



Universidad Tecnológica de la Mixteca

Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz

**Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico
basado en inersor y rigidez negativa conectado a una estructura tipo
viga**

Tesis para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico Automotriz

Presenta:

Ayotzin García Rivera

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Codirector de tesis:

Dr. Eduardo Barredo Hernández

Huajuapán de León, Oaxaca.

Septiembre del 2022

Dedicatoria

- *Dedicado a todas aquellas personas que por diferentes circunstancias no logran estudiar o terminar sus estudios y luchan a diario para salir adelante.*
- *Para todas las personas que fallecieron en la pandemia mundial de SARS-COV2 que azotó al mundo desde diciembre del 2019.*
- *Por aquellos educadores y profesores heroicos que pese a las circunstancias de la pandemia se esfuerzan por transmitir sus conocimientos y valoran la integridad de sus alumnos.*

Agradecimientos

- *Le agradezco a mis padres, Adolfo García Guerrero y Martha Rivera Santiago, por ser quienes me guiaron por el camino de la profesión y ser mi apoyo incondicional a lo largo de mi vida personal y estudiantil.*
- *A mis hermanos, Itahí García Rivera y Uitzinatzin García Rivera, quienes me han brindado su apoyo emocional, de igual forma ser mi motivación principal para superarme en todo momento y así brindarles el mejor ejemplo que un hermano puede dar.*
- *Agradezco la confianza, experiencia y paciencia brindada a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios y al Dr. Eduardo Barredo Hernández. De igual forma el tiempo que me brindaron mis sinodales, al Dr. Manuel Arias Montiel, Dr. Mario Márquez Miranda y al M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez.*
- *A María Fernanda Alberdin Herrera, por ser mi apoyo emocional incondicional a pesar de las circunstancias, por estar presente en toda mi vida universitaria apoyándome y motivándome a lograrlo profesionalmente.*

Ayctsin García Rivera

Septiembre 2022

Resumen

Existen diversas manifestaciones por las cuales una estructura puede llegar a una falla catastrófica, las cuales pueden ser el clima, tiempo, luz, calor, etc. Sin embargo existe un fenómeno que en cuestión de segundos puede afectar la vida útil y comprometer la fiabilidad de una estructura, el cual es la vibración. Por tal motivo, para evitar un daño estructural se han implementado sistemas de amortiguamiento capaces de disminuir las amplitudes de vibración.

Este trabajo de tesis se centra en el diseño teórico de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor y rigidez negativa empotrado a una estructura tipo viga, la cual constituye un método pasivo de control de vibración para estructuras dinámicas. En particular se utilizan dos conceptos importantes, el inersor y la rigidez negativa. El inersor posee la propiedad de modificar las frecuencias naturales y disminuir las amplitudes de vibración del sistema al modificar la inercia (masa aparente) del dispositivo. La rigidez negativa por su parte tiene la propiedad de beneficiar el movimiento del absorbedor dinámico de vibración (DVA), además de disminuir la masa física del absorbedor. Por lo que, en este trabajo de tesis, se implementan estos dos elementos en un solo DVA, demostrando la mayor eficiencia que se tiene con respecto a un absorbedor de vibración clásico conectado a una estructura tipo viga, y en consecuencia, mejorar las capacidades de amortiguamiento en los sistemas de control pasivo de vibración. Se utilizan nuevas formas de optimización de parámetros para mejorar los DVA's en estructuras tipo viga, además, se describen métodos matemáticos y conceptos importantes que se consideran para el sistema de absorción propuesto.

Índice General

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Nomenclatura.....	XI
Alfabeto griego.....	XV
Índice de figuras	XVIII
Índice de tablas	XXII
1. Introducción.....	1
1.1. Planteamiento del problema.....	3
1.2. Justificación	5
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6

1.5. Metas.....	6
1.6. Limitantes	7
1.7. Metodología	7
1.8. Estructura de la tesis	10
2. Estado del Arte	13
2.1. Absorbedores dinámicos de vibración.....	13
2.2. El inersor.....	14
2.2.1. Implementaciones del inersor en la industria automotriz.....	16
2.3. Redes mecánicas	18
2.4. Absorbedores de vibración dinámicos no tradicionales	19
2.5. Absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersores.....	19
2.6. Rigidez negativa	20
2.6.1. Implementaciones de la rigidez negativa en la industria automotriz	22
6.7. Estructuras tipo viga	23
3. Marco Teórico.....	26
3.1. Estructuras tipo viga	26
3.1.1. Método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales	26
3.1.2 Análisis modal.....	27
3.2. Optimización.....	28
3.2.1 Método de optimización de punto fijo	29
3.2.2. Técnica de los puntos fijos extendido	32
3.3. Aisladores dinámicos de vibración con inersores y rigidez negativa (IN-DVA)	34
3.3.1. Modelo de IN-DVA	34

3.3.2. Parámetros de optimización	37
3.4. Teorema de Vieta.....	37
4. Modelo matemático	42
4.1. Respuesta en frecuencia.....	42
5. Resultados	49
5.1. Técnica de los puntos fijos extendida	49
6. Conclusiones.....	64
6.1. Trabajos futuros	65
A. Modelo matemático	67
B. Puntos fijos extendidos	73
Bibliografía.....	78

Nomenclatura

$y_1(t)$	Desplazamiento correspondiente a la masa m
$y_2(t)$	Desplazamiento correspondiente a la red mecánica C4
$\frac{\partial \omega}{\partial x}$	Variación en la pendiente entre las secciones transversales de una viga.
\dot{v}	Aceleración
\mathcal{L}	Lagrangiano
\mathcal{D}	Denominador
\mathcal{N}	Numerador
A	Área de sección transversal
b	Inertancia
c	Coefficiente de amortiguamiento
c_1	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente al DVA
c_2	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente a la red mecánica C4
D	Función de las velocidades generalizadas o función de disipación de Rayleigh
E	Módulo de elasticidad
$E_{inertor}$	Energía cinética del inersor

F	Magnitud escalar de la fuerza aplicada a las terminales del inersor
$f(x)$	Función espacial
$f(x)g(t)$	Carga distribuida
$f(x, t)$	Fuerza externa por unidad de longitud
F_0	Amplitud de excitación
F_k	Fuerzas no conservativas generalizadas
$g(t)$	Función temporal determinística
$H(s)$	Función de transferencia del sistema o respuesta del sistema
I	Momento de inercia centroidal
j	Parte imaginaria de un número complejo
k	Coefficiente de rigidez
k_1	Coefficiente de rigidez correspondiente al DVA
k_2	Coefficiente de rigidez correspondiente a la red mecánica C4
k_{NS}	Coefficiente de rigidez negativa correspondiente a la red mecánica C4
L	Longitud total de la viga
M	Momento flexionante
m	Masa del DVA
P	Presión
P_{opt}	Parámetros a optimizar del sistema
q	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA
$Q_i(\omega)$	Frecuencia de la viga
q_k	Coordenadas generalizadas

$R(s)$	Respuesta en frecuencia adimensional del sistema
T	Energía cinética
U	Energía potencial
V	Fuerza cortante
v	Velocidad
V_{adim}	VARIABLES ADIMENSIONALES
W	Watt, unidad de potencia eléctrica
$Y(s)$	Impedancia mecánica
$y(x, t)$	Desplazamiento transversal de la viga
DVA	Absorbedor dinámico de vibración
FRF	Función de respuesta en frecuencia
IDVA	Absorbedor de vibración dinámica basado en inersores
ISDVA	Absorbedor de vibración dinámica en serie basado en inersores
NS-NIDVA	Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersores y rigidez negativa
NDVA	Absorbedor de vibración dinámica no tradicional
LTI	Sistema lineal invariante en el tiempo
RIDTMD	Amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional
RMS	Valor cuadrático medio
TID	Amortiguador de inercia sintonizado
TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersores
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado

Alfabeto griego

Ω	Relación de frecuencia forzada
Π	Parámetros adimensionales presentes en un sistema
β	Relación de masas entre el sistema principal y la masa del DVA
α	Relación de rigidez negativa
β_i	Valor característico
δ	Relación de masas entre la inercia rotacional y el DVA
$\delta(X - A)$	Función delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
η	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre el DVA y la red mecánica C4
Y_i	Relación de frecuencias naturales
μ	Relación de masas entre el DVA y la red mecánica C4
ω	Frecuencia de excitación externa
$\omega(x, t)$	Desplazamiento transversal o deflexión de la viga
ω_A^2	Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA
ω_B^2	Frecuencia natural al cuadrado asociado a la red mecánica C4

ω_i^2	Frecuencia natural al cuadrado del i-ésimo modo de vibración
ω_n	Frecuencia natural
$\phi_n(x)$	Función n-ésima modal
ϕ_1	Valor que toma en las condiciones que se encuentre empotrada la viga
ρ	Densidad volumétrica
ζ	Factor de amortiguamiento
ζ_{2opt}	Factor de amortiguamiento óptimo asociado a la red mecánica C4
ζ_2	Factor de amortiguamiento asociado a la red mecánica C4

Índice de figuras

Figura 1. Esquema reportado por López-García [4] de una viga doblemente empotrada con el ISDVA.....	3
Figura 2. Esquema del modelo de la viga con el NS-NIDVA-C4.....	4
Figura 3. Metodología de la investigación [6].....	10
Figura 4. Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado [4].....	13
Figura 5. Símbolo del inersor [14].	14
Figura 6. La nueva correspondencia entre redes mecánicas y eléctricas [14].....	15
Figura 7. (a) Banco de pruebas de la suspensión de un automóvil para la implementación del inersor. (b) Modelo de la suspensión con inersor [15].	16
Figura 8. (a) PSD de la aceleración del cuerpo del vehículo, (b) PSD del desplazamiento de la suspensión [15].	17
Figura 9. Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores. Dónde: “b” es la inertancia, “c” es el coeficiente de amortiguamiento y “kl” es la constante del resorte [16, 18].....	18
Figura 10. Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional [4].....	19
Figura 11. Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor (NIDVA)[22]..	20
Figura 12. (a) Modelo de asiento con suspensión utilizando el sistema de aislamiento propuesto, y (b) la representación esquemática del sistema de aislamiento [28].....	21

Figura 13. Banco de pruebas del sistema propuesto, (a) sistema experimental, (b) sistema de rigidez negativa, y (c) fotografía del sistema experimental [28].	22
Figura 14. Valor RMS del desplazamiento de la masa por una excitación aleatoria [28].	23
Figura 15. Elemento diferencial de la viga y diagrama de esfuerzos [3].	26
Figura 16. Modos de vibración normalizados de una estructura tipo viga empotrada [3].	27
Figura 17. Sistema tipo viga conectada a un IDVA [3].	30
Figura 18. Comportamiento dinámico del sistema. $P1$ y $P2$ puntos invariantes del sistema [3].	30
Figura 19. Comportamiento dinámico del sistema con ψ_{opt} , T_{opt} y ξ_{opt} comportamiento dinámico del sistema con relaciones de amortiguamiento diferentes al óptimo [3].	31
Figura 20. Configuración de un sistema IDVA y respuesta optimizada [3].	32
Figura 21. Frecuencias invariantes: $\Omega_1, \xi \rightarrow \infty, \Omega_0, \xi \rightarrow 0, \Omega_2, \xi \rightarrow \infty$ en función de la relación de amortiguamiento [3].	33
Figura 22. Modelos de IN-DVA's [38].	34
Figura 23. Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor con rigidez negativa (NS-NIDVA) aplicando las redes mecánicas C3 (c), C4 (a) y C6 (b) [5].	35
Figura 24. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia óptimas de los NS-NIDVA propuestos, NIDVA-C4, IDVA-C6 y DVA clásico [5].	36
Figura 25. Esquema del modelo de viga conectada a un DVA propuesto para este trabajo.	43
Figura 26. Respuesta en frecuencia de la viga acoplada al NS-NIDVA-C4 contra la relación de frecuencias Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.	56
Figura 27. Representación de la función de α contra β .	57
Figura 28. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia con los parámetros óptimos $\eta_{opt}, \mu_{opt}, q_{opt}$ y α_{opt} , con diferentes relaciones de amortiguamiento.	60

Figura 29. Comparación de las curvas de las FRF del DVA Clásico[4], C4 Por Xiaoyu[42], C6 Por Xiaoyu[42], ISDVAs Por Gustavo [4] y NS-NIDVA-C4..... 61

Índice de tablas

Tabla 1. Analogía electromecánica [14].....	15
Tabla 4.1. Parámetros adimensionales y relación entre variables.....	46
Tabla 5.1. Valores establecidos para cada uno de los valores independientes.....	54
Tabla 5.2. Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos.....	54
Tabla 5.3. Valor numérico de los puntos invariantes del sistema (sin amortiguamiento optimizado).....	55
Tabla 5.4. Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia invariante.....	59
Tabla 5.5. Valores numéricos para los parámetros óptimos obtenidos a través del método de los puntos fijos extendidos estableciendo $\beta = 0.1$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$	60
Tabla 5.6. Valores del índice de ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración.....	62
Tabla A.1. Cambio de variables para trabajar en el dominio de la frecuencia y tener parámetros adimensionales.....	67
Tabla A.2. Parámetros adimensionales.....	69

Capítulo 1

Introducción

Para un mejor diseño estructural, es necesario el estudio del comportamiento de las vibraciones estructurales, ya que son las principales causas que dan origen a la falla, debido a que son el resultado de las cargas estáticas y dinámicas. Los modelos de vigas han hecho posible resolver un gran número de problemas ingenieriles en los dos últimos siglos. Sin embargo, el conocimiento en relación al comportamiento dinámico de las vigas está limitado, debido a que no se conoce de una manera completa su comportamiento bajo diferentes condiciones de frontera y de cargas.

Las vibraciones indeseables son aquellas que producen incomodidad o riesgo a las personas, causando daño o fallas en las estructuras, afectando la ejecución o funcionamiento de la maquinaria y procesos.

En un entorno industrial hay muchas fuentes de vibración; maquinaria rotatoria, compresores y motores eléctricos, vehículos de transporte tales como camiones, trenes, y aviones, el flujo de fluidos y muchas otras cosas. A veces la presencia de vibración provoca desgaste excesivo en rodamientos, formación de grietas, aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas, mantenimiento frecuente y costoso, fallas electrónicas por la ruptura de juntas soldadas y abrasión del aislamiento alrededor de conductores eléctricos. Además, la exposición de humanos a la vibración produce dolor, incomodidad e ineficiencia. De aquí surge el control de vibraciones, que se refiere a los métodos para eliminar o reducir las fuerzas dinámicas que provocan las vibraciones.

El absorbedor de vibración es un dispositivo mecánico compuesto de elementos mecánicos pasivos denominados: la masa inercial, elementos de restitución de energía (resorte) y amortiguador de fluido viscoso conectados a la masa de la estructura primaria que se debe proteger contra vibraciones, por lo que ambas masas ahora constituyen un sistema de dos grados de libertad.

Los absorbedores de vibración se usan comúnmente en máquinas que operan a velocidad constante debido a que se sintonizan a una frecuencia en particular. Sin embargo, en el último par de décadas se ha incrementado tanto el rendimiento dinámico como el ancho de banda de los absorbedores dinámicos de vibración. Esto se logró mediante la integración de dos tecnologías al sistema DVA, es decir, la inercia rotacional y la rigidez negativa.

En el año 2002, Smith [1] fue el primero en introducir el concepto de inersor como elemento mecánico independiente. Es un elemento descrito como el equivalente mecánico de un capacitor en un circuito eléctrico. En los últimos años, el inersor se ha implementado con éxito a varias aplicaciones de la ingeniería mecánica, para mejorar las suspensiones de automóviles, trenes y motocicletas. Se han dedicado muchos estudios teóricos y experimentales a profundizar el conocimiento del inersor, esto contribuye al estudio de minimizar las desventajas de utilizar este sistema y de ser posible eliminarlas. El sistema del inersor, es una vista a mejorar la respuesta de vibración de los sistemas.

Con la intención de mejorar el comportamiento de las estructuras estacionarias se desea combinar los rendimientos de control de los inersores con los del dispositivo de rigidez negativa. Físicamente, el absorbedor de vibración con rigidez negativa consiste esencialmente en un enfoque indirecto para aumentar el efecto de inercia de la masa física del absorbedor debido al valor negativo de la rigidez agregada, dando como resultado una fuerza de resorte en fase con la fuerza de inercia. Este sistema también es una forma de lograr una alta amortiguación en la resonancia objetiva sin sacrificar la capacidad de carga. Para mejorar la amortiguación y reducir la necesidad de una gran masa oscilante [2], se ha propuesto el absorbedor de vibración basado en inersor, para el cual ya se han obtenido los parámetros óptimos para el control de vibraciones en estructuras tipo viga. Sin embargo, el control de vibración en estructuras tipo viga con redes mecánicas basadas en inersor y tecnología de rigidez negativa no se ha estudiado todavía.

Se desarrollará un modelo matemático de un absorbedor de vibración no tradicional basado en inersores y rigidez negativa para el control de vibraciones en estructuras tipo viga. El objetivo principal es el diseño teórico de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico para el control pasivo de vibraciones en vigas sujetas a cargas armónicas. Se tiene contemplado obtener los parámetros óptimos aplicando nuevas técnicas de optimización propuestas en los últimos años, Se propone una metodología, objetivos y metas para la realización de este trabajo. Se tiene como

meta alcanzar el equilibrio dinámico entre la estructura tipo viga y el sistema de absorción de vibración, de tal manera que minimice las amplitudes máximas de vibración del sistema, y por lo tanto, llegar a una conclusión satisfactoria. Este estudio está dedicado a investigar el resultado benéfico de un “Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersores y rigidez negativa” (NS-NIDVA por sus siglas en ingles) en la absorción de vibración en estructuras tipo viga.

1.1. Planteamiento del problema

Es común que las máquinas y estructuras experimenten ciertos niveles de vibración debido a la acción de fuerzas externas que actúan sobre ellas o fuerzas internas que se generan por el propio funcionamiento del sistema. Más aún, si la frecuencia de las fuerzas de excitación se iguala a una de las frecuencias naturales del sistema, se producirá el fenómeno conocido como resonancia. Bajo esta condición, dependiendo del amortiguamiento, los niveles de vibración pueden crecer de forma descontrolada y llega causar daños en las máquinas y estructuras, o en algunos de los elementos que las componen. Por esto, se vuelve necesaria la implementación de sistemas de amortiguación para mitigar las amplitudes de vibración del sistema. Entre estos sistemas de amortiguación se encuentran: topes de impacto, amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración, inersores, amortiguadores con fluidos inteligentes, entre otros. Asimismo, la principal función de

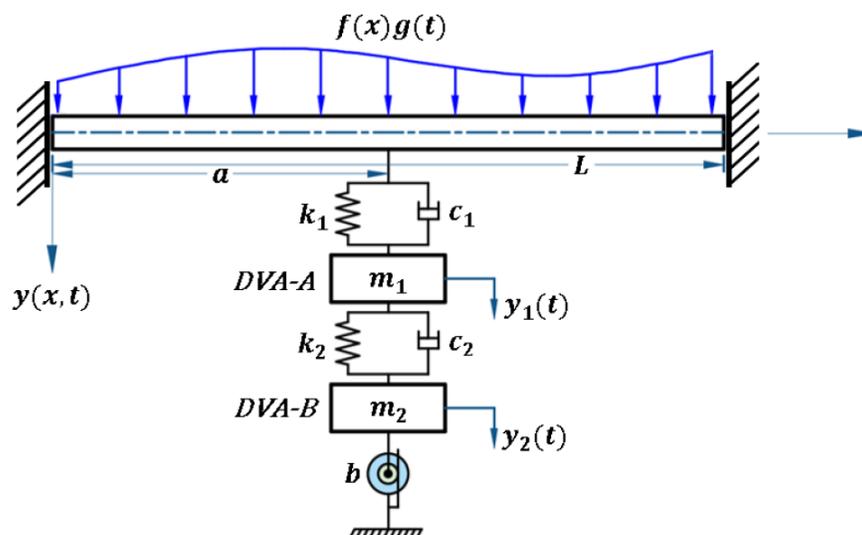


Figura 1. Esquema reportado por López-García [4] de una viga doblemente empotrada con el ISDVA.

un sistema de amortiguamiento es el de disminuir lo más eficientemente posible las vibraciones mecánicas.

Por otro lado, el absorbedor de vibración dinámico genera un equilibrio dinámico en el sistema minimizando las amplitudes de vibración, cuando el absorbedor se sintoniza adecuadamente. Asimismo, la integración del dispositivo mecánico denominado inersor logró incrementar el rendimiento dinámico del DVA clásico. En publicaciones recientes [4], se han modelado diversos sistemas en los cuales el uso del inersor es imprescindible, por ejemplo, se ha propuesto el uso de la amortiguación de una estructura tipo viga con un absorbedor dinámico de vibración en serie basado en inersores (ISDVA's por sus siglas en inglés), el cual se muestra en la Figura 1. Con esta configuración se logró incrementar en un 17% la reducción de vibración de la estructura tipo viga en comparación con el DVA clásico, para el caso de vibración armónica. De igual manera, en la literatura se ha demostrado que este tipo absorbedores de vibración con arreglo en serie es más eficientes en comparación con los absorbedores en paralelo.

