



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARAMÉTRICA EN LA CAPACIDAD DE REGENERACIÓN DE ENERGÍA VIBRATORIA EN SUSPENSIONES AUTOMOTRICES REGENERATIVAS

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE; **INGENIERO MECÁNICO AUTOMOTRIZ**

PRESENTA:
JAZZIEL YAIR SANTIAGO SANTIAGO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDUARDO BARREDO HERNÁNDEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ GABRIEL MENDOZA LARIOS

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, JULIO, 2023

Dedicatoria

A mi madre, Gloria Santiago Ramírez, por su amor incondicional y siempre motivarme a salir adelante. A mi familia, por apoyarme y creer en mí. De igual forma, en memoria de mi abuelo Julio Santiago López.

Agradecimientos

A la Universidad tecnología de la Mixteca que me brindo la oportunidad de adquirir los conocimientos necesarios que hoy me permiten obtener el título universitario. Por otro lado, mis agradecimientos más sinceros al Dr. Eduardo Barredo Hernández por confiar en mí, brindarme su amistad y por su valioso tiempo invertido en el mejoramiento de la calidad de este trabajo de investigación. Agradezco a la Ing. Irene Ávila Sánchez por estar a mi lado para apoyarme y alentarme cuando lo necesitaba. Por último, agradecerles a todos mis amigos por las horas compartidas, por los trabajos realizados en conjunto y por las historias vividas.

Resumen

Debido al incremento del consumo de energía a nivel mundial, se han creado recientemente nuevas áreas de investigación científica relacionadas a nuevas formas de regeneración y conversión de energía con el fin de disminuir el consumo excesivo de los combustibles fósiles, por mencionar algunas: recuperación de energía térmica disipada (Recovery of Wasted Heat Energy) por el motor de combustión interna, regeneración de energía por frenado (Kinetic Energy Recovery System/KERs), y la regeneración de la energía vibratoria del sistema de suspensión del vehículo mediante los novedosos amortiguadores regenerativos. Esta última área de investigación prominente ha llamado mucho la atención en los últimos años, puesto que se ha demostrado que existe una gran cantidad de energía cinética que se disipa en el sistema de suspensión automotriz en los amortiguadores de fluido viscoso. Esta energía se puede regenerar mediante el uso correcto de mecanismos de conversión de flujo de energía mecánica bidireccional en uno unidireccional y, posteriormente, ser transformada en energía eléctrica útil mediante generadores eléctricos mono y/o trifásicos. Por lo tanto, este trabajo de investigación tiene como objetivo demostrar la capacidad de regeneración de energía vibratoria de los amortiguadores regenerativos electromagnéticos, electrohidráulicos y electromecánicos tanto en el dominio del tiempo como en el dominio frecuencial, considerando perfiles artificiales de carretera. Además, utilizando la técnica de simulación Monte Carlo se realiza un análisis de sensibilidad paramétrica para identificar los parámetros del AR que hacen posible incrementar el potencial de recolección de energía vibratoria. Por otro lado, por medio del balance de energía estocástica y aplicando la técnica de optimización de la norma \mathcal{H}_2 , se logra demostrar que al modificar el valor de las resistencias eléctricas del circuito de recolección, así como, la relación de transmisión para el amortiguador electromecánico, se logra incrementar considerablemente la potencia eléctrica recolectada, sin que esto implique una degradación significativa en los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión, tales como: el índice de la reducción de la aceleración del chasis, el de la deflexión del sistema de suspensión y el de la carga dinámica del neumático. Adicionalmente, se realiza la cuantificación de energía regenerada de los AR considerando perfiles artificiales de carretera basado en los ciclos de velocidad de conducción tanto transitorios como estacionarios.

Abstract

Because of the increase in energy consumption worldwide, new areas of scientific research have recently been created related to new forms of energy regeneration and conversion in order to decrease the excessive consumption of fossil fuels, to mention a few: the recovery of heat energy wasted by the internal combustion engine, regeneration of braking energy (kinetic energy recovery system), and regeneration of the vibrational energy of the vehicle suspension system through novel regenerative shock absorbers. This latter prominent area of research has attracted much attention in recent years, as it has been shown that there is a large amount of kinetic energy that is dissipated in the automotive suspension system by means of viscous fluid dampers. This energy can be regenerated by the correct use of two-way to one-way mechanical energy flow conversion mechanisms, and subsequently it can be transformed into useful electrical energy by means of single-phase and/or three-phase electrical generators. Therefore, this research work aims to demonstrate the electrical energy regeneration capability of electromagnetic, electrohydraulic, and electromechanical regenerative shock absorbers via time domain and frequency domain mathematical analysis. In addition, by means of Monte Carlo simulation technique, a parametric sensitivity analysis is performed to identify the AR physical parameters that allow increasing the vibrational energy harvesting potential. Furthermore, by means of stochastic energy balance and applying the \mathcal{H}_2 criterion, it was possible to demonstrate that by modifying both the value of the energy harvesting circuit's electrical resistances and the electromechanical AR's transmission ratio, it is possible to considerably increase the power to be regenerated, without yielding a detrimental effect on the suspension system's performance indices such as: comfort performance index, suspension deflection performance index and that of the tyre dynamic load. Additionally, the energy harvesting potential rendered by the ARs is finally quantified via the consideration of non-stationary and stationary driving velocity cycles.

Nomenclatura

Notación	Descripción
AR	Amortiguador regenerativo.
Bl	Coefficiente de acoplamiento electromecánico.
c_L	Amortiguamiento equivalente del mecanismo de conversión de energía del AR electromecánico.
F_{LR}	Fuerza de Lorenz.
i	Relación de transmisión del AR electromecánico.
J_{am}	Inercia rotacional del brazo motriz del AR electromecánico.
J_{FW}	Inercia rotacional del volante de inercia.
J_g	Inercia rotacional del generador eléctrico.
J_p	Inercia rotacional del engranaje planetario.
J_{pcr}	Inercia rotacional de la carcasa del tren de engranajes planetario.
J_s	Inercia rotacional del engranaje solar.
k_e	Constante del generador eléctrico.
L_e	Inductancia de la bobina.
r	Radio equivalente.
R_e	Resistencia externa o resistencia de carga del circuito de recolección de energía.
R_i	Resistencia interna de la bobina.
m_p	Masa del engranaje planetario.
m_s	Masa equivalente o inercia del AR electromecánico.
m_{tp}	Masa de la placa superior del mecanismo del AR electromecánico.
r_p	Radio del engranaje planetario.
A_c	Área de la sección del anillo del pistón del AR electrohidráulico.
A_g	Área de la sección del pistón.
$A_{apertura,i}$	Área de apertura de la válvula.
A_r	Área de la sección transversal del vástago del pistón.
$A_{válvula,i}$	Área del disco de la válvula.
$B_{válvula,i}$	Ancho del disco de la válvula.
C_d	Coefficiente de descarga del aceite del AR electrohidráulico.
D	Diámetro del pistón del actuador hidráulico.
$d_{tubería}$	Diámetro de la tubería hidráulica.
$d_{vástago}$	Diámetro del vástago del pistón hidráulico.
$D_{válvula,i}$	Diámetro del disco de la válvula i.
F	Fuerza total del AR electrohidráulico en el modelo en un cuarto del vehículo.
F_f	Fuerza total del AR electrohidráulico frontal en el modelo de medio vehículo.
F_{fl}	Fuerza total del AR electrohidráulico delantero izquierdo en el modelo del vehículo completo.
F_{fr}	Fuerza total del AR electrohidráulico delantero derecho en el modelo del vehículo completo.
F_{pasiva}	Fuerza de amortiguamiento pasiva del AR hidráulico.
F_r	Fuerza total del AR electrohidráulico trasero en el modelo de medio vehículo.
F_{rl}	Fuerza total del AR electrohidráulico trasero izquierdo.
F_{rr}	Fuerza total del AR electrohidráulico trasero derecho.
$F_{semi-activa}$	Fuerza de amortiguamiento controlable del AR electrohidráulico.
k_t	Constante de torque del generador hidráulico.
$K_{válvula,i}$	Rigidez del disco de la válvula i.
$L_{tubería}$	Longitud de la tubería hidráulica.
n	Índice politrópico del proceso térmico del aceite hidráulico.
P_0	Presión inicial del acumulador hidráulico.

P inferior, controlable	Presión inferior controlable del actuador hidráulico.
P_t	Presión del acumulador hidráulico en el dominio del tiempo.
P superior, controlable	Presión superior controlable del actuador hidráulico.
q	Desplazamiento del motor hidráulico.
Q_{motor}	Caudal volumétrico a través del motor hidráulico.
$Q_{tubería}$	Caudal volumétrico de aceite a través de la tubería hidráulica.
$Q_{válvula_1}$	Caudal volumétrico a través de la válvula de retención 1.
$Q_{válvula_2}$	Caudal volumétrico a través de la válvula de retención 2.
$T_{generador}$	Torque del generador hidráulico.
T_{motor}	Torque del motor hidráulico.
$v(t)$	Velocidad del vástago AR electrohidráulico.
V_0	Volumen inicial del acumulador.
V_t	Volumen del acumulador en el dominio del tiempo.
ΔP_{motor}	Diferencial de presión a la entrada y salida del motor hidráulico.
ΔP motor, controlable	Diferencial de presión controlable.
$\Delta P_{motor,pasiva}$	Diferencial de presión pasiva.
$\Delta P_{tubería}$	Diferencial de presión en la tubería hidráulica.
$\Delta P_{válvula\ i}$	Caída de presión en la válvula hidráulica.
m_c	Masa de la bobina del AR electromagnético.
m_m	Masa del conjunto de imanes del AR electromagnético.
c_1	Coefficiente de amortiguamiento del neumático del modelo dinámico del cuarto de vehículo.
c_{1f}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático frontal del modelo de medio vehículo.
c_{1r}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático trasero del modelo de medio vehículo.
c_2	Coefficiente de amortiguamiento del amortiguador de fluido viscoso del sistema de suspensión del modelo del cuarto de vehículo.
c_{2f}	Coefficiente de amortiguamiento del amortiguador delantero del medio vehículo.
c_{2r}	Coefficiente de amortiguamiento del amortiguador trasero del medio vehículo.
c_{sfl}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión delantera izquierda.
c_{sfr}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión delantera derecha.
c_{srl}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión trasera izquierda.
c_{srr}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión trasera derecha.
c_{tfl}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático delantero izquierdo.
c_{tfr}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático delantero derecho.
c_{trl}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático trasero izquierdo.
c_{trr}	Coefficiente de amortiguamiento del neumático trasero derecho.
I_a	Inercia rotacional del vehículo completo medido desde el eje a-a.
I_b	Inercia rotacional del vehículo completo medido desde el eje b-b.
J	Inercia rotacional del medio vehículo.
k_1	Coefficiente de rigidez del neumático del cuarto de vehículo.
k_{1f}	Coefficiente de rigidez del neumático delantero del modelo dinámico de medio vehículo.
k_{1r}	Coefficiente de rigidez del neumático trasero del modelo dinámico de medio vehículo.
k_2	Coefficiente de rigidez de la suspensión de un cuarto de vehículo.
k_{2f}	Coefficiente de rigidez de la suspensión delantera de medio vehículo.
k_{2r}	Coefficiente de rigidez de la suspensión trasera de medio vehículo.
k_{sfl}	Coefficiente de rigidez de la suspensión delantera izquierda en el modelo del vehículo completo.

k_{sfr}	Coefficiente de rigidez de la suspensión delantera derecha del modelo del vehículo completo.
k_{srl}	Coefficiente de rigidez de la suspensión trasera izquierda.
k_{srr}	Coefficiente de rigidez de la suspensión trasera derecha.
l_b	Distancia entre el centro de gravedad del vehículo y el eje trasero.
l_f	Distancia entre el centro de gravedad del vehículo y el eje delantero.
l_l	Distancia entre el centro de gravedad del vehículo y las ruedas izquierdas.
l_r	Distancia entre el centro de gravedad del vehículo y las ruedas derechas.
m	Masa de un cuarto de vehículo.
m_1	Masa no suspendida del modelo de un cuarto de vehículo.
m_{1f}	Masa no suspendida delantera del modelo de un medio de vehículo.
m_2	Masa de la media carrocería del vehículo.
m_b	Masa de la carrocería completa del vehículo.
m_{fl}	Masa no suspendida delantera izquierda del vehículo completo.
m_{fr}	Masa no suspendida delantera derecha del vehículo completo.
m_{rl}	Masa no suspendida trasera izquierda del vehículo completo.
m_{rr}	Masa no suspendida trasera derecha del vehículo completo.
U	Voltaje generado por AR en el modelo del cuarto del vehículo.
U_f	Voltaje generado por el AR delantero del modelo de medio vehículo.
U_{fl}	Voltaje generado por el AR delantero izquierdo del modelo del vehículo completo.
U_{fr}	Voltaje generado por el AR delantero derecho del modelo del vehículo completo.
U_r	Voltaje generado por el AR trasero del modelo de medio vehículo.
U_{rl}	Voltaje generado por el AR trasero izquierdo del modelo del vehículo completo.
U_{rr}	Voltaje generado por el AR trasero derecho del modelo del vehículo completo.
$x_g(t)$	Desplazamiento aleatorio del perfil irregular de la carretera del modelo de un cuarto del vehículo.
y_b	Desplazamiento de la carrocería del vehículo completo.
$x_{gf}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda delantera en el medio vehículo.
$x_{gr}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda trasera en el medio vehículo.
$x_{tfl}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda delantera izquierda descrito en el modelo del vehículo completo.
$x_{tfr}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda delantera derecha descrito en el modelo del vehículo completo.
$x_{trl}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda trasera izquierda descrito en el modelo del vehículo completo.
$x_{trr}(t)$	Desplazamiento del perfil irregular de la carretera de la rueda trasera derecha.

Simbología

Notación	Descripción
μ	Viscosidad dinámica del aceite hidráulico
α	Posición angular de cabeceo del vehículo completo.
β	Posición angular de balanceo del vehículo completo.
θ	Posición angular de la masa suspendida del medio vehículo.
η_m	Eficiencia mecánica de la bomba hidráulica.
η_{pg}	Eficiencia del engranaje planetario.
η_{tp}	Eficiencia de la placa superior.
η_v	Eficiencia volumétrica de la bomba hidráulica.
$\omega_{\text{generador}}$	Velocidad de rotación del generador eléctrico-hidráulico.
ω_{motor}	Velocidad de rotación del motor hidráulico.
ρ	Densidad del aceite hidráulico.

Índice General

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Nomenclatura	V
Simbología	VIII
Índice General	1
Índice de Figuras	3
Índice de tablas	8
1. Introducción	9
1.1 Planteamiento del problema.....	11
1.2 Justificación.....	12
1.3 Hipótesis.....	13
1.4 Objetivos	13
1.4.1 <i>Objetivo general</i>	13
1.4.2 <i>Objetivos específicos</i>	13
1.5 Metas.....	14
1.6 Metodología.....	14
1.6.1 <i>Consideraciones y limitaciones de la investigación</i>	16
2. Estado del arte	20
2.1 Suspensiones automotrices.....	20
2.2 Suspensiones regenerativas automotrices.....	21
2.2.1 <i>Amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales</i>	22
2.2.2 <i>Amortiguadores regenerativos electromecánicos</i>	25
2.2.3 <i>Amortiguadores regenerativos electrohidráulicos</i>	36
3. Marco teórico	40
3.1 Ecuaciones de Lagrange.....	40
3.1.1 <i>Coordenadas generalizadas</i>	40
3.1.2 <i>Leyes de conservación</i>	41
3.2 Modelos dinámicos del vehículo.....	41
3.2.1 <i>Modelo de la carretera</i>	42
3.2.2 <i>Modelo dinámico de un cuarto de vehículo</i>	42
3.2.3 <i>Modelo dinámico de medio vehículo</i>	43
3.2.4 <i>Modelo dinámico del vehículo completo</i>	44
3.3 Procesos estocásticos.....	46
3.3.1 <i>Proceso estacionario</i>	47
3.4 Criterio de optimización \mathcal{H}^2	48
3.5 Ley de Kirchhoff.....	49
3.5.1 <i>Análisis de circuitos</i>	49
3.5.2 <i>Ley de voltaje de Kirchhoff</i>	50
3.5.3 <i>Ley de la corriente de Kirchhoff</i>	50

3.6	Modelado matemático de un cuarto, medio y vehículo completo con AR acoplado a la suspensión automotriz.....	51
3.6.1	<i>AR electromecánico</i>	51
3.6.2	<i>AR electromagnético</i>	55
3.6.3	<i>AR electrohidráulico</i>	57
3.7	Comparación de la potencia regenerada por los ARs utilizando un motor monofásico y/o trifásico. 63	
3.8	Balace de energía estocástica.....	64
3.8.1	<i>Método 1- Derivación de la ecuación de energía absoluta</i>	64
3.8.2	<i>Método 2- Derivación de la ecuación de energía relativa</i>	65
3.8.3	<i>Balace de energía basado en la conservación estadística de la energía</i>	66
3.9	Método de simulación Montecarlo en el análisis de sensibilidad paramétrica.....	71
4.	Simulación numérica, Optimización y análisis de sensibilidad de los amortiguadores regenerativos.	74
4.1	Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de los amortiguadores regenerativos.....	74
4.1.1	<i>Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para un cuarto de vehículo</i>	74
4.1.2	<i>Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para el modelo de medio vehículo con ARs</i> ..	76
4.1.3	<i>Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para el modelo de vehículo completo</i>	77
4.2	Simulación numérica en el dominio del tiempo de la potencia eléctrica de los ARs.....	79
4.2.1	<i>Simulación numérica en el dominio del tiempo para un cuarto de vehículo</i>	79
4.2.2	<i>Simulación numérica en el dominio del tiempo para el modelo de medio vehículo con ARs</i>	80
4.2.3	<i>Simulación numérica en el dominio del tiempo para el modelo de vehículo completo con ARs</i>	81
4.3	Análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método Montecarlo.....	84
4.4	Optimización del AR con la norma $\mathcal{H}2$	88
4.5	Evaluación de los índices de rendimiento dinámicos del vehículo.....	93
4.6	Simulación numérica basada en ciclos de conducción y niveles de rugosidad de la carretera.....	100
Capítulo 5.	117
5.	Conclusión	117
Apéndice A:	Deducción del coeficiente de amortiguamiento equivalente CL del AR electromecánico.	119
Apéndice B:	Coefficientes de la matriz para el análisis frecuencial de la potencia regenerada en los amortiguadores regenerativos (sección 4.1).	120
Apéndice C:	Densidad espectral de potencia (PSD) de la ecuación diferencial estocástica ... 122	
Apéndice D:	Expresiones matemáticas de los índices de rendimiento para suspensiones regenerativas, utilizando el enfoque de las integrales de vibración aleatoria.	123
Referencias	127

Índice de Figuras

Figura 1.1 Pérdidas de energía en un motor CI [1]. -----	9
Figura 1.2 Metodología de la investigación tecnológica. -----	14
Figura 1.3 a) Diseño del AR electromecánico con mecanismo tipo brazo dentado y b) circuito de recolección de energía [3]. -----	16
Figura 1.4 a) Diseño del AR electromagnético y b) Circuito de captación de energía [3]. -----	16
Figura 1.5 Diseño del AR electrohidráulico y b) Circuito de captación de energía [4].-----	17
Figura 2.1 Potencial de recolección de energía vibratoria para diferentes tipos de vehículos [13]. -	22
Figura 2.2 Amortiguador electromagnético lineal de accionamiento directo [17]. -----	23
Figura 2.3 Diseño del amortiguador híbrido; a) Vista isométrica y b) Vista seccionada [19]. -----	24
Figura 2.4 Diagrama esquemático del amortiguador electromagnético híbrido [23]. -----	25
Figura 2.5 Sección transversal del modelo tipo 8 ranuras - 8 polos [24].-----	25
Figura 2.6 Diseño conceptual de amortiguador electromecánico tipo tornillo-bola [27].-----	26
Figura 2.7 Prototipo de amortiguador basado en un motor eléctrico rotatorio CC: 1) I/O, 2) Sensor de posición, 3) Estator, 4) Imán Permanente, 5) Rotor, 6) Soporte elástico anti-impacto, 7) Bobinado de inducción, 8) Tuerca esférica, 9) Tornillo, 10) Amortiguador de compresión, 11) sujetador [29]. --	26
Figura 2.8 Diseño del AR con múltiples transductores. 1) Anillo de montaje superior, 2) generador eléctrico, 3) caja de cambios, 4) acoplamiento mecánico, 5) placa fija, 6) tuerca del tornillo, 7) husillo de bolas, 8) montaje inferior, 9) bobinas, 10) imanes permanentes, 11) carcasa [35]. -----	28
Figura 2.9 Esquema del AR electromecánico: (a) modelo 3D, (b) AR conectado al sistema de suspensión, (c) diagrama del sistema de conversión de energía basado en múltiples mecanismos tipo tornillo-bola [36]. -----	28
Figura 2.10 Estructura del AR electromecánico con múltiples mecanismos tipo tornillo de bola [37]. -----	29
Figura 2.11 Diseño tradicional del AR electromecánico basado en el mecanismo tipo piñón-cremallera [40]. -----	29
Figura 2.12 Estructura interna del mecanismo de rectificación de movimiento. 1) Cremallera, 2) Rodillo, 3) Piñón, 4) Engranajes planetarios y generador eléctrico, 5) Cojinetes de empuje, 6) Embragues de rodillos, 7) Rodamientos de bolas, 8) Engranajes cónicos [41]. -----	30
Figura 2.13 AR electromecánico con mecanismo de conversión de movimiento basado en dos pares de mecanismos tipo piñón – cremallera [43]. -----	31
Figura 2.14 Prototipo del mecanismo tipo tornillo algebraico [46]. -----	32
Figura 2.15 Prototipo del AR electromecánico basado en el mecanismo tipo brazo dentado de accionamiento indirecto [3].-----	33
Figura 2.16 AR electromecánico con mecanismo de engranes helicoidales [52].-----	33
Figura 2.17 Estructura del AR electromecánico basado en cremalleras y engranes helicoidales. 1) cremallera helicoidal, 2) engrane helicoidal para producir rotación horaria, 3) embrague	

unidireccional, 4) engrane helicoidal para generar rotación antihoraria, 5) eje de accionamiento, 6) placa circular inferior, 7) acoplador mecánico, 8) caja de engranajes planetarios y 9) el generador eléctrico [54].	34
Figura 2.18 (a) Configuración estructural del AR y (b) Principio de funcionamiento del AR. (Las líneas rojas representan la vibración ascendente y el correspondiente sentido de giro de los componentes, mientras que las líneas azules representan el caso de vibración descendente. Además, las líneas negras indican que el sentido de giro no cambia con la vibración externa) [28].	35
Figura 2.19 a) Detalles de la sección transversal del AR con mecanismo piñón-cremallera y b) Posición de instalación del AR en la rueda [59].	36
Figura 2.20 AR electrohidráulico con mecanismo de rectificación de movimiento: a) dispositivo en 3D y b) circuito hidráulico de recolección de energía [65].	37
Figura 2.21 Amortiguador regenerativo electrohidráulico de doble tubo con mecanismo de rectificación de movimiento [4].	38
Figura 3.1 Representación del modelo de un cuarto de vehículo.	42
Figura 3.2 Representación cinemática del modelo de medio vehículo.	43
Figura 3.3 Representación cinemática del modelo de vehículo completo.	46
Figura 3.4 a) Señal estacionaria y, b) No estacionaria [81].	48
Figura 3.5 Circuito RLC (Resistencia - Inductancia - Capacitancia).	49
Figura 3.6 Representación de una malla creada por los nodos A, B, C y D.	50
Figura 3.7 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo con AR electromecánico de mecanismo brazo-dentado.	53
Figura 3.8 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo basado en el AR electromagnético.	56
Figura 3.9 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto del vehículo con AR electrohidráulico.	61
Figura 3.10 Comparación de la densidad de recolección de energía vibratoria de un generador DC sin escobillas (trifásico) y un generador monofásico.	63
Figura 3.11 Modelo genérico del cuarto de vehículo compuesto de n masas inerciales [83].	66
Figura 3.12 Análisis de sensibilidad gráfico en el dominio del tiempo de la capacidad de recolección de energía del amortiguador electromagnético.	69
Figura 3.13 Análisis de sensibilidad paramétrica en el dominio del tiempo para los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión automotriz basado en el AR electromagnético, cuando se varían los parámetros físicos del circuito de recolección de energía.	70
Figura 3.14 Análisis de sensibilidad paramétrica en el dominio frecuencial para los índices de rendimiento dinámico del modelo de un cuarto de vehículo con suspensión regenerativa electromagnética.	70
Figura 3.15 Funciones de distribución de probabilidad: a) distribución uniforme y b) distribución normal gaussiana [87].	72
Figura 3.16 Diagrama de flujo de la metodología de simulación Monte Carlo para el análisis de sensibilidad paramétrica del potencial de recolección de energía vibratoria [88].	73

Figura 4.1 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia del AR a) electromecánico y b) electromagnético.-----	76
Figura 4.2 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia regenerada en el modelo de medio vehículo del AR a) electromecánico y b) electromagnético. -----	77
Figura 4.3 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia regenerada en el modelo de vehículo completo del AR a) electromecánico y b) electromagnético. -----	78
Figura 4.4 Potencia eléctrica instantánea del modelo de un cuarto de vehículo con AR a) electromecánico - electrohidráulico, b) electromagnético. -----	80
Figura 4.5 Potencia eléctrica instantánea del modelo de medio vehículo con los amortiguadores regenerativos a) electromecánico, b) electrohidráulico y c) electromagnético.-----	81
Figura 4.6 Programación realizada en Matlab/Simulink del modelo dinámico del vehículo completo con AR.-----	82
Figura 4.7 Potencia eléctrica instantánea del modelo completo del vehículo con los amortiguadores regenerativos a) electromecánico, b) electrohidráulico y c) electromagnético.-----	83
Figura 4.8 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud vibratoria de excitación (0.035 m), para la variación de BI desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar típica del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético. -----	85
Figura 4.10 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud vibratoria de excitación (0.035 m), para la variación de R_e desde su valor original como valor medio hasta una desviación típica del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético.-----	86
Figura 4.11 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud de excitación (0.035 m), para la variación de R_i desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético. -----	87
Figura 4.12 Relación entre la potencia de salida y la amplitud de excitación, para la variación de la relación de transmisión i desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%.-----	87
Figura 4.13 Relación entre la potencia de salida y la amplitud de excitación para la variación del radio del rotor del generador r_g desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%.-----	88
Figura 4.14 Superficies y curvas de contorno del índice de rendimiento de la potencia eléctrica producida por el AR electromecánico, obtenidas a partir de la variación de la relación de transmisión i . -----	91
Figura 4.15: Superficies y curvas de contorno del índice de rendimiento de la potencia eléctrica producida por el AR electromecánico, obtenidas a partir de la variación de la resistencia interna de la bobina R_i .-----	92
Figura 4.16: Análisis de sensibilidad paramétrica de los índices de rendimiento del AR electromecánico variando la resistencia externa R_e y la resistencia interna R_i .-----	95
Figura 4.17 Fuerza electromagnética producida por los ARs electromagnético y electromecánico. -	95
Figura 4.18 Análisis de sensibilidad paramétrica de los índices de rendimiento dinámico del AR electromecánico variando tanto la resistencia externa R_e como la relación de transmisión i . -----	96

Figura 4.19: Sistema de suspensión automotriz basada en inersor (The inerter): a) Grados de libertad del cuerpo de un vehículo sin restricciones considerando a CG como su centro de gravedad, b) modelo de un cuarto de vehículo, c) disipador de energía vibratoria basado en la conexión C3 en serie amortiguador-inersor-resorte y d) disipador de energía vibratoria basado en la conexión TID.-----	98
Figura 4.20: Representación gráfica de los índices normalizados como una función de la inercia rotacional del inersor.-----	99
Figura 4.21 Análisis paramétrico del índice normalizado J_N , cuando se varían a) la resistencia interna R_i – Resistencia externa R_e y b) la relación de transmisión i – Resistencia externa R_e . -----	100
Figura 4.22 Perfiles artificiales de carretera. -----	101
Figura 4.23 Perfiles artificiales de carreteras clase C y D con sus respectivos retardos. -----	102
Figura 4.24 Potencia eléctrica instantánea producida por los ARs electromecánicos acoplados al modelo dinámico del vehículo completo, considerando que la velocidad de conducción es de 90 km/h: a) potencia eléctrica cosechada por la suspensión regenerativa frontal, mientras que b) es para la trasera. -----	102
Figura 4.25: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electrohidráulico acoplado al modelo de vehículo completo: a) suspensión regenerativa frontal y b) trasera. -----	103
Figura 4.26: Potencia eléctrica instantánea producida tanto en la suspensión regenerativa electromagnética a) frontal y b) trasera del vehículo, considerando la velocidad de conducción constante de 90 km/h. -----	104
Figura 4.27 Representación gráfica del ciclo de conducción NEDC y EUDC. -----	104
Figura 4.28 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D utilizando ciclos de conducción NEDC y EUDC. -----	105
Figura 4.29: Gráfica del ciclo de velocidad de conducción transitorio WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure). -----	105
Figura 4.30 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D con ciclo de conducción WLTP.-----	105
Figura 4.31 Gráfica del ciclo de velocidad de conducción transitorio FTP (Federal Test Procedure). -----	106
Figura 4.32 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D considerando un ciclo transitorio FTP (Federal Test Procedure). -----	106
Figura 4.33 Ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test). -----	106
Figura 4.34 Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test).-----	107
Figura 4.35 Perfiles artificiales para la carretera clase C con retardo variable considerando el ciclo transitorio HWFET. -----	107
Figura 4.36: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromecánico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción NEDC – EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica. -----	108
Figura 4.37: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electrohidráulico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de	

conducción NEDC – EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica. -----	109
Figura 4.38: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromagnético localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción NEDC – EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica. -----	109
Figura 4.39: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromecánico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción WLTP. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica. -----	110
Figura 4.40: Potencia instantánea regenerada por el AR electrohidráulico en la suspensión delantera, considerando el ciclo de conducción WLTP. (a) potencia instantánea regenerada en el eje frontal, (b) potencia instantánea regenerada en el eje trasero del vehículo. -----	111
Figura 4.41 Potencia instantánea regenerada por el amortiguador electromagnético en la suspensión delantera con el ciclo de conducción WLTP. (a) potencia instantánea con parámetros iniciales, (b) potencia instantánea con amortiguador optimizado. -----	112
Figura 4.42: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético considerando el ciclo de conducción FTP. Con (a) parámetros reportador en la literatura, (b) parámetros optimizados mediante el balance de energía estocástica. -----	113
Figura 4.43: Potencia instantánea regenerada por el AR electrohidráulico considerando el ciclo de conducción FTP. (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados.-----	113
Figura 4.44: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético considerando el ciclo de conducción FTP. (a) AR con parámetros convencionales, (b) AR con parámetros optimizados. ---	114
Figura 4.45: Potencia instantánea regenerada por el AR electromecánico en la suspensión frontal, considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados. -----	115
Figura 4.46: Potencia instantánea regenerada considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) utilizando los parámetros iniciales del AR electrohidráulico y (b) con parámetros optimizados obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.-	115
Figura 4.47: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético en la suspensión frontal considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados utilizando la técnica del balance de energía estocástica. -----	116

Índice de tablas

Tabla 1.1 Parámetros de simulación del vehículo completo [3].	17
Tabla 1.2 Parámetros del AR electromecánico [3].	18
Tabla 1.3 Parámetros del AR electromagnético [3].	18
Tabla 1.4 Parámetros del AR electrohidráulico [4].	19
Tabla 4.1 Potencia eléctrica RMS producida por los amortiguadores regenerativos cuando se acoplan al modelo del vehículo completo.	83
Tabla 4.2 Parámetros de simulación de las redes mecánicas acopladas al modelo de un cuarto de vehículo.	98
Tabla 4.3 Niveles de rugosidad de la carretera clasificados por la norma ISO 8608 [2].	100

Capítulo 1

1. Introducción

El incremento en el consumo de los combustibles fósiles como medio de energía para la propulsión de los vehículos basados en máquinas de combustión interna (IC) ha originado que la humanidad busque alternativas para contrarrestar los efectos nocivos al medio ambiente que ocasionan las emisiones contaminantes. En la literatura, se han reportado tanto resultados teóricos como experimentales relacionados a la eficiencia de las máquinas de combustión interna, los cuales reafirman que la mayor parte de la energía térmica que se transforma en energía mecánica por medio de los elementos móviles del motor IC se desperdicia debido a los procesos térmicos irreversibles que ocurren dentro del motor IC. Además, se sabe que en condiciones óptimas de operación de un motor IC de 4 tiempos (Otto), la máquina alcanza una eficiencia máxima alrededor del 56.5%. Sin embargo, contrarrestar las pérdidas de energía en los diferentes subsistemas del vehículo es un enorme desafío para la industria automotriz que aún no se ha resuelto del todo. Nótese que en la Figura 1.1, la energía efectiva que propulsa al vehículo es de tan solo el 25%, es decir, que el 75% de la energía total se disipa en forma de calor (Taïpe-Defaz et al., 2021) [1].

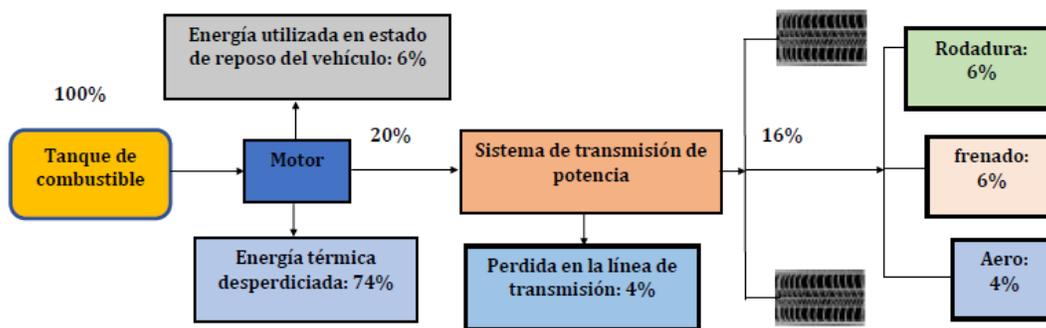


Figura 1.1 Pérdidas de energía en un motor CI [1].

Debido a que una gran cantidad de energía se disipa por procesos térmicos irreversibles, se han creado diferentes tecnologías a lo largo de las últimas dos décadas, para contrarrestar este efecto y recuperar parte de esta energía desperdiciada. El sistema de recuperación de energía térmica fue una de las primeras tecnologías de interés para los fabricantes de vehículos, ésta principalmente consiste en aprovechar los gases de escape resultantes del proceso de combustión en el motor, que en algunos casos representa el 15% de la energía total del vehículo. Además, se ha incorporado un sistema de recirculación de gases de escape hacia el conducto de admisión, mejor conocido como el sistema EGR. Este sistema buscaba la disminución de emisiones de gases contaminantes, y también disminuir el uso excesivo del combustible. En años más recientes, los fabricantes de vehículos han cambiado drásticamente la producción de vehículos en mira hacia la tecnología híbrida, es decir, autos que utilizan como medio de propulsión la energía derivada de las celdas de combustible, gas

natural, hidrógeno y/o incluso de la energía del combustible fósil convertida o transformada en energía eléctrica. Con ello, emergió un nuevo sistema para el ahorro del consumo de combustible que se estima incrementa la autonomía en hasta el 10%. El sistema de frenado regenerativo (*KERs*) logra aprovechar la energía cinética que se genera en el eje de las ruedas del automóvil mientras reduce su velocidad, transformándola en energía eléctrica que se almacena en supercapacitores, ultracapacitores y/o en sistemas híbridos de almacenamiento de energía.

Por otro lado, investigaciones científicas enfocados en estudiar el comportamiento de las suspensiones automotrices, han demostrado que las suspensiones pasivas donde los componentes dinámicos principales son el resorte y amortiguador tienen un alto déficit para lograr aislar por completo al chasis de las irregularidades de la carretera, afectando directamente a los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión. Con el objetivo de lograr un mejor rendimiento en el sistema de suspensión, se crearon las suspensiones totalmente activas y semiactivas para manipular el nivel de fuerza de control, y consecuentemente ajustar las necesidades de conducción en tiempo real del automóvil. Si bien las suspensiones activas logran mantener el control total de la dinámica del vehículo, el alto consumo energético de los actuadores neumáticos e hidráulicos, las convierte en aplicaciones altamente inviables para vehículos de pasajeros. Con respecto a las suspensiones semiactivas, durante la última década fue incorporada a la producción masiva de los automóviles, ya que ha demostrado tener una relación benéfica entre el costo y el desempeño con respecto a una suspensión activa. Vale la pena mencionar que, una suspensión semiactiva puede emular el comportamiento de una suspensión activa mientras no se exceda el umbral de operación/punto de saturación del actuador semiactivo. Los principales tipos de amortiguadores que proporcionan inteligencia semiactiva son dispositivos electrohidráulicos, electroreológicos y magnetoreológicos. Estos dispositivos ofrecen ventajas al mejoramiento de las dinámicas del vehículo y al tiempo de respuesta del control electrónico. Sin embargo, el objetivo central de la creación de las tecnologías de suspensión totalmente activa y semiactiva es disipar en forma calorífica la energía vibratoria indeseable, debido a esto, muchos investigadores han propuesto regenerar la energía a través de transductores regenerativos.

De hecho, las investigaciones científicas realizadas en los últimos años sobre los amortiguadores regenerativos han abierto un panorama de gran interés y de oportunidad en los sistemas de recolección de energía a baja frecuencia. El objetivo subyacente de estos sistemas de recolección de energía es convertir la energía de vibración que fluye en el sistema de suspensión originada principalmente por las irregularidades de la carretera en energía eléctrica mediante diferentes tipos de transductores electromagnéticos. Los investigadores pioneros en recolección de energía vibratoria suelen clasificar a los ARs dependiendo del potencial de recolección de energía, los de baja densidad de regeneración de energía como los son; lo amortiguadores basados en materiales piezoeléctricos y los amortiguadores basados en motores lineales electromagnéticos. Por otro lado, se encuentran lo ARs de alta densidad de regeneración de energía, los cuales son: amortiguadores regenerativos electromecánicos y electrohidráulicos. Cada uno de los ARs descritos anteriormente tienen sus ventajas y limitaciones, de ello depende su campo de aplicación. Por ejemplo, los ARs basados en materiales piezoeléctricos presentan ventajas como su estructura sencilla, la

ausencia de interferencias electromagnéticas y su fácil miniaturización, sin embargo, no producen fuerzas altas de amortiguamiento y las unidades piezoeléctricas presentan fragilidad y alto costo monetario. Por otro lado, los ARs electromagnéticos lineales tienen igualmente una estructura basada imanes permanentes colocados linealmente, poseen una eficiencia de conversión muy alta, a pesar de ello, la fuerza de amortiguamiento es mínima. Los ARs electromecánicos también presentan una eficiencia alta de conversión de energía, y han tenido una gran variedad de aplicaciones en diferentes escenarios ingenieriles. Sin embargo, el mecanismo de rectificación de movimiento presenta efectos inerciales que afectan principalmente a los índices de rendimiento del sistema de suspensión. Por otra parte, la eficiencia de conversión de energía del AR electrohidráulico es la más baja en comparación con lo antes mencionados. A pesar de ello, los ARs electrohidráulicos presentan fuerzas de amortiguamiento elevadas que proporcionan beneficios en el mejoramiento de los índices del sistema de suspensión.

De hecho, se han realizado una gran variedad de estudios científicos tanto teóricos como experimentales, para demostrar el potencial de recolección de energía vibratoria utilizando los diferentes tipos de ARs. Sin embargo, en la mayoría de estudios reportados, el rendimiento de recolección de energía de los ARs, solo se han considerado excitaciones determinadas por señales periódicas simples, como lo son; senoidales, triangulares, cuadradas, etc. Los resultados muestran en su mayoría que el AR con mejor recuperación es el electromecánico, beneficiado en gran parte por el mecanismo de rectificación y amplificación de movimiento. Los estudios de optimización de los ARs reportados en la literatura utilizando diferentes técnicas de optimización como lo son; la norma \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , método Taguchi, etc., evidencian el notable mejoramiento en la capacidad de recolección de energía de los ARs. Sin embargo, en la literatura aún no se ha reportado un análisis mediante el balance de energía estocástica tomando como criterio dominante la maximización de la potencia eléctrica en el sistema de regeneración de energía. Por tal motivo, en este trabajo de investigación se utilizó el balance de energía estocástica para demostrar cuál es la máxima potencia recuperable del amortiguador regenerativo electromecánico. Adicionalmente, se utiliza el criterio de optimización basado en la norma \mathcal{H}_2 para calcular los parámetros óptimos, empleando el enfoque de las integrales de vibración aleatoria. Además, el método de simulación Montecarlo reveló la consistencia del análisis de sensibilidad paramétrica basado en el enfoque de la máxima potencia eléctrica recolectada, permitiendo observar también el comportamiento de los índices dinámicos del sistema de suspensión regenerativo. Para la seguridad de los resultados obtenidos, se formula también un índice de rendimiento normalizado basado en una combinación lineal de los cuatro índices del sistema de suspensión, el cual tiene como objetivo revelar el efecto de la inercia rotacional del mecanismo de conversión de movimiento no solo en la dinámica general del vehículo, sino también en el potencial de regeneración de energía vibratoria.

1.1 Planteamiento del problema

En los últimos años la industria automotriz a nivel mundial ha enfocado sus esfuerzos no solo en la reducción del uso de los combustibles fósiles, sino también ha buscado extender la autonomía de los automóviles mediante el mejoramiento tanto de la tecnología de la

estructura del vehículo como del sistema de propulsión a través de la hibridación de los sistemas de transmisión de potencia convencionales. Aunque los trenes híbridos de propulsión de alta tecnología pueden mejorar la economía del combustible y reducir también la huella de carbono, existen aún otras pérdidas inevitables de energía en los subsistemas particulares del vehículo. Uno de los subsistemas que presenta pérdidas energéticas significativas es el sistema de suspensión pasivo, el amortiguador de fluido viscoso como elemento disipativo transforma la energía potencial almacenada por el elemento elástico en energía térmica desperdiciada en el medio ambiente. Vale la pena mencionar que este hecho es inevitable ya que la función principal del sistema de suspensión convencional es lograr una conducción cómoda y segura a costa de la disipación de una gran cantidad de energía mecánica originada por las imperfecciones de la carretera. De hecho, se ha demostrado teóricamente que el amortiguador de fluido viscoso puede disipar hasta 1 kW de potencia a velocidades de conducción relativamente altas, lo que demuestra que existe un potencial alto de energía disipada que no se aprovecha. Basada en esta observación, en la actualidad muchos investigadores han contribuido en la recuperación de esta energía mediante la creación de novedosos diseños de amortiguadores regenerativos.

Es por ello, que las suspensiones convencionales están siendo remplazadas o modificadas mediante la incorporación de amortiguadores regenerativos. De hecho, la potencia regenerada por estos mecanismos puede ser utilizada para alimentar a los sistemas de control de las suspensiones activas y semiactivas, mejorando no solo las dinámicas del auto sino también la reducción de huella de carbono. Por lo tanto, y debido a que actualmente no se ha reportado un estudio en donde se compare las capacidades de regeneración de energía de los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos existentes, en esta tesis se plantea realizar un análisis de sensibilidad paramétrica, y con base en este análisis determinar los parámetros que son más influyentes en la capacidad de regeneración de energía vibratoria.

1.2 Justificación

La energía de vibración que fluye en el sistema de suspensión se transforma en energía térmica residual por medio de los amortiguadores de fluido viscoso, la cual se puede transformar en energía eléctrica útil mediante el diseño correcto de un sistema de suspensión regenerativa, y así mejorar la eficiencia energética del tren de propulsión de los vehículos híbridos. Los amortiguadores regenerativos incorporados en el sistema de suspensión automotriz convencional tienen como objetivo primario capturar el movimiento vertical bidireccional del sistema y transformarlo en energía eléctrica mediante el uso de diferentes mecanismos de conversión de energía. De acuerdo con los estudios presentados, los amortiguadores regenerativos no remplazan al amortiguador de fluido viscoso en la mayoría de los casos, más bien, estos son agregados al sistema de suspensión con el objetivo de aprovechar su velocidad relativa. Más importante aún, en la literatura no se ha reportado un análisis dinámico en el cual se revele la existencia de un equilibrio de diseño entre el índice de recolección de energía con los índices de rendimiento del sistema de suspensión. Por tal cuestión, en este trabajo de investigación se propone utilizar el método de simulación

Montecarlo y el balance de energía estocástica para la optimización paramétrica del AR electromecánico.

Adicionalmente, se realiza un análisis cuantitativo sobre la capacidad de recolección de energía vibratoria que presentan los amortiguadores regenerativos electromagnéticos, electromecánicos e electrohidráulicos, bajo la consideración de las dinámicas del modelo del vehículo completo, tomando en cuenta no solo los perfiles artificiales de excitación generados a partir de una ecuación diferencial estocástica, sino también diferentes tipos de ciclos de velocidad de conducción tanto transitorios como estacionarios. Los resultados se obtendrán mediante simulaciones numéricas exhaustivas que se realizarán en el software Matlab/Simulink. Además, para la facilidad de la obtención del modelo matemático de los sistemas mencionados se utiliza el formulismo de Euler-Lagrange basado en la ley de la conservación de la energía.

1.3 Hipótesis

Mediante el uso del método de simulación Montecarlo demostrar que el AR electromecánico presenta mayor densidad de regeneración de energía vibratoria en comparación con los amortiguadores regenerativos electromagnético y electrohidráulico.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Analizar la sensibilidad paramétrica a la capacidad de regeneración de energía vibratoria a través del método de simulación Monte Carlo considerando una suspensión automotriz regenerativa para determinar la máxima energía cosechable.

1.4.2 Objetivos específicos

- I. Obtener el modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de un cuarto, medio y completo del vehículo considerando los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos.
- II. Realizar simulaciones numéricas en el dominio del tiempo en Matlab-Simulink para cuantificar la capacidad de regeneración de energía vibratoria en los sistemas de suspensiones automotrices regenerativas.
- III. Obtener las respuestas dinámicas en el dominio frecuencial para cada AR para analizar su comportamiento tanto en las dinámicas del vehículo como en el potencial de recolección de energía.
- IV. Realizar la simulación Montecarlo en Matlab, para verificar tanto cuantitativamente como cualitativamente la sensibilidad del índice de regeneración de energía.
- V. Aplicar la optimización \mathcal{H}_2 para obtener los parámetros óptimos de diseño del AR con mayor densidad de regeneración de energía.
- VI. Realizar un balance de energía estocástica para maximizar el índice de la potencia eléctrica del AR electromecánico.

- VII. Determinar el efecto del índice de recolección de energía sobre los índices de rendimiento del sistema de suspensión.
- VIII. Proponer un índice de rendimiento normalizado con el objetivo de determinar el efecto de la inercia del AR electromecánico sobre las dinámicas del vehículo.

1.5 Metas

- I. Desarrollo del modelo matemático del sistema planteado mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- II. Realizar un análisis de sensibilidad paramétrico en el cual se permita identificar a los parámetros que hacen sensible al proceso de recolección de energía, al mismo tiempo, demostrar con qué parámetros se obtiene el mejor rendimiento de regeneración de energía.
- III. Demostrar la concordancia de los resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas en el dominio del tiempo y frecuencia.
- IV. Obtener el diseño óptimo del AR electromecánico teniendo como principal objetivo conseguir la máxima energía regenerada.

1.6 Metodología

Durante el desarrollo de este trabajo de tesis, se utilizará la metodología de investigación tecnológica, la cual fue presentada por [\(Canales et al., 2020\) \[2\]](#). En la Figura 1.2 se presenta el esquema de la metodología antes mencionada donde se contempla la serie de acciones a realizar.

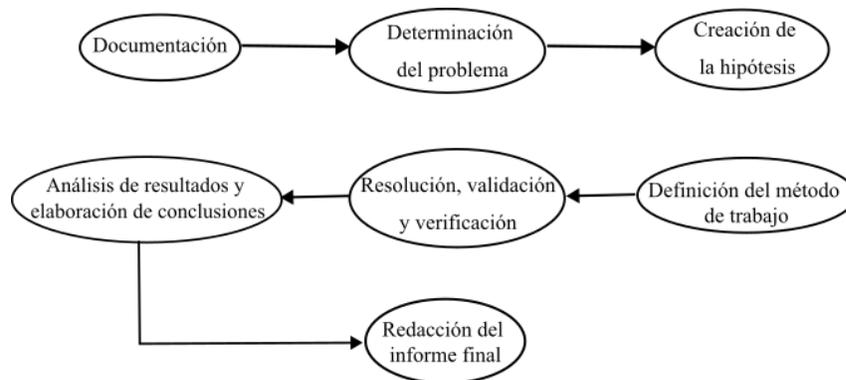


Figura 1.2 Metodología de la investigación tecnológica.

La metodología desarrollada por Canales consiste principalmente de 7 fases, cada una con un objetivo específico para lograr la culminación exitosa de este trabajo de investigación. Estas se presentan a continuación:

Documentación: Esta etapa consiste en realizar una búsqueda y recolección de información sobre el tema en específico en el que se enfocará este trabajo de investigación. Para este trabajo de tesis se investigó sobre los antecedentes de los amortiguadores regenerativos, abarcando desde los ARs clásicos hasta los que actualmente han sido reportados o ARs modernos. Esto para tener un panorama general de las ventajas que ofrecen cada uno de ellos tanto en la capacidad de recolección de energía vibratoria como en los

índices de rendimiento del sistema de suspensión, así como, en las aplicaciones que han tenido en la industria automotriz.

Determinación del problema: La determinación del problema permite identificar de manera concreta sobre que se va a realizar en la investigación. Para el presente trabajo, se abordará el problema de la recuperación de energía generada por las vibraciones inducidas por el perfil irregular de la carretera, a través de los amortiguadores regenerativos, específicamente el AR electromecánico. Así mismo, se realizará un análisis de sensibilidad paramétrica mediante el uso del método de simulación Monte Carlo. Además, a través de un análisis de energía estocástica se realizará la optimización del AR electromecánico basado en el mecanismo de amplificación brazo-dentado.

Creación de la hipótesis: La creación de la hipótesis consiste en mencionar de forma somera lo que se quiere demostrar y dar las respuestas tentativas al problema de investigación planteado. Esta hipótesis se debe basar tentativamente en los hechos reportados en la literatura. Sin embargo, esto se debe comprobar o refutar mediante el desarrollo del trabajo de investigación utilizando las herramientas matemáticas y/o computacionales disponibles.

Hipótesis propuesta para esta tesis;

- Mediante el uso del método de simulación Montecarlo demostrar que el AR electromecánico presenta mayor densidad de regeneración de energía vibratoria en comparación con los amortiguadores regenerativos electromagnético y electrohidráulico.

Definición del método de trabajo: En toda investigación científica y tecnológica es preciso la determinación de los métodos con los que se dará solución al problema. En consecuencia, se utilizarán las ecuaciones de movimiento de la mecánica lagrangiana para el desarrollo del modelo matemático que responda al comportamiento de la suspensión automotriz compuesta por los amortiguadores regenerativos. También se utilizarán las leyes de Kirchhoff para determinar la dinámica en el dominio eléctrico del circuito de recolección de energía para cada AR. Posteriormente, se realizarán tratamientos matemáticos para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema. Finalmente, se aplicará la técnica de optimización basada en la norma \mathcal{H}_2 , para obtener los parámetros óptimos del AR electromecánico.

Resolución, validación y verificación: Por medio de herramientas matemáticas, y con el método de simulación Monte Carlo, el modelo matemático del AR electromecánico se someterá a consideraciones físicas para demostrar la efectividad de los métodos empleados.

Análisis de resultados y elaboración de conclusiones: Una vez que se obtienen los resultados analíticos y numéricos, se realiza un análisis comparativo con aquellos reportados en la literatura, y de esta manera corroborar si los resultados validan la hipótesis, o en su caso si la refutan. Del mismo modo, se verifica si se cumplen los objetivos y las metas que fueron propuestas en la tesis.

Redacción del informe final: Cuando se concluye el proceso de investigación, se realiza la redacción del documento de tesis. Este documento debe cumplir el objetivo fundamental de comunicar con mayor claridad y coherencia posible los resultados, descubrimientos, comprobaciones o análisis logrados a lo largo de todo el proceso de investigación.

1.6.1 Consideraciones y limitaciones de la investigación

Debido a la gran variedad de mecanismos que han sido reportados en la literatura para la conversión de movimiento vertical bidireccional del sistema de suspensión en un movimiento rotatorio unidireccional del eje del generador eléctrico de los ARs, en esta investigación se elegirá el AR electromecánico basado en el mecanismo tipo brazo dentado como objeto de estudio, de la gran variedad reportada en la literatura (electromecánico, electromagnético y electrohidráulico).

Para los ARs electromecánicos y electromagnéticos se seleccionaron los diseños mostrados en las Figuras 1.3 y Figura 1.4, respectivamente. Los estudios realizados por (R. Zhang, Wang, Shami, et al., 2018) [3] revelaron la capacidad de recolección de energía vibratoria de estos dos tipos de ARs bajo el efecto de excitaciones aleatorias y armónicas. Mientras que, para el AR electrohidráulico se seleccionó, el diseño propuesto por (Y. Zhang, Chen, et al., 2017) [4], el cual se describe en la Figura 1.5.

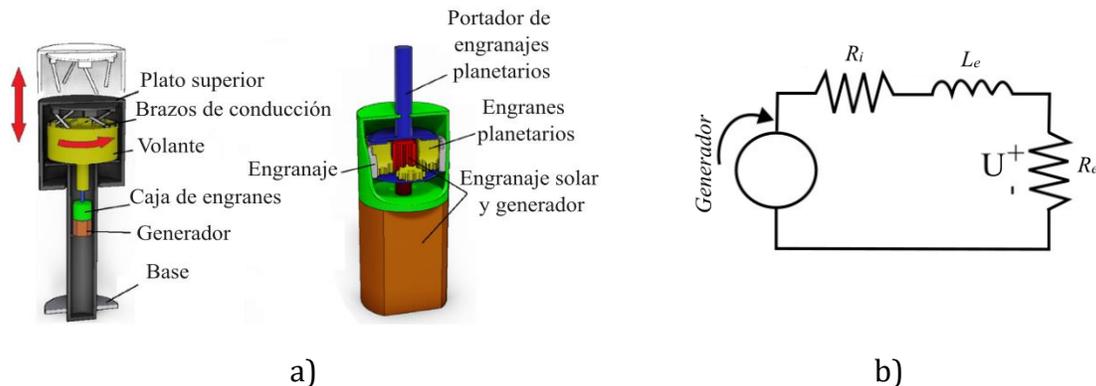


Figura 1.3 a) Diseño del AR electromecánico con mecanismo tipo brazo dentado y b) circuito de recolección de energía [3].

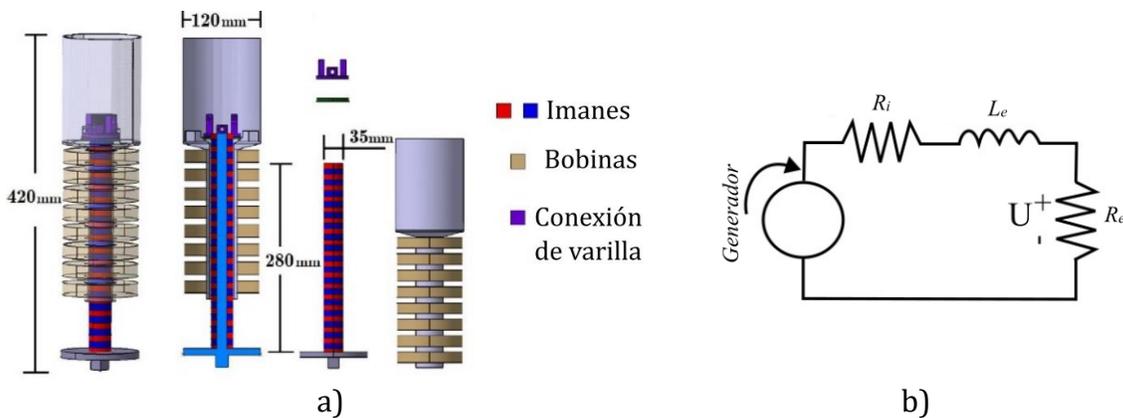


Figura 1.4 a) Diseño del AR electromagnético y b) Circuito de captación de energía [3].

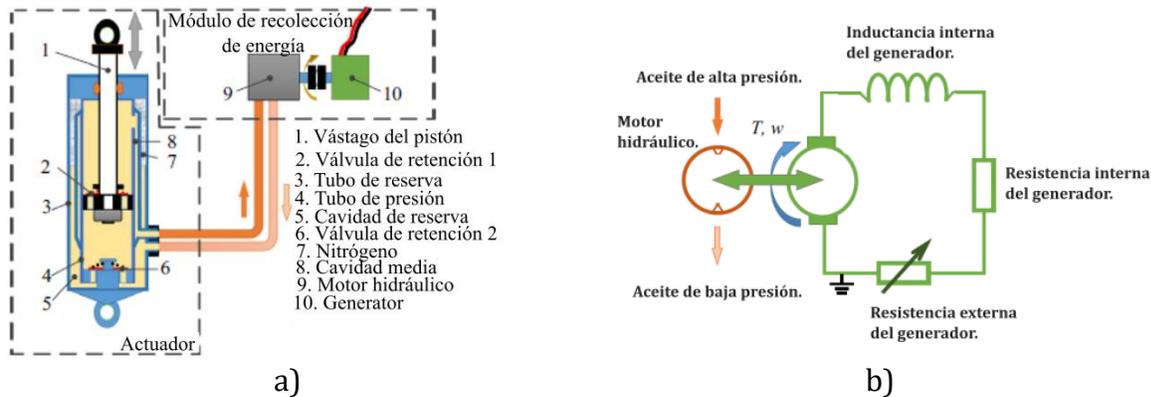


Figura 1.5 Diseño del AR electrohidráulico y b) Circuito de captación de energía [4].

