de la ecuación (B.10)

$$b = \frac{-k_2 \left\{ \int^2 t^2 (x_b(t) - x_s(t)) \right\}}{\left\{ 2 \int^2 (x_b(t) - x_c(t)) - 4 \int t(x_b(t) - x_c(t)) + t^2 (x_b(t) - x_c(t)) \right\}} \quad (\text{B.11})$$



---

---

# APÉNDICE C

---

## DIAGRAMAS A BLOQUES

Diagramas a bloques de una suspensión de un cuarto de automóvil implementado la red mecánica C3 basada en inersor.

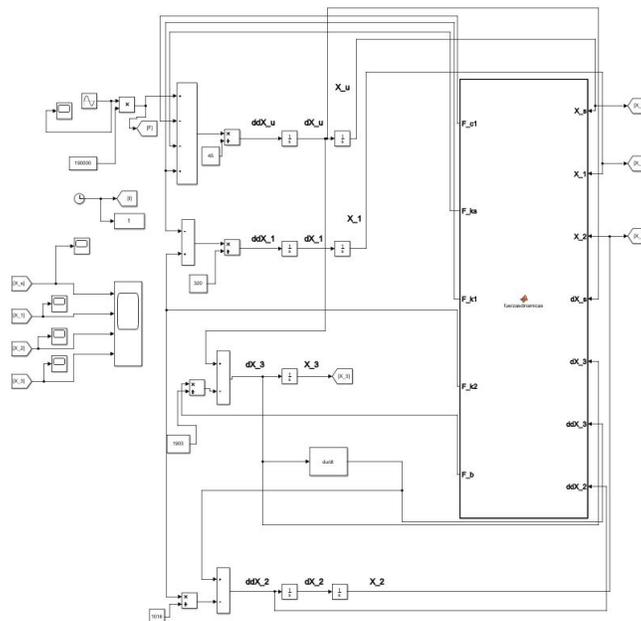


Figura C.1: Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C3.

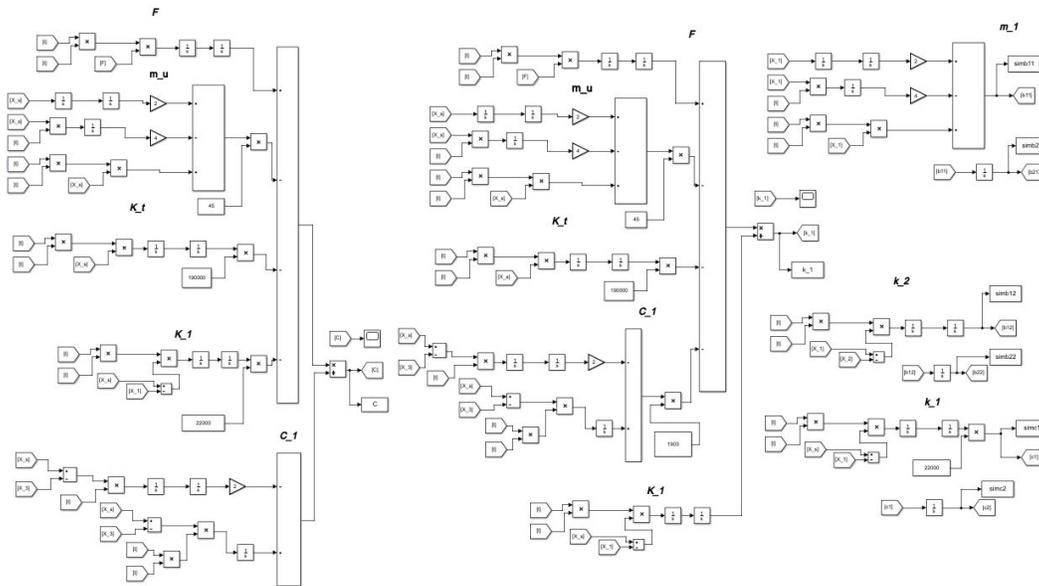


Figura C.2: Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C3.

