



Universidad Tecnológica de la Mixteca

Jefatura de carrera de Ingeniería en Física Aplicada

Estudio de la polarización atómica con emisión espontánea dentro de una cavidad con pérdidas y considerando un estado coherente como estado inicial del campo

Trabajo de tesis
como requisito para obtener
el título profesional de

Ingeniero en Física Aplicada

Presenta

David Aquino Hernández

Bajo la dirección de

Director: Dr. Raúl Juárez Amaro
Co-Director: Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

Índice general

1. Introducción	5
2. Conceptos fundamentales de la mecánica cuántica	9
2.1. Principios de la mecánica cuántica	9
2.2. Ecuación de Schrödinger completa	10
2.3. Postulados de la mecánica cuántica	10
2.4. Operador de densidad y sus propiedades	11
2.5. Operador de densidad y la imagen de Schrödinger	13
2.6. Imagen de Heisenberg	13
2.7. Imagen de interacción	14
3. Cuantización del campo electromagnético	16
3.1. Descomposición espectral del campo eléctrico y magnético	16
3.2. Energía del campo eléctrico y magnético	17
3.3. Variables canónicas	19
3.4. Operadores de creación y aniquilación	20
3.5. Operador número	21
3.6. Estados coherentes	22
4. Método de superoperadores	24
4.1. Factorización de operadores exponenciales	25
5. Interacción átomo campo	27
5.1. Álgebra de operadores para dos estados	27
5.2. Operadores de subida y bajada	28
5.3. Matrices de Pauli	29
5.4. Interacción exacta Átomo-Campo	30
5.5. Interacción electromagnética carga-campo	31
5.6. Modelo de Jaynes-Cummings	32
6. Solución de la ecuación maestra del sistema	34
6.1. Detalles de la cavidad cuántica	34
6.2. Aplicación del método de superoperadores en la cavidad	35
7. Cálculo de la polarización atómica	42
7.1. Cálculo de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$	42
7.2. Estados coherentes	45
8. Resultados	46
8.1. Conclusiones	51

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por haberme brindado la oportunidad de seguir mi formación académica en sus aulas.

Al Dr. Raúl Juárez Amaro mi más sincero agradecimiento, por sus atinadas indicaciones y consejos, mismos que me fueron de gran utilidad en la realización del presente trabajo de tesis.

A mi co-asesor Dr. Hector Manuel Moya Cessa por su orientación, apoyo y colaboración desinteresada en el presente trabajo.

A mis profesores, compañeros de clase y todas aquellas personas que de alguna manera me apoyaron en esta tarea, a todos gracias.

*Familia, amigos y personas especiales en mi vida, no podría sentirme menos agradecido con la confianza puesta en mi persona especialmente cuando he contado con su mejor apoyo y compañía desde que siquiera tengo memoria. Quisiera dedicar mi tesis a ustedes.
Gracias.*

Capítulo 1

Introducción

El siglo XX ha sido un siglo lleno de avances teóricos y tecnológicos que propiciaron la investigación de vanguardia por la que hoy en día existen tantos aparatos electrónicos de muy alto desarrollo. Principalmente el desarrollo de la teoría cuántica y las teorías de la relatividad plantearon el cimiento de los tópicos de investigación actual.

La formulación de la teoría cuántica a manos principalmente de Heisenberg y Schrödinger [1] y el cambio de paradigma en la concepción de la naturaleza ha llevado a los físicos a introducir teorías con un respaldo experimental muy amplio, entre muchas otras la electrodinámica cuántica [2] y la teoría cuántica de campos [3], en la actualidad el sustento físico-matemático sobre el que la óptica cuántica se desarrolla y que ha permitido encaminar sus desarrollos tecnológicos en direcciones muy innovadoras. La óptica cuántica tiene como uno de sus principales objetivos el estudio de la interacción entre un campo de radiación y la materia, desarrollando nuevas líneas como la electrodinámica cuántica de cavidades [4], circuitos electromagnéticos cuánticos [5] y el estudio de iones atrapados [6].

La computación cuántica es una de las líneas de investigación donde converge la atención a la necesidad de continuar avanzando tecnológicamente y científicamente [10]. La base fundamental de la computación cuántica consiste en almacenar información en los estados cuánticos de la materia y usar compuertas cuánticas para realizar procesos con dicha información [11]. Tal avance tecnológico y científico, requiere de un desarrollo completo en la comprensión de la unidad fundamental de información cuántica, análogamente al bit clásico ahora se conoce el bit cuántico, es decir el Cúbit [10], que a diferencia de los computadores tradicionales no tiene una representación binaria en los estados de un electrón, que es representado físicamente por un sistema cuántico de dos estados propios que pueden ser manipulados arbitrariamente [11].

Hay muchas ramas de la física que proponen sistemas cuánticos para la realización del Cúbit, tales como cavidades ópticas [12], trampas de iones [13], resonancia magnética nuclear [14] o sistemas que se basan en semiconductores [15]. En todos existen problemas, uno de los principales es la falta de comprensión del fenómeno de decoherencia cuántica [16], tal fenómeno está ligado al colapso de la función de onda en un proceso irreversible de medida.