Por otro lado, la simulación de los modelos dinámicos del automóvil con suspensión regenerativa se realizará en las mismas condiciones físicas de operación, con el fin de realizar justamente un análisis comparativo sobre resultados del potencial de regeneración de energía de los amortiguadores regenerativos seleccionados. De hecho, en casos especiales se utilizará la ecuación diferencial estocástica (1.1) para simular artificialmente la excitación de la carretera, lo que arrojará resultados más realistas.

$$\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0) V(t)} \quad (1.1)$$

Donde $f_0 = 0.0628 \text{ Hz}$ representa la frecuencia de corte, $n_0 = 0.1 \text{ m}^{-1}$ es la frecuencia espacial de referencia, $G_x(n_0)$ es el coeficiente de rugosidad de la carretera especificado por la norma ISO 8608 (ISO - ISO 8608:2016 - Vibración Mecánica. Perfiles de La Superficie de La Carretera. Informe de Datos Medidos., n.d.) [5], $V(t)$ es la velocidad de conducción del vehículo que puede ser constante o variable, $W(t)$ es un proceso estocástico estacionario (ruido blanco gaussiano) con media temporal igual a cero y finalmente, $x_g(t)$ es el perfil irregular de la carretera. Nótese que a partir de la Ec. (1.1), se puede afirmar que los niveles de intensidad de vibración en el vehículo dependen fuertemente del coeficiente de rugosidad de la carretera $G_x(n_0)$ y de la velocidad de conducción del vehículo $V(t)$. Adicionalmente, en la Tabla 1.1 se muestran los parámetros físicos del modelo dinámico del vehículo completo que se utilizarán para realizar las simulaciones numéricas en Matlab-Simulink.

Tabla 1.1 Parámetros de simulación del vehículo completo [3].

Parámetro	Valor
c_{sfl}	520 Ns/m
c_{sfr}	520 Ns/m
c_{srl}	520 Ns/m
c_{srr}	520 Ns/m
c_{tfl}	267.7 Ns/m
c_{tfr}	267.7 Ns/m
c_{trl}	267.7 Ns/m
c_{trr}	267.7 Ns/m
I_a	574 kg m ²

I_b	3000 kg m ²
k_{sfl}	26,000 N/m
k_{sfr}	26,000 N/m
k_{srl}	26,000 N/m
k_{srr}	26,000 N/m
l_b	1.6 m
l_f	1.6 m
l_l	0.7 m
l_r	0.7 m
m_b	1200 kg
m_{fl}	40 kg
m_{fr}	40 kg
m_{rl}	40 kg
m_{rr}	40 kg

Es importante mencionar que, cada AR tiene parámetros específicos según el diseño de estos, por esta razón, en las tablas 1.2, 1.3 y 1.4 se encuentran los parámetros correspondientes para los ARs electromecánico, electromagnético y electrohidráulico, respectivamente.

Tabla 1.2 Parámetros del AR electromecánico [3].

Parámetro	Valor
m_{tp}	3.722 kg
m_p	0.049 kg
R_i	100 Ω
R_e	100 Ω
L	9.4e-5 H
i	22.6
J_{FW}	6.65 x 10 ⁻² Kg m ²
J_{am}	1.92 x 10 ⁻⁴ Kg m ²
J_{per}	5.64 x 10 ⁻⁷ Kg m ²
J_p	5.6 x 10 ⁻⁷ kg m ²
J_g	5.75 x 10 ⁻⁶ Kg m ²
J_s	2.45 x 10 ⁻⁷ Kg m ²
r_p	0.00925 m
r	0.033 m
r_g	0.01 m
η_{tp}	92%
η_{pg}	80%
η_g	65%
k_e	0.065 Vs/rad

Tabla 1.3 Parámetros del AR electromagnético [3].

Parámetro	Valor
m_m	2.428 kg
m_c	1.256 kg

Bl	6.5 Tm
R_e	100 Ω
R_i	100 Ω
L	9.4e-5 H

Tabla 1.4 Parámetros del AR electrohidráulico [4].

Parámetro	Valor
k_e	0.065 Vs/rad
k_t	0.065 Vs/rad
η_v	92%
η_m	85%
q	6 cc
R_e	100 Ω
R_i	100 Ω
D	32.2 mm
d_{rod}	18 mm
L_{pipe}	1400 mm
d_{pipe}	10 mm
$d_{valve,1}$	28 mm
$K_{valve,1}$	750 N/mm
$d_{valve,2}$	24 mm
$K_{valve,2}$	880 N/mm
P_0	0.3 MPa
V_0	67400 mm ³
n	1.4
μ	1.24 x 10 ⁻² N s/m ²
ρ	8.50 x 10 ⁻⁷
C_d	0.7

Capítulo 2

2. Estado del arte

2.1 Suspensiones automotrices

Una parte fundamental para el correcto desempeño de los automóviles es el sistema de suspensión. Este sistema es el encargado de la conexión de las ruedas con el chasis a través de dispositivos que absorben y disipan energía mecánica. En función de las características que requiera el diseño de la suspensión, estas pueden variar su diseño para que puedan soportar más carga y con esto un mayor confort y seguridad de conducción para el usuario. Actualmente, las funciones con las que cumplen las suspensiones automotrices convencionales son la de proveer la adherencia y/o contacto total de los neumáticos con la superficie de la carretera, pero también las de reaccionar a las fuerzas (longitudinales y laterales) producidas por los neumáticos, así como resistir a la rotación del chasis (Rangel Gil, 2002) [6]. Dada las investigaciones reportadas sobre el comportamiento de las suspensiones automotrices y su análisis en el dominio de la frecuencia, se ha observado que existen dos frecuencias resonantes: la primera se encuentra alrededor de 1 Hz que se asocia al modo de vibración de la masa suspendida, y la segunda aproximadamente en 10 Hz relacionada con la masa no suspendida. Actualmente, existen diversas configuraciones para las suspensiones automotrices, y cada una de ellas presenta características que las hace más propicias para ciertos diseños de vehículos (Ezeta et al., 2013) [7]. Los sistemas de suspensión se pueden clasificar en función a la forma de control que se ejerce. La suspensión pasiva es el sistema de suspensión convencional de los automóviles con más área de extensión, conformada principalmente por amortiguadores de fluido viscoso y elementos elásticos con parámetros ajustados, lo que al mismo tiempo representa la principal desventaja del sistema pasivo. Por este motivo los parámetros con los que se constituye se deben elegir cuidadosamente mediante un análisis exhaustivo en los índices de rendimiento a través de la formulación de un problema de optimización multiobjetivo. De hecho, las principales ventajas de este sistema son: asequibles, no requieren de mantenimiento como es el caso de los sistemas activos, y bajo costo en el proceso de fabricación (Issa & Samn, 2022) [8].

Por otra parte, el sistema de suspensión activa puede ajustar instantáneamente la fuerza de control que se genera entre la masa amortiguada y la no amortiguada, según reciba las señales de control proporcionada por los sensores para regular la intensidad de vibración de toda la estructura del vehículo, de este modo también se mantiene el contacto total entre los neumáticos y el suelo a altas velocidades de conducción. Sin embargo, el mayor consumo de energía del actuador activo sigue representando un inconveniente grande para la incorporación masiva en los autos (Yan et al., 2019) [9]. El sistema de suspensión automotriz ha evolucionado desde su comienzo con las suspensiones pasivas hasta aquellas controladas electrónicamente. Principalmente, las suspensiones pasivas son altamente rentables y sencillas, pero presentan la desventaja de no amortiguar las vibraciones cuando la situación

se torna imprevisible, a diferencia de los sistemas de suspensión activas que tienen la característica que prestar un mayor rendimiento en la robustez del sistema de control. Sin embargo, el alto consumo de energía, actuadores voluminosos y el costo elevado de mantenimiento de los actuadores controlados activamente, es la actual barrera en la aplicación de estos sistemas modernos de aislamiento de vibración de amplio espectro. Debido a esta problemática se han propuesto las suspensiones semiactivas, estas no pueden ofrecer mayor rendimiento en la reducción de vibraciones como las suspensiones activas, pero son más efectivas que las suspensiones pasivas, manteniendo las ventajas de simplicidad, fiabilidad, seguridad y más importante aún el consumo bajo de energía (J. Yang et al., 2021) [10]. Vale la pena mencionar que, las suspensiones semiactivas pueden emular el comportamiento de una suspensión activa en un espectro de potencia de vibración de ancho de banda limitado.

2.2 Suspensiones regenerativas automotrices

Con el fin de contribuir a la disminución del consumo de combustibles fósiles tanto en vehículos convencionales como híbridos, se han propuesto novedosas tecnologías para aprovechar la energía que se disipa en el sistema de suspensión del automóvil. Por tal motivo, en años recientes, las suspensiones regenerativas han tomado gran relevancia en el mejoramiento de los sistemas de recolección de energía ambiental, y se han implementado en los automóviles principalmente eléctricos e híbridos. Este sistema de suspensión recupera la energía cinética debido a la vibración de la suspensión, lo que permite ahorrar hasta el 10% de combustible. La energía cinética vibratoria se transmite a la suspensión, provocando el accionamiento del mecanismo de conversión de movimiento del AR para producir energía eléctrica útil. Con base en los datos científicos de investigaciones reportadas por (Y. Zhang, Guo, et al., 2017) [11], se dice que el potencial de recolección de energía vibratoria máximo es de 2048 W considerando; diferentes velocidades de conducción, diferentes niveles de rugosidad de la carretera y, distintos modelos de vehículos. Adicionalmente, los datos publicados por (Abdelkareem et al., 2018) [12], fueron bastante alentadores en lo que respecta a la cuantificación de energía vibratoria en diferentes tipos de vehículos, específicamente los autores demostraron que el potencial de recolección de un automóvil de pasajeros típico está entre 100-400 W considerando que el vehículo se desplaza sobre carreteras en buen estado y una velocidad constante de aproximadamente 97 km/h. Otro dato relevante fue presentado por el grupo automotriz AUDI, donde se recalcó la posibilidad de la reducción de emisiones de CO₂ de aproximadamente 3 g/Km para un automóvil híbrido, además de que se podría mejorar la economía de combustible en hasta 0.7 L cada 100 Km. Con respecto a los camiones pesados se podrían ahorrar hasta 13 millones de dólares por año (MIT Students Develop Hydraulic Energy-Generating Shock Absorbers - Green Car Congress, n.d.) [13]. Debido a que, las capacidades de recolección están relacionadas con los niveles de intensidad de vibración y al tipo de vehículo, es decir, entre más vibración se genere dentro del automóvil más energía vibratoria podrá ser convertida en energía eléctrica, tal como se muestra en la Figura 2.1.

Es importante mencionar que, se ha diseñado una gran variedad de amortiguadores regenerativos para convertir la energía vibratoria en energía eléctrica. Los mecanismos de

recolección de energía se clasifican generalmente según sea la forma en que se convierte el movimiento vertical bidireccional en movimiento rotacional unidireccional. Las tres grandes ramas de clasificación de los tipos de amortiguadores regenerativos son: los ARs electromagnéticos, electromecánicos y electrohidráulicos. En las siguientes subsecciones se discutirán los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos antes mencionados, describiéndolos detalladamente con el fin de conocer sus principales beneficios e inconvenientes.

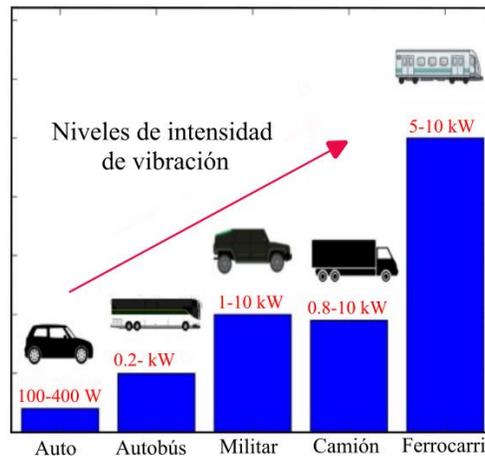


Figura 2.1 Potencial de recolección de energía vibratoria para diferentes tipos de vehículos [13].

2.2.1 Amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales

Los amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales tienen la característica de transformar la energía vibratoria que se genera debido a la diferencia de las velocidades relativas del sistema de suspensión, los cuales utilizan el fenómeno de inducción electromagnética de Faraday. Ciertamente este tipo de amortiguadores electromagnéticos presentan densidad baja de recolección de energía, debido a que no presentan un mecanismo de amplificación de movimiento, en cambio, el diseño estructural es más sencillo que los ARs de alta densidad de regeneración de energía, ya que constan principalmente de un arreglo simple de imanes permanentes y una bobina para producir la variación del flujo del campo magnético, y consecuentemente producir electricidad. La alta eficiencia de conversión de energía ha sido la causa de su ardua investigación en el mejoramiento de su densidad de regeneración de energía a través de nuevos arreglos del sistema de imanes para incrementar el flujo del campo magnético. El primer amortiguador electromagnético lineal fue presentado en el trabajo de (Karnopp, 1989) [14], en él se menciona que la principal limitación del uso de estos amortiguadores es por la masa grande que posee tanto la bobina como el sistema de imanes, y consecuentemente el flujo de campo magnético alcanzable en la práctica. Años más tarde (Suda & Shiiba, 1996) [15], propusieron el diseño de una suspensión híbrida compuesta con un sistema de recolección de energía vibratoria, mejorando los inconvenientes que presentan las suspensiones activas. Dicho sistema dependía de la frecuencia de control, es decir, si el sistema trabajaba bajo frecuencias bajas se adoptaba un control activo, en cambio, en altas frecuencias de excitación, el sistema operaba con un control pasivo. En el trabajo de (Zuo et al., 2010) [16], se reportó el diseño de un AR con la característica de recuperar eficientemente la energía generada por la vibración mediante un

AR compacto, lo que beneficia en el mejoramiento de la tecnología del vehículo. Para la generación del campo magnético, se configuró un amortiguador lineal de cuatro fases que posee mayor eficiencia y un peso reducido. Los resultados obtenidos por el prototipo indican que tal AR podría cosechar de 16 – 64 W de potencia eléctrica con una velocidad relativa de la suspensión de 0.25 – 0.5 m/s.

Más tarde, (Gysen et al., 2011) [17] reportaron el diseño y fabricación de una suspensión activa con AR electromagnético de accionamiento directo (Figura 2.2), las pruebas analíticas y experimentales se realizaron considerando el modelo de un cuarto de suspensión, y los resultados obtenidos indican que se puede reducir el 36% de la aceleración de la masa suspendida. Además, se obtuvo una reducción de la carga dinámica de los neumáticos del 54 %, con un consumo de potencia eléctrica dentro del rango de 150-300 W. Adicionalmente, (Ebrahimi et al., 2010) [18] propusieron un amortiguador electromagnético híbrido de alta eficiencia de conversión de energía, aprovechando el efecto de amortiguamiento producido por las corrientes de Foucault. El sistema híbrido redujo el consumo de energía eléctrica en aproximadamente el 70 % en comparación con la suspensión activa electromagnética. Sin embargo, el amortiguador electromagnético implicó una instalación física robusta, además, de tener un peso de 2.1 kg, lo cual es un peso relativamente mayor a los amortiguadores convencionales, siendo una desventaja de diseño.

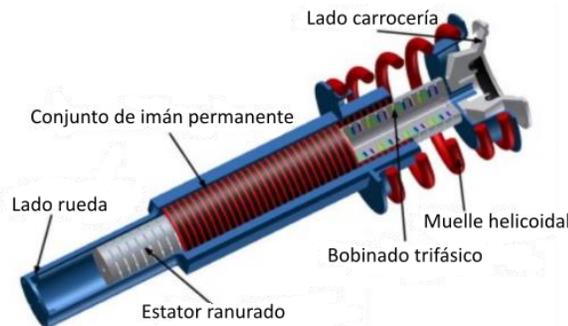


Figura 2.2 Amortiguador electromagnético lineal de accionamiento directo [17].

La tecnología híbrida aplicada a las suspensiones regenerativas produjo beneficios significativos, tal como se demuestra en el trabajo de (Asadi et al., 2015) [19], quienes diseñaron y fabricaron un amortiguador híbrido, ver (Figura 2.3). Tal sistema híbrido fue configurado para trabajar con dos sistemas, uno pasivo en un medio viscoso que proporcionaba las características necesarias de amortiguamiento, y un segundo sistema electromagnético para añadir adaptabilidad de conducción y la capacidad de regeneración de energía también. En la búsqueda de alternativas más eficientes, (Hu et al., 2016) [20] propusieron el diseño y fabricación de un novedoso amortiguador magnetoreológico con la capacidad de recolección de energía, el funcionamiento de este diseño propuesto consiste de dos partes también, las cuales son: que una de ellas cumple con la función de cosechar la energía por medio del principio de inducción electromagnética, mientras que la parte complementaria proporciona la capacidad de disipación de energía al sistema de suspensión por medio del fluido magnetoreológico. Los resultados obtenidos por los autores demuestran que el amortiguador propuesto produce fuerzas de amortiguamiento de 200 N y 750 N con una corriente de 0 A y 0.6 A, respectivamente. Por otra parte, (Chen et al., 2016) [21]

realizaron el diseño de un amortiguador híbrido regenerativo a través de un sistema semiactivo, el AR con tres niveles de amortiguamiento demostró tener fuerzas de amortiguación muy similares a una suspensión activa convencional.

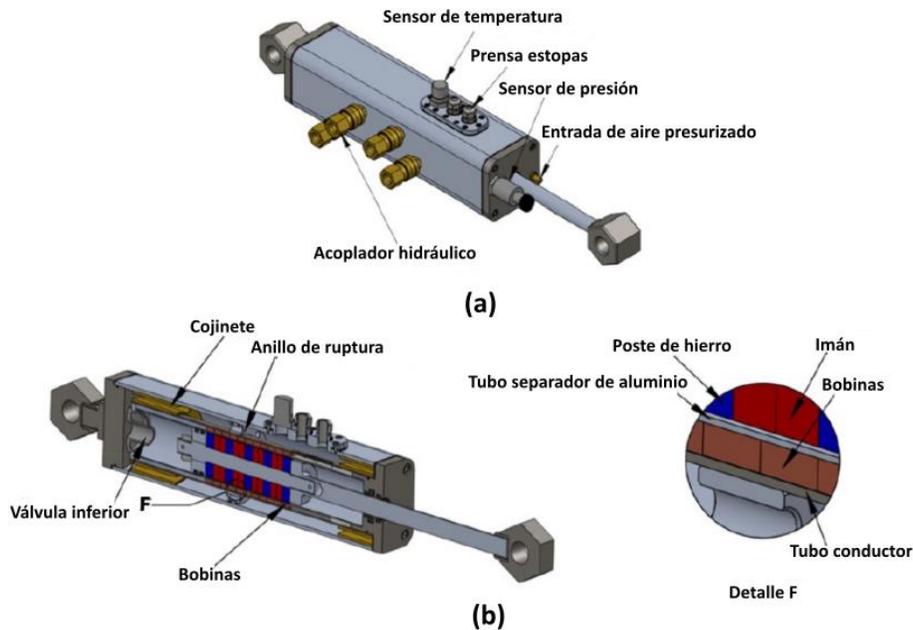


Figura 2.3 Diseño del amortiguador híbrido; a) Vista isométrica y b) Vista seccionada [19].

Más tarde, (Gao et al., 2019) [22] realizaron un estudio comparativo sobre las diferentes estrategias de control para una suspensión activa electromagnética considerando los índices de rendimiento del confort y el de la recuperación de energía bajo diferentes condiciones de carretera, y concluyeron que no es posible mejorar significativamente la capacidad de regeneración de energía sin afectar el índice de confort. Adicionalmente, (Ding et al., 2019) [23] diseñaron una suspensión electromagnética híbrida integrada por un motor lineal y un amortiguador con fluido magnetoreológico, ver (Figura 2.4), con el objetivo de dar solución al alto consumo que presentan las suspensiones activas electromagnéticas, los resultados revelaron la viabilidad del diseño propuesto y la mejora en el rendimiento dinámico del sistema. Más tarde, (Duong et al., 2020) [24] propusieron la fabricación de un amortiguador electromagnético con capacidad de recolección de energía, con el fin de aumentar la potencia de salida y la reducción del volumen del sistema, diseñando una estructura tipo tubo tubular con imanes permanentes configurados en un arreglo tipo 8 ranuras – 8 polos, ver (Figura 2.5). El dispositivo logró recolectar una potencia promedio de salida de 96.67 W y una potencia máxima posible de 339.95 W, desafortunadamente, el sistema producía fuerzas electromagnéticas altas, las cuales podrían generar efectos negativos en la dinámica del vehículo cuando no se sintonizan adecuadamente.

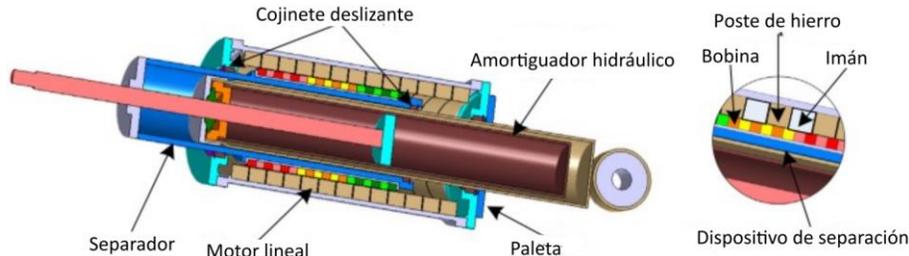


Figura 2.4 Diagrama esquemático del amortiguador electromagnético híbrido [23].

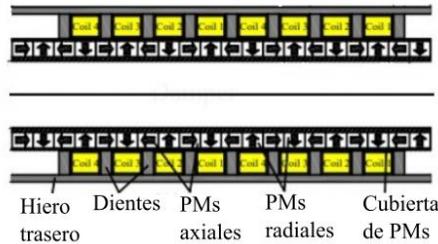


Figura 2.5 Sección transversal del modelo tipo 8 ranuras - 8 polos [24].

Recientemente, (Lafarge et al., 2021) [25] realizaron el diseño y fabricación de un cosechador de energía vibratoria electromagnético lineal embebido a una suspensión convencional respetando el mismo volumen del sistema. Los resultados obtenidos por los autores demostraron que para velocidades relativas del sistema de suspensión de 0.75 m/s y 1 m/s, el dispositivo podría recolectar alrededor de 10 W. Esta energía podría alimentar un circuito electrónico clásico de baja potencia. En general los sistemas de suspensión regenerativos electromagnéticos proporcionan un mejoramiento a los sistemas activos y semiactivos por su sencillez de construcción. Sin embargo, para regenerar grandes cantidades de energía vibratoria, es estrictamente necesario aumentar las dimensiones físicas del sistema de imanes, lo cual es un inconveniente substancial debido a las limitaciones en las dimensiones establecidas por los fabricantes de vehículos. Por último, (Z. Li et al., 2021) [26] propusieron un sistema de recuperación de energía basado en un generador piezoeléctrico para la recolección de energía marítima. El diseño de este dispositivo se compone de una base de soporte, plataformas de carga, 6 unidades simples de supresión de vibración (contienen las unidades piezoeléctricas), articulaciones flexibles, muelles y amplificadores de fuerza. Los resultados experimentales y de simulación numérica demuestran que a una frecuencia de resonancia de 75.2 Hz, una aceleración de excitación de 0.4 g y una carga de 0.5 kg, los generadores pueden recolectar un total de 574 mW de potencia máxima. Además, se tomaron dos esquemas de almacenamiento de energía basados en capacitores electroquímicos configurados en serie y en paralelo, los cuales demostraron una capacidad de carga de 25 V en 20-50 s.

2.2.2 Amortiguadores regenerativos electromecánicos

Los AR electromecánicos se distinguen básicamente por el mecanismo de conversión de movimiento bidireccional vertical en movimiento rotacional unidireccional, que bajo diferentes configuraciones del mecanismo se pueden conseguir altas densidades energía en

comparación con los ARs electromagnéticos. Sin embargo, en la mayoría de los ARs electromecánicos se presentan efectos inerciales indeseables, que si bien, a baja frecuencia tienen buenas prestaciones de fuerza de amortiguamiento mientras que a altas frecuencias los índices de rendimiento del sistema de suspensión se deterioran drásticamente.

El mecanismo tipo tornillo-bola (Figura 2.6) fue propuesto inicialmente por (Kawamoto et al., 2007) [27], dicho diseño presentaba tres características fundamentales, las cuales son: 1) alta capacidad de amortiguamiento ajustable, 2) suspensión activa y 3) regeneración de energía vibratoria. Con esto en mente, (Amati et al., 2011) [28] realizaron un estudio para el uso de este tipo de mecanismo en las suspensiones pasivas y semiactivas, buscando una óptima relación entre el costo (costo de los componentes, peso, sensores y actuadores, consumo de energía, etc.) y el desempeño del sistema de suspensión (comodidad de conducción, y seguridad de conducción). Mas tarde, (G. Zhang et al., 2012) [29] desarrollaron el sistema de control para una suspensión activa basada en AR, utilizando la teoría de control robusto \mathcal{H}_∞ , dicho control podía operar de dos modos, el primero proporcionaba el confort requerido por el conductor, mientras que el segundo modo se enfocó en la recolección de energía mediante un motor de CC, ver (Figura 2.7). Los resultados demostraron que el modelo propuesto, resultó ser eficaz en el mejoramiento del índice de confort aun cuando se lleva a cabo el proceso de regeneración de energía.

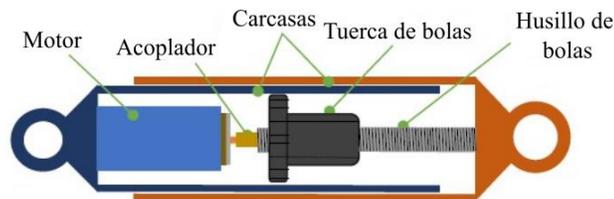


Figura 2.6 Diseño conceptual de amortiguador electromecánico tipo tornillo-bola [27].

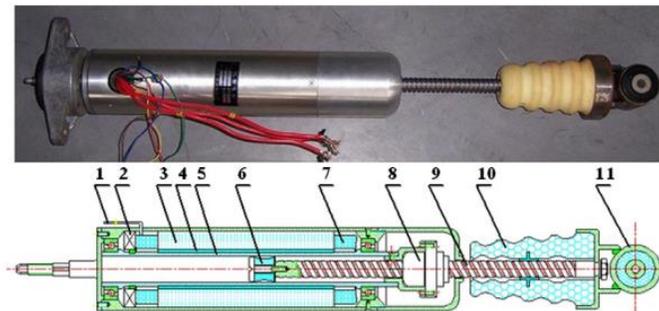


Figura 2.7 Prototipo de amortiguador basado en un motor eléctrico rotatorio CC: 1) I/O, 2) Sensor de posición, 3) Estator, 4) Imán Permanente, 5) Rotor, 6) Soporte elástico anti-impacto, 7) Bobinado de inducción, 8) Tuerca esférica, 9) Tornillo, 10) Amortiguador de compresión, 11) sujetador [29].

Por otro lado, (Pires et al., 2013) [30] consideraron el modelo dinámico del cuarto de vehículo para realizar un estudio sobre el efecto de la inercia en los índices del confort y regeneración de energía. Cuando la inercia rotacional o inercia del AR fue respectivamente de 50 kg y 20 kg, los autores demostraron que los índices de rendimiento del sistema de suspensión se deterioran drásticamente para los valores de inercia mayor

o igual a 50 kg. Sin embargo, los índices de rendimiento se mejoran significativamente para valores de inercia menores o igual a 20 kg. Similarmente, (Yin et al., 2015) [31] presentaron una investigación sobre la masa equivalente o inercia en la dinámica del vehículo, considerando todos los efectos inerciales producidos por el mecanismo de conversión de movimiento basados en los sistemas mecánicos tipo tornillo – bola y caja de cambios, bajo el efecto de vibración armónica. Con esto en mente, (Huang et al., 2015) [32] realizaron pruebas experimentales de una suspensión regenerativa considerando excitación tipo estocástica para emular el comportamiento del perfil irregular de la carretera, los resultados obtenidos por los autores demostraron que el potencial de regeneración de energía de la suspensión regenerativa está determinado por el estado de la carretera, la velocidad de conducción, el coeficientes de rigidez y amortiguación del neumático. Con el objetivo de reducir tanto la falla estructural como las fluctuaciones del amortiguamiento, (Li et al., 2019) [33] diseñaron un sistema de amortiguamiento que permitía tanto la recolección de energía como el mejoramiento de las dinámicas del vehículo. Con base en los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas y pruebas experimentales, los autores revelaron tanto la robustez del sistema como la eficiencia de recolección de energía. Posteriormente, (S. Li, Xu, Pu, Tao, Gao, et al., 2019) [34] presentaron un nuevo diseño de una suspensión de amortiguamiento variable basado en un motor de imanes permanentes con la capacidad de recolección y disipación de energía vibratoria, ellos demostraron que la inercia del AR electromecánico puede mejorar tanto el confort de conducción como la seguridad de conducción, con una eficiencia de conversión de energía de 51.81-75.24%.

Más tarde, (Xie et al., 2017) [35] diseñaron un nuevo amortiguador con la capacidad de regeneración de energía, equipado con múltiples transductores controlados de manera independiente, ver (Figura 2.8), para regenerar la mayor cantidad de energía vibratoria en energía eléctrica, demostrando una eficiencia del 80% en el rango de frecuencias de excitación de 1 – 2 Hz. Mas tarde, (Xie et al., 2018) [36] propusieron un AR con múltiples mecanismos tipo tornillo-bola, ver (Figura 2.9), cada uno de ellos era controlado mediante circuitos de captación de energía independientes, el dispositivo fue capaz de recolectar 32 W de potencia eléctrica promedio cuando la frecuencia y el desplazamiento de excitación eran de 3 Hz y 20 mm, respectivamente. Recientemente, un AR novedoso de alta eficiencia, ver (Figura 2.10), fue propuesto por (Z. Wang et al., 2020) [37] este sistema propuesto convertía el movimiento de vibración vertical bidireccional en un movimiento rotacional unidireccional mediante el uso de un par de mecanismos tipo tornillo – bola. Con base en los resultados obtenidos, el amortiguador posee una eficiencia máxima del 51.1% en términos de conversión de energía, con una potencia media de 3.701 W bajo el efecto de vibración armónica con frecuencia fundamental de 1 Hz. Por otro lado, (Bai et al., 2018) [38] realizaron una contribución interesante en el diseño de un amortiguador regenerativo autoalimentado basado en fluido magnetoreológico como sistema de amortiguamiento, la cual resolvió los problemas tanto de la capacidad de disipación de energía vibratoria como el de las fuerzas bajas de amortiguamiento del amortiguador de fluido viscoso convencional. Específicamente, este dispositivo proporcionó una fuerza de amortiguamiento de 341 N-2260 N considerando un rango de corriente eléctrica de 0-1 A. Adicionalmente, los autores demostraron que la potencia eléctrica del AR fue de 4.5 W, cuando la velocidad de la suspensión era de 125.7 mm/s.

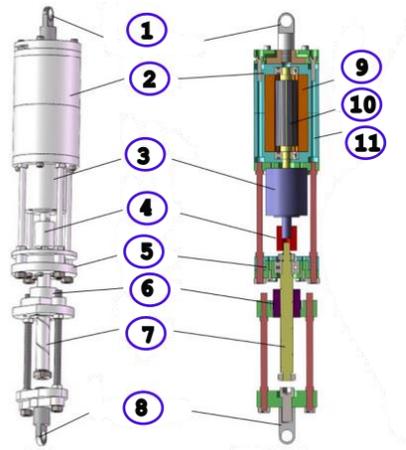


Figura 2.8 Diseño del AR con múltiples transductores. 1) Anillo de montaje superior, 2) generador eléctrico, 3) caja de cambios, 4) acoplamiento mecánico, 5) placa fija, 6) tuerca del tornillo, 7) husillo de bolas, 8) montaje inferior, 9) bobinas, 10) imanes permanentes, 11) carcasa [35].

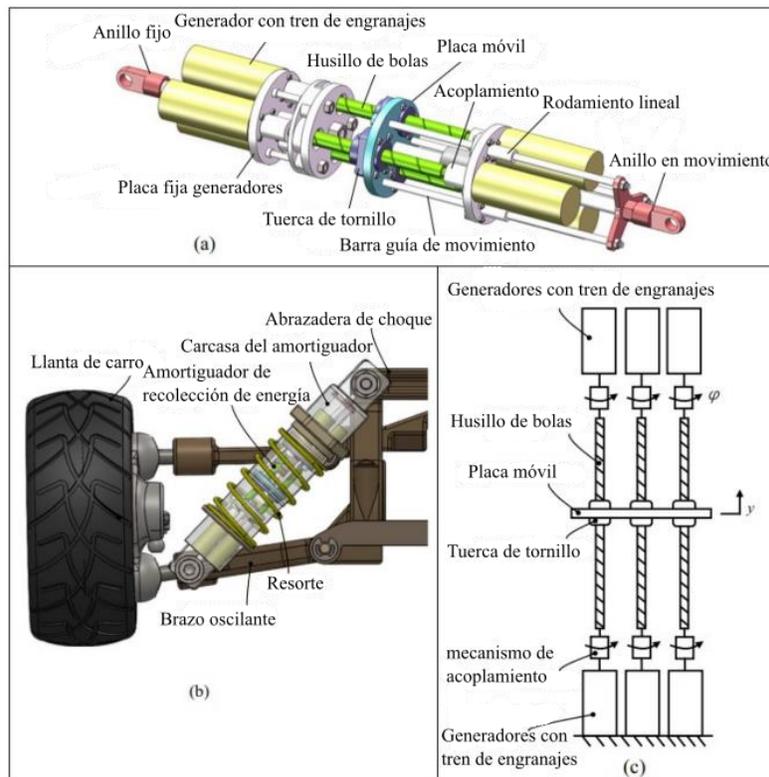


Figura 2.9 Esquema del AR electromecánico: (a) modelo 3D, (b) AR conectado al sistema de suspensión, (c) diagrama del sistema de conversión de energía basado en múltiples mecanismos tipo tornillo-bola [36].



Figura 2.10 Estructura del AR electromecánico con múltiples mecanismos tipo tornillo de bola [37].

Con el fin de reducir las pérdidas de energía y aumentar la eficiencia de conversión, (Y. Yang et al., 2019) [39] diseñaron un AR electromecánico con aplicación específica en una bicicleta para aprovechar la energía de vibración originada a bajas frecuencias de excitación. Vale la pena mencionar que, el AR propuesto por los autores incluía un mecanismo de rectificación de movimiento rotativo. Además, se consideró el almacenamiento de la energía recolectada en super capacitores para su uso en los Vehículos Eléctricos (EV) de rango extendido. El mecanismo tipo tornillo – bola, se empleó para captar la vibración lineal con menos espacio de instalación que el mecanismo tipo piñón – cremallera. Los autores también demostraron mediante pruebas experimentales, que el transductor de energía puede proporcionar un voltaje máximo de salida de 7.8 V, con una potencia máxima de 0.491 W, y una eficiencia de conversión de energía del 52.8%. El mecanismo de tipo piñón – cremallera también ha sido ampliamente investigado, ya que proporciona ventajas según sea su configuración y aplicación. Adicionalmente, basado en este tipo de mecanismo, (Z. Li et al., 2013) [40] diseñaron un AR como el que se muestra en la (Figura 2.11), ellos demostraron que el coeficiente de amortiguamiento depende de las resistencias eléctricas externas. Además, se demostró que la eficiencia de conversión de energía puede llegar a ser del 56%, con una potencia máxima o pico de 67.5 W, y una potencia media de 19.2 W de los cuatro amortiguadores regenerativos cuando la velocidad del vehículo era de 48 km/h.

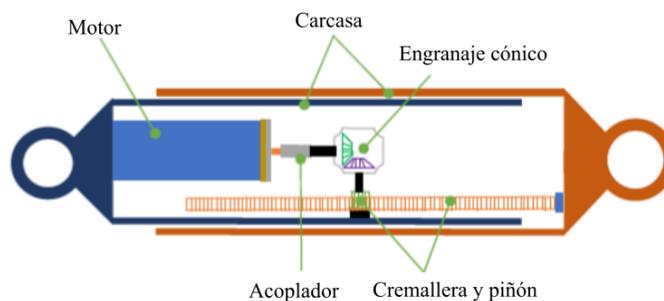


Figura 2.11 Diseño tradicional del AR electromecánico basado en el mecanismo tipo piñón-cremallera [40].

Mas tarde, (Z. Li et al., 2012) [41] propusieron AR electromecánico con un mecanismo de rectificación de movimiento, ver (Figura 2.12), con el cual consiguió una eficiencia de conversión de energía del 60%, con un voltaje de 15 V mientras el vehículo se conducía a 24 Km/h en una carretera tipo autopista, cosechando una potencia promedio de 40.4 W. Desafortunadamente, a frecuencias altas de excitación, se presentaron problemas de operación debido a las fuerzas inerciales altas originadas por el mecanismo de conversión de movimiento.

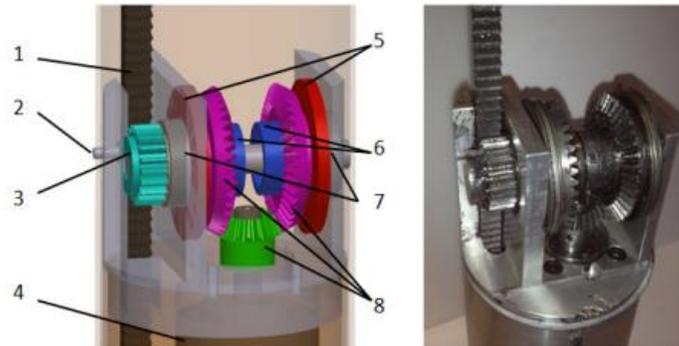


Figura 2.12 Estructura interna del mecanismo de rectificación de movimiento. 1) Cremallera, 2) Rodillo, 3) Piñón, 4) Engranajes planetarios y generador eléctrico, 5) Cojinetes de empuje, 6) Embragues de rodillos, 7) Rodamientos de bolas, 8) Engranajes cónicos [41].

Adicionalmente, (Guo et al., 2016) [42] realizaron un estudio para conocer la influencia que tiene los distintos tipos de amortiguadores de recolección de energía (EHSA, por sus siglas en inglés) en el comportamiento dinámico del sistema de suspensión. Específicamente, los autores analizaron dos tipos de EHSA rotativos, los cuales son: uno de ellos equipado con un mecanismo de rectificación de movimiento (MMR, por sus siglas en inglés) denominado MMR-EHSA, y el otro es el EHSA rotativo convencional compuesto por un mecanismo tipo tornillo – bola. Además, los autores demostraron que el EHSA convencional funciona mejor considerando niveles bajos de inercia rotacional, lo cual significa que no se alteran drásticamente los índices dinámicos del sistema de suspensión. Además, el amortiguador MMR-EHSA presenta mayor robustez a frecuencias altas de excitación que el anterior. Por otro lado, (Z. Zhang et al., 2019) [43] propusieron un diseño alternativo para la conversión de movimiento vertical bidireccional en uno de rotación unidireccional, mediante el uso de un mecanismo que constaba de dos pares de piñón – cremallera, dos engranes cónicos, y un generador eléctrico rotatorio, ver (Figura 2.13). Las pruebas experimentales se realizaron en un vehículo de pasajeros, las cuales revelaron que este amortiguador puede recolectar energía con una eficiencia de conversión en el rango 44.24-54.98%. También, se demostró una potencia media de 4.302 W cuando la frecuencia de excitación y amplitud de vibración eran de 2.5 Hz y 7.5 mm, respectivamente. Es importante mencionar que, debido a que el aprovechamiento de la energía vibratoria ha tomado gran relevancia en los últimos años, los investigadores abarcaron otras áreas de aplicación, en donde las vibraciones están presentes en cantidades suficientes como para incorporar los ARs electromecánicos. Recientemente, (X. Zhang et al., 2016) [44] propusieron sistemas de recolección de energía vibratoria producida en las vías férreas. Además, (H. Wang et al., 2018) [45] lograron convertir la vibración multidireccional que se produce en los cables que transportan electricidad en

movimiento rotacional unidireccional, para recolectar energía y almacenarla en super capacitores.

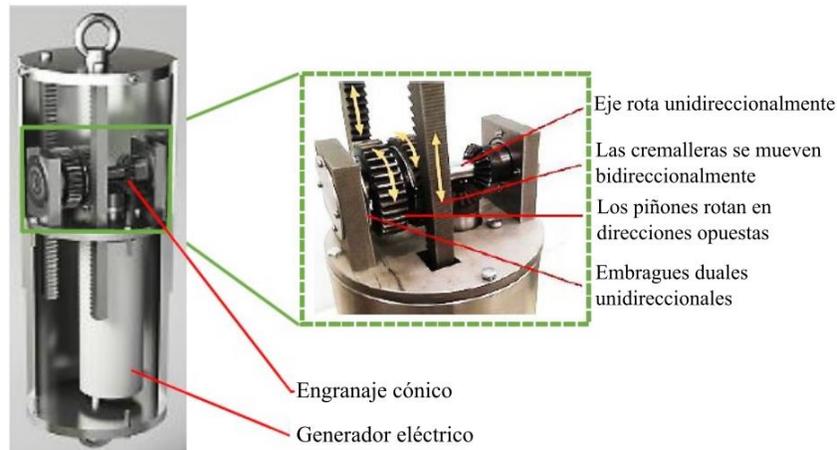


Figura 2.13 AR electromecánico con mecanismo de conversión de movimiento basado en dos pares de mecanismos tipo piñón - cremallera [43].

De forma paralela, mientras diversos investigadores presentaron propuestas en torno a los mecanismos de conversión de movimiento, que anteriormente se mencionaron, (Sabzehgar et al., 2014) [46] diseñaron un AR basado en el mecanismo tornillo algebraico, como se muestra en la (Figura 2.14). Los autores demostraron que el novedoso AR puede proporcionar un amortiguamiento mecánico determinado, debido al arreglo estructural del sistema mecánico tipo tornillo algebraico. Además, el controlador de potencia puede proporcionar con éxito el nivel de amortiguamiento requerido. Con esto en mente, (Maravandi & Moallem, 2015) [47] propusieron un AR electromecánico bajo el principio de operación del mecanismo tipo tornillo algebraico. Este mecanismo estaba conformado únicamente por dos eslabones para convertir el movimiento vertical bidireccional en uno de rotación unidireccional para accionar el eje del generador eléctrico rotatorio. Tal diseño demostró la ventaja de la simplicidad estructural de bajo peso, y consecuentemente baja inercia rotacional del mecanismo de conversión de movimiento. En efecto, los resultados obtenidos por los autores revelaron una eficiencia de conversión de energía vibratoria que oscila en el rango de 71% - 84%, la cual es una eficiencia alta comparada con muchos otros ARs reportados en la literatura.



Figura 2.14 Prototipo del mecanismo tipo tornillo algebraico [46].

Inspirado en el mecanismo de dos eslabones, (Syuhri et al., 2017) [48] propusieron un AR incorporando una transmisión de engranes epicíclicos que permitía aumentar la velocidad de rotación del eje del generador eléctrico. Además, el estudio de simulación computacional demostró que la potencia máxima generada puede ser de hasta 20 W, con una eficiencia de conversión de energía superior al 80%. Con esto en mente, (R. Zhang, Wang, al Shami, et al., 2018) [3] diseñaron un novedoso AR electromecánico de accionamiento indirecto basado en el novedoso mecanismo tipo brazo – dentado, como el que se muestra en la Figura 2.15, el cual se enfoca principalmente en el mejoramiento de la amplificación de movimiento y la eliminación de las fluctuaciones de fuerzas de inercia mediante la incorporación de un volante de inercia. Además, los autores demostraron que la potencia máxima para el diseño propuesto es 50 veces superior que aquella obtenida por los ARs de accionamiento directo (ARs electromagnéticos lineales). Más importante aún, el sistema de accionamiento indirecto también presenta un mayor confort de conducción hasta los 13 Hz de frecuencia de excitación. Con el fin de aumentar la eficiencia de conversión de energía vibratoria y consecuentemente la potencia eléctrica recolectada, los mismos investigadores (R. Zhang & Wang, 2019) [49] llevaron a cabo un proceso de optimización del AR electromecánico mediante el método Taguchi. Recientemente, (R. Zhang et al., 2020) [50] diseñaron y fabricaron un novedoso amortiguador regenerativo con mecanismo de rectificación y amplificación de movimiento vertical bidireccional en rotacional unidireccional llamado brazo-dentado (arm-teeth mechanism). Además, los autores realizaron un análisis cuantitativo en el potencial de regeneración de energía vibratoria, demostrando que el dispositivo presenta un buen compromiso entre el índice de confort y la recolección de energía tanto en el dominio frecuencial como en el dominio del tiempo. Adicionalmente, ellos analizaron el efecto del centro de gravedad desalineado del vehículo en la regeneración de energía, demostrando que el potencial de recolección de energía no es afectado sustancialmente.

Las constantes innovaciones en los mecanismos de conversión de movimiento provocaron que, (Abdelkareem et al., 2022) [51] estudiaran la capacidad de recolección de energía de un semirremolque con 12 amortiguadores regenerativos de accionamiento indirecto, como el que se muestra en la Figura 2.15. Los resultados fueron alentadores, ya que no se afecta la dinámica general del camión. Además, los autores demostraron que, bajo una señal periódica

y armónica de amplitud de 0.035 m, y con una frecuencia de excitación de 7 Hz, cada AR electromecánico puede recolectar una potencia media de 17 W, y consecuentemente una potencial media total de 200 W considerando los 12 ARs.



Figura 2.15 Prototipo del AR electromecánico basado en el mecanismo tipo brazo dentado de accionamiento indirecto [3].

Un AR de alta eficiencia basado en una transmisión mecánica de engranes helicoidales para convertir el movimiento bidireccional en rotación unidireccional fue propuesto por (Salman et al., 2018) [52], como el que se muestra en la (Figura 2.16). Las simulaciones computacionales revelaron que el sistema presenta una respuesta dinámica rápida y estable. Además, el AR propuesto puede recolectar una potencia media de 270 W bajo una frecuencia de excitación de 2.5 Hz, con una eficiencia máxima del 52%. Adicionalmente, (Můčka, 2016) [53] realizaron simulaciones numéricas exhaustivas sobre la cuantificación de energía, bajo condiciones de carreteras reales de bases de datos disponibles considerando un modelo de un vehículo extendido de 9 grados de libertad.

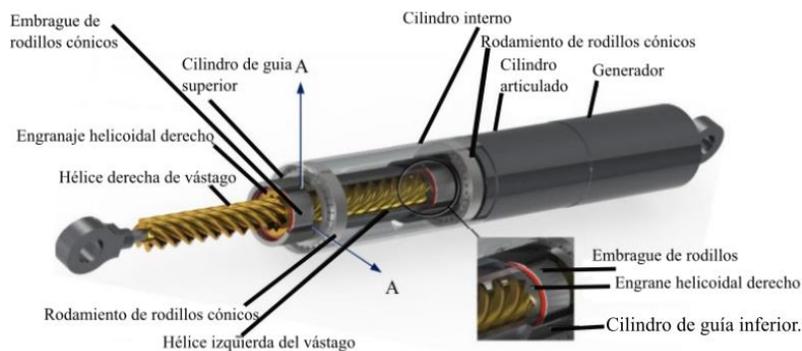


Figura 2.16 AR electromecánico con mecanismo de engranes helicoidales [52].

Recientemente, (H. Li et al., 2021) [54] propusieron un novedoso AR electromecánico basado en un mecanismo de conversión de movimiento vertical en rotación unidireccional, el mecanismo estaba constituido por dos cremalleras de roscas helicoidales de diferentes diámetros y embragues unidireccionales (Figura 2.17), cuyo fin era alimentar los dispositivos

electrónicos auxiliares del automóvil. Los resultados experimentales y teóricos mostraron una eficiencia mecánica de conversión de energía entre el 17.29% y 65.02%, con una potencia media de 17 W. Adicionalmente, (Ali et al., 2021) [55] diseñaron un mecanismo utilizando levas cilíndricas de ranura helicoidal acoplada a un seguidor. La leva cilíndrica se conecta a un diferencial con engranes cónicos y rodamientos bidireccionales, para producir movimiento bidireccional. La energía regenerada se almacenó en super capacitores para suministrar energía a elementos auxiliares de baja potencia. Adicionalmente, los resultados experimentales y de simulación numérica concluyeron que se puede recolectar una potencia máxima de 3.85 W, cuando el AR se somete a una excitación de amplitud de 7.5 mm y una frecuencia de excitación de 2 Hz. Además, el dispositivo presentó una eficiencia máxima de conversión de energía de aproximadamente 51.4 %. Con esto en mente, las empresas de la industria automotriz han implementado los amortiguadores regenerativos en sus distintas configuraciones. De hecho, Audi presentó un sistema de suspensión activa regenerativa basado en el mecanismo electromecánico llamado “eROT”, tal sistema cuenta con un algoritmo de control de respuesta instantánea, y los efectos inerciales son mínimos (Audi Developing Electromechanical Rotary Dampers; Potential for Energy Recuperation from Suspension; 48V - Green Car Congress, n.d.) [56].

Adicionalmente, (Galluzzi et al., 2021) [57] inspirados en el creciente interés por los ARs rotatorios, diseñaron un AR similar al eROT compuesto por un sistema de eslabonamiento, una caja de cambios, y una máquina eléctrica. El prototipo demostró tener una eficiencia de regeneración de energía del 59.86%, y una alta capacidad para producir fuerzas de amortiguamiento.



Figura 2.17 Estructura del AR electromecánico basado en cremalleras y engranes helicoidales. 1) cremallera helicoidal, 2) engrane helicoidal para producir rotación horaria, 3) embrague unidireccional, 4) engrane helicoidal para generar rotación antihoraria, 5) eje de accionamiento, 6) placa circular inferior, 7) acoplador mecánico, 8) caja de engranajes planetarios y 9) el generador eléctrico [54].

Por otro lado, (Dong et al., 2022) [58] realizaron una investigación en la recolección de energía vibratoria del AR con rectificador de movimiento basado en el mecanismo tornillo-bola (Figura 2.18) acoplado a la suspensión de vehículos ferroviarios. La eficiencia de conversión de energía del dispositivo es del 42.65%, y un voltaje de referencia de 12 V.

Además, se obtuvo una potencia media regenerada de hasta 2.99 W, y un voltaje de 6 V, cuando la velocidad de conducción del tren era de 100 km/h.

La constante evolución de las configuraciones de los amortiguadores regenerativos provocó que, (Salman et al., 2022) [59] propusieran un novedoso diseño de amortiguador regenerativo con un mecanismo de conversión directamente acoplado a la rueda del vehículo, tal como se muestra en la (Figura 2.19). El funcionamiento de este dispositivo se centra en los módulos de captura de vibraciones, el sistema mecánico de transmisión y conversión de movimiento, y el generador eléctrico. Además, el dispositivo incorpora un generador auxiliar para mejorar la capacidad de regeneración de energía, y al mismo tiempo controlar las fuerzas de amortiguamiento del sistema de suspensión. Los resultados demuestran que el agregar un supercapacitor y un regulador de tensión en el circuito de recolección mejora la estabilidad de la corriente eléctrica. La eficiencia de regeneración de energía del amortiguador se encuentra entre el 44% y el 62%, con una potencia generada superior a los 380 W. Recientemente, un AR que retoma los mecanismo de engranaje cónico y piñón-cremallera para la conversión de movimiento vertical bidireccional a movimiento unidireccional rotatorio fue propuesto por (Dahat et al., 2023) [60]. Los autores fabricaron tal prototipo y lo sometieron a pruebas experimentales. Los resultados demuestran que cuando la señal de excitación aumenta, el voltaje regenerado fluctúa alcanzando un pico máximo de 48 V, con una corriente eléctrica de 150 mA. Sin embargo, a altas frecuencias el índice de confort se ve comprometido.

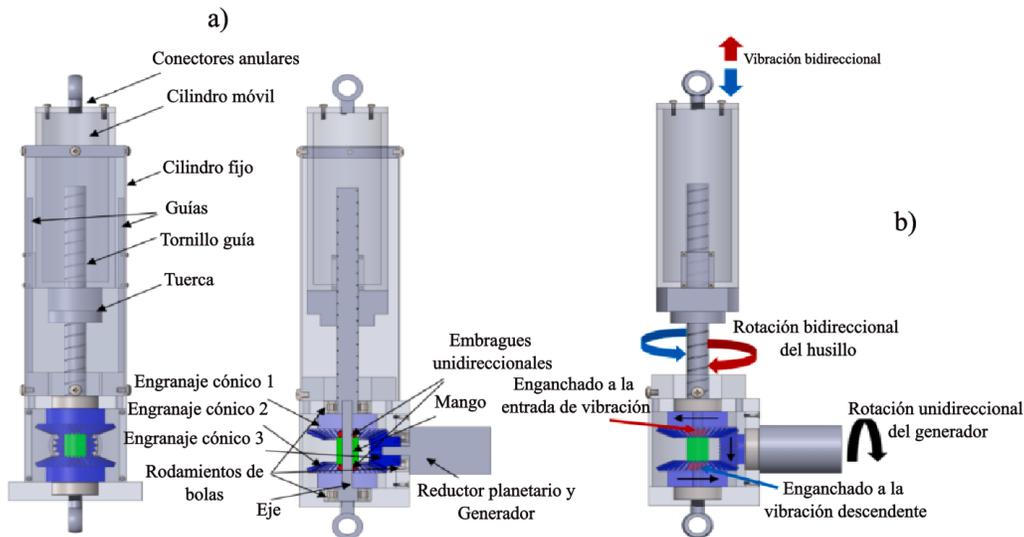


Figura 2.18 (a) Configuración estructural del AR y (b) Principio de funcionamiento del AR. (Las líneas rojas representan la vibración ascendente y el correspondiente sentido de giro de los componentes, mientras que las líneas azules representan el caso de vibración descendente. Además, las líneas negras indican que el sentido de giro no cambia con la vibración externa) [28].

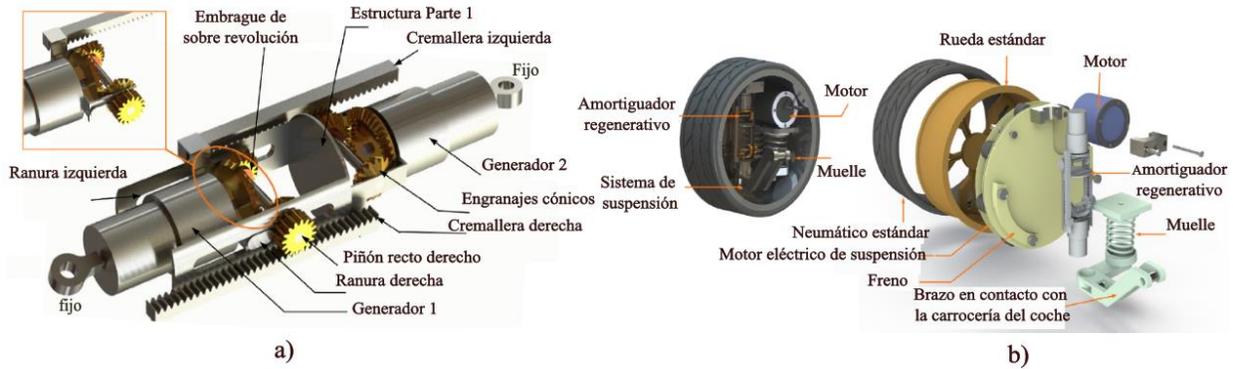


Figura 2.19 a) Detalles de la sección transversal del AR con mecanismo piñón-cremallera y b) Posición de instalación del AR en la rueda [59].

2.2.3 Amortiguadores regenerativos electrohidráulicos

Los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos se caracterizan principalmente por la incorporación en el sistema de rectificación de movimiento los siguientes elementos hidráulicos: válvulas de retención de fluido (check valves), tuberías hidráulicas, motores o bombas hidráulicas, un acumulador de gas o aceite, y un generador eléctrico. La función de las válvulas de retención es la de direccionar el fluido en una sola dirección en las tuberías, y de este modo proporcionar las fuerzas de amortiguamiento al sistema de suspensión. Por otro lado, el acumulador hidráulico garantiza la estabilidad de los niveles de fuerza de amortiguamiento en los estados de tensión y compresión del AR [electrohidráulico \(Mi et al., 2017\) \[61\]](#). Cuando el flujo de fluido dentro del cilindro hidráulico se direcciona a través de las válvulas de retención y de las tuberías hidráulicas, el motor hidráulico recibe el flujo de fluido para accionar el eje del generador eléctrico [\(Ahmad & Alam, 2017\) \[62\]](#). A diferencia de los ARs electromecánicos descritos en la subsección anterior, el AR electrohidráulico puede proporcionar grandes fuerzas de amortiguamiento. Por esta razón, [\(Fang et al., 2013\) \[63\]](#) fabricaron un amortiguador electrohidráulico que proporcionaba grandes fuerzas de amortiguamiento, y demostraron mediante pruebas experimentales que el prototipo fue capaz de recuperar alrededor de 200 W, cuando la señal de excitación era de 10 Hz y 3 mm de amplitud, con una eficiencia de regeneración de energía del 16.6%. Mas tarde, [\(C. Li & Tse, 2013\) \[64\]](#) diseñaron y fabricaron un amortiguador electrohidráulico. Este dispositivo fue diseñado para disminuir las fuerzas de impacto en los estados de tensión y compresión del AR, y a la vez suavizar la respuesta del rotor del generador eléctrico. En dicha investigación se reveló que, la máxima potencia regenerada del dispositivo es de 435.1 W, utilizando una excitación armónica predefinida de 0.02 m de amplitud y 0.8 Hz como frecuencia de excitación. Además, se observó que la eficacia de la captación de energía se deteriora drásticamente para las excitaciones de alta frecuencia y gran amplitud. Con esto en mente, [\(C. Li et al., 2014\) \[65\]](#) fabricaron un amortiguador electrohidráulico controlado por medio de cuatro válvulas de retención, ver (Figura 2.20), para accionar un generador. Esta configuración basada en las cuatro válvulas de retención mejora la fiabilidad y la durabilidad de los elementos del circuito hidráulico de rectificación del flujo de fluido. Además, los resultados revelaron que se puede cosechar una potencia máxima de 248.8 W, con una eficiencia máxima del 38.81%, considerando una excitación de tipo armónica de 8 mm de

amplitud y 2 Hz de frecuencia de excitación. Adicionalmente, (Y. Zhang et al., 2015) [66] diseñaron un AR electrohidráulico basado en el concepto de amortiguamiento asimétrico para mejorar principalmente el índice de la comodidad, logrando una eficiencia hidráulica del 73.2%. Además, mediante Algoritmos Genéticos (GA), el AR propuesto logró regenerar hasta 33.4 W, considerando la excitación de tipo sinusoidal de 1.67 Hz y 50 mm de desplazamiento.