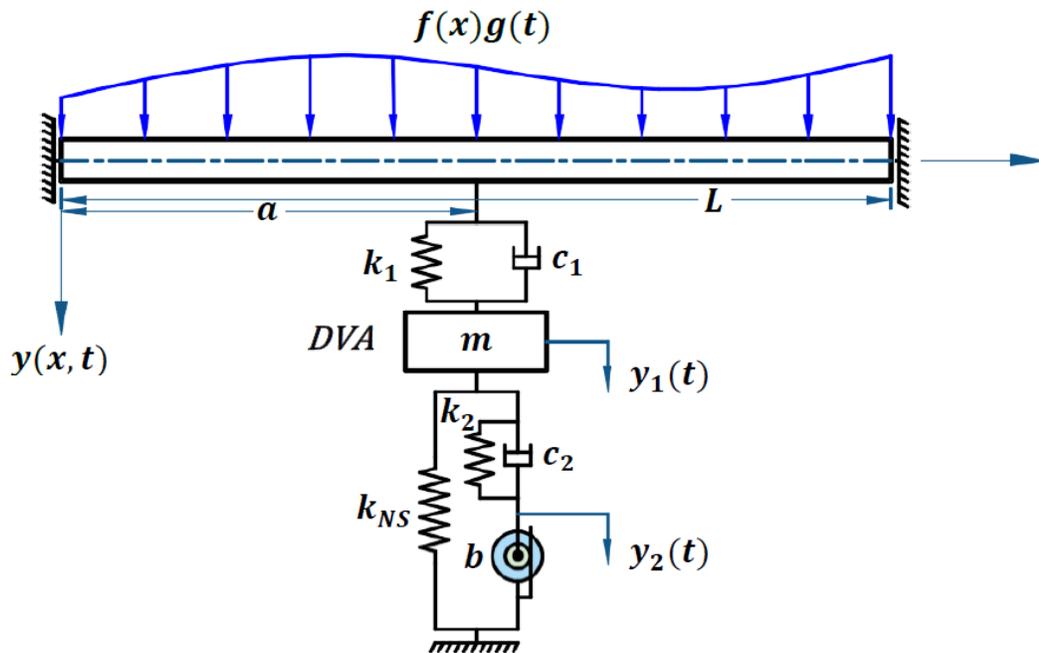


Figura 2. Esquema del modelo de la viga con el NS-NIDVA-C4.

El modelo propuesto en este trabajo se muestra en la Figura 2. En esta figura se observa la configuración de la estructura tipo viga de longitud L conectada al sistema de absorción de vibración. El sistema de absorción de vibración, está constituido por un absorbedor de vibración

dinámico que se conecta a la configuración en paralelo con conexión a tierra de una red mecánica basada en inersor y un resorte de rigidez negativa. Asimismo, la red mecánica basada en inersor está compuesta por la combinación en paralelo de resorte y amortiguador viscoso y éste en serie con el inersor. Por otro lado, para el diseño óptimo del dispositivo se implementará la técnica de los puntos fijos extendida. De esta manera se busca aumentar el porcentaje de mitigación de las vibraciones de estructuras tipo viga, en comparación con los modelos ya propuestos en la literatura, y por consecuencia mejorar el rendimiento de los absorbedores de vibración pasivos.

1.2. Justificación

En las últimas décadas el control pasivo de vibraciones mediante la aplicación de absorbedores dinámicos de vibración se ha incrementado notablemente en diferentes áreas de la ingeniería. Este incremento se debe principalmente a su simplicidad en cuanto a diseño e implementación. Además, la invención del inersor y el desarrollo de las redes mecánicas basadas en inersor han logrado que en conjunto con el DVA clásico, se obtenga un sistema secundario de absorción de vibración de alto rendimiento dinámico. Estos dispositivos se conocen en la literatura como absorbedores de vibración no tradicionales basados en inersor. Con esto se ha logrado un mayor incremento en el porcentaje de reducción de vibración, así como, un incremento en el ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.

Por otro lado, la integración de la tecnología de rigidez negativa en los sistemas de absorción de vibración de alto rendimiento dinámico, ha permitido incrementar aún más el porcentaje de reducción y el ancho de banda de supresión de la vibración en el sistema [5]. Es por ello que, en este trabajo de tesis se propone el control pasivo de vibraciones en estructuras tipo viga, mediante el diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor y rigidez negativa. Cabe mencionarse que esta configuración no se ha estudiado anteriormente en el control de vibración en estructuras tipo viga.

1.3. Hipótesis

La integración de la tecnología de rigidez negativa al absorbedor de vibraciones de alto rendimiento dinámico basado en inersor, puede incrementar considerablemente el porcentaje de reducción de vibración en estructuras tipo viga. Asimismo, se espera un alto incremento en el ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseño teórico de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico para el control pasivo de vibraciones en vigas sujetas a cargas armónicas.

1.4.2. Objetivos específicos

- Obtener el modelo matemático de la estructura tipo viga con el sistema de absorción de vibraciones en el dominio temporal y frecuencial.
- Implementar la técnica de optimización de los puntos fijos extendida y obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto.
- Realizar un análisis de inestabilidad del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento.
- Realizar simulaciones numéricas del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento con rigidez negativa, considerando los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica de calibración de frecuencias (EFPT).

1.5. Metas

Las metas que se desean alcanzar con la realización de este trabajo son las siguientes:

- Obtención de la ecuación de movimiento dinámico de la estructura tipo viga con el absorbedor de vibración basado en inersor y rigidez negativa, a partir de la aplicación de la segunda Ley de Newton y/o el formulismo Euler-Lagrange.
- Desarrollar ecuaciones algebraicas simplificadas para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño, que minimizan las amplitudes de vibración del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento con rigidez negativa, mediante la implementación de la técnica de optimización de los puntos fijos extendida.
- Realizar una comparación de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la técnica de los puntos fijos extendida, mediante gráficas de la función de repuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento con rigidez negativa.

1.6. Limitantes

Para el diseño del absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor y rigidez negativa se tomarán en cuenta las siguientes consideraciones:

- El diseño del dispositivo de absorción de vibración se realizará de forma teórica.
- Los parámetros de diseño óptimos del dispositivo de absorción de vibración se obtendrán implementando únicamente la técnica de los puntos fijos extendidos.

1.7. Metodología

La metodología que se utilizó en este trabajo se muestra en la Figura 3, la cual se basa en el modelo tradicional del método científico, que nos traduce, explica y difunde trabajos de investigación para la ingeniería.

Esta metodología [6] consta de 7 etapas que se describen a continuación y que se debe tomar en cuenta para la realización de esta investigación.

- Etapa 1. Documentación: Documentación acerca de la tecnología, las metodologías empleadas, productos utilizados, etc. En muchas ocasiones antes de comenzar un desarrollo es necesario documentarse sobre el dominio específico del producto a desarrollar.

Para este trabajo de tesis se investigó sobre los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor y el concepto de la rigidez negativa, de tal manera que se pueda construir un panorama general de estos elementos y su implementación en el control pasivo de las vibraciones. De igual manera, conocer las técnicas de optimización para el diseño óptimo del absorbedor de vibración.

- Etapa 2. Determinación del problema: La captura de requerimientos permite realizar un análisis del problema, así como delimitar los aspectos concretos que se tendrán en cuenta para el futuro objeto.

Para este caso en particular, se analiza el problema del control de las vibraciones para una excitación armónica de una estructura tipo viga, mediante la implementación de absorbedores de vibración dinámicos basados en inersores y rigidez negativa (NS-NIDVA). Igualmente, para el diseño del NS-NIDVA se requiere de la aplicación de técnicas de optimización para la obtención de los parámetros óptimos que minimicen las máximas amplitudes de vibraciones del sistema.

- Etapa 3. Creación de la hipótesis – en función del objeto de estudio: El objeto de estudio es la construcción de nuevos objetos (modelos técnicas, estudio, métodos), que, por no existir, no son susceptibles de experimentación. La hipótesis en ciencias de la ingeniería se formulará como la descripción del nuevo objeto que se desea construir.

Para este trabajo de tesis la hipótesis que se plantea es la siguiente:

- La integración de la tecnología de rigidez negativa al absorbedor de vibraciones de alto rendimiento dinámico basado en inersor, puede incrementar considerablemente el porcentaje de reducción de vibración en estructuras tipo viga. Asimismo, se espera un alto incremento en el ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.

- Etapa 4. Definición del método del trabajo: Al iniciar una investigación es preciso elegir el paradigma metodológico (metodología general de abordamiento, etc.), así como el método concreto (investigación en acción, experimentación, etc.), del mismo modo, al iniciar resolver un problema podemos usar la heurística.

Para este trabajo se analizarán las ecuaciones de equilibrio de Newton y la mecánica lagrangiana para el desarrollo del modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de la estructura tipo viga con el NS-NIDVA. Por otro lado, con el análisis modal y después de un tratamiento matemático, se obtendrá la función de respuesta en frecuencia (FRF) de la estructura tipo viga.

- Etapa 5. Resolución, validación y verificación: a) La resolución; mediante el análisis de casos de estudio y el proceso de imaginación y creatividad. b) Verificación; mediante la implementación de un prototipo que permite eliminar ambigüedades y verificar su corrección. c) Validación; mediante su aplicación en casos de prueba. d) Resolución V&V; heurística, control y monitoreo.

Mediante el uso de herramientas matemáticas, el modelo matemático es sometido a diferentes consideraciones físicas y matemáticas lógicas y posibles que demuestren la efectividad del método contemplado.

- Etapa 6. Análisis de resultados y elaboración de conclusiones: Se trata de contrastar la hipótesis (contrastación de los requerimientos) planteada al inicio de la investigación con los resultados obtenidos de ésta, se debe comprobar hasta qué punto se ha logrado los objetivos y en qué medida se ha resuelto el problema.

Una vez obtenidos los resultados analíticos o numéricos se comparan detalladamente con los reportados en la literatura y se plantea si los resultados obtenidos afirman o refutan la hipótesis. De igual manera, se evalúa si se cumplieron con los objetivos y metas planteadas al inicio de la tesis. De manera breve, se formulan ideas que enriquezcan al tema de investigación para trabajos futuros y como continuar con la investigación.

- Etapa 7. Redacción del informe final: Se plasma el resumen, método de investigación, conclusiones, bibliografía y cualquier otro dato de relevancia para la comprensión y evaluación.

Al concluir este trabajo de investigación, se realiza la redacción del documento de tesis. Este documento debe cumplir el objetivo fundamental de comunicar con mayor claridad y coherencia posible en los resultados, descubrimientos y análisis logrados a lo largo de todo el proceso de investigación.

Llevar a cabo eficientemente esta metodología facilitará la forma en que los resultados se podrán obtener, cada etapa es importante en la elaboración de este trabajo, ya que los pasos a seguir están colocados estratégicamente para que si una no se lleva a cabo no se podrá continuar con la formulación del proyecto, de esta manera al final del trabajo, los resultados serán favorables.

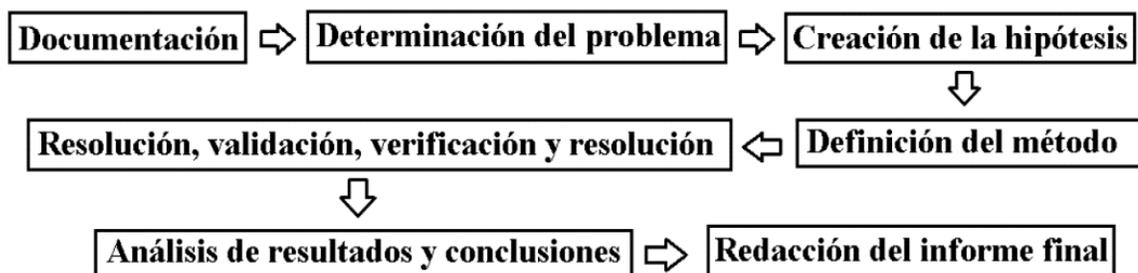


Figura 3. Metodología de la investigación [6].

1.8. Estructura de la tesis

El siguiente trabajo de tesis está dividido por seis capítulos, los cuales se describen a continuación:

- Capítulo 1: Se introduce el tema de investigación, teniendo como punto principal el control pasivo de las vibraciones mecánicas. Se presenta el planteamiento del problema, la justificación del mismo, la hipótesis, los objetivos, metas, limitantes y la metodología a seguir para el desarrollo de esta tesis.
- Capítulo 2: Se presenta el estado del arte, donde se detallan todos los hechos que han llevado a esta investigación, al igual que temas relacionados sobre los absorbedores dinámicos de vibración. Además, se hace referencia a los elementos importantes de esta investigación (el inersor y la rigidez negativa).

- Capítulo 3: Se expone el marco teórico, donde se presenta toda la teoría que se utilizará a lo largo del desarrollo de la tesis (leyes, teoremas, técnicas, definiciones y conceptos). Se lleva a cabo un repaso de los temas más importantes y relevantes, los cuales son: análisis modal y optimización de parámetros mediante método de puntos fijos extendido.
- Capítulo 4: Se describe el desarrollo matemático del modelo de la estructura tipo viga propuesta para este trabajo de tesis.
- Capítulo 5: Se presentan los resultados analíticos y numéricos obtenidos a través de las técnicas de optimización.
- Capítulo 6: Se da la conclusión de los resultados obtenidos en la realización de la tesis.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Absorbedores dinámicos de vibración

El absorbedor dinámico de vibración (DVA por sus siglas en inglés) es un dispositivo mecánico utilizado para la atenuación de vibraciones. Este dispositivo, supone una masa adicional a la del sistema al igual que efectos de rigidez y de amortiguamiento para disminuir la amplitud de vibración [7]. Un DVA se compone básicamente de dos partes principales: el sistema primario o estructura principal y el sistema secundario o el absorbedor, como se muestra en la Figura 4, de esta manera se logra un equilibrio dinámico entre los desplazamientos de la estructura principal y la estructura secundaria.

A lo largo de los años, se han propuesto diferentes metodologías para el diseño óptimo de los DVAs, en 1928, Ormondroyd y Den Hartog [8] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA, mediante la técnica de los puntos fijos, después de percatarse de la existencia de

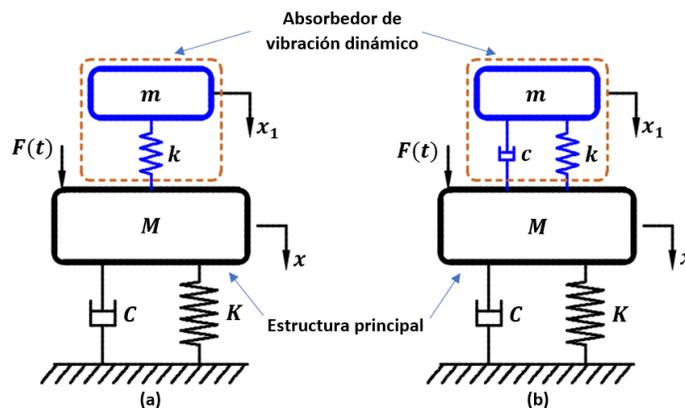


Figura 4. Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado [4].

las frecuencias invariantes. Posteriormente en 2005, Ozer y Royston [9] extendieron esta técnica a sistemas mecánicos de varios grados de libertad. Aplicando otro método, Asami et al. [10] y Nishihara y Asami [11, 12] utilizaron la optimización H_∞ y H_2 basados en la técnica de perturbación y el teorema de Vieta para el desarrollo de soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. Y en años recientes, en 2015, Argentini et al. [13] obtuvo soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA sujeto a fuerzas de excitación de desbalance rotatorio.

2.2. El inersor

El inersor es un nuevo elemento mecánico propuesto por el profesor Malcolm C. Smith de la Universidad de Cambridge, que se define como *un dispositivo mecánico que consta de dos terminales con la propiedad de que la fuerza aplicada en ellas es proporcional al producto de la constante de inercia con la aceleración relativa entre las terminales* [1]. El símbolo del inersor se muestra en la Figura 5.

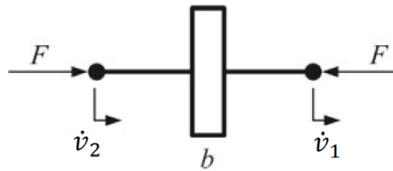


Figura 5. Símbolo del inersor [14].

La constante b en la ec. (2.1) se llama inercia con las unidades de kilogramos. La energía almacenada por el inersor se puede cuantificar como $\frac{1}{2} b (\dot{v}_2 - \dot{v}_1)^2$.

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (2.1)$$

Una de las mayores razones por las cuales fue propuesto el inersor es que la analogía que existe entre los sistemas mecánicos y eléctricos, es decir, fuerza-corriente estaba incompleta. Se sabe de sobra que los sistemas antes mencionados tienen dinámicas muy similares. Para el análisis de fuerza-corriente entre estos dos sistemas, la fuerza y la velocidad en el sistema mecánico son análogos con la corriente y voltaje en los sistemas eléctricos respectivamente. Por igual el resorte y amortiguador en los sistemas mecánicos pueden ser la resistencia y el inductor en el sistema eléctrico respectivamente. La analogía detallada de fuerza-corriente se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 1. Analogía electromecánica [14].

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
Fuerza	Corriente
Velocidad	Voltaje
Tierra mecánica	Tierra eléctrica
Energía cinética	Energía eléctrica
Energía potencial	Energía magnética
Resorte	Inductor
Amortiguador	Resistencia
Masa	Condensador a tierra

Sin embargo, carece de un dispositivo mecánico para anotar el condensador de los sistemas eléctricos. Según la Segunda Ley de Newton, la aceleración de la masa inercial es relativa a un punto fijo en el marco de inercia, es decir, la masa no es un genuino dispositivo de dos terminales. En si el elemento eléctrico que corresponde a la masa es un capacitor conectado a tierra, como se menciona en la Tabla 1.

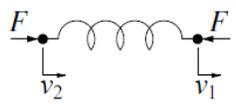
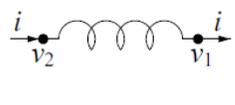
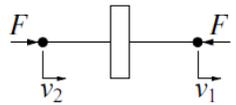
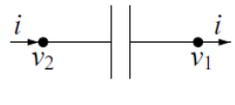
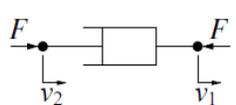
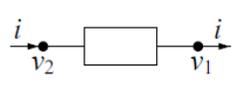
Mecanica	Electrica
 $Y(s) = \frac{k}{s}$ $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$ Resorte	 $Y(s) = \frac{1}{Ls}$ $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$ inductor
 $Y(s) = bs$ $F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ Inersor	 $Y(s) = Cs$ $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ capacitor
 $Y(s) = c$ $F = c(v_2 - v_1)$ Amortiguador	 $Y(s) = \frac{1}{R}$ $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$ resistor

Figura 6. La nueva correspondencia entre redes mecánicas y eléctricas [14].

Debido a esta restricción se propone el inersor. A partir de la definición que se mencionó, se denota que el inersor es un dispositivo genuino de dos terminales que tiene una dinámica similar con el capacitor. Al proponer este dispositivo, se completa la analogía fuerza-corriente, y las redes mecánicas resorte-amortiguador-inersor se pueden representar directamente como redes eléctricas inductor-resistor-capacitor. En la Figura 6 se muestra una nueva correspondencia después de proponer el inersor.

2.2.1. Implementaciones del inersor en la industria automotriz

En la literatura [15], existen algunas implementaciones que se han hecho acerca del inersor en la industria automotriz, en la Figura 7 se muestra una suspensión de automóvil en la cual se utilizó el inersor, con la finalidad de minimizar las vibraciones en la cabina de pasajeros.

Con esta implementación logró demostrar la reducción de las vibraciones que se perciben en el automóvil, tal como se muestra en la Figura 8, en la cual se puede ver la densidad espectral de potencia (PSD por sus siglas en inglés) en la aceleración del vehículo y el desplazamiento de la suspensión.

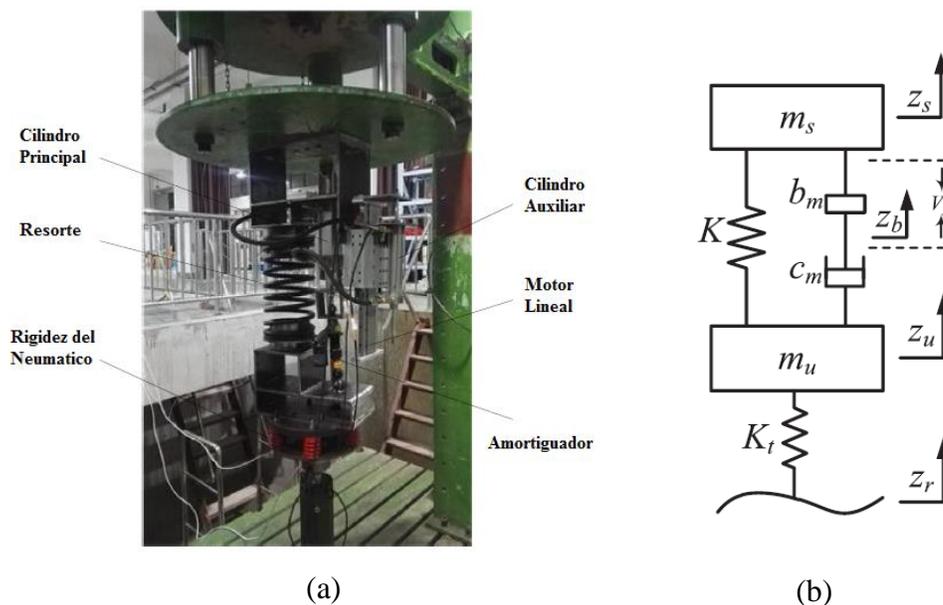
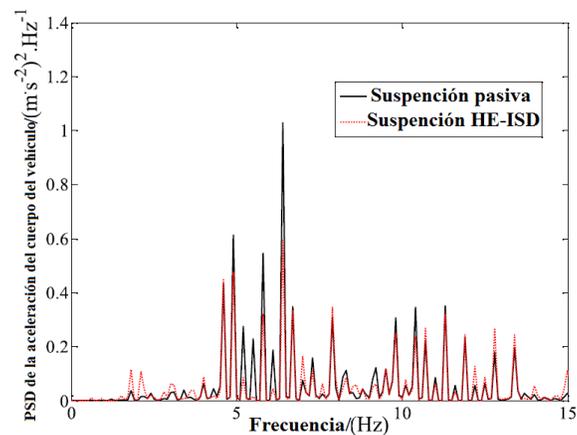


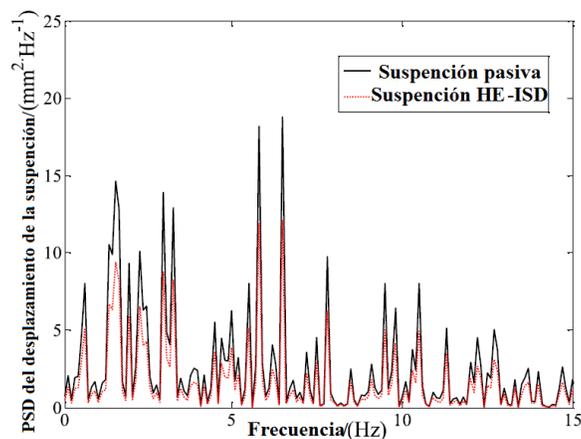
Figura 7. (a) Banco de pruebas de la suspensión de un automóvil para la implementación del inersor. (b) Modelo de la suspensión con inersor [15].