El campo de la electrodinámica cuántica en cavidades (QCED) propone alternativas en la generación de Cúbits mediante la óptica. Basado en el aislamiento de un átomo dentro de un arreglo de espejos y un campo electromagnético en el interior de la cavidad [18], la interacción entre los fotones y electrones del átomo provoca su excitación, en la práctica se envía un haz de átomos de Ryberg a través de la cavidad con el fin de conseguir entrelazamiento cuántico en la interacción entre átomos y fotones [19]. La manipulación de los estados del átomo se realiza a través del uso de microondas, esta propuesta cuántica genera un sistema de dos Cubits, el de la polarización de las ondas dentro de la cavidad y el de la excitación del electrón que interactúa con las ondas [20].

Dentro de la QCED uno de los modelos más simples para el sistema cuántico es el modelo de Rabi, uno de los primeros modelos que intenta dar una descripción completa del sistema de la cavidad cuántica de manera semiclásica, posteriormente, el modelo de Jaynes-Cummings propone resolver el problema bajo algunas restricciones utilizando un desarrollo cuántico con lo que se logran mejores resultados [21]. Los sistemas propuestos por la QCED al igual que todas las demás opciones incluyen cualidades aprovechables y algunas limitantes para el desarrollo tecnológico, aun así, el sistema de cavidades cuánticas tiene una amplia utilidad en el estudio de la coherencia cuántica [22].

El estudio de la cavidad cuántica consiste en el análisis de un sistema atómico de dos niveles de energía posibles, el estado fundamental de menor energía y el estado excitado de mayor energía, en el caso no degenerado de este sistema la transición de un estado a otro es consecuencia de su interacción con el campo electromagnético provoca la absorción o emisión de un cuanto de energía, es decir, cuando un sistema de dos niveles es iluminado por un haz coherente de fotones, este los absorbe y emite de manera cíclica. A uno de estos ciclos se le conoce como ciclo de Rabi en honor a Isidor Isaac Rabi y es descrito por el modelo Jaynes-Cummings [21].

Con la intención de un estudio del átomo dentro de la cavidad de manera precisa el análisis se hace con un desarrollo cuántico en ambas partes, el sistema atómico con el nivel de energía oscilante y para el campo electromagnético.

Para el campo electromagnético se toma el criterio de la segunda cuantización de Dirac [33], bajo este criterio se propone poner los potenciales correspondientes a los campos eléctrico y magnético, en términos de los operadores de creación y aniquilación de tal manera que cumplan con reglas de conmutación propias de la descripción cuántica, el cambio permite el aumento y la disminución de la energía electromagnética fotón a fotón de manera discreta.

El sistema atómico se analiza de manera parecida pues el planteamiento se vale de los operadores de subida y bajada, como analogía a los de creación y aniquilación, bajo algunas restricciones que los acoplen a las transiciones de estados energéticos propios del sistema de dos niveles. Profundizando en el comportamiento de los operadores para encontrar la relación con las matrices de Pauli y específicamente con una de ellas que toma un papel importante, de esta

manera la descripción del sistema deja de lado los operadores de subida y bajada, para estar en términos del operador de inversión atómica [39].

Una vez que las características de la cavidad cuántica son establecidas por separado, átomo y campo, se pretende encontrar las consecuencias de esta interacción. Utilizando el momento dipolar del átomo que tiene dependencia directa de los operadores de subida y bajada al interactuar con el campo en función del momento y del potencial vectorial del campo [44], que a su vez depende de los operadores de creación y aniquilación, se obtiene un hamiltoniano que describe la interacción entre los cuatro operadores en conjunto y una constante de interacción átomo-campo, donde a esta constante se le conoce como frecuencia de Rabi [23] y es una frecuencia característica de la interacción.

La aportación conjunta de los tres hamiltonianos la del átomo, la del campo y el de interacción, conforman el llamado Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC), aportación consecuente del modelo JC. La descripción del sistema mediante este Hamiltoniano da una descripción cuántica mucho más cercana que la del modelo semiclásico de Rabi, sin embargo, aún es estacionaria por lo que se añade la evolución temporal al Hamiltoniano y el operador de densidad en conjunto planteando la ecuación maestra del sistema [24].

La ecuación maestra permite conocer la evolución temporal del operador de densidad de un sistema que puede ser descrito como una distribución probabilística, de aquí que se representa el sistema en términos del operador de densidad para los estados posibles del sistema, el resultado de resolver la ecuación maestra es un operador de densidad que varía con el tiempo y es sensible a las condiciones iniciales [43]. Para resolver la ecuación maestra se utiliza del método de superoperadores, considerando un sistema disipativo a consecuencia de la emisión espontánea y la disipación de la energía por las paredes de la cavidad.

Se hace referencia al sistema como un sistema atómico de dos niveles de energía inmerso en un baño de radiación electromagnética, dentro de una cavidad cuántica hecha por un arreglo de espejos semireflejantes, la interacción entre los fotones del campo electromagnético y el electrón atómico provoca la emisión y absorción de fotones por el átomo durante el proceso de excitación y decaimiento de los niveles de energía. Dado que se considera la frecuencia del campo en un rango tal que su acoplamiento con el átomo provoca que las oscilaciones solo ocurran entre dos niveles de energía atómica, los niveles restantes de energía quedan fuera de la frecuencia de acoplamiento de la interacción átomo-campo por lo que no es necesario contemplar niveles adicionales.

El presente trabajo se fundamenta en el desarrollo propuesto por Jaynes y Cummings sobre sistemas atómicos de dos niveles, es decir, el sistema estacionario es modelado por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. Donde se plantea el problema de dar una solución dependiente del tiempo partiendo de un sistema estacionario, para describir la influencia de la frecuencia del campo y el número de fotones en la polarización atómica.