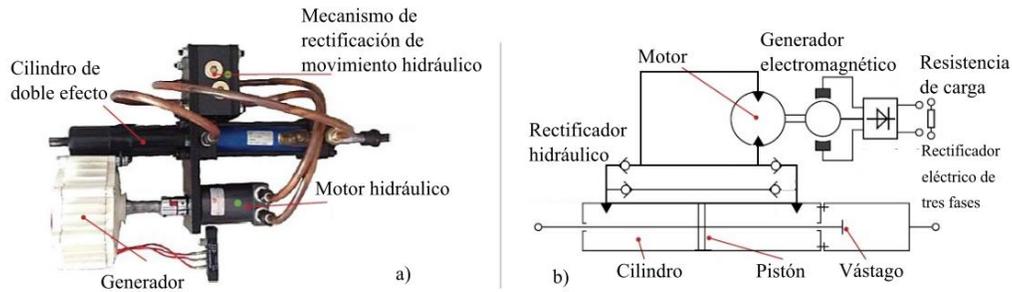


Figura 2.20 AR electrohidráulico con mecanismo de rectificación de movimiento: a) dispositivo en 3D y b) circuito hidráulico de recolección de energía [65].

Por otro lado, (Y. Zhang, Chen, et al., 2017) [4] fabricaron un amortiguador electrohidráulico principalmente para vehículos todo terreno, con el objetivo de aprovechar los movimientos bruscos que se originan en este tipo de vehículos. Este dispositivo consiste en un tubo interno ubicado entre el tubo de presión y el tubo de reserva, el cual tiene un orificio de circulación para conectar la cavidad superior con la entrada del motor hidráulico, tal como se muestra en la (Figura 2.21). Por otra parte, (Galluzzi et al.,) [67]- [68] mejoraron el diseño de los ARs electrohidráulicos, considerando aspectos de diseño, tales como: las pérdidas de energía en el circuito hidráulico, la eficiencia volumétrica de la bomba hidráulica y las eficiencias eléctricas del generador electromagnético. Luego, considerando la relación fuerza de amortiguamiento-velocidad del fluido hidráulico en el motor, se determinó una eficiencia de conversión máxima del 41.7%. Adicionalmente, (Peng et al., 2016) [69] diseñaron un sistema de suspensión con control semiactivo, y evaluaron el comportamiento de los tres principales índices de rendimiento. Los resultados demostraron que el dispositivo presentó una mejora en la disminución de la aceleración vertical del 9.2%, el índice de la carga dinámica se mejoró en 2.2%, y el índice de la deflexión del sistema de suspensión se mejoró en 6.1%. Además, la potencia generada del AR electrohidráulico fue de 41.72 W y 339.88 W, cuando la velocidad de conducción de vehículo se encuentra en el rango de 30 a 70 km/h para las carretera tipo clase B y C. Sin embargo, el sistema de control semiactivo presentó un déficit en el tiempo de respuesta, debido a que los sistemas hidráulicos carecen de actuación rápida. Mas tarde, (J. Zou et al., 2017) [70] realizaron un análisis de sensibilidad paramétrica del AR electrohidráulico para revelar la sensibilidad del índice de rendimiento de la capacidad de regeneración de energía, y concluyeron que la rigidez de los neumáticos tiene la mayor influencia en tal índice.

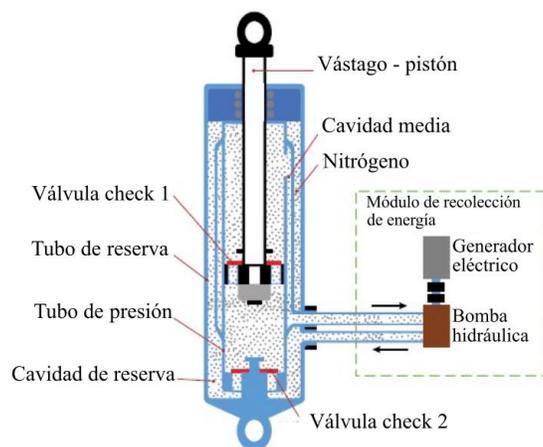


Figura 2.21 Amortiguador regenerativo electrohidráulico de doble tubo con mecanismo de rectificación de movimiento [4].

Finalmente, (J. Zou et al., 2018) [71] evaluaron la capacidad de regeneración de energía de un sistema de suspensión hidráulica interconectada (HIS-HESA), dicho diseño fue planteado en la idea subyacente de conectar todos los amortiguadores regenerativos a una unidad central de conversión de energía hidráulica a energía eléctrica, para reducir el número de componentes hidráulicos del sistema. Por lo tanto, el sistema regenerativo se constituía principalmente de cuatro amortiguadores hidráulicos con mecanismos de rectificación del flujo de fluido (HMRS), dos acumuladores de presión baja y alta, un motor hidráulico, y un circuito eléctrico de recolección de energía. Los resultados demostraron que el nuevo sistema puede regenerar más del doble de energía que los ARs electrohidráulicos convencionales (monotubo, bitubo, etc.), y se logra regenerar una potencia de alrededor de 190 watts. Además, los índices de rendimiento dinámico se ven beneficiados substancialmente. Con esto en mente, (Qin et al., 2022) [72] realizaron pruebas experimentales de la suspensión interconectada con el objetivo de revelar su efecto realista en la comodidad y seguridad de conducción. Adicionalmente, los resultados en la recolección de energía demuestran que la potencia media cosechada alcanza los 82 W, considerando una excitación de 2 Hz y amplitud de 20 mm. Para el caso de vehículos todo terreno, la potencia regenerada puede llegar hasta los 525 W, con una velocidad de conducción de 80 km/h. Recientemente, un novedoso AR electrohidráulico con arquitectura compacta fue propuesto por (Miraglia et al., 2022) [73], demostrando que es posible modificar la curva de la fuerza de amortiguamiento variando las características del circuito eléctrico, específicamente las resistencias eléctricas de carga e interna. Además, el prototipo demostró tener elevadas curvas de fuerza de amortiguamiento, en cuanto a la potencia eléctrica cosechada, el dispositivo recolectó una potencia eléctrica máxima de 75 W con una carga eléctrica de 0.465 Ω . Sin embargo, se demostró que la eficiencia de conversión se deteriora a velocidades bajas del vástago del cilindro hidráulico, debido a los efectos de fricción predominantes.

Adicionalmente, (W. Zhang et al., 2023) [74] realizaron una investigación sobre las características de amortiguamiento y recuperación de energía de un novedoso sistema de suspensión regenerativo mecánico-hidráulico de alta densidad de regeneración de energía. Después de las pruebas experimentales y simulaciones numéricas, se demostró que, al emplear un control de conmutación hidráulico para direccionar el flujo del aceite, se puede

mejorar la eficiencia de recuperación de energía y la fiabilidad de los elementos hidráulicos y mecánicos también. Además, cuando la resistencia externa cambia de 5Ω a 25Ω , la fuerza de amortiguamiento del sistema aumenta más del doble que aquella que se produce en un amortiguador de fluido viscoso convencional. Los resultados teóricos demuestran que, el dispositivo puede alcanzar una potencia eléctrica regenerada de 1 kW, con una eficiencia de conversión de energía de alrededor del 40% a baja frecuencia.

Capítulo 3

3. Marco teórico

3.1 Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones dinámicas de Lagrange se publicaron en el siglo XVIII, apenas cien años después de los principios de Newton. Tales ecuaciones, representan una alternativa potente con respecto a las ecuaciones de Newton-Euler, y son especialmente útiles para sistemas con gran cantidad de grados de libertad, que incluso, tienen más relevancia cuando la mayoría de las fuerzas que intervienen en el sistema se pueden derivar a partir de funciones potenciales. La formulación general de Lagrange para sistemas conservativos se define de la siguiente manera (Harrison & Nettleton, 1997) [75].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq n \quad (3.1)$$

donde;

\mathbb{L} es el Lagrangiano definido como $T - V$,

T es la energía cinética,

V es la energía potencial,

n es el número de grados de libertad,

q_α son las coordenadas generalizadas y,

Φ_α a Φ_n son las fuerzas generalizadas.

Además, $\frac{d}{dt}$ significa la diferenciación de los términos escalares con respecto al tiempo. La diferenciación parcial $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}$ se lleva a cabo suponiendo que los términos restantes, tales como \dot{q} , q se mantienen independientes del tiempo.

3.1.1 Coordenadas generalizadas

Un conjunto de coordenadas generalizadas es aquel en el que cada coordenada es independiente, y el número de coordenadas es suficiente para especificar completamente la configuración dinámica del sistema. Un sistema de N partículas, que se pueden mover libremente en un espacio tridimensional, requerirá $3N$ coordenadas generalizadas para especificar la configuración. Si se utilizan coordenadas cartesianas, el conjunto podría ser:

$$\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n\}$$

Si existen restricciones entre las coordenadas, el número de coordenadas independientes se reducirá. En general, si hay r ecuaciones de restricción, entonces el número de grados de libertad n será $3N - r$. Para una partícula restringida a moverse en el plano xy la ecuación

de restricción es $z = 0$. Además, si dos partículas están conectadas rígidamente entonces la ecuación de restricción estará dada por la siguiente expresión matemática:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L^2$$

3.1.2 Leyes de conservación

Si se considera ahora un sistema para el cual la fuerza es sólo la derivada a partir de un potencial dependiente de la posición. Entonces, las ecuaciones de Lagrange se pueden definir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (3.2)$$

Además, si una coordenada no aparece explícitamente en el Lagrangiano, sino que sólo aparece como su derivada temporal, entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \quad (3.3)$$

donde; $\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{constante}$. Ahora, considerando un grupo de partículas, de modo que las fuerzas dependen sólo de las posiciones relativas y del movimiento entre las partículas, y además si se consideran coordenadas cartesianas relativas a un conjunto arbitrario de ejes que están en la dirección x con respecto a un conjunto inercial de ejes, el Lagrangiano es:

$$\mathbb{L} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{2} m_i [(\dot{X} + \dot{x}_i)^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2] - V(x_i, y_i, z_i) \quad (3.4)$$

3.2 Modelos dinámicos del vehículo

Básicamente, los modelos dinámicos de los vehículos se enfocan en estudiar el movimiento de las masas suspendida y no suspendida con respecto a la excitación del perfil irregular de la carretera. Estos modelos se utilizan cada vez más en el estudio de problemas de vibración lineal y no lineal, como sistemas de aislamiento de las oscilaciones de amplio espectro de potencia. A menudo, se emplean los modelos dinámicos del vehículo para analizar el rendimiento de un sistema de suspensión tomando en cuenta los factores de conducción, maniobrabilidad y durabilidad ([Blundell & Harty, 2004](#)) [76]. Tales modelos son en esencia expresiones matemáticas que definen correctamente las dinámicas no sincronizadas de todo vehículo. Vale la pena mencionar que, el modelo dinámico del vehículo se construye utilizando formulismos matemáticos, tales como: la mecánica Newtoniana, las teorías de Hamilton y Lagrange. Según los requisitos del diseño del sistema de suspensión, el modelo dinámico del vehículo se puede modelar como un modelo de un cuarto de vehículo, un modelo de medio vehículo, y un modelo de vehículo completo. En las siguientes subsecciones se detallan las limitaciones y beneficios de cada uno de estos modelos.

3.2.1 Modelo de la carretera

El modelado matemático del perfil irregular de la carretera es importante para la simulación del sistema de suspensión, ya que es la principal fuente de excitación. Los tipos de carreteras que excitan a las ecuaciones dinámicas del vehículo se pueden clasificar en tres tipos: las carreteras de perfil armónico, de perfil tipo rampa, y las aleatorias. Las carreteras de perfil armónico incluyen ondas sinusoidales, ondas cuadradas, ondas escalonadas, ondas triangulares, etc. Estas entradas de carretera se pueden describir mediante una fórmula matemática sencilla. Por otra parte, la representación de la carretera aleatoria es un proceso matemático mucho más complejo, ya que se deben de considerar factores, tales como: la rugosidad de la carretera, velocidad de conducción del vehículo, y el proceso estocástico dado por un ruido blanco gaussiano de potencia uniforme.

3.2.2 Modelo dinámico de un cuarto de vehículo

El modelo del cuarto de vehículo ha sido el modelo de base simplificado utilizado en el estudio de algoritmos de control para sistemas de suspensión inteligentes. Aunque el modelo es muy simple y sólo se tiene en cuenta los movimientos de vibración vertical de la masa suspendida y la masa no suspendida, es muy útil para tener un panorama general del comportamiento del vehículo ante determinados factores externos ambientales. El modelo se muestra en la Figura 3.1, y consta de una masa suspendida, una masa no suspendida, un muelle y un amortiguador conectados en paralelo (Savaresi et al., 2010) [77].

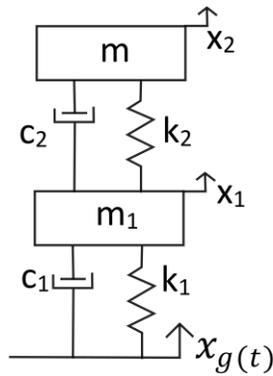


Figura 3.1 Representación del modelo de un cuarto de vehículo.

Basados en la formulación de Lagrange, las ecuaciones que describe la dinámica del modelo de un cuarto de vehículo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \underbrace{\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_g(t)} \end{cases} \quad (3.5)$$

Donde la función lagrangiana y la función de disipación de energía del sistema de suspensión se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(T, V) &= T(\dot{x}_2, \dot{x}_1) - V(\dot{x}_2, \dot{x}_1) \\ D &= \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t))^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

A través de la aplicación adecuada de las reglas de derivación clásicas a la ecuación (3.6), se obtiene fácilmente el modelo matemático del sistema de un cuarto del vehículo, tal como se describe en la ecuación (3.7).

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \\ m_1\ddot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - x_g(t)) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t)) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.3 Modelo dinámico de medio vehículo

Para tener en cuenta el movimiento de cabeceo o balanceo, muchos investigadores adoptan un modelo de medio vehículo, que se muestra en la Figura 3.2. El modelo considera la vibración vertical y los movimientos de cabeceo de la carrocería del vehículo, así como el movimiento vertical de las ruedas delanteras y traseras. En este modelo de medio vehículo se consideran cuatro grados de libertad, los cuales se mencionan a continuación:

- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda izquierda $x_f(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda derecha $x_r(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la carrocería $x(t)$.
- ❖ Ángulo de balanceo de la carrocería $\theta(t)$.

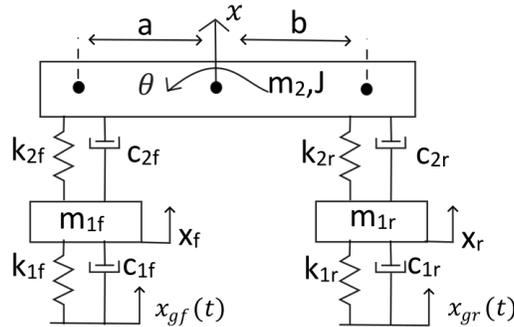


Figura 3.2 Representación cinemática del modelo de medio vehículo.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico descrito en la Figura 3.2 se pueden obtener a través del formulismo de Lagrange. Por lo tanto, para las coordenadas generalizadas x, x_f, x_r y θ , se obtienen las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_f} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_f} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} = \underbrace{\dot{x}_{gf}(t)}_{x_{gf}(t)} = \frac{-2\pi f_0 x_f(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{gf}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_r} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} = \underbrace{\dot{x}_{gr}(t)}_{x_{gr}(t)} = \frac{-2\pi f_0 x_r(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{gr}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Donde la función lagrangiana y de disipación de energía se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(T, V) &= T(\dot{x}, \dot{x}_f, \dot{x}_r, \dot{\theta}) - V(x, x_f, x_r, \theta) \\ D &= \frac{1}{2} c_{2f} (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f)^2 + \frac{1}{2} c_{2r} (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r)^2 + \frac{1}{2} c_{1f} (\dot{x}_f - \dot{x}_{gf}(t))^2 + \frac{1}{2} c_{1r} (\dot{x}_r - \dot{x}_{gr}(t))^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al desarrollar las ecuaciones (3.8) y (3.9), se obtienen las siguientes:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x} + k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{2r}(x_{fr} - x_r) + c_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) = 0 \\ m_{1f} \ddot{x}_f - k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{1f}(x_f - x_{gf}(t)) - c_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{1f}(\dot{x}_f - \dot{x}_{gf}(t)) = 0 \\ m_{1r} \ddot{x}_r - k_{2r}(x_{fr} - x_r) + k_{1r}(x_r - x_{gr}(t)) - c_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) + c_{1r}(\dot{x}_r - \dot{x}_{gr}(t)) = 0 \\ J \ddot{\theta} - a(k_{2f}(x_{fl} - x_f) - c_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f)) - b(k_{2r}(x_{fr} - x_r) + c_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r)) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Nótese que, la cinemática lineal del chasis del modelo de medio vehículo se puede expresar de la siguiente manera.

$$\begin{cases} x_{fl} = x - a\theta \\ x_{fr} = x + b\theta \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.4 Modelo dinámico del vehículo completo

En la Figura 3.3 se muestra el modelo de automóvil completo. El sistema dinámico contiene siete grados de libertad, en el cual se incluyen el movimiento vertical del chasis y_b , el movimiento de balanceo α , el movimiento de cabeceo β , el desplazamiento vertical de las ruedas y las excitaciones independientes de la carretera. A continuación, se describen detalladamente cada uno de estos grados de libertad.

- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda delantera izquierda $x_{tfl}(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda delantera derecha $x_{tfr}(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda trasera izquierda $x_{trl}(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la rueda trasera derecha $x_{trr}(t)$.
- ❖ Desplazamiento vertical de la masa suspendida (carrocería) $y_b(t)$.
- ❖ Ángulo de balanceo de la carrocería, $\alpha(t)$.
- ❖ Ángulo de cabeceo de la carrocería, $\beta(t)$.

Debido a que el sistema del vehículo completo tiene siete grados de libertad, entonces se originan siete ecuaciones dinámicas correspondientes a cada coordenada generalizada $y_b, \alpha, \beta, y_{trr}, y_{trl}, y_{tfr}$ y y_{tfl} .

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_b} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_b} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srr}} = \underbrace{\dot{x}_{trr}(t) = -2\pi f_0 x_{trr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{trr}(t)} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srl}} = \underbrace{\dot{x}_{trl}(t) = -2\pi f_0 x_{trl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{trl}(t)} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfr}} = \underbrace{\dot{x}_{tfr}(t) = -2\pi f_0 x_{tfr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{tfr}(t)} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfl}} = \underbrace{\dot{x}_{tfl}(t) = -2\pi f_0 x_{tfl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{tfl}(t)}
 \end{cases} \quad (3.12)$$

Entonces, la función lagrangiana y de disipación de energía para el sistema dinámico del modelo de vehículo completo se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 L(T, V) &= T(\dot{y}_b, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{y}_{srr}, \dot{y}_{srl}, \dot{y}_{sfr}, \dot{y}_{sfl}) - V(\dot{y}_b, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{y}_{srr}, \dot{y}_{srl}, \dot{y}_{sfr}, \dot{y}_{sfl}) \\
 D &= \frac{1}{2} c_{srr} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr})^2 + \frac{1}{2} c_{srl} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl})^2 + \frac{1}{2} c_{sfr} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr})^2 + \frac{1}{2} c_{sfl} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} c_{trr} (\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr})^2 + \frac{1}{2} c_{trl} (\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl})^2 + \frac{1}{2} c_{tfr} (\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr})^2 + \frac{1}{2} c_{tfl} (\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl})^2
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

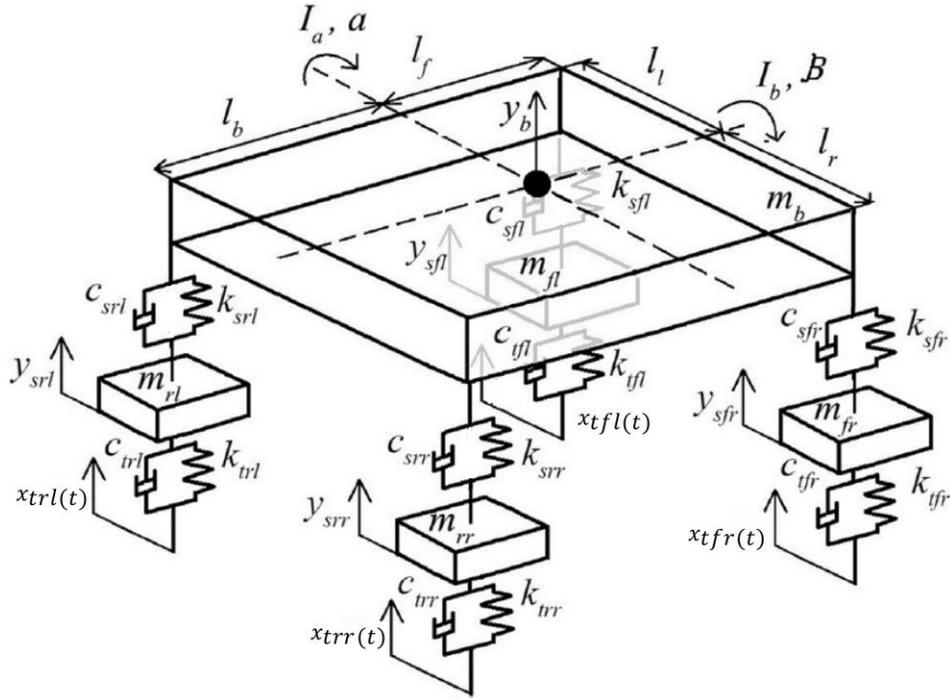


Figura 3.3 Representación cinemática del modelo de vehículo completo.

Desarrollando la ecuación (3.12) y (3.13), se obtiene el modelo matemático del vehículo completo dado por la ecuación (3.14).

$$\begin{cases}
 m_b \ddot{y}_b + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
 \quad + c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) = 0 \\
 I_a \ddot{\alpha} - l_b (c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl})) \\
 \quad + l_f (c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl})) = 0 \\
 I_b \ddot{\beta} + l_r (c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr})) \\
 \quad - l_l (c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl})) = 0 \\
 m_{rr} \ddot{y}_{srr} - c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{trr}(\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr}) - k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{trr}(y_{srr} - x_{trr}) = 0 \\
 m_{rl} \ddot{y}_{srl} - c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{trl}(\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl}) - k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{trl}(y_{srl} - x_{trl}) = 0 \\
 m_{fr} \ddot{y}_{sfr} - c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{tfr}(\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr}) - k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{tfr}(y_{sfr} - x_{tfr}) = 0 \\
 m_{fl} \ddot{y}_{sfl} - c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + c_{tfl}(\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl}) - k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) + k_{tfl}(y_{sfl} - x_{tfl}) = 0
 \end{cases} \quad (3.14)$$

Nótese que, la cinemática lineal del chasis se puede expresar de la siguiente manera, con ángulos pequeños para β y α :

$$\begin{cases}
 x_{srr} = y_b + l_r \beta - l_b \alpha \\
 x_{srl} = y_b - l_l \beta - l_b \alpha \\
 x_{sfr} = y_b + l_r \beta + l_f \alpha \\
 x_{sfl} = y_b - l_l \beta + l_f \alpha
 \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3 Procesos estocásticos

Las vibraciones aleatorias se pueden originar a través de algunos medios, como pueden ser: el flujo turbulento de los gases o líquidos, el paso de los vehículos que circulan por superficies irregulares de las carreteras, en las olas marítimas agitadas, cuando se producen sismos, entre otros fenómenos físicos. En el campo de la ingeniería aeroespacial también se han proporcionado ejemplos de vibraciones aleatorias, los cuales se suelen clasificar en tres grupos: el vuelo a través de la turbulencia atmosférica, las fuerzas originadas por el flujo de fluido del aire en las aeronaves, y el ruido mezclado a diferentes frecuencias de los gases expulsados por los motores de los aviones. Sin embargo, el cálculo matemático de la respuesta dinámica de una estructura sujeta a estos tipos de carga es complicado. Especialmente, si las propiedades estadísticas continuas cambian en el dominio del tiempo. Por otra parte, cuando las propiedades de estas señales estocásticas no cambian con respecto del tiempo, existen métodos tanto analíticos como numéricos para calcular y evaluar la respuesta dinámica del sistema (Thorby, 2008) [78].

3.3.1 Proceso estacionario

Matemáticamente, para poder realizar el análisis de señales estocásticas se deben cumplir dos características fundamentales, las cuales son: *estacionariedad* y *ergodicidad*. La estacionariedad se aplica generalmente a señales aleatorias con media temporal igual a cero, y además sus propiedades estadísticas como la media, varianza y covarianza son constantes con respecto del tiempo. En cambio, la ergodicidad es aplicable a un ensamble de un número grande de señales aleatorias nominales, registradas en condiciones similares. Vale la pena mencionar que, si todas estas señales tienen propiedades estadísticas similares, se sugiere suponer que todas las señales son estacionarias del fenómeno físico como tal. En aplicaciones prácticas, es extremadamente difícil caracterizar y definir la ergodicidad del ensamble de un conjunto de señales aleatorias. Sin embargo, utilizando herramientas matemáticas sofisticadas es posible realizar la caracterización de este tipo de señales.

El concepto de estacionariedad se ilustra en la Figura 3.4, donde se muestran dos gráficas de señales estocásticas. En la gráfica (a) se hace referencia a un proceso estocástico estacionario, al seleccionar el periodo T como base para el análisis estadístico, la señal resultará ser estacionaria. Por otro lado, la gráfica (b) es claramente no estacionaria, al analizar el periodo $T1$ probablemente dará como resultado propiedades estadísticas estacionarias; sin embargo, sería en caso contrario para los periodos $T2$, $T3$, y $T4$. Las técnicas tales como el análisis wavelet han sido desarrolladas, específicamente, para tratar con las señales no estacionarias. Incluso utilizando el método convencional de la transformada discreta de Fourier, existen complicaciones al tratar con los efectos de la no estacionariedad de la señal registrada. Sin embargo, al realizar el análisis separadamente de la señal en los periodos $T1$, $T2$, $T3$, y $T4$, se reduce la precisión estadística de los resultados.

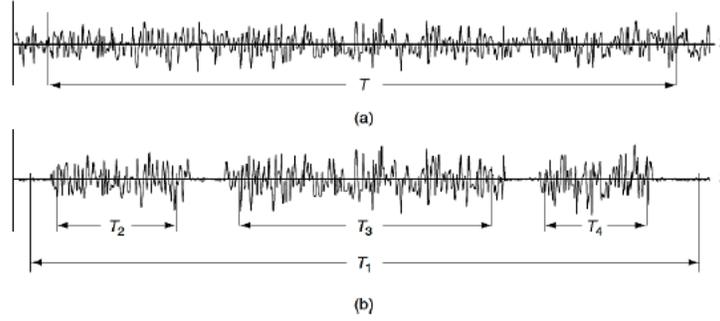


Figura 3.4 a) Señal estacionaria y, b) No estacionaria [81].

3.4 Criterio de optimización \mathcal{H}_2

El criterio \mathcal{H}_2 tiene como objetivo minimizar la energía total de vibración o el valor cuadrático medio de la señal de respuesta de algún objeto bajo excitación aleatoria (Cheung & Wong, 2011) [79]. Por lo general, las funciones objetivo a ser minimizadas son los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión, cuyas funciones explícitas son fracciones parciales impropias o propias. Existen diversos métodos de optimización que proporcionan una alta precisión en las soluciones numéricas, algunos de ellos son; Algoritmos Genéticos (GA), Programación cuadrática secuencial (SQP), Método de Newton Modificado (MNM), Gradiente Conjugado Pre condicionado (PCG) (Forst & Hoffmann, 2010) [80], entre otros. Las herramientas de optimización global tanto de Matlab como de Maplesoft proporcionan herramientas matemáticas para resolver con eficiencia los problemas de optimización no lineal multivariable con o sin restricciones de desigualdad o igualdad. Específicamente, en las herramientas de optimización de Maplesoft, se puede utilizar el comando *NLPSolve* para resolver problemas de optimización multivariables no lineales sin restricciones. Además, el comando *NLPSolve* resuelve un problema de optimización no lineal, que involucra el cálculo de un mínimo o un máximo local de una función objetivo real. Este comando devuelve un mínimo local si el problema de optimización es convexo. Debido a que las funciones objetivo obtenidas a partir del cálculo de la norma \mathcal{H}_2 son convexas en un dominio acotado, la convexidad de la minimización de dicha norma se puede obtener a partir del cálculo de los eigenvalores $|\lambda_i\{I\} - [\nabla^2 f(x)]|$ de la matriz Hessiana $H(f) = \nabla^2 f(x)$. Por lo tanto, las formulaciones de los problemas de optimización que minimizan la energía total de vibración de las respuestas dinámicas del vehículo se pueden expresar de la siguiente manera.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\{x_1, x_2, x_3, x_n\}} E[|H_{Acel}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{x_1, x_2, x_3, x_n\}} E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{x_1, x_2, x_3, x_n\}} E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{x_1, x_2, x_3, x_n\}} E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2] \\ \text{Sujeto a:} \\ \{x_1, x_2, x_3, x_n\} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Nótese que en la formulación (3.16), se trata de un problema de optimización no lineal sin restricciones de igualdad. Por tal motivo, se puede resolver por medio de la siguiente formulación matemática:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_3} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\} \in \mathbb{R}^+; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.17)$$

3.5 Ley de Kirchhoff

Existen tres elementos de un circuito eléctrico, que son importantes tener en cuenta para la realización del análisis de los circuitos de recolección de energía de los ARs, los cuales son: la resistencia R , la capacitancia C y la inductancia L . La conexión entre ellos se realiza mediante cables, llamados conductores, para formar una red o circuito, tal como se muestra en la Figura 3.5. Desde el punto de vista eléctrico, los cables no deben disipar ni almacenar energía, y se tratan como resistencias con valor igual a cero. Si se disipa energía, por ejemplo, en el caso de cables largos con una sección transversal inadecuada, se tratan como verdaderas resistencias. Las características de la resistencia, del capacitor, y del inductor se especifican en función de la energía. Idealmente, la resistencia debe disipar energía eléctrica; es inevitable que se almacene algo de energía, pero suele ser insignificante. De hecho, la resistencia se puede considerar como una oposición al flujo de corriente. Luego, el capacitor almacena energía eléctrica, mientras que el inductor almacena la energía magnética. Vale la pena mencionar que, estos elementos eléctricos tienen sus homólogos en el dominio mecánico, los cuales son: para el elemento inercial (*Inersor*) es el capacitor, para el amortiguador de fluido viscoso es la resistencia, y para el resorte es el inductor. Si la tensión y la corriente varían con el tiempo, se considera que la tensión $V(t)$ es la diferencia instantánea de tensión entre las terminales de un elemento. Se supone que la corriente $I(t)$ pasa continuamente por cada elemento de una terminal a otra [\(Keith et al., 2021\) \[81\]](#).

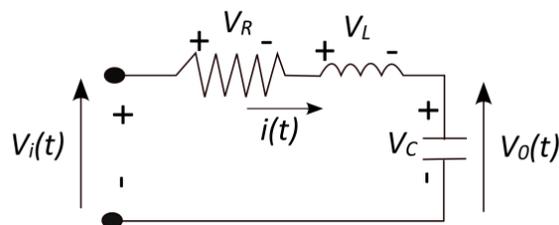


Figura 3.5 Circuito RLC (Resistencia - Inductancia - Capacitancia).

3.5.1 Análisis de circuitos

Las propiedades de las redes eléctricas se obtienen al establecer y resolver un sistema de ecuaciones algebraicas; esto produce una clara ventaja, que de otro modo se utilizarían ecuaciones integro-diferenciales dependientes del tiempo. Estas ecuaciones surgen de la aplicación de las ecuaciones de lazo y nodo de Kirchhoff a la red dada, con una relación corriente-voltaje para cada elemento. La Figura 3.6 muestra una malla simple de un circuito eléctrico conformado por los nodos A, B, C y D. Un circuito cerrado, como el ABCD, es un circuito lineal. Un circuito se considera lineal, si la corriente que lo atraviesa es proporcional a la tensión que lo atraviesa. Para el análisis de los circuitos se asume la existencia de cuatro parámetros como objetos de estudio, los cuales son: la resistencia R , la capacitancia C , la inductancia L y la inductancia mutua M . Las propiedades de estos parámetros se definen en términos de sus relaciones tensión-corriente (3.18), y por simplicidad se omite la variación armónica del tiempo $e^{j\omega t}$.

$$v = RI = j\omega LI = \frac{I}{j\omega C} \quad (3.18)$$

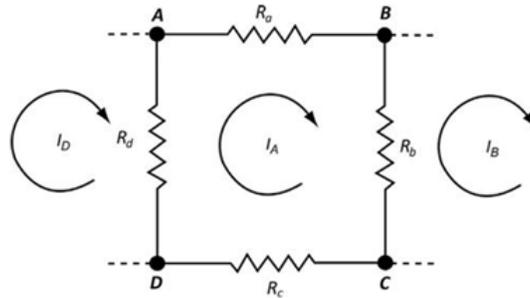


Figura 3.6 Representación de una malla creada por los nodos A, B, C y D.

3.5.2 Ley de voltaje de Kirchhoff

Se considera que la tensión $V(t)$ es la diferencia de tensión entre las terminales del elemento. Para una red arbitraria, se supone que se puede asignar una tensión única para cada nodo del circuito. La ley de voltaje de *Kirchhoff* establece que la suma de los voltajes producidos alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero:

$$\oint_{\text{Circuito}} E \cdot dl = 0 \quad (3.19)$$

3.5.3 Ley de la corriente de Kirchhoff.

La ley de la corriente (o del nodo) de Kirchhoff establece que en un nodo:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.20)$$

De esta forma, las leyes de Kirchhoff se resumen como sigue:

- La suma algebraica de las diferencias de voltaje alrededor de cualquier bucle es cero:

$$\sum v_j = 0 \quad (3.21)$$

- La suma algebraica de las corrientes hacia un punto de bifurcación es cero:

$$\sum I_j = 0 \quad (3.22)$$

A pesar de su aparente simplicidad, las leyes de Kirchhoff son fundamentales para el análisis de los circuitos eléctricos. Visto como un problema electromagnético de valores límite, sería casi imposible encontrar una solución de campo que satisfaga las condiciones de contorno con corrientes alineadas con el campo que conecten las distintas regiones con forma de la magnetósfera, representar esto con resistencias, condensadores e inductores constantes puede ser útil una vez que se comprendan las limitaciones. De acuerdo con lo anterior y retomando el circuito que se presenta en la Figura 3.5, los voltajes en la resistencia, la inductancia y el capacitor son:

$$V_R = Ri, V_L = L \frac{di}{dt} \text{ y } V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du \quad (3.23)$$

Con base en la ley de la suma de voltajes dada por la ecuación (3.21), se obtiene la siguiente:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = v_i(t) \quad (3.24)$$

3.6 Modelado matemático de un cuarto, medio y vehículo completo con AR acoplado a la suspensión automotriz

En esta sección se presentan los modelos matemáticos del vehículo, en el cual se consideran los comportamientos dinámicos que se producen al acoplar en paralelo los diferentes tipos de ARs (electromecánico, electromagnético y electrohidráulico) a una suspensión automotriz pasiva convencional.

3.6.1 AR electromecánico

El AR electromecánico y su circuito de captación de energía se muestra en la Figura 1.5, la estructura del AR electromecánico incluye la placa superior, brazos motrices (dentados), el volante de inercia, el generador eléctrico, y una caja de cambios compuesta por el portareductor planetario, engranes planetarios, corona dentada y engranaje solar. El movimiento descendente de la placa superior provoca que el mecanismo de conversión de movimiento engrane a los dientes del volante de inercia con los brazos motrices para originar rotación unidireccional del eje del generador eléctrico. Cuando la placa superior tiene movimiento

ascendente, los brazos motrices se desenganchan de los dientes del volante, lo que permite que el volante gire en dirección unidireccional opuesta [3]. Con el objetivo de predecir con exactitud el comportamiento del AR electromecánico de brazo dentado, se introduce el concepto de masa equivalente recíproca m_s para representar la masa de movimiento alternativo de la placa superior, el volante de inercia, los brazos motrices, el porta-reductor planetario, los 4 engranes planetarios y la combinación del engranaje y el generador. Asumiendo que el volante de inercia, los brazos motrices, los portar-reductores planetarios y los 4 engranajes planetarios giran a la misma velocidad angular, y debido al uso de la caja de cambios del generador y del engranaje planetario; la velocidad angular del eje del generador se incrementa substancialmente. También, se introduce un segundo concepto para representar el amortiguamiento equivalente c_L producido por los elementos móviles del mecanismo de rectificación de movimiento del AR. Por lo tanto, la masa equivalente m_s , el coeficiente de amortiguación equivalente c_L (en el apéndice A se describe el cálculo de c_L), la constante del motor k_e y la Fuerza de Lorentz F_{LR} resultante debido al movimiento relativo de las bobinas con respecto al conjunto de imanes, y la relación de amplificación de movimiento rotario n , se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
m_s &= m_{tp} + \frac{J_{FW} + J_{am} + J_{pcr} + 4 \cdot (J_p + m_p \cdot r_p^2)}{r^2} + \frac{J_g + J_s}{r^2} \cdot i^2 \\
c_L &= \frac{k_e^2 \cdot i^2}{r^2 \cdot \eta_{tp} \cdot \eta_{pg} \cdot \eta_g \cdot (R_e + R_i)} \\
k_e &= Bl \cdot r_g \\
F_{LR} &= Bl \frac{U}{R_e} \\
n &= \frac{i \cdot r_g}{r}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La formulación matemática que rigen el comportamiento dinámico del sistema de un cuarto del vehículo con AR electromecánico basado en el mecanismo brazo-dentado (Figura 2.7) que convierte el movimiento vertical bidireccional en rotacional unidireccional, se muestra en la ecuación (3.26).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \pm nF_{LR} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} \pm nF_{LR} = \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\underbrace{\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_g(t)}$$

La función lagrangiana y de disipación de energía se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L(T, V) &= T(\dot{x}_2, \dot{x}_1) - V(\dot{x}_2, \dot{x}_1) \\
D &= \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t))^2 + \frac{1}{2} c_L (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Al combinar las ecuaciones (3.26) y (3.27), además de agregar la ecuación de equilibrio del voltaje eléctrico U generada por el AR electromecánico, se obtiene el modelo matemático que

rige tanto el comportamiento en el dominio mecánico como en el dominio eléctrico del AR electromecánico acoplado al modelo de la cuarta parte del vehículo. Estas son:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 + m_s(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_L(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + Bl \frac{U}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 - m_s(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - x_g(t)) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_L(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t)) - Bl \frac{U}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\ L_e \frac{\dot{U}}{R_e} + \frac{U}{R_e}(R_e + R_i) = \frac{k_e i}{r}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (3.28)$$

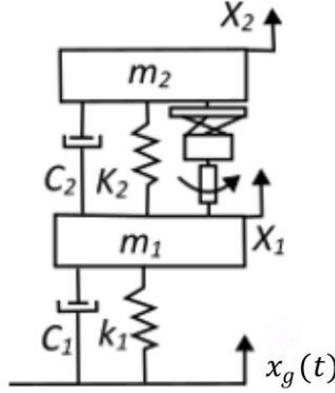


Figura 3.7 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo con AR electromecánico de mecanismo brazo-dentado.

Para obtener el modelo dinámico de medio vehículo basado en los ARs electromecánicos, implica acoplar un AR en cada esquina de la mitad del chasis del vehículo. Si se considera que j se refiere al j -ésimo AR, la formulación de las ecuaciones dinámicas para el medio vehículo basado en ARs electromecánicos es:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \pm nF_{LRj} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \pm nF_{LRj} l_i = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_f} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_f} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{gf}(t) = -2\pi f_0 x_f(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{gf}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_r} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{gr}(t) = -2\pi f_0 x_r(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}_{x_{gr}(t)} \end{cases} \quad (3.29)$$

donde l_i representa el brazo de palanca de la fuerza de Lorentz, que se mide desde el centro de gravedad del chasis hasta cada esquina, y puede tomar el valor de la distancia a o b . En este modelo del medio vehículo se tendrán dos ecuaciones de equilibrio para los voltajes generados por los amortiguadores regenerativos, los cuales se denotan por U_f y U_r para la parte frontal y trasera, respectivamente. Por lo tanto, el modelo matemático está dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_2 \ddot{x} + m_s (\ddot{x}_{xfl} - \ddot{x}_f) + m_s (\ddot{x}_{xfr} - \ddot{x}_r) + c_{2f} (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_L (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{2r} (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) \\
+ c_L (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) + k_{2f} (x_{fl} - x_f) + k_{2r} (x_{fr} - x_r) + Bl \frac{U_f}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + Bl \frac{U_r}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
J \ddot{\theta} - am_s (\ddot{x}_{xfl} - \ddot{x}_f) + bm_s (\ddot{x}_{xfr} - \ddot{x}_r) - ac_{2f} (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) - ac_L (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + bc_{2r} (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) \\
+ bc_L (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) - ak_{2f} (x_{fl} - x_f) + bk_{2r} (x_{fr} - x_r) + aBl \frac{U_f}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} - bBl \frac{U_r}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
m_{1f} \ddot{x}_f - m_s (\ddot{x}_{xfl} - \ddot{x}_f) - c_{2f} (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) - c_L (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{1f} (\dot{x}_f - \dot{x}_{gf}(t)) - k_{2f} (x_{fl} - x_f) \\
+ k_{1f} (x_f - x_{gf}(t)) - Bl \frac{U_f}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
m_{1r} \ddot{x}_r - m_s (\ddot{x}_{xfr} - \ddot{x}_r) - c_{2r} (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) - c_L (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) + c_{1r} (\dot{x}_r - \dot{x}_{gr}(t)) - k_{2r} (x_{fr} - x_r) \\
+ k_{1r} (x_r - x_{gr}(t)) - Bl \frac{U_r}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
L_e \frac{\dot{U}_f}{R_e} + \frac{U_f}{R_e} (R_e + R_i) = \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) \\
L_e \frac{\dot{U}_r}{R_e} + \frac{U_r}{R_e} (R_e + R_i) = \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r)
\end{array} \right. \quad (3.30)$$

El modelo del vehículo completo considera las dinámicas de balanceo, de giñada, así como la dinámica vertical del chasis, además de considerar al j -ésimo AR correspondiente a las 4 esquinas. Las ecuaciones dinámicas del modelo del vehículo completo se obtienen a través del balance de energía con el formulismo de Lagrange.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_b} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_b} \pm nF_{LRj} = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \pm nF_{LRj} l_k = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} \pm nF_{LRj} l_k = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srr}} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{trr}(t) = -2\pi f_0 x_{trr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{trr}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srl}} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{trl}(t) = -2\pi f_0 x_{trl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{trl}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfr}} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{tfr}(t) = -2\pi f_0 x_{tfr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{tfr}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfl}} \pm nF_{LRj} = \underbrace{\dot{x}_{tfl}(t) = -2\pi f_0 x_{tfl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{tfl}(t)}
\end{array} \right. \quad (3.31)$$

donde l_k es el brazo de palanca de la fuerza de Lorentz, y puede tomar los siguientes valores l_r , l_f , l_b y l_l . Nótese que, se requieren de cuatro ecuaciones en el dominio eléctrico para los ARs acoplados al modelo del vehículo completo. Bajo este requerimiento, el voltaje generado por cada AR se denota como U_{fr} , U_{fl} , U_{rr} y U_{rl} que, de hecho, corresponden al voltaje generado por el AR electromecánico frontal derecho, frontal izquierdo, trasero derecho y trasero izquierdo, respectivamente. Al combinar la ecuación (3.31) con la (3.13) se obtiene la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& m_b \ddot{y}_b + m_s (\ddot{x}_{srr} - \ddot{y}_{srr}) + m_s (\ddot{x}_{srl} - \ddot{y}_{srl}) + m_s (\ddot{x}_{sfr} - \ddot{y}_{sfr}) + m_s (\ddot{x}_{sfl} - \ddot{y}_{sfl}) + c_{srr} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_L (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) \\
& + c_{srl} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_L (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfr} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_L (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + c_L (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) \\
& + k_{srr} (x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl} (x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfr} (x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl} (x_{sfl} - y_{sfl}) \\
& + Bl \frac{U_{fr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + Bl \frac{U_{fl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + Bl \frac{U_{rr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + Bl \frac{U_{rl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{\alpha} l_a - l_b m_s (\ddot{x}_{srr} - \ddot{y}_{srr}) - l_b m_s (\ddot{x}_{srl} - \ddot{y}_{srl}) + l_f m_s (\ddot{x}_{sfr} - \ddot{y}_{sfr}) + l_f m_s (\ddot{x}_{sfl} - \ddot{y}_{sfl}) - l_b c_{srr} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) \\
- l_b c_L (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) - l_b c_{srl} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) - l_b c_L (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + l_f c_{sfr} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + l_f c_L (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) \\
+ l_f c_{sfl} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + l_f c_L (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) - l_b k_{srr} (x_{srr} - y_{srr}) - l_b k_{srl} (x_{srl} - y_{srl}) + l_f k_{sfr} (x_{sfr} - y_{sfr}) \\
+ l_f k_{sfl} (x_{sfl} - y_{sfl}) - l_b Bl \frac{U_{rr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} - l_b Bl \frac{U_{rl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + l_f Bl \frac{U_{fr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + l_f Bl \frac{U_{fl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{\beta} l_b + l_r m_s (\ddot{x}_{srr} - \ddot{y}_{srr}) - l_l m_s (\ddot{x}_{srl} - \ddot{y}_{srl}) + l_r m_s (\ddot{x}_{sfr} - \ddot{y}_{sfr}) - l_l m_s (\ddot{x}_{sfl} - \ddot{y}_{sfl}) + l_r c_{srr} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) \\
+ l_r c_L (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) - l_l c_{srl} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) - l_l c_L (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + l_r c_{sfr} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + l_r c_L (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) \\
- l_l c_{sfl} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) - l_l c_L (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + l_r k_{srr} (x_{srr} - y_{srr}) - l_l k_{srl} (x_{srl} - y_{srl}) + l_r k_{sfr} (x_{sfr} - y_{sfr}) \\
- l_l k_{sfl} (x_{sfl} - y_{sfl}) + l_r Bl \frac{U_{rr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} - l_l Bl \frac{U_{rl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} + l_r Bl \frac{U_{fr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} - l_l Bl \frac{U_{fl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{y}_{srr} m_{rr} - m_s (\ddot{x}_{srr} - \ddot{y}_{srr}) - c_{srr} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) - c_L (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{trr} (\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr}) - k_{srr} (x_{srr} - y_{srr}) \\
+ k_{trr} (y_{srr} - x_{trr}) - Bl \frac{U_{rr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{y}_{srl} m_{rl} - m_s (\ddot{x}_{srl} - \ddot{y}_{srl}) - c_{srl} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) - c_L (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{trl} (\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl}) - k_{srl} (x_{srl} - y_{srl}) \\
+ k_{trl} (y_{srl} - x_{trl}) - Bl \frac{U_{rl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{y}_{sfr} m_{fr} - m_s (\ddot{x}_{sfr} - \ddot{y}_{sfr}) - c_{sfr} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) - c_L (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{tfr} (\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr}) - k_{sfr} (x_{sfr} - y_{sfr}) \\
+ k_{tfr} (y_{sfr} - x_{tfr}) - Bl \frac{U_{fr}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\ddot{y}_{sfl} m_{fl} - m_s (\ddot{x}_{sfl} - \ddot{y}_{sfl}) - c_{sfl} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) - c_L (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + c_{tfl} (\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl}) - k_{sfl} (x_{sfl} - y_{sfl}) \\
+ k_{tfl} (y_{sfl} - x_{tfl}) - Bl \frac{U_{fl}}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\
\frac{L}{R_e} \ddot{U}_{rr} + \frac{U_{rr}}{R_e} (R_i + R_e) - \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) = 0 \\
\frac{L}{R_e} \ddot{U}_{rl} + \frac{U_{rl}}{R_e} (R_i + R_e) - \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) = 0 \\
\frac{L}{R_e} \ddot{U}_{fr} + \frac{U_{fr}}{R_e} (R_i + R_e) - \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) = 0 \\
\frac{L}{R_e} \ddot{U}_{fl} + \frac{U_{fl}}{R_e} (R_i + R_e) - \frac{k_e i}{r} (\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) = 0
\end{aligned} \right. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

3.6.2 AR electromagnético

Por su parte, el AR electromagnético tiene su bobina e imanes conectados directamente a la masa amortiguada y a la masa no amortiguada, respectivamente. Como resultado, la energía eléctrica se genera cuando hay movimiento relativo entre la bobina y los imanes. Una de las principales ventajas de los ARs electromagnéticos es su sencillez y simplicidad estructural, que lo hace más duradero y robusto. A diferencia del AR electromecánico, en el electromagnético no está presente el concepto de masa equivalente, ya que los movimientos de las bobinas e imanes son independientes, y consecuentemente el efecto de amortiguamiento equivalente c_L no se presenta en este tipo de AR. Por otro lado, la fuerza de Lorentz no es amplificada por ningún mecanismo, por lo tanto, el factor de amplificación no se considera.

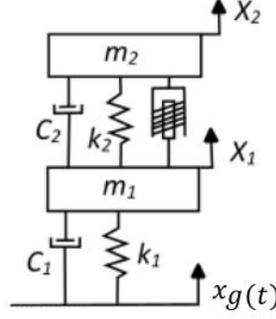


Figura 3.8 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo basado en el AR electromagnético.

Extrapolando las ecuaciones (3.26), (3.27), y tomando en cuenta que la fuerza de Lorentz del AR electromagnético no se amplifica por un mecanismo de conversión de movimiento, el modelo matemático para un cuarto del vehículo se puede escribir de la siguiente manera.

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + Bl \frac{U}{R_e} = 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - x_g(t)) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t)) - Bl \frac{U}{R_e} = 0 \\ L_e \frac{\dot{U}}{R_e} + \frac{U}{R_e} (R_e + R_i) = Bl(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (3.33)$$

donde Bl es el coeficiente de acoplamiento electromecánico del AR electromagnético dado en unidades físicas Tesla por metro. Similarmente, el modelo matemático para medio vehículo con AR electromagnético se obtiene al realizar el mismo procedimiento como el que se muestra en la formulación (3.29). Después de realizar dichos tratamientos algebraicos, se obtienen las siguientes:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x} + c_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) + k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{2r}(x_{fr} - x_r) \\ \quad + Bl \frac{U_f}{R_e} + Bl \frac{U_r}{R_e} = 0 \\ J \ddot{\theta} - ac_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + bc_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) - ak_{2f}(x_{fl} - x_f) + bk_{2r}(x_{fr} - x_r) \\ \quad + aBl \frac{U_f}{R_e} - bBl \frac{U_r}{R_e} = 0 \\ m_{1f} \ddot{x}_f - c_{2f}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) + c_{1f}(\dot{x}_f - \dot{x}_{gf}(t)) - k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{1f}(x_f - x_{gf}(t)) \\ \quad - Bl \frac{U_f}{R_e} = 0 \\ m_{1r} \ddot{x}_r - c_{2r}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) + c_{1r}(\dot{x}_r - \dot{x}_{gr}(t)) - k_{2r}(x_{fr} - x_r) + k_{1r}(x_r - x_{gr}(t)) \\ \quad - Bl \frac{U_r}{R_e} = 0 \\ L_e \frac{\dot{U}}{R_e} + \frac{U}{R_e} (R_e + R_i) = Bl(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_f) \\ L_e \frac{\dot{U}}{R_e} + \frac{U}{R_e} (R_e + R_i) = Bl(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_r) \end{cases} \quad (3.34)$$

Finalmente, el modelo del vehículo completo con AR electromagnético queda representado por la ecuación (3.35).

$$\begin{cases}
m_b \ddot{y}_b + c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) \\
+ k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
+ Bl \frac{U_{fr}}{R_e} + Bl \frac{U_{fl}}{R_e} + Bl \frac{U_{rr}}{R_e} + Bl \frac{U_{rl}}{R_e} = 0 \\
\ddot{\alpha} l_a - l_b c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) - l_b c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + l_f c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + l_f c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) \\
- l_b k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) - l_b k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + l_f k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + l_f k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
- l_b Bl \frac{U_{rr}}{R_e} - l_b Bl \frac{U_{rl}}{R_e} + l_f Bl \frac{U_{fr}}{R_e} + l_f Bl \frac{U_{fl}}{R_e} = 0 \\
\ddot{\beta} l_b + l_r c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) - l_l c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + l_r c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) - l_l c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) \\
+ l_r k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) - l_l k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + l_r k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) - l_l k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
+ l_r Bl \frac{U_{rr}}{R_e} - l_l Bl \frac{U_{rl}}{R_e} + l_r Bl \frac{U_{fr}}{R_e} - l_l Bl \frac{U_{fl}}{R_e} = 0 \\
\ddot{y}_{srr} m_{rr} - c_{srr}(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) + c_{trr}(\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr}) - k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{trr}(y_{srr} - x_{trr}) \\
- Bl \frac{U_{rr}}{R_e} = 0 \\
\ddot{y}_{srl} m_{rl} - c_{srl}(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) + c_{trl}(\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl}) - k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{trl}(y_{srl} - x_{trl}) \\
- Bl \frac{U_{rl}}{R_e} = 0 \\
\ddot{y}_{sfr} m_{fr} - c_{sfr}(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) + c_{tfr}(\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr}) - k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{tfr}(y_{sfr} - x_{tfr}) \\
- Bl \frac{U_{fr}}{R_e} = 0 \\
\ddot{y}_{sfl} m_{fl} - c_{sfl}(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl}) + c_{tfl}(\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl}) - k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) + k_{tfl}(y_{sfl} - x_{tfl}) \\
- Bl \frac{U_{fl}}{R_e} = 0 \\
\frac{L}{R_e} \dot{U}_{rr} + \frac{U_{rr}}{R_e} (R_i + R_e) = Bl(\dot{x}_{srr} - \dot{y}_{srr}) \\
\frac{L}{R_e} \dot{U}_{rl} + \frac{U_{rl}}{R_e} (R_i + R_e) = Bl(\dot{x}_{srl} - \dot{y}_{srl}) \\
\frac{L}{R_e} \dot{U}_{fr} + \frac{U_{fr}}{R_e} (R_i + R_e) = Bl(\dot{x}_{sfr} - \dot{y}_{sfr}) \\
\frac{L}{R_e} \dot{U}_{fl} + \frac{U_{fl}}{R_e} (R_i + R_e) = Bl(\dot{x}_{sfl} - \dot{y}_{sfl})
\end{cases} \quad (3.35)$$

3.6.3 AR electrohidráulico.

El amortiguador electrohidráulico posee una mayor fuerza de amortiguamiento, de hecho, este amortiguador reemplaza al amortiguador de fluido viscoso de las suspensiones convencionales, ya que su fuerza de amortiguamiento cumple con los estándares requeridos. El amortiguador que se utiliza para el análisis de sensibilidad se muestra en la Figura 1.5, el cual convierte la energía de vibración del sistema de suspensión en energía eléctrica. El actuador y el módulo de captación de energía son las partes principales. Para lograr que el aceite fluya en un solo sentido, las válvulas de retención son los elementos hidráulicos claves para lograr esto. Cuando el vástago del pistón se mueve hacia arriba (rebote) la válvula de retención 1 se cierra y la válvula de retención 2 permite el paso del fluido, el fluido de alta presión fluye a la entrada del motor hidráulico a través de la cavidad central y de la tubería para lograr accionar el eje del generador eléctrico. Después, el fluido de baja presión sale del motor hidráulico, y vuelve a la cavidad de reserva, para volver a la cavidad inferior por medio de la válvula de retención 2. En cambio, en el estado de compresión, la válvula de retención 1 se abre y la válvula 2 permanece cerrada, el aceite de alta presión fluye hacia la cavidad

superior a través de la válvula de retención 1 para que continúe fluyendo hacia la entrada del motor hidráulico para finalmente hacer girar el eje del generador. Después, el aceite de baja presión sale del motor hidráulico, y fluye hacia la cavidad de reserva y comprimirá el nitrógeno. De este modo, se puede interpretar que sin importar que el vástago se mueva hacia arriba o hacia abajo, la dirección del flujo de aceite produce un movimiento de rotación unidireccional [4].