De esta manera se comprobó la eficiencia de usar el inersor, en la aceleración se logró disminuir en un 0.29%, 0.64% y 0.55%, en velocidades de 10 m/s, 20 m/s, y 30m/s respectivamente, que a pesar de ser pequeña la reducción, se logró un porcentaje mayor a la suspensión clásica. En cuanto al desplazamiento la minimización es más notable, ya que se logró una reducción de 18.02%, 19.97% y 19.95% con respecto a la suspensión clásica.

Con estos resultados experimentales se validaron aún más las ventajas del uso del inersor en las suspensiones activas y pasivas en el automóvil. Los resultados que presenta este artículo son favorables, de igual manera, en la literatura dentro y fuera del ámbito automotriz valida el uso de los inersores para la mitigación de las vibraciones.



(a)



(b)

Figura 8. (a) PSD de la aceleración del cuerpo del vehículo, (b) PSD del desplazamiento de la suspensión [15].

2.3. Redes mecánicas

Las redes mecánicas son una parte fundamental en el análisis de las DVAs, existen diferentes configuraciones entre dos terminales a y b en las que se pueden implementar los inersores, amortiguadores y resortes. En la Figura 9 se muestran los más representativos [16, 17]. Así, estas se le conocen como aislador de vibración basado en inersores (IDVA por sus siglas en inglés).

- C_1 → arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.
- C_2 → arreglo en serie de un inersor y un amortiguador.
- C_3 → arreglo en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador.
- C_4 → arreglo en serie de un inersor con un arreglo en paralelo de un resorte y un amortiguador.
- C_5 → arreglo en serie de un amortiguador con un arreglo en paralelo de un resorte y un inersor.
- C_6 → arreglo en serie de un resorte con un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador.

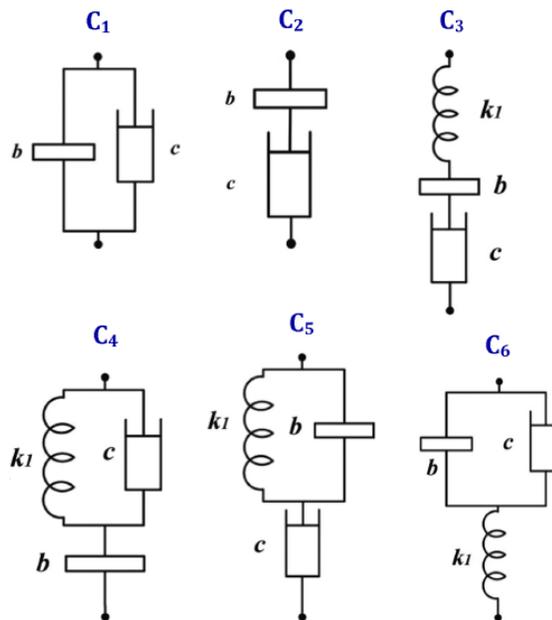


Figura 9. Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores. Dónde: “b” es la inercia, “c” es el coeficiente de amortiguamiento y “k₁” es la constante del resorte [16, 18].

2.4. Absorbedores de vibración dinámicos no tradicionales

Los absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales (NDVAs por sus siglas en inglés), como su nombre lo dice, son absorbedores no clásicos, es decir, en esta configuración un amortiguador viscoso lineal se conecta directamente a tierra en lugar del sistema principal (Figura 10). En la literatura se ha demostrado que este sistema no tradicional de NDVAs tiene una mejor respuesta en la minimización de la amplitud máxima del sistema principal sujeto a excitación armónica, en comparación con el sistema tradicional de DVAs. Wong y Cheung [19], a partir de la técnica de los puntos fijos, obtuvieron parámetros óptimos que minimizan la vibración en el sistema principal en respuesta a la excitación armónica en la base. Asimismo, Cheung y Wong [20, 21], utilizaron los criterios de rendimiento H_∞ y H_2 para la optimización de los parámetros para un NDVA.

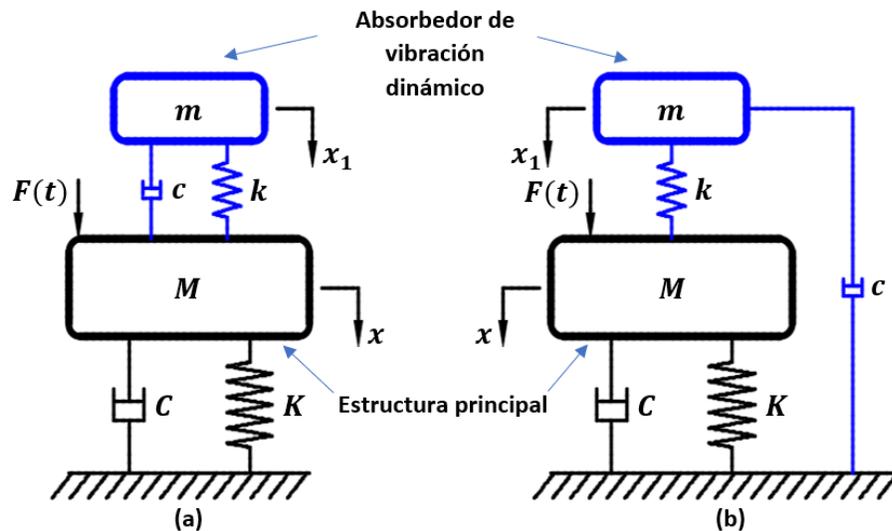


Figura 10. Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional [4].

2.5. Absorbedores dinámicos de vibración no tradicionales basados en inersores.

Son sistemas de DVAs que tienen un arreglo no tradicional, estos presentan una red mecánica que contienen inersores, resortes de rigidez positiva y amortiguadores de fluido viscoso, todos estos

elementos están implementados en un solo sistema que se denomina como absorbedores de vibración dinámica no tradicionales basado en inersores (Figura 11) (NIDVAs por sus siglas en inglés) [22]. Este sistema tiene todas las ventajas de cada uno de sus elementos constituidos en uno solo, disminuyendo sus desventajas y aumentando su eficiencia.

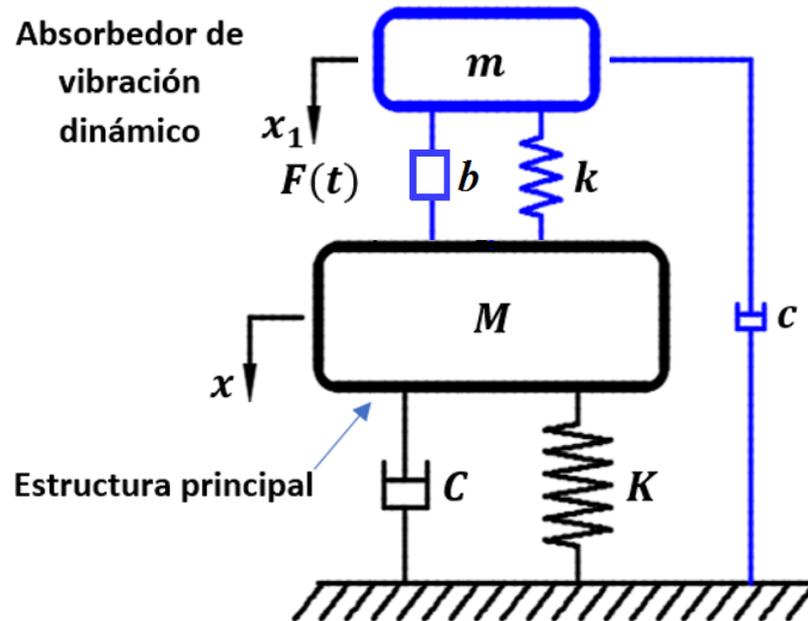


Figura 11. Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor (NIDVA)[22].

Con la implementación simultánea del dispositivo inersor y el concepto de absorbedor dinámico no tradicional, el rendimiento de DVA mejora en cierta medida. Sin embargo, con la creciente demanda de la disminución de vibraciones, el rendimiento de los DVAs es cada vez más difícil de satisfacer a las crecientes necesidades de la práctica de la ingeniería. Con el fin de mejorar el rendimiento del DVA, es interesante la introducción simultánea de rigidez negativa e inercia.

2.6. Rigidez negativa

En el año 2004, Wang y Lakes [23] realizaron investigaciones sobre las propiedades y la condición de estabilidad del sistema de rigidez negativa, demostrando que el sistema de vibración con el efecto de rigidez negativa tiene las ventajas de una frecuencia natural baja, una gran capacidad de carga y un efecto de aislamiento de vibración a favor. Por lo tanto, en los últimos

años, ha ido en aumento la aplicación de elementos de rigidez negativa en la reducción de vibraciones. De igual forma en 2004, Platus [24], hizo realidad el desarrollo de sistemas de aislamiento de vibraciones altamente efectivos. Los investigadores han realizado numerosas exploraciones sobre la viabilidad de la rigidez negativa. Los dispositivos de rigidez negativa se han logrado con una variedad de estructuras mecánicas. Hasta ahora, Le y Ahn [25], limitaron la aplicación de dispositivos de rigidez negativa limitado al aislamiento de vibraciones de equipos pequeños y altamente sensibles y de asientos de automóviles. El excelente rendimiento de la rigidez negativa en la reducción de vibraciones también se verifica mediante experimentos.

En términos generales, la rigidez negativa es fácil de implementar y se puede lograr de muchas formas, como un elemento con una pre-carga o el péndulo invertido [26]. Sarlis et al. [27] describe el dispositivo de rigidez negativa y sus componentes, presenta modelos analíticos y computacionales de su comportamiento y presenta resultados experimentales de componentes en bancos de pruebas que validan los modelos analíticos y computacionales, los cuales fueron aplicados a estructuras masivas, como edificios y puentes.

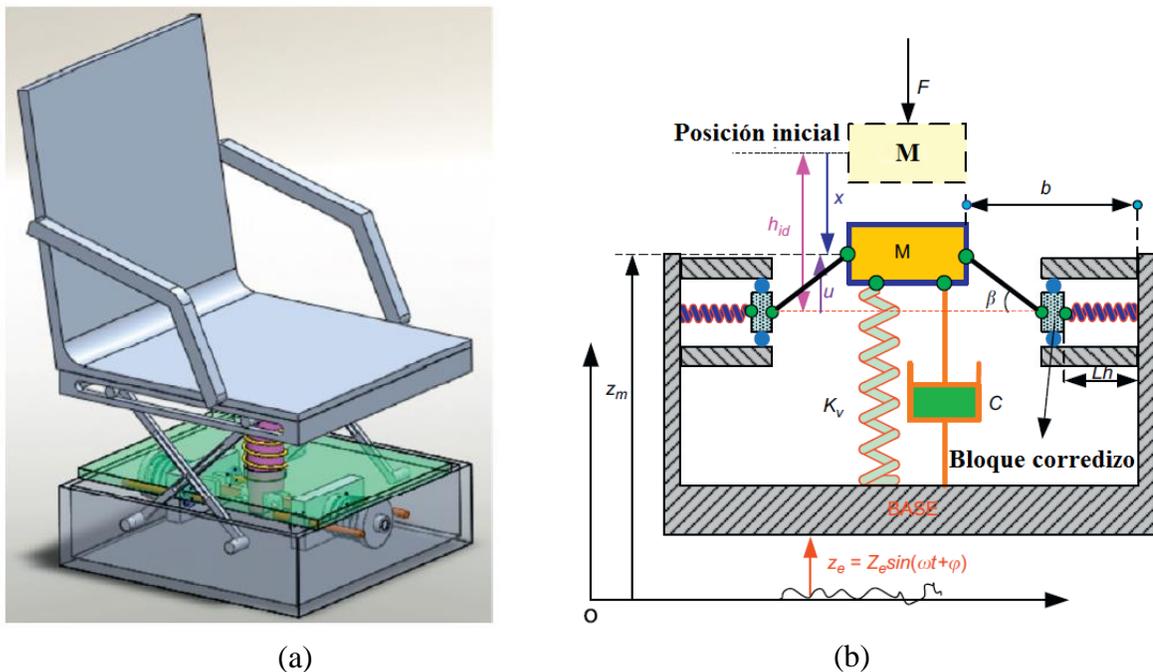


Figura 12. (a) Modelo de asiento con suspensión utilizando el sistema de aislamiento propuesto, y (b) la representación esquemática del sistema de aislamiento [28].

2.6.1. Implementaciones de la rigidez negativa en la industria automotriz

En artículos científicos se pueden encontrar diversas implementaciones que ha tenido la rigidez negativa en el ámbito automotriz, tal es el caso de Thanh et al. [28], quienes propusieron un modelo experimental de un asiento de automóvil, en el cual, implementaron la rigidez negativa para la supresión de las vibraciones a baja frecuencia.

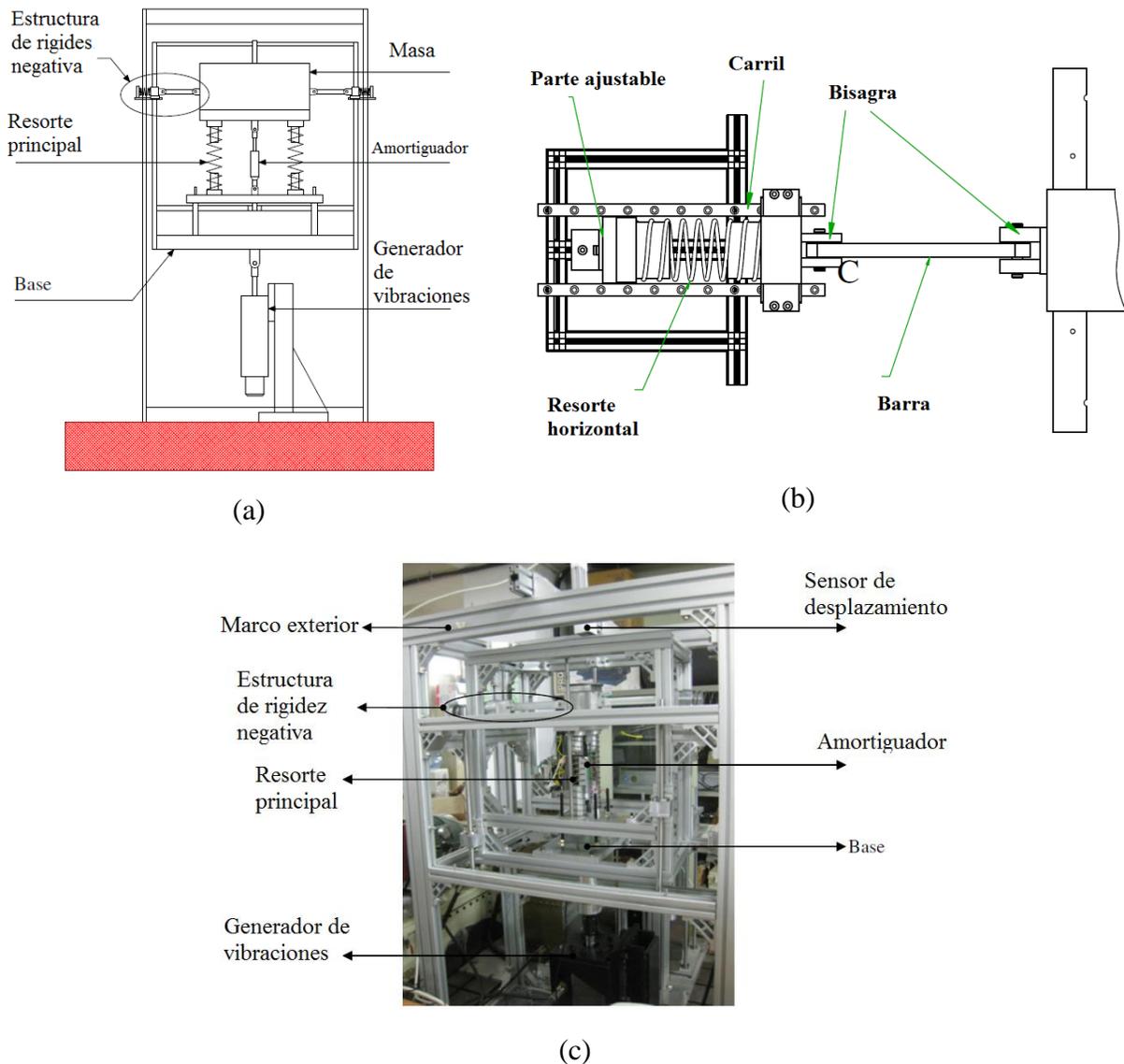


Figura 13. Banco de pruebas del sistema propuesto, (a) sistema experimental, (b) sistema de rigidez negativa, y (c) fotografía del sistema experimental [28].

En la Figura 12 se muestra el modelo de la suspensión y el esquema del modelo donde se usa el sistema de supresión de vibraciones. Luego, en la Figura 12 (a), se puede observar el modelo completo en 3D de cómo queda el sistema implementado, donde los resortes horizontales son en los que se implementa la rigidez negativa, mientras que en la Figura 12 (b), se observa la representación de cuerpo libre del sistema a implementar, donde por consecuencia se muestran los resortes de rigidez negativa en horizontal.

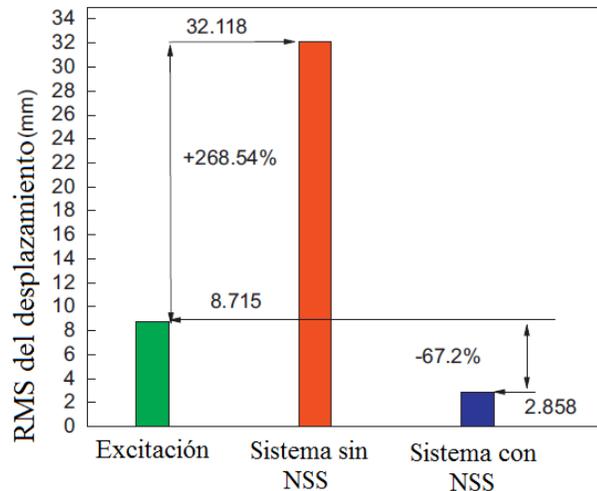


Figura 14. Valor RMS del desplazamiento de la masa por una excitación aleatoria [28].

De esta manera, en la Figura 13 se puede observar el banco de pruebas experimentales, en el cual se encuentra sistema a implementar, los detalles de la estructura que contiene la rigidez negativa y una fotografía del aparato experimental.

Con este sistema implementado se logró demostrar una reducción del 67.2% de la excitación que sufrió el sistema externamente, se puede observar esta reducción en la Figura 14.

6.7. Estructuras tipo viga

Con el paso de los años se han hecho diversas investigaciones en las cuales se han mejorado los sistemas tradicionales de amortiguamiento de estructuras tipo viga, una de estas investigaciones es de Hartog [29], quien realizó una optimización para los aisladores dinámicos de vibración (DVA) tradicionales. Se basó en puntos fijos o puntos invariantes con respecto a la relación de

amortiguamiento, de esta manera obtuvo expresiones matemáticas óptimas para los parámetros del DVA mejorando la respuesta dinámica del sistema primario.

Cuando se iniciaron a construir las estructuras elevadas (en el año 1969) se comenzaron a implementar los sistemas de aislamiento vibratorio o de amortiguamiento. Por igual en el mismo año estos sistemas se implementaron en la industria automotriz en el sistema de suspensión básicamente. En 1977 Jacquot [30], tomó como base los DVA para eliminar la respuesta excesiva de vibración de una viga en cantiléver sujeta a una fuerza armónica, este autor observó que dependiendo de en qué lugar se coloque el aislador dinámico éste generaba un pequeño cambio en la respuesta en frecuencia del sistema, generado por la masa del aislador dinámico.

En 1991 Manikanahally [31] en su estudio minimizó la respuesta de la viga a una distribución de cargas armónicas y sentó las bases para optimizar el diseño de los absorbedores dinámicos de vibración. Por otra parte, Jacquot [32] consideró un sistema de amortiguamiento viscoso en una viga en cantiléver excitada por una fuerza armónica que fue colocada en diferentes puntos a lo largo de la longitud de la viga. El objetivo del estudio de Raymond, fue determinar la ubicación óptima del sistema de amortiguamiento, para cada punto donde se colocó la fuerza de excitación del sistema. De los resultados obtenidos, se concluyó que la mejor posición para la ubicación del sistema de amortiguamiento, es en el 70% de la longitud de la viga tomando como referencia el extremo empotrado de la viga.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Estructuras tipo viga

3.1.1. Método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales

He [33] propone un método útil para representar un modelado matemático de estructuras tipo viga es el método de separación de variables para ecuaciones diferenciales. En la Figura 15 se muestra una estructura tipo viga que está sometida a una carga y su diagrama dinámico.

Mazón [3] aplicó la segunda ley de Newton en la ecuación de momento con respecto al eje y , se puede obtener el modelo matemático del comportamiento vibratorio de una viga sometida a una fuerza de excitación $f(x, t)$ como se muestra en la ec. (3.1):

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (3.1)$$

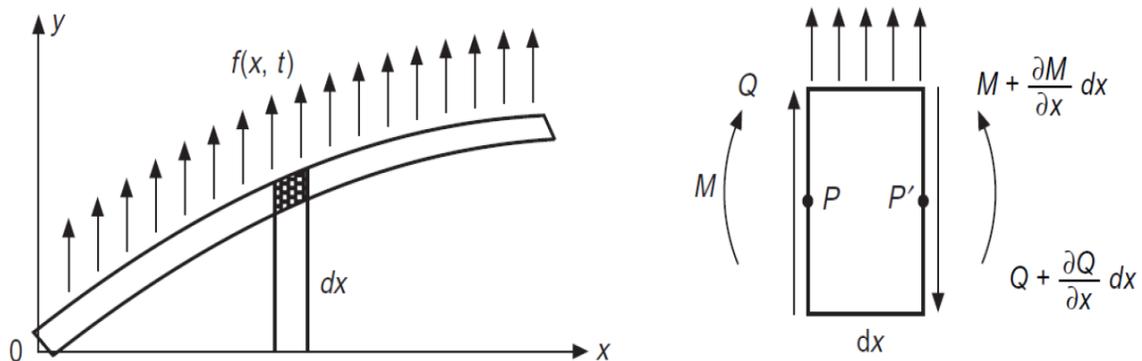


Figura 15. Elemento diferencial de la viga y diagrama de esfuerzos [3].