A partir de encontrar una solución dependiente del tiempo para el sistema, la manera de encontrar la influencia del campo en las oscilaciones es variando la cantidad de energía en el campo, como el modelo considera un campo electromagnético cuantizado la variación de la energía se hace a través de cantidades discretas y sobre una base de estados coherentes, es decir, la variación del número de fotones, un parámetro de la tasa de decaimiento, la constante de disipación de energía a través de calor y la diferencia entre las frecuencias.

Como condición importante para el tratamiento de la energía disipada se considera que la cavidad puede perder energía únicamente a través de los espejos que confinan el sistema a manera de radiación térmica y será modulada una tasa de disipación relacionada a los espejos, además se considera que la energía transformada en calor no calienta el sistema y es emitida hacia el infinito. Por otra parte, también existe una variación en la energía del sistema por los fotones absorbidos por el átomo que, aunque en un instante posterior es energía que regresa al campo es necesario considerar que continuamente hay variaciones por este fenómeno de absorción y emisión.

Dentro del desarrollo planeado se han establecidos objetivos que marcan una dirección de trabajo, intentando delimitar de manera clara el alcance de la investigación. Como objetivo general se plantea estudiar la polarización de un átomo de dos niveles dentro de una cavidad con pérdidas mediante análisis de la relación entre el número de fotones y el tiempo de colapso de las oscilaciones de Rabi en el sistema átomo-campo, considerando emisión espontánea. Y se plantea llegar a esto con el seguimiento de una línea de trabajo, estudiar la ecuación maestra del sistema átomo campo dentro de una cavidad considerando emisión espontánea, estudiar la técnica de super operadores para resolver las ecuaciones maestras, realizar el cálculo numérico del valor esperado del operador de polarización y finalmente analizar el comportamiento de la polarización con respecto al número de fotones dentro de la cavidad.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales de la mecánica cuántica

2.1. Principios de la mecánica cuántica

Históricamente la mecánica cuántica en un inicio fue formulada de manera matricial en un desarrollo de manos de Born, Pascual Jordan y Heisenberg, este último es a quien se le atribuye. Se trata de un desarrollo elegante y riguroso en las que las variables dinámicas son representadas por matrices. Normalmente a esta parte se le conoce como mecánica matricial de Heisenberg, de manera paralela, Louis de Broglie inició un estudio que culminaría con la teoría de Erwin Schrödinger, un enfoque distinto conocido como mecánica ondulatoria. Ambos enfoques sólo son dos interpretaciones distintas de la misma teoría física abordada desde bases y posturas diferentes. Para lograr un desarrollo ondulatorio se considera una onda electromagnética con amplitud, frecuencia, periodo y todas las características comunes de una onda, siguiendo este planteamiento ondulatorio la descripción cuántica de un sistema debe cumplir ciertas características ondulatorias y probabilísticas para una función que describa el estado del sistema. Para introducir la difracción característica de un fenómeno ondulatorio, debe darse por los cambios de fase por lo cual esta amplitud Ψ debe ser compleja de tal manera que obedezca a las siguientes propiedades:

- Ψ debe satisfacer la ecuación de onda[25]

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \quad (2.1)$$

-El cuadrado del módulo de la función de onda proporciona la probabilidad de encontrar a la partícula en cada punto;

$$p(x) = N |\Psi|^2, \quad (2.2)$$

$$\int \Psi^*\Psi dv = 1. \quad (2.3)$$

2.2. Ecuación de Schrödinger completa

El problema que resuelve la ecuación Schrödinger es el de generalizar el concepto de onda asociada a un corpúsculo de materia, si se añade dependencia temporal a la función de onda, se obtiene la ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento de una onda asociada a una partícula de materia con dependencia temporal. Si se considera una onda que se mueve en dirección $+x$, $\omega = 2\pi\nu$ y $v = \lambda\nu$, claramente $E = \hbar\nu = 2\pi\hbar\nu$ y $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$, entonces

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}, \quad (2.4)$$

esta última ecuación describe la onda equivalente de una partícula libre de energía E y momento p que se mueve en dirección $+x$. De manera general, para una partícula con momento p y con alguna interacción con su entorno, se puede escribir la energía como

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + U(x, t)\Psi, \quad (2.5)$$

de la expresión (2.4) y (2.5) se obtiene la siguiente ecuación [27]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(x, t)\Psi. \quad (2.6)$$

El Hamiltoniano se puede escribir como $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x, t)$ y entonces se encuentra la ecuación de Schrödinger completa o dependiente del tiempo[28]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (2.7)$$

2.3. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica se fundamenta en los siguientes 5 principios[28]:

1. Todo posible estado físico $\Psi(x)$ de un sistema dado, corresponde a un cierto vector $\Psi(x)$ del espacio de Hilbert normado, y recíprocamente, todo vector $\Psi(x)$ del espacio de Hilbert normado corresponde a un posible estado físico del sistema. Esta correspondencia es biunívoca salvo que difieran en un factor escalar.
2. A cada observable físico corresponde en el espacio de Hilbert un operador lineal Hermítico \hat{A} que posee un conjunto completo ortogonal de vectores propios $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle\dots$ y un conjunto correspondientes de valores propios reales $a_1, a_2, a_3\dots$

$$\hat{A}|\Psi_i\rangle = a_i|\Psi_i\rangle. \quad (2.8)$$

3. Si un operador \hat{A} tiene una base propia $\{a_i(x)\}$ y valores propios $\{A_i\}$, y se mide un observable A en un sistema que, inmediatamente antes de la medida esté en el estado $|\Psi\rangle$, lo más que se puede predecir del resultado de esta medida es lo siguiente: la probabilidad

de que la medida del valor propio A_k sea $|\langle \Psi | \Psi \rangle|^2$. De manera general para el caso discreto