**Diagramas a bloques de una suspensión de un cuarto de automóvil implementado la red mecánica C4 basada en inersor.**

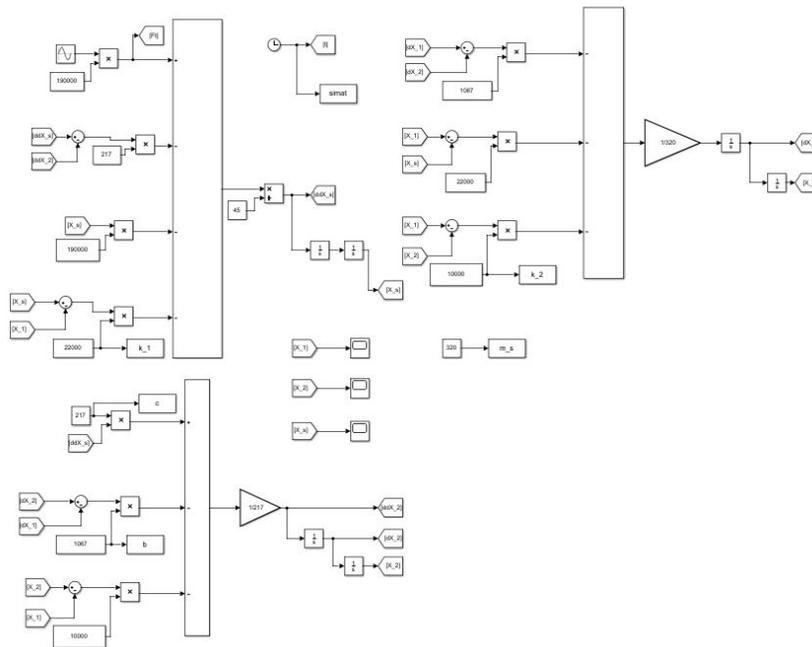


Figura C.3: Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C4.

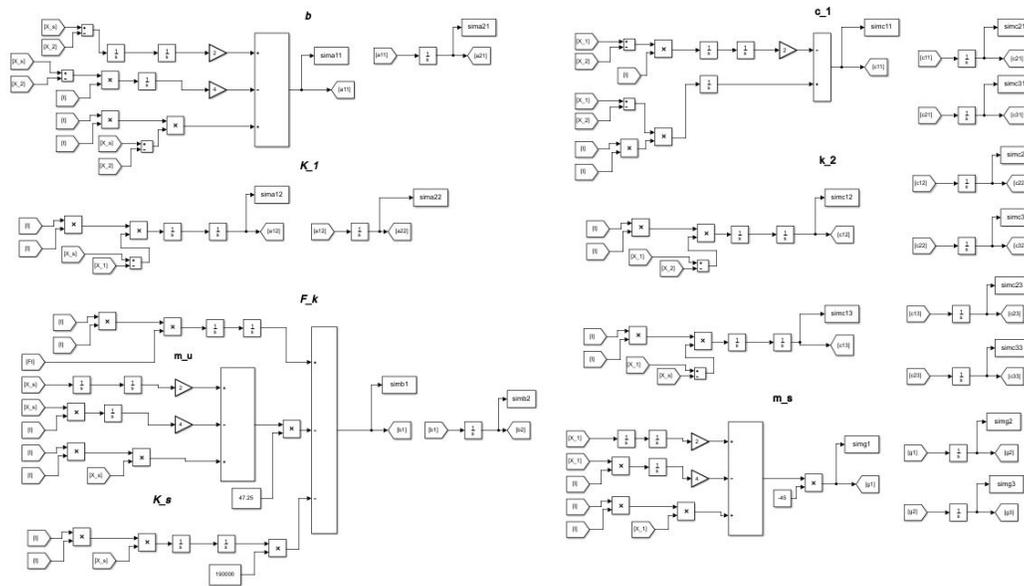


Figura C.4: Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C4.