Para el modelado dinámico del AR electrohidráulico se debe de considerar que la fuerza de amortiguamiento del sistema hidráulico se puede dividir en dos fases de operación. Estas son.

- 1) Fuerza de amortiguamiento controlable equivalente $F_{\text{semi-activa}}$, que se produce por la FEM trasera del generador, que se puede ajustar mediante la carga externa equivalente del generador eléctrico. La fuerza de amortiguación controlable equivalente se utiliza para lograr la suspensión activa y semiactiva.
- 2) Fuerza de amortiguación pasiva, que se produce por la resistencia de rotación del motor hidráulico, orificios del actuador hidráulico, tuberías de aceite y válvulas de retención.

Es importante señalar que, el caudal volumétrico que fluye a través del motor hidráulico es diferente en los estados de tensión y compresión del amortiguador. Durante el rebote, el volumen que fluye hacia el motor hidráulico es equivalente al área de la sección del anillo del pistón multiplicada por la velocidad del vástago, mientras que, en el estado de compresión, el caudal de aceite equivale al área de la sección transversal del vástago multiplicada por la velocidad de este mismo. Así, durante la carrera de rebote, los caudales de aceite para cada componente hidráulico son:

$$\begin{cases} Q_{\text{pipe}} = Q_{\text{motor}} = A_c v(t) \\ Q_{\text{valve}_1} = 0 \\ Q_{\text{valve}_2} = A_g v(t) \end{cases}, v(t) \geq 0 \quad (3.36)$$

Durante la carrera de compresión, los caudales de aceite son:

$$\begin{cases} Q_{\text{pipe}} = Q_{\text{motor}} = |A_r v(t)| \\ Q_{\text{valve}_1} = |A_g v(t)| \\ Q_{\text{valve}_2} = 0 \end{cases}, v(t) \leq 0 \quad (3.37)$$

donde $A_g = \pi D^2/4$, $A_r = \pi d_{\text{rod}}^2/4$ y $A_c = A_g - A_r$. Considerando que la fuerza de amortiguamiento controlable se puede calcular a través de una división aritmética que considera la presión y el caudal volumétrico del motor hidráulico, y también las características de funcionamiento del generador eléctrico. La relación entre la velocidad de rotación del motor y su par de salida se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{motor}} &= \frac{2\pi Q_{\text{motor}}}{q} \eta_v \\ T_{\text{motor}} &= \frac{\Delta P_{\text{motor}} q}{2\pi} \eta_m \end{aligned} \quad (3.38)$$

El voltaje de salida U_{emf} y el par de entrada $T_{generador}$ se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned}\omega_{motor} &= \frac{2\pi Q_{motor}}{q} \eta_v \\ T_{motor} &= \frac{\Delta P_{motor} q}{2\pi} \eta_m\end{aligned}\quad (3.39)$$

Dado que el generador eléctrico y el motor hidráulico están acoplados por el mismo eje de rotación. Esto implica lo siguiente.

$$\begin{aligned}\omega_{motor} &= \omega_{generador} \\ T_{motor} &= T_{generador}\end{aligned}\quad (3.40)$$

De la relación entre el diferencial de presión y el caudal volumétrico, se puede obtener la ecuación que representa la diferencial de presión controlable del motor hidráulico en función de la resistencia de carga R_e .

$$\Delta P_{motor,controlable} = \frac{4\pi k_t k_e \eta_v}{q^2 \eta_m (R_{in} + R_e)} Q_{motor}\quad (3.41)$$

Por lo tanto, las presiones controlables superior e inferior se pueden expresar como sigue:

$$\begin{cases} P_{up,controlable} = \Delta P_{motor,controlable} \\ P_{down,controlable} = 0 \end{cases}, v(t) \geq 0$$

$$\begin{cases} P_{up,controlable} = \Delta P_{motor,controlable} \\ P_{down,controlable} = \Delta P_{motor,controlable} \end{cases}, v(t) \leq 0\quad (3.42)$$

La fuerza de amortiguamiento controlable del AR se puede obtener al resolver las ecuaciones (3.36), (3.37) y (3.42). Al realizar esto, se obtiene la siguiente:

$$F_{semi-active} = A_c P_{up,controlable} - A_r P_{down,controlable}\quad (3.43)$$

Por otro lado, la fuerza de amortiguamiento pasiva se puede obtener al analizar el fenómeno de la caída de presión del módulo de captación de energía sin carga externa, tuberías hidráulicas, válvulas de retención y acumulador. Después de realizar los tratamientos algebraicos correspondientes, se produce la siguiente ecuación.

$$\Delta P_{motor,pasiva} = \frac{4\pi^2 J_g \eta_v}{q^2 \eta_m} \dot{Q}_{motor}\quad (3.44)$$

Mientras que, la caída de presión en la tubería se puede aproximar a través de la siguiente ecuación de presión:

$$\Delta P_{pipe} = \frac{128L_{pipe}\mu}{\pi d_{pipe}^4} Q_{pipe} \quad (3.45)$$

Considerando que las válvulas de retención son de disco y soportadas por un muelle helicoidal, el orificio de estas válvulas es equivalente al de una pared delgada. Por lo tanto, la relación entre la presión de trabajo y la caída de presión en las válvulas de retención se puede expresar mediante la siguiente ecuación.

$$\Delta P_{valve_i} = \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2} C_d B_{valve_i} A_{valve_i}} Q_{valve_i} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.46)$$

Luego, la presión del acumulador considera la relación entre la presión y el volumen del gas, y se puede expresar como sigue:

$$P_t = \frac{P_0 V_0^n}{(A_r \int v(t) dt + V_0)^n} \quad (3.47)$$

Las presiones en la cavidad superior e inferior se pueden definir teniendo en consideración la fuerza pasiva. Esto es.

$$\begin{cases} P_{up,pasive} = \Delta P_{motor,pasive} + P_t + \Delta P_{pipe} \\ P_{down,pasive} = P_t - \Delta P_{valve_2} \end{cases}, v(t) \geq 0 \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} P_{up,pasive} = \Delta P_{motor,pasive} + P_t + \Delta P_{pipe} \\ P_{down,pasive} = \Delta P_{motor,pasive} + P_t + \Delta P_{pipe} + \Delta P_{valve_1} \end{cases}, v(t) \leq 0$$

Por lo tanto, la fuerza pasiva total se puede calcular mediante las ecuaciones (3.36), (3.37) y (3.48). Al realizar esto, se obtiene la siguiente:

$$F_{pasiva} = A_c P_{up,pasiva} - A_g P_{down,pasiva} \quad (3.49)$$

Finalmente, la fuerza total de amortiguamiento se puede escribir como sigue:

$$F = F_{semi-active} + F_{pasiva} \quad (3.50)$$

Luego, la ecuación (3.50), se utilizará para el modelado matemático del AR electrohidráulico acoplado a los modelos dinámicos de un cuarto, medio y completo del vehículo. Además, la corriente I del generador se puede expresar de la siguiente forma:

$$I = \frac{2\pi k_e \eta_v}{q(R_i + R_e)} Q_{motor} \quad (3.51)$$

Consecuentemente, la potencia regenerada está dada por la siguiente expresión matemática:

$$P_{regenerada} = I^2 R_e \quad (3.52)$$

Las formulaciones dinámicas para el cuarto del vehículo con AR electrohidráulico son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \pm F = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} \pm F = \underbrace{\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_g(t)} \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} L(T, V) &= T(\dot{x}_2, \dot{x}_1) - V(\dot{x}_2, \dot{x}_1) \\ D &= \frac{1}{2} c_1 (\dot{x}_1 - \dot{y})^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

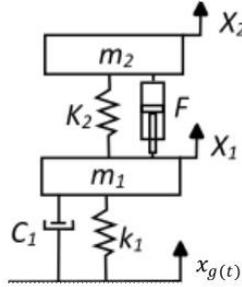


Figura 3.9 Diagrama cinemático del sistema de suspensión de un cuarto del vehículo con AR electrohidráulico.

Combinando las ecuaciones (3.53) y (3.55), se obtiene el modelo matemático del cuarto del vehículo con AR electrohidráulico.

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + F = 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - x_g(t)) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g(t)) - F = 0 \\ U - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Para el medio vehículo con AR electrohidráulico, las formulaciones matemáticas quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \pm F_j = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \pm F_j l_i = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_f} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_f} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_f} \pm F_j = \underbrace{\dot{x}_{gf}(t) = -2\pi f_0 x_f(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{gf}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_r} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} \pm F_j = \underbrace{\dot{x}_{gr}(t) = -2\pi f_0 x_r(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)} (V_t)}_{x_{gr}(t)} \end{cases} \quad (3.56)$$

De igual manera j , se refiere al j -ésimo AR electrohidráulico acoplado a las esquinas del chasis del modelo dinámico de medio vehículo. Adicionalmente, la variable l_i representa el brazo de palanca de la fuerza hidráulica que actúa en cada esquina del vehículo, la cual puede tomar los valores de las distancias a o b . Después de aplicar el formulismo de Lagrange, se obtienen fácilmente las ecuaciones dinámicas del sistema, las cuales son:

$$\begin{cases}
m_2 \ddot{x} + k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{2r}(x_{fr} - x_r) + F_f + F_r = 0 \\
J \ddot{\theta} - ak_{2f}(x_{fl} - x_f) + bk_{2r}(x_{fr} - x_r) + aF_f - bF_r = 0 \\
m_{1f} \ddot{x}_f + c_{1f}(\dot{x}_f - \dot{x}_{gf}(t)) - k_{2f}(x_{fl} - x_f) + k_{1f}(x_f - x_{gf}(t)) - F_f = 0 \\
m_{1r} \ddot{x}_r + c_{1r}(\dot{x}_r - \dot{x}_{gr}(t)) - k_{2r}(x_{fr} - x_r) + k_{1r}(x_r - x_{gr}(t)) - F_r = 0 \\
U_f - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0 \\
U_r - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0
\end{cases} \quad (3.57)$$

Finalmente, la formulación matemática para el modelo del vehículo completo equipado con AR electrohidráulico es la siguiente:

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_b} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_b} \pm F_j = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \pm F_j l_k = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} \pm F_j l_k = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srr}} \pm F_j = \frac{\dot{x}_{trr}(t) = -2\pi f_0 x_{trr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{trr}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{srl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{srl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{srl}} \pm F_j = \frac{\dot{x}_{trl}(t) = -2\pi f_0 x_{trl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{trl}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfr}} \pm F_j = \frac{\dot{x}_{tfr}(t) = -2\pi f_0 x_{tfr}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{tfr}(t)} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{sfl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_{sfl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{sfl}} \pm F_j = \frac{\dot{x}_{tfl}(t) = -2\pi f_0 x_{tfl}(t) + 2\pi n_0 W(t) \sqrt{G_x(n_0)}(V_t)}{x_{tfl}(t)}
\end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
L(T, V) &= T(\dot{y}_b, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{y}_{srr}, \dot{y}_{srl}, \dot{y}_{sfr}, \dot{y}_{sfl}) - V(\dot{y}_b, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{y}_{srr}, \dot{y}_{srl}, \dot{y}_{sfr}, \dot{y}_{sfl}) \\
D &= \frac{1}{2} c_{trr} (\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr})^2 + \frac{1}{2} c_{trl} (\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl})^2 + \frac{1}{2} c_{tfr} (\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr})^2 + \frac{1}{2} c_{tfl} (\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl})^2
\end{aligned} \quad (3.59)$$

Por último, al combinar las ecuaciones (3.58) y (3.59), se producen las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_b \ddot{y}_b + k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
\quad + F_{rr} + F_{rl} + F_{fr} + F_{fl} = 0 \\
\ddot{I}_a - l_b k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) - l_b k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + l_f k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + l_f k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
\quad - l_b F_{rr} - l_b F_{rl} + l_f F_{fr} + l_f F_{fl} = 0 \\
\ddot{\beta} I_b + l_r k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) - l_l k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + l_r k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) - l_l k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) \\
\quad + l_r F_{rr} - l_l F_{rl} + l_r F_{fr} - l_l F_{fl} = 0 \\
\ddot{y}_{srr} m_{rr} + c_{trr}(\dot{y}_{srr} - \dot{x}_{trr}) - k_{srr}(x_{srr} - y_{srr}) + k_{trr}(y_{srr} - x_{trr}) - F_{rr} = 0 \\
\ddot{y}_{srl} m_{rl} + c_{trl}(\dot{y}_{srl} - \dot{x}_{trl}) - k_{srl}(x_{srl} - y_{srl}) + k_{trl}(y_{srl} - x_{trl}) - F_{rl} = 0 \\
\ddot{y}_{sfr} m_{fr} + c_{tfr}(\dot{y}_{sfr} - \dot{x}_{tfr}) - k_{sfr}(x_{sfr} - y_{sfr}) + k_{tfr}(y_{sfr} - x_{tfr}) - F_{fr} = 0 \\
\ddot{y}_{sfl} m_{fl} + c_{tfl}(\dot{y}_{sfl} - \dot{x}_{tfl}) - k_{sfl}(x_{sfl} - y_{sfl}) + k_{tfl}(y_{sfl} - x_{tfl}) - F_{fl} = 0 \\
U_{rr} - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0 \\
U_{rl} - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0 \\
U_{fr} - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0 \\
U_{fl} - L \frac{dI}{dt} - I(R_i + R_e) = 0
\end{array} \right. \quad (3.60)$$

3.7 Comparación de la potencia regenerada por los ARs utilizando un motor monofásico y/o trifásico.

El módulo del generador es una de las partes más importantes de los ARs, ya que convierte la energía de vibración en energía eléctrica. Para mejorar la instalación del módulo de energía, el generador debe tener un volumen pequeño y de peso bajo. Por otro lado, la inercia rotacional del rotor y las pérdidas de cobre deben ser pequeñas para aumentar la eficiencia de captación de energía. En la literatura se han utilizado principalmente dos tipos de generadores eléctricos para la generación de energía, los cuales son: el generador DC clásico y el generador DC sin escobillas. La diferencia entre estos dos tipos de generadores con respecto a su densidad de recolección de energía depende fuertemente de la cantidad física del flujo de campo magnético que estos puedan proporcionar al sistema de bobinas; por lo tanto, existen generadores monofásicos y trifásicos. Ahora bien, en la Figura 3.10 se muestra la comparación del potencial de regeneración de energía vibratoria entre un generador DC clásico y un generador DC sin escobillas. Para dicha comparación, se simuló el modelo de un cuarto de vehículo con AR electromecánico, y una señal de excitación senoidal de 0.050 m de amplitud a una frecuencia de 4 Hz.

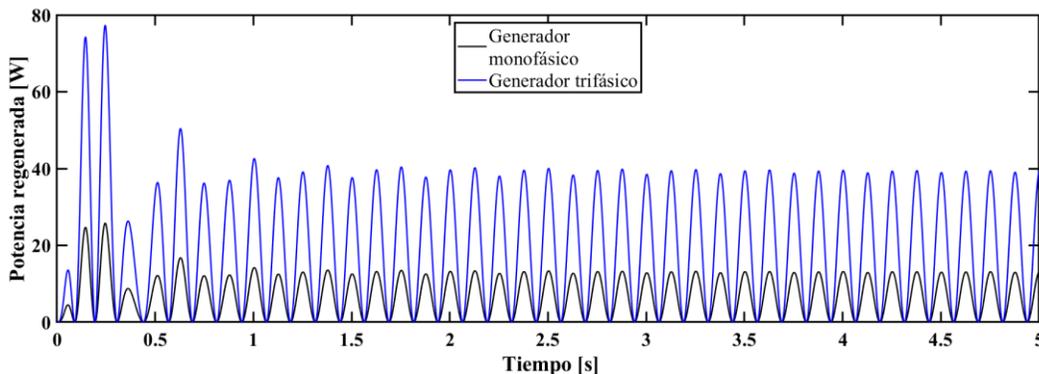


Figura 3.10 Comparación de la densidad de recolección de energía vibratoria de un generador DC sin escobillas (trifásico) y un generador monofásico.

3.8 Balance de energía estocástica.

Dado un sistema de un solo grado de libertad amortiguado sometido a un movimiento horizontal, su ecuación de movimiento se puede escribir como sigue:

$$m\ddot{v}_t + c\dot{v} + f_s = 0 \quad (3.61)$$

donde m y c representan la masa y el coeficiente de amortiguamiento de la estructura, respectivamente. Luego, f_s es la fuerza de restauración de la parte elástica de la estructura, mientras que $v_t = v + v_g$ es el desplazamiento absoluto de la masa, v es el desplazamiento relativo de la masa con respecto al desplazamiento del suelo denotado como v_g .

3.8.1 Método 1- Derivación de la ecuación de energía absoluta.

Al integrar la ecuación (3.61) con respecto a v desde el momento en que comienza la excitación del movimiento del suelo, se origina la siguiente expresión matemática.

$$\int m\ddot{v}_t dt + \int c\dot{v} dv + \int f_s dv = 0 \quad (3.62)$$

Reemplazando a v por $v_t - v_g$ en el primer término de la ecuación (3.62), se obtiene la siguiente:

$$\int m\ddot{v}_t dt = \int m\ddot{v}_t (dv_t - dv_g) = \int m \frac{d\dot{v}_t}{dt} dv_t - \int m\ddot{v}_t dv_g = \frac{m(\dot{v}_t)^2}{2} - \int m\ddot{v}_t dv_g \quad (3.63)$$

Al comparar las ecuaciones (3.62) y (3.63), se obtiene la siguiente.

$$\frac{m(\dot{v}_t)^2}{2} + \int c\dot{v} dv + \int f_s dv = \int m\ddot{v}_t dv_g \quad (3.64)$$

Nótese que, el primer término de la ecuación (3.64) es la energía cinética absoluta.

$$E_k = \frac{m(\dot{v}_t)^2}{2} \quad (3.65)$$

Mientras que, el segundo término de (3.64) es la energía de amortiguamiento, que siempre es un valor positivo. Esto es,

$$E_\xi = \int c\dot{v} dv = \int c\dot{v}^2 dt \quad (3.66)$$

Además, el tercer término de (3.64) es la energía absorbida, que se compone de la energía de deformación elástica recuperable y de la energía histerética irre recuperable.

$$E_a = \int f_s dv = E_s - E_h \quad (3.67)$$

El término de la derecha de la ecuación (3.64) es por definición, la energía de entrada al sistema:

$$E_i = \int m\ddot{v}_t dv_g \quad (3.68)$$

Adicionalmente, E_i se define también como la energía de entrada absoluta. Físicamente, E_i representa la fuerza de entrada al sistema, además, esta fuerza es igual a la fuerza de restauración más la fuerza de amortiguamiento. Por lo tanto, la ecuación (3.64) puede escribirse como sigue:

$$E_i = E_k + E_\xi + E_a \quad (3.69)$$

3.8.2 Método 2- Derivación de la ecuación de energía relativa.

Obsérvese que en la ecuación (3.61), f_s se puede expresar como kv para muelle linealmente elástico ($k = \text{rigidez}$). Reescribiendo la ecuación (3.61), se obtiene la siguiente.

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g \quad (3.70)$$

Integrando la ecuación (3.70) con respecto a v , se obtiene la siguiente.

$$\int m\ddot{v} dt + \int c\dot{v} dv + \int kv dv = \int -m\ddot{v}_g dv \quad (3.71)$$

Nótese que el segundo y tercer término del lado izquierdo se obtuvieron en la sección anterior. Por lo tanto, el primer término de la ecuación (3.71) se puede reescribir como sigue.

$$\int m\ddot{v} dv = \int m \frac{d\dot{v}}{dt} dv = \int m d\dot{v}(\dot{v}) = \frac{m(\dot{v})^2}{2} \quad (3.72)$$

En efecto, la ecuación (3.72), es la energía cinética relativa del sistema. Una vez más, esta expresión matemática es.

$$E_k' = \frac{m(\dot{v})^2}{2} \quad (3.73)$$

Similarmente, el término del lado derecho de la ecuación (3.71) se define convencionalmente como la energía de entrada, es decir.

$$E_i' = - \int m\ddot{v}_g dv \quad (3.74)$$

Finalmente, la ecuación de la energía relativa se expresa como sigue (Uang, 1988) [82].

$$E_i' = E_k' + E_\xi + E_a \quad (3.75)$$

3.8.3 Balance de energía basado en la conservación estadística de la energía.

Preocupados por determinar la cantidad exacta de energía térmica que se disipa en el sistema de suspensión automotriz convencional, (Luo et al., 2023) [83] propusieron recientemente soluciones analíticas para determinar correctamente el potencial de regeneración de energía vibratoria, utilizando el método de la conservación estadística de la energía. Con el fin de explorar de manera justa el potencial de captación de energía vibratoria, los autores utilizaron un modelo genérico de un cuarto del vehículo, como el que se muestra esquemáticamente en la Figura 3.11. Tal modelo vibratorio, es un sistema lineal de múltiples DOFs, compuesto principalmente de una masa no amortiguada m_1 , en la cual se conectan muchos subsistemas de n masas. El desplazamiento correspondiente a cada una de estas masas inerciales se denota como z_i ($i=2, 3, \dots, n$), respectivamente. Además, F_{sus} es la fuerza resultante del grupo de resortes, mientras que F_z es la carga dinámica del neumático.

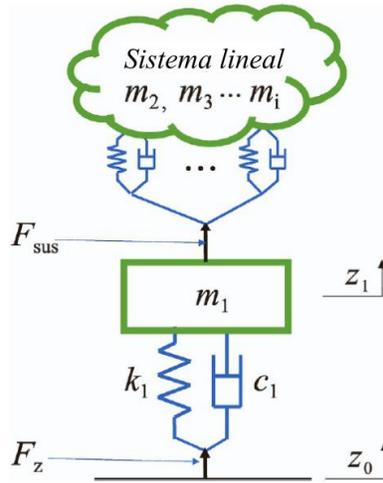


Figura 3.11 Modelo genérico del cuarto de vehículo compuesto de n masas inerciales [83].

Para el modelo del cuarto de vehículo mostrado en la Figura 3.11, la ecuación de la dinámica de la masa no suspendida se puede expresar como sigue.

$$m_1 \ddot{z}_1 + F_z + F_{sus} = 0 \quad (3.76)$$

donde F_z y F_{sus} , se pueden definir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} F_z &= c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + k_1(z_1 - z_0) \\ F_{sus} &= \sum c_{1i}(\dot{z}_1 - \dot{z}_i) + \sum k_{1i}(z_1 - z_0), i \in S_1 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Donde c_{1i} y k_{1i} son respectivamente los coeficientes de amortiguamiento y de rigidez, mientras que S_1 es el conjunto de subíndices de todas las masas conectadas directamente a m_1 . Vale la pena mencionar que, (Luo et al., 2023) [84] establecieron que el modelo de un cuarto de vehículo satisface la ecuación de conservación de energía. Ésta es.

$$P_{in} = \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_k}{dt} + P_{dis} \quad (3.78)$$

donde, E_p y E_k representan la energía potencial y cinética del sistema vibratorio que, de hecho, se pueden expresar como sigue.

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(z_1 - z_0)^2 + \sum \frac{1}{2}k_{ij}(z_i - z_j)^2; E_k = \sum \frac{1}{2}m_i(\dot{z}_i)^2 \quad (3.79)$$

Cuando se deriva con respecto del tiempo la ecuación (3.79), se obtiene la siguiente ecuación de potencia.

$$\frac{dE_p}{dt} = k_1(z_1 - z_0)(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + \sum k_{ij}(z_i - z_j)(\dot{z}_i - \dot{z}_j); E_k = \sum m_i\dot{z}_i\ddot{z}_i \quad (3.80)$$

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, se sabe bien que, si la excitación $x(t)$ es un proceso estocástico estacionario, la respuesta en estado estable $y(t)$ también lo será. Además, para el proceso $x(t)$ diferenciable y estacionario, el valor esperado de $\dot{x}(t)$ es cero. Con esto en mente, para el modelo genérico del cuarto de vehículo, si \dot{z}_0 es un proceso estacionario, implica que $(z_i - z_j)$ y \dot{z}_i son también procesos estacionarios (Caughey, 1971) [84]. Por lo tanto, la ecuación (3.80) se simplifica a la siguiente expresión matemática.

$$\left\langle \frac{dE_p}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dE_k}{dt} \right\rangle = 0 \quad (3.81)$$

Nótese que $\langle * \rangle$ representa el valor esperado de la señal. La ecuación (3.81) indica que la energía cinética y la energía potencial de un sistema lineal permanecen estadísticamente constantes durante el periodo t de excitación. Por lo tanto, la ecuación (3.78) se transforma en la siguiente expresión.

$$\langle P_{in} \rangle = \langle P_{dis} \rangle \quad (3.82)$$

La ecuación anterior indica que, para el modelo genérico de un cuarto del vehículo sujeto a un proceso estocástico estacionario, la potencia de entrada al sistema vibratorio es igual a energía mecánica disipada por los amortiguadores de fluido viscoso. Con esto en mente, (Lopez Gabriel et al., 2023) [85] calcularon el diseño óptimo de un AR electromagnético utilizando el balance de energía estocástica, buscando maximizar el potencial de regeneración de energía vibratoria mediante el criterio de optimización \mathcal{H}_2 . Tal procedimiento inicia aplicando la transformada de Fourier al conjunto de ecuaciones diferenciales del modelo de un cuarto de vehículo, las cuales representan la parte mecánica del sistema vibratorio y la parte eléctrica del circuito de recolección de energía del AR electromagnético. Después de realizar eso, la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la potencia eléctrica $|P(j\omega)|$ cosechada por el circuito de extracción de carga se puede escribir de la siguiente manera.

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{R_e} |U(j\omega)|^2 \quad (3.83)$$

donde, R_e es la resistencia de carga del circuito de recolección de energía, mientras que $|U(j\omega)|$ es el voltaje en estado estable producido por el AR electromagnético. Considere que $|U(j\omega)|$ se puede escribir en términos de la densidad espectral de potencia (PSD) $|X_g(j\omega)|^2$ del perfil irregular de la carretera, la ecuación (3.83) se puede reescribir como sigue.

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{R_e} |H_U(j\omega)|^2 |X_g(j\omega)|^2 \quad (3.84)$$

En la ecuación (3.84), $|H_U(j\omega)|$ es la función de transferencia del voltaje. Luego, el índice de rendimiento o valor RMS (Root Mean Square) de la potencia eléctrica $|P(j\omega)|$ en el AR electromagnético está dada por la siguiente expresión.

$$J_P = 2\pi n_0 \sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{R_e} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} \cdot H_P(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

donde S_x representa la potencia del ruido blanco gaussiano, n_0 es la frecuencia espacial de referencia, G_x es el coeficiente de rugosidad de la carretera, V es la velocidad de conducción del vehículo y ω_0 es la frecuencia circular de corte. Luego, Lopez Gabriel utilizó el enfoque de integrales de vibración aleatoria desarrollado por [\(J. B. Roberts & P. D. Spanos, 1990\) \[86\]](#) para resolver la integral de convergencia dentro del radical de la ecuación (3.85), tal como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} H_P(j\omega) \right|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_m(\omega)}{E_m(j\omega) \cdot E_m(-j\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{m-1}\omega^{2 \cdot (m-1)} + B_{m-2}\omega^{2 \cdot (m-2)} + B_{m-3}\omega^{2 \cdot (m-3)} + \dots + B_0}{A_m(j\omega)^m + A_{m-1}(j\omega)^{m-1} + A_{m-2}(j\omega)^{m-2} + \dots + A_0} d\omega \end{aligned} \quad (3.86)$$

Como el denominador de la fracción parcial propia del integrando de la ecuación (3.85) es de sexto grado, la ecuación (3.86) se simplifica a la siguiente expresión matemática.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} \cdot H_P(j\omega) \right|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5\omega^{10} + B_4\omega^8 + B_3\omega^6 + B_2\omega^4 + B_1\omega^2 + B_0}{A_6(j\omega)^6 + A_5(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \\ &= \frac{\pi}{A_6} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A_5 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Para resolver el sistema matricial planteado en la ecuación (3.87) que, de hecho, corresponde a la energía total posible a regenerar, los autores emplearon la herramienta computacional

de matemática simbólica disponible en el software MapleSoft. Con el objetivo de encontrar los parámetros óptimos que maximizan a la función objetivo J_p , los autores realizaron un análisis de sensibilidad paramétrica gráfico en el dominio del tiempo utilizando el comando *sim* disponible en el software Matlab/Simulink. Esto con el fin de observar también el comportamiento del índice de recolección de energía J_p cuando varían los parámetros físicos del circuito de recolección de energía, es decir, la resistencia interna de la bobina R_i y la externa o de carga R_e . Nótese que en la Figura 3.12, la mayor potencia eléctrica ocurre cuando los valores de las resistencias del circuito de recolección de energía son menores a 10Ω .

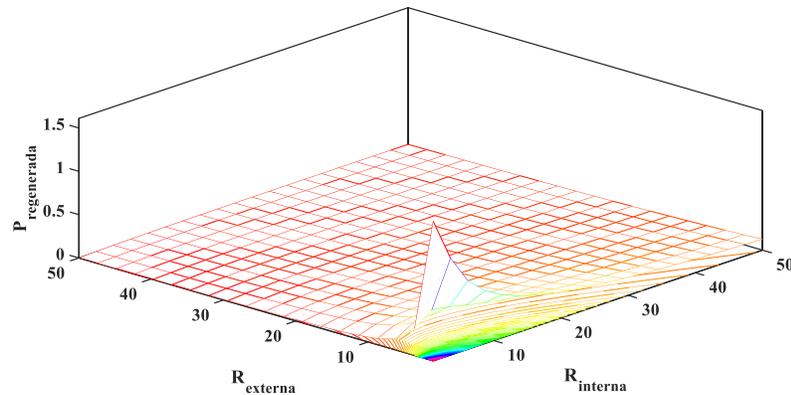
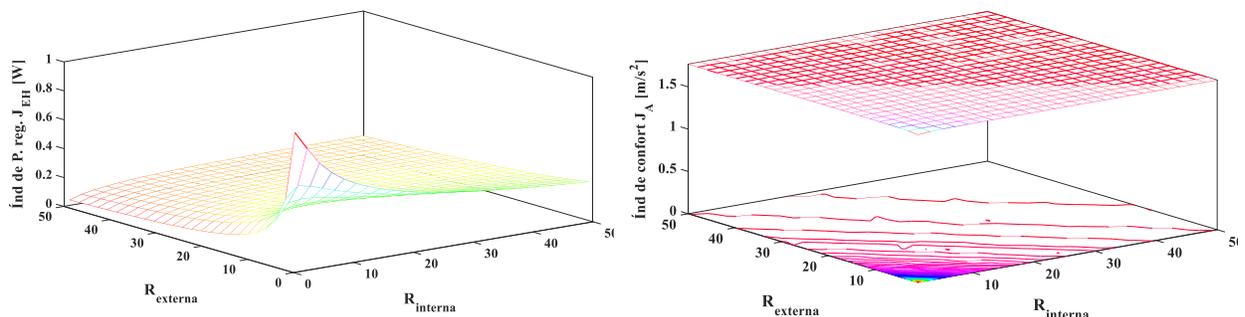


Figura 3.12 Análisis de sensibilidad gráfico en el dominio del tiempo de la capacidad de recolección de energía del amortiguador electromagnético.

Adicionalmente, los autores realizaron un segundo análisis de sensibilidad paramétrica utilizando una vez más el comando *sim*, para variar las resistencias del circuito de recolección de energía, y así observar el comportamiento de los índices de rendimiento del confort, deflexión del sistema de suspensión y de la carga dinámica del neumático, tales índices se muestran en el panel de gráficas de la Figura 3.13. En efecto, los autores concluyeron que, cuando la potencia eléctrica se maximiza con valores pequeños tanto de R_i como de R_e , los índices de rendimiento del sistema de suspensión basado en el AR electromagnético no se deterioran significativamente. Esto se debe a que la fuerza de amortiguamiento que proporciona el AR electromagnético es mínima.



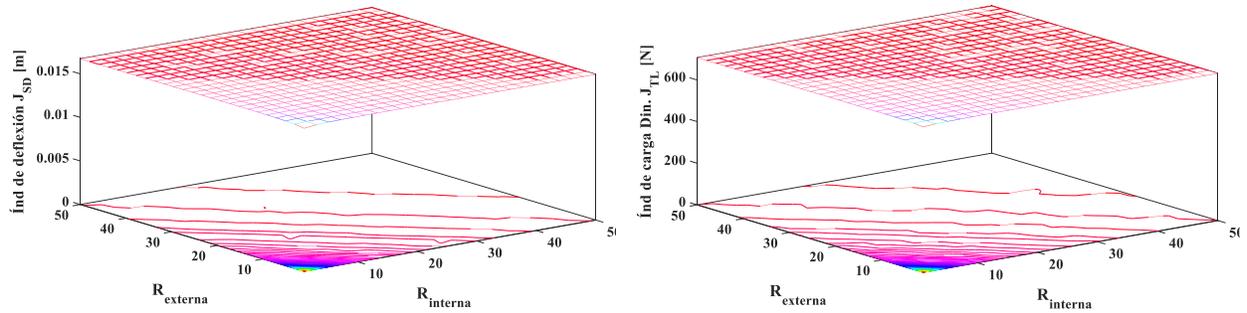


Figura 3.13 Análisis de sensibilidad paramétrica en el dominio del tiempo para los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión automotriz basado en el AR electromagnético, cuando se varían los parámetros físicos del circuito de recolección de energía.

Adicionalmente, para corroborar los resultados gráficos de los índices de rendimiento mostrados en la Figura 3.13, los autores analizaron tales índices en el dominio frecuencial también utilizando el enfoque de integrales de vibración aleatoria. Al realizar este análisis, se corroboraron los resultados obtenidos mediante el comando *sim*. Por lo tanto, en la Figura 3.14 se muestran los índices de rendimiento dinámico obtenidos a partir de la ecuación (3.85), en la cual a) es el índice de la potencia regenerada, b) el índice del confort, c) el índice de la deflexión del sistema de suspensión y, d) el índice de la carga dinámica del neumático.

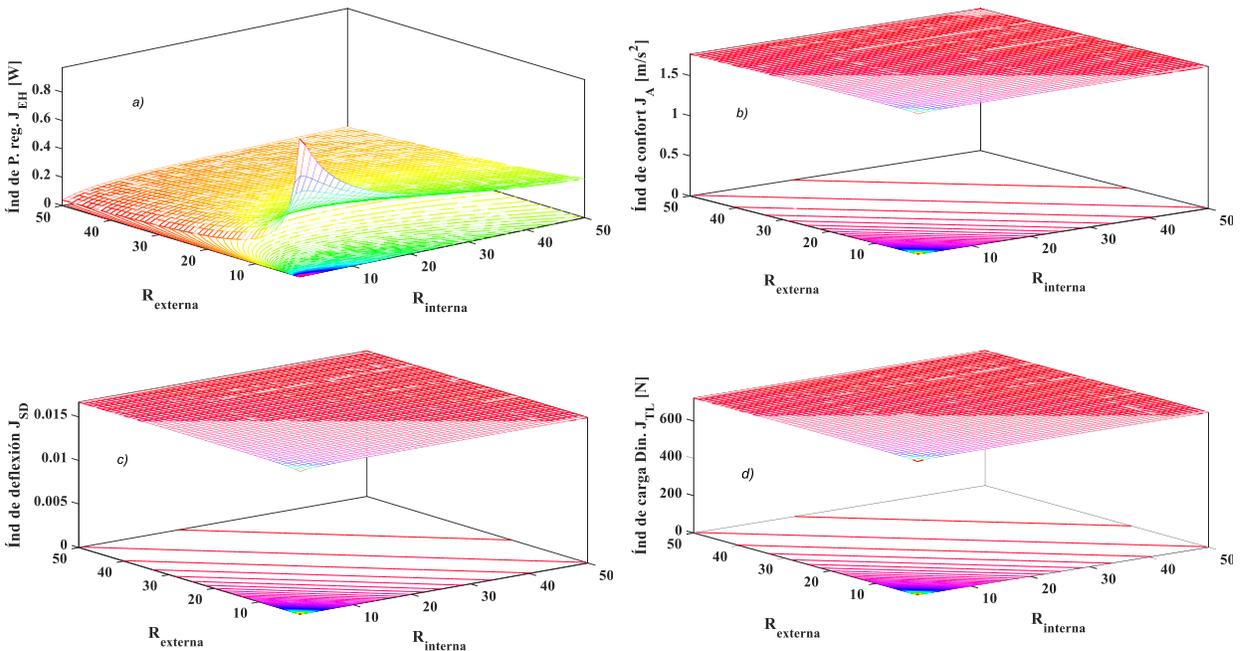


Figura 3.14 Análisis de sensibilidad paramétrica en el dominio frecuencial para los índices de rendimiento dinámico del modelo de un cuarto de vehículo con suspensión regenerativa electromagnética.

Vale la pena observar que, las gráficas mostradas tanto en la Figura 3.13 como en la Figura 3.14 son bastante similares, lo que confirma que los resultados obtenidos a partir de la simulación numérica en el dominio del tiempo están en concordancia con aquellos obtenidos en el dominio de la frecuencia. Con respecto a las irregularidades que se observan en las curvas de contorno de la Figura 3.13, se deben principalmente tanto al tamaño del paso de la

simulación numérica como a la duración de ésta. Por lo tanto, el enfoque de integrales de vibración aleatoria es una herramienta matemática poderosa, ya que con ella se pueden obtener expresiones analíticas y exactas para los valores RMS de señales estocásticas.

3.9 Método de simulación Montecarlo en el análisis de sensibilidad paramétrica.

Teóricamente, la simulación Monte Carlo es un método numérico determinístico o estadístico, que estudia probabilísticamente las incertidumbres de un fenómeno físico, el cual se basa en la construcción de modelos matemáticos con posibles resultados encerrados en los límites de frontera de una función de distribución de probabilidad. Durante una simulación Monte Carlo, los valores se muestrean aleatoriamente a partir de las funciones de distribución de probabilidad de entrada, que pueden adoptar distintas formas, ya sea una función de probabilidad uniforme, normal, logarítmica o triangular. Cada conjunto de muestras se conoce como iteración y el vector resultante de tal conjunto de muestras se almacena durante las ejecuciones de la simulación con el fin de obtener el resultado final ([Taghavifar & Rakheja, 2018](#)) [87].

El método de Monte Carlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos, posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. Por otro lado, para realizar el análisis de sensibilidad paramétrica, se deben de considerar los parámetros físicos que determinan el comportamiento de un sistema, para el caso específico de los amortiguadores regenerativos, se pueden considerar las resistencias internas y externas, la constante de acoplamiento electromecánico y los perfiles de excitación de la carretera, como las principales variables para la realización del análisis de sensibilidad paramétrica ([Abdelkareem et al., 2020](#)) [88]. Además, en el software de Matlab se pueden utilizar una serie de comandos para la ejecución de la simulación Montecarlo, por ejemplo, el comando *normrnd* crea una serie de números aleatorios bajo una distribución normal en la cual se pueden especificar los valores de la desviación estándar y media. Adicionalmente, el comando *randn* crea números aleatorios en los cuales se pueden especificar los rangos deseados en términos de su media estadística. También, con el comando *unifrnd* es posible crear números aleatorios a partir de una distribución uniforme continua. Por lo tanto, los comandos que se deseen utilizar dependen enteramente de la función de distribución de probabilidad.

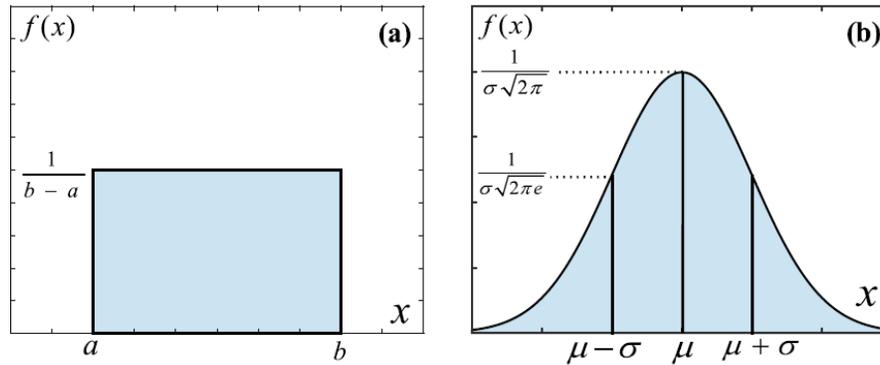


Figura 3.15 Funciones de distribución de probabilidad: a) distribución uniforme y b) distribución normal gaussiana [87].

De la Figura 3.15, $f(x)$ es la función de densidad de distribución de probabilidad, a es el valor mínimo de x , b es el valor máximo de x , que es la variable aleatoria. Por otro lado, μ es la media del parámetro, σ es la desviación estándar de la función de probabilidad. En la Figura 3.16 se ilustra el diagrama de flujo detallado de la metodología de simulación Monte Carlo que se aplica a la respuesta frecuencial de la potencia eléctrica recolectada en el circuito de captación de energía del AR electromecánico. A continuación, se resumen los principales pasos de simulación numérica para el análisis de sensibilidad paramétrica en el potencial de regeneración de energía vibratoria:

1. Se introducen los parámetros de referencia del modelo matemático.
2. Se calcula la FRF de la potencia eléctrica recolectada por el AR electromecánico, y luego se aleatorizan sus parámetros físicos para inicializar la simulación Monte Carlo.
3. Después, se muestrea aleatoriamente el parámetro físico deseado con base en la distribución de probabilidad normal, utilizando una desviación estándar del 30% con respecto al valor medio de referencia.
4. Posteriormente, se calculan y almacenan los valores numéricos de los índices de rendimiento del sistema de suspensión regenerativo.
5. Se realizan las iteraciones convenientes para representar gráficamente el efecto del parámetro físico aleatorio en el potencial de recolección de energía vibratoria.
6. Se elije un nuevo parámetro físico del modelo para investigar su sensibilidad frente a la potencia regenerada.

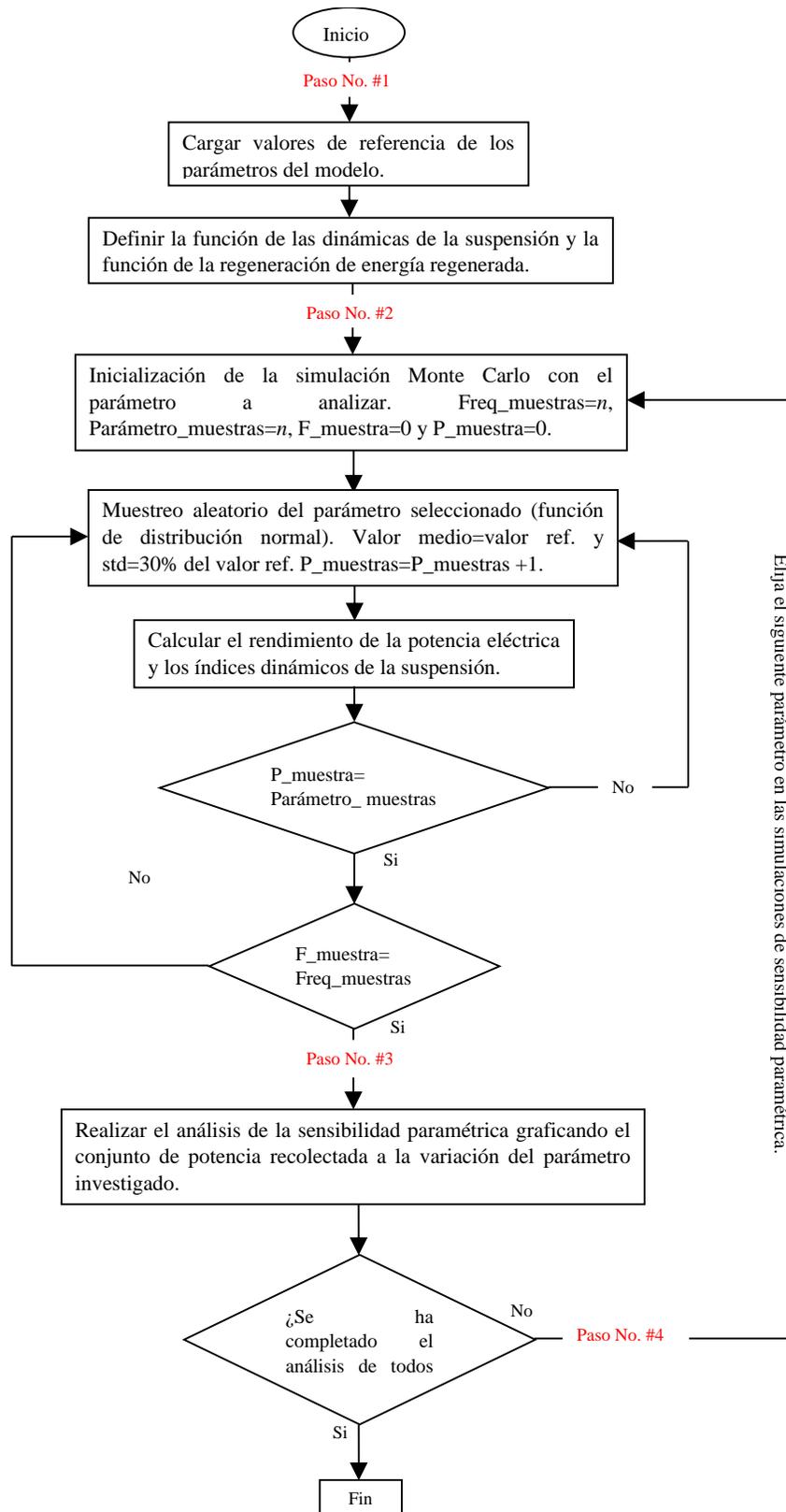


Figura 3.16 Diagrama de flujo de la metodología de simulación Monte Carlo para el análisis de sensibilidad paramétrica del potencial de recolección de energía vibratoria [88].

Capítulo 4.

4. Simulación numérica, Optimización y análisis de sensibilidad de los amortiguadores regenerativos.

En este capítulo se llevan a cabo las simulaciones numéricas y la optimización del AR electromecánico bajo el criterio de la norma \mathcal{H}_2 que maximiza el índice de la potencia eléctrica cosechada. Los parámetros de simulación de la parte mecánica de los modelos matemáticos utilizados aquí, se encuentran en la sección 1.9. Adicionalmente, el circuito de recolección de energía se considera con un generador monofásico, debido a que el análisis de los índices de rendimiento es bastante amigable en lo que respecta al tratamiento algebraico.

4.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia de los amortiguadores regenerativos.

En esta subsección, se realiza el análisis en el dominio de la frecuencia, para cuantificar el potencial de regeneración de energía vibratoria de los amortiguadores regenerativos electromecánicos y electromagnéticos. Cabe señalar, que el AR electrohidráulico es gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, y por tal razón no es posible realizar una comparación justa, en el dominio frecuencial, con respecto a los otros ARs.

Existen gran variedad de métodos matemáticos que son aplicables para resolver sistemas determinados y sobre determinados tanto lineales como no lineales. En esta subsección, se utiliza el método matricial convencional para resolver sistemas determinados por muchas variables independientes, el cual se ha programado numéricamente en Matlab. Tal método de simulación numérica permite calcular las FRFs de cualquier modelo dinámico invariante en el tiempo, por ejemplo, los modelos de un cuarto, medio y del vehículo completo.

4.1.1 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para un cuarto de vehículo.

Considerando las ecuaciones (3.28) y (3.33) que corresponden a los modelos matemáticos de un cuarto de vehículo con AR electromecánico y electromagnético, respectivamente. A estas ecuaciones se debe de aplicar la transformada de Laplace para analizar las respuestas dinámicas de cada sistema en el dominio de la frecuencia. Cuando se realiza esta transformación a las ecuaciones mencionadas, se producen las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 m_2 x_2 + s^2 m_s (x_2 - x_1) + k_2 (x_2 - x_1) + s c_2 (x_2 - x_1) + s c_L (x_2 - x_1) + Bl \frac{U}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\ s^2 m_1 x_1 - m_s s^2 (x_2 - x_1) - k_2 (x_2 - x_1) + k_1 (x_1 - x_g) - c_2 s (x_2 - x_1) - c_L s (x_2 - x_1) \\ \quad + s c_1 (x_1 - x_g) - Bl \frac{U}{R_e} \cdot \frac{i \cdot r_g}{r} = 0 \\ s L_e \frac{U}{R_e} + \frac{U}{R_e} (R_e + R_i) = s \frac{k_e i}{r} (x_2 - x_1) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 (m_2 + m_c) x_2 + k_2 (x_2 - x_1) + s c_2 (x_2 - x_1) + Bl \frac{U}{R_e} = 0 \\ s^2 (m_1 + m_m) x_1 - k_2 (x_2 - x_1) + k_1 (x_1 - x_g) - s c_2 (x_2 - x_1) + s c_1 (x_1 - x_g) \\ \quad - Bl \frac{U}{R_e} = 0 \\ L_e \frac{sU}{R_e} + \frac{U}{R_e} (R_e + R_i) - Bl s (x_2 - x_1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

La frecuencia circular compleja se define como $s = j\omega$ con $\omega = 2\pi f$, donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Esta definición es de utilidad para resolver los conjuntos de sistemas de ecuaciones lineales dados por las ecuaciones (4.1) y (4.2), y así encontrar la solución de los desplazamientos en estado estable de la masa suspendida x_2 y no suspendida x_1 , el voltaje generado U por cada tipo de AR también. Por lo tanto, la formulación general del sistema matricial para cada sistema con AR se muestra en la ecuación (4.3).

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2(j\omega) \\ x_1(j\omega) \\ U(j\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (k_1 + j\omega c_1)y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Los coeficientes A_i , B_i y C_i para $i = 1, \dots, 3$ se describen en el Apéndice B. Ahora, la potencia eléctrica recolectada por el circuito de recuperación de energía se puede expresar de la siguiente manera.

$$P_{ER} = \frac{U^2}{R_e} \quad (4.4)$$

Con el objetivo de observar las curvas de las FRFs de la potencia cosechada por cada AR, es necesario utilizar los parámetros físicos del vehículo, los cuales se muestran en las Tabla 1.1-Tabla 1.3. Vale la pena observar que en la Figura 4.1, la curva de la FRF de la potencia eléctrica del AR electromecánico es mucho mayor que aquella que produce el AR electromagnético, cuando la señal de excitación del perfil de la carretera es una onda sinusoidal con amplitud de 0.035 metros. De hecho, el AR electromecánico logra recolectar una potencia pico de 164 W a una frecuencia de excitación de 6.1 Hz, mientras que el AR electromagnético cosecha una potencia pico de 3.5 W a 9.5 Hz.

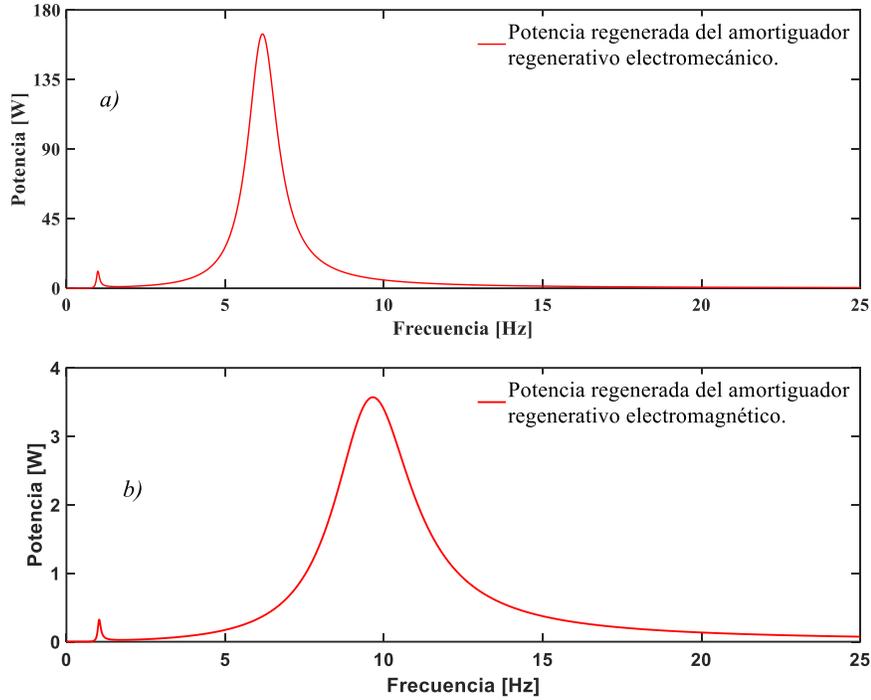


Figura 4.1 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia del AR a) electromecánico y b) electromagnético.

4.1.2 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para el modelo de medio vehículo con ARs.

Aplicando el procedimiento de la sección 4.1.1 a los sistemas del medio vehículo con ARs que se describieron en el capítulo 3, específicamente, las ecuaciones (3.30) y (3.34), se obtiene el sistema matricial de la ecuación (4.5), el cual se resuelve numéricamente para los desplazamientos x_s , θ , x_f , x_r y para los voltajes U_f y U_r .

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(j\omega) \\ \theta(j\omega) \\ x_f(j\omega) \\ x_r(j\omega) \\ U_f(j\omega) \\ U_r(j\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (k_{1f} + j\omega c_{1f})x_{gf}(t) \\ (k_{1r} + j\omega c_{1r})x_{gr}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

donde, los coeficientes de la matriz $[\]_{6 \times 6}$ de la ecuación (4.5) se describen en el Apéndice B. Ahora bien, para diferenciar las curvas de la potencia regenerada del AR electromecánico y/o electromagnético frontal y trasero, la señal de excitación frontal y_f es de 0.035 m, mientras que la excitación trasera y_r es de 0.050 m.

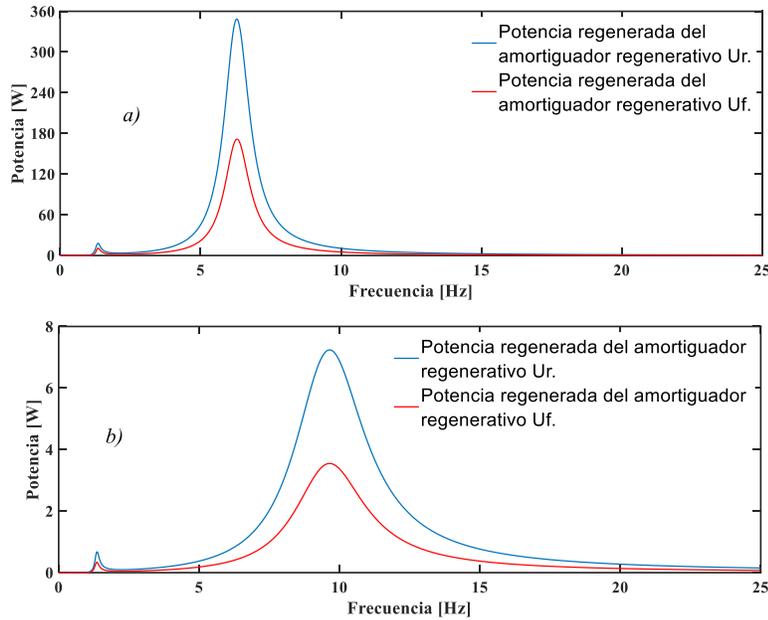


Figura 4.2 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia regenerada en el modelo de medio vehículo del AR a) electromecánico y b) electromagnético.

En el análisis frecuencial del modelo de medio vehículo mostrado en la (Figura 4.2), el AR electromecánico derecho alcanza 348 W de potencia regenerada a una amplitud de 0.050 m y frecuencia de 6.3 Hz. A diferencia del amortiguador electromagnético, que solo alcanza 7.2 W a 9.6 Hz de frecuencia. Esto se debe principalmente al hecho de que el AR electromecánico tiene un mecanismo de amplificación de movimiento que hace girar a mayor velocidad el eje del generador eléctrico.

4.1.3 Simulación numérica en el dominio de la frecuencia para el modelo de vehículo completo.

Para analizar el comportamiento en el dominio de la frecuencia del vehículo completo se deben retomar las ecuaciones (3.32) y (3.35), en las cuales se aplica la formulación de la transformada de Laplace. Después de realizar tal transformación de dominio, se debe formular el sistema matricial en el dominio de los números complejos que, de hecho, para este caso se obtiene una matriz de 11 x 11, ver la ecuación (4.6). La solución numérica del sistema de ecuaciones son las FRFs tanto de los desplazamientos dinámicos de las masas inerciales del vehículo como de los voltajes producidos por cada AR electromecánico y/o electromagnético.

$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 & I_1 & J_1 & K_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 & I_2 & J_2 & K_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 & G_3 & H_3 & I_3 & J_3 & K_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 & G_4 & H_4 & I_4 & J_4 & K_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 & G_5 & H_5 & I_5 & J_5 & K_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 & G_6 & H_6 & I_6 & J_6 & K_6 \\ A_7 & B_7 & C_7 & D_7 & E_7 & F_7 & G_7 & H_7 & I_7 & J_7 & K_7 \\ A_8 & B_8 & C_8 & D_8 & E_8 & F_8 & G_8 & H_8 & I_8 & J_8 & K_8 \\ A_9 & B_9 & C_9 & D_9 & E_9 & F_9 & G_9 & H_9 & I_9 & J_9 & K_9 \\ A_{10} & B_{10} & C_{10} & D_{10} & E_{10} & F_{10} & G_{10} & H_{10} & I_{10} & J_{10} & K_{10} \\ A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & E_{11} & F_{11} & G_{11} & H_{11} & I_{11} & J_{11} & K_{11} \end{matrix} &
 \begin{matrix} x_b(j\omega) \\ \alpha(j\omega) \\ \beta(j\omega) \\ y_{srr}(j\omega) \\ y_{srl}(j\omega) \\ y_{sfr}(j\omega) \\ y_{sfl}(j\omega) \\ U_{rr}(j\omega) \\ U_{rl}(j\omega) \\ U_{fr}(j\omega) \\ U_{fl}(j\omega) \end{matrix} &
 = &
 \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (k_{trr} + j\omega c_{trr})x_{trr} \\ (k_{trl} + j\omega c_{trl})x_{trl} \\ (k_{tfr} + j\omega c_{tfr})x_{tfr} \\ (k_{tfl} + j\omega c_{tfl})x_{tfl} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}
 \end{matrix} \quad (4.6)$$

Quando se consideran las amplitudes de las señales de excitación para el modelo del vehículo completo como $y_{trr} = 0.02 \text{ m}$, $y_{trl} = 0.035 \text{ m}$, $y_{tfr} = 0.055 \text{ m}$ y $y_{tfl} = 0.06 \text{ m}$, las curvas de las FRFs de la potencia eléctrica recolectada de los cuatro AR electromecánicos y/o electromagnéticos se muestran en la Figura 4.3. Nótese que, cuando la señal de excitación tiene una mayor amplitud, la potencia que se regenera es mucho mayor que las de menor amplitud de vibración. Además, la diferencia de la densidad de regeneración del amortiguador electromecánico es evidentemente mucho mayor que la del electromagnético.