3.1.2 Análisis modal

El análisis modal que propone Mazón [3], se basa en que la respuesta vibratoria de un sistema dinámico lineal se puede representar por la combinación lineal de una serie de movimientos armónicos simples, denominados modos de vibración. Los modos de vibración son realmente importantes para un sistema dinámico, debido a que representan la forma de deflexión de un cuerpo de acuerdo a la frecuencia natural en la que se encuentra. Esta frecuencia natural depende de tres propiedades físicas del sistema, los cuales son: masa, rigidez y amortiguamiento, es decir, cada modo de vibración (Figura 16) está en función de su masa, rigidez y amortiguamiento.

Tomando por ejemplo una estructura tipo viga empotrada, ver figura 17, las ecuaciones que satisfacen las condiciones de frontera son las siguientes [3].

$$\int_0^{L_v} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = L_v; \quad \frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4\phi_i(x) \quad (3.2)$$

Donde L_v es la longitud de la viga, $\phi(x)_i$ es la función del i -ésimo modo de vibración y β_i es el valor propio de la ecuación característica del sistema tipo viga. Considerando las condiciones de frontera de la estructura tipo viga doblemente empotrada la expresión de la función modal es [3]:

$$\phi_i(x) = \sqrt{2} \sin(x\beta_i) \quad (3.3)$$

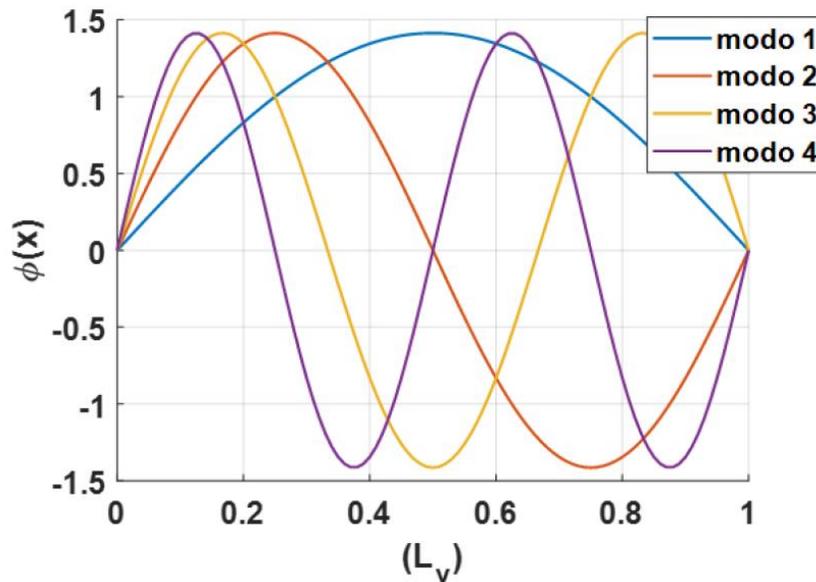


Figura 16. Modos de vibración normalizados de una estructura tipo viga empotrada [3].

De la misma manera, para los valores propios [3]:

$$\beta_i = \frac{i\pi}{L_v} \quad (3.4)$$

De esta manera los modos de vibración de un sistema tipo viga empotrada se observan en la Figura 16. Los modos de vibración, también dependen de las propiedades físicas del sistema (masa, rigidez y amortiguamiento), donde cada modo de vibración es función de una masa, rigidez y amortiguamiento modal (parámetros modales) [33].

3.2. Optimización

En la literatura [27, 35] existen muchos métodos para realizar la optimización, estos métodos se dividen principalmente en métodos clásicos y métodos modernos. Mazón [3] investigó y se dio cuenta que las técnicas de optimización clásicas tienen un alcance limitado en la aplicación práctica, sin embargo, el estudio de los métodos por medio de cálculo de optimización, formó las bases para el desarrollo de la mayoría de técnicas numéricas de optimización, la teoría de los puntos fijos o Den Hartong, es una de estas teorías clásicas. Mazón [3] propuso lo siguiente, los métodos modernos son métodos numéricos basados en características y comportamientos biológicos, moleculares, sistemas neurobiológicos entre otros aspectos [3]. A continuación se mencionan algunos de los métodos:

- Algoritmos genéricos.
- Optimización de enjambre de partículas.
- Optimización de colonia de hormigas.
- Optimización difusa.
- Métodos basados en redes neuronales.

Estos métodos se han desarrollado en los últimos años y se han popularizado para resolver problemas de ingeniería complejos únicamente implementando la función a analizar. Para realizar la optimización de un sistema, se debe determinar la función objetivo, esta función se rige por la naturaleza del problema, abarcando las variables necesarias para realizar la minimización de la función. Sin embargo, en un problema práctico, las variables de diseño no pueden ser elegidas

arbitrariamente; están restringidas por las restricciones que representan limitaciones físicas de diseño [3].

3.2.1 Método de optimización de punto fijo

Barredo [36] expuso que la metodología de optimización del punto fijo, minimiza la amplitud máxima de la respuesta en frecuencia normalizada o adimensional de un sistema, esta teoría se basa en determinar mediante la respuesta en estado estable “puntos fijos” o puntos invariantes conforme a la relación de amortiguamiento, estos puntos se toman como base para optimizar las variables adimensionales del sistema, disminuyendo la amplitud de resonancia y mejorando la respuesta en frecuencia del sistema. En la literatura esta metodología es la más utilizada para optimizar DVA e IDVA, y será una base para el uso de mejoras en las IN-DVA.

Como ejemplo, considérese una estructura tipo viga conectada al IDVA, tal y como se muestra en la Figura 17. Donde $y(x, t)$, $q_d(t)$ y a son el desplazamiento de la viga, desplazamiento de la masa y la ubicación del sistema del IDVA respectivamente. Para el sistema de la Figura 17, la función de respuesta en frecuencia adimensional se puede expresar como [3]:

$$R(s) = \sqrt{\frac{(\psi\Omega^2 - T^2 + \Omega^2)^2 - (2\xi T\Omega)^2}{(\psi\Omega^2 - \psi\Omega^4 + T^2\Omega^2 - T^2 + \Omega^2 - 0^2 + \Phi_1^2(a)T^2\Omega^2\mu + \Phi_1^2(a)T^2\psi\Omega^2\mu)^2 + (2\xi(T\Omega^3 - T\Omega + \Phi_1^2(a)T\Omega^3\mu + \Phi_1^2(a)T\psi\Omega^3\mu))^2}} \quad (3.7)$$

Donde $\psi = \frac{b}{m}$, $\mu = \frac{m}{\rho AL_v}$, $T = \frac{\sqrt{k/m}}{\omega_n}$ y $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, son la relación de masa respecto al inersor, la relación de masa respecto a la viga, la relación de frecuencia respecto de la rigidez y la relación de amortiguamiento respectivamente.

En la Figura 18, se presenta el comportamiento dinámico del sistema obtenido de la ec. (3.7) para los valores de $T = 0.8$, $\psi = 0.2$, y $\mu = 0.1$ variando la relación de amortiguamiento ξ . Del comportamiento del sistema mostrado en la Figura 17, se observa que existen dos puntos P1 y P2 donde la relación de amortiguamiento no afecta al comportamiento del sistema y se conocen como puntos invariantes [28].

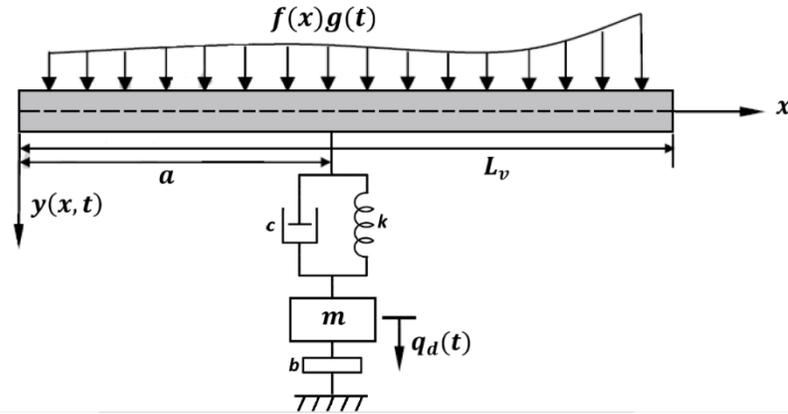


Figura 17. Sistema tipo viga conectada a un IDVA [3].

La ecuación de la ubicación de los puntos invariantes queda dada por la siguiente expresión [3]:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\mu T(1+\psi)\Phi_1^2(a)+T^2+\psi+1}{(\psi+1)(2+\mu(1+\psi)\Phi_1^2(a))} \mp \frac{\sqrt{(\Phi_1^2(a)\psi\mu+\Phi_1^2(a)\mu+1)^2 T^4+(-2\psi-2)T^2+(1+\psi)^2}}{(\psi+1)(2+\mu(1+\psi)\Phi_1^2(a))} \quad (3.8)$$

Para poder optimizar las variables se requiere que los puntos invariantes tengan la misma amplitud de respuesta. Por lo tanto, $\Omega_1^2 = \Omega_2^2$. En consecuencia, mediante operaciones

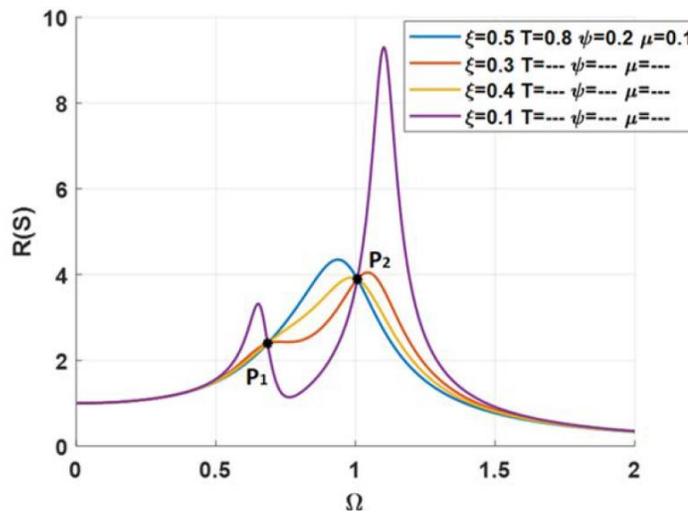


Figura 18. Comportamiento dinámico del sistema. P_1 y P_2 puntos invariantes del sistema [3].

matemáticas, se obtienen las expresiones matemáticas para las variables óptimas en función de μ y $\Phi_i(a)$ [3].

$$T_{opt} = \sqrt{\frac{(\psi+1)}{(1+\mu(\psi+1)\Phi_1^2(a))^2}}; \quad \psi_{opt} = \frac{1}{4} \frac{\left(-\sqrt{\Phi_1^2(a)\mu^2+8}\right)+(-\mu-4)\Phi_1(a)}{\Phi_1(a)} \quad (3.9)$$

De esta manera, con las consideraciones que se tuvieron anteriormente y el valor $\Phi_i(a)$ se obtiene T_{opt} y ψ_{opt} . En la gráfica que se muestra en la Figura 19 se puede apreciar que los puntos invariantes convergen en la misma amplitud de la respuesta del sistema, además, con la siguiente ecuación se obtiene el amortiguamiento óptimo, de modo que la respuesta dinámica de la función debe ser la más plana posible tomando como referencia los puntos invariantes [28]:

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\xi_{p1}^2 - \xi_{p2}^2}{2}} \quad (3.10)$$

En la Figura 19 se puede observar que el comportamiento dinámico del sistema con los valores óptimos, presenta un mejor comportamiento, es decir la respuesta de vibración es plana en todo el intervalo de frecuencias.

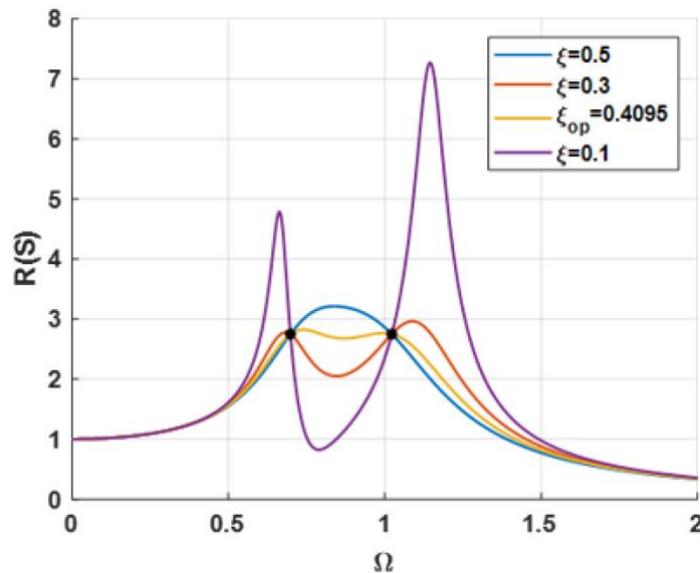


Figura 19. Comportamiento dinámico del sistema con ψ_{opt} , T_{opt} y ξ_{opt} comportamiento dinámico del sistema con relaciones de amortiguamiento diferentes al óptimo [3].

3.2.2. Técnica de los puntos fijos extendido

Esta metodología, es una extensión de la teoría de Den Hartog descrita por Barredo et al. en 2018 [37]. Se puede implementar para sistemas con IDVA más complejos o con más grados de libertad, ver Figura 20. Esta técnica se basa en modificar los puntos invariantes mediante la obtención de las variables óptimas respecto a las raíces características de los polinomios de la respuesta del sistema $R(s)$ y su magnitud H_m , es decir, $R(s) = H_m$.

De acuerdo a la respuesta en estado estable de la configuración descrita en la Figura 20, se obtienen dos polinomios, estos polinomios dependen de la cantidad de desplazamientos de la configuración a analizar, en este caso en particular los polinomios de la respuesta del sistema y la magnitud son de cuarto grado, lo que complica la obtención de sus raíces características de forma analítica [3]. La ecuación es la siguiente:

$$a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \quad (3.11)$$

Donde a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son los términos independientes del polinomio. De acuerdo a las fórmulas de Vieta, las posibles soluciones de la ec. (3.11) se presentan a continuación [3].

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{a_2}{a_1} \quad (3.12)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\gamma = \frac{a_3}{a_1} \quad (3.13)$$

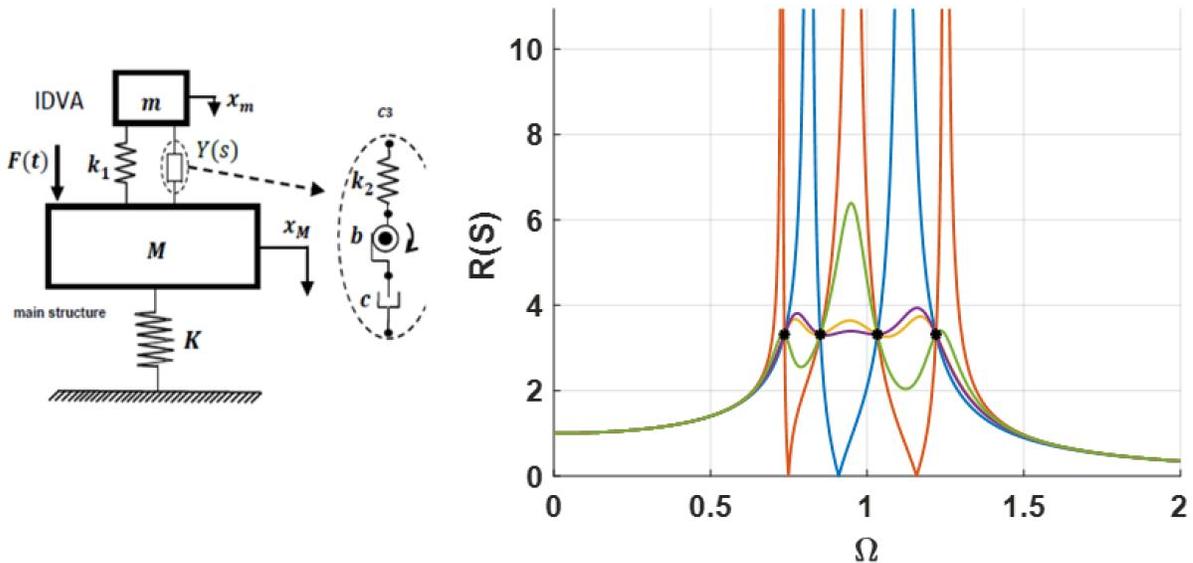


Figura 20. Configuración de un sistema IDVA y respuesta optimizada [3].

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{a_4}{a_1} \quad (3.14)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{a_5}{a_1} \quad (3.15)$$

Donde: α, β, γ y δ son las raíces características del polinomio. Al implementar estas fórmulas en la relación $R(s) = H_m$ se puede determinar cuatros soluciones para la magnitud H_m . Posteriormente, se determina una expresión para la relación de amortiguamiento considerando la teoría de Krenk. Está teoría consiste en determinar tres frecuencias invariantes en función del amortiguamiento cuando éste es $\xi = 0$ y $\xi = \infty$, tal y como se muestra en la Figura 21 [3].

De esta manera, conociendo las tres frecuencias invariantes del sistema se determina la relación de amortiguamiento óptima con la siguiente expresión matemática.

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\xi_{\Omega_1, \xi \rightarrow \infty}^2 + \xi_{\Omega_2, \xi \rightarrow \infty}^2 + \xi_{\Omega_0, \xi \rightarrow 0}^2}{3}} \quad (3.16)$$

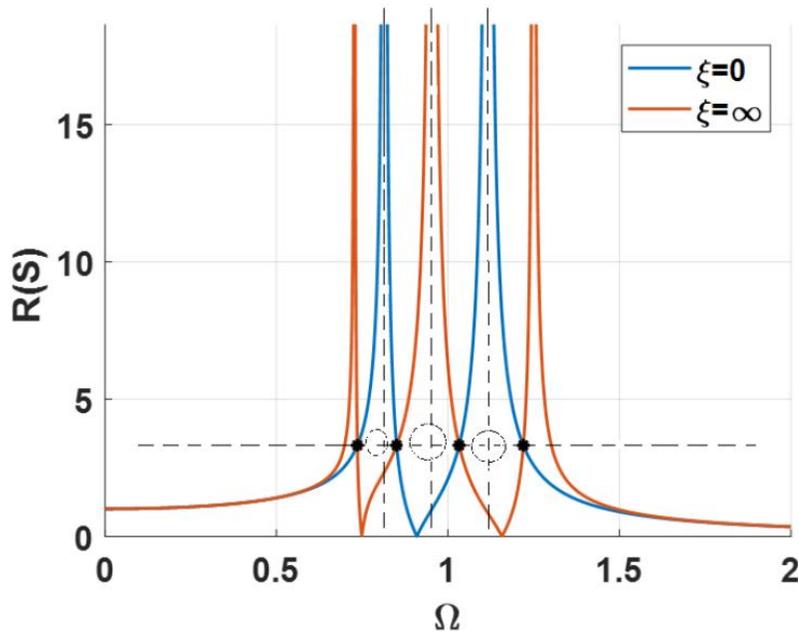


Figura 21. Frecuencias invariantes: $\Omega_{1, \xi \rightarrow \infty}, \Omega_{0, \xi \rightarrow 0}, \Omega_{2, \xi \rightarrow \infty}$ en función de la relación de amortiguamiento [3].

3.3. Aisladores dinámicos de vibración con inersores y rigidez negativa (IN-DVA)

3.3.1. Modelo de IN-DVA

En la literatura, Wang et al. [38], muestran cuatro modelos de IN-DVA (Figura 22), donde los cuatro modelos se obtienen considerando el inersor y la rigidez negativa conectados directamente a la masa del DVA y la tierra mecánica. Por conveniencia, lo denominan DIN, RIN, AIN y WIN, respectivamente.

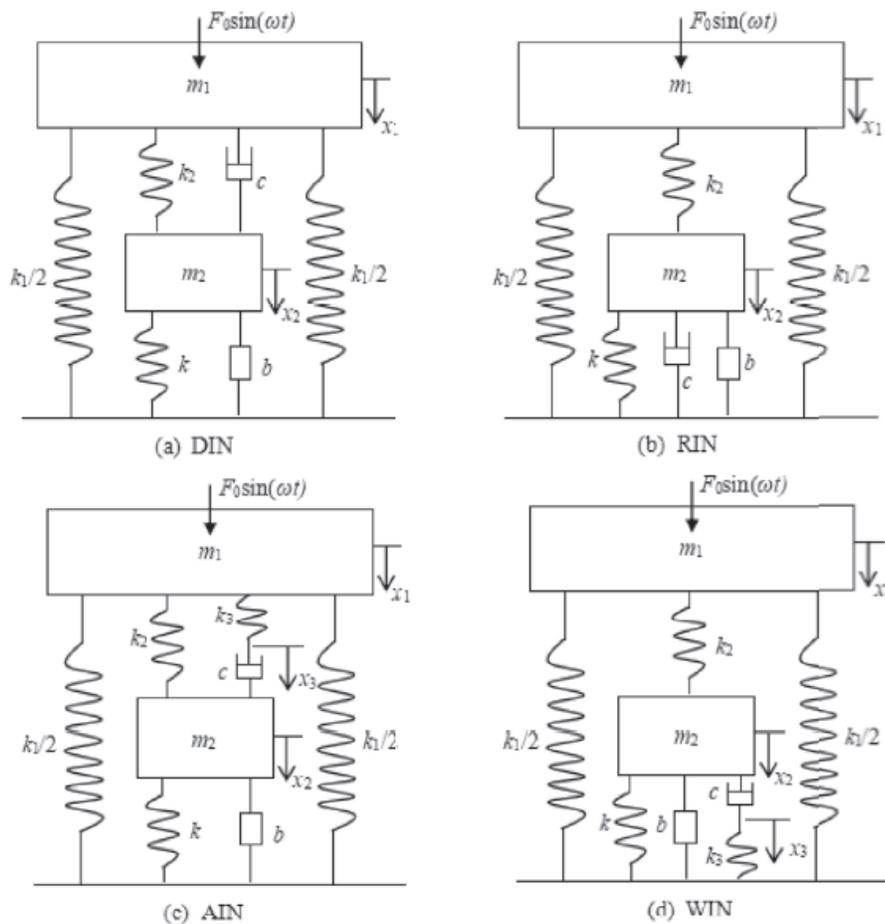


Figura 22. Modelos de IN-DVA's [38].