**Diagramas a bloques de una suspensión de un cuarto de automóvil implementado la red mecánica C6 basada en inersor.**

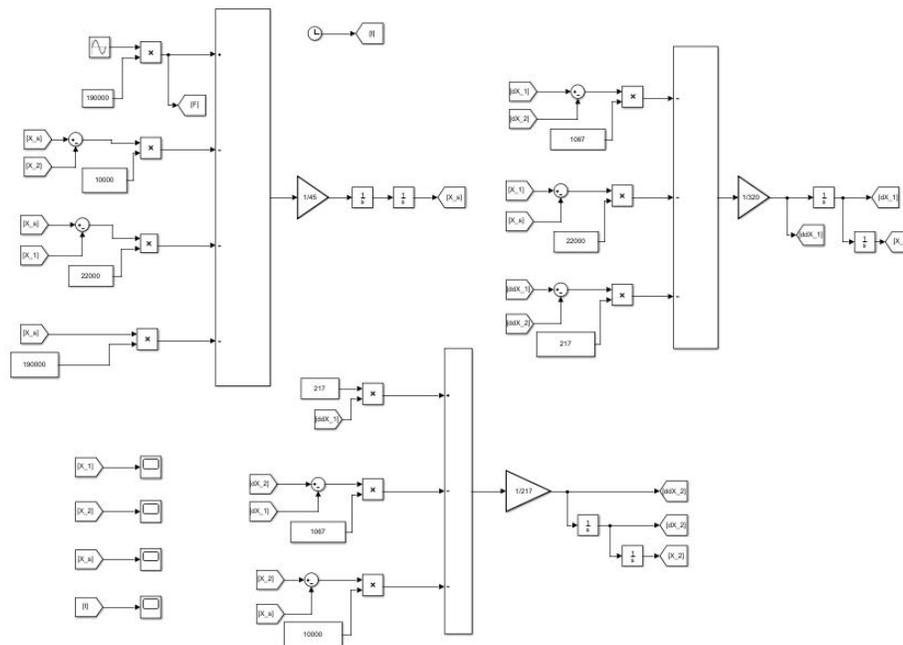


Figura C.5: Modelo de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica basada en inersor C6.

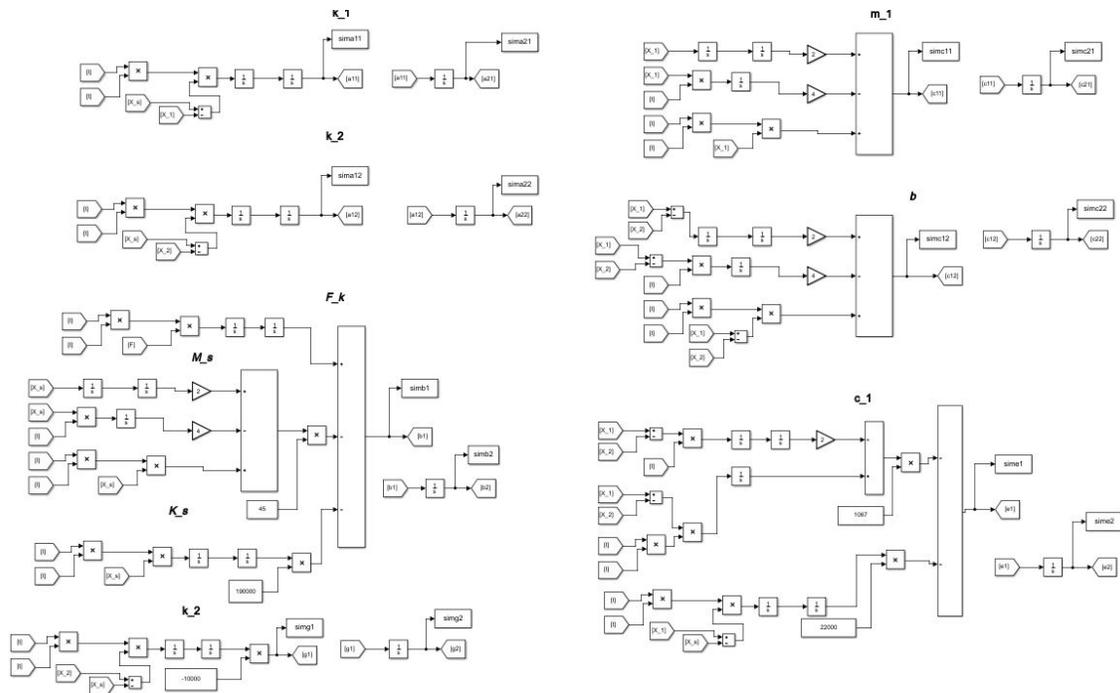


Figura C.6: Aplicación de la técnica de identificación algebraica para estimar los parámetros desconocidos de la suspensión de un cuarto de automóvil implementando la red mecánica C6.

En este apéndice se muestran los códigos realizados en Matlab/Simulink para solucionar los modelos de un cuarto de vehículo implementando las tres distintas redes mecánicas basadas en inersor (C3, C4 y C6) y de igual forma se muestran los programas diseñados para solucionar los identificadores aplicando la técnica de identificación algebraica.