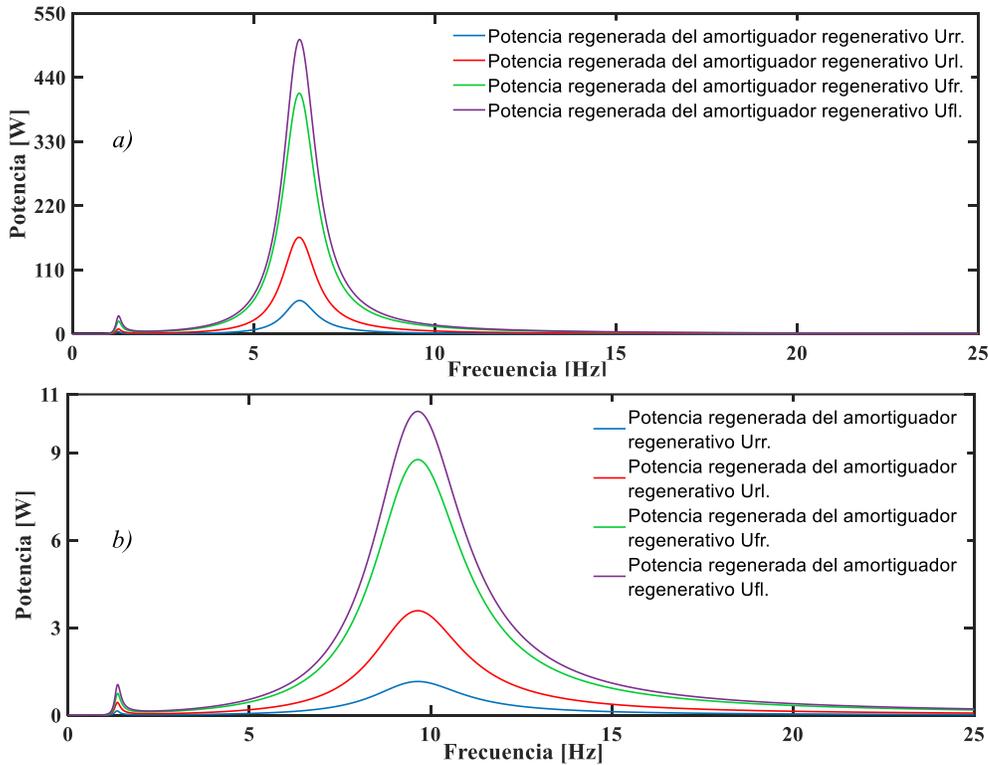


Figura 4.3 Curvas de la función de respuesta en frecuencia de la potencia regenerada en el modelo de vehículo completo del AR a) electromecánico y b) electromagnético.

Adicionalmente, en la Figura 4.3, se puede observar que, en las curvas de las FRFs de la potencia regenerada por cada AR electromecánico, el AR frontal izquierdo logra recolectar una potencia pico de 505 W a 6.26 Hz y 0.06 m de amplitud de vibración, mientras que, el AR

electromagnético logra cosechar una potencia máxima de 10.4 W a 9.6 Hz y 0.06 m de frecuencia de excitación y amplitud de vibración, respectivamente.

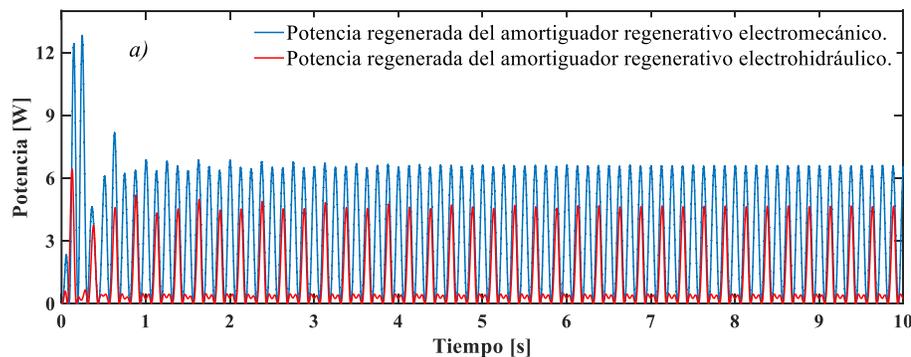
4.2 Simulación numérica en el dominio del tiempo de la potencia eléctrica de los ARs.

En esta subsección se presentan las simulaciones numéricas de los modelos del vehículo en el dominio del tiempo, considerando los diferentes tipos de ARs. Los esfuerzos de estas simulaciones numéricas se centran en la determinación de las señales instantáneas de la potencia eléctrica producida por cada tipo de AR, con el objetivo de corroborar la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación. Ahora, se considera que las excitaciones de la carretera son ondas sinusoidales, y que se pueden crear mediante el uso de bloques y funciones inteligentes en Matlab/Simulink.

4.2.1 Simulación numérica en el dominio del tiempo para un cuarto de vehículo.

Para el modelo de un cuarto de vehículo se retoman nuevamente las ecuaciones (3.28), (3.33) y (3.55). Adicionalmente, el perfil de la carretera se representa mediante una señal de tipo senoidal con una amplitud de 0.035 m y una frecuencia de 4 Hz. Es importante mencionar que, para realizar una comparación justa sobre el potencial de recolección de energía de los ARs electromecánico, electromagnético y electrohidráulico, las condiciones de simulación numérica son las mismas para todos ellos.

Después de realizar la programación numérica en el entorno de Matlab/Simulink, las señales de las potencias eléctricas instantáneas para cada tipo de AR se describen en la Figura 4.4. En tal figura se puede observar que la potencia RMS regenerada por el AR electromecánico es superior que la del electrohidráulico, que es de hecho de 4.08 W. Adicionalmente, la potencia RMS del AR electrohidráulico es de 1.87 W, mientras que la del electromagnético es de 0.06 W.



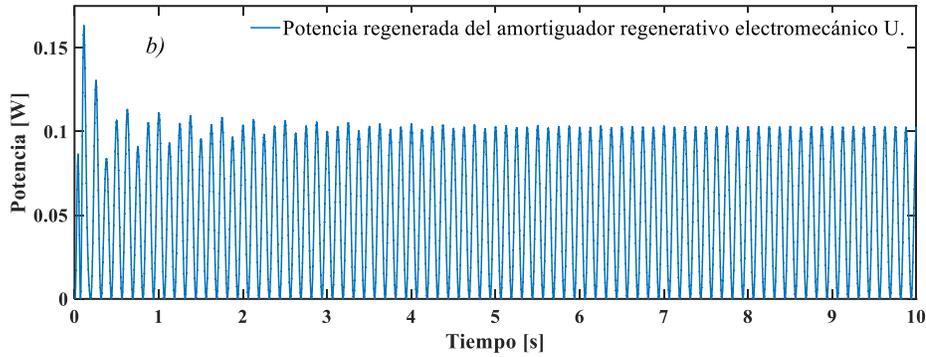
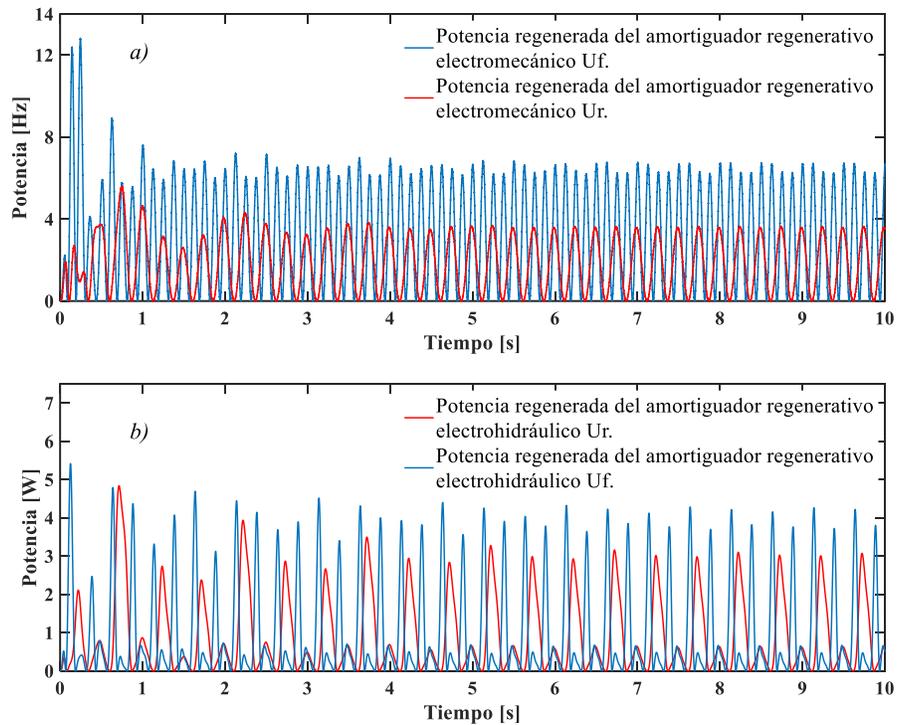


Figura 4.4 Potencia eléctrica instantánea del modelo de un cuarto de vehículo con AR a) electromecánico - electrohidráulico, b) electromagnético.

4.2.2 Simulación numérica en el dominio del tiempo para el modelo de medio vehículo con ARs.

Para la simulación numérica del modelo de medio vehículo se deben considerar las ecuaciones (3.30), (3.34) y (3.57), las cuales corresponden a los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos. A diferencia del modelo de un cuarto de vehículo, la programación numérica de estas ecuaciones diferenciales es más compleja debido a la cinemática lineal y no lineal del chasis del vehículo. Por otra parte, las señales de excitación de los neumáticos son las siguientes: $y_f = 0.035 \text{ m}$ con 4 Hz, $y_r = 0.050 \text{ m}$ con 2 Hz.



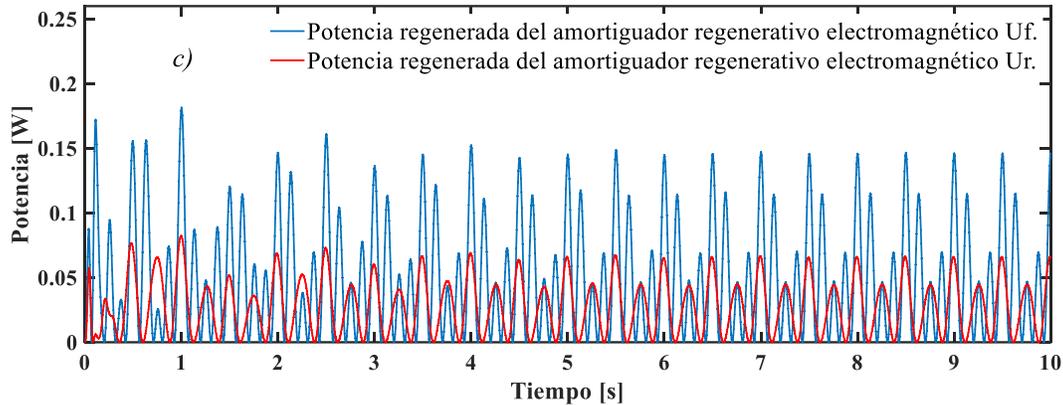


Figura 4.5 Potencia eléctrica instantánea del modelo de medio vehículo con los amortiguadores regenerativos a) electromecánico, b) electrohidráulico y c) electromagnético.

En la Figura 4.5 se puede apreciar el comportamiento en el dominio del tiempo de la potencia eléctrica instantánea producida para cada tipo de AR acoplado al modelo del medio vehículo. En esta figura se demuestra que, aunque la amplitud de excitación del AR U_r es mayor que la del U_f , la frecuencia de 4 Hz logra producir mayor energía vibratoria que la de 2 Hz. Por lo tanto, a altas frecuencias de excitación, los ARs recolectarán mayor energía vibratoria.

4.2.3 Simulación numérica en el dominio del tiempo para el modelo de vehículo completo con ARs.

Para culminar el análisis en el dominio del tiempo, se consideran todas las dinámicas del vehículo con la finalidad de cuantificar y comparar justamente la potencia eléctrica producida por cada AR. Para este caso, la excitación de los neumáticos se consideran señales tipo senoidales, las cuales tienen las siguientes características: $y_{trr} = 0.02 \text{ m}$ con 3.6 Hz, $y_{trl} = 0.035 \text{ m}$ con 2 Hz, $y_{tfr} = 0.055 \text{ m}$ con 1.5 Hz, y $y_{tfl} = 0.045 \text{ m}$ con 2.8 Hz. En la Figura 4.6 se muestra la programación realizada en Matlab/Simulink mediante los bloques inteligentes, en la cual se incluye la cinemática no lineal del chasis del vehículo. Es importante mencionar que, la simulación del vehículo completo proporciona resultados más realistas y exactos que aquellos proporcionados por los modelos dinámicos de un cuarto e incluso que el de medio vehículo, debido a que se generan simultáneamente los movimientos angulares de cabeceo y balanceo, afectando el comportamiento dinámico de la suspensión regenerativa. Después de ejecutar las simulaciones del modelo del vehículo completo equipado con suspensión regenerativa, en la Figura 4.7 se presentan las gráficas de las potencias eléctricas instantáneas para cada tipo de AR. Adicionalmente, en esta gráfica se representa la potencia de cada uno de los cuatro amortiguadores que contempla la suspensión total del automóvil, en los cuales se observan diferentes rangos de valores de potencia eléctrica, ya que responden a diferentes amplitudes y frecuencias de excitación.

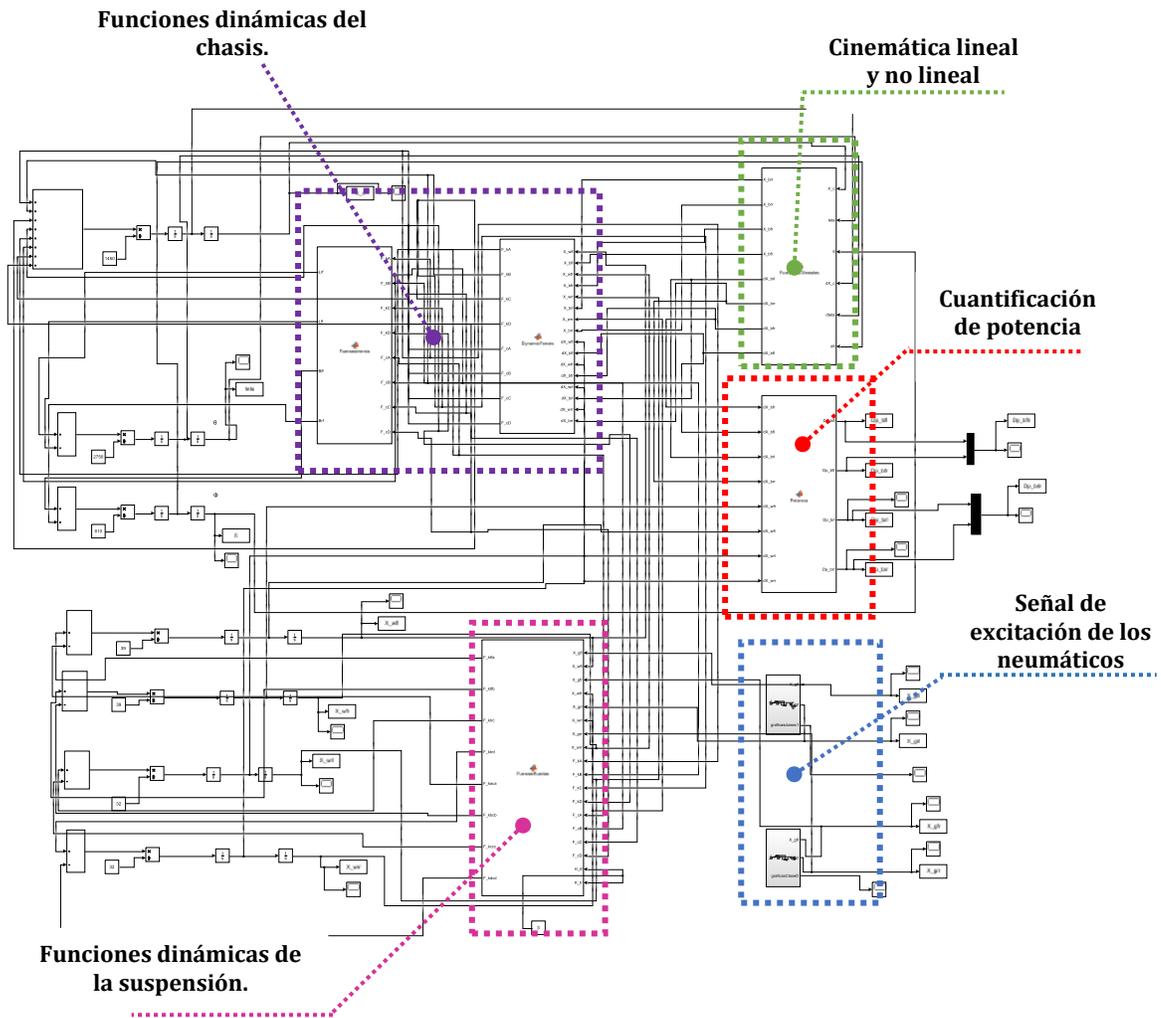
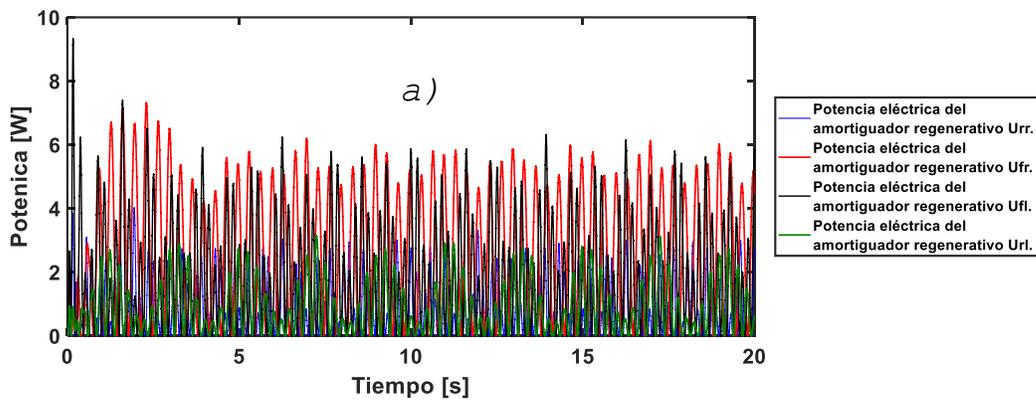


Figura 4.6 Programación realizada en Matlab/Simulink del modelo dinámico del vehículo completo con AR.



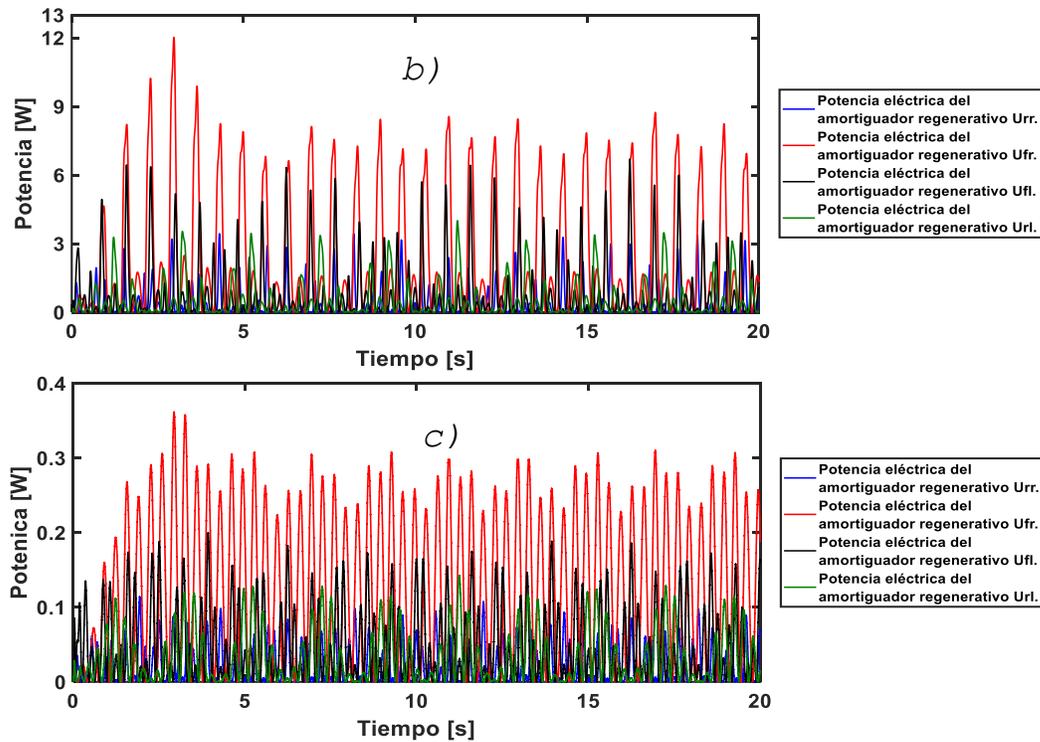


Figura 4.7 Potencia eléctrica instantánea del modelo completo del vehículo con los amortiguadores regenerativos a) electromecánico, b) electrohidráulico y c) electromagnético.

Para tener una mayor claridad de los resultados que se obtienen en la simulación del modelo matemático del vehículo completo, en la Tabla 4.1 se muestran los resultados de la potencia RMS para los distintos amortiguadores regenerativos que responden a las excitaciones definidas al inicio de esta subsección. Adicionalmente, los resultados confirman que el AR electromecánico tiene mayor capacidad de regeneración de energía vibratoria.

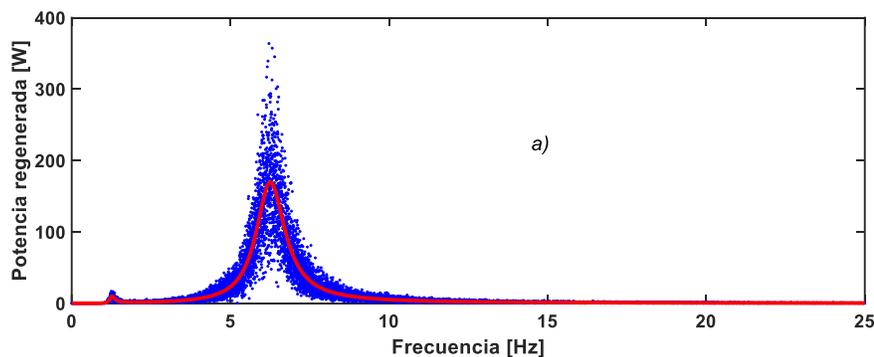
Tabla 4.1 Potencia eléctrica RMS producida por los amortiguadores regenerativos cuando se acoplan al modelo del vehículo completo.

Amortiguador regenerativo	<i>Potencia eléctrica RMS.</i>			
	<i>Urr</i> 0.02 m-3.6 Hz	<i>Url</i> 0.035 m-2 Hz	<i>Ufr</i> 0.055 m-1.5 Hz	<i>Ufl</i> 0.045 m-2.8 Hz
Electromecánico	<i>1.19 W</i>	<i>1.14 W</i>	<i>3.33 W</i>	<i>2.60 W</i>
Electrohidráulico	<i>0.62 W</i>	<i>0.87 W</i>	<i>3.14 W</i>	<i>1.36 W</i>
Electromagnético	<i>0.03 W</i>	<i>0.04 W</i>	<i>0.16 W</i>	<i>0.06 W</i>

4.3 Análisis de sensibilidad paramétrica mediante el método Montecarlo.

En esta sección se realiza la simulación de Monte Carlo para comparar la capacidad de captación de energía de los ARs electromagnéticos y electromecánicos, utilizando la metodología descrita en Figura 3.16. Es importante mencionar que, en la simulación de Monte Carlo, la frecuencia de excitación se distribuye uniformemente en un intervalo de 0-25 Hz. Además, se aleatorizan los parámetros físicos de cada AR con base en el comportamiento dinámico de la función de respuesta en frecuencia de la potencia eléctrica. Después de analizar paramétricamente tanto el modelo matemático del AR electromecánico como el del electromagnético, se reveló que los principales parámetros que influyen en el potencial de regeneración de energía en el circuito de recolección de energía, son los siguientes: la constante de acoplamiento electromecánico Bl , la resistencia interna de la bobina R_i y la resistencia externa R_e . Adicionalmente, para el AR electromecánico también se considera la aleatorización tanto de relación de transmisión del sistema de engranaje i como del radio del rotor del generador r_g . Todos los parámetros que antes se mencionaron, se distribuyen utilizando una función de probabilidad normal, utilizando los valores de las Tablas 1.2 y 1.3 como valores medios, con una desviación estándar de 20% del valor medio.

En la Figura 4.8 se presenta la relación entre la potencia eléctrica y la amplitud de excitación de 0.035 m, para la variación paramétrica de la constante de acoplamiento electromecánico Bl . Vale la pena mencionar que, este parámetro se podría considerar como la amortiguación electromagnética que producen los ARs, ya que puede tratarse como un coeficiente de amortiguamiento similar al del amortiguador de fluido viscoso gobernado en el dominio mecánico. De la Figura 4.8, se puede afirmar que la variación de Bl tanto para el AR electromecánico como para el electromagnético produce una mayor relación de potencia pico con un ancho de banda de captación de energía localizado en la segunda frecuencia modal del sistema dinámico. Para el AR electromecánico, la potencia máxima es de 363.8 W, mientras que, para el AR electromagnético es de 10.67 W. En ambos casos de estudio, la potencia eléctrica producida por los ARs estudiados en este trabajo de investigación es mucho mayor que la reportada en la literatura. Esto se debe a que, la técnica del balance de energía estocástica revela a través de la maximización del índice de la potencia eléctrica total que, con resistencias eléctricas pequeñas existe mayor conservación de energía en el circuito de recolección. Mas importante aún, la potencia eléctrica en estado estable para cada tipo de AR se amplificará substancialmente.



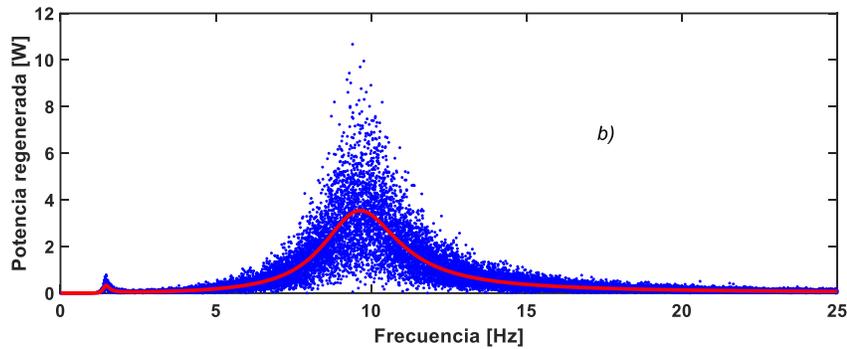


Figura 4.8 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud vibratoria de excitación (0.035 m), para la variación de B_l desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar típica del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético.

En la Figura 4.9 a) y b) se muestra la variación de la inductancia interna L_e de la bobina del circuito de captación de energía. La simulación de Monte Carlo demuestra que la variación de la inductancia no afecta el potencial de recolección de energía vibratoria, ya que el valor de tal variable es demasiado pequeño en comparación con los parámetros restantes del circuito de recolección de energía.

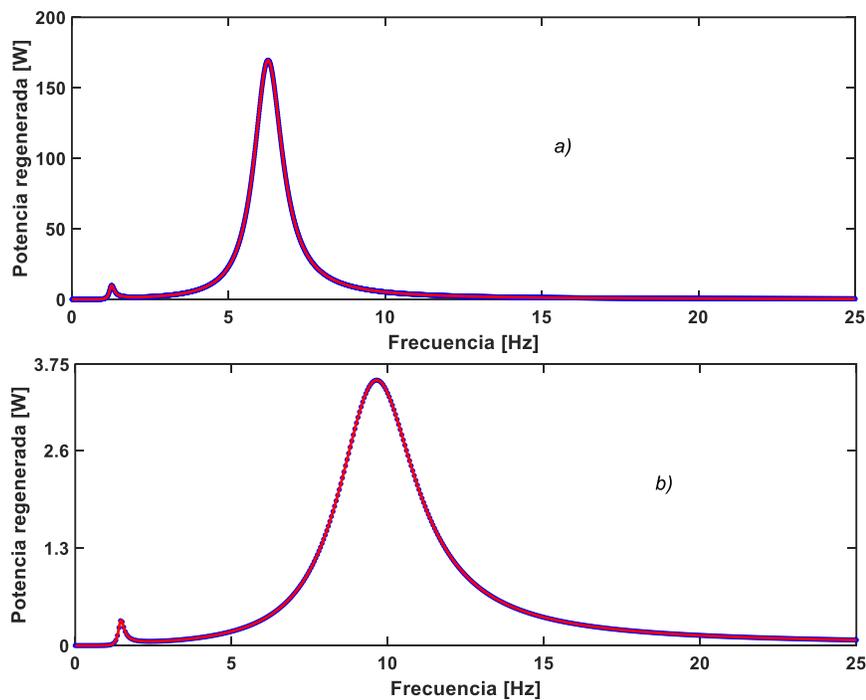


Figura 4.9 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud de excitación (0.035 m), para la variación de L_e desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar típica del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético.

Por otra parte, en la Figura 4.10 se muestra la potencia eléctrica cuando se varía aleatoriamente la resistencia externa R_e . Tanto para el AR electromecánico como para el electromagnético, la variación de este parámetro no demuestra un cambio positivo en la captación de energía vibratoria, de hecho, en la Figura 4.10 a) se puede apreciar que los

cambios en la resistencia externa son perjudiciales, ya que la potencia regenerada disminuye. Es importante mencionar que, esto ocurre para el caso de excitación armónica.

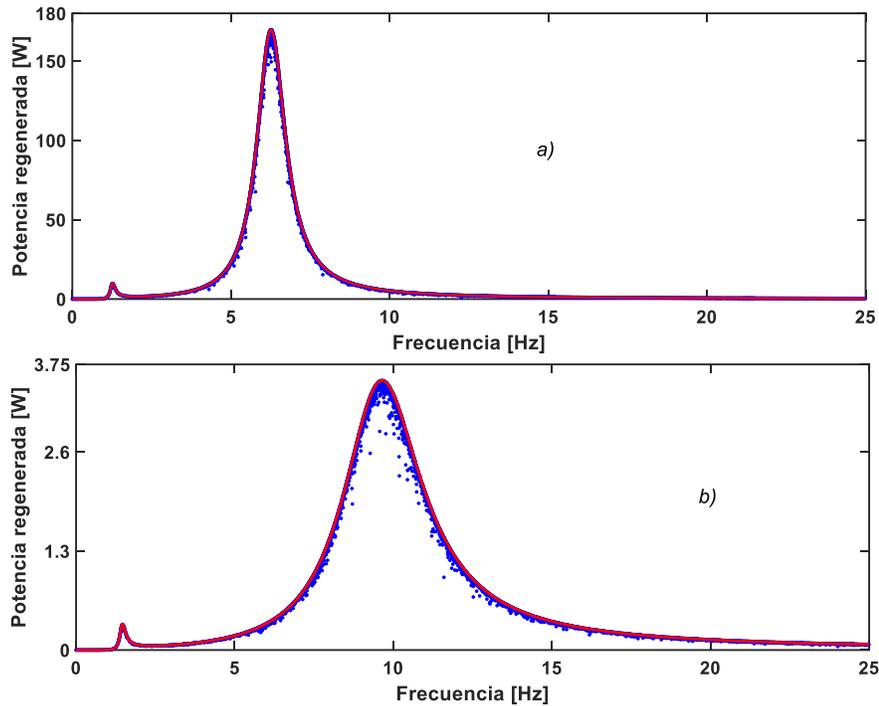
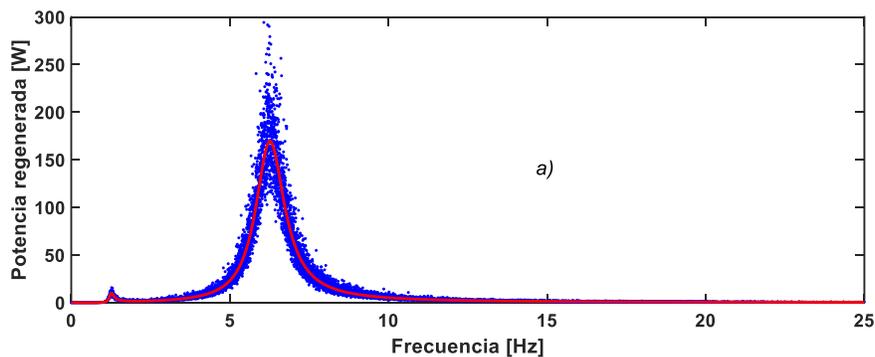


Figura 4.10 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud vibratoria de excitación (0.035 m), para la variación de R_e desde su valor original como valor medio hasta una desviación típica del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético.

En la Figura 4.11 se muestra el potencial de recolección de energía vibratoria, cuando se aleatoriza la resistencia interna de la bobina R_i desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%. En tal figura, se puede identificar que la relación de salida de potencia eléctrica máxima no cambia en la primera frecuencia de resonancia, mientras que en la segunda ocurre lo contrario. De hecho, se revela que existe mayor potencial de regeneración de energía vibratoria en frecuencias altas de excitación. Adicionalmente, la potencia eléctrica del AR electromecánico se podría incrementar hasta aproximadamente 290 W, mientras que, para el AR electromagnético se podría cosechar hasta 6W.



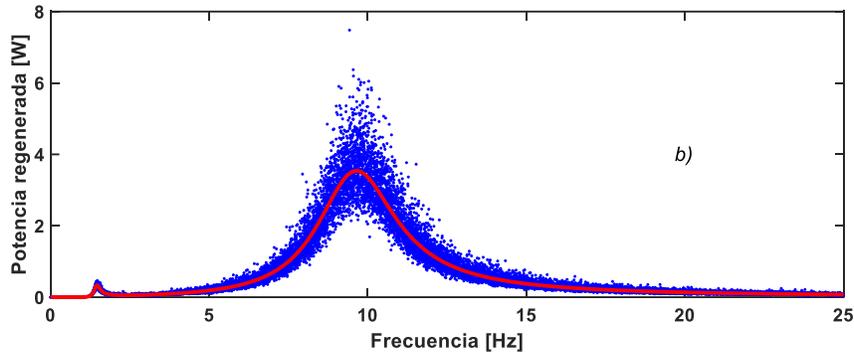


Figura 4.11 Relación entre la potencia eléctrica y la amplitud de excitación (0.035 m), para la variación de R_i desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%: (a) AR electromecánico y (b) AR electromagnético.

Por otra parte, la variación paramétrica de la relación de transmisión de la caja de cambios solo se puede aplicar al AR electromecánico. Cuando se aleatoriza la relación de transmisión i mediante una función de distribución normal como la que se muestra en la Figura 3.15, la relación de potencia eléctrica puede alcanzar un valor pico de 340 W en la segunda frecuencia de resonancia tal como se muestra en la Figura 4.12. Además, el ancho de banda de recolección de energía se encuentra en el rango de frecuencias de excitación de 5.1-7.1 Hz. Aunque los resultados son similares a aquellos producidos al aleatorizar la variable R_i , existe mayor ancho de banda de recolección de energía para la variable i del AR electromecánico.

Finalmente, la variación paramétrica del radio del rotor del generador r_g se muestra en la Figura 4.13, con esta variación se producen valores elevados de potencia eléctrica para el AR electromecánico. De hecho, se puede recolectar aproximadamente 350 W. Sin embargo, en la vida real no es posible incrementar el diámetro del generador, ya que estas máquinas eléctricas se diseñan bajo condiciones estándar de operación.

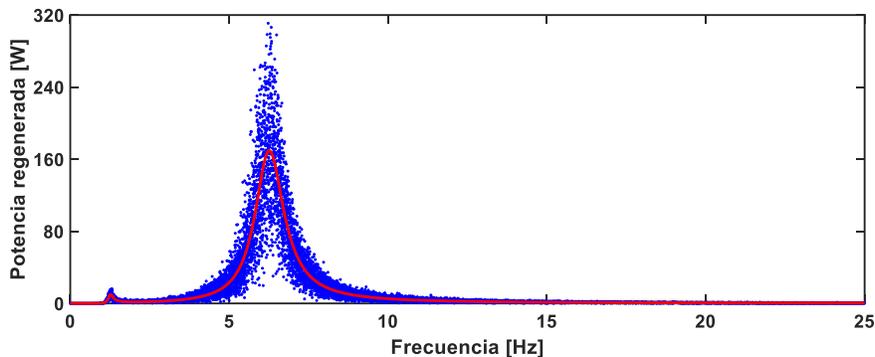


Figura 4.12 Relación entre la potencia de salida y la amplitud de excitación, para la variación de la relación de transmisión i desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%.

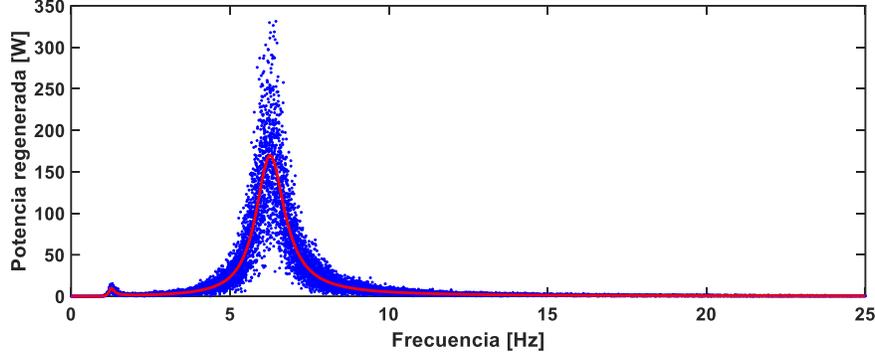


Figura 4.13 Relación entre la potencia de salida y la amplitud de excitación para la variación del radio del rotor del generador r_g desde su valor original como valor medio hasta una desviación estándar del 20%.

4.4 Optimización del AR con la norma \mathcal{H}_2

El objetivo de la optimización basada en el criterio de rendimiento \mathcal{H}_2 es encontrar los parámetros con los cuales se puede obtener el mejor rendimiento en términos de regeneración de energía, es decir, con que parámetros se incrementa la potencia regenerada por el AR. Para lograr la optimización del AR electromecánico, se retoma la metodología desarrollada por (López Gabriel et al., 2023), la cual consiste en maximizar el índice de rendimiento de la potencia eléctrica del AR, descrita en la sección 3.8.

Para iniciar la optimización del AR electromecánico se deben de definir los parámetros a ser optimizados. En este caso, se retoman los resultados del análisis paramétrico con el método de simulación Monte Carlo descrito en la sección 4.3, lo cuales demuestran que la resistencia interna de la bobina, la resistencia de carga y la relación de transmisión son los principales parámetros que influyen en el ancho de banda de recolección de energía vibratoria. Luego, la FRF de la potencia eléctrica P del modelo de un cuarto de vehículo con AR electromecánico está dada por la siguiente expresión matemática.

$$P = \frac{U^2}{R_e} \quad (4.7)$$

Al encontrar la solución en estado estable de la ecuación (4.1), se define la función de transferencia de la potencia eléctrica generada por el AR electromecánico de la siguiente manera.

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{R_e} |H_P(j\omega)|^2 |X_g(j\omega)|^2 \quad (4.8)$$

Después, el índice de rendimiento o valor RMS (Root Mean Square) de la potencia eléctrica del AR electromecánico se define de la siguiente forma.

$$J_P = 2\pi n_0 \sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{R_e} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} \cdot H_P(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (4.9)$$

La integral dentro del radical se puede resolver mediante el enfoque de las integrales de vibración aleatoria desarrollado por (J. B. Roberts & P. D. Spanos, 1990), tal como se muestra a continuación.

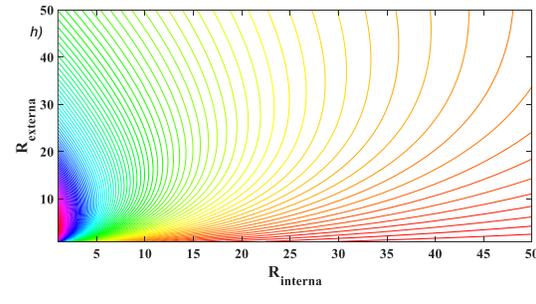
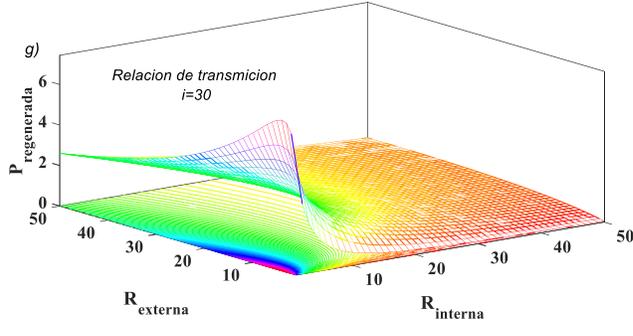
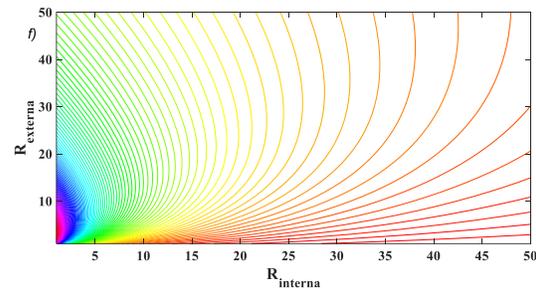
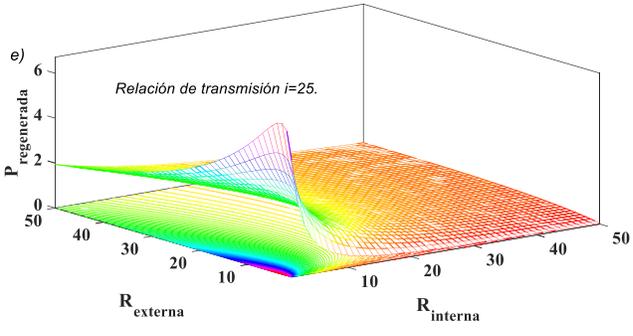
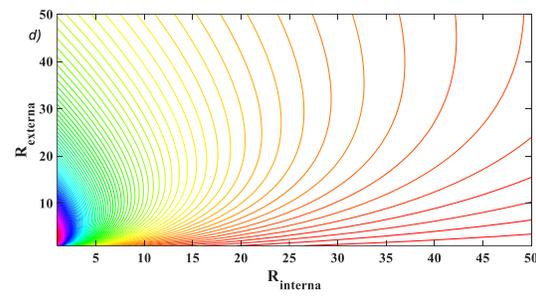
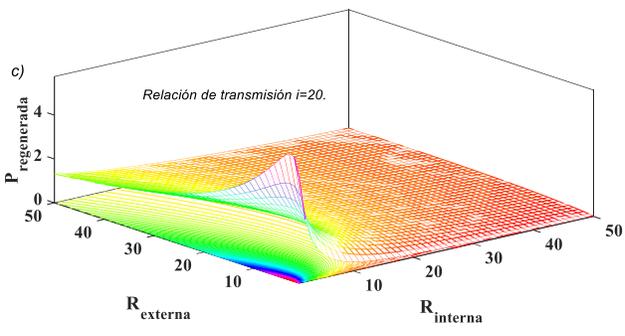
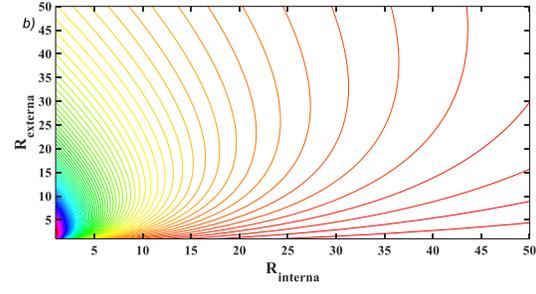
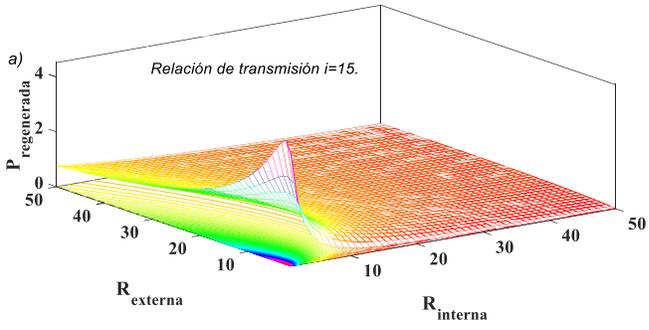
$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} H_P(j\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_m(\omega)}{E_m(j\omega) \cdot E_m(-j\omega)} d\omega \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{m-1}\omega^{2 \cdot (m-1)} + B_{m-2}\omega^{2 \cdot (m-2)} + B_{m-3}\omega^{2 \cdot (m-3)} + \dots + B_0}{A_m(j\omega)^m + A_{m-1}(j\omega)^{m-1} + A_{m-2}(j\omega)^{m-2} + \dots + A_0} d\omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para el caso del AR electromecánico, la FRF de la potencia eléctrica tiene seis polos simples en el plano medio superior del plano complejo. Por lo tanto, la integral de la ecuación (4.10), se reduce a la siguiente expresión matemática.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_e} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + \omega_0} \cdot H_P(j\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5\omega^{10} + B_4\omega^8 + B_3\omega^6 + B_2\omega^4 + B_1\omega^2 + B_0}{A_6(j\omega)^6 + A_5(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \\ & = \frac{1}{R_e} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{A_6} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A_5 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde; $A_6 = ((m_2 + m_s)m_1 + m_2m_s)Lr^2$, $A_5 = (((L\omega_0 + R_e + R_i)m_2 + (\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))m_1 + ((\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))r^2$, $A_4 = ((\omega_0(R_e + R_i)m_1 + ((c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))\omega_0 + (k_2 + k_1)L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i))m_2 + (((c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))\omega_0 + k_2L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i))m_1 + m_sLk_1)r^2 + Bk_e r_g i^2 (m_1 + m_2)$, $A_3 = (((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + (k_2 + k_1)L)m_2 + m_1(c_2 + c_L)R_e + m_1(c_2 + c_L)R_i + L(k_1m_s + k_2m_1))\omega_0 + (R_e + R_i)(k_2 + k_1)m_2 + (k_1m_s + k_2m_1)R_e + (k_1m_s + k_2m_1)R_i + Lk_1(c_2 + c_L)r^2 + Bk_e r_g i^2 \omega_0 (m_1 + m_2)$, $A_2 = (((m_2 + m_s)R_e + (m_2 + m_s)R_i + (c_2 + c_L)L)\omega_0 + (c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + k_2L)k_1 + k_2\omega_0(R_e + R_i)(m_1 + m_2)r^2 + Bk_1k_e i^2 r_g$, $A_1 = k_1(((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + k_2L)\omega_0 + k_2(R_e + R_i))r^2 + Bk_e r_g i^2 \omega_0$, $A_0 = k_1k_2r^2(R_e + R_i)\omega_0$, $B_5 = 0$, $B_4 = 0$, $B_3 = R_e^2 k_e^2 i^2 m_2^2 r^2 k_1^2$, $B_2 = 0$, $B_1 = 0$ y $B_0 = 0$.

Resolviendo la ecuación (4.11) y combinándola con la ecuación (4.12), se obtiene la expresión en forma cerrada del índice de rendimiento J_P . La programación pertinente de tal índice se realiza en el software Matlab para llevar a cabo el análisis paramétrico gráfico. Dicho análisis, consiste en dos secciones: primero se varía el valor de la resistencia interna y externa del circuito de recolección de energía en un rango de [1-50] Ω manteniendo los valores constantes [10, 15, 20, 25 y 30] de la relación de transmisión, en la segunda parte del análisis paramétrico, la resistencia interna toma un valor fijo mientras que el valor de la resistencia externa varía en el rango [10-700] Ω y la relación de transmisión en un rango de [10-850]. La primera parte del análisis de sensibilidad paramétrica se muestra en la Figura 4.14.



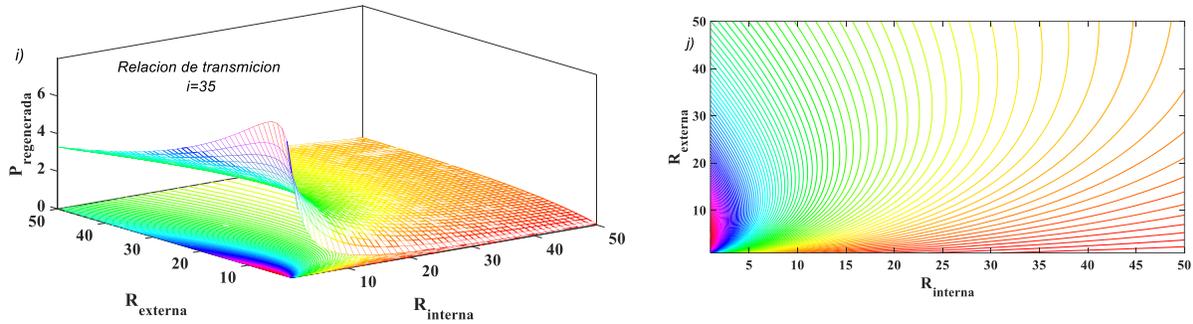
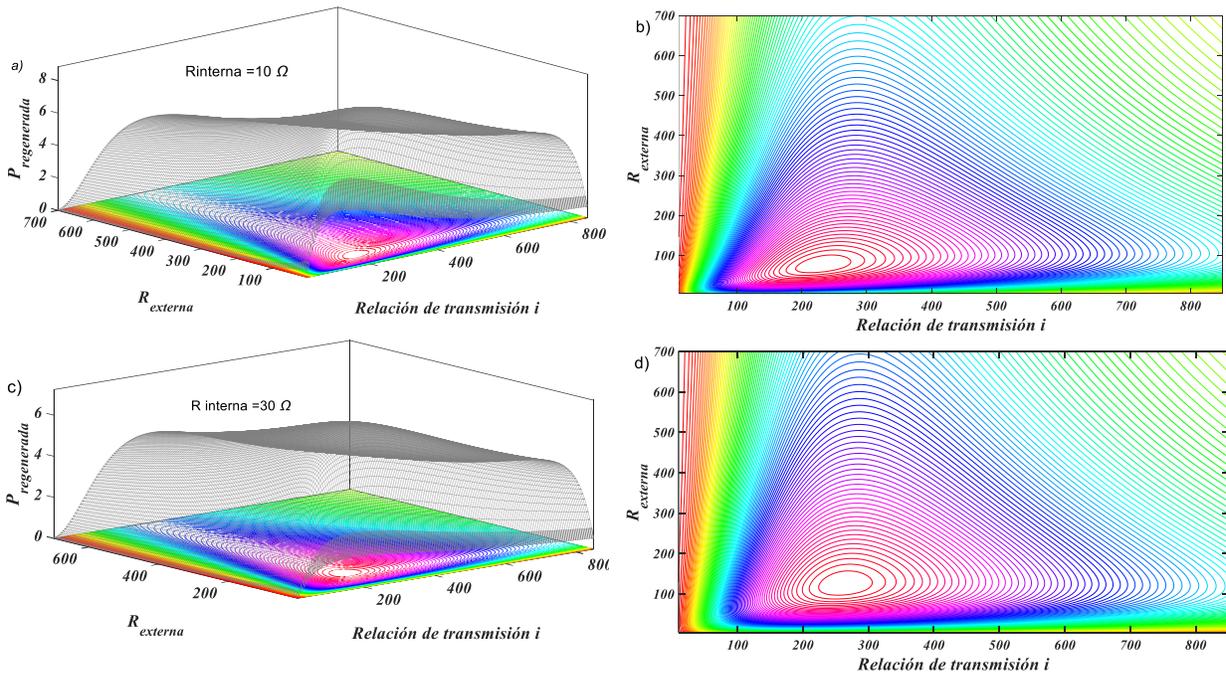


Figura 4.14 Superficies y curvas de contorno del índice de rendimiento de la potencia eléctrica producida por el AR electromecánico, obtenidas a partir de la variación de la relación de transmisión i .

Nótese que, en la Figura 4.14, para una relación de transmisión elevada y resistencias menores a 10Ω , se puede alcanzar una potencia máxima total de 7 W. Por otro lado, con una relación de transmisión de $i = 15$ la potencia eléctrica efectiva es aproximadamente 4 W. Es importante mencionar que, un valor de transmisión más grande implica una inercia rotacional mayor producida por el mecanismo de amplificación de movimiento, lo que podría provocar un deterioro significativo en los índices de rendimiento del sistema de suspensión. Por otro lado, la segunda parte del análisis paramétrico para maximizar la potencia regenerada del AR electromecánico, se observar la Figura 4.15.



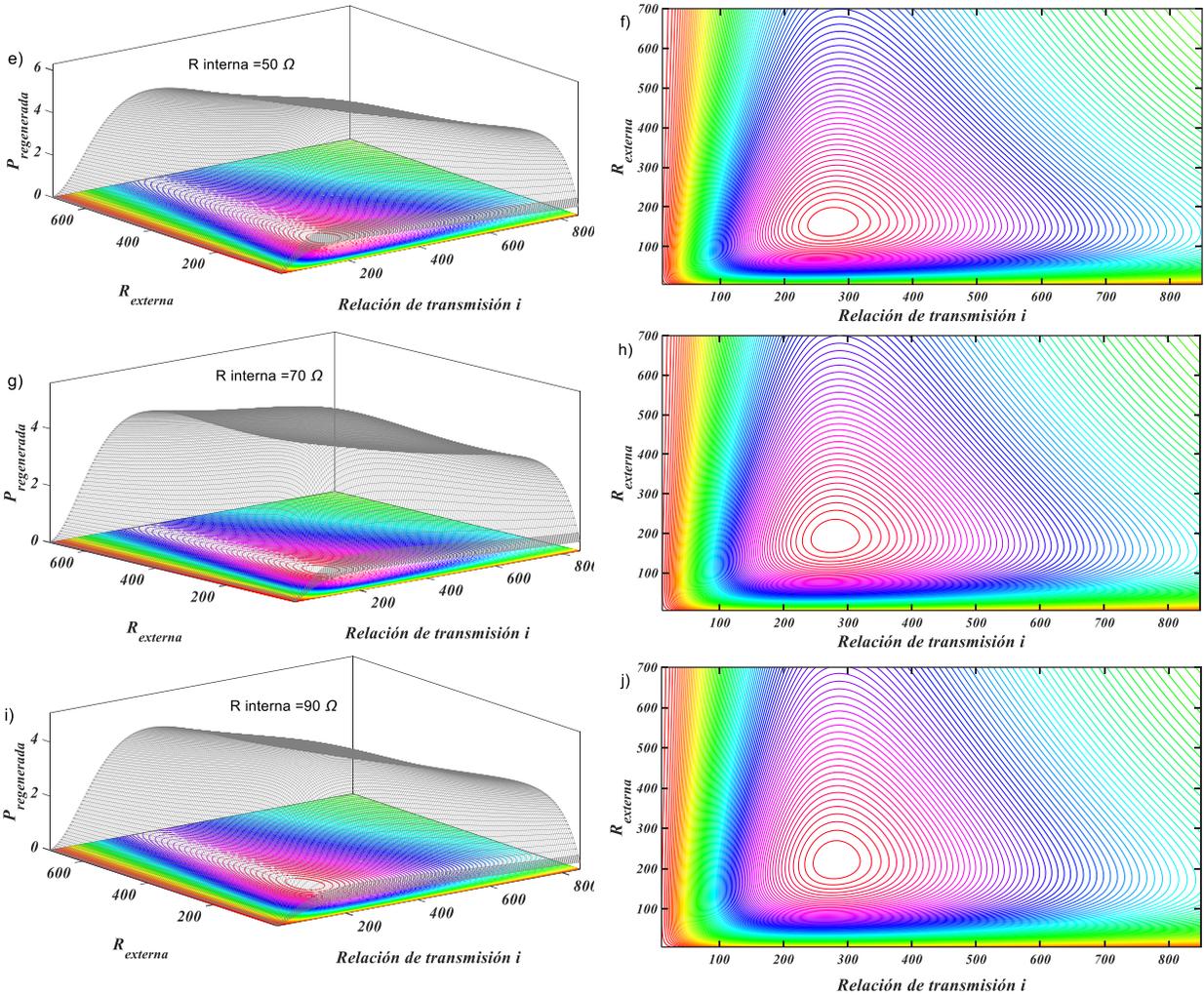


Figura 4.15: Superficies y curvas de contorno del índice de rendimiento de la potencia eléctrica producida por el AR electromecánico, obtenidas a partir de la variación de la resistencia interna de la bobina R_i .