Las ecuaciones de movimiento para cuatro IN-DVA se pueden establecer cómo:

DIN:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \sin(\omega t) \\ (m_2 + b) \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

RIN:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \sin(\omega t) \\ (m_2 + b) \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c\dot{x}_2 + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

AIN:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_3) = F_0 \sin(\omega t) \\ (m_2 + b) \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + kx_2 = 0 \\ c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3(x_3 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

WIN:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \sin(\omega t) \\ (m_2 + b) \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + kx_2 = 0 \\ c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

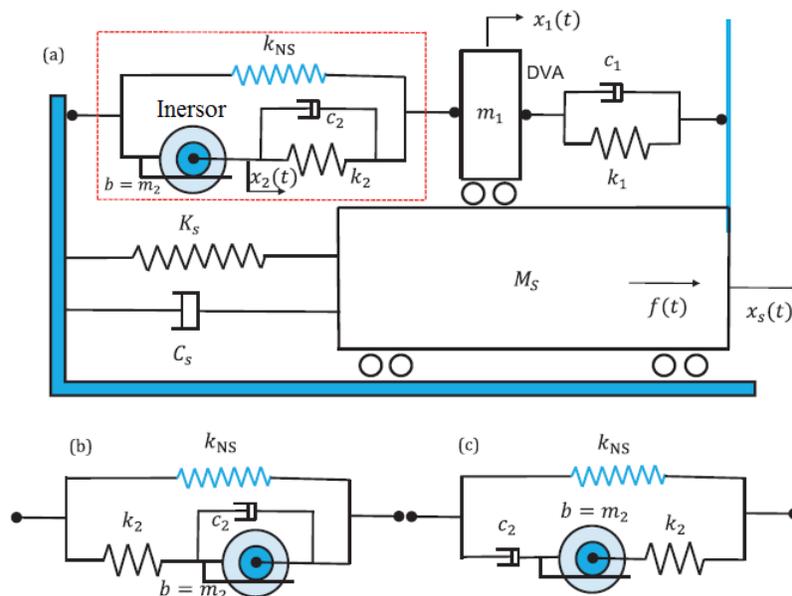


Figura 23. Absorbedor dinámico de vibración no tradicional basado en inersor con rigidez negativa (NS-NIDVA) aplicando las redes mecánicas C3 (c), C4 (a) y C6 (b) [5].

Donde m_1, m_2, k_1 y k_2 son las masas y los coeficientes de rigidez lineal del sistema primario y el DVA respectivamente. b es la inercia y k es el coeficiente de rigidez negativa del resorte, que están conectados directamente a tierra. c es la amortiguación del absorbedor. k_3 es el coeficiente de rigidez lineal del modelo viscoelástico de Maxwell que es el origen de dos elementos. x_1, x_2 y x_3 son el desplazamiento del sistema primario, el absorbedor y el punto de división del resorte y el amortiguador en el modelo de Maxwell, respectivamente. F_0 y μ son la amplitud y frecuencia de la fuerza de excitación, respectivamente [38].

De igual manera en la literatura ya se ha probado la funcionalidad de este sistema NS-NIDVA en la red mecánica C4, tal es el caso de Barredo et al. [5], quien propuso el DVA mostrado en la Figura 23, donde se observa la implementación de ambos conceptos de inercia y rigidez negativa, además, esta aplicada a la red mecánica C3, C4 y C6.

Para dar solución a el sistema propuesto por Barredo, utilizó el método de puntos fijos extendido, el criterio de Ruth-Hurwitz y el criterio de H_∞ para encontrar los parámetros óptimos, de esta manera lograr que la curva de respuesta en frecuencia del sistema (Figura 24) se haga una recta y sea la mínima posible.

En el artículo se demostró que el DVA con la red mecánica C4 tiene mayor eficiencia con alta inercia y baja rigidez a diferencia de la red mecánica C6 que trabaja mejor en baja inercia y alta rigidez, que para aplicaciones físicas es más fácil conseguir las propiedades que solicita la red mecánica C4. De esta manera, los autores determinaron que se puede lograr una mejora en la

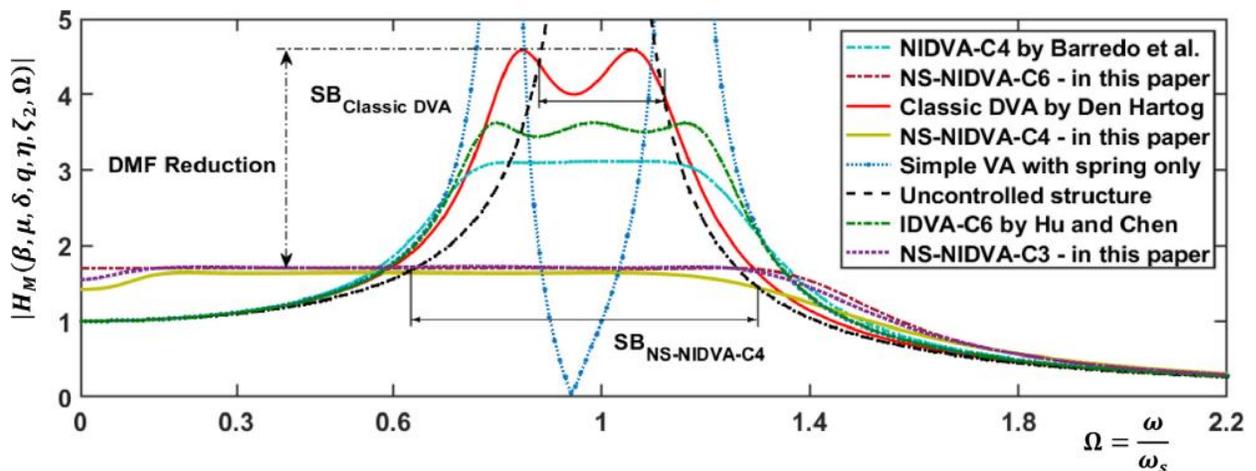


Figura 24. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia óptimas de los NS-NIDVA propuestos, NIDVA-C4, IDVA-C6 y DVA clásico [5].

reducción del factor de aumento dinámico de 64-85% con respecto a un DVA clásico sintonizado correctamente.

3.3.2. Parámetros de optimización

Ormondroyd y Hartog [39] describen que, la relación de sintonización óptima y la relación de amortiguación óptima del DVA se obtienen utilizando la teoría de los puntos fijos. De igual manera Wang [38], utiliza la teoría de los puntos fijos para optimizar IN-DVA [38].

(1) En el caso de que el sistema de vibración principal esté sujeto a excitación armónica, el objetivo es minimizar el factor de aumento de amplitud máxima (llamado norma H_∞) del sistema primario. Este es un problema de optimización de H_∞ .

(2) En el caso de que el sistema de vibración principal esté sujeto a excitación aleatoria, el objetivo es reducir la energía de vibración total del sistema en todas las frecuencias. En este criterio de optimización, el área (denominada norma H_2) bajo la curva de respuesta en frecuencia del sistema se minimiza. Este es un problema de optimización de H_2 .

(3) En el caso de que el sistema de vibración principal esté sujeto a excitación por choque, el objetivo del criterio de maximización de la estabilidad es mejorar la vibración transitoria del sistema. Este es un problema de máxima estabilidad.

3.4. Teorema de Vieta

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y grado ≥ 1 . Igualándolo a cero se tiene la ec. (3.21).

$$f(x) = 0 \tag{3.21}$$

que se llama ecuación algebraica. En esta ecuación la x representa un número desconocido que la satisface, es decir, que sustituido en $f(x)$ da cero como resultado. Cualquier número que satisface la ecuación propuesta se llama raíz; el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar todas sus raíces. Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ a menudo se llaman raíces del polinomio $f(x)$. Si

el grado del polinomio es n se dice que la ecuación correspondiente es de grado n . De acuerdo a que sea $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, etc. Se tiene la ecuación de la forma [40]:

$$a_1x + a_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.23)$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.24)$$

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.25)$$

Se supone que el coeficiente principal de mayor grado es distinto de cero, aun cuando ninguna condición se impone a los otros coeficientes.

Para algunos cálculos basta con dar una aproximación a dicha solución, en cambio cuando se realiza un procedimiento para encontrar las raíces de forma analítica, es posible descubrir y ligar más información relacionada a las propiedades que caracterizan el problema, el mejor caso son las llamadas ecuaciones de Vieta.

Para emplear las ecuaciones de Vieta se considera un polinomio mónico ($a_n = 1$) de la forma [4]:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.26)$$

La ec. (3.26) contiene n raíces x_1, x_2, \dots, x_n . Estas raíces pueden encontrarse con base en los términos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ independientes del polinomio.

Generalizando las soluciones de la ec. (3.26) y relacionándola con los términos independientes se tienen [41]:

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_n) \quad (3.27)$$

$$a_{n-2} = (x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \quad (3.28)$$

⋮

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j} \quad (3.28)$$

⋮

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \quad (3.29)$$

Para el caso de una ecuación cuártica, es decir, con $n = 4$ [4].

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.30)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.30) se pueden expresar en términos de las sumas y productos de sus raíces x_1, x_2, x_3, x_4 las cuales se expresan como:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.31)$$

$$a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \quad (3.32)$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3 + x_2x_3x_4) \quad (3.33)$$

$$a_0 = (x_1x_2x_3x_4) \quad (3.34)$$

Barredo et. al. [5], para el caso de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersores y rigidez negativa (NS-NIDVA), propusieron una nueva metodología basándose en las fórmulas de Vieta para la obtención de parámetros óptimos de estos absorbedores de vibración no tradicionales.

El uso del teorema de Vieta y la equiparación de la suma y el producto de las raíces reales para ambas ecuaciones de cuarto grado proporciona las condiciones necesarias y suficientes para producir una compensación en las frecuencias invariantes. Esto resulta en la ecuación (3.35) [5].

$$\left. \begin{aligned} G_{1,C_i}(\beta, \mu, \delta, q, \eta) &= \sum_{\substack{i=1 \\ @S_{1,C_i}(\mu, \beta, \delta, q, \eta)}}^4 \Omega_{i, \zeta_2 \rightarrow 0}^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ @S_{1,C_i}(\mu, \beta, q, \eta)}}^4 \Omega_{i, \zeta_2 \rightarrow \infty}^2 = 0 \\ G_{2,C_i}(\beta, \mu, \delta, q, \eta, |H_M|) &= \sum_{\substack{i,j \\ i < j \\ @S_{2,C_i}(\mu, \beta, \delta, q, \eta)}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta_2 \rightarrow 0} - \sum_{\substack{i,j \\ i < j \\ @S_{2,C_i}(\mu, \beta, q, \eta, |H_M|)}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta_2 \rightarrow \infty} = 0 \\ G_{3,C_i}(\beta, \mu, \delta, q, \eta, |H_M|) &= \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k \\ @S_{3,C_i}(\mu, \beta, \delta, q, \eta)}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2)_{\zeta_2 \rightarrow 0} - \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k \\ @S_{3,C_i}(\mu, \beta, q, \eta, |H_M|)}}^4 (\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2)_{\zeta_2 \rightarrow \infty} = 0 \\ G_{4,C_i}(\beta, \mu, \delta, q, \eta, |H_M|) &= \prod_{\substack{i=1 \\ @S_{4,C_i}(\mu, \beta, \delta, q, \eta)}}^4 \Omega_{i, \zeta_2 \rightarrow 0}^2 - \prod_{\substack{i=1 \\ @S_{4,C_i}(\mu, \beta, q, \eta, |H_M|)}}^4 \Omega_{i, \zeta_2 \rightarrow \infty}^2 = 0 \\ G_{5,C_i}(\beta, \mu, \delta, q, \eta) &= \underbrace{|H_{NS-NIDVAs}(\beta, \mu, \delta, q, \eta)|^2}_{\text{constraint equation}} - \underbrace{|H_{\max}(\beta, q)|^2}_{\text{Optimal tuning magnitude}} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \forall \beta \in \mathbb{R}^+ \\ \forall q \in \mathbb{R}^- \\ i = 3, 4, 6 \end{array} \quad (3.35)$$

Resolviendo simultáneamente las primeras cuatro ecuaciones del conjunto (3.35), se obtienen los valores de los parámetros óptimos y las magnitudes óptimas necesarias para encontrar la solución de la ecuación, mientras que la quinta ecuación proporciona las condiciones necesarias para ajustar la rigidez negativa.

Capítulo 4

Modelo matemático

En este capítulo, se implementaron los aspectos teóricos descritos en el Capítulo 3. Se describe cómo se realizó el modelado matemático de la estructura tipo viga con el sistema NS-NIDVA, para que de esta manera se obtengan las ecuaciones necesarias para trabajar con la técnica de los puntos fijos extendida. El sistema de absorción de vibración, está constituido por un absorbedor de vibración dinámico que se conecta a la configuración en paralelo con conexión a tierra de una red mecánica basada en inersor y un resorte de rigidez negativa. Asimismo, la red mecánica basada en inersor está compuesta por la combinación en paralelo de resorte y amortiguador viscoso y éste en serie con el inersor.

4.1. Respuesta en frecuencia

Para el desarrollo del modelo matemático, se consideró una viga tipo Euler-Bernulli de longitud L sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$ (Figura 25), donde $f(x)$ es una función distribuida en el espacio y $g(t)$ una función determinística en el tiempo. Asimismo, se propone la configuración de un sistema de control pasivo de vibraciones basado en inersor y rigidez negativa (NS-NIDVA-C4) localizado en el punto $x = a$. La viga se encuentra en serie con un arreglo en paralelo de un resorte de magnitud k_1 y un amortiguador de magnitud c_1 , estos a su vez se encuentran conectados en serie al DVA (NS-NIDVA-C4) conectado a suelo (tierra mecánica). El DVA está compuesto por una configuración de una red mecánica tipo C4, esta red mecánica contiene una masa de valor m , un resorte de rigidez negativa k_{NS} , un amortiguador de fluido viscoso c_2 , un resorte de rigidez positiva k_2 , y por último, un inersor con inercia b . Para determinar el comportamiento dinámico

del inersor y el resorte con rigidez negativa, se propone una fuerza de excitación externa de tipo armónica. En el Apéndice A se muestra el análisis y desarrollo completo de la estructura.

Donde:

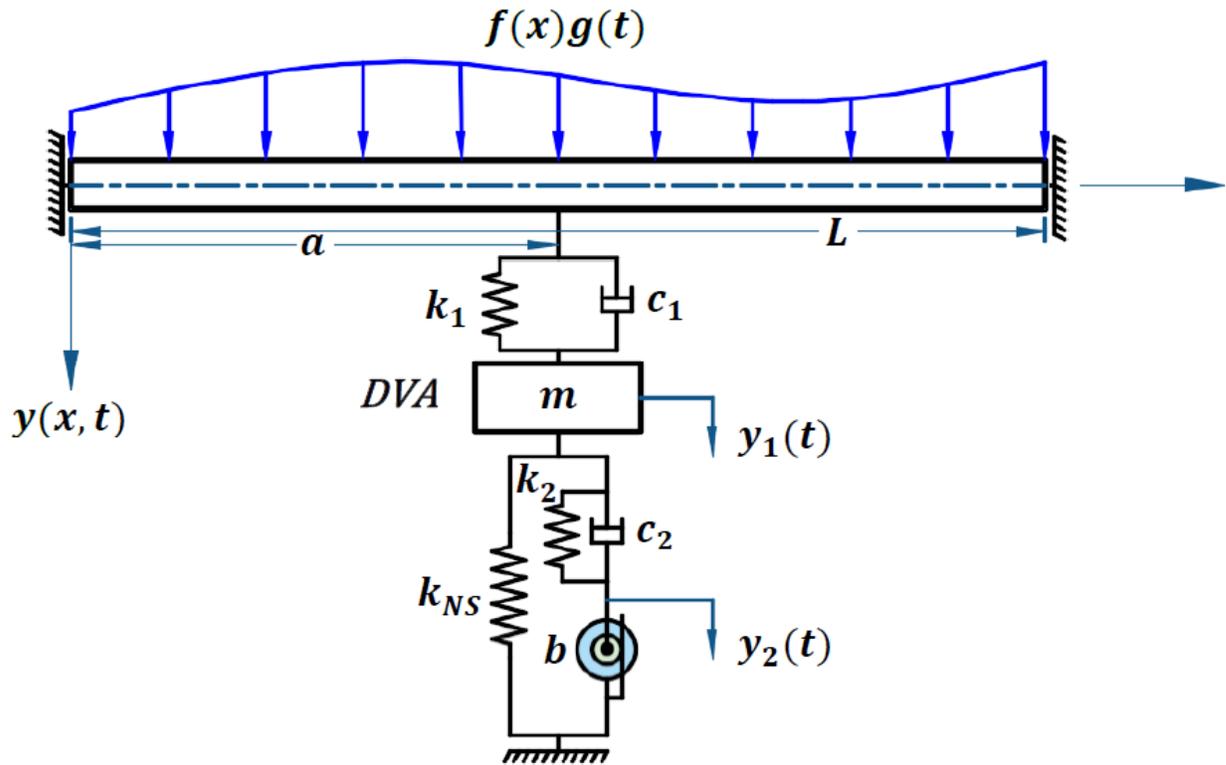


Figura 25. Esquema del modelo de viga conectada a un DVA propuesto para este trabajo.

$f(x)g(t)$	Carga distribuida
$y(x, t)$	Desplazamiento transversal de la viga
L	Longitud de la viga
m	Masa asociada al DVA
k_1	Rigidez correspondiente al resorte conectado a la viga
c_1	Magnitud correspondiente al amortiguador conectado a la viga
$y_1(t)$	Desplazamiento correspondiente a la masa m .

k_{NS}	Rigidez correspondiente al resorte de rigidez negativa de la red mecánica C4
k_2	Rigidez correspondiente al resorte de la red mecánica C4
c_2	Magnitud correspondiente al amortiguador de la red mecánica C4
$y_2(t)$	Desplazamiento correspondiente a la conexión superior del inersor
b	Valor de la inercia

Se determinó la ecuación en su forma generalizada que rige el movimiento dinámico del sistema de forma lateral utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, por lo tanto, ésta se puede describir como:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x)g(t) + \{c_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a,t)) + k_1(y_1(t) - y(a,t))\} \delta(x-a) \quad (4.1)$$

donde: A es el área de la sección transversal, I es el momento de inercia centroidal, ρ es a densidad de la masa, E es el módulo de elasticidad y $\delta(x-a)$ es la función delta de Dirac.

Con el uso del análisis modal, el desplazamiento de la vibración transversal de la viga $y(x,t)$, se puede aproximar mediante una serie de la forma:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \phi_i(x) \quad (4.2)$$

donde: $\phi_i(x)$ corresponde a la función modal del i -ésimo modo y puede determinarse solucionando el sistema como un problema de eigenvalores, satisfaciendo que:

$$\frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (4.3)$$

donde: β_i denota el eigenvalor del sistema. Sustituyendo la ecuación (4.2) y (4.3) en la ecuación (4.1) y posteriormente multiplicando por $\phi_i(x)$ y aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} EI\beta_i^4 y_i(t)\phi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho A\phi_i(x) = f(x)g(t) + \{c_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)) + k_1(y_1(t) - y(a, t))\}\delta(x - a) \quad (4.4)$$

Para determinar su respuesta en frecuencia del sistema, se consideró el caso donde el sistema se encuentra sujeto a una excitación armónica, de acuerdo con lo anterior, se supone que $g(t) = e^{j\omega t}$, por lo tanto, como el sistema es lineal, entonces, $y(t) = Y(\omega)e^{j\omega t}$ es la respuesta en función de la frecuencia de la viga, de igual manera, $y_1(t) = Y_1(\omega)e^{j\omega t}$ y $y_2(t) = Y_2(\omega)e^{j\omega t}$ son las amplitudes en frecuencia asociadas a los desplazamientos de la masa y el inersor del DVA respectivamente, mientras que j se denota como el número imaginario. Así, la respuesta en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga se puede expresar como:

$$y(x, \omega) = G_1(x, \omega) - \frac{G_2(a, \omega) \cdot G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H(\omega)} + G_1(a, \omega)} \quad (4.5)$$

Donde:

$$a_i = \int_0^L f(x)\phi_i(x)dx \quad (4.6)$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.7)$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.8)$$

$$H(\omega) = \frac{k_1((-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_2 + k_{NS})b + k_2 m)\omega^2 - I\omega c_2 k_{NS} - k_2 k_{NS})}{-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_1 + k_2 + k_{NS})b + k_2 m)\omega^2 - I(k_1 + k_{NS})c_2\omega - k_2(k_1 + k_{NS})} \quad (4.9)$$

Al evaluar la posición del NS-NIDVA-C4 en el punto $x = a$, se obtiene la expresión en términos de $Y(a, \omega)$. Por lo que $H(\omega)$ se puede escribir como:

$$H(\omega) = m\omega^2 J \quad (4.10)$$

Donde J esta dada por:

$$J = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2} \frac{k_1((-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_2 + k_{NS})b + k_2 m)\omega^2 - I\omega c_2 k_{NS} - k_2 k_{NS})}{-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_1 + k_2 + k_{NS})b + k_2 m)\omega^2 - I(k_1 + k_{NS})c_2\omega - k_2(k_1 + k_{NS})} \quad (4.11)$$

De esta manera los parámetros adimensionales que darán solución a la ecuación (4.5) son los mostrados en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Parámetros adimensionales y relación entre variables.