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle \Psi_n | \Psi \rangle|^2}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (2.9)$$

y para un espectro continuo la densidad de probabilidad es

$$P(x) = \frac{\int |\Psi(x)|^2 dx}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\int |\Psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x')|^2 dx'}. \quad (2.10)$$

4. La medición de un observable ocasiona una alteración en el vector de estado del sistema, el vector de estado inmediatamente antes de la medición en el instante posterior a ella coincidirá con el vector propio correspondiente al valor propio obtenido.
5. La evolución temporal de un vector de estado $|\Psi\rangle$ de un sistema está dado por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi,$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía total del sistema.

2.4. Operador de densidad y sus propiedades

Un sistema físico no necesariamente está caracterizado por una función de onda $\Psi_n(x, t)$, frecuentemente este sistema esta conformado por subsistemas independientes entre sí. En tal caso, un observable A estará definido en cada subsistema por A_i por lo que A depende de la aportación o el peso de cada A_i . Si se asigna el nombre ω_i al peso del subsistema i donde este peso es una fracción entre $0 < \omega < 1$, lo que quiere decir que del total de subsistemas que componen el sistema, la fracción ω_i se encuentran en el estado i , entonces el promedio de A sobre el sistema total queda definido como [46]

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i A_i, \quad (2.11)$$

la manera de pasar de la teoría de un solo vector de estado a un sistema cuya descripción requiere un conjunto apropiado de vectores de estado y sus pesos correspondientes es a partir de la llamada matriz de densidad o operador de densidad[28]

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.12)$$

los estados $|i\rangle$ pueden expresarse en términos de una base ortonormal, donde $a_{in} = \langle n|i\rangle$ y $a_{im}^* = \langle i|m\rangle$. De aquí se deriva una expresión más general para el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|. \quad (2.13)$$

Por otro lado, si $|\hat{A}\rangle$ es un operador cualquiera, del que se busca calcular el valor medio $\langle\hat{A}\rangle$, el valor medio por cada subensamble i es $A_i = \langle i|\hat{A}|i\rangle$ y cumple.

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_n \left(\hat{\rho}\hat{A}\right)_{nn} = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{A}), \quad (2.14)$$

donde el operador traza significa sumar los valores en la diagonal de la matriz, para este caso $\hat{\rho}\hat{A}$ [42]. De acuerdo a la definición de matriz de densidad y de valor esperado de un operador, se pueden obtener algunas propiedades para la matriz de densidad $\hat{\rho}$ [28].

Si se toma $\hat{A} = 1$ de la definición de la matriz de densidad, entonces

$$\text{tr}(\hat{\rho}) = \text{tr}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle\langle i|\right) = \sum_{i=1}^N \omega_i \langle i|i\rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (2.15)$$

por definición los pesos son reales y positivos, $\omega_i^* = \omega_i$ y $\omega_i \geq 0$, es decir,

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle\langle i|\right)^\dagger = \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle\langle i| = \hat{\rho}, \quad (2.16)$$

además, si $|i\rangle = \sum_n a_{in} |n\rangle$, $\langle i| = \sum_n a_{in}^* \langle n|$, al sustituir en la definición

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i=1}^N \omega_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^N \omega_i a_{in} |n\rangle a_{in}^* \langle n|, \\ \rho_{nn} &= \sum_{i=1}^N \omega_i a_{in} a_{in}^* \langle n|n\rangle, \end{aligned}$$

utilizando la condición $\omega_i \geq 0$

$$\rho_{nn} = \sum_{i=1}^N \omega_i |a_{in}|^2 \geq 0. \quad (2.17)$$

Al inicio se ha definido que el peso $0 \leq \omega_i \leq 1$, por lo que todas las entradas de la traza también cumplen la condición [42]

$$0 \leq \rho_{nn} \leq 1. \quad (2.18)$$

Si cada elemento de la matriz de densidad es representado por $\rho_{nm} = \rho_n \delta_{mn}$, la traza cumple con

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\rho}^2) &\geq (\text{tr}\hat{\rho})^2, \\ \text{tr}(\hat{\rho}^2) &\geq 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

cabe especificar que los estados $|i\rangle$ pueden pasar a otra representación $|j\rangle$, mediante el operador unitario \hat{U} respetando las reglas generales de transformación de un operador

$$|j\rangle = \hat{U}|i\rangle,$$

entonces

$$\hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}', \quad (2.20)$$

siendo $\hat{\rho}'$ la matriz de densidad en la nueva representación con estados $|j\rangle$. De esta propiedad sigue que el valor esperado de cualquier operador es independiente de la representación. Donde se denota como $\langle\hat{A}'\rangle$ y $\hat{\rho}'$ las variables en la nueva representación, es decir,

$$\langle\hat{A}'\rangle = \langle\hat{A}\rangle.$$

2.5. Operador de densidad y la imagen de Schrödinger

El siguiente paso es encontrar una ecuación que describa la evolución temporal de $\hat{\rho}$. Para esto es necesario desarrollar ideas previas, según la descripción de Schrödinger, aprovechando la notación de Dirac [28]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \rightarrow i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle,$$

si \hat{H} no depende del tiempo, se tiene la solución general

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle,$$

aquí se introduce el operador de evolución \hat{S} [49]

$$\hat{S} \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \quad (2.21)$$

de esta manera se tiene todo lo necesario, pues entonces al sustituir \hat{S} en las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = \hat{S}(t)|\psi_0\rangle, \quad (2.22)$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{S}(t)}{\partial t} = \hat{H}\hat{S}(t). \quad (2.23)$$