Vale la pena observar que, en la Figura 4.15, la máxima potencia eléctrica generada ocurre cuando la resistencia interna tiene un valor de 10Ω . Esto concuerda con los resultados obtenidos del análisis paramétrico que se describe en la Figura 4.14. Además, cuando la relación de transmisión se encuentra en el rango de 200-300, la potencia recuperable se incrementa considerablemente, sin embargo, como se mencionó anteriormente, un valor de relación de transmisión elevado podría originar efectos perjudiciales en la dinámica del sistema de suspensión. Analizando detalladamente las curvas de contorno, se puede observar que existe una correlación entre los valores de la resistencia interna con los de la externa, es decir, si la resistencia interna tiene valores altos, la resistencia externa debe de tener valores similares para alcanzar una potencia máxima. Finalmente, con los resultados del análisis paramétrico, es posible seleccionar los valores óptimos para lograr un funcionamiento adecuado del AR electromecánico no solo en términos del mejoramiento de la dinámica del sistema de suspensión, sino que también en la máxima regeneración de energía vibratoria. Por tal motivo, los valores seleccionados para las resistencias del circuito de recolección de energía son de 10Ω , debido a que este valor maximiza significativamente el índice de la potencia eléctrica. Por otro lado, la elección óptima de la relación de transmisión i del AR

electromecánico presenta una mayor complicación, ya que el análisis paramétrico proporciona valores relativamente altos de i . Realmente, es imposible fabricar un AR electromecánico con tal relación de transmisión, por tal razón, el valor de la relación de transmisión debe tomar valores pequeños para cumplir con los requisitos de espacio de instalación, tal valor podría ser $i = 25$.

Por otra parte, al conocer la notable mejora en la capacidad de regeneración de energía vibratoria de los ARs con los parámetros optimizados a través de la técnica del balance de energía estocástica, se puede plantear la siguiente interrogante ¿cómo afectan estos parámetros óptimos seleccionados en los índices de rendimiento del sistema de suspensión o en la dinámica general del vehículo, es decir, el índice del confort, el índice de la deflexión del sistema de suspensión y el índice de la carga dinámica del neumático? Por tal motivo, en la siguiente sección se discutirá el comportamiento de los índices de rendimiento dinámico mediante la variación paramétrica de los parámetros físicos del AR electromecánico.

4.5 Evaluación de los índices de rendimiento dinámicos del vehículo.

Actualmente, existe tres índices de rendimiento sumamente importantes para el análisis del comportamiento dinámico del vehículo, los cuales son los siguientes: la calidad de conducción o la comodidad, la seguridad de conducción o el agarre mecánico de los neumáticos y el nivel de deflexión del sistema de suspensión. Adicionalmente, el potencial de recolección de energía actualmente está siendo considerado como otro índice de rendimiento en las suspensiones regenerativas. Dado que el modelo dinámico del vehículo con suspensión pasiva convencional en la mayoría de los casos es simétrico, por simplicidad es conveniente analizar solamente un cuarto del vehículo, como el que se describe en la Figura 3.7. Considerando que el perfil irregular de la carretera es un proceso estocástico estacionario que se puede representar a través de la función de densidad espectral de potencia (PSD), al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial estocástica, se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{PSD}_{x_g(t)} = |x_g(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 \cdot |W(j\omega)|^2 = \frac{(2\pi n_0)^2 S_x G_x(n_0) V}{\omega^2 + (2\pi f_0)^2} \quad (4.13)$$

La obtención del espectro de la potencia de salida del perfil irregular de la carretera se define en el Apéndice C de este trabajo de investigación. Para conocer los efectos que causa en la dinámica del vehículo este tipo de espectro, es necesario conocer las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) de cada uno de los índices de rendimiento dinámico mencionados anteriormente, es decir, la FRF de la potencia eléctrica recolectada $|H_{Energy\ Harvesting}(j\omega)|$, la FRF de la aceleración del chasis $|H_{Acel}(j\omega)|$, la FRF de la deflexión del sistema de suspensión $|H_{SuspeDeflec}(j\omega)|$ y la FRF de la carga dinámica del neumático sobre la carretera $|H_{TyreLoad}(j\omega)|$. Por lo tanto, los índices de rendimiento se pueden expresar de la siguiente manera.

$$\begin{cases}
J_{EH} = (2\pi n_0)\sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Energy\ Harvesting}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
J_A = (2\pi n_0)\sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Acel}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
J_{SD} = (2\pi n_0)\sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{SuspeDeflec}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
J_{TL} = (2\pi n_0)\sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{TyreLoad}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}
\end{cases} \quad (4.14)$$

Las funciones de transferencia de los índices de rendimiento de la ecuación anterior se muestran en el Apéndice D. Es importante mencionar que, la ecuación (4.14) corresponde al análisis de los índices de rendimiento en el dominio frecuencial, sin embargo, estos índices también pueden ser planteados en el dominio del tiempo como se describe en la siguiente expresión:

$$\begin{cases}
\widetilde{J}_{EH} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R_e} \int_0^T \|J_{EH}(t)\|^2 dt} \\
\widetilde{J}_A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|J_A(t)\|^2 dt} \\
\widetilde{J}_{SD} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|J_{SD}(t)\|^2 dt} \\
\widetilde{J}_{TL} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|J_{TL}(t)\|^2 dt}
\end{cases} \quad (4.15)$$

donde, \widetilde{J}_{EH} representa al índice dinámico en el dominio del tiempo de la potencia eléctrica recolectada, \widetilde{J}_A es el índice del confort del vehículo, \widetilde{J}_{SD} denota al índice de la deflexión del sistema de suspensión y, \widetilde{J}_{TL} es el índice de la carga dinámica del neumático hacia el suelo. Para observar el comportamiento de estos índices dinámicos, se realizó un análisis de sensibilidad paramétrica. Además, tal análisis permite determinar la existencia de un equilibrio de diseño, debido a que la maximización del índice de la potencia eléctrica implica la minimización de los índices restantes o en el peor de los casos que ocurra un deterioro significativo en ellos. Vale la pena mencionar que, el análisis de sensibilidad de esta sección es muy similar al desarrollado en la sección 4.4. Para este estudio, se realiza el análisis paramétrico para cada índice de rendimiento, de modo que se pueda revelar el efecto de los parámetros físicos del circuito de recolección de energía sobre tales índices. Debido a que las integrales de vibración aleatoria dadas por la ecuación (4.14) producen expresiones demasiado grandes, en el Apéndice D solamente se describen los coeficientes para cada determinante. Después de realizar la programación de estos índices en Matlab – MapleSoft, en la Figura 4.16, se muestra el comportamiento del a) índice de potencia eléctrica cosechada, b) índice del confort relacionado al nivel de aceleración de la masa suspendida, luego, en c) índice de la deflexión del sistema de suspensión, mientras que, en d) índice de la carga dinámica en el neumático que también representa la seguridad de conducción.

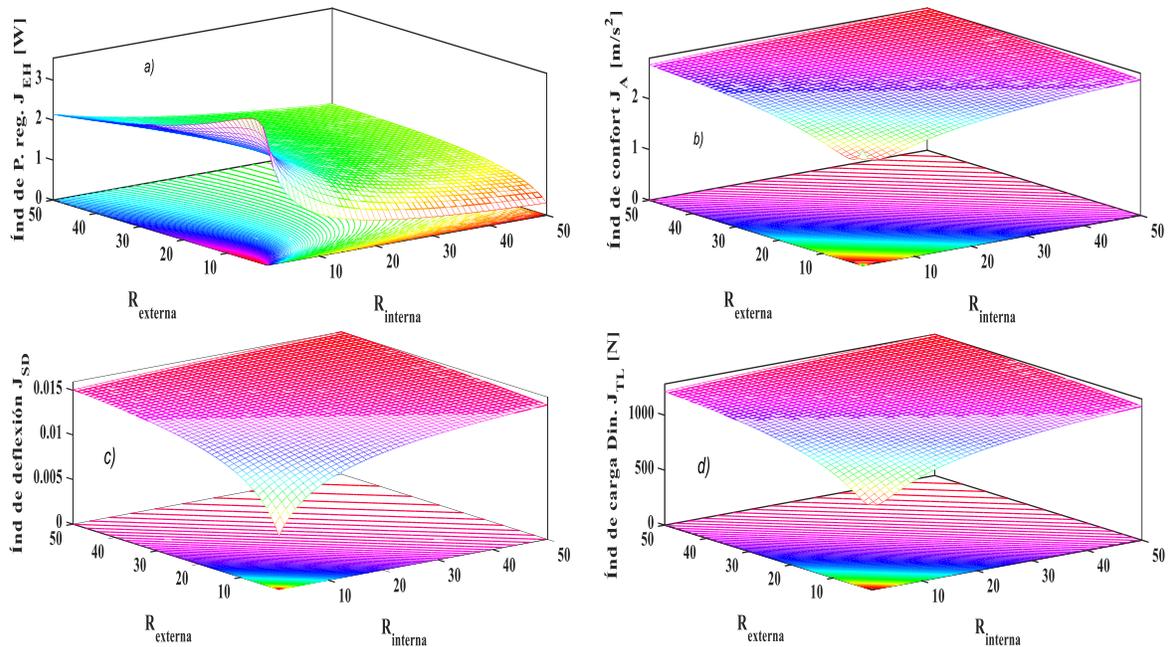


Figura 4.16: Análisis de sensibilidad paramétrica de los índices de rendimiento del AR electromecánico variando la resistencia externa R_e y la resistencia interna R_i .

Observe en la Figura 4.16 que, la variación de la resistencia externa R_e y la resistencia interna R_i , mientras la relación de transmisión i permanece fija en un valor de 25, los índices del confort, de la deflexión del sistema de suspensión y de la carga dinámica no se ven afectados en el dominio frecuencial. Esto se debe principalmente a que la fuerza electromagnética del AR electromecánico es mucho menor que aquella que ejerce el arreglo en paralelo del resorte y amortiguador de fluido viscoso. Para corroborar este hecho, en la Figura 4.17, se muestra gráficamente la fuerza electromagnética en el dominio del tiempo tanto del AR electromecánico como la del electromagnético, las cuales se encuentran en los siguientes rangos [70 N, -70 N] y [2 N, -2 N], respectivamente. En importante mencionar que, la fuerza de Lorentz del AR electromagnético fue obtenida por (Lopez Gabriel et al., 2023), mientras que aquella del AR electromecánico se obtiene en este trabajo de investigación.

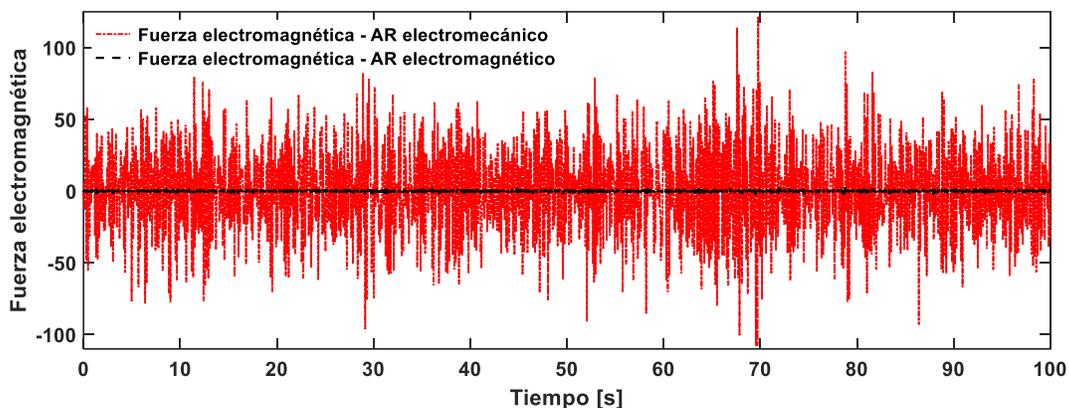


Figura 4.17 Fuerza electromagnética producida por los ARs electromagnético y electromecánico.

Finalmente, en la Figura 4.18 se muestra el comportamiento de los índices de rendimiento del sistema de suspensión automotriz regenerativa, cuando se varía la resistencia externa y la relación de transmisión i , mientras la resistencia interna de la bobina permanece con un valor fijo de 10Ω .

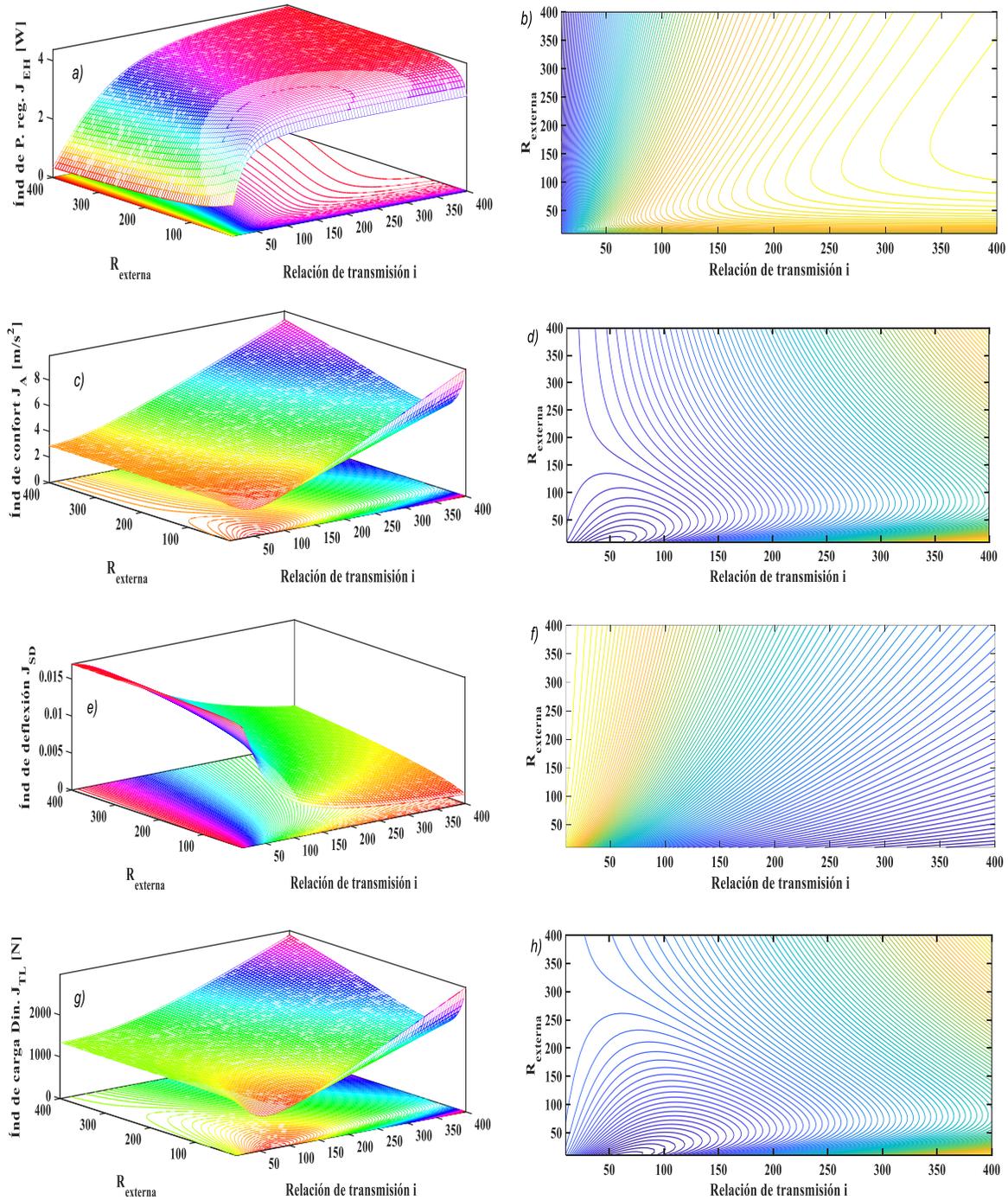


Figura 4.18 Análisis de sensibilidad paramétrica de los índices de rendimiento dinámico del AR electromecánico variando tanto la resistencia externa R_e como la relación de transmisión i .

Nótese que, en la Figura 4.18 c) y g), tanto el índice del confort como el de la carga dinámica se deterioran fuertemente a medida que la relación de transmisión aumenta, mientras que los índices de la potencia eléctrica y de la deflexión del sistema de suspensión se mejoran significativamente. Por lo tanto, el equilibrio de diseño revela que no se puede mejorar significativamente el potencial de regeneración de energía vibratoria sin afectar las dinámicas del vehículo. Esto se debe principalmente al efecto de rigidez negativa que produce el AR electromecánico, que de hecho es el mismo que produce un inersor (*J-damper*). Sin embargo, en las curvas de contorno descritas en la Figura 4.18 d) y h) se puede apreciar que tanto el índice de la comodidad como el de la seguridad de conducción se mejoran substancialmente en el dominio de $i \in [20,80]$. Así, en este dominio, se podría diseñar el AR electromecánico sin perjudicar a los índices restantes, ya que son funciones objetivos multivariables monótonas.

Con el objetivo de corroborar la declaración mencionada anteriormente, se realizó un análisis de sensibilidad paramétrica a diferentes sistemas de suspensión basados en redes mecánicas con inersor. Las redes mecánicas que se utilizaron para tal análisis se muestran en la Figura 4.19, donde c) corresponde al famoso TID (Tuned Inerter Dámper) y d) a la red C3 que es un arreglo en serie descrito como amortiguador-inersor-resorte. Adicionalmente, la configuración del inersor en paralelo (Parallel Inerter) consiste en una conexión en paralelo del resorte, amortiguador y el inersor. Este último arreglo permite emular el comportamiento de la inercia rotacional que produce el mecanismo de conversión de movimiento del AR electromecánico. Después de obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento para los sistemas dinámicos descritos, se realizó la programación de ellos en Matlab/Simulink utilizando el comando *sim*, en el cual se definen los siguientes índices de rendimiento normalizados en el dominio del tiempo con el objetivo de revelar el dominio permisible de inercia rotacional del AR electromecánico.

$$\begin{cases}
 \tilde{J}_{N,C3} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,C3}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{C3}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{C3}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_b - \dot{X}_u)_{C3}\|^2 dt}\right)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_s - \dot{X}_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} \\
 \tilde{J}_{N,TID} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,TID}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{TID}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{TID}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_b - \dot{X}_u)_{TID}\|^2 dt}\right)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_s - \dot{X}_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} \\
 \tilde{J}_{N,PI} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,PI}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{s,Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{PI}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_s - X_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{PI}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_u - X_g)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_b - \dot{X}_u)_{PI}\|^2 dt}\right)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_f(\dot{X}_s - \dot{X}_u)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}}
 \end{cases} \quad (4.16)$$

donde, $\tilde{J}_{N,C3}$, $\tilde{J}_{N,TID}$ y $\tilde{J}_{N,PI}$ corresponden al índice normalizado de la red mecánica C3, de la configuración TID y de la configuración de inersor en paralelo (Parallel Inerter), respectivamente.

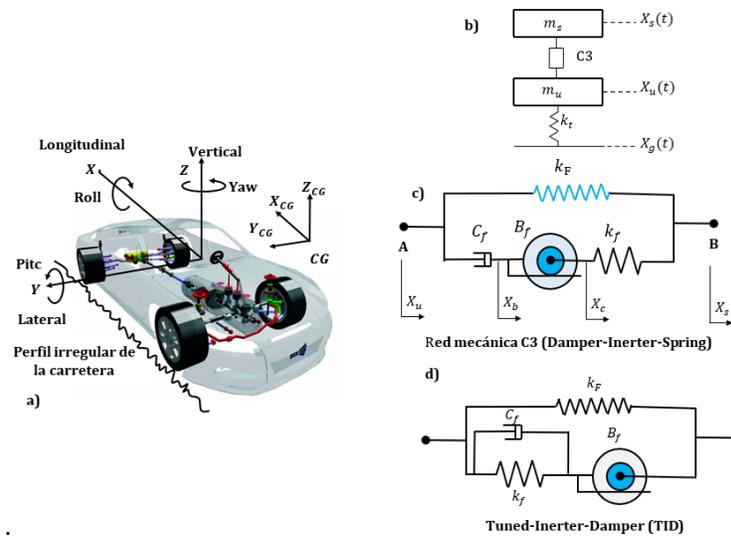


Figura 4.19: Sistema de suspensión automotriz basada en inersor (The inerter): a) Grados de libertad del cuerpo de un vehículo sin restricciones considerando a CG como su centro de gravedad, b) modelo de un cuarto de vehículo, c) disipador de energía vibratoria basado en la conexión C3 en serie amortiguador-inersor-resorte y d) disipador de energía vibratoria basado en la conexión TID.

Los parámetros utilizados para el análisis de sensibilidad paramétrica de los índices normalizados descritos por la ecuación (4.16) se muestran en la Tabla 4.2. Luego, en la Figura 4.20 se muestran las variaciones de tales índices, cuando se incrementa la inercia del inersor.

Tabla 4.2 Parámetros de simulación de las redes mecánicas acopladas al modelo de un cuarto de vehículo.

Parámetro	Suspensión pasiva	Red mecánica C3	Red mecánica TID
M_s [kg]	320	320	320
m_u [kg]	45	45	45
B_f [kg]	---	1016	217
K_F [N/m]	22000	22000	22000
K_f [N/m]	---	$2.946246587(10^6)$	10000
K_t [N/m]	190000	190000	190000
C_f [Ns/m]	1000	1903	1067

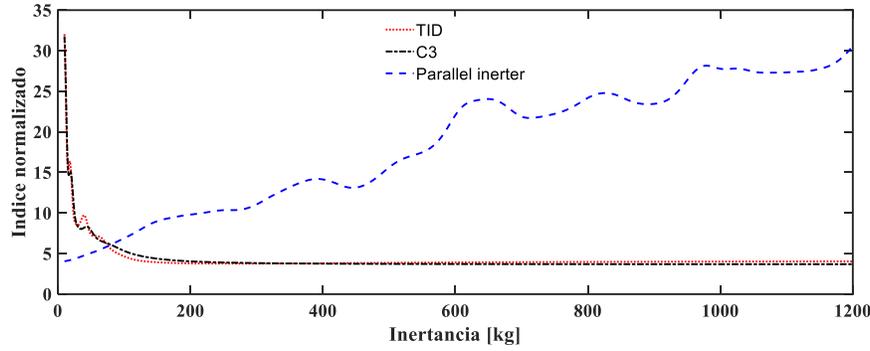


Figura 4.20: Representación gráfica de los índices normalizados como una función de la inercia rotacional del inersor.

Nótese en la Figura 4.20 que, a medida que se incrementa la masa equivalente, los índices normalizados para la red mecánica TID y C3 decrecen drásticamente, indicando un alto rendimiento de aislamiento de vibración. Sin embargo, se produce un efecto perjudicial en el arreglo en paralelo a niveles altos de inercia. Vale la pena observar que, los índices del TID y C3 se cruzan con el índice del arreglo en paralelo, cuando la inercia es aproximadamente 75 Kg. De hecho, cuando la inercia está por debajo de este valor, la configuración en paralelo tiene un mejor funcionamiento con respecto a las otras configuraciones. Por lo tanto, se puede asumir que la masa equivalente m_s que genera el AR electromecánico debe ser inferior a los 75 Kg, de modo que no se afecten las dinámicas del vehículo. Con esto en mente, cuando la relación de transmisión es $i = 25$, la masa equivalente del AR electromecánico es de 69 kg, lo que confirma que el valor elegido mediante la optimización del amortiguador es correcto.

Finalmente, se propuso un índice normalizado en el dominio frecuencial, el cual es una combinación lineal de los índices de rendimiento del confort, de la deflexión del sistema de suspensión, de la carga dinámica del neumático y el de la potencia regenerada por el AR electromecánico. Tal índice permite revelar de manera unificada el comportamiento dinámico del sistema de suspensión regenerativa, cuando se varía el valor de la resistencia externa R_e , resistencia interna R_i y la relación de transmisión i . Dicho índice se puede escribir como sigue.

$$\begin{aligned}
 J_N = & \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Acelmecanico}(j\omega) \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Acelmagnetico}(j\omega) \right|^2 d\omega} \right]^{1/2} + \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{SuspeDeflecmeccanico}(j\omega) \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{SuspeDeflecmagnetico}(j\omega) \right|^2 d\omega} \right]^{1/2} \\
 & + \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{TyreLoadmecanico}(j\omega) \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{TyreLoadmagnetico}(j\omega) \right|^2 d\omega} \right]^{1/2} + \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{EHmecanico}(j\omega) \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{EHmagnetico}(j\omega) \right|^2 d\omega} \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nótese que, el índice normalizado de la ecuación (4.17) permite comparar el rendimiento de control del AR electromecánico con respecto al producido por el AR electromagnético. Por lo tanto, en la Figura 4.21 se puede observar gráficamente el comportamiento funcional de tal índice sujeto a diferentes variaciones paramétricas.

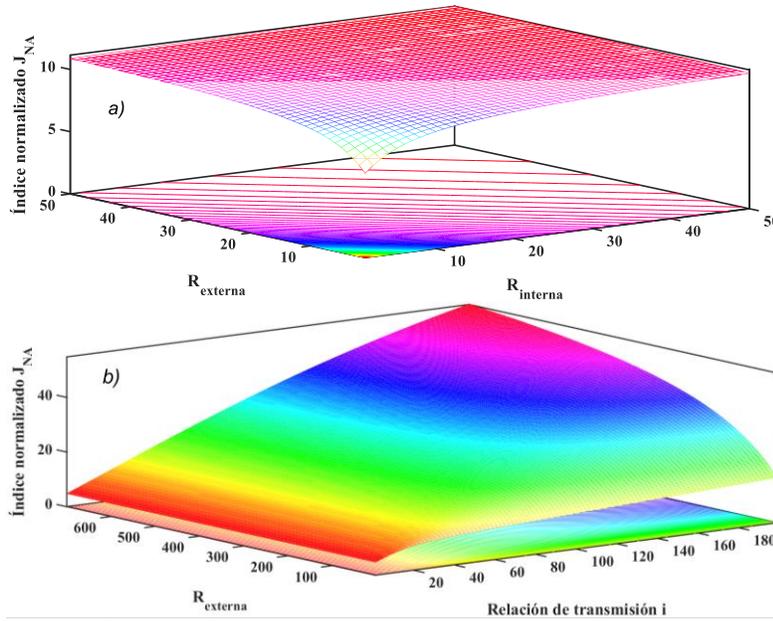


Figura 4.21 Análisis paramétrico del índice normalizado J_N , cuando se varían a) la resistencia interna R_i - Resistencia externa R_e y b) la relación de transmisión i - Resistencia externa R_e .

Nótese que, en la Figura 4.21 a), el índice normalizado presenta una respuesta mínima a la variación de las resistencias del circuito de recolección de energía, revelando una vez más que los parámetros del circuito de recolección de energía no afectan a la dinámica del vehículo. Sin embargo, en la Figura 4.21 b) se puede observar que el índice J_N incrementa monótonamente, cuando la relación de transmisión i supera el valor de 40, indicando que la inercia rotacional del disipativo de recolección de energía domina la dinámica del sistema de suspensión.

4.6 Simulación numérica basada en ciclos de conducción y niveles de rugosidad de la carretera.

Por último, en esta subsección se realizan simulaciones numéricas, en las cuales se consideran señales artificiales de carretera generadas a partir de la ecuación diferencial estocástica definida en la sección 1.6.1. Esto con el objetivo de emular un comportamiento más real de las condiciones de carretera, y de este modo conocer con más exactitud el potencial de regeneración de energía vibratoria de las suspensiones regenerativas. Por lo tanto, para representar la excitación de los neumáticos, se incorporan los niveles de rugosidad de las carreteras clasificados por la norma ISO 8608 [2]. Por lo tanto, en la Tabla 4.3 se muestran los parámetros para generar tales perfiles aleatorios.

Tabla 4.3 Niveles de rugosidad de la carretera clasificados por la norma ISO 8608 [2].

Perfil de la carretera	$G_x(\eta_o) (10^{-6}) [m^3]$ $\eta_o=0.1 [m^{-1}]$ Media geométrica.	Perfil de la carretera	$G_x(\eta_o) (10^{-6}) [m^3]$ $\eta_o=0.1 [m^{-1}]$ Media geométrica.

Clase A	16	Clase E	4096
Clase B	46	Clase F	16384
Clase C	256	Clase G	65536
Clase D	1024	Clase H	262144

En la Figura 4.22 se muestran las diferentes clases de carreteras, cuando la velocidad de conducción del vehículo es constante. Nótese que, a medida que se incrementa el coeficiente de rugosidad de la carretera, se incrementa la intensidad de vibración que el camino puede inducir al vehículo.

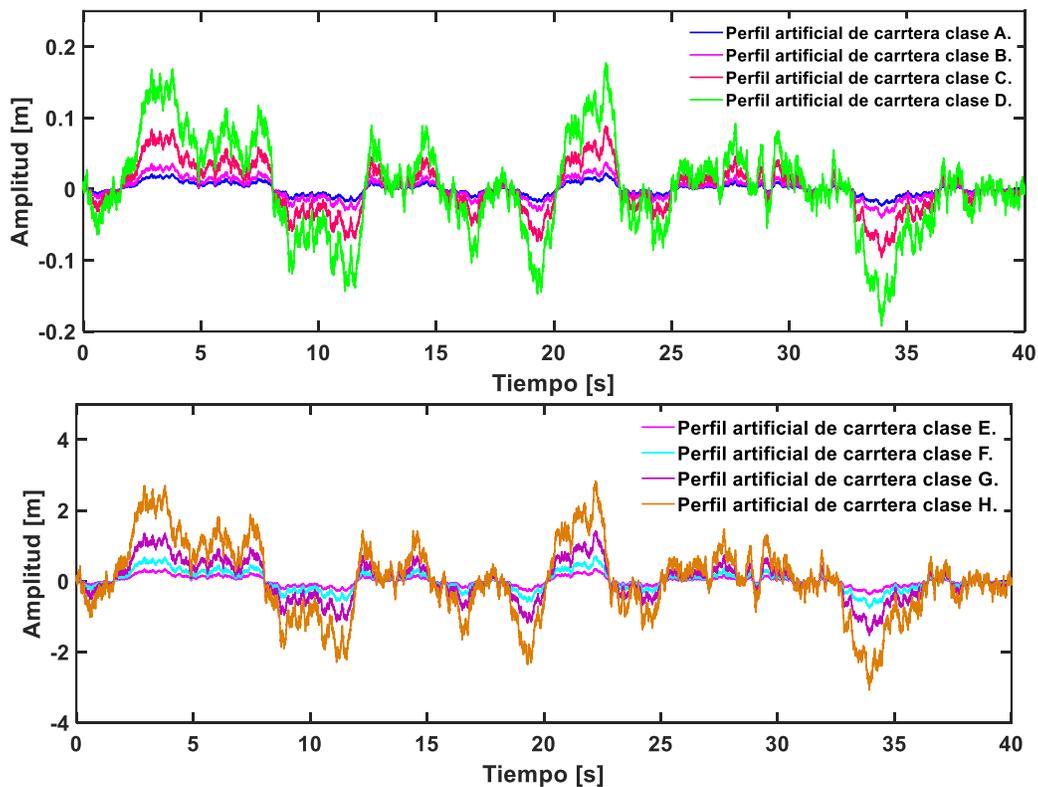


Figura 4.22 Perfiles artificiales de carretera.

Para lograr que la simulación numérica del modelo del vehículo completo sea semejante a la realidad, es necesario considerar que, en un ciclo de conducción real, el eje trasero del vehículo se retarda con respecto al eje delantero, tal como se muestra en la Figura 4.23. En esta figura se muestran únicamente los perfiles de la clase C y D con sus respectivos retardos.

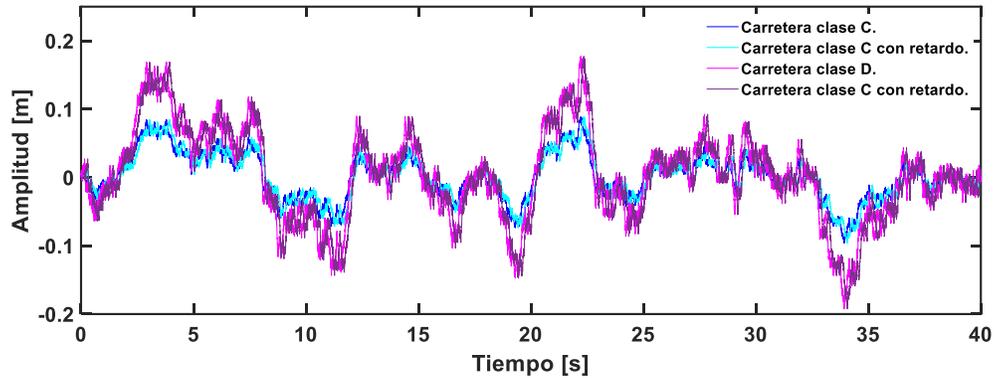


Figura 4.23 Perfiles artificiales de carreteras clase C y D con sus respectivos retardos.

Para la primera simulación de esta sección, las señales de excitación de los neumáticos del eje delantero están sujetos a vibración estocástica producida por los perfiles artificiales de carretera clase C y D. Luego, la excitación de los neumáticos del eje trasero son señales vibratorias retardadas en una cantidad de tiempo, tal como se muestra en la Figura 4.23.

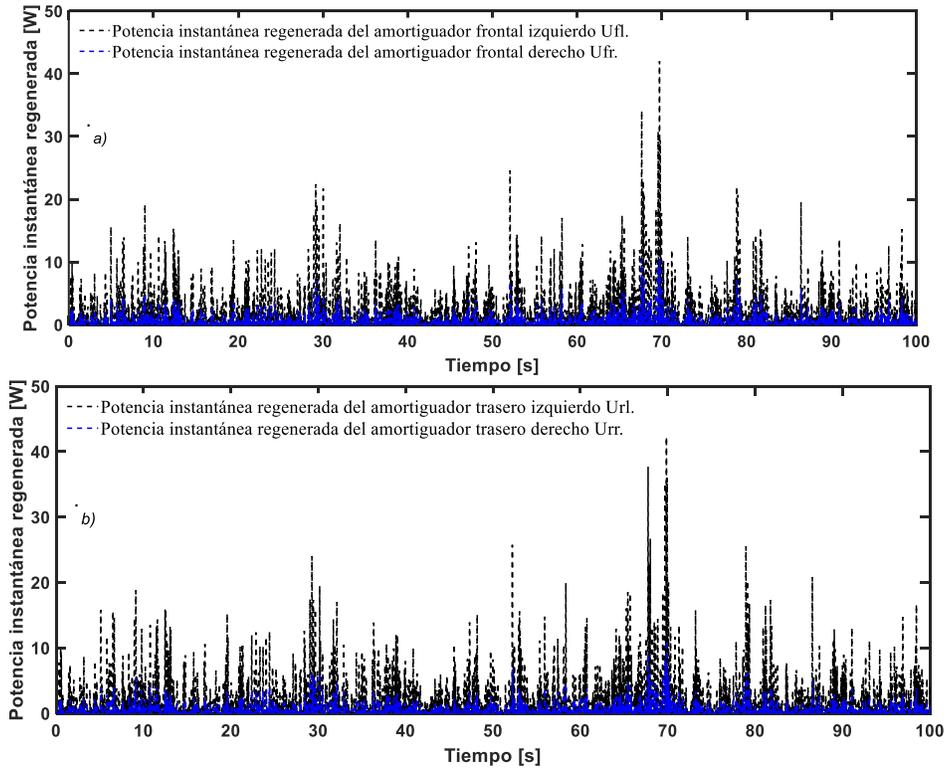


Figura 4.24 Potencia eléctrica instantánea producida por los ARs electromecánicos acoplados al modelo dinámico del vehículo completo, considerando que la velocidad de conducción es de 90 km/h: a) potencia eléctrica cosechada por la suspensión regenerativa frontal, mientras que b) es para la trasera.

En la Figura 4.24 se puede observar que la potencia eléctrica instantánea de la suspensión regenerativa trasera puede alcanzar picos de potencia ligeramente superiores en comparación con la suspensión delantera. Esto se debe principalmente a las dinámicas no sincronizadas del chasis, a pesar que los parámetros físicos de la suspensión pasiva son los mismos. Además, se puede observar que, con la rugosidad de la clase D se obtiene más

potencia eléctrica en comparación con la de clase C. La observación anterior, incluso es intuitiva, ya que, a mayor intensidad de vibración, mayor energía vibratoria está disponible para regenerar. Por otra parte, en la Figura 4.25 se muestra la potencia eléctrica instantánea producida por el AR electrohidráulico sujeto a la misma excitación vibratoria que el AR electromecánico. Además, en tal figura, se puede observar que el transductor electrohidráulico logra recolectar apropiadamente una potencia máxima de 20 W.

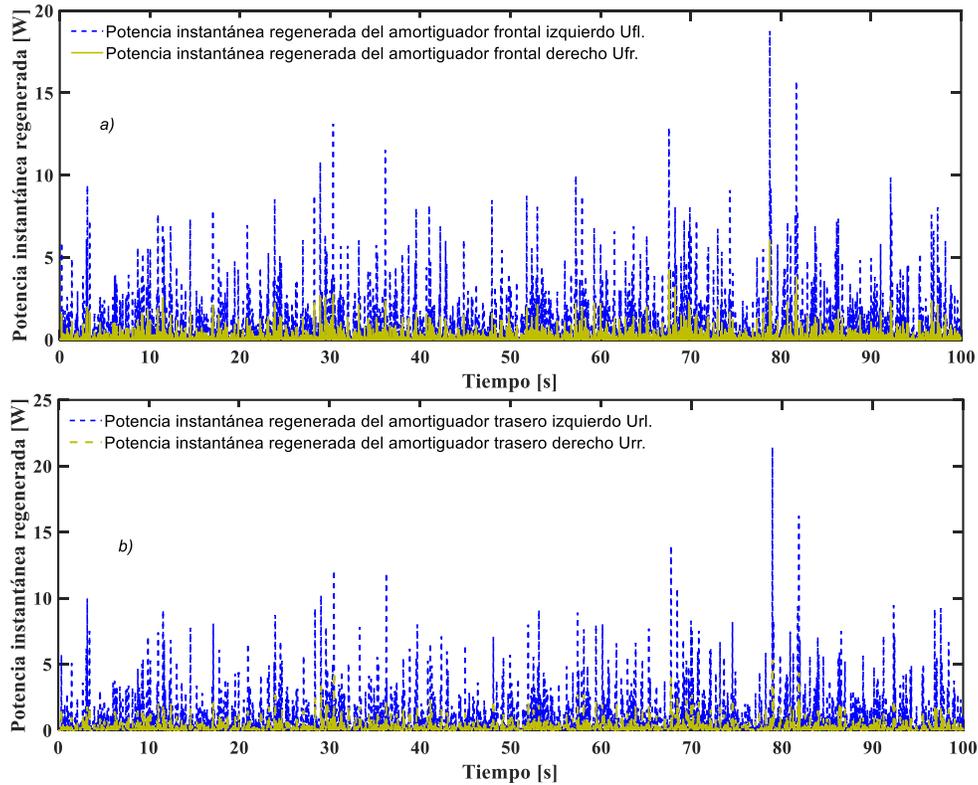
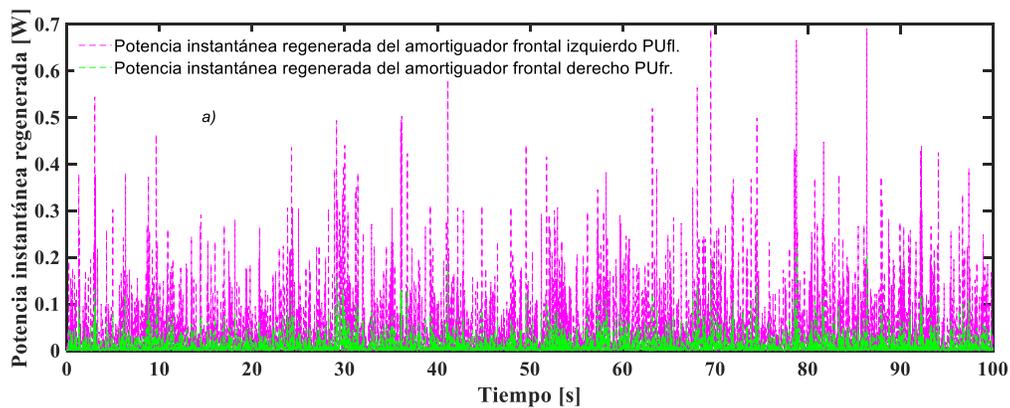


Figura 4.25: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electrohidráulico acoplado al modelo de vehículo completo: a) suspensión regenerativa frontal y b) trasera.

Por otro lado, en la Figura 4.26 se muestra el potencial de recolección de energía vibratoria del AR electromagnético, donde se puede observar que efectivamente este AR posee menos capacidad de regeneración de energía.



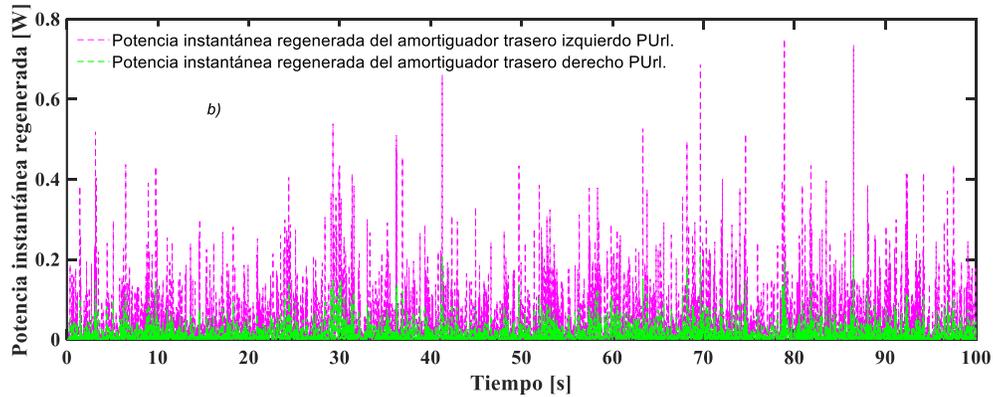


Figura 4.26: Potencia eléctrica instantánea producida tanto en la suspensión regenerativa electromagnética a) frontal y b) trasera del vehículo, considerando la velocidad de conducción constante de 90 km/h.

Con el perfil artificial de clase D, se puede regenerar aproximadamente 1 W de potencia eléctrica con el uso del AR electromagnético, si se conduce a una velocidad constante de 90 km/h, tal como se observa en la Figura 4.26. Sin embargo, en las conducciones que se realizan cotidianamente, rara vez se puede conducir a una velocidad constante, es por este motivo que se decidió realizar simulaciones mucho más completas, en las cuales se propone implementar los ciclos de velocidad de conducción al modelo del vehículo completo. Un ciclo de conducción es un patrón de velocidad de conducción estandarizado, que se utiliza para obtener una comprensión cuantitativa tanto del consumo de combustible como de las emisiones CO₂ en vehículos. Principalmente, estos patrones de conducción se pueden clasificar en dos categorías, estos son: los ciclos modales de conducción, en los que se tiene al ciclo NEDC (New European Driving Cycle) y el ciclo EUDC (Extra Urban Driving Cycle); y los ciclos transitorios, estos implican ciclos de velocidad variable sin patrones, por ejemplo, el ciclo WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure), el FTP (Federal Test Procedure) y el HWFET (Highway Fuel Economy Test) [89-91]. En la Figura 4.27 se muestra la representación gráfica del NEDC y EUDC, y en la Figura 4.28, el perfil artificial de carreta correspondiente a los niveles de rugosidad de clase C y D.

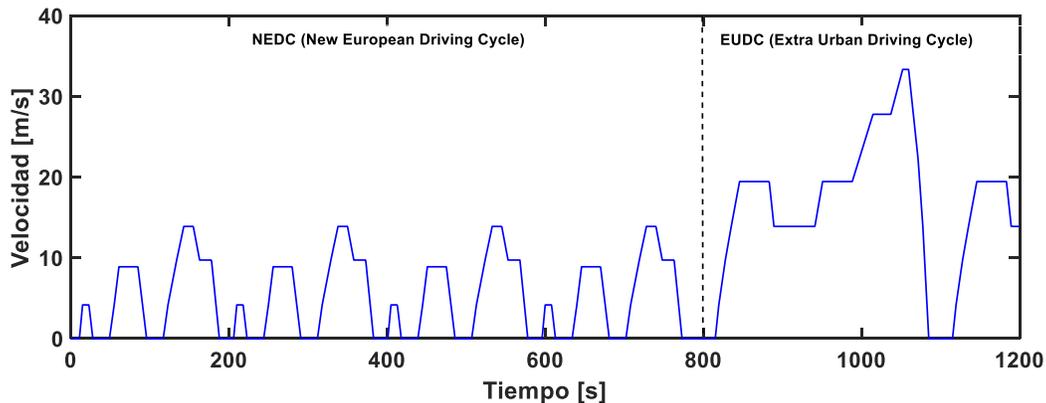


Figura 4.27 Representación gráfica del ciclo de conducción NEDC y EUDC.

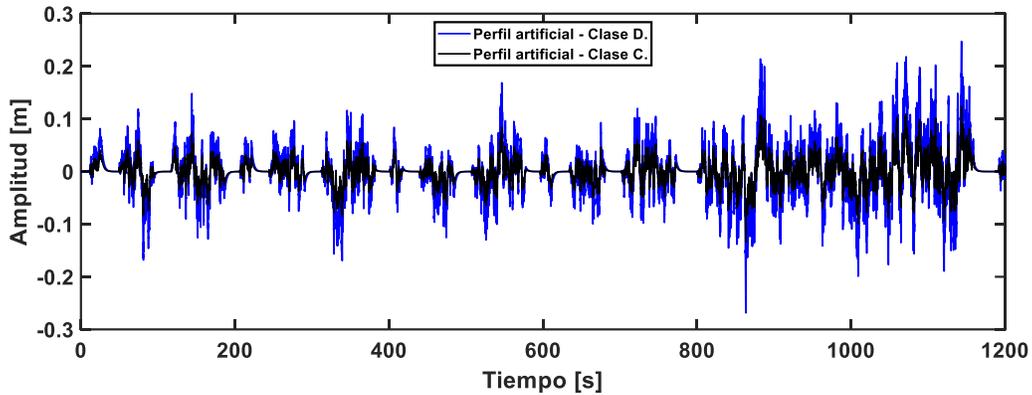


Figura 4.28 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D utilizando ciclos de conducción NEDC y EUDC.

El ciclo de velocidad NEDC consiste en cuatro secciones repetitivas de conducción urbana, estas secciones alcanzan una velocidad máxima de aproximadamente 50 km/h. Luego, la sección del ciclo de conducción EUDC muestra un incremento de velocidad de hasta 120 km/h. Adicionalmente, en la Figura 4.28, se muestra como la vibración aumenta a medida que la velocidad del vehículo se incrementa. Por otra parte, en la Figura 4.29 se muestra el ciclo de conducción WLTP que tiene la característica de ser más transitorio, y se puede observar que en el tiempo 1800 se repite nuevamente.

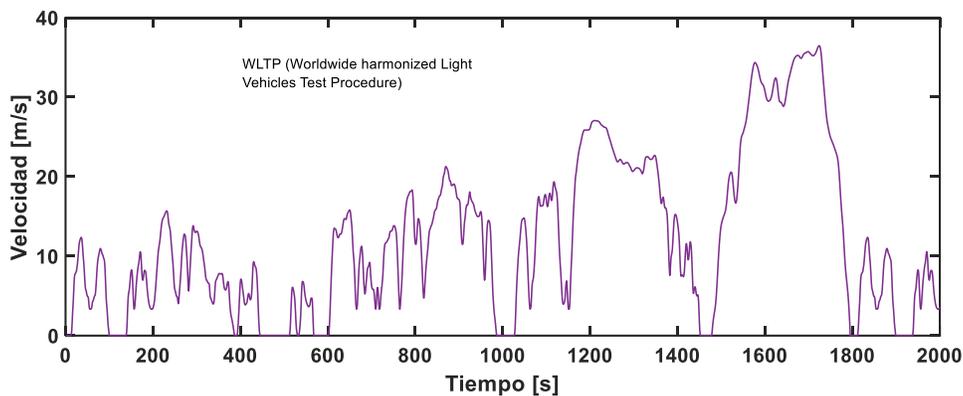


Figura 4.29: Gráfica del ciclo de velocidad de conducción transitorio WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure).

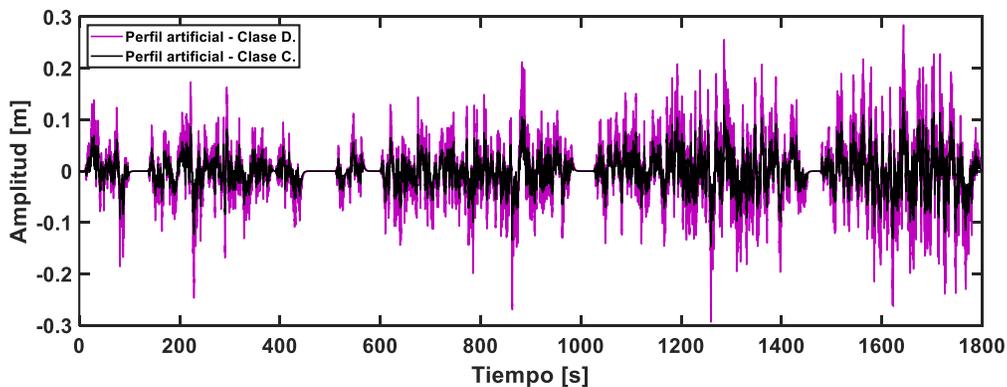


Figura 4.30 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D con ciclo de conducción WLTP.

Adicionalmente, en la Figura 4.30 se presentan los perfiles artificiales no estacionarios para las carreteras de clase C y D usando el ciclo de conducción WLTP. Por otra parte, en la Figura 4.31 se puede observar que el perfil de velocidad del ciclo FTP consta de una sección de velocidad transitoria desde el tiempo 0 hasta 1400 segundos, después de esto tal ciclo es repetitivo.

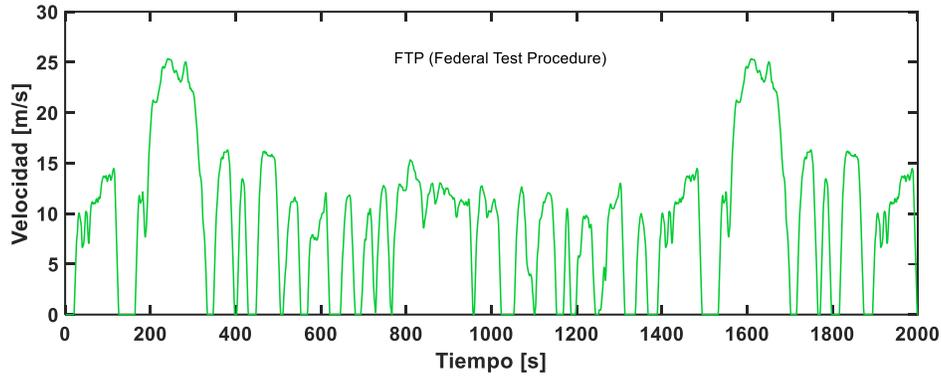


Figura 4.31 Gráfica del ciclo de velocidad de conducción transitorio FTP (Federal Test Procedure).

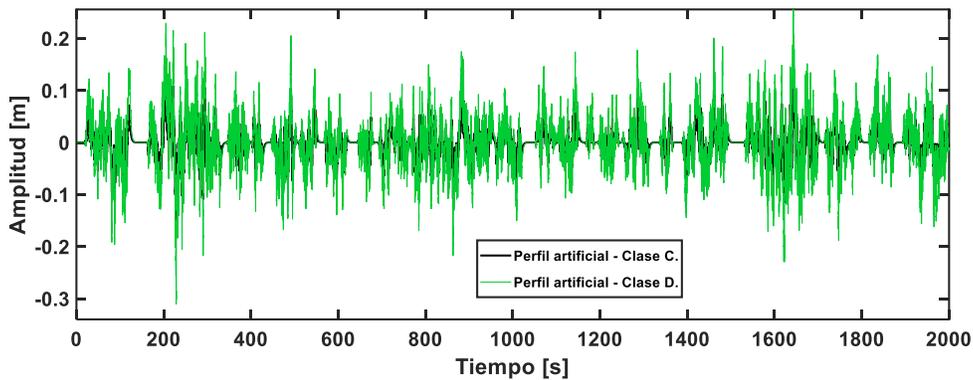


Figura 4.32 Perfil artificial para las carreteras de clase C y D considerando un ciclo transitorio FTP (Federal Test Procedure).

En la Figura 4.32 se muestra el perfil artificial generado por las clases de carretera C y D considerando el ciclo de condición variable FTP. Finalmente, el ciclo de conducción de velocidad transitorio HWFET se muestra en la Figura 4.33.

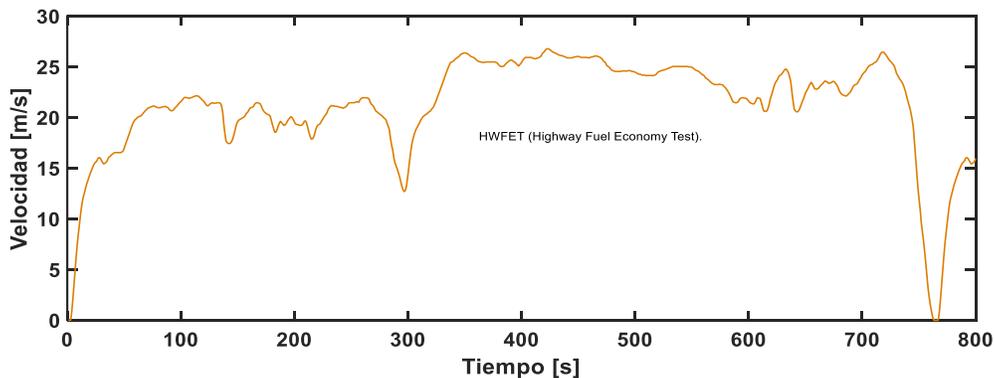


Figura 4.33 Ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test).

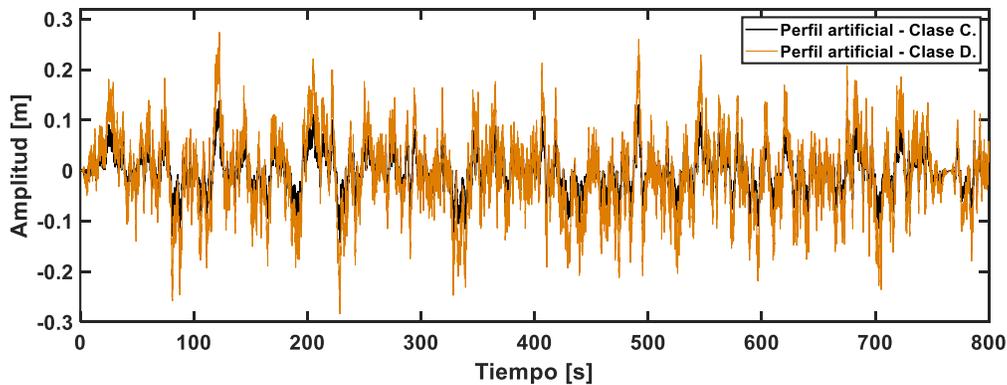


Figura 4.34 Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test).

Es importante mencionar que, los diferentes perfiles artificiales de las carreteras mostrados en las Figura 4.28, Figura 4.30, Figura 4.32 y Figura 4.34 no están retrasados en el tiempo, y por lo tanto, no pueden representar un caso real de conducción de velocidad variable. Para lograr tal retardo entre las señales de vibración de los neumáticos delantero y trasero, es necesario utilizar el bloque inteligente *Variable Transport Delay* de Matlab/Simulink. En efecto, en la Figura 4.35 se muestra la señal aleatoria con retardo basada en el ciclo transitorio HWFET. En tal figura se puede apreciar que, a medida que la velocidad de conducción aumenta, las señales de excitación de los neumáticos delanteros y traseros se juntan, por el contrario, cuando la velocidad es baja, las señales parecen estar más separadas. De hecho, este evento de conducción ocurre en la vida real, ya que entre más rápido se desplace un vehículo, las excitaciones delanteras y traseras se acercan hasta casi ser las mismas.

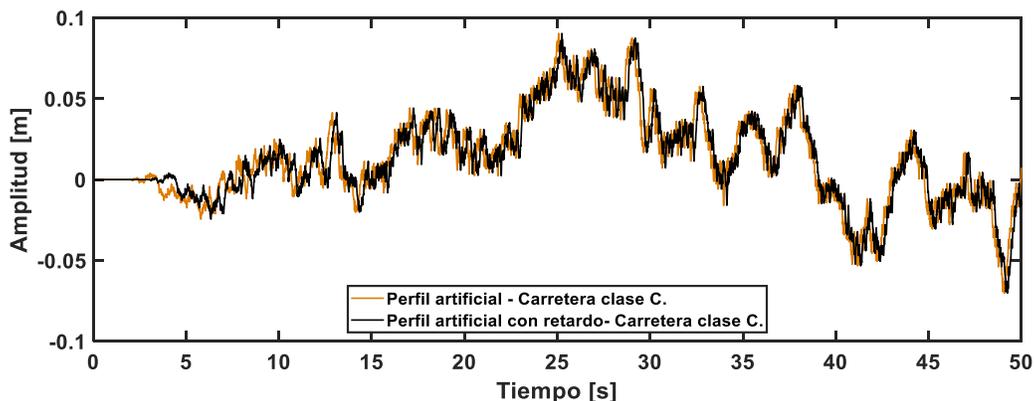


Figura 4.35 Perfiles artificiales para la carretera clase C con retardo variable considerando el ciclo transitorio HWFET.