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Neven Alujević, Guoying Zhao, Bruno Depraetere, Paul Sas, Bert Pluymers, and Wim Desmet. H2 optimal vibration control using inertial actuators and a comparison with tuned mass dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 333(18):4073–4083, 2014.
- [2] Mmams Memoirs AMS and PE Electromagnetism. System identification. 1989.
- [3] Eduardo Barredo, Andrés Blanco, Jorge Colín, Victor M. Penagos, Arturo Abúndez, Luis Gerardo Vela, Virgilio Meza, Roller H. Cruz, and Jan Mayén. Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 144:41–53, 2018.
- [4] Eduardo Barredo Hernández et al. Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica. 2020.
- [5] Francisco Beltrán Carbajal, Gerardo Silva Navarro, Hebertt Sira Ramírez, and Andrés Blanco Ortega. Control activo de vibraciones usando identificación algebraica en línea y modos deslizantes. *Computación y Sistemas*, 13(003), 2010.

- 
- [6] Angela Patricia Bravo Vidales. Modelo euler–lagrange de marcha humana: simulaciones numéricas y experimentos. Master’s thesis, 2016.
- [7] Marco Canales, William Paucar, and Noel Juipa. Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica. *RevIA*, 7(4):5–9, 2020.
- [8] Esteban Chávez Conde, Rafael Castillo Rincón, José Mercedes Pablo Altunar, et al. Identificación algebraica en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil. *REPOSITORIO NACIONAL CONACYT*, 2017.
- [9] Michael ZQ Chen and Yinlong Hu. *Inerter and its application in vibration control systems*. Springer, 2019.
- [10] Michael Z.Q. Chen, Christos Papageorgiou, Frank Scheibe, Fu-cheng Wang, and Malcolm C. Smith. The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 9(1):10–26, 2009.
- [11] YL Cheung, Wai On Wong, and Li Cheng. Optimization of a hybrid vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3):494–509, 2013.
- [12] Jorge Colín Ocampo, José Gabriel Mendoza Larios, Andrés Blanco Ortega, Arturo Abúndez Pliego, and Enrique Simón Gutiérrez Wing. Determinación del desbalance en sistemas rotor-cojinete a velocidad constante: Método de identificación algebraica. *Ingeniería mecánica, tecnología y desarrollo*, 5(4):385–394, 2016.
- [13] G Zill Dennis. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. *México*, 1997.
- [14] Simos Evangelou, David JN Limebeer, Robin S Sharp, and Malcolm C Smith. Steering compensation for high-performance motorcycles. In *2004 43rd IEEE Conference on*
-

- Decision and Control (CDC)(IEEE Cat. No. 04CH37601)*, volume 1, pages 749–754. IEEE, 2004.
- [15] Floyd A Firestone. A new analogy between mechanical and electrical systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 4(3):249–267, 1933.
- [16] Michel Fliess, Stefan Fuchshumer, Kurt Schlacher, and Hebertt Sira-Ramirez. Discrete-time linear parametric identification: An algebraic approach. In *2èmes Journées Identification et Modélisation Expérimentale-JIME'2006*, 2006.
- [17] Michel Fliess and Hebertt Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9:151–168, 2003.
- [18] Hermann Frahm. Device for damping vibrations of bodies., April 18 1911. US Patent 989,958.
- [19] Stefan Fuchshumer. *Algebraic linear identification, modelling, and applications of flatness-based control*. na, 2005.
- [20] Pu Gao, Changle Xiang, Hui Liu, and Han Zhou. Reducing variable frequency vibrations in a powertrain system with an adaptive tuned vibration absorber group. *Journal of Sound and Vibration*, 425:82–101, 2018.
- [21] Diana Hernández Alcántara, Ruben Morales-Menendez, Luis Amezquita-Brooks, Olivier Sename, and Luc Dugard. Fault estimation methods for semi-active suspension systems. pages 1–5, 2015.
- [22] Yinlong Hu and Michael ZQ Chen. Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 99:297–307, 2015.
- [23] Yinlong Hu, Michael ZQ Chen, and Zhan Shu. Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration*, 333(8):2212–2225, 2014.

- 
- [24] Kohju Ikago, Kenji Saito, and Norio Inoue. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(3):453–474, 2012.
- [25] S Graham Kelly. *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning, 2012.
- [26] Sung-Yong Kim and Cheol-Ho Lee. Optimum design of linear multiple tuned mass dampers subjected to white-noise base acceleration considering practical configurations. *Engineering Structures*, 171:516–528, 2018.
- [27] Steen Krenk and Jan Høgsberg. Tuned mass absorber on a flexible structure. *Journal of Sound and Vibration*, 333(6):1577–1595, 2014.
- [28] Kefu Liu and Jie Liu. The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result. *Journal of sound and vibration*, 284(3-5):1181–1189, 2005.
- [29] Leonard Meirovitch. *Fundamentals of vibrations*. Waveland Press, 2010.
- [30] JG Mendoza Larios, J Colín Ocampo, A Blanco Ortega, A Abúndez Pliego, and ES Gutiérrez Wing. Balanceo automático de un sistema rotor-cojinete: Identificador algebraico en línea del desbalance para un sistema rotodinámico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 13(3):281–292, 2016.
- [31] J Ormondroyd. The theory of the dynamic vibration absorber. *Trans., ASME, Applied Mechanics*, 50:9–22, 1928.
- [32] Christos Papageorgiou, Neil E Houghton, and Malcolm C Smith. Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 131(1), 2009.
- [33] FAE Pirani. *Mathematical methods of classical mechanics (graduate texts in mathematics, 60)*, 1982.
-