Al sustituir la derivada del operador de densidad en la ecuación de Schrödinger y simplificar la expresión con notación de conmutadores se obtiene

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \quad (2.24)$$

la cual se conoce como ecuación de von Neumann [28] y describe el desarrollo del operador de densidad a través del tiempo. Esta ecuación sólo se cumple cuando se toma el operador de densidad en la imagen de Schrödinger, es decir, cuando los estados o funciones de onda $|\psi\rangle$ dependen explícitamente del tiempo t , mientras los operadores \hat{A}, \hat{B} no tienen dependencia temporal.

2.6. Imagen de Heisenberg

Para tener una formulación de la mecánica cuántica basada en la imagen de Heisenberg donde los estados o funciones de onda $|\psi\rangle$ no dependen del tiempo y donde los operadores $\hat{A}(t), \hat{B}(t)$ si dependen explícitamente del tiempo t , se debe observar que ambas imágenes están relacionadas entre sí por un operador unitario que transforma de una imagen a otra.

Se nombra $\hat{T}(t)$ al operador encargado de realizar la transformación, este operador tiene dependencia temporal. Para mejorar la notación se denota con subíndice H a los estados y operadores de la imagen de Heisenberg y con subíndice S a los estados y operadores de la imagen de Schrödinger, para establecer un punto de referencia inicial se pide que ambas imágenes de Schrödinger y de Heisenberg, coincidan en el instante $t = 0$ [33]

$$|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S, \quad (2.25)$$

es decir, el operador \hat{T} debe satisfacer las condiciones siguientes

$$|\psi\rangle_H = \hat{T}(t)|\psi\rangle_S, \quad (2.26)$$

$$\hat{T}(0) = 1, \quad (2.27)$$

una vez que sea establecido esto, si $|\psi\rangle(t) \neq 0$, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{T}(t), \quad (2.28)$$

esta es la ecuación que se rige por la imagen de Heisenberg [5], con solución

$$\hat{T}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_s t}, \quad (2.29)$$

donde \hat{T} es el inverso del operador de evolución temporal \hat{S} .

2.7. Imagen de interacción

En muchas ocasiones el Hamiltoniano del sistema puede ser dividido en dos partes, donde una de ellas es el hamiltoniano sin ningún tipo de perturbación, mientras la otra parte corresponde a las perturbaciones sucesivas hechas sobre el estado no perturbado. La evolución temporal del sistema entre estados y operadores está caracterizado por la suma de ambos [29]

$$\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^0(t) + \hat{H}_s^1(t). \quad (2.30)$$

Para que la imagen de interacción sea útil para simplificar el análisis de los fenómenos físicos y fácil de resolver matemáticamente, en general las partes se elegirán de modo que $\hat{H}_s^0(t)$ sea conocido y se resuelva exactamente, mientras que $\hat{H}_s^1(t)$ contenga una perturbación de la primera con grado de dificultad mayor. Como los vectores de estado $|\psi(r, t)\rangle$ y los operadores $\hat{A}_I(t)$ dependen del tiempo se obtiene de los vectores de estado y los operadores en la representación de Schrödinger mediante el operador unitario

$$S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}.$$

El operador unitario puede ser aplicado a los vectores de estado y a los operadores de la imagen de Schrödinger, de tal manera que se obtienen operadores y vectores de estado en la imagen de

interacción [31].

$$\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_s t} \hat{A}_s(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \quad (2.31)$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} |\psi_s\rangle, \quad (2.32)$$

de esta manera en el tiempo $t = 0$ se obtiene que la imagen de interacción y la de Schrödinger coinciden, es decir, $|\psi\rangle_S = |\psi(t)\rangle_I$. Con el operador de transformación y la ecuación de Schrödinger, se tiene

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} |\psi_s\rangle, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_s &= \hat{H} |\Psi\rangle_s, \end{aligned} \quad (2.33)$$

ambas expresiones son introducidas en la ecuación (2.33) para obtener

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = -\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \hat{H} |\Psi\rangle_s. \quad (2.34)$$

Para simplificar se toma en cuenta que $\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^0(t) + \hat{H}_s^1(t)$. Además, se puede reescribir

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \right) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st}, \quad (2.35)$$

si se nombra $\left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \right) = \hat{H}_I^1(t)$, entonces

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st} \hat{H}_s^1(t) = \hat{H}_I^1(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0, st}, \quad (2.36)$$

de esta manera en la ecuación (2.34) se sustituye $\hat{H}_s(t) = \hat{H}_s^O(t) + \hat{H}_s^1(t)$ para obtener la representación e interacción de un operador y se utiliza la definición ya presentada