<i>Variables relacionadas</i>	<i>Parámetros adimensionales</i>	
$c_2 = 2 \cdot \zeta_2 \cdot m \cdot \omega_A$	$\alpha = \frac{k_{NS}}{k_1}$	$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$
$k_1 = m \cdot \omega_A^2$	$\mu = \frac{b}{m}$	
$k_2 = b \cdot \omega_C^2$	$\eta = \frac{\omega_A}{\omega_C}$	$q = \frac{\omega_1}{\omega_A}$

Donde:

ω_1 Frecuencia natural asociada a la viga

ω_A Frecuencia natural asociada a la masa

ω_C Frecuencia natural asociada al inersor

γ_i Relación de frecuencias naturales

ζ_2 Factor de amortiguamiento asociado al DVA

μ Relación de masas entre la masa y el inersor

q Relación de frecuencias no amortiguadas para la masa

η Relación de frecuencias no amortiguadas entre la masa y el inersor

Ω Relación de frecuencia forzada

α Relación de rigidez entre el resorte asociado a la viga y el resorte de rigidez negativa

Por lo tanto, la respuesta dinámica de la ecuación (4.11) en el dominio de la frecuencia en su forma adimensional es:

$$J = \frac{\left(\frac{1}{2}\mu q^4 \eta^2 \alpha + I \zeta_2 q^3 \alpha \Omega - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4\right) q^2}{\left(\frac{1}{2}\mu q^4 \eta^2 (\alpha + 1) + I \zeta_2 (\alpha + 1) \Omega q^3 - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha + 1) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4\right) \Omega^2} \quad (4.12)$$

Así, al sustituir la frecuencia de excitación del sistema se reescribe $H(\omega)$, como:

$$H(\omega) = m \cdot \omega_1^2 \cdot J \quad (4.13)$$

Donde J_1 se define como $J\Omega^2$.

Teniendo todo lo anterior y con las sustituciones correspondientes, la ecuación de la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se le aplica una fuerza de excitación armónica, es:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL \omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left(\frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right) \quad (4.14)$$

Por otra parte, la función de respuesta en frecuencia de la aceleración transversal de la viga cuando se tiene una excitación de tipo armónica, se puede expresar como:

$$S_a(x, \Omega) = -\omega_1^2 \Omega S(x, \Omega) \quad (4.15)$$

Se puede observar que la ecuación (4.15) también representa la respuesta en frecuencia del desplazamiento de la viga cuando se considera una excitación de tipo inercial.

Cuando se considera el primer modo de vibración ($\gamma_1 = 1$) del sistema de la Figura 25, la ecuación (4.14) se simplifica, obteniendo la respuesta en dominio de la frecuencia en forma compleja. Posteriormente, se determina el módulo de la respuesta compleja obteniendo la respuesta adimensional del sistema en el dominio de la frecuencia, la cual se expresa a continuación:

$$R(s) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (4.16)$$

Donde los coeficientes A, B, C y D se describen en el Apéndice B.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se describe cómo se obtuvieron las expresiones óptimas para cada una de las variables adimensionales del NS-NIDVA-C4, así como, la comprobación de la optimización realizada para el sistema con excitación armónica.

5.1. Técnica de los puntos fijos extendida

Tomando como base la metodología desarrollada por Barredo [34], se realizó la optimización del NS-NIDVA propuesto considerando como excitación una fuerza armónica y considerar la respuesta en estado estable.

La técnica de los puntos fijos extendida se basa principalmente en dos condiciones de operación del absorbedor. La primera condición es cuando el amortiguamiento es cero ($\zeta \Rightarrow 0$) y la segunda condición es cuando el amortiguamiento es infinito ($\zeta \Rightarrow \infty$). Al aplicar estas condiciones en la ecuación (5.1) se obtienen dos ecuaciones que son independientes de la relación de amortiguamiento.

$$R(s)^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (5.1)$$

Para un valor de relación de amortiguamiento de cero ($\zeta \Rightarrow 0$), la ecuación (5.1) se reduce a la siguiente expresión:

$$R(s)^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (5.2)$$

De igual forma, para un valor de relación de amortiguamiento infinito ($\zeta \Rightarrow \infty$), la ecuación (5.1) se reduce a la siguiente expresión:

$$R(s)^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (5.3)$$

Donde los coeficientes A, B, C y D se describen en el Apéndice B.

Al igualar la ecuación (5.2) con la ecuación (5.3) y eliminando el exponente de segundo grado en ambos miembros de la igualdad, se obtiene la siguiente expresión matemática (se añade un signo \pm enfrente del segundo miembro):

$$\frac{A}{C} = \pm \frac{B}{D} \quad (5.4)$$

Considerando la ecuación (5.4) con el signo positivo (y sustituyendo el valor de los coeficientes), se reduce a la siguiente expresión:

$$\Omega^4 \beta \mu q^4 \phi_1^2 = 0 \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) proporciona un resultado trivial, es decir, $\beta = 0, \mu = 0, q = 0$ y $\phi_1 = 0$. Cuando $\Omega = 0$ la amplitud del sistema es $Y(a, t)_{est}$ y es independiente del amortiguamiento, simplemente porque el sistema se mueve tan despacio que no se da oportunidad para la creación de una fuerza de amortiguamiento, esto porque el amortiguamiento es proporcional a la velocidad.

Ahora considerando el signo negativo de la ecuación (5.4), se obtiene una nueva ecuación la cual depende de $\alpha, \beta, \phi_1, \eta, \mu, \Omega$ y q , se denota por la ecuación (5.6) y que además esta igualada a cero.

$$\Theta_1(\alpha, \beta, \phi_1, \eta, \mu, \Omega, q) = 0 \quad (5.6)$$

Con la finalidad de reducir el grado de la ecuación (5.6) se realiza un cambio de variable dado por $\lambda = \Omega^2$, de igual manera, se convierte en un polinomio mónico al dividir toda la ecuación entre el coeficiente del término de cuarto grado, esto con la finalidad de utilizar el teorema de Vieta, así se obtiene la ecuación (5.7)

$$\Theta_{\lambda 1}(\alpha, \beta, \phi_1, \eta, \mu, \lambda, q) = 0 \quad (5.7)$$

Tomando en cuenta la ecuación (5.3), con $h = R(s)^2$, se tiene la siguiente expresión:

$$h = \frac{B^2}{D^2} \quad (5.8)$$

De esta manera, a la ecuación (5.8) se le aplica el mismo procedimiento que se llevó a cabo en la ecuación (5.6), esto con la finalidad de utilizar el teorema de Vieta, por lo tanto se obtiene una ecuación en la forma siguiente:

$$\Theta_{\lambda_2}(\alpha, \beta, \phi_1, h, \mu, \lambda, q) = 0 \quad (5.9)$$

Las funciones Θ se describen en el Apéndice B.

Se puede observar que las raíces de las ecuaciones (5.7) y (5.9) deben ser iguales, por lo tanto, utilizando el teorema de Vieta se igualan las sumas y los productos de las raíces entre las dos ecuaciones, las cuales están en función de los coeficientes del polinomio de la ecuación.

Entonces, la suma de las raíces reales de la ecuación cuártica (5.7) (coeficientes de λ^3), se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{(-2\beta\mu q^2\phi_1^2 - 2\eta^2\mu^2 q^2 - 2\beta q^2\phi_1^2 - 4\eta^2\mu q^2 - 2\alpha\mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 4\alpha q^2 - 2\mu q^2 - 4q^2 - 2\mu - 20)}{2\mu + 2} \quad (5.10)$$

Luego, la suma de las raíces reales de la ecuación cuártica (5.9) (coeficientes de λ^3) son:

$$\frac{2\left(-\beta(\mu+1)\phi_1^2 - \alpha - 1\right)q^2 - \mu - 1}{\mu + 1} \quad (5.11)$$

Igualando las ecuaciones (5.10) y (5.11) y resolviendo para q^2 se tiene la siguiente ecuación:

$$q^2 = \frac{\mu + 1}{\eta^2\mu^2 + (-\beta\phi_1^2 + 2\eta^2 + \alpha + 1)\mu - \beta\phi_1^2 + \eta^2} \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) es una condición necesaria pero no suficiente para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del NS-NIDVA-C4. Esta condición se puede lograr utilizando las ecuaciones del conjunto de ecuaciones de Vieta, las cuales se muestran en el Capítulo 3.

Del conjunto de ecuaciones del teorema de Vieta, la ecuación (4) (términos independientes de λ de las ecuaciones Θ_{λ_1} y Θ_{λ_2}), se obtiene la siguiente solución para h :

$$h = \frac{\Lambda_1}{\Psi_1} \quad (5.13)$$

Luego, la ecuación (3) del conjunto de ecuaciones del teorema de Vieta (coeficientes de λ de las ecuaciones Θ_{λ_1} y Θ_{λ_2}), se obtiene la siguiente solución para h :

$$h = \frac{\Lambda_2}{\Psi_2} \quad (5.14)$$

De la misma manera, la solución de la ecuación (2) del conjunto de ecuaciones del teorema de Vieta (coeficientes de λ^2 de las ecuaciones Θ_{λ_1} y Θ_{λ_2}), se obtiene la última solución para h :

$$h = \frac{\Lambda_3}{\Psi_3} \quad (5.15)$$

Igualando las ecuaciones (5.13) y (5.14), se tiene otra solución para q^2 , la cual se muestra a continuación:

$$q^2 = \frac{\Gamma_1}{Y_1} \quad (5.16)$$

Ahora igualando las ecuaciones (5.13) y (5.15), se obtiene la siguiente solución para q^2 que se muestra a continuación:

$$q^2 = \frac{\Gamma_2}{Y_2} \quad (5.17)$$

Las funciones $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Gamma_1, \Gamma_2, Y_1$ y Y_2 se describen en el Apéndice B.

Como se observa existen tres soluciones para q^2 (ecuaciones (5.12), (5.16), (5.17)). Para calcular los valores adecuados de μ y η se deben igualar las ecuaciones (5.12) y (5.16), cuyo resultado para η es:

$$\eta^2 = \frac{(2\beta\phi_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)\mu + 2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\mu + 1)^2(\alpha + 1)} \quad (5.18)$$

De la misma manera, el valor de η también se puede calcular igualando las ecuaciones (5.12) y (5.17), dando como resultado:

$$\eta^2 = \Phi \quad (5.19)$$

Con las ecuaciones (5.18) y (5.19) se obtiene el valor óptimo para μ para el NS-NIDVA-C4, entonces:

$$\mu_{opt} = \frac{2\beta\phi_1^2}{-2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1} \quad (5.20)$$

Al sustituir la ecuación (5.20) en la ecuación (5.18), se obtiene el parámetro óptimo η , entonces:

$$\eta_{opt} = \frac{-2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^{3/2}}, -\frac{-2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^{3/2}} \quad (5.21)$$

Por lo tanto el parámetro óptimo η para el NS-NIDVA-C4 es la raíz positiva, así:

$$\eta_{opt} = \frac{-2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^{3/2}} \quad (5.22)$$

Al sustituir las ecuaciones (5.20) y (5.21) en la ecuación (5.12), se obtiene el parámetro óptimo q para el NS-NIDVA-C4, por lo tanto:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{1}{-\beta\phi_1^2 + \alpha + 1}} \quad (5.23)$$

Teniendo las ecuaciones que no proporcionan los valores óptimos para el absorbedor, se sustituyen en la ecuación (5.13), y se obtiene el valor de h , entonces:

$$h = \frac{(\alpha + 1)^2(-\beta\phi_1^2 + \alpha + 1)^2}{\beta\phi_1^2(-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)} \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.24), h es la aproximación de la norma H_∞ . También, h es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes, por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$R(s)_{opt} = \sqrt{\frac{(\alpha + 1)^2(-\beta\phi_1^2 + \alpha + 1)^2}{\beta\phi_1^2(-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)}} \quad (5.25)$$

El conjunto de soluciones óptimas μ_{opt} , η_{opt} y q_{opt} , generan los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes de la viga. Estas soluciones óptimas están en términos de β , ϕ_1 y α , por lo tanto se establecen valores fijos para estas variables con el objetivo de encontrar soluciones numéricas para los parámetros óptimos del sistema y de esta forma visualizar los resultados obtenidos. Los valores numéricos propuestos se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Valores establecidos para cada una de las variables independientes.

Variable	Valor
β	= 0.1
ϕ_1	= $\sqrt{2}$
α	= -0.3

Mediante el uso de software matemático, se sustituye el conjunto de valores de la Tabla 5.1 en los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} y q_{opt} (ecuaciones (5.21)-(5.23)). Los resultados se muestran en la Tabla 5.2 considerando seis cifras significativas.

Tabla 5.2. Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos.

Parámetro	Valor
μ_{opt}	= 4.444444
η_{opt}	= 0.153672
q_{opt}	= 1.414213

Después de sustituir los valores numéricos de las Tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.2), se obtiene la FRF del sistema considerando un amortiguamiento igual a cero, es decir $\zeta \Rightarrow 0$, entonces:

$$R(\Omega) = \sqrt{\frac{(0.661 - 1.657\Omega^2 + \Omega^4)^2}{(0.054 + 0.071\Omega^2 + 1.999(1.028\Omega^2 - 0.828)\Omega^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2}} \quad (5.26)$$

De igual forma, al sustituir los valores de la Tabla 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.3), se obtiene la RFR del sistema para la consideración de amortiguamiento infinito, es decir $\zeta \Rightarrow \infty$, así:

$$R(\Omega) = \sqrt{\frac{(-5.444+1.399)^2}{(5.444\Omega^4-9.022\Omega^2+1.16)^2}} \quad (5.27)$$

Por último, se propone un amortiguamiento de $\zeta \Rightarrow 0.1$ para visualizar el comportamiento de la relación de amortiguamiento cuando se le da un valor arbitrario. Así, se sustituyen los valores de la Tabla 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.1), se obtiene:

$$R(\Omega) = \sqrt{\frac{N}{O}} \quad (5.28)$$

En el Apéndice B, se describen los coeficientes N y O .

Con estas sustituciones, en la Figura 26 se muestra la gráfica de las ecuaciones (5.26)-(5.28). Para hallar las coordenadas rectangulares de los puntos fijos P_1, P_2, P_3 y P_4 . Se sabe que $h \approx \|H_\infty\|^2$, por lo tanto, al igualar las ecuaciones (5.26) y (5.27), resolviendo para Ω , se tiene los valores numéricos de los puntos invariantes del sistema mostrados en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Valor numérico de los puntos invariantes del sistema (sin amortiguamiento optimizado).

Punto fijo	Valor
P_1	= 0.199999
P_2	= 0.423333
P_3	= 0.959999
P_4	= 1.477777

Sin embargo, para aplanar la curva de respuesta en frecuencia del NS-NIDVA-C4 en todas las frecuencias de excitación, estos parámetros no son suficientes, por lo que es necesario encontrar la relación de amortiguamiento óptimo, es decir ζ_{opt} .

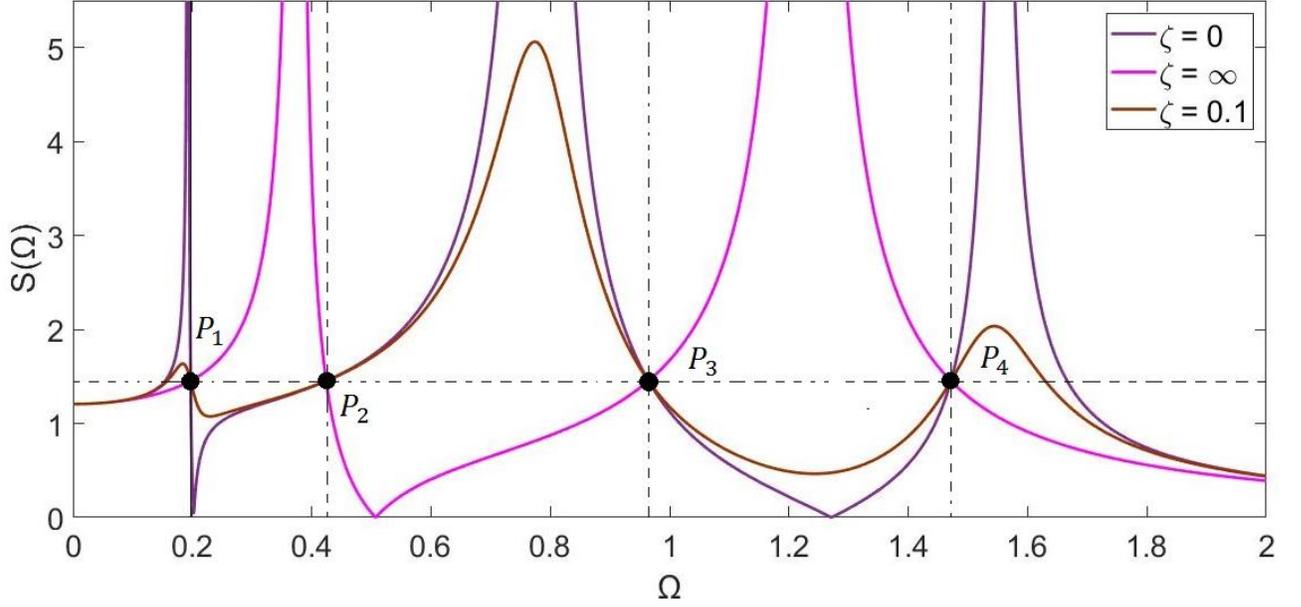


Figura 26. Respuesta en frecuencia de la viga acoplada al NS-NIDVA-C4 contra la relación de frecuencias Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.

Para ello, primero se determina el valor óptimo para α , es decir α_{opt} , entonces se debe resolver la ecuación de restricción (ecuación (5) del conjunto de ecuaciones del teorema de Vieta). Primero se evalúa $R(\Omega = 0)$ en la ecuación (5.1), así se tiene lo siguiente:

$$R(\Omega = 0)^2 = \frac{\eta^4(\alpha+1)^2q^8}{(q^6\eta^2\beta\alpha\phi_1^2+\eta^2(\alpha+1)q^4)^2} \quad (5.29)$$

La ecuación (5.25) muestra la amplitud máxima de la respuesta en frecuencia de la viga, es decir $R(s)_{opt}$, por lo tanto, la ecuación de restricción se expresa como:

$$\frac{\eta^4(\alpha+1)^2q^8}{(q^6\eta^2\beta\alpha\phi_1^2+\eta^2(\alpha+1)q^4)^2} - \frac{(\alpha+1)^2(-\beta\phi_1^2+\alpha+1)^2}{\beta\phi_1^2(-\beta\phi_1^2+\alpha^2+2\alpha+1)} = 0 \quad (5.30)$$

Se sustituyen los parámetros óptimos de las variables η y q , se resuelve para α consiguiendo las siguientes soluciones:

$$-1, \beta\phi_1^2 - 1, -1 + \sqrt{2}\phi_1\sqrt{\beta}, -1 - \sqrt{2}\phi_1\sqrt{\beta} \quad (5.31)$$

Por lo tanto, el valor óptimo para α_{opt} es el que proporciona valores positivos de los demás parámetros óptimos, entonces:

$$\alpha > -1 + \sqrt{2}\phi_1\sqrt{\beta} \quad (5.32)$$

Esto implica que el valor de α_{opt} es proporcional al valor de $\sqrt{\beta}$, por lo tanto, se grafica (Figura 27) para observar en qué puntos se puede trabajar.

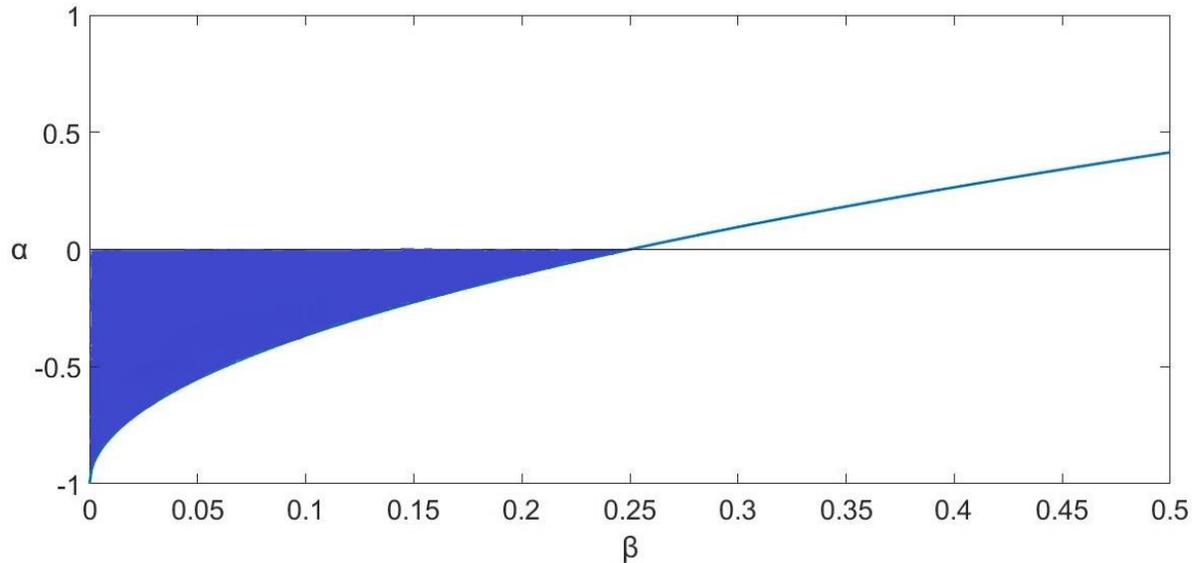


Figura 27. Representación de la función de α contra β .

De esta manera se tiene que los valores óptimos para α_{opt} son los que se encuentran en el área encerrada por la curva (Figura 27).

Al aplicar la teoría de Krenk para obtener el amortiguamiento óptimo de la viga doblemente empotrada sujeta al NS-NIDVA-C4 se producen tres frecuencias invariantes: Ω_1, Ω_2 cuando $\zeta \rightarrow \infty$ y Ω_0 cuando $\zeta \rightarrow 0$.

Para poder calcular las frecuencias invariantes $\Omega_{1,2}$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$, se debe resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la ecuación (5.3)

$$D^2 = 0 \quad (5.33)$$

Por lo tanto, después de sustituir los parámetros óptimos η_{opt}, μ_{opt} en la ecuación (5.33) y resolver para Ω , se tienen cuatro soluciones para las frecuencias invariantes cuando $\zeta \rightarrow \infty$, las cuales se muestran en la ec. (5.34).

$$\Omega_{solve} \quad (5.34)$$

En el Apéndice B se describe Ω_{solve} .