Para llevar a cabo la simulación numérica más realista sobre el potencial de regeneración de energía vibratoria en el modelo dinámico del vehículo completo con ARs, es necesario considerar que las excitaciones aleatorias para los neumáticos del eje frontal son diferentes. Esto permite que se generen movimientos no sincronizados del chasis, y consecuentemente de todas las suspensiones regenerativas. Vale la pena mencionar que, la potencia instantánea regenerada en la suspensión trasera varía muy ligeramente en comparación con aquella de

la suspensión frontal, tal como se observa en las Figura 4.24 – Figura 4.26. En las siguientes simulaciones únicamente se documenta la potencia regenerada en la suspensión frontal utilizando los parámetros de las Tabla 1.2 – Tabla 1.4. De esta manera, se obtiene la potencia instantánea con los parámetros optimizados en la sección 4.4, y así también poder observar tanto cualitativamente como cuantitativamente el potencial de regeneración de energía de los diferentes tipos de ARs. El primer ciclo de velocidad de conducción a considerar en la simulación es el NEDC – EUDC, la potencia instantánea regenerada por los amortiguadores regenerativos se muestra en la Figura 4.36.

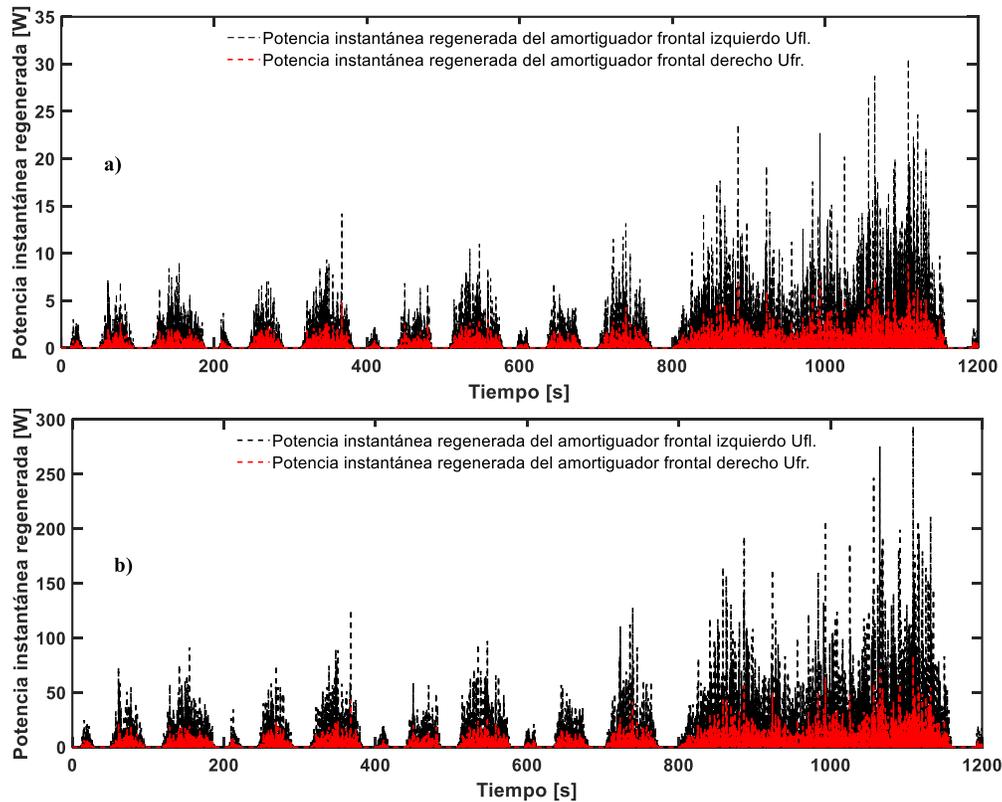
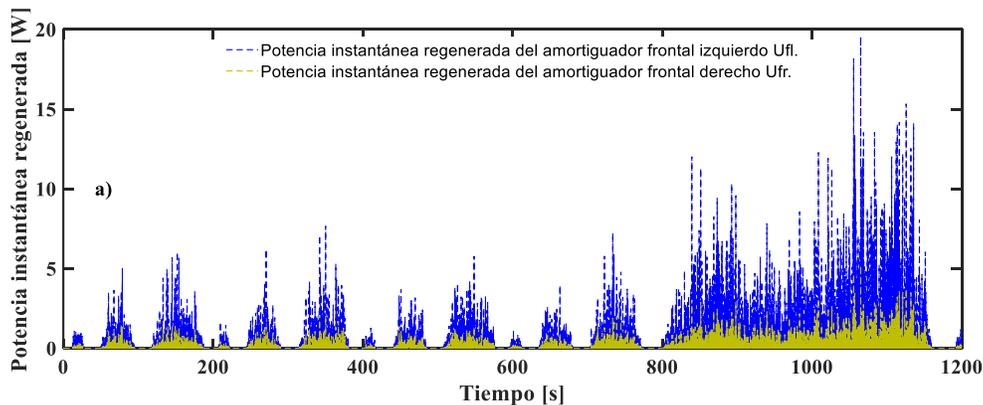


Figura 4.36: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromecánico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción NEDC – EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.



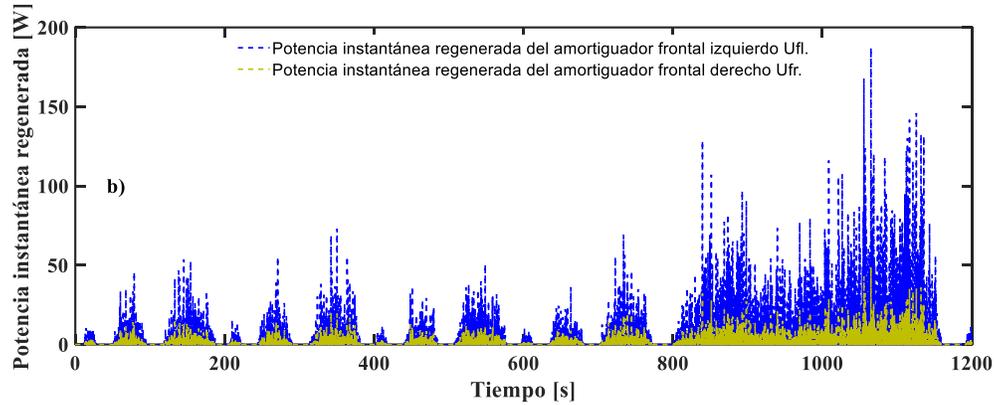


Figura 4.37: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electrohidráulico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción NEDC - EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.

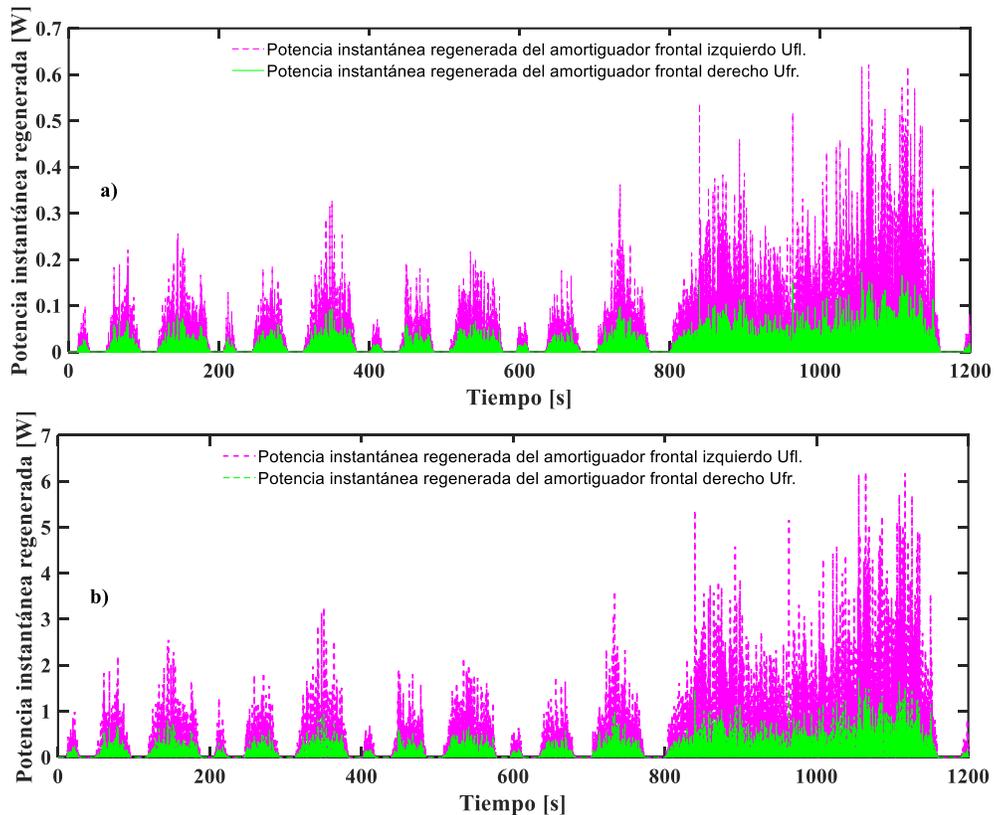


Figura 4.38: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromagnético localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción NEDC - EUDC. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.

Nótese que, en las Figura 4.36- Figura 4.38, la potencia regenerada en el sistema de suspensión aumenta considerablemente, cuando la velocidad de conducción del vehículo incrementa. Adicionalmente, la potencia eléctrica instantánea producida por los diferentes tipos de ARs es mucho mayor que aquella que se obtiene a partir de los parámetros reportados en la literatura. En efecto, la técnica del balance de energía estocástica revela

perfectamente el efecto de los parámetros físicos del circuito de recolección de energía sobre el potencial de regeneración de energía vibratoria. De hecho, en la suspensión electromecánica (Figura 4.36), la potencia eléctrica máxima se incrementa desde 30 W a 300 W con una potencia RMS de 15.93 W, mientras que, el AR electrohidráulico (Figura 4.37) supera los 180 W de potencia eléctrica instantánea con 7.39 W RMS. Adicionalmente, el AR electromagnético (Figura 4.38) cosecha una potencia RMS de 0.45 W con los parámetros optimizados. Por lo tanto, se revela que el AR electromecánico presenta mayor densidad de regeneración de energía que los otros ARs, obviamente, en un ambiente de simulación numérica más realista en comparación con aquellas reportadas en la literatura. En efecto, esto comprueba la hipótesis planteada en este trabajo de investigación. Por otra parte, los resultados de simulación para el ciclo WLTP se describen en las Figura 4.39 – Figura 4.41.

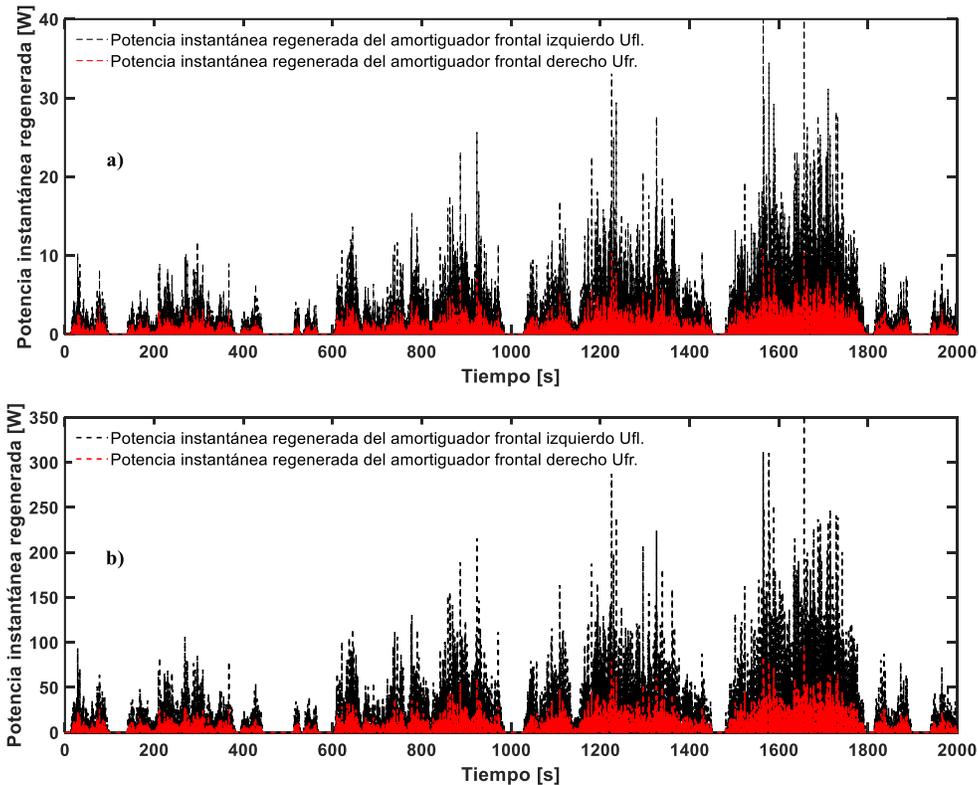


Figura 4.39: Potencia eléctrica instantánea producida por el AR electromecánico localizado en el sistema de suspensión delantero del modelo de vehículo completo, considerando el ciclo de conducción WLTP. (a) simulación numérica realizada con los parámetros reportados en la literatura y (b) con los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.

Nótese que, en la Figura 4.39, la potencia instantánea regenerada por la suspensión electromecánica puede alcanzar picos máximos de 350 W con una potencia eléctrica RMS de 18.84 W, la cual es mayor que aquella producida en el ciclo de conducción NEDC – EUDC.

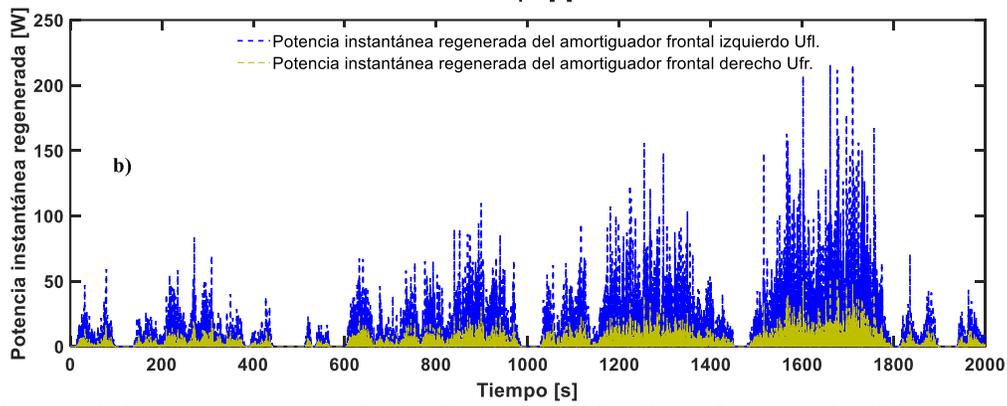
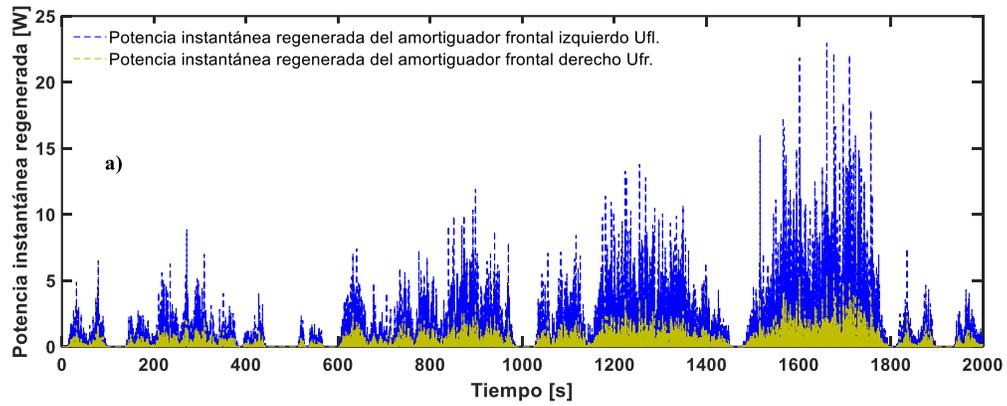
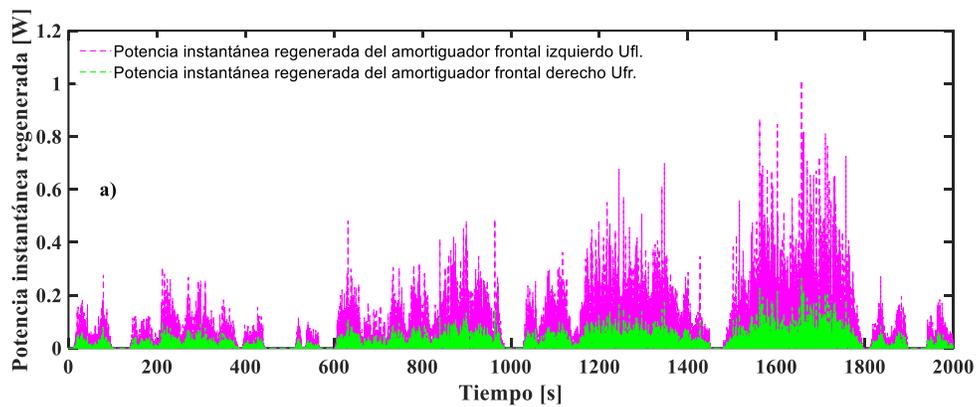


Figura 4.40: Potencia instantánea regenerada por el AR electrohidráulico en la suspensión delantera, considerando el ciclo de conducción WLTP. (a) potencia instantánea regenerada en el eje frontal, (b) potencia instantánea regenerada en el eje trasero del vehículo.



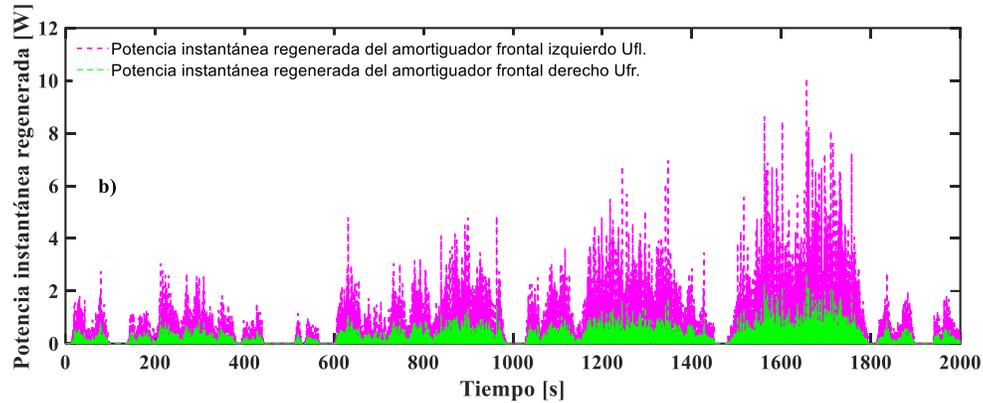
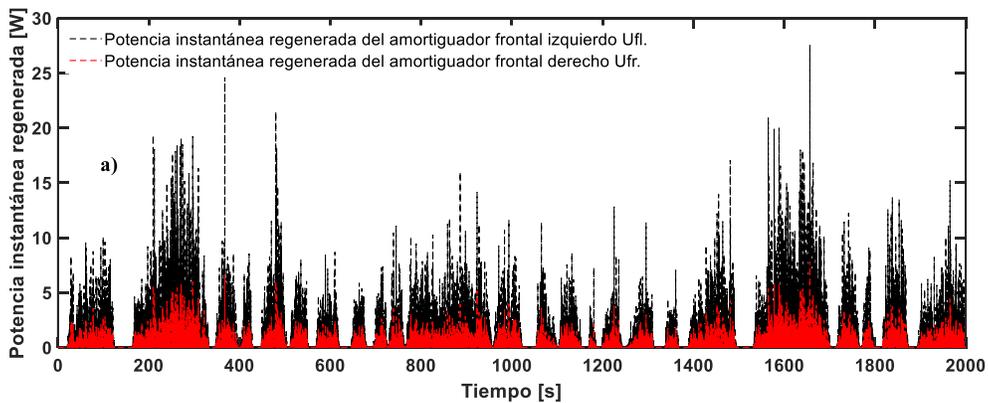


Figura 4.41 Potencia instantánea regenerada por el amortiguador electromagnético en la suspensión delantera con el ciclo de conducción WLTP. (a) potencia instantánea con parámetros iniciales, (b) potencia instantánea con amortiguador optimizado.

Con el ciclo WLTP, el AR electrohidráulico produce una potencia eléctrica RMS de 8.93 W, mientras que, el AR electromagnético logra cosechar una potencia RMS de 0.53 W. Obsérvese también que, la potencia instantánea regenerada tanto por el AR electrohidráulico como por el AR electromagnético se incrementa significativamente en comparación con aquella que se produce mediante el ciclo NEDC, tales fenómenos físicos se describen gráficamente en las Figura 4.40 y Figura 4.41, respectivamente. A continuación, se muestran los resultados obtenidos a partir de la simulación numérica del modelo de vehículo completo con ARs bajo el efecto del ciclo de conducción FTP.



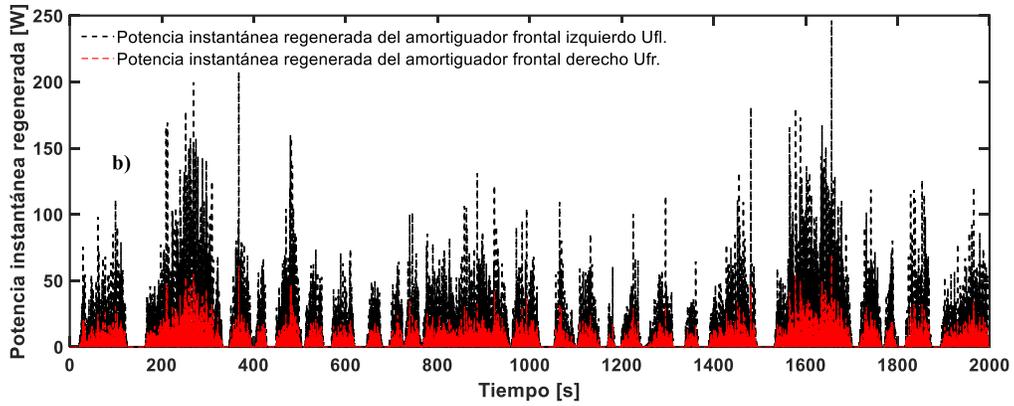


Figura 4.42: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético considerando el ciclo de conducción FTP. Con (a) parámetros reportador en la literatura, (b) parámetros optimizados mediante el balance de energía estocástica.

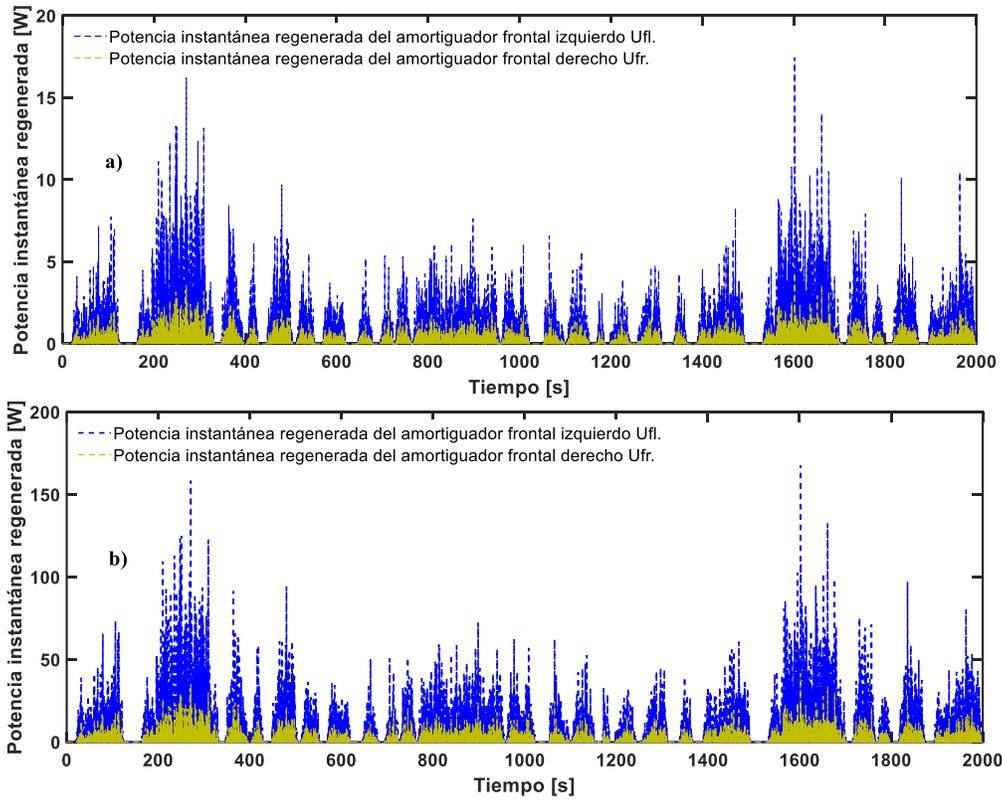


Figura 4.43: Potencia instantánea regenerada por el AR electrohidráulico considerando el ciclo de conducción FTP. (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados.

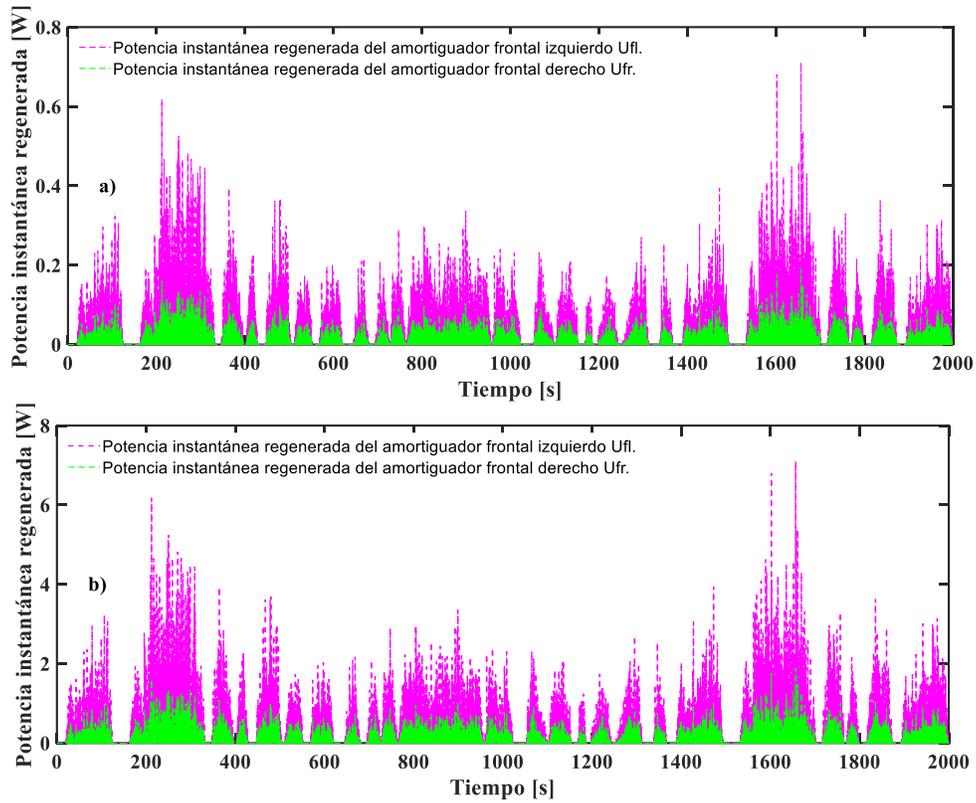
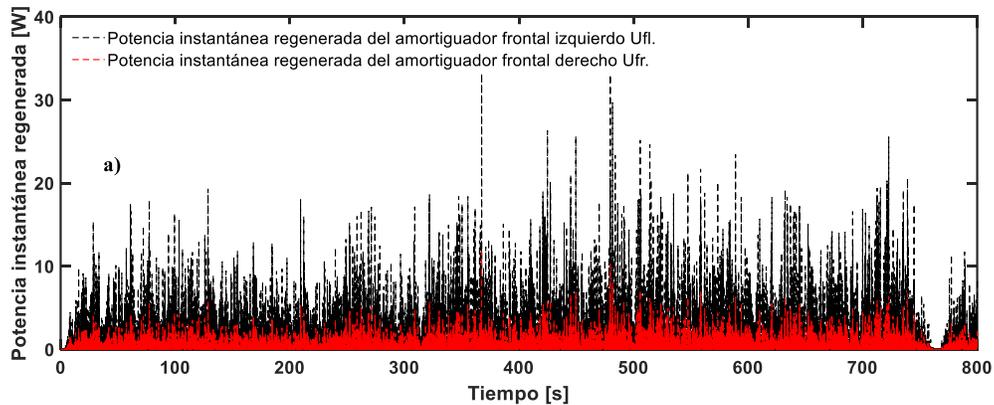


Figura 4.44: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético considerando el ciclo de conducción FTP. (a) AR con parámetros convencionales, (b) AR con parámetros optimizados.

Nótese que, en las Figura 4.42 – Figura 4.44, las potencias eléctricas instantáneas cosechadas por los diferentes tipos de ARs bajo el efecto del ciclo FTP presentan una disminución en comparación con aquellas obtenidas en el ciclo de conducción WLTP. Esto se debe principalmente a que el ciclo WLTP presenta cambios de velocidad más bruscos que los del ciclo FTP. En términos de potencia eléctrica RMS, el AR electromecánico produce 14.60 W, el electrohidráulico 6.49 W y, por último, el AR electromagnético cosecha 0.40 W. Por último, los resultados numéricos para el ciclo de velocidad de conducción HWFET, se muestran gráficamente en las Figura 4.45 – Figura 4.47.



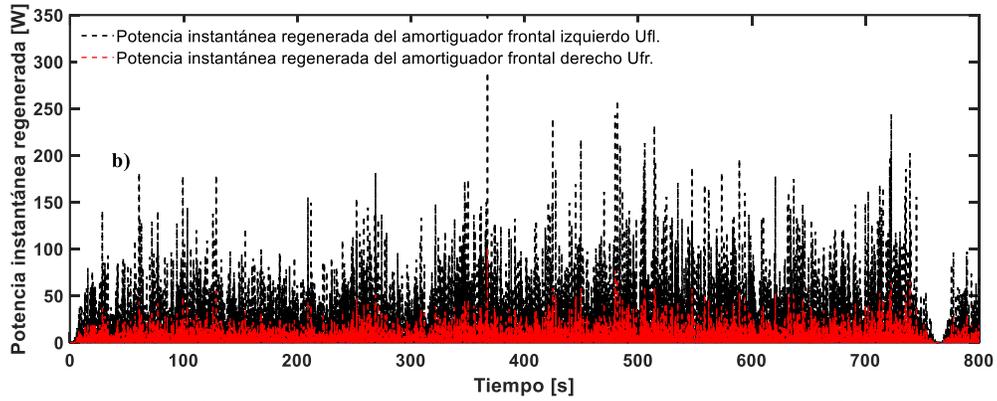


Figura 4.45: Potencia instantánea regenerada por el AR electromecánico en la suspensión frontal, considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados.

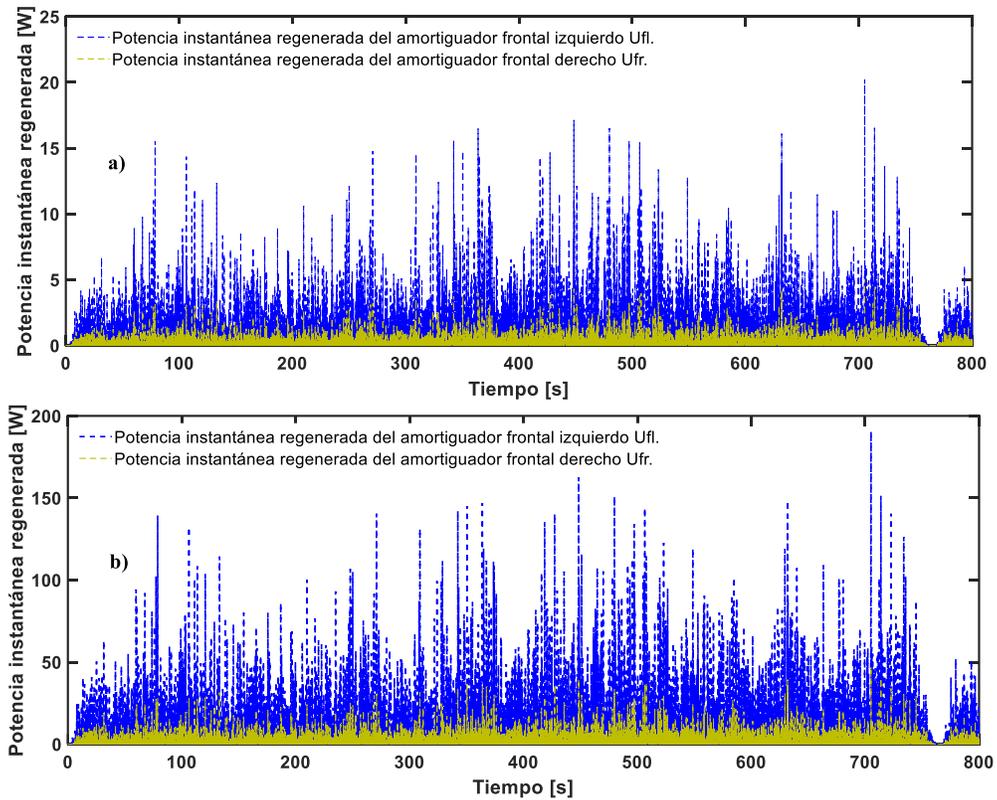


Figura 4.46: Potencia instantánea regenerada considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) utilizando los parámetros iniciales del AR electrohidráulico y (b) con parámetros optimizados obtenidos a partir de la técnica del balance de energía estocástica.

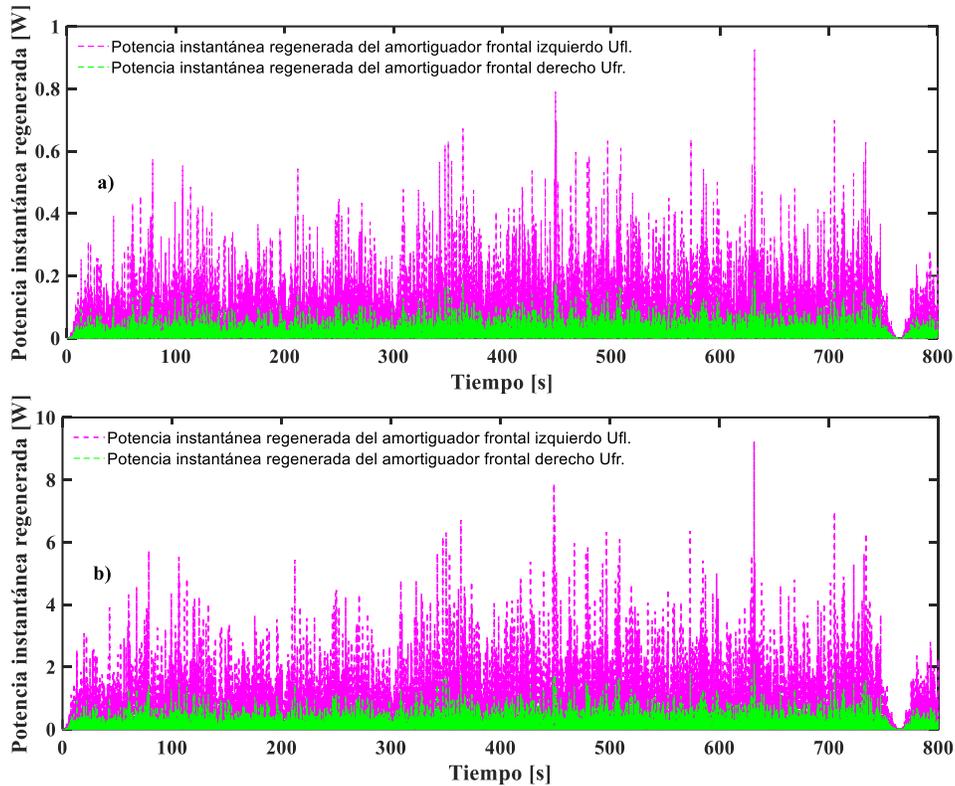


Figura 4.47: Potencia instantánea regenerada por el AR electromagnético en la suspensión frontal considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) AR con parámetros iniciales, (b) AR con parámetros optimizados utilizando la técnica del balance de energía estocástica.

En la Figura 4.45 se puede apreciar que el AR electromecánico alcanza una potencia instantánea máxima de aproximadamente 300 W con una potencia RMS de 24.59 W bajo el efecto de excitación del ciclo de conducción transitorio HWFET, mientras que el AR electrohidráulico produce aproximadamente 200 W de potencia eléctrica instantánea con un valor RMS de 11.57 W, como se muestra en la Figura 4.46. Finalmente, el AR electromagnético cosecha 10 W con una potencia RMS de 0.69 W, ver la Figura 4.47. Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas considerando perfiles artificiales estocásticos estacionarios y no estacionarios revelaron la capacidad real del potencial de regeneración de energía vibratoria de los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos. En el siguiente capítulo se presentan las principales conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 5.

5. Conclusión

El conjunto de análisis de sensibilidad paramétrica sobre el potencial de regeneración de energía vibratoria en las suspensiones automotrices regenerativas reveló el efecto de los parámetros físicos del circuito de recolección de energía en todos los índices de rendimiento del sistema dinámico. Los tipos de ARs estudiados en este trabajo son: el AR electromecánico con mecanismo de conversión de movimiento conocido como brazo-dentado (arm-teeth); el AR electromagnético basado en un motor lineal de imanes permanentes; y el AR electrohidráulico de doble tubo basado en un circuito hidráulico para la rectificación del flujo de fluido. Además, se utilizó la técnica del balance de energía estocástica para maximizar el índice de la potencia eléctrica del AR electromecánico, con el objetivo de revelar el efecto de la inercia rotacional de su mecanismo de rectificación de movimiento sobre la dinámica general del vehículo. Vale la pena mencionar que, el criterio de la norma \mathcal{H}_2 se resolvió por medio del enfoque de las integrales de vibración aleatoria, tal criterio está directamente relacionado al índice de la potencia eléctrica del AR. De esta manera, se logró maximizar la potencia del AR electromagnético, cuando se modifican los valores de las resistencias eléctricas y los de la relación de transmisión. Adicionalmente, se propuso un índice normalizado basado en una combinación lineal de todos los índices de rendimiento del sistema de suspensión regenerativa, estos son: el índice del confort, el índice de la deflexión del sistema de suspensión, el índice de la carga dinámica del neumático sobre la carretera, y el de la capacidad de regeneración de energía. Esto con el fin de revelar tanto el potencial del control pasivo como la capacidad de regeneración de energía del AR electromecánico con respecto al AR electromagnético. Por otro lado, se realizaron simulaciones numéricas en el dominio de la frecuencia mediante el método Monte Carlo para demostrar qué parámetros del AR electromecánico tienen más influencia en la cosecha de energía vibratoria. Además, se realizaron simulaciones de la capacidad de recolección de energía de los ARs en el dominio del tiempo y frecuencia, considerando los modelos matemáticos de un cuarto, medio y vehículo completo, los tres casos sujetos a señales armónicas. Adicionalmente, para obtener resultados más exactos, los modelos dinámicos del vehículo completo con AR fueron sometidos a vibración estocástica estacionaria y no estacionaria, considerando tanto los parámetros óptimos obtenidos a partir del balance de energía estocástica como los parámetros reportados en la literatura. En el caso de vibración estocástica estacionaria, las señales de excitación se consideraron procesos estocásticos estrictamente Gaussianos, en el cual el ruido blanco de banda limitada fue utilizado. Por otro lado, para generar las señales de vibración estocástica no estacionaria, se consideraron ciclos de velocidad de conducción transitorios que permiten variar la velocidad en el dominio del tiempo. Después de realizar las simulaciones numéricas exhaustivas, los principales hallazgos de este trabajo de investigación se enlistan a continuación.

- La maximización de la potencia eléctrica producida por el AR electromagnético se realizó de manera gráfica a través de un conjunto de análisis de sensibilidad paramétrica, considerando los principales índices de rendimiento dinámico. El valor seleccionado para las resistencias del circuito de recolección de energía fue de 10Ω ,

mediante el cual se logra aumentar considerablemente la potencia eléctrica sin perjudicar las dinámicas del vehículo. Por otro lado, el valor óptimo de la relación de transmisión $i = 25$, se calculó no solo mediante el balance de energía estocástica, sino también a través de la formulación de los índices normalizados en el dominio del tiempo de diferentes sistemas de suspensión pasivas basadas en inersor de alto rendimiento.

- A través de las realizaciones de las simulaciones numéricas en el dominio de la frecuencia para el AR electromecánico y electromagnético, los resultados revelaron que la capacidad de regeneración del AR electromecánico supera aproximadamente 50 veces a la del AR electromagnético. Para las simulaciones numéricas en el dominio del tiempo y de la frecuencia se utilizaron señales de excitación determinadas por funciones periódicas. Por lo tanto, se determinó que con una amplitud de vibración de 0.055 m y frecuencia de 1.5 Hz, el AR electromecánico cosecha una potencia RMS de 3.33 W, el AR electrohidráulico 3.14 W y, por último, el AR electromagnético solo produce 0.1643 W.
- La simulación numérica basada en la técnica de Monte Carlo se realizó en el dominio frecuencial en un rango de 0 a 25 Hz. Los resultados revelaron los parámetros que incrementan el potencial de regeneración de energía vibratoria para los ARs electromecánico y electromagnético, los cuales son los siguientes: la constante de acoplamiento electromecánico B_l y la resistencia interna R_i . Mientras que, la inductancia de la bobina L_e y la resistencia externa R_e tiene menos relevancia en la regeneración.
- Los perfiles artificiales de carretera fueron creados considerando que la velocidad de conducción del vehículo es constante y transitoria. Los ciclos de velocidad transitorios demostraron ser los más convenientes para la cuantificación más realista de la capacidad de regeneración de energía vibratoria de los diferentes tipos de ARs acoplados al modelo de vehículo completo.
- Cuando se simula el ciclo transitorio HWFET considerando la carretera clase D, se determinó que es posible regenerar 24.59 W, 11.57 W y 0.69 W con el AR electromecánico, electrohidráulico y electromagnético, respectivamente. Por otro lado, con el ciclo de velocidad de conducción FTP, el AR electromecánico regenera 14.60 W, el electrohidráulico 6.49 W y el electromagnético 0.69 W. Mediante estas simulaciones se observó que, al variar la velocidad de conducción del vehículo y el nivel de rugosidad de carretera, el potencial de regeneración de energía se incrementa monótonamente.

Apéndice A: Deducción del coeficiente de amortiguamiento equivalente C_L del AR electromecánico.

Por conservación de la anergia,

$$P_{input} \cdot \eta_{tp} \cdot \eta_{pg} \cdot \eta_g = P_E \quad (A.1)$$

donde P_{input} es la potencia total del AR electromecánico, mientras que P_E es la potencia eléctrica de salida, las cuales se definen de la siguiente forma.

$$P_{input} = \frac{1}{2} \cdot C_L v_{suspension}^2, P_E = \frac{1}{2} \cdot C_R \omega_g^2 \quad (A.2)$$

Por otro lado, C_R se define como el coeficiente de amortiguamiento rotacional, mientras que ω_g es la velocidad angular del eje del generador. Al combinar P_{input} y P_E en la primera definición, se obtiene la siguiente:

$$C_L = \frac{C_R \omega_g^2}{v_{suspension}^2 \eta_{tp} \eta_{pg} \eta_g} \quad (A.3)$$

De la ecuación (A.3), la relación de la velocidad angular del generador a la velocidad $v_{suspension}$ del amortiguador puede definirse como.

$$\omega_g = i \frac{v_{suspension}}{r} \quad (A.4)$$

Con esto en mente, el coeficiente de amortiguamiento equivalente C_L del amortiguador se redefine como.

$$C_L = \frac{C_R i^2}{r^2 \eta_{tp} \eta_{pg} \eta_g} \quad (A.5)$$

El coeficiente de amortiguamiento rotatorio C_R está relacionado con la constante del generador k_e y las resistencias internas y externas R_{int} , R_{ext} . Por lo tanto, tal parámetro físico se puede definir como sigue.

$$C_R = \frac{k_e^2}{R_{int} + R_{ext}} \quad (A.6)$$

Sustituyendo la ecuación (A.6) en (A.5), se tiene la siguiente.

$$C_L = \frac{k_e^2 i^2}{r^2 \eta_{tp} \eta_{pg} \eta_g (R_{int} + R_{ext})} \quad (A.7)$$

Adicionalmente, para deducir la constante k_e del generador, es necesario definir el voltaje generado por el AR electromecánico $U_{generado}$.

$$\begin{aligned} U_{generado} &= Bl\omega_g r_g \\ U_{generado} &= k_e \omega_g \end{aligned} \quad (A.8)$$

Comparando las ecuaciones anteriores, se puede definir a k_e de la siguiente manera.

$$k_e = Blr_g \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B: Coeficientes de la matriz para el análisis frecuencial de la potencia regenerada en los amortiguadores regenerativos (sección 4.1).

- Coeficientes de la matriz 3x3 (AR electromecánico).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (-m_2\omega^2 - m_s\omega^2 + I\omega(c_2 + c_L) + k_2), A_2 = (m_s\omega^2 - I\omega(c_2 + c_L) - k_2), A_3 = \frac{Blir_g}{R_e r}, B_1 = (m_s\omega^2 - I\omega(c_2 + c_L) - k_2) \\ B_2 = (-m_1\omega^2 - m_s\omega^2 + Ic_1\omega + I\omega(c_2 + c_L) + k_1 + k_2), A_3 = -\frac{Blir_g}{R_e r}, C_1 = \frac{-Ik_e i\omega}{r}, C_2 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, C_3 = \left(\frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}\right). \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

- Coeficientes de la matriz 3x3 (AR electromagnético).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -(m_2 + m_c)\omega^2 + I\omega c_2 + k_2, A_2 = -I\omega c_2 - k_2, A_3 = \frac{Bl}{R_e}, B_1 = -I\omega c_2 - k_2, B_2 = -(m_1 + m_m)\omega^2 + Ic_1\omega + I\omega c_2 \\ + k_1 + k_2, A_3 = -\frac{Bl}{R_e}, C_1 = -IBl\omega, C_2 = IBl\omega, C_3 = \left(\frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}\right). \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

- Coeficientes de la matriz 6x6 (AR electromecánico).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (-m_2\omega^2 - 2m_s\omega^2 + I\omega(c_{2f} + c_L) + I\omega(c_{2r} + c_L) + k_{2f} + k_{2r}), A_2 = -I\omega a(c_{2f} + c_L) + I\omega b(c_{2r} + c_L) + m_s\omega^2 a - m_s\omega^2 b \\ - ak_{2f} + bk_{2r}, A_3 = -I\omega(c_{2f} + c_L) + m_s\omega^2 - k_{2f}, A_4 = -I\omega(c_{2r} + c_L) + m_s\omega^2 - k_{2r}, A_5 = \frac{Blir_g}{R_e r}, A_6 = \frac{Blir_g}{R_e r}. \\ B_1 = (m_s\omega^2 a - m_s\omega^2 b - I\omega a(c_{2f} + c_L) + I\omega b(c_{2r} + c_L) - ak_{2f} + bk_{2r}), B_2 = I\omega a^2(c_{2f} + c_L) + I\omega b^2(c_{2r} + c_L) - m_s\omega^2 a^2 \\ - m_s\omega^2 b^2 - \omega^2 J + a^2 k_{2f} + b^2 k_{2r}, B_3 = I\omega a(c_{2f} + c_L) - m_s\omega^2 a + ak_{2f}, B_4 = -I\omega b(c_{2r} + c_L) + m_s\omega^2 b - bk_{2r}, B_5 = -a \frac{Blir_g}{R_e r}. \\ B_6 = b \frac{Blir_g}{R_e r}. C_1 = (m_s\omega^2 - I\omega(c_{2f} + c_L) - k_{2f}), C_2 = I\omega a(c_{2f} + c_L) - m_s\omega^2 a - ak_{2f}, C_3 = Ic_{1f}\omega + I\omega(c_{2f} + c_L) - \omega^2 m_{1f} \\ - m_s\omega^2 + k_{1f} + k_{2f}, C_4 = 0, C_5 = -\frac{Blir_g}{R_e r}, C_6 = 0. D_1 = (m_s\omega^2 - I\omega(c_{2r} + c_L) - k_{2r}), D_2 = -I\omega b(c_{2r} + c_L) + m_s\omega^2 b - bk_{2r}, \\ D_3 = 0, D_4 = Ic_{1r}\omega + I\omega(c_{2r} + c_L) - \omega^2 m_{1r} - m_s\omega^2 + k_{1r} + k_{2r}, D_5 = 0, D_6 = -\frac{Blir_g}{R_e r}. E_1 = -\frac{Ik_e i\omega}{r}, E_2 = \frac{Ik_e i\omega a}{r} \\ E_3 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, E_4 = 0, E_5 = \frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}, E_6 = 0. F_1 = -\frac{Ik_e i\omega}{r}, F_2 = -\frac{Ik_e i\omega b}{r}, F_3 = 0, F_4 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, F_5 = 0, \\ F_6 = \frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}. \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

- Coeficientes de la matriz 6x6 (AR electromagnético).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (-m_2 + 2m_c)\omega^2 + I\omega c_{2f} + I\omega c_{2r} + k_{2f} + k_{2r}), A_2 = -I\omega a c_{2f} + I\omega b c_{2r} - ak_{2f} + bk_{2r}, A_3 = -I\omega c_{2f} - k_{2f}, \\ A_4 = -I\omega c_{2r} - k_{2r}, A_5 = \frac{Bl}{R_e}, A_6 = \frac{Bl}{R_e}. B_1 = -I\omega a c_{2f} + I\omega b c_{2r} - ak_{2f} + bk_{2r}, B_2 = I\omega a^2 c_{2f} + I\omega b^2 c_{2r} - \omega^2 J + a^2 k_{2f} \\ + b^2 k_{2r}, B_3 = I\omega a c_{2f} + ak_{2f}, B_4 = -I\omega b c_{2r} - bk_{2r}, B_5 = -a \frac{Bl}{R_e}, B_6 = b \frac{Bl}{R_e}. C_1 = -I\omega c_{2f} - k_{2f}, C_2 = I\omega a c_{2f} + ak_{2f}, \\ C_3 = Ic_{1f}\omega + I\omega c_{2f} - \omega^2(m_{1f} + m_m) + k_{1f} + k_{2f}, C_4 = 0, C_5 = -\frac{Bl}{R_e}, C_6 = 0. D_1 = -I\omega c_{2r} - k_{2r}, D_2 = -I\omega b c_{2r} - bk_{2r}, \\ D_3 = 0, D_4 = Ic_{1r}\omega + I\omega c_{2r} - \omega^2(m_{1r} + m_m) + k_{1r} + k_{2r}, D_5 = 0, D_6 = -\frac{Bl}{R_e}. E_1 = -I\omega Bl, E_2 = I\omega Bl a, E_3 = I\omega Bl, \\ E_4 = 0, E_5 = \frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}, E_6 = 0. F_1 = -I\omega Bl, F_2 = -I\omega Bl b, F_3 = 0, F_4 = I\omega Bl, F_5 = 0, F_6 = \frac{IL_e\omega}{R_e} + \frac{R_i + R_e}{R_e}. \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

• Coeficientes de la matriz 11x11 (AR electromecánico).