- 
- [34] Kesavan Ramakrishnan, Liunan Yang, Federico Maria Ballo, Massimiliano Gobbi, and Giampiero Mastinu. Multi-objective optimization of road vehicle passive suspensions with inerter. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 50138, page V003T01A007. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [35] Singiresu S Rao. *Vibraciones mecánicas (5a edición)* pearson educación, 2012.
- [36] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2019.
- [37] MZ Ren. A variant design of the dynamic vibration absorber. *Journal of Sound Vibration*, 245(4):762–770, 2001.
- [38] Frank Scheibe and Malcolm C Smith. Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 47(10):1229–1252, 2009.
- [39] Werner Schiehlen. Vehicle and guideway modelling: Suspensions systems. In *Dynamical Analysis of Vehicle Systems*, pages 1–74. Springer, 2009.
- [40] Jesse Lowen Shearer, Arthur T Murphy, and Herbert H Richardson. *Introduction to system dynamics*, volume 44. Addison-Wesley, 1967.
- [41] Yujie Shen, Long Chen, Xiaofeng Yang, Dehua Shi, and Jun Yang. Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, 361:148–158, 2016.
- [42] Rao Singiresu. *Vibraciones mecánicas*, 2012.
- [43] S Rao Singiresu et al. *Mechanical vibrations*. Addison Wesley Boston, MA, 1995.
- [44] Hebertt Sira-Ramirez and M Fliess. On discrete-time uncertain visual based control of planar manipulators: An online algebraic identification approach. In *Proceedings of*
-

- 
- the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, volume 4, pages 4509–4514. IEEE, 2002.
- [45] Herbett J Sira-ramírez, Carlos García-Rodríguez, John Cortés-Romero, and Alberto Luviano-Juárez. *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*, volume 1. Wiley Online Library, 2014.
- [46] Malcolm C Smith. Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on automatic control*, 47(10):1648–1662, 2002.
- [47] Malcolm C Smith and Fu-Cheng Wang. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle system dynamics*, 42(4):235–257, 2004.
- [48] WF Stokey. Shock and vibration handbook, 1989.
- [49] Limin Sun, Dongxiao Hong, and Lin Chen. Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation. *Engineering Structures*, 151:57–67, 2017.
- [50] I Takewaki, S Murakami, S Yoshitomi, and M Tsuji. Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers. *Structural Control and Health Monitoring*, 19(6):590–608, 2012.
- [51] Juan Ramón Trapero Arenas. Técnicas de identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas. aplicaciones en mecatrónica y economía. 2008.
- [52] Fu-Cheng Wang, Min-Feng Hong, and Tz-Chien Lin. Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(1):66–72, 2011.
- [53] Fu-Cheng Wang, Min-Kai Liao, Bo-Huai Liao, Wei-Jiun Su, and Hsiang-An Chan. The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters. *Vehicle System Dynamics*, 47(7):805–830, 2009.
-

- [54] W.O. Wong and Y.L. Cheung. Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion. *Engineering Structures*, 30(1):282–286, 2008.
- [55] Lotfi A Zadeh. From circuit theory to system theory. *Proceedings of the IRE*, 50(5):856–865, 1962.
- [56] Xiao-liang Zhang, Qiao Gao, and Jiamei Nie. The mem-inerter: A new mechanical element with memory. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(6):1687814018778428, 2018.
- [57] GE Zheng, WANG Weirui, LI Guangping, and RAO Daogong. Design, parameter optimisation, and performance analysis of active tuned inerter damper (tid) suspension for vehicle. *Journal of Sound and Vibration*, 525:116750, 2022.
- [58] Dennis G Zill, Ana Elizabeth García Hernández, and Ernesto Filio López. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Number 970-686-487-3. Thomson Learning México, 2002.