De esta manera, Ω_1 es igual a (la primera raíz positiva):

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2}}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}} \quad (5.35)$$

Y por lo tanto, Ω_2 es igual a (segunda raíz positiva):

$$\Omega_2 = \sqrt{-\frac{\beta\phi_1^2 - \alpha^2 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2} - 2\alpha - 1}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}} \quad (5.36)$$

Por otra parte, la frecuencia invariante Ω_0 cuando $\zeta \rightarrow 0$, se puede obtener igualando a cero el denominador de la ecuación (5.2) y sustituyendo los parámetros óptimos η_{opt} , μ_{opt} y q_{opt} . Esto resulta en:

$$C^2 = 0 \quad (5.37)$$

Así, Ω_0 es el valor que se encuentra entre las frecuencias Ω_1 y Ω_2 , por lo tanto Ω_0 se toma como:

$$\Omega_0 = 1 \quad (5.38)$$

A Ω_0 se le asigna este valor al notar que en los cálculos de Ω_1 y Ω_2 , se obtiene unas ecuaciones extensas y complicadas de manipular, además que al sustituir los valores frontera se aproxima a la unidad, por lo tanto, se le asigna el valor de uno.

Para obtener numéricamente la relación de amortiguamiento óptimo que aplanan la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, se debe sustituir las soluciones de η_{opt} , μ_{opt} y q_{opt} , $R(s)$, $\Omega_{1,2}$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$ y Ω_0 cuando $\zeta \rightarrow 0$ en la ecuación (5.1). Esto producirá tres cantidades de amortiguamiento en cada frecuencia invariante, los cuales se muestran en la Tabla 5.4 a seis cifras significativas.

Tabla 5.4. Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia invariante.

Amortiguamiento	Valor
$\zeta_A =$	0.321354
$\zeta_B =$	0.426997
$\zeta_C =$	0.380038

En el Apéndice B se describen los coeficientes ζ_A , ζ_B y ζ_C .

La relación de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor medio cuadrático (RMS) de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia invariante, entonces sustituyendo los valores correspondientes se tiene lo siguiente:

$$\zeta_{1,opt} = \sqrt{\frac{\zeta_A^2 + \zeta_B^2 + \zeta_C^2}{3}} = 0.378604 \quad (5.39)$$

Sin embargo, para simplificar los términos, se toma solo el amortiguamiento ζ_A y ζ_B . Esto se debe a que los valores numéricos de los coeficientes se aproximan (Figura 28), de esta manera se tiene:

$$\zeta_{2,opt} = \sqrt{\frac{\zeta_A^2 + \zeta_B^2}{2}} = 0.377885 \quad (5.40)$$

En el Apéndice B se describen los coeficientes $\zeta_{1,opt}$ y $\zeta_{2,opt}$.

En la Figura 28 se aprecia la respuesta de la estructura tipo viga sujeta en sus extremos y con un absorbedor de vibración NS-NIDVA-C4 con los valores óptimos (Tabla 5.5) de los parámetros adimensionales sujeta a una fuerza de excitación armónica. En esta gráfica se muestran tres curvas, una es denotada con la relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.1$ (línea amarilla sólida), y las otras dos representan la relación de amortiguamiento óptimo, denotando la sobreposición por la semejanza de valor numérico.

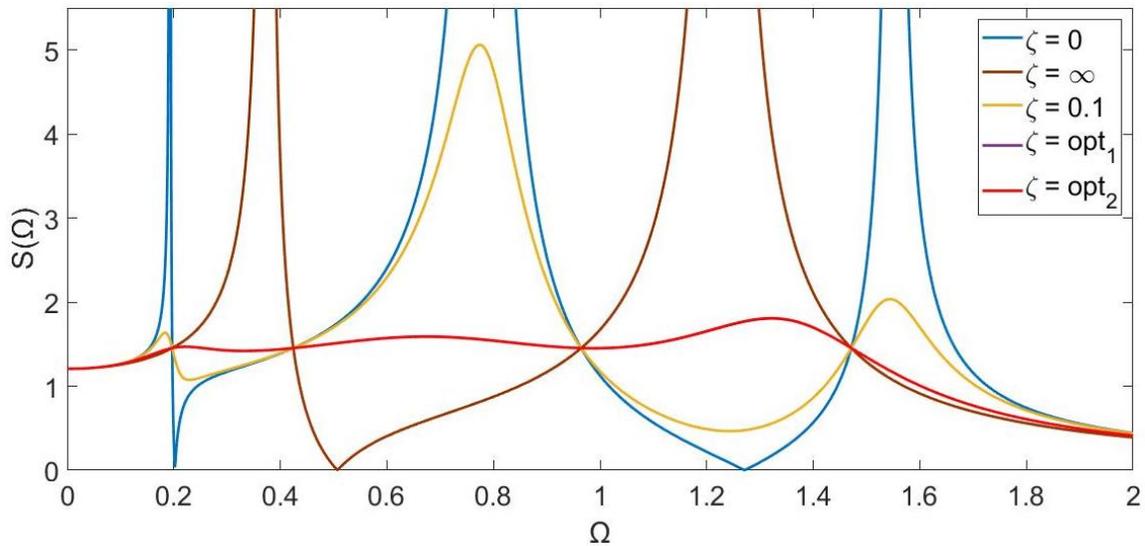


Figura 28. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia con los parámetros óptimos η_{opt} , μ_{opt} , q_{opt} y α_{opt} , con diferentes relaciones de amortiguamiento.

Tabla 5.5. Valores numéricos para los parámetros óptimos obtenidos a través del método de los puntos fijos extendidos estableciendo $\beta = 0.1$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$.

Parámetros óptimos para el NS-NIDVA-C4				
$\beta = 0.1$		y	$\phi_1 = \sqrt{2}$	
η_{opt}	μ_{opt}	q_{opt}	α_{opt}	ζ_{opt}
0.153672	4.444444	1.414213	-0.3	0.377885

Para calcular el porcentaje de supresión de vibraciones, se calcula el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones %SA. De esta manera, se considera la función de respuesta en frecuencia del sistema tipo viga con absorbedor basado en inersor y rigidez negativa (NS-NIDVA-C4) y la FRF del sistema tipo viga con un absorbedor de vibración dinámico clásico (DVA clásico reportado por López-García [4]). Para comparar ambos sistemas, se toma como referencia la FRF cuando no existe un absorbedor de vibración dinámico (estructura sin control). En la Figura 29 se muestran las curvas correspondientes al análisis anterior.

Por consiguiente, la ecuación para calcular el alargamiento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SA_{NS-NIDVA-C4} = \frac{SA_{NS-NIDVA-C4} - SA_{DVA \text{ Clásico}}}{SA_{DVA \text{ Clásico}}} \times 100 \quad (5.41)$$

De la misma manera, para calcular el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema ($\%SL$) del NS-NIDVA-C4 con respecto al DVA clásico, se encuentran los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por lo tanto, la ecuación para el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema es:

$$\%SL_{NS-NIDVA-C4} = \frac{SL_{DVA \text{ Clásico}} - SL_{NS-NIDVA-C4}}{SL_{DVA \text{ Clásico}}} \times 100 \quad (5.42)$$

Al efectuar los respectivos cálculos, se obtiene que el $\%SA_{NS-NIDVA-C4}$ para el NS-NIDVA-C4 es del 60.49% y el $\%SL_{NS-NIDVA-C4}$ es del 48.78% en comparación con un DVA clásico. De igual manera en la Tabla 5.6 se muestran las comparaciones de los valores del índice de ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración de las curvas mostradas en la Figura 29.

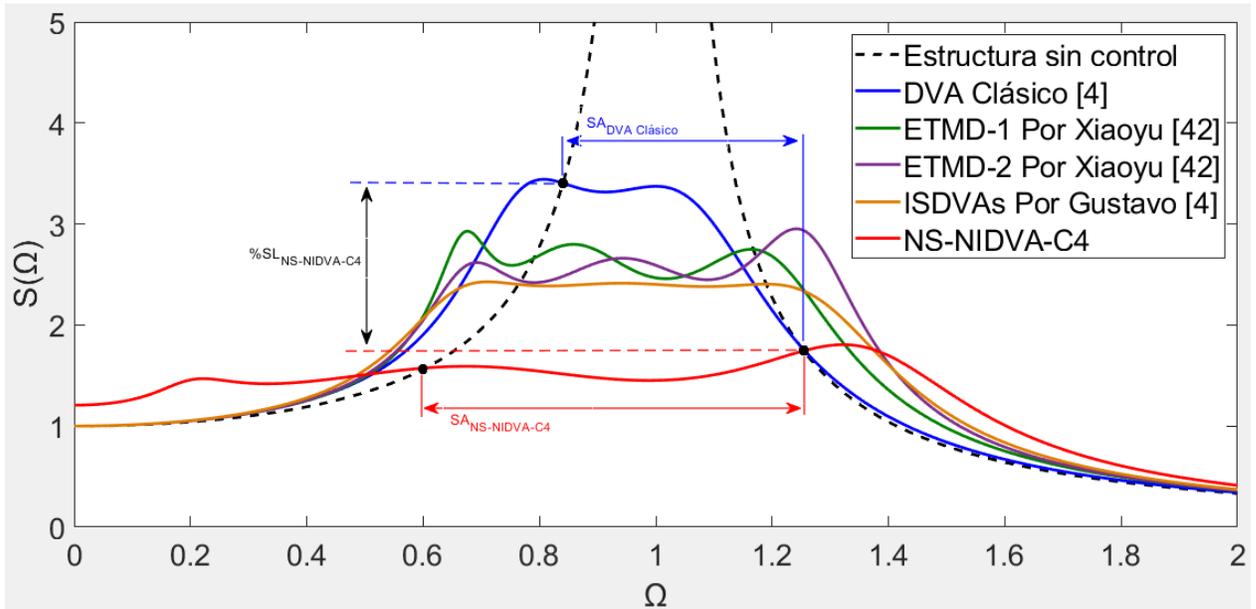


Figura 29. Comparación de las curvas de las FRF del DVA Clásico[4], C4 Por Xiaoyu[42], C6 Por Xiaoyu[42], ISDVAs Por Gustavo [4] y NS-NIDVA-C4.

Tabla 5.6. Valores del índice de ancho de banda operativo e índice de reducción de la amplitud de vibración.

DVA	%SA	%SL
ETMD-1	6.66%	17.79%
ETMD-2	0.24%	21.49%
ISDVAs	17.21%	27.45%
NS-NIDVA-C4	60.49%	48.78%

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se presenta el desarrollo matemático que muestra el comportamiento dinámico de una viga doblemente empotrada conectada a un absorbedor de vibración dinámico con inersor y rigidez negativa. La estructura de la viga NS-NIDVA-C4 se analizó para una excitación de tipo armónica. El NS-NIDVA-C4 propuesto consta de la configuración de la estructura tipo viga de longitud L conectada al sistema de absorción de vibración. El sistema de absorción de vibración, está constituido por un absorbedor de vibración dinámico que se conecta a la configuración en paralelo con conexión a tierra de una red mecánica basada en inersor y un resorte de rigidez negativa. Asimismo, la red mecánica basada en inersor está compuesta por la combinación en paralelo de resorte y amortiguador viscoso y éste en serie con el inersor.

Para efectuar el análisis cinemático, fue necesario obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la teoría de Euler-Lagrange. Siguiendo con la transformación a parámetros adimensionales y trabajar en el dominio de la frecuencia, para que de esta manera el cálculo de los valores numéricos se realizará con sencillez.

El modelo matemático se validó de forma numérica con resultados reportados en la literatura. Se analizó y estudió el problema de optimización que minimiza el valor máximo de las funciones de respuesta en el dominio de la frecuencia de la viga en un intervalo de frecuencias determinado. El problema de minimización se realizó considerando una fuerza de excitación armónica en el sistema.

La optimización se realizó mediante la técnica de los puntos fijos extendida, que considera el teorema de Vieta y el teorema de Steen Krenk, siendo métodos sustentados para la resolución del problema planteado en este trabajo. El método de los puntos fijos extendidos facilita en gran

medida los cálculos, ya que no hay necesidad de resolver un conjunto de ecuaciones no lineales que para su solución dependen directamente de la capacidad de procesamiento de cómputo, sino que, solo requiere del conocimiento de la suma y producto de las raíces reales de las ecuaciones cuárticas

Se analizó la respuesta de vibración del sistema utilizando el inersor y la rigidez negativa en comparación con el absorbedor dinámico de vibración clásico. Para el primer análisis, se observó una disminución del 60.49% en el agrandamiento del ancho de banda. Mientras que para la reducción de la amplitud de vibración del sistema fue de 48.78% con respecto al DVA clásico. Por lo tanto, se logró minimizar las amplitudes de vibración del sistema con la obtención de los parámetros óptimos a partir de la técnica de los puntos fijos extendida. Cabe resaltar que en comparación a trabajos anteriores se logró mejorar la mitigación de vibraciones de forma significativa.

Por lo tanto, con el cálculo de los índices del ancho de banda y la amplitud de las vibraciones presenta una mejora del 60.49% y 48.78% respectivamente cuando se utiliza en un solo sistema los conceptos de inercia y rigidez negativa en un DVA sujeto a una excitación armónica. Por lo que, la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación se ha demostrado exitosamente.

6.1. Trabajos futuros

Para complementar este trabajo de tesis, se proponen los siguientes estudios futuros para mejorar algunos aspectos del sistema implementados o mejorar este mismo.

- Obtener el modelo matemático de la estructura tipo viga doblemente empotrada considerando otros tipos de fuerza de excitación, como fuerzas inerciales o aleatorias.
- Realizar la implementación física del modelo matemático de la estructura tipo viga con el NS-NIDVA-C4 y corroborar experimentalmente los resultados obtenidos.
- Mejorar el sistema de control pasivo de las vibraciones con la aplicación de los sistemas DVAs basados en inersor y rigidez negativa, y en consecuencia, se podrá ver la aplicación de estos dos conceptos con mayor frecuencia.
- Implementar este sistema en el amortiguamiento de automóviles y analizar si es viable la utilización de este DVA en la industria automotriz.

Apéndice A

Modelo matemático

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange [3], se obtienen las energías asociadas al sistema de la Figura 25.

- Para la viga:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = f(x, t) + \{c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)]\} \delta(x - a) \quad (\text{A.1})$$

- Para el DVA:

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_1(a, t)] + k_1[y_1(t) - y(a, t)] + c_2[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + k_2[y_1(t) - y_2(t)] + k_{NS} y_1(t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

- Para el inersor:

$$b \ddot{y}_2(t) + c_2[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + k_2[y_1(t) - y_2(t)] \quad (\text{A.3})$$

Donde b es la inertancia, m_1 la masa del absorbedor y k_{NS} el resorte con rigidez negativa. Con esto, se tiene el análisis del inersor considerando una excitación de tipo armónica y realizando un cambio de variable (Tabla A.1), entonces se tiene la ec. (A.4):

Tabla A.1. Cambio de variables para trabajar en el dominio de la frecuencia y tener parámetros adimensionales.

$y_1(t) = Y_1 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$	$y_2(t) = Y_2 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$
$\dot{y}_1(t) = l \cdot \omega \cdot Y_1 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$	$\dot{y}_2(t) = l \cdot \omega \cdot Y_2 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$
$\ddot{y}_1(t) = -\omega^2 \cdot Y_1 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$	$\ddot{y}_2(t) = -\omega^2 \cdot Y_2 \cdot e^{l \cdot \omega \cdot t}$

$$-b\omega^2 Y_2 e^{i\omega t} + c_2(I\omega Y_2 - I\omega Y_1) e^{i\omega t} + k_2(Y_2 - Y_1) e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, Y_2 es igual a:

$$Y_2 = \frac{Y_1(I\omega c_2 + k_2)}{I\omega c_2 - b\omega^2 + k_2} \quad (\text{A.5})$$

Ahora el análisis del DVA considerando una excitación armónica, se tiene lo siguiente:

$$-m_1\omega^2 Y_1 e^{i\omega t} + c_1(I\omega Y_1 - I\omega Y(a, \omega)) e^{i\omega t} + k_1(Y_1 - Y(a, \omega)) e^{i\omega t} + c_2(I\omega Y_1 - I\omega Y_2) e^{i\omega t} + k_2(Y_1 - Y_2) e^{i\omega t} + k_{NS} Y_1 e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo Y_2 en ecuación (A.6) y considerando que $c_1 = 0$, se resuelve para Y_1 y se tiene:

$$Y_1 = \frac{Q}{W} \quad (\text{A.7})$$

Donde:

$$Q = Y(a, \omega) k_1 (I\omega c_1 - b\omega^2 + k_2)$$

$$W = -b\omega^4 m_1 + I(b + m_1) c_2 \omega^3 + ((k_1 + k_2 + k_{NS}) b + k_2 m_1) \omega^2 - I(k_1 + k_{NS}) c_2 \omega - k_2 (k_1 + k_{NS})$$

Teniendo lo siguiente:

$$P = b\omega^2 Y_2 + \omega^2 Y_1 m_1 + Y_1 k_{NS} \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo Y_1 y Y_2 en la ecuación (A.8), además de tomar en cuenta que se puede expresar $P = -H(\omega) Y(a, \omega)$, se puede definir $H(\omega)$ como:

$$H = \frac{H_{num}}{W} \quad (\text{A.9})$$

Donde:

$$H_{num} = k_1 (-b\omega^4 m_1 + I(b + m_1) c_2 \omega^3 + ((k_2 + k_{NS}) b + k_2 m_1) \omega^2 - I\omega c_2 k_{NS} - k_2 k_{NS})$$

De esta manera, la ecuación (A.9) se puede expresar de forma simplificada como:

$$H = m_1 \omega^2 J \quad (\text{A.10})$$

Donde J esta dado por:

$$J = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2} \frac{k_1 \left((-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_2+k_{NS})b+k_2m)\omega^2 - I\omega c_2 k_{NS} - k_2 k_{NS}) \right)}{-b\omega^4 m + I(b+m)c_2\omega^3 + ((k_1+k_2+k_{NS})b+k_2m)\omega^2 - I(k_1+k_{NS})c_2\omega - k_2(k_1+k_{NS})} \quad (\text{A.11})$$

Los parámetros a utilizar son los que aparecen en la Tabla A.2.

Tabla A.2. Parámetros adimensionales y relación entre variables.

<i>Variables relacionadas</i>	<i>Parámetros adimensionales</i>	
$c_2 = 2 \cdot \zeta_2 \cdot m \cdot \omega_A$	$\alpha = \frac{k_{NS}}{k_1}$	$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$
$k_1 = m \cdot \omega_A^2$	$\mu = \frac{b}{m}$	
$k_2 = b \cdot \omega_C^2$	$\eta = \frac{\omega_A}{\omega_C}$	$q = \frac{\omega_1}{\omega_A}$

Sustituyendo las variables adimensionales de la Tabla A.2, en J se obtiene:

$$J = \frac{\left(\frac{1}{2} \mu q^4 \eta^2 \alpha + I \zeta_2 q^3 \alpha \Omega - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4 \right) q^2}{\left(\frac{1}{2} \mu q^4 \eta^2 (\alpha + 1) + I \zeta_2 (\alpha + 1) \Omega q^3 - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha + 1) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4 \right) \Omega^2} \quad (\text{A.12})$$

Se continúa sustituyendo la frecuencia de excitación del sistema $\omega = \omega_1 \Omega$ en la ecuación (A.10), por lo tanto:

$$H = m_1 \omega_1^2 \Omega^2 J \quad (\text{A.13})$$

De esta manera se define $J_1 = J \Omega^2$, entonces se tiene:

$$J_1 = \frac{\left(\frac{1}{2} \mu q^4 \eta^2 \alpha + I \zeta_2 q^3 \alpha \Omega - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4 \right) q^2}{\left(\frac{1}{2} \mu q^4 \eta^2 (\alpha + 1) + I \zeta_2 (\alpha + 1) \Omega q^3 - \frac{1}{2} q^2 \mu (\eta^2 \mu + \eta^2 + \alpha + 1) \Omega^2 - I \zeta_2 (\mu + 1) \Omega^3 q + \frac{1}{2} \mu \Omega^4 \right)} \quad (\text{A.14})$$

La ecuación que rige el comportamiento dinámico del sistema es:

$$y(x, \omega) = G_1(x, \omega) - \frac{G_2(a, \omega) G_1(x, \omega)}{\frac{1}{H(\omega)} + G_1(a, \omega)} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo las ecuaciones correspondientes en la ecuación (A.15), se tiene:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL \omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left(\frac{\alpha_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \alpha_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} + \frac{1}{J_1}} \right) \right) \quad (\text{A.16})$$

La ecuación (A.16) representa la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando se tiene una excitación armónica. Considerando el primer modo de vibración, la ecuación (A.16) se reescribe como:

$$S(a, \Omega) = \frac{\phi_1 \alpha_1}{(\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1) \rho AL \omega_1^2} \quad (\text{A.17})$$

Además, el primer modo de vibración es igual a la unidad $\gamma_1 = 1$, por lo tanto:

$$\frac{S(a, \Omega) \rho AL \omega_1^2}{\alpha_1 \phi_1} = \frac{1}{\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1} \quad (\text{A.18})$$

En la ecuación (A.18) la fuerza de excitación es armónica. Asimismo, la respuesta del sistema en estado estable con excitación armónica, se puede expresar como:

$$S = \frac{1}{\beta J_1 \phi_1^2 - \Omega^2 + 1} \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo J_1 en la ecuación (A.19), se tiene una nueva ecuación en la forma:

$$S = \frac{A+IB}{C+ID} \quad (\text{A.20})$$

Donde:

$$A = (\eta^2(\alpha + 1)q^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha + 1)\Omega^2 q^2 + \Omega^4)\mu$$

$$B = 2\Omega \zeta_2 ((-\mu - 1)\Omega^2 + q^2(\alpha + 1))q$$

$$C = (q^6 \eta^2 \beta \alpha \phi_1^2 + (((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta \phi_1^2)\eta^2 - \beta \alpha \phi_1^2)\Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1))q^4 + (((\mu + 1)\eta^2 + \beta \phi_1^2 + \alpha + 1)\Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1)\Omega^2 q^2 - \Omega^6 + \Omega^4)\mu$$

$$D = 2q\Omega\zeta_2 \left((\eta + 1)\Omega^4 + ((-\beta(\mu + 1)\phi_1^2 - \alpha - 1)q^2 - \mu - 1)\Omega^2 + q^2(\alpha\beta q^2\phi_1^2 + \alpha + 1) \right)$$