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = \hat{H}_I^1(t) |\Psi(t)\rangle_I, \quad (2.37)$$

al utilizar la definición $\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_s t} \hat{A}_s(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ y derivar con respecto al tiempo se obtiene un conmutador para la evolución temporal de operadores [30]

$$\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0]. \quad (2.38)$$

Capítulo 3

Cuantización del campo electromagnético

Es de interés analizar el campo electromagnético de manera cuántica, por lo que es necesario ir más allá de una interpretación clásica de los fenómenos eléctrico y magnéticos, se aprecia que el campo eléctrico \vec{E} como el campo magnético \vec{B} son dos cantidades medibles al igual que sus respectivos potenciales ϕ y \vec{A} , así que para conformar una teoría cuántica completa debería de especificarse los operadores

$$\hat{E}, \hat{B}, \hat{\phi}, \hat{A}.$$

La técnica empleada para tratar sistemas cuánticos de muchas partículas idénticas sean bosones o fermiones es llamado formalismo de la segunda cuantización, desarrollada a partir de 1927 por Paul A.M. Dirac para los bosones o partículas que respetan la estadística de Bose-Einstein y extendido a los fermiones por Eugene Wigner y Pascual Jordan en 1928, es decir, partículas que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.

Tal formalismo permite tomar en cuenta automáticamente en los cálculos los aspectos estadísticos apropiados al tipo de partículas del sistema. Además, facilita, extender la mecánica cuántica no relativista a sistemas en los cuales el número de partículas no es una constante del movimiento, extensión que por otra parte es necesaria para describir los fenómenos que se presentan en el dominio relativista.

En este sentido para iniciar el proceso de cuantización del campo electromagnético debe partirse por establecer que el fotón es un bosón, y en consecuencia el proceso de cuantización se desarrollara bajo este marco [43].

3.1. Descomposición espectral del campo eléctrico y magnético

Se tiene como punto de partida una cavidad cúbica de lado L y de volumen L^3 vacía, por simplicidad vamos a considerar condiciones de contorno periódicas. El campo electromagnético dentro de la cavidad respeta las ecuaciones de Maxwell considerando que la densidad de carga

dentro de la cavidad es nula [53].

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.4)$$

Por la propiedad vectorial $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ y la ecuación (3.4) resulta inmediato deducir que el campo magnético, además de algunas manipulaciones en las ecuaciones de Maxwell puede obtenerse una expresión para los campos eléctrico y magnético,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.5)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Involucrando la siguiente ecuación

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

donde \vec{H} , la intensidad magnética, está conformado por la aportación del campo magnético y la magnetización del medio, \vec{D} el desplazamiento eléctrico conformado por una aportación del campo eléctrico y otra de parte de la polarización eléctrica del medio [44]. Al introducir (3.5) y (3.6) en (3.7) se llega a la ecuación de onda para el potencial del campo magnético [28]

$$-\nabla^2 \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

3.2. Energía del campo eléctrico y magnético

El análisis a seguir es muy similar al utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger completa salvo por algunas consideraciones extras, puede reescribirse utilizando la velocidad de propagación $v = c = \frac{\omega}{k}$, además de considerar que debe cumplir periodicidad en el espacio y en el tiempo, es decir, $kL = 2\pi l_i$ con $l_i = x, y, z$ y $\omega T = 2\pi$, también se renombran las amplitudes para ajustarlas a la notación de tal manera que la solución es la siguiente [52],

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{a}_{\vec{k}} \exp\left(i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r}\right).$$

Dado que las solución general es una superposición de ondas, en igual o diferente dirección, entonces debe integrarse en la solución la suma de todos los posibles vectores de onda en sentido positivo o negativo, es decir, todos los $\vec{A}_{\vec{k}}$ y su complejo conjugado que se denotará con

un asterisco como superíndice

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} \exp \left(i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) + \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp \left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right], \quad (3.9)$$

los coeficientes de amplitud se determinan gracias a la condición impuesta de transversalidad;

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} = 0. \quad (3.10)$$

Con la solución de la ecuación de onda para el potencial vectorial \vec{A} se puede describir los campos eléctrico y magnético, teniendo en cuenta que durante la deducción de la ecuación del potencial \vec{A} se considera que ϕ es nulo, por lo que los campos quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\vec{k}} \left[i\omega \vec{a}_{\vec{k}} \exp \left(i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) + i\omega \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp \left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right], \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[i(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}) \exp \left(i\omega(\vec{k})t - i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) + i(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}^*) \exp \left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores cumplen perfectamente el trabajo de describir el campo eléctrico y magnético como un desarrollo de ondas planas de los campos, ahora se trata de encontrar una expresión para la energía almacenada dentro de estos campos (a la que se le nombrará H) utilizando estos resultados. Para eso es necesario sumar la energía almacenada dentro del campo eléctrico y magnético por separado [40]

$$H = \int_V H_i dr^3, \quad (3.11)$$

donde $\mathcal{U}_E = \frac{1}{2}\epsilon_o E^2$ es la energía almacenada en el campo eléctrico y $\mathcal{U}_B = \frac{1}{2\mu_o} B^2$ es la energía almacenada en el campo magnético. Al sustituir las ecuaciones del campo eléctrico y magnético dentro de la integral

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\epsilon_o V c^2 \sum_{\vec{K}} k^2 \left[2\vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* - \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp \left(2i\omega(\vec{k})t \right) - \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{\vec{k}} \exp \left(-2i\omega(\vec{k})t \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_o} V \sum_{\vec{K}} k^2 \left[2\vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* + \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp \left(2i\omega(\vec{k})t \right) + \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{\vec{k}} \exp \left(-2i\omega(\vec{k})t \right) \right], \end{aligned}$$

dado que $c^2\epsilon_o = \frac{1}{\mu_o}$ esto simplifica anulando los términos con exponentiales. Así se obtiene una buena base de dónde deducir el Hamiltoniano para estos campos y en otras palabras la expresión para la energía [38]

$$H = \frac{2V}{\mu_o} \sum_{\vec{K}} k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^*. \quad (3.12)$$

3.3. Variables canónicas

La formulación de Hamilton se basa en una visión diferente a la formulación de Lagrange donde el uso de coordenadas generalizadas termina de manera inevitable por incluir ecuaciones de movimiento de segundo orden dentro del análisis.