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 A_1 &= -m_b \omega^2 - 4m_s \omega^2 + I\omega(c_{sfr} + c_L) + I\omega(c_{srl} + c_L) + I\omega(c_{srr} + c_L) + I\omega(c_{sfl} + c_L) + k_{srr} + k_{srl} + k_{sfr} + k_{sfl}, A_2 = 2\omega^2 m_s l_b \\
 & - 2\omega^2 m_s l_f + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_f - I\omega(c_{srl} + c_L)l_b - I\omega(c_{srr} + c_L)l_b + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_f - k_{srr}l_b - k_{srl}l_b + k_{sfr}l_f + k_{sfl}l_f, \\
 A_3 &= -2\omega^2 m_s l_r + 2\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r - I\omega(c_{srl} + c_L)l_l + I\omega(c_{srr} + c_L)l_r - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_l + k_{srr}l_r - k_{srl}l_l + k_{sfr}l_r \\
 & - k_{sfl}l_l, A_4 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{srr} + c_L) - k_{srr}, A_5 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{srl} + c_L) - k_{srl}, A_6 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{sfr} + c_L) - k_{sfr}, A_7 = \omega^2 m_s \\
 & - I\omega(c_{sfl} + c_L) - k_{sfl}, A_8 = \frac{Blir_g}{R_e r}, A_9 = \frac{Blir_g}{R_e r}, A_{10} = \frac{Blir_g}{R_e r}, A_{11} = \frac{Blir_g}{R_e r}. B_1 = 2\omega^2 m_s l_b - 2\omega^2 m_s l_f + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_f \\
 & - I\omega(c_{srl} + c_L)l_b - I\omega(c_{srr} + c_L)l_b + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_f - k_{srr}l_b - k_{srl}l_b + k_{sfr}l_f + k_{sfl}l_f, B_2 = -\omega^2 I_a - 2\omega^2 m_s l_b^2 - 2\omega^2 m_s l_f^2 \\
 & + I\omega(c_{srr} + c_L)l_b^2 + I\omega(c_{srl} + c_L)l_b^2 + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_f^2 + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_f^2 + k_{srr}l_b^2 + k_{srl}l_b^2 + k_{sfr}l_f^2 + k_{sfl}l_f^2, B_3 = \omega^2 m_s l_b l_r \\
 & - \omega^2 m_s l_b l_l - \omega^2 m_s l_r l_r + \omega^2 m_s l_r l_l - I\omega(c_{srr} + c_L)l_b l_r + I\omega(c_{srl} + c_L)l_b l_l + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r l_r - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_r l_l - k_{srr}l_b l_r \\
 & + k_{srl}l_b l_l + k_{sfr}l_r l_r - k_{sfl}l_r l_l, B_4 = -\omega^2 m_s l_b + I\omega(c_{srr} + c_L)l_b + k_{srr}l_b, B_5 = -\omega^2 m_s l_b + I\omega(c_{srl} + c_L)l_b + k_{srl}l_b, B_6 = \omega^2 m_s l_f \\
 & - I\omega(c_{sfr} + c_L)l_f - k_{sfr}l_f, B_7 = \omega^2 m_s l_f - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_f - k_{sfl}l_f, B_8 = -\frac{l_b Blir_g}{R_e r}, B_9 = -\frac{l_b Blir_g}{R_e r}, B_{10} = \frac{l_r Blir_g}{R_e r}, B_{11} = \frac{l_r Blir_g}{R_e r} \\
 C_1 &= -2\omega^2 m_s l_r + 2\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r - I\omega(c_{srl} + c_L)l_l + I\omega(c_{srr} + c_L)l_r - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_l + k_{srr}l_r - k_{srl}l_l + k_{sfr}l_r \\
 & - k_{sfl}l_l, C_2 = \omega^2 m_s l_b l_r - \omega^2 m_s l_b l_l - \omega^2 m_s l_r l_r + \omega^2 m_s l_r l_l - I\omega(c_{srr} + c_L)l_b l_r + I\omega(c_{srl} + c_L)l_b l_l + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r l_r \\
 & - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_r l_l - k_{srr}l_b l_r + k_{srl}l_b l_l + k_{sfr}l_r l_r - k_{sfl}l_r l_l, C_3 = -\omega^2 I_b - 2\omega^2 m_s l_r^2 - 2\omega^2 m_s l_l^2 + I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r^2 \\
 & + I\omega(c_{srr} + c_L)l_r^2 + I\omega(c_{srl} + c_L)l_l^2 + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_l^2 + k_{srr}l_r^2 + k_{srl}l_l^2 + k_{sfr}l_r^2 + k_{sfl}l_l^2, C_4 = \omega^2 m_s l_r - I\omega(c_{srr} + c_L)l_r \\
 & - k_{srr}l_r, C_5 = -\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{srl} + c_L)l_l + k_{srl}l_l, C_6 = \omega^2 m_s l_r - I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r - k_{sfr}l_r, C_7 = -\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_l + k_{sfl}l_l \\
 C_8 &= \frac{l_r Blir_g}{R_e r}, C_9 = -\frac{l_l Blir_g}{R_e r}, C_{10} = \frac{l_r Blir_g}{R_e r}, C_{11} = -\frac{l_l Blir_g}{R_e r}. D_1 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{srr} + c_L) - k_{srr}, D_2 = -\omega^2 m_s l_b + I\omega(c_{srr} + c_L)l_b \\
 & + k_{srr}l_b, D_3 = \omega^2 m_s l_r - I\omega(c_{srr} + c_L)l_r - k_{srr}l_r, D_4 = -\omega^2 m_{rr} - \omega^2 m_s + I\omega(c_{srr} + c_L) + I\omega c_{trr} + k_{srr} + k_{trr}, D_5 = 0, D_6 = 0 \\
 D_7 &= 0, D_8 = -\frac{Blir_g}{R_e r}, D_9 = 0, D_{10} = 0, D_{11} = 0. E_1 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{srl} + c_L) - k_{srl}, E_2 = -\omega^2 m_s l_b + I\omega(c_{srl} + c_L)l_b + k_{srl}l_b \\
 E_3 &= -\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{srl} + c_L)l_l + k_{srl}l_l, E_4 = 0, E_5 = -\omega^2 m_{rl} - \omega^2 m_s + I\omega(c_{srl} + c_L) + I\omega c_{trl} + k_{srl} + k_{trl}, E_6 = 0, E_7 = 0 \\
 E_8 &= 0, E_9 = -\frac{Blir_g}{R_e r}, E_{10} = 0, E_{11} = 0. F_1 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{sfr} + c_L) - k_{sfr}, F_2 = \omega^2 m_s l_f - I\omega(c_{sfr} + c_L)l_f - k_{sfr}l_f, F_3 = \omega^2 m_s l_r \\
 & - I\omega(c_{sfr} + c_L)l_r - k_{sfr}l_r, F_4 = 0, F_5 = 0, F_6 = -\omega^2 m_{fr} - \omega^2 m_s + I\omega(c_{sfr} + c_L) + I\omega c_{tfr} + k_{sfr} + k_{tfr}, F_7 = 0, F_8 = 0, F_9 = 0 \\
 F_{10} &= -\frac{Blir_g}{R_e r}, F_{11} = 0. G_1 = \omega^2 m_s - I\omega(c_{sfl} + c_L) - k_{sfl}, G_2 = \omega^2 m_s l_f - I\omega(c_{sfl} + c_L)l_f - k_{sfl}l_f, G_3 = -\omega^2 m_s l_l + I\omega(c_{sfl} + c_L)l_l \\
 & + k_{sfl}l_l, G_4 = 0, G_5 = 0, G_6 = 0, G_7 = -\omega^2 m_{fl} - \omega^2 m_s + I\omega(c_{sfl} + c_L) + I\omega c_{tfl} + k_{sfl} + k_{tfl}, G_8 = 0, G_9 = 0, G_{10} = 0, G_{11} = -\frac{Blir_g}{R_e r} \\
 H_1 &= -\frac{Ik_e i\omega}{r}, H_2 = \frac{Ik_e i\omega l_b}{r}, H_3 = -\frac{Ik_e i\omega l_r}{r}, H_4 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, H_5 = 0, H_6 = 0, H_7 = 0, H_8 = \frac{IL\omega}{R_e} + \frac{R_l + R_e}{R_e}, H_9 = 0, H_{10} = 0, H_{11} = 0 \\
 I_1 &= -\frac{Ik_e i\omega}{r}, I_2 = \frac{Ik_e i\omega l_b}{r}, I_3 = \frac{Ik_e i\omega l_l}{r}, I_4 = 0, I_5 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, I_6 = 0, I_7 = 0, I_8 = 0, I_9 = \frac{IL\omega}{R_e} + \frac{R_l + R_e}{R_e}, I_{10} = 0, I_{11} = 0 \\
 J_1 &= -\frac{Ik_e i\omega}{r}, J_2 = -\frac{Ik_e i\omega l_f}{r}, J_3 = -\frac{Ik_e i\omega l_r}{r}, J_4 = 0, J_5 = 0, J_6 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, J_7 = 0, J_8 = 0, J_9 = 0, J_{10} = \frac{IL\omega}{R_e} + \frac{R_l + R_e}{R_e}, J_{11} = 0 \\
 K_1 &= -\frac{Ik_e i\omega}{r}, K_2 = -\frac{Ik_e i\omega l_f}{r}, K_3 = \frac{Ik_e i\omega l_l}{r}, K_4 = 0, K_5 = 0, K_6 = 0, K_7 = \frac{Ik_e i\omega}{r}, K_8 = 0, K_9 = 0, K_{10} = 0, K_{11} = \frac{IL\omega}{R_e} + \frac{R_l + R_e}{R_e}.
 \end{aligned} \right\} \quad (A.14)
 \end{aligned}$$

- Coeficientes de la matriz 11x11 (AR electromagnético).

$$\begin{aligned}
& A_1 = -m_b\omega^2 - 4m_c\omega^2 + I\omega c_{sfr} + I\omega c_{srl} + I\omega c_{srr} + I\omega c_{sfl} + k_{srr} + k_{srl} + k_{sfr} + k_{sfl}, A_2 = 2\omega^2 m_c l_b - 2\omega^2 m_c l_f \\
& + I\omega c_{sfr} l_f - I\omega c_{srl} l_b - I\omega c_{srr} l_b + I\omega c_{sfl} l_f - k_{srr} l_b - k_{srl} l_b + k_{sfr} l_f + k_{sfl} l_f, A_3 = -2\omega^2 m_c l_r + 2\omega^2 m_c l_l + I\omega c_{sfr} l_r \\
& - I\omega c_{srl} l_l + I\omega c_{srr} l_r - I\omega c_{sfl} l_l - k_{srr} l_r - k_{srl} l_l + k_{sfr} l_r - k_{sfl} l_l, A_4 = -I\omega c_{srr} - k_{srr}, A_5 = -I\omega c_{srl} - k_{srl}, A_6 = -I\omega c_{sfr} \\
& - k_{sfr}, A_7 = -I\omega c_{sfl} - k_{sfl}, A_8 = \frac{Bl}{R_e}, A_9 = \frac{Bl}{R_e}, A_{10} = \frac{Bl}{R_e}, A_{11} = \frac{Bl}{R_e}. B_1 = 2\omega^2 m_c l_b - 2\omega^2 m_c l_f + I\omega c_{sfr} l_f - I\omega c_{srl} l_b - I\omega c_{srr} l_b \\
& + I\omega c_{sfl} l_f - k_{srr} l_b - k_{srl} l_b + k_{sfr} l_f + k_{sfl} l_f, B_2 = -\omega^2 I_a - 2\omega^2 m_c l_b^2 - 2\omega^2 m_c l_f^2 + I\omega c_{srr} l_b^2 + I\omega c_{srl} l_b^2 + I\omega c_{sfr} l_f^2 \\
& + I\omega c_{sfl} l_f^2 + k_{srr} l_b^2 + k_{srl} l_b^2 + k_{sfr} l_f^2 + k_{sfl} l_f^2, B_3 = \omega^2 m_c l_b l_r - \omega^2 m_c l_b l_l - \omega^2 m_c l_f l_r + \omega^2 m_c l_f l_l - I\omega c_{srr} l_b l_r + I\omega c_{srl} l_b l_l \\
& + I\omega c_{sfr} l_f l_r - I\omega c_{sfl} l_f l_l - k_{srr} l_b l_r + k_{srl} l_b l_l + k_{sfr} l_f l_r - k_{sfl} l_f l_l, B_4 = I\omega c_{srr} l_b + k_{srr} l_b, B_5 = I\omega c_{srl} l_b + k_{srl} l_b, B_6 = -I\omega c_{sfr} l_f \\
& - k_{sfr} l_f, B_7 = I\omega c_{sfl} l_f - k_{sfl} l_f, B_8 = -\frac{l_b Bl}{R_e}, B_9 = -\frac{l_b Bl}{R_e}, B_{10} = \frac{l_f Bl}{R_e}, B_{11} = \frac{l_f Bl}{R_e}. C_1 = -2\omega^2 m_c l_r + 2\omega^2 m_c l_l + I\omega c_{sfr} l_r - I\omega c_{srl} l_l \\
& + I\omega c_{srr} l_r - I\omega c_{sfl} l_l + k_{srr} l_r - k_{srl} l_l + k_{sfr} l_r - k_{sfl} l_l, C_2 = \omega^2 m_c l_b l_r - \omega^2 m_c l_b l_l - \omega^2 m_c l_f l_r + \omega^2 m_c l_f l_l - I\omega c_{srr} l_b l_r + I\omega c_{srl} l_b l_l \\
& + I\omega c_{sfr} l_f l_r - I\omega c_{sfl} l_f l_l - k_{srr} l_b l_r + k_{srl} l_b l_l + k_{sfr} l_f l_r - k_{sfl} l_f l_l, C_3 = -\omega^2 I_b - 2\omega^2 m_c l_r^2 - 2\omega^2 m_c l_l^2 + I\omega c_{sfr} l_r^2 + I\omega c_{srr} l_r^2 \\
& + I\omega c_{srl} l_l^2 + I\omega c_{sfl} l_l^2 + k_{srr} l_r^2 + k_{srl} l_l^2 + k_{sfr} l_r^2 + k_{sfl} l_l^2, C_4 = -I\omega c_{srr} l_r - k_{srr} l_r, C_5 = I\omega c_{srl} l_l + k_{srl} l_l, C_6 = I\omega c_{sfr} l_r - k_{sfr} l_r, \\
& C_7 = I\omega c_{sfl} l_l + k_{sfl} l_l, C_8 = \frac{l_r Bl}{R_e}, C_9 = -\frac{l_r Bl}{R_e}, C_{10} = \frac{l_r Bl}{R_e}, C_{11} = -\frac{l_r Bl}{R_e}. D_1 = -I\omega c_{srr} - k_{srr}, D_2 = I\omega c_{srr} l_b + k_{srr} l_b, D_3 = -I\omega c_{srr} l_r \\
& - k_{srr} l_r, D_4 = -\omega^2 (m_{rr} + m_m) + I\omega c_{srr} + I\omega c_{trr} + k_{srr} + k_{trr}, D_5 = 0, D_6 = 0, D_7 = 0, D_8 = -\frac{Bl}{R_e}, D_9 = 0, D_{10} = 0, D_{11} = 0. \\
& E_1 = -I\omega c_{srl} - k_{srl}, E_2 = I\omega c_{srl} l_b + k_{srl} l_b, E_3 = I\omega c_{srl} l_l + k_{srl} l_l, E_4 = 0, E_5 = -\omega^2 (m_{rl} + m_m) + I\omega c_{srl} + I\omega c_{trl} + k_{srl} + k_{trl}, \\
& E_6 = 0, E_7 = 0, E_8 = 0, E_9 = -\frac{Bl}{R_e}, E_{10} = 0, E_{11} = 0. F_1 = -I\omega c_{sfr} - k_{sfr}, F_2 = -I\omega c_{sfr} l_f - k_{sfr} l_f, F_3 = -I\omega c_{sfr} l_r - k_{sfr} l_r, F_4 = 0, \\
& F_5 = 0, F_6 = -\omega^2 (m_{fr} + m_m) + I\omega c_{sfr} + I\omega c_{tfr} + k_{sfr} + k_{tfr}, F_7 = 0, F_8 = 0, F_9 = 0, F_{10} = -\frac{Bl}{R_e}, F_{11} = 0. G_1 = -I\omega c_{sfl} - k_{sfl}, \\
& G_2 = -I\omega c_{sfl} l_f - k_{sfl} l_f, G_3 = I\omega c_{sfl} l_l + k_{sfl} l_l, G_4 = 0, G_5 = 0, G_6 = 0, G_7 = -\omega^2 (m_{fl} + m_m) + I\omega c_{sfl} + I\omega c_{tfl} + k_{sfl} + k_{tfl}, \\
& G_8 = 0, G_9 = 0, G_{10} = 0, G_{11} = -\frac{Bl}{R_e}. H_1 = -IBl\omega, H_2 = IBl\omega l_b, H_3 = -IBl\omega l_r, H_4 = IBl\omega, H_5 = 0, H_6 = 0, H_7 = 0, H_8 = \frac{Il\omega}{R_e} \\
& + \frac{R_l + R_e}{R_e}, H_9 = 0, H_{10} = 0, H_{11} = 0. I_1 = -IBl\omega, I_2 = IBl\omega l_b, I_3 = IBl\omega l_l, I_4 = 0, I_5 = IBl\omega, I_6 = 0, I_7 = 0, I_8 = 0, I_9 = \frac{Il\omega}{R_e} \\
& + \frac{R_l + R_e}{R_e}, I_{10} = 0, I_{11} = 0. J_1 = -IBl\omega, J_2 = -IBl\omega l_f, J_3 = -IBl\omega l_r, J_4 = 0, J_5 = 0, J_6 = IBl\omega, J_7 = 0, J_8 = 0, J_9 = 0, J_{10} = \frac{Il\omega}{R_e} \\
& + \frac{R_l + R_e}{R_e}, J_{11} = 0. K_1 = -IBl\omega, K_2 = -IBl\omega l_f, K_3 = -IBl\omega l_l, K_4 = 0, K_5 = 0, K_6 = 0, K_7 = IBl\omega, K_8 = 0, K_9 = 0, K_{10} = 0, \\
& K_{11} = \frac{Il\omega}{R_e} + \frac{R_l + R_e}{R_e}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Apéndice C: Densidad espectral de potencia (PSD) de la ecuación diferencial estocástica.

De acuerdo con la ecuación diferencial estocástica (1.1), el perfil irregular de la carretera puede expresarse como.

$$\dot{x}_g(t) = 2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)} V W(t) - 2\pi f_0 x_g \tag{A.16}$$

Al aplicar la transformada de Fourier, se tiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-j\omega t} f(t) dt \\
j\omega x_g(j\omega) &= 2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)} V \int_0^\infty e^{-j\omega t} W(t) dt - 2\pi f_0 x_g(j\omega)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Teniendo en cuenta que, $\mathcal{F}\{W(t)\} = W(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t} W(t) dt$, la ecuación (A.17) puede escribirse de la siguiente manera.

$$[j\omega + 2\pi f_0] x_g(j\omega) = 2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)} V W(j\omega) \tag{A.18}$$

Realizando algunas operaciones algebraicas a la ecuación (A.18), se tiene la siguiente.

$$\begin{aligned}
x_g(j\omega) &= \frac{2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)V}}{j\omega + 2\pi f_0} \cdot W(j\omega) \\
\frac{x_g(j\omega)}{W(j\omega)} &= H(j\omega) = \frac{2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)V}}{j\omega + 2\pi f_0}
\end{aligned}
\tag{A.19}$$

Entonces, la función de transferencia de la ecuación diferencial estocástica se puede expresar de la siguiente manera.

$$x_g(j\omega) = H(j\omega) \cdot W(j\omega) \tag{A.20}$$

Sin embargo, la ecuación anterior es una función compleja. Para poder analizar la función (A.20) en el dominio de los números reales, es necesario calcular su módulo, tal como se muestra en la ecuación (A.21).

$$\begin{aligned}
|x_g(j\omega)| &= |H(j\omega)| \cdot |W(j\omega)| \\
|H(j\omega)| &= \sqrt{\frac{(2\pi n_0 \sqrt{G_x(n_0)V})^2}{(\omega)^2 + (2\pi f_0)^2}}
\end{aligned}
\tag{A.21}$$

De esta forma, la PSD (*Power Spectral Density*) de la ecuación diferencial estocástica se puede escribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
|x_g(j\omega)|^2 &= |H(j\omega)|^2 \cdot |W(j\omega)|^2 = PSD_{xg(t)} \\
PSD_{xg(t)} &= \frac{(2\pi n_0)^2 S_x G_x(n_0)V}{\omega^2 + (2\pi f_0)^2}
\end{aligned}
\tag{A.22}$$

Apéndice D: *Expresiones matemáticas de los índices de rendimiento para suspensiones regenerativas, utilizando el enfoque de las integrales de vibración aleatoria.*

- **Suspensión regenerativa electromagnética.**

Índice del confort

A partir de la formulación dada por la ecuación (4.14), el índice de la comodidad de conducción se puede expresar como sigue.

$$\begin{aligned}
J_A &= (2\pi n_0) \sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Accl}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
\text{donde; } H_{accl}(j\omega) &= (j\omega)^2 \cdot \frac{X_2(j\omega)}{X_g(j\omega)}
\end{aligned}
\tag{A.23}$$

La integral de convergencia dada por la ecuación (A.23), se puede resolver utilizando el método de integrales aleatorias, quedando de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{Accl}(j\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_m \cdot (\omega)}{E_m(j \cdot \omega) \cdot E_m(-j \cdot \omega)} d\omega \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{m-1} \cdot \omega^{2(m-1)} + B_{m-2} \cdot \omega^{2(m-2)} + B_{m-3} \cdot \omega^{2(m-3)} + \dots + B_0}{A_m(j \cdot \omega)^m + A_{m-1}(j \cdot \omega)^{m-1} + A_{m-2}(j \cdot \omega)^{m-2} + \dots + A_0} d\omega \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{j \cdot \omega + \omega_0} \cdot H_p(j \cdot \omega) \right)^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5 \cdot \omega^{10} + B_4 \cdot \omega^8 + B_3 \cdot \omega^6 + B_2 \cdot \omega^4 + B_1 \cdot \omega^2 + B_0}{A_6(j \cdot \omega)^6 + A_5(j \cdot \omega)^5 + A_4(j \cdot \omega)^4 + A_3(j \cdot \omega)^3 + A_2(j \cdot \omega)^2 + A_1(j \cdot \omega) + A_0} d\omega \\
& = \frac{\pi}{A_6} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A_5 & -A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 & A_3 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & -A_4 & A_2 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & -A_3 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_6 & A_4 & -A_2 & A_0 \end{pmatrix}}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

donde;

$$\begin{aligned}
& A_{6A} = L_e(m_2 + m_c)(m_1 + m_m), A_{5A} = ((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2)m_c \\
& + c_2(m_1 + m_m))L_e + (R + R_e)(m_2 + m_c)(m_1 + m_m) + L_e(m_2 + m_c)(m_1 + m_m)\omega_0, \\
& A_{4A} = (((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 + k_2(m_1 + m_m))L_e + ((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2) \\
& m_c + c_2(m_1 + m_m))R_e + ((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2)m_c + c_2(m_1 + m_m))R + B^2 \\
& (m_1 + m_2 + m_c + m_m) + (((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2)m_c + c_2(m_1 + m_m))L_e + (R + R_e) \\
& (m_2 + m_c)(m_1 + m_m))\omega_0), A_{3A} = ((c_1 * k_2 + c_2 * k_1)L_e + ((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 \\
& + k_2(m_1 + m_m))R_e + ((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 + k_2(m_1 + m_m))R + B^2c_1 + \\
& (((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 + k_2(m_1 + m_m))L_e + ((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2)m_c \\
& + c_2(m_1 + m_m))R_e + ((c_1 + c_2)m_2 + (c_1 + c_2)m_c + c_2(m_1 + m_m))R + B^2 \\
& (m_1 + m_2 + m_c + m_m))\omega_0), A_{2A} = (k_1k_2L_e + (c_1k_2 + c_2k_1)R_e + (c_1k_2 + c_2k_1)R \\
& + B^2k_1 + ((c_1k_2 + c_2k_1)L_e + ((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 + k_2(m_1 + m_m)) \\
& R_e + ((k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + c_1c_2 + k_2(m_1 + m_m))R + B^2c_1)\omega_0), A_1 = (k_1k_2 \\
& (R + R_e) + k_1k_2L_e + (c_1k_2 + c_2k_1)R_e + (c_1k_2 + c_2k_1)R + B^2k_1)\omega_0, \\
& A_{0A} = k_1k_2(R + R_e)\omega_0, B_{5A} = 0, B_{4A} = B^2R^2(c_1m_2 + c_1m_c)^2, B_{3A} = B^2R^2 \\
& (k_1m_2 + k_1m_c)^2, B_{2A} = 0, B_{1A} = 0, B_{0A} = 0
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Índice de la deflexión del sistema de suspensión

El procedimiento para obtener el índice de la deflexión del sistema de suspensión es similar al del índice de confort, solamente la RFR $H_{Accl}(j\omega)$ se reemplaza por $H_{SuspeDeflec}(j\omega)$. Al realizar esto, se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
& J_{SD} = (2\pi n_0)\sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{SuspeDeflec}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \text{donde; } H_{SuspeDeflec} = \frac{X_2(j\omega)}{X_g(j\omega)} - \frac{X_1(j\omega)}{X_g(j\omega)}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Los coeficientes del integrando de la integral de convergencia son los siguientes.

$$\begin{aligned}
A_{6D} &= A_{6A}, A_{5D} = ((\omega_0 m_1 + \omega_0 m_m + c_1 + c_2)m_2 + (\omega_0 m_1 + \omega_0 m_m + c_1 + c_2)m_c \\
&\quad + c_2(m_1 + m_m))L_e + (m_2 + m_c)(m_1 + m_m)(R + R_e), \\
A_{4D} &= ((m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 + c_1(m_2 + m_c))L_e + (m_2 + m_c)(m_1 + m_m)(R + R_e)\omega_0 \\
&+ (c_1 c_2 + (k_1 + k_2)m_2 + (k_1 + k_2)m_c + k_2(m_1 + m_m))L_e + (R + R_e)(m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 \\
&\quad + (B^2 + Rc_1 + R_e c_1)m_2 + (B^2 + Rc_1 + R_e c_1)m_c + B^2(m_1 + m_m), \\
A_{3D} &= (((m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 + c_1(m_2 + m_c))R_e + L_e(m_1 + m_2 + m_c + m_m)k_2 \\
&\quad + ((m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 + c_1(m_2 + m_c))R + L_e c_1 c_2 + (B^2 + L_e k_1)m_2 \\
&\quad + (B^2 + L_e k_1)m_c + B^2(m_1 + m_m))\omega_0 + ((m_1 + m_2 + m_c + m_m)k_2 + c_1 c_2 + k_1(m_2 + m_c))R_e \\
&\quad + ((m_1 + m_2 + m_c + m_m)R + L_e * c_1)k_2 + (c_1 c_2 + k_1(m_2 + m_c))R + B^2 c_1 + L_e c_2 k_1, \\
A_{2D} &= (((m_1 + m_2 + m_c + m_m)R_e + (m_1 + m_2 + m_c + m_m)R + L_e c_1)k_2 + (c_1 c_2 + k_1(m_2 + m_c))R_e \\
&\quad + ((m_2 + m_c)R + L_e c_2)k_1 + c_1(B^2 + Rc_2))\omega_0 + (L_e k_1 + Rc_1 + R_e c_1)k_2 \\
&\quad + k_1(B^2 + Rc_2 + R_e c_2), A_{1D} = ((B^2 + L_e k_2 + Rc_2 + R_e c_2)k_1 + c_1 k_2(R + R_e))\omega_0 \\
&\quad + k_1 k_2(R + R_e), A_{0D} = k_1 k_2(R + R_e)\omega_0, B_{5D} = 0, B_{4D} = L_e^2 c_1^2 (m_2 + m_c)^2, \\
B_{3D} &= ((R + R_e)^2 c_1^2 + L_e^2 k_1^2)(m_2 + m_c)^2, B_{2D} = k_1^2 (m_2 + m_c)^2 (R + R_e)^2, B_{1D} = 0, B_{0D} = 0
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Índice de carga dinámica del neumático

El índice de rendimiento que determina la carga dinámica del neumático sobre la carretera, se puede expresar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
J_{TL} &= (2\pi n_0) \sqrt{G_x V S_x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2\pi f_0} H_{TyreLoad}(j\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
\text{donde; } H_{TyreLoad} &= k_1 \left[\frac{X_1(j\omega) - X_g(j\omega)}{X_g(j\omega)} \right]
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Al igual que los índices dinámicos anteriores, en la ecuación (A.29) se denotan los coeficientes para resolver la ecuación (A.28).

$$\begin{aligned}
A_{6T} &= A_{6D} = A_{6A}, A_{5T} = c_2(m_1 + m_2 + m_c + m_m)L_e + (R + R_e)(m_2 + m_c)(m_1 + m_m) \\
&\quad L_e(m_2 + m_c)(m_1 + m_m)\omega_0, \\
A_{4T} &= (c_2(m_1 + m_2 + m_c + m_m)L_e + (R + R_e)(m_2 + m_c)(m_1 + m_m))\omega_0 + (R + R_e)(m_1 + m_2 + m_c + m_m) \\
&\quad c_2 + ((k_1 + k_2) * m_2 + (k_1 + k_2)m_c + k_2(m_1 + m_m))L_e + B^2(m_1 + m_2 + m_c + m_m), \\
A_{3T} &= (L_e(m_1 + m_2 + m_c + m_m)k_2 + (m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 R_e + (m_1 + m_2 + m_c + m_m)c_2 R \\
&\quad + (B^2 + L_e k_1)m_2 + (B^2 + L_e k_1)m_c + B^2(m_1 + m_m))\omega_0 + (R + R_e)(m_1 + m_2 + m_c + m_m)k_2 \\
&\quad + k_1((m_2 + m_c)R_e + (m_2 + m_c)R + c_2 L_e), A_{2T} = (k_1((m_2 + m_c)R_e + (m_2 + m_c)R + c_2 L_e) + (R + R_e) \\
&\quad (m_1 + m_2 + m_c + m_m)k_2)\omega_0 + k_1(B^2 + L_e k_2 + Rc_2 + R_e c_2), \\
A_{1T} &= ((B^2 + L_e k_2 + Rc_2 + R_e c_2)\omega_0 + k_2(R + R_e))k_1, A_{0T} = k_1 k_2 (R + R_e)\omega_0 \\
B_{5T} &= k_1^2 L_e^2 (m_2 + m_c)^2 (m_1 + m_m)^2, B_{4T} = k_1^2 (-c_2(m_1 + m_2 + m_c + m_m)L_e - (R + R_e) \\
&\quad (m_2 + m_c)(m_1 + m_m))^2 + 2k_1^2 (m_1 + m_2 + m_c + m_m)(B^2 + L_e k_2 + Rc_2 + R_e c_2)L_e \\
&\quad (m_2 + m_c)(m_1 + m_m), B_{3T} = 2k_1^2 k_2 (R + R_e)(m_1 + m_2 + m_c + m_m)(-c_2(m_1 + m_2 + m_c + m_m)L_e \\
&\quad - (R + R_e)(m_2 + m_c)(m_1 + m_m)) + k_1^2 (m_1 + m_2 + m_c + m_m)^2 (B^2 + L_e k_2 + Rc_2 + R_e c_2)^2, \\
B_{2D} &= k_1^2 k_2^2 (R + R_e)^2 (m_1 + m_2 + m_c + m_m)^0, B_{1T} = 0, B_{0T} = 0
\end{aligned} \tag{A.29}$$

- **Suspensión regenerativa electromecánica.**

Los índices de rendimiento para el amortiguador regenerativo electromagnético son las mismas expresiones matemáticas definidas anteriormente por las ecuaciones (A.23), (A.26) y (A.28). Por lo tanto, en las próximas ecuaciones solo se denotan los coeficientes para resolver las integrales de vibración aleatoria.

Índice del confort

$$\begin{aligned}
\check{A}_{6A} &= ((m_2 + m_s)m_1 + m_2m_s)Lr^2, \check{A}_{5A} = (((L\omega_0 + R_e + R_i)m_2 + (\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))m_1 \\
&+ m_2((\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i)))r^2, \check{A}_{4A} = ((\omega_0(R_e + R_i)m_1 + ((c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))\omega_0 \\
&+ (k_2 + k_1)L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i))m_2 + (((c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))\omega_0 + k_2L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i))m_1 \\
&+ m_sLk_1)r^2 + Bk_e r_g i^2 (m_1 + m_2), \check{A}_{3A} = (((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + (k_2 + k_1)L)m_2 + m_1(c_2 + c_L)R_e \\
&+ m_1(c_2 + c_L)R_i + L(k_1m_s + k_2m_1))\omega_0 + (R_e + R_i)(k_2 + k_1)m_2 + (k_1m_s + k_2m_1)R_e + (k_1m_s + k_2m_1)R_i \\
&+ Lk_1(c_2 + c_L)r^2 + Bk_e r_g i^2 \omega_0 (m_1 + m_2), \check{A}_{2A} = (((m_2 + m_s)R_e + (m_2 + m_s)R_i + (c_2 + c_L)L)\omega_0 \\
&+ (c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + k_2L)k_1 + k_2\omega_0(R_e + R_1)(m_1 + m_2)r^2 + Bk_1k_e i^2 r_g, \\
\check{A}_{1A} &= k_1 \left(((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + k_2L)\omega_0 + k_2(R_e + R_i) \right) r^2 + Bk_e r_g i^2 \omega_0, \check{A}_{0A} = k_1k_2r^2(R_e + R_i)\omega_0 \\
\check{B}_{5A} &= L^2m_s^2r^4k_1^2, \check{B}_{4A} = -2r^2k_1^2 \left(\left(-\frac{1}{2}(R_e + R_i)^2m_s^2 + m_sL^2k_2 - \frac{1}{2}L^2(c_2 + c_L)^2 \right) r^2 + Bk_e m_s r_g i^2 L \right) \\
\check{B}_{3A} &= -2(R_e + R_i)k_2k_1^2r^4((R_e + R_i)m_s + L(c_2 + c_L)) + \left(((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + Lk_2)r^2 + Bk_e i^2 r_g \right)^2 \\
& k_1^2, \check{B}_{2A} = k_2^2r^4(R_e + R_i)^2k_1^2, \check{B}_{1A} = 0, \check{B}_{0A} = 0.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Índice de la deflexión del sistema de suspensión

$$\begin{aligned}
\check{A}_{6D} &= \check{A}_{6A}, \check{A}_{5D} = r^2(((\omega_0m_1 + \omega_0m_s + c_1 + c_2 + c_L)L + (R_e + R_i)(m_s + m_1))m_2 + ((\omega_0m_s + c_2 + c_L)m_1 \\
&+ m_s c_1)L + m_s m_1(R_e + R_i)), \check{A}_{4D} = (((R_e + R_i)m_1 + (c_1 + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))\omega_0 + (k_1 + k_2)L \\
&+ (c_1 + c_2 + c_L)(R_e + R_i))m_2 + \left(((c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))m_1 + m_s L c_1 \right) \omega_0 + (k_2L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i)) \\
& m_1 + ((c_2 + c_L)c_1 + k_1m_s)L + m_s c_1(R_e + R_i)r^2 + Bk_e r_g i^2 (m_1 + m_2), \check{A}_{3D} = (((c_1 + c_2 + c_L)R_e \\
&+ (c_1 + c_2 + c_L)R_i + (k_1 + k_2)L)m_2 + (m_s c_1 + m_1(c_2 + c_L))R_e + (m_s c_1 + m_1(c_2 + c_L))R_i \\
&+ L((c_2 + c_L)c_1 + k_1m_s + k_2m_1))\omega_0 + (R_e + R_i)(k_1 + k_2)m_2 + ((c_2 + c_L)c_1 + k_1m_s + k_2m_1)R_e \\
&+ ((c_2 + c_L)c_1 + k_1m_s + k_2m_1)R_i + L(k_2c_1 + k_1(c_2 + c_L))r^2 + r_g ((m_1 + m_2)\omega_0 + c_1)i^2 B k_e, \\
\check{A}_{2D} &= (((m_2 + m_s)R_e + (m_2 + m_s)R_i + (c_2 + c_L)L)k_1 + ((c_2 + c_L)c_1 + k_2(m_1 + m_2))R_e + ((c_2 + c_L)c_1 \\
&+ k_2(m_1 + m_2))R_i + k_2L c_1)\omega_0 + ((c_2 + c_L)R_e + (c_2 + c_L)R_i + k_2L)k_1 + k_2c_1(R_e + R_i)r^2 \\
&+ Bk_e r_g i^2 (\omega_0 c_1 + k_1), \check{A}_{1D} = \left(((k_2L + (c_2 + c_L)(R_e + R_i))k_1 + k_2c_1(R_e + R_i)) \omega_0 + k_1k_2(R_e + R_i) \right) r^2 \\
&+ Bk_1k_e r_g i^2 \omega_0, \check{A}_{0D} = k_1k_2r^2(R_e + R_i)\omega_0, \check{B}_{5D} = 0, \check{B}_{4D} = L^2c_1^2m_2^2r^4, \check{B}_{3D} = m_2^2r^4((R_e + R_i)^2c_1^2 \\
&+ L^2k_1^2), \check{B}_{2D} = k_1^2m_2^2r^4(R_e + R_i)^2, \check{B}_{1D} = 0, \check{B}_{0D} = 0
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Índice de la carga dinámica del neumático

$$\begin{aligned}
\check{A}_{6T} &= ((m_1 + m_s)m_2 + m_1m_s)Lr^2, \check{A}_{5T} = (((L\omega_0 + R_e + R_i)m_2 + (\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))m_1 \\
&+ ((\omega_0m_s + c_2 + c_L)L + m_s(R_e + R_i))m_2)r^2, \check{A}_{4T} = ((\omega_0(R_e + R_i)m_1 + (L(c_L + c_2) + m_s(R_e + R_i))\omega_0 \\
&L(k_1 + k_2) + (c_L + c_2)(R_e + R_i))m_2 + \left((L(c_L + c_2) + m_s(R_e + R_i))\omega_0 + k_2L + (c_L + c_2)(R_e + R_i) \right) m_1 \\
&+ Lk_1m_s)r^2 + Bk_e r_g i^2 (m_1 + m_2), \check{A}_{3T} = ((R_e + R_i)(k_1 + k_2)m_2 + k_2(R_e + R_i)m_1 + k_1m_sR_e + k_1m_sR_i \\
&+ L(c_2k_1 + c_Lk_1))r^2 + (((c_L + c_2)R_e + (c_L + c_2)R_i + L(k_1 + k_2))m_2 + ((c_L + c_2)R_e + (c_L + c_2)R_i \\
&+ k_2L)m_1 + Lk_1m_s)r^2 + Bk_e r_g i^2 (m_1 + m_2)\omega_0, \\
\check{A}_{2T} &= (((m_2 + m_s)R_e + (m_2 + m_s)R_i + (c_2 + c_L)L)\omega_0 + ((c_2 + c_L)R_e) + (c_L + c_2)R_i + k_2L)k_1 \\
&+ k_2\omega_0(R_e + R_i)(m_1 + m_2)r^2 + Bk_1k_e r_g i^2, \check{A}_{1T} = \left(((c_L + c_2)R_e + (c_L + c_2)R_i + k_2L)\omega_0 + k_2(R_e + R_i) \right) r^2 \\
&+ Bk_e r_g i^2 \omega_0 k_1, \check{A}_{0T} = k_1k_2r^2(R_e + R_i)\omega_0, \check{B}_{5T} = ((m_1 + m_s)m_2 + m_1m_s)^2 L^2 r^4 k_1^2, \check{B}_{4T} = r^4((m_1 + m_2) \\
&(R_e + R_i)m_s + (L(c_L + c_2) + m_2(R_e + R_i))m_1 + Lm_2(c_L + c_2))^2 k_1^2 + 2k_1^2(m_1 + m_2)(r^2k_2L + (c_L + c_2) \\
&(R_e + R_i)r^2 + Bk_e r_g i^2)Lr^2((m_2 + m_s)m_1 + m_2m_s), \check{B}_{3T} = -2k_2r^4(R_e + R_i)(m_1 + m_2)k_1^2((m_1 + m_s)R_e \\
&+ (m_1 + m_s)R_i + L(c_L + c_2))m_2 + m_1(m_sR_e + m_sR_i + L(c_L + c_2)) + (((c_L + c_2)R_e + (c_L + c_2)R_i + k_2L)r^2 \\
&+ Bk_e r_g i^2)^2(m_1 + m_2)^2k_1^2, \check{B}_{1T} = 0, \check{B}_{0T} = 0.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Referencias

- [1] Taipe-Defaz, V. A., Llanes-Cedeño, E. A., Morales-Bayetero, C. F., Checa-Ramírez, A. E., Taipe-Defaz, V. A., Llanes-Cedeño, E. A., Morales-Bayetero, C. F., & Checa-Ramírez, A. E. (2021). Evaluación experimental de un motor de encendido provocado bajo diferentes gasolinas. *Ingenius. Revista de Ciencia y Tecnología*, 26, 17–29. <https://doi.org/10.17163/INGS.N26.2021.02>
- [2] Canales, M., Paucar, W., & Juipa, N. (2020). Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica. *RevIA*, 7(4), 5–9. <https://revistas.unas.edu.pe/index.php/revia/article/view/172>
- [3] Zhang, R., Wang, X., al Shami, E., John, S., Zuo, L., & Wang, C. H. (2018b). A novel indirect-drive regenerative shock absorber for energy harvesting and comparison with a conventional direct-drive regenerative shock absorber. *Applied Energy*, 229, 111–127. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2018.07.096>
- [4] Zhang, Y., Chen, H., Guo, K., Zhang, X., & Eben Li, S. (2017). Electro-hydraulic damper for energy harvesting suspension: Modeling, prototyping and experimental validation. *Applied Energy*, 199, 1–12. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2017.04.085>
- [5] ISO - ISO 8608:2016 - Vibración mecánica. Perfiles de la superficie de la carretera. Informe de datos medidos. (n.d.). Retrieved October 18, 2022, from <https://www.iso.org/standard/71202.html>
- [6] Rangel Gil, O. C. (2002). Modelación, identificación y control de suspensiones automotrices de diferente estructura cinemática-Edición Única. *Exploraciones, Intercambios y Relaciones Entre El Diseño y La Tecnología*, 57–79. <https://doi.org/10.16/CSS/JQUERY.DATATABLES.MIN.CSS>
- [7] Ezeta, J. H., Mandow, A., & Cerezo, A. G. (2013). Los Sistemas de Suspensión Activa y Semiactiva: Una Revisión. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 10(2), 121–132. <https://doi.org/10.1016/J.RIAI.2013.03.002>
- [8] Issa, M., & Samn, A. (2022). Passive vehicle suspension system optimization using Harris Hawk Optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*, 191, 328–345. <https://doi.org/10.1016/J.MATCOM.2021.08.016>
- [9] Yan, G., Fang, M., & Xu, J. (2019). Analysis and experiment of time-delayed optimal control for vehicle suspension system. *Journal of Sound and Vibration*, 446, 144–158. <https://doi.org/10.1016/J.JSV.2019.01.015>
- [10] Yang, J., Ning, D., Sun, S. S., Zheng, J., Lu, H., Nakano, M., Zhang, S., Du, H., & Li, W. H. (2021). A semi-active suspension using a magnetorheological damper with nonlinear negative-stiffness component. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147, 107071. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2020.107071>
- [11] Zhang, Y., Guo, K., Wang, D., Chen, C., & Li, X. (2017). Energy conversion mechanism and regenerative potential of vehicle suspensions. *Energy*, 119, 961–970. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2016.11.045>
- [12] Abdelkareem, M. A. A., Xu, L., Ali, M. K. A., Elagouz, A., Mi, J., Guo, S., Liu, Y., & Zuo, L. (2018). Vibration energy harvesting in automotive suspension system: A detailed review. *Applied Energy*, 229, 672–699. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2018.08.030>
- [13] MIT Students Develop Hydraulic Energy-Generating Shock Absorbers - Green Car Congress. (n.d.). Retrieved August 7, 2022, from <https://www.greencarcongress.com/2009/02/mit-students-de.html>
- [14] Karnopp, D. (1989). Permanent Magnet Linear Motors Used as Variable Mechanical Dampers for Vehicle Suspensions. <http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423118908968918>, 18(4), 187–200. <https://doi.org/10.1080/00423118908968918>
- [15] Suda, Y., & Shiiba, T. (1996). A New Hybrid Suspension System with Active Control and Energy Regeneration. <http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423119608969226>, 25(SUPPL.), 641–654. <https://doi.org/10.1080/00423119608969226>
- [16] Zuo, L., Scully, B., Shestani, J., & Zhou, Y. (2010). Design and characterization of an electromagnetic energy harvester for vehicle suspensions. *Smart Materials and Structures*, 19(4), 045003. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/4/045003>
- [17] Gysen, B. L. J., van der Sande, T. P. J., Paulides, J. J. H., & Lomonova, E. A. (2011). Efficiency of a regenerative direct-drive electromagnetic active suspension. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(4), 1384–1393. <https://doi.org/10.1109/TVT.2011.2131160>
- [18] Ebrahimi, B., Bolandhemmat, H., Khamesee, M. B., & Golnaraghi, F. (2010). A hybrid electromagnetic shock absorber for active vehicle suspension systems. <https://doi.org/10.1080/00423111003602400>, 49(1–2), 311–332. <https://doi.org/10.1080/00423111003602400>

- [19] Asadi, E., Ribeiro, R., Behrad Khamesee, M., & Khajepour, A. (2015). A new adaptive hybrid electromagnetic damper: modelling, optimization, and experiment. *Smart Materials and Structures*, 24(7), 075003. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/7/075003>
- [20] Hu, G., Lu, Y., Sun, S., & Li, W. (2016). Performance Analysis of a Magnetorheological Damper with Energy Harvesting Ability. *Shock and Vibration*, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/2959763>
- [21] Chen, L., Shi, D., Wang, R., & Zhou, H. (2016). Energy conservation analysis and control of hybrid active semiactive suspension with three regulating damping levels. *Shock and Vibration*, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/6196542>
- [22] Gao, Z., Chen, S., Zhao, Y., & Liu, Z. (2019). Numerical evaluation of compatibility between comfort and energy recovery based on energy flow mechanism inside electromagnetic active suspension. *Energy*, 170, 521–536. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2018.12.193>
- [23] Ding, R., Wang, R., Meng, X., & Chen, L. (2019). Energy consumption sensitivity analysis and energy-reduction control of hybrid electromagnetic active suspension. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 134, 106301. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.106301>
- [24] Duong, M. T., Chun, Y. do, Han, P. W., Park, B. G., Bang, D. J., & Lee, J. K. (2020). Optimal Design of a Novel Single-Phase 8-Slot 8-Pole Tubular Electromagnetic Shock Absorber to Harvest Energy. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(2), 1180–1190. <https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2898591>
- [25] Lafarge, B., Grondel, S., Delebarre, C., Curea, O., & Richard, C. (2021). Linear electromagnetic energy harvester system embedded on a vehicle suspension: From modeling to performance analysis. *Energy*, 225, 119991. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2021.119991>
- [26] Li, Z., Peng, Y., Xu, Z., Peng, J., Xin, L., Wang, M., Luo, J., Xie, S., & Pu, H. (2021). Harnessing energy from suspension systems of oceanic vehicles with high-performance piezoelectric generators. *Energy*, 228, 120523. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2021.120523>
- [27] KAWAMOTO, Y., SUDA, Y., INOUE, H., & KONDO, T. (2007). Modeling of Electromagnetic Damper for Automobile Suspension. *Journal of System Design and Dynamics*, 1(3), 524–535. <https://doi.org/10.1299/JSD.1.524>
- [28] Amati, N., Festini, A., & Tonoli, A. (2011). Design of electromagnetic shock absorbers for automotive suspensions. <http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423114.2011.554560>, 49(12), 1913–1928. <https://doi.org/10.1080/00423114.2011.554560>
- [29] Zhang, G., Cao, J., & Yu, F. (2012). Design of active and energy-regenerative controllers for DC-motor-based suspension. *Mechatronics*, 22(8), 1124–1134. <https://doi.org/10.1016/J.MECHATRONICS.2012.09.007>
- [30] Pires, L., Smith, M. C., Houghton, N. E., & McMahon, R. A. (2013). Design trade-offs for energy regeneration and control in vehicle suspensions. <https://doi.org/10.1080/00207179.2013.830197>, 86(11), 2022–2034. <https://doi.org/10.1080/00207179.2013.830197>
- [31] Yin, J., Chen, X., Li, J., & Wu, L. (2015). Investigation of equivalent unsprung mass and nonlinear features of electromagnetic actuated active suspension. *Shock and Vibration*, 2015. <https://doi.org/10.1155/2015/624712>
- [32] Huang, B., Hsieh, C. Y., Golnaraghi, F., & Moallem, M. (2015). Development and optimization of an energy-regenerative suspension system under stochastic road excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 357, 16–34. <https://doi.org/10.1016/J.JSV.2015.07.004>
- [33] Li, S., Xu, J., Pu, X., Tao, T., & Mei, X. (2019). A novel design of a damping failure free energy-harvesting shock absorber system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 132, 640–653. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.07.004>
- [34] Li, S., Xu, J., Pu, X., Tao, T., Gao, H., & Mei, X. (2019). Energy-harvesting variable/constant damping suspension system with motor based electromagnetic damper. *Energy*, 189, 116199. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2019.116199>
- [35] Xie, L., Li, J., Cai, S., & Li, X. (2017). Electromagnetic energy-harvesting damper with multiple independently controlled transducers: On-demand damping and optimal energy regeneration. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(6), 2705–2713. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2017.2758783>
- [36] Xie, L., Li, J., Li, X., Huang, L., & Cai, S. (2018). Damping-tunable energy-harvesting vehicle damper with multiple controlled generators: Design, modeling and experiments. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99, 859–872. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2017.07.005>

- [37] Wang, Z., Zhang, T., Zhang, Z., Yuan, Y., & Liu, Y. (2020). A high-efficiency regenerative shock absorber considering twin ball screws transmissions for application in range-extended electric vehicles. *Energy and Built Environment*, 1(1), 36–49. <https://doi.org/10.1016/J.ENBENV.2019.09.004>
- [38] Bai, X. X., Zhong, W. M., Zou, Q., Zhu, A. D., & Sun, J. (2018). Principle, design and validation of a power-generated magnetorheological energy absorber with velocity self-sensing capability. *Smart Materials and Structures*, 27(7), 075041. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/AAC7EF>
- [39] Yang, Y., Pian, Y., & Liu, Q. (2019). Design of energy harvester using rotating motion rectifier and its application on bicycle. *Energy*, 179, 222–231. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2019.05.036>
- [40] Li, Z., Zuo, L., Luhrs, G., Lin, L., & Qin, Y. X. (2013). Electromagnetic energy-harvesting shock absorbers: Design, modeling, and road tests. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(3), 1065–1074. <https://doi.org/10.1109/TVT.2012.2229308>
- [41] Li, Z., Zuo, L., Kuang, J., & Luhrs, G. (2012). Energy-harvesting shock absorber with a mechanical motion rectifier. *Smart Materials and Structures*, 22(2), 025008. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/2/025008>
- [42] Guo, S., Liu, Y., Xu, L., Guo, X., & Zuo, L. (2016). Performance evaluation and parameter sensitivity of energy-harvesting shock absorbers on different vehicles. [Http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423114.2016.1174276](http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423114.2016.1174276), 54(7), 918–942. <https://doi.org/10.1080/00423114.2016.1174276>
- [43] Zhang, Z., Zhang, X., Chen, W., Rasim, Y., Salman, W., Pan, H., Yuan, Y., & Wang, C. (2019). Corrigendum to “A high-efficiency energy regenerative shock absorber using supercapacitors for renewable energy applications in range extended electric vehicle” [Appl. Energy 178 (2016) 177–188]. *Applied Energy*, 254, 113634. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2019.113634>
- [44] Zhang, X., Zhang, Z., Pan, H., Salman, W., Yuan, Y., & Liu, Y. (2016). A portable high-efficiency electromagnetic energy harvesting system using supercapacitors for renewable energy applications in railroads. *Energy Conversion and Management*, 118, 287–294. <https://doi.org/10.1016/J.ENCONMAN.2016.04.012>
- [45] Wang, H., He, C., Lv, S., & Sun, H. (2018). A new electromagnetic vibrational energy harvesting device for swaying cables. *Applied Energy*, 228, 2448–2461. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2018.07.059>
- [46] Sabzehgar, R., Maravandi, A., & Moallem, M. (2014). Energy regenerative suspension using an algebraic screw linkage mechanism. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 19(4), 1251–1259. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2013.2277854>
- [47] Maravandi, A., & Moallem, M. (2015). Regenerative shock absorber using a two-leg motion conversion mechanism. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(6), 2853–2861. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2015.2395437>
- [48] Syuhri, A., Hadi, W., & Syuhri, S. N. H. (2017). Damping properties and energy evaluation of a regenerative shock absorber. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)* 2017 12:4, 12(4), 1385–1397. <https://doi.org/10.1007/S12008-017-0440-X>
- [49] Zhang, R., & Wang, X. (2019). Parameter study and optimization of a half-vehicle suspension system model integrated with an arm-teeth regenerative shock absorber using Taguchi method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 126, 65–81. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2019.02.020>
- [50] Zhang, R., Zhao, L., Qiu, X., Zhang, H., & Wang, X. (2020). A comprehensive comparison of the vehicle vibration energy harvesting abilities of the regenerative shock absorbers predicted by the quarter, half and full vehicle suspension system models. *Applied Energy*, 272, 115180. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2020.115180>
- [51] Abdelkareem, M. A. A., Zhang, R., Jing, X., Wang, X., & Ali, M. K. A. (2022). Characterization and implementation of a double-sided arm-toothed indirect-drive rotary electromagnetic energy-harvesting shock absorber in a full semi-trailer truck suspension platform. *Energy*, 239, 121976. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2021.121976>
- [52] Salman, W., Qi, L., Zhu, X., Pan, H., Zhang, X., Bano, S., Zhang, Z., & Yuan, Y. (2018). A high-efficiency energy regenerative shock absorber using helical gears for powering low-wattage electrical device of electric vehicles. *Energy*, 159, 361–372. <https://doi.org/10.1016/J.ENERGY.2018.06.152>
- [53] Můčka, P. (2016). Energy-harvesting potential of automobile suspension. [Http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423114.2016.1227077](http://Dx.Doi.Org/10.1080/00423114.2016.1227077), 54(12), 1651–1670. <https://doi.org/10.1080/00423114.2016.1227077>

- [54] Li, H., Zheng, P., Zhang, T., Zou, Y., Pan, Y., Zhang, Z., & Azam, A. (2021). A high-efficiency energy regenerative shock absorber for powering auxiliary devices of new energy driverless buses. *Applied Energy*, 295, 117020. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2021.117020>
- [55] Ali, A., Qi, L., Zhang, T., Li, H., Azam, A., & Zhang, Z. (2021). Design of novel energy-harvesting regenerative shock absorber using barrel cam follower mechanism to power the auxiliaries of a driverless electric bus. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 48, 101565. <https://doi.org/10.1016/J.SETA.2021.101565>
- [56] Audi developing electromechanical rotary dampers; potential for energy recuperation from suspension; 48V - Green Car Congress. (n.d.). Retrieved August 20, 2022, from <https://www.greencarcongress.com/2016/08/audi-developing-electromechanical-rotary-dampers-potential-for-energy-recuperation-from-suspension-4.html>.
- [57] Galluzzi, R., Circosta, S., Amati, N., & Tonoli, A. (2021). Rotary regenerative shock absorbers for automotive suspensions. *Mechatronics*, 77, 102580. <https://doi.org/10.1016/J.MECHATRONICS.2021.102580>
- [58] Dong, L., Yang, F., He, A., Guo, Z., Yu, J., & Zuo, J. (2022). Investigation on energy-regenerative shock absorber with adjustable damping and power for freight wagons. *Energy Conversion and Management*, 254, 115228. <https://doi.org/10.1016/J.ENCONMAN.2022.115228>
- [59] Salman, W., Zhang, X., Li, H., Wu, X., Li, N., Azam, A., & Zhang, Z. (2022). A novel energy regenerative shock absorber for in-wheel motors in electric vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 181, 109488. <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2022.109488>
- [60] Dahat, N., Maskar, P., & Yadav, A. (2023). Design and development of regenerative shock absorber. *Materials Today: Proceedings*. <https://doi.org/10.1016/J.MATPR.2023.02.433>
- [61] Mi, J., Xu, L., Guo, S., Meng, L., & Abdelkareem, M. A. A. (2017). Energy Harvesting Potential Comparison Study of a Novel Railway Vehicle Bogie System With the Hydraulic-Electromagnetic Energy-Regenerative Shock Absorber. 2017 Joint Rail Conference, JRC 2017. <https://doi.org/10.1115/JRC2017-2241>
- [62] Ahmad, K., & Alam, M. (2017). Design and Simulated Analysis of Regenerative Suspension System with Hydraulic Cylinder, Motor and Dynamo. *SAE Technical Papers*, 2017-March(March). <https://doi.org/10.4271/2017-01-1284>
- [63] Fang, Z., Guo, X., Xu, L., & Zhang, H. (2013). Experimental Study of Damping and Energy Regeneration Characteristics of a Hydraulic Electromagnetic Shock Absorber: <http://Dx.Doi.Org/10.1155/2013/943528>, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/943528>
- [64] Li, C., & Tse, P. W. (2013). Fabrication and testing of an energy-harvesting hydraulic damper. *Smart Materials and Structures*, 22(6), 065024. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/6/065024>
- [65] Li, C., Zhu, R., Liang, M., & Yang, S. (2014). Integration of shock absorption and energy harvesting using a hydraulic rectifier. *Journal of Sound and Vibration*, 333(17), 3904–3916. <https://doi.org/10.1016/J.JSV.2014.04.020>
- [66] Zhang, Y., Zhang, X., Zhan, M., Guo, K., Zhao, F., & Liu, Z. (2015a). Study on a novel hydraulic pumping regenerative suspension for vehicles. *Journal of the Franklin Institute*, 352(2), 485–499. <https://doi.org/10.1016/J.JFRANKLIN.2014.06.005>
- [67] Galluzzi, R., Tonoli, A., Amati, N., Curcuruto, G., Conti, P., Greco, G., & Nepote, A. (2016). Regenerative Shock Absorbers and the Role of the Motion Rectifier. *SAE Technical Papers*, 2016-April. <https://doi.org/10.4271/2016-01-1552>
- [68] Galluzzi, R., Xu, Y., Amati, N., & Tonoli, A. (2018). Optimized design and characterization of motor-pump unit for energy-regenerative shock absorbers. *Applied Energy*, 210, 16–27. <https://doi.org/10.1016/J.APENERGY.2017.10.100>
- [69] Peng, M., Guo, X., Zou, J., & Zhang, C. (2016). Simulation Study on Vehicle Road Performance with Hydraulic Electromagnetic Energy-Regenerative Shock Absorber. *SAE Technical Papers*, 2016-April (April). <https://doi.org/10.4271/2016-01-1550>
- [70] Zou, J., Guo, X., Xu, L., Tan, G., Zhang, C., & Zhang, J. (2017). Design, Modeling, and Analysis of a Novel Hydraulic Energy-Regenerative Shock Absorber for Vehicle Suspension. *Shock and Vibration*, 2017. <https://doi.org/10.1155/2017/3186584>
- [71] Zou, J., Guo, X., Xu, L., Abdelkareem, M. A. A., Gong, B., Zhang, J., & Tan, G. (2018). Simulation Research of a Hydraulic Interconnected Suspension Based on a Hydraulic Energy Regenerative Shock Absorber. *SAE Technical Papers*, 2018-April. <https://doi.org/10.4271/2018-01-0582>

- [72] Qin, B., Chen, Y., Chen, Z., & Zuo, L. (2022). Modeling, bench test and ride analysis of a novel energy-harvesting hydraulically interconnected suspension system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 166, 108456. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108456>
- [73] Miraglia, M., Tannous, M., Inglese, F., Brämer, B., Milazzo, M., & Stefanini, C. (2022). Energy recovery from shock absorbers through a novel compact electro-hydraulic system architecture. *Mechatronics*, 81, 102701. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2021.102701>
- [74] Zhang, W., Wang, G., & Guo, Y. (2023). Research on damping and energy recovery characteristics of a novel mechanical-electrical-hydraulic regenerative suspension system. *Energy*, 271, 127022. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.127022>
- [75] Harrison, H. R., & Nettleton, T. (1997). Lagrange's Equations. *Advanced Engineering Dynamics*, 21–45. <https://doi.org/10.1016/B978-034064571-0/50002-3>
- [76] Blundell, M., & Harty, D. (2004). The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*, 1–518. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5112-7.X5000-3>
- [77] Savaresi, S., Poussot-Vassal, C., Spelta, C., Sename, O., & Dugard, L. (2010). Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles. *Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles*.
- [78] Thorby, D. (2008). Random Vibration. *Structural Dynamics and Vibration in Practice*, 267–324. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8002-8.00010-9>
- [79] Cheung, Y. L., & Wong, W. O. (2011). H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 330(6), 1039–1044. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.031>
- [80] Forst, W., & Hoffmann, D. (2010). Optimization—Theory and Practice. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-78977-4>
- [81] Keith, W., Heikkila, W. J., & Heikkila, W. J. (2021). Kirchhoff's laws. 89–117. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-818160-7.00002-8>
- [82] Uang, C.-M. (1988). Use of energy as a design criterion in earthquake-resistant design /. *Earthquake Engineering Research Center University of California*.
- [83] Luo, R., Yu, Z., Wu, P., & Hou, Z. (2023). Analytical solutions of the energy harvesting potential from vehicle vertical vibration based on statistical energy conservation. *Energy*, 264, 126111. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.126111>
- [84] Caughey, T. K. (1971). Nonlinear Theory of Random Vibrations. *Advances in Applied Mechanics*, 11(C), 209–253. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70343-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70343-0)
- [85] López Gabriel, L. D., Barredo, E., & Mendoza, J. G. (2023). Diseño de un AR electromagnético utilizando balance de energía estocástica.
- [86] J. B. Roberts, & P. D. Spanos. (1990). *Random Vibration and Statistical Linearization*. DOVER PUBLICATIONS.
- [87] Taghavifar, H., & Rakheja, S. (2018). Parametric analysis of the potential of energy harvesting from commercial vehicle suspension system. <https://doi.org/10.1177/0954407018804380>
- [88] Abdelkareem, M. A. A., Eldaly, A. B. M., Kamal Ahmed Ali, M., Youssef, I. M., & Xu, L. (2020). Monte Carlo sensitivity analysis of vehicle suspension energy harvesting in frequency domain. *Journal of Advanced Research*, 24, 53–67. <https://doi.org/10.1016/j.jare.2020.02.012>
- [89] Seers, P., Nachin, G., & Glaus, M. (2015). Development of two driving cycles for utility vehicles. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 41, 377–385. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2015.10.013>
- [90] Shen, P., Zhao, Z., Li, J., & Zhan, X. (2018). Development of a typical driving cycle for an intra-city hybrid electric bus with a fixed route. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 59, 346–360. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2018.01.032>
- [91] Wang, Q., Huo, H., He, K., Yao, Z., & Zhang, Q. (2008). Characterization of vehicle driving patterns and development of driving cycles in Chinese cities. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 13(5), 289–297. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2008.03.003>