Apéndice B

Puntos fijos extendidos

$$A = \mu(\eta^2(\alpha + 1)q^4 - ((\mu + 1)\eta^2 + \alpha + 1)\Omega^2q^2 + \Omega^4)$$

$$B = 2\Omega\zeta_2((- \mu - 1)\Omega^2 + q^2(\alpha + 1))q$$

$$C = \mu \left(q^6\eta^2\beta\alpha\phi_1^2 + \left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta\phi_1^2)\eta^2 - \beta\alpha\phi_1^2 \right) \Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 \\ + \left(((\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + \alpha + 1)\Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \right) \Omega^2q^2 - \Omega^6 + \Omega^4$$

$$D = 2\Omega\zeta_2 \left((\eta + 1)\Omega^4 + ((-\beta(\mu + 1)\phi_1^2 - \alpha - 1)q^2 - \mu - 1)\Omega^2 + q^2(\alpha\beta q^2\phi_1^2 + \alpha + 1) \right) q$$

$$\Theta_1(\alpha, \beta, \phi_1, \eta, \mu, q) \\ = (-q^2(\beta q^2\phi_1^2 - \Omega^2 + 1)\alpha + (\mu\beta\Omega^2\phi_1^2 - 1 + (\beta\phi_1^2 + 1)\Omega^2)q^2 \\ - \Omega^2(\Omega - 1)(\Omega + 1)(\mu + 1)) \left((-\eta^2q^4 + \Omega^2q^2)\alpha - \eta^2q^4 \right. \\ \left. + \Omega^2(\eta^2\mu + \eta^2 + 1)q^2 - \Omega^4 \right) \\ + ((-\mu - 1)\Omega^2 + q^2(\alpha + 1)) \left(q^6\eta^2\beta\alpha\phi_1^2 \right. \\ \left. + \left((-\alpha - 1 + (-\mu - 1)\beta\phi_1^2)\eta^2 - \beta\alpha\phi_1^2 \right) \Omega^2 + \eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 \\ \left. + \left(((\mu + 1)\eta^2 + \beta\phi_1^2 + \alpha + 1)\Omega^2 + (-\mu - 1)\eta^2 - \alpha - 1 \right) \Omega^2q^2 - \Omega^6 + \Omega^4 \right)$$

$$\begin{aligned}
& \Theta_{\lambda 1}(\alpha, \beta, \phi_1, \eta, \mu, \lambda, q) \\
&= \lambda^4 \\
&+ \frac{(-2\beta\mu q^2 \phi_1^2 - 2\eta^2 \mu^2 q^2 - 2\beta q^2 \phi_1^2 - 4\eta^2 \mu q^2 - 2\alpha \mu q^2 - 2\eta^2 q^2 - 4\alpha q^2 - 2\mu q^2 - 4q^2 - 2\mu - 20)\lambda^3}{2\mu + 2} \\
&+ \frac{1}{2\mu + 2} \left((2\beta\eta^2 \mu^2 q^2 \phi_1^2 + 4\beta\eta^2 \mu q^4 \phi_1^2 + 2\alpha\beta\mu q^4 \phi_1^2 + 2\beta\eta^2 q^4 \phi_1^2 + 4\alpha\beta q^4 \phi_1^2 + 4\alpha\eta^2 \mu q^4 \right. \\
&+ \beta\mu q^4 \phi_1^2 + 4\alpha\eta^2 q^4 + 2\beta q^4 \phi_1^2 + 4\eta^2 \mu q^4 + 2\alpha^2 q^4 + 2\eta^2 \mu^2 q^2 + 4\eta^2 q^4 + 4\alpha q^4 + 4\eta^2 \mu q^2 \\
&+ 2\alpha\mu q^2 + 2\eta^2 q^2 + 2q^4 + 4\alpha q^2 + 2\mu q^2 + 4q^2) \lambda^2 \left. \right) \\
&+ \frac{1}{2\mu + 2} \left((-4\alpha\beta\eta^2 \mu q^6 \phi_1^2 - 4\alpha\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 - 2\beta\eta^2 \mu q^6 \phi_1^2 - 2\alpha^2 \beta q^6 \phi_1^2 - 2\beta\eta^2 q^6 \phi_1^2 \right. \\
&- 2\alpha^2 \eta^2 q^6 - 2\alpha\beta q^6 \phi_1^2 - 4\alpha\eta^2 \mu q^4 - 2\eta^2 q^6 - 4\alpha\eta^2 q^4 - 4\eta^2 \mu q^4 - 2\alpha^2 q^4 - 4\eta^2 q^4 - 4\alpha q^4 \\
&- 2q^4) \lambda \left. \right) + \frac{2\alpha^2 \beta \eta^2 q^8 \phi_1^2 + 2\alpha\beta \eta^2 q^8 \phi_1^2 + 2\alpha^2 \eta^2 q^6 + 4\alpha\eta^2 q^6 + 2\eta^2 q^6}{2\mu + 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Theta_{\lambda 2}(\alpha, \beta, \phi_1, \mu, \lambda, q) \\
&= \lambda^4 + \frac{2((-\beta(\mu + 1)\phi_1^2 - \alpha - 1)q^2 - \mu - 1)\lambda^3}{\mu + 1} \\
&+ \frac{\left((2q^2(\alpha\beta q^2 \phi_1^2 + \alpha + 1)(\mu + 1) + ((-\beta(\mu + 1)\phi_1^2 - \alpha - 1)q^2 - \mu - 1)^2) h - (-\mu - 1)^2 \right) \lambda^2}{(\mu + 1)^2 h} \\
&+ \frac{\left(2q^2(\alpha\beta q^2 \phi_1^2 + \alpha + 1)((-\beta(\mu + 1)\phi_1^2 - \alpha - 1)q^2 - \mu - 1)h - 2q^2(\alpha + 1)(-\mu - 1) \right) \lambda}{(\mu + 1)^2 h} \\
&+ \frac{q^4(\alpha\beta q^2 \phi_1^2 + \alpha + 1)^2 h - q^4(\alpha + 1)^2}{(\mu + 1)^2 h}
\end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = (\alpha + 1)^2$$

$$\Psi_1 = (1 + (\beta q^2 \phi_1^2 + 1)\alpha) \left((-1 + ((\mu + 1)\eta^2 - \beta\phi_1^2)q^2) \alpha + 1 + (\mu + 1)\eta^2 q^2 \right)$$

$$\Lambda_2 = -(2(\alpha + 1)(\mu + 1))$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2 = & \left(\left((\beta\phi_1^2 + \eta^2)\mu - \beta\phi_1^2 + \eta^2 \right) \alpha^2 \right. \\
& + \left(2\mu^2\eta^2\beta\phi_1^2 + ((4\beta\phi_1^2 + 2)\eta^2 - 2\beta^2\phi_1^4 + \beta\phi_1^2)\mu + (2\beta\phi_1^2 + 2)\eta^2 - 2\beta^2\phi_1^4 \right. \\
& \left. - \beta\phi_1^2 \right) \alpha + \eta^2(\mu + 1)(\beta\mu\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1) \Big) q^4 \\
& + \left((\mu - 1)\alpha^2 + (2\eta^2\mu^2 + (-4\beta\phi_1^2 + 4\eta^2 + 2)\mu - 4\beta\phi_1^2 + 2\eta^2 - 2)\alpha + 2\eta^2\mu^2 \right. \\
& \left. + (-2\beta\phi_1^2 + 4\eta^2 + 1)\mu - 2\beta\phi_1^2 + 2\eta^2 - 1 \right) q^2 - 2(\alpha + 1)(\mu + 1) \Big)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_3 = -(2(\mu + 1)^2)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 = & \left(\left(2\mu^3\eta^2\beta\phi_1^2 + (-2\beta^2\phi_1^4 + \beta(6\eta^2 + 2\alpha + 1)\phi_1^2 + 4\eta^2(\alpha + 1))\mu^2 \right. \right. \\
& + \left(-4\beta^2\phi_1^4 + \beta(6\eta^2 - 2\alpha - 1)\phi_1^2 + 8\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\right)(\alpha + 1) \right) \mu - 2\beta^2\phi_1^4 \\
& \left. + 2\beta(\eta^2 - 2\alpha - 1)\phi_1^2 + 4\eta^2(\alpha + 1) \right) q^4 \\
& + 2(\mu + 1)(\eta^2\mu^2 + (-2\beta\phi_1^2 + 2\eta^2 + \alpha + 1)\mu - 2\beta\phi_1^2 + \eta^2 - 2\alpha - 2)q^2 \\
& \left. - 2(\mu + 1)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\Gamma_1 = ((\alpha + 1)(2\beta\mu\phi_1^2 - \alpha^2\mu + 2\beta\phi_1^2 + \alpha^2 - 2\alpha\mu + 2\alpha - \mu + 1))$$

$$\begin{aligned}
Y_1 = & ((\beta(\mu - 1)\phi_1^2 + (\mu + 1)\eta^2)\alpha^3 + (2\beta(\mu - 1)\phi_1^2 + 3(\mu + 1)\eta^2)\alpha^2 \\
& + (-2\beta^2(\mu + 1)\phi_1^4 + ((\mu + 1)^2\eta^2 + \mu - 1)\beta\phi_1^2 + 3(\mu + 1)\eta^2)\alpha \\
& + (\mu + 1)\eta^2(1 + \beta(\mu + 1)\phi_1^2))
\end{aligned}$$

$$\Gamma_2 = \left(4(\mu + 1)(\alpha + 1) \left(\left(\beta\phi_1^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha\frac{1}{2} \right) \mu + \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = & (2\eta^2\beta\phi_1^2(\alpha + 1)\mu^3 \\
& + ((2\beta\phi_1^2 + 4\eta^2)\alpha^3 + (5\beta\phi_1^2 + 12\eta^2)\alpha^2 \\
& + (-4\beta^2\phi_1^4 + (6\eta^2 + 4)\beta\phi_1^2 + 12\eta^2)\alpha - 2\beta^2\phi_1^4 + \beta(6\eta^2 + 1)\phi_1^2 + 4\eta^2)\mu^2 \\
& + (2\alpha^4 + (-2\beta\phi_1^2 + 8\eta^2 + 8)\alpha^3 + (-5\beta\phi_1^2 + 24\eta^2 + 123)\alpha^2 \\
& + (-8\beta^2\phi_1^4 + (6\eta^2 - 4)\beta\phi_1^2 + 24\eta^2 + 8)\alpha - 4\beta^2\phi_1^4 + \beta(6\eta^2 - 1)\phi_1^2 + 8\eta^2 \\
& + 2)\mu + (-4\beta\phi_1^2 + 4\eta^2)\alpha^3 + (-10\beta\phi_1^2 + 12\eta^2)\alpha^2 \\
& + (-4\beta^2\phi_1^4 + (2\eta^2 - 8)\beta\phi_1^2 + 12\eta^2)\alpha - 2\beta^2\phi_1^4 + (2\eta^2 - 2)\beta\phi_1^2 + 4\eta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi = & \frac{1}{2} \frac{1}{(\mu + 1)^2((\beta\phi_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)\mu + \beta\phi_1^2)(\alpha + 1)} \left(2 \left(\beta\phi_1^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2} \right) (\beta\phi_1^2 \right. \\
& - 2\alpha^2 - 4\alpha - 2)\mu^2 \\
& + (-2\alpha^4 - 8\alpha^3 + (-3\beta\phi_1^2 - 12)\alpha^2 + (-6\beta\phi_1^2 - 8)\alpha + 4\beta^2\phi_1^4 - 3\beta\phi_1^2 - 2)\mu \\
& \left. + 2\beta\phi_1^2(\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1) \right)
\end{aligned}$$

$$N = (19.753(0.066 - 1.657\Omega^2 + \Omega^4)^2 + 0.079\Omega^2(-5.444\Omega^2 + 1.399)^2)$$

$$\begin{aligned}
O = & (19.753(0.054 + 0.071\Omega^2 + 1.999(1.028\Omega^2 - 0.828)\Omega^2 - \Omega^6 + \Omega^4)^2 \\
& + 0.079(5.444\Omega^4 - 9.022\Omega^2 + 1.16)^2\Omega^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{solve} = & \sqrt{\frac{-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2}}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}}, \\
& - \sqrt{\frac{-\beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2}}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}}, \\
& \sqrt{-\frac{\beta\phi_1^2 - \alpha^2 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2} - 2\alpha - 1}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}}, \\
& \sqrt{-\frac{\beta\phi_1^2 - \alpha^2 + \sqrt{-\beta^2\phi_1^4 + \alpha^2\beta\phi_1^2 + 2\alpha\beta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2} - 2\alpha - 1}{-\alpha\beta\phi_1^2 - \beta\phi_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}}
\end{aligned}$$

$$\zeta_A = \beta\phi_1^2 \sqrt{\frac{\beta\phi_1^2 \left(3\beta\phi_1^2 - 3\alpha^2 + \sqrt{-\beta\phi_1^2(\beta\phi_1^2 - (\alpha + 1)^2)} - 6\alpha - 3 \right)}{(\alpha + 1)^5(\beta\phi_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)}}$$

$$\zeta_B = \beta\phi_1^2 \sqrt{\frac{\beta\phi_1^2 \left(3\beta\phi_1^2 - 3\alpha^2 - \sqrt{-\beta\phi_1^2(\beta\phi_1^2 - (\alpha + 1)^2)} - 6\alpha - 3 \right)}{(\alpha + 1)^5(\beta\phi_1^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)}}$$

$$\zeta_C = \beta\phi_1^2 \sqrt{\frac{\beta\phi_1^2 \left((\beta\phi_1^2 - 4)\alpha^2 + (2\beta\phi_1^2 - 8)\alpha + 5\beta\phi_1^2 - 4 \right)}{(\alpha + 1)^6(\beta\phi_1^2 - \alpha - 1)}}$$

$$\zeta_{1,opt} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{-\frac{\beta^3\phi_1^6(\alpha^2\beta\phi_1^2 + 8\alpha\beta\phi_1^2 + 11\beta\phi_1^2 - 10\alpha^2 - 20\alpha - 10)}{(-\beta\phi_1^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1)^6}}$$

$$\zeta_{2,opt} = \frac{1}{2} \sqrt{12} \sqrt{\frac{\beta^3\phi_1^6}{(\alpha + 1)^5}}$$

Bibliografía

- [1] M. C. Smith, “Synthesis of mechanical networks: The inerter”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47.10 (2002), pp. 1648–1662. doi: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [2] G. Alotta, G. Failla, “Improved inerter based vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences* (2020), pp. 106087. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106087>.
- [3] C. Mazón, “Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico”. Tesis de maestría. Tecnológico Nacional de México, Cuernavaca, Morelos, México, 2019.
- [4] G. L. García. “Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga”. Tesis de licenciatura. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, 2021.
- [5] E. B. Hernández, G. L. Rojas, J. Mayén, A.A. Flores-Hernández, “Innovative negative-stiffness inerter-based mechanical networks”, *International Journal of Mechanical Sciences* 205 (2021), pp 106597. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106597>
- [6] Marco Canales, William Paucar, Noel Juipa, MÉTODO DE INVESTIGACIÓN PARA INGENIERÍAS BASADO EN LA METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA (2017).
- [7] S. S. Rao, *Vibraciones mecánicas*, México: PEARSON , 2012.
- [8] J. Ormondroyd, Den Hartog J. P., “The Theory of the Dynamic Vibration Absorber”, *Trans., ASME, Applied Mechanics* 50 (1928), pp. 9-22.

- [9] M. B. Ozer, T. J. Royston, “Extending Den Hartog’s Vibration Absorber Technique to Multi-Degree-of-Freedom Systems”, *Journal of Vibration and Acoustics* 127.4 (oct. de 2004), pp. 341-350. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1924642.
- [10] O. Nishihara, T. Asami, “Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)”, *Journal of Vibration and Acoustics* 124.4 (2002), pp. 576-582. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1500335.
- [11] T. Asami, O. Nishihara, “Closed-Form Exact Solution to H1 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems)”, *Journal of Vibration and Acoustics* 125.3 (2003), pp. 398-405. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1569514.
- [12] T. Asami, O. Nishihara, A. M. Baz, “Analytical Solutions to H1 and H2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems”, *Journal of Vibration and Acoustics* 124.2 (2002), pp. 284-295. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.1456458.
- [13] T. Argentini, M. Belloli, P. Borghesani, “A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing”, *Journal of Vibration and Acoustics* 137.3 (2015), pp. 034501. issn: 1048-9002. doi: 10.1115/1.4029576.
- [14] Chen, M. Z. Q., Hu, Y., “Inerter and Its Application in Vibration Control Systems”, Nanjing, Jiangsu, China. Science Press, Springer, Beijing, China, 2019.
- [15] Y. Shen, Y. Liu, L. Chen, X. Yang, “Optimal design and experimental research of vehicle suspension based on a hydraulic electric inerter”, *Mechatronics* 61 (2019), pp. 12-19, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.05.002>.
- [16] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), pp. 297-307. issn: 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>.
- [17] M. Z. Q. Chen, Y. Hu. “Inerter and Its Application in Vibration Control Systems”. Springer, 2019.
- [18] K. Ramakrishnan y col. “Multi-Objective Optimization of Road Vehicle Passive Suspensions With Inerter”, *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and*

Information in Engineering Conference 3 (2016), pp. 59864, V003T01A007. doi: 10.1115/DETC2016-59864.

[19] W.O. Wong, Y.L. Cheung. “Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion”, Engineering Structures 30.1 (2008), pp. 282-286. issn: 0141-0296. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.007>.

[20] Y.L. Cheung, W.O. Wong. “H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber—Revisited and new results”, Journal of Sound and Vibration 330.16 (2011). Computational Aero-Acoustics (CAA) for aircraft noise prediction - Part A, pp. 3901-3912. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.027>.

[21] Y.L. Cheung, W.O. Wong. “H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation”, Journal of Sound and Vibration 330.6 (2011), pp. 1039-1044. issn: 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.031>.

[22] E. B. Hernández, J. G. M. Larios, J. Colín, J. Mayén, A.A. Flores-Hernández, M. A. Montiel, “A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber”, Journal of Sound and Vibration 460 (2020), pp. 115583, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115583>

[23] C.Y. Wang, R.S. Lakes, “Extreme stiffness systems due to negative stiffness elements”, American Journal of Physics 72.1 (2004), pp. 40-50.

[24] D.L. Platus, Vibration Isolation System, US Patent No. 6676101B2, 2004.

[25] T.D. Le, K.K. Ahn, “A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat”, Journal of Sound and Vibration 330.26 (2011), pp. 6311-6335.

[26] B. Alsbushov, “Vibration protecting and measuring systems with quasi-sero stiffness”. Hemisphere Publishing Corporation, 1989.

[27] A.A. Sarlis, D.T.R. Pasala, M.C. Constantinou, et al, “Negative stiffness device for seismic protection of structures”, En: Journal of Structural Engineering 139.7 (2012), pp. 1124-1133.

- [28] T. D. Le, K. K. Ahn, "A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat", *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), pp. 6311-6335. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.039>.
- [29] D. Hartog, "Damped Vibrator Absorber", *Mechanical Vibrations*, New York, Mc Graw Hill, 1947, pp. 129-199.
- [30] R. G. Jacquot, "Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems", *Journal of Sound and Vibration* 60.4 (1978), pp. 535-542.
- [31] D. N. Manikanahally, "Vibration absorbers for hysteretical damped mass-loaded beams", *Transactions of ASME* 113 (1991).
- [32] R. G. Jacquot, "Optimal damper location for randomly forced cantiliver beamns", *Journal of Sound and Vibration* 269 (2002), pp. 623-632.
- [33] J. He, *Modal Analysis*, Oxford: Planta tree, 2001.
- [34] Ogata, K, "Criterio de estabilidad de Routh", *Ingeniería de control moderna. PEARSON EDUCACIÓN* 681.5 (2010), pp. 212-218.
- [35] S. Rao, *Engineering Optimization*, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [36] E. B. Hernández, "Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia", *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos*, 2016.
- [37] E. B. Hernández y col. "Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers", *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018), pp. 41-53. issn: 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>.
- [38] X. Wang, T. He, Y. Shen, Y. Shan, X. Liu, "Parameters optimization and performance evaluation for the novel inerter-based dynamic vibration absorbers with negative stiffness", *Journal of Sound and Vibration* 29 (2019), pp. 114941 doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114941>
- [39] J. Ormondroyd, J. P. Den Hartog, "The theory of the dynamic vibration absorber", *ASME J. Appl. Mech.* 50 (1928), pp. 9-22.
- [40] J. V. Uspensky, J. C. Maquieira, J. P. Varela. *Teoría de ecuaciones*. Limusa, 1987.

- [41] I. Gelfand, V. Retakh, “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”, The Gelfand Mathematical Seminars, Springer 1993–1995 (1996), pp. 93-100.
- [42] X. Bai, Q.Liang, L.Hou, “Vibration control of beam-model using tuned inerter enhanced TMD”, Journal of Mechanical Sciences 510 (2021), pp. 116304. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116304>.
- [43] X. Jin, “Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations”, Journal of Mechanical Sciences 119 (2016), pp. 80-87.
- [44] X. Huang, Z. Su, y H. Hua, “Application of a dynamic vibration absorber with negative stiffness for control of a marine shafting system”, Ocean Engineerin (2018), pp. 155, 131-143.
- [45] H. Xiuchang, S. Zhiwei, H. Hongxing, “Optimal parameters for dynamic vibration absorber with negative stiffness in controlling force transmission to a rigid foundation”, International Journal of Mechanical Sciences 403 (2018), pp. 4691, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.033>
- [46] Y. Hu, “An inerter-based electromagnetic device and its application in vehicle suspensions”, Proceedings of the 34th Chinese Control Conference (2015), pp. 28-35.