La diferencia en la formulación inicia cuando se utiliza las cantidades de movimiento conjugados o generalizados dejando de lado las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}}, \quad (3.13)$$

con esto en mente las cantidades (Q, P) se denominan variables canónicas. Entonces para continuar con el proceso de cuantización se requiere reescribir la ecuación (3.12) en el marco del lenguaje de Hamilton, haciendo uso de las variables canónicas, esto es, coordenadas y momentos generalizados que satisfacen las ecuaciones de Hamilton. Se define entonces las variables canónicas de la siguiente manera [50]

$$\vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[\vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega(\vec{k})t) + \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp(-i\omega(\vec{k})t) \right], \quad (3.14)$$

$$\vec{P}_{\vec{k}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[i\omega(\vec{k}) \vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega(\vec{k})t) - i\omega(\vec{k}) \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp(-i\omega(\vec{k})t) \right]. \quad (3.15)$$

para resolver el sistema 2x2 con las incógnitas \vec{a} y \vec{a}^* , de donde se obtiene lo siguiente

$$\vec{a} = \frac{1}{2\alpha} \exp^{-i\omega(\vec{k})t} \left(\vec{Q}_{\vec{k}} - \frac{i}{\omega(\vec{k})} \vec{P}_{\vec{k}} \right), \quad (3.16)$$

$$\vec{a}^* = \frac{1}{2\alpha} \exp^{i\omega(\vec{k})t} \left(\vec{Q}_{\vec{k}} + \frac{i}{\omega(\vec{k})} \vec{P}_{\vec{k}} \right). \quad (3.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.16) y (3.17) en la ecuación (3.12) de la energía, además de utilizar $\mu_o \epsilon_o = c^{-2}$ y $\frac{k^2}{\omega^2} = c^{-2}$ se obtiene la expresión

$$H = \frac{\epsilon_o V}{2\alpha^2} \sum_{\vec{K}} \left[\omega^2(\vec{k}) Q_{\vec{k}}^2 + P^2 \right], \quad (3.18)$$

la constante α toma importancia porque es la que determinará si las variables canónicas propuestas satisfacen las ecuaciones de Hamilton [50],

$$\dot{Q}_{\vec{k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{P}_{\vec{k}}}, \quad (3.19)$$

$$\dot{P}_{\vec{k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{Q}_{\vec{k}}}. \quad (3.20)$$

Es facil probar que el α requerido es

$$\alpha = \sqrt{\epsilon_o V}, \quad (3.21)$$

la deducción continúa considerando la transversalidad de los campos, es decir, los vectores $Q_{\vec{k}}$

y $P_{\vec{k}}$ son normales a la dirección de propagación de la onda dictada por el vector de onda \vec{k} [39]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, j} \left[\omega^2(\vec{k}) Q_{\vec{k}, j}^2 + P_{\vec{k}, j}^2 \right], \quad (3.22)$$

donde j denota una de las componentes ortogonales de la polarización lineal.

3.4. Operadores de creación y aniquilación

En su criterio de cuantización P. Dirac sugirió que el campo electromagnético podía ser cuantizado haciendo que las variables canónicas \hat{Q} y \hat{P} obedecieran las relaciones de conmutación siguientes [33],

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar, \quad (3.23)$$

$$[\hat{Q}, \hat{Q}] = 0, \quad (3.24)$$

$$[\hat{P}, \hat{P}] = 0. \quad (3.25)$$

Además de que se definen los operadores de creación y aniquilación de la siguiente manera [55],

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} \left(\hat{Q} + \frac{i}{\omega(\vec{k})} \hat{P} \right), \quad (3.26)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} \left(\hat{Q} - \frac{i}{\omega(\vec{k})} \hat{P} \right). \quad (3.27)$$

Al momento de calcular los conmutadores de los operadores, estos cumplen las siguientes relaciones sólo si se cumple la sugerencia de P. Dirac [54, 55].

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.28)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 0, \quad (3.29)$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (3.30)$$

Las ecuaciones (3.26) y (3.27) conforman un sistema cuadrado de dos incógnitas, al resolverlo se puede encontrar expresiones para las coordenadas generalizadas en términos de los operadores de creación y aniquilación.

$$\hat{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega(\vec{k})}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.31)$$

$$\hat{P} = \frac{\omega}{2i} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega(\vec{k})}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.32)$$

Con estas nuevas expresiones se puede reescribir el Hamiltoniano de la ecuación (3.22) sustituyendo las ecuaciones (3.31) y (3.32). Con lo que se obtiene la ya conocida expresión cuántica

para las energías del oscilador armónico aplicado al campo electromagnético [42].

$$\hat{H} = \omega(\vec{k})\hbar \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.33)$$

3.5. Operador número

Del Hamiltoniano (3.33) se puede definir los operadores número de ocupación, también se le conoce como operador número de partículas [43]

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.34)$$

Si el estado $|n\rangle$ es estado propio del operador \hat{N} con valor propio

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (3.35)$$

entonces el valor propio de energía para este estado es [42]

$$\hat{H}|n\rangle = \left(\frac{1}{2} + n \right) \omega\hbar|n\rangle, \quad (3.36)$$

en esta ecuación se ve claramente la interpretación de n como el número de partículas, donde el estado de energía más bajo es el estado fundamental y corresponde al estado en el que el número de partículas es igual a 0, el valor propio de la energía está dado por $\frac{\omega\hbar}{2}$.

Usando las propiedades de los conmutadores se pueden demostrar las siguientes identidades, tomando en cuenta que se suprimen los subíndices, dado que se considera que se trabaja bajo el mismo vector de onda y la misma componente de polarización:

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad (3.37)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}. \quad (3.38)$$

De manera general se puede demostrar que, si se impone la normalización $\langle n|n\rangle = 1$ para todo n se tiene las siguientes propiedades [18]

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3.39)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.40)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \quad (3.41)$$

$$\hat{a}^{\dagger m}|n\rangle = \sqrt{\frac{(m+n)!}{n!}}|m+n\rangle, \quad (3.42)$$

$$\hat{a}^m|n\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}|n-m\rangle. \quad (3.43)$$

3.6. Estados coherentes

Desde un principio se ha especificado el tipo de partículas con las que se trabaja, las consideraciones y su naturaleza cambia completamente de bosones a fermiones, el comportamiento de los bosones es distinto al de los fermiones, para el fotón, como bosón, no existe el principio de exclusión de Pauli.

Pueden producirse interacciones entre grandes cantidades de bosones para entrar en estados uniformes de vibración unitaria que son llamados estados de coherencia cuántica, fueron introducidos por Schrödinger por el año de 1926, y son los fundamentos de lo que hoy se conoce como óptica cuántica [18].

Matemáticamente un estado coherente $|\alpha\rangle$ se define como el estado propio del operador de aniquilación \hat{a} con valor propio α [52]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.44)$$

A su vez los estados propios $|\alpha\rangle$ también son estados propios a la izquierda del operador de creación, con valor propio conjugados

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*, \quad (3.45)$$

dado que \hat{a} no es hermitiano, en general α es un número complejo que puede ser escrito como

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta}, \quad (3.46)$$

donde $|\alpha|$ es la amplitud y θ es la fase del estado $|\alpha\rangle$. El estado propio $|\alpha\rangle$ puede ser desarrollado en la base de estados propios $|n\rangle$, como una combinación lineal

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (3.47)$$

y al aplicar \hat{a} se obtiene

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (3.48)$$

de estas expresiones se obtiene

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0, \quad (3.49)$$

y entonces

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Nuevamente, al normalizar esta expresión con $\langle n|n\rangle = 1$, se puede obtener el valor de $C_0 =$

$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$, y entonces la expresion final es la siguiente

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = |C_o|^2 \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right)^* \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle = |C_o|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_o|^2 e^{\frac{|\alpha|^2}{2}},$$

y entonces

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.50)$$

Capítulo 4

Método de superoperadores

Para encontrar el desarrollo temporal de un sistema cuántico se recurre a resolver la ecuación de Schrödinger, cuya solución, por ejemplo, si el hamiltoniano no depende el tiempo, es la siguiente

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\phi(0)\rangle. \quad (4.1)$$

Para ejemplificar en el método de superoperadores y para factorizar operadores exponenciales se hace la consideración de tomar el operador como una suma de otros operadores, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{i}(\hat{A} + \hat{B})$, donde el operador exponencial se aplica sobre el estado $|\phi(0)\rangle$.

$$|\phi(t)\rangle = e^{(\hat{A} + \hat{B})t}|\phi(0)\rangle, \quad (4.2)$$

el problema de la factorización de operadores exponenciales surge al evaluarlos, si la ecuación anterior se expande en una serie de potencias se obtiene $(\hat{A} + \hat{B})^n$, mientras más grande es n más difícil es evaluar los operadores, así que es conveniente factorizar los operadores para simplificar el cálculo. El caso simple ocurre cuando los operadores conmutan pero en general lo que ocurrirá es que la factorización no es directa

$$e^{(\hat{A} + \hat{B})} \neq e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}, \quad (4.3)$$

Cuando se cumplen los conmutadores $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ es posible factorizar el operador exponencial ya que $[\hat{A}, \hat{B}]$ es un número y no un operador, queda de la siguiente manera

$$e^{(\hat{A} + \hat{B})} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}, \quad (4.4)$$

utilizando esta factorización al momento de aplicar el operador exponencial como una expansión en series de potencia se vuelve directo aplicar un solo operador elevado a la n y después el otro. Con este ejemplo se puede ver que, si es posible separar el argumento de los operadores exponenciales.

4.1. Factorización de operadores exponenciales

Si un operador de densidad obedece la siguiente ecuación

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R}+\hat{J})t}\hat{\rho}(0), \quad (4.5)$$

donde los operadores respetan la siguiente regla de conmutación:

$$[\hat{R}, \hat{J}] \hat{\rho} = \hat{S}\hat{J}\hat{\rho}, \quad (4.6)$$

$$[\hat{R}, \hat{S}] \hat{\rho} = 0. \quad (4.7)$$

Entonces, se pueden definir las siguientes ecuaciones, para la función $f(t)$

$$f(t) = e^{(\hat{R}+\hat{J})t}, \quad (4.8)$$

$$f(t) = e^{\hat{R}t}e^{g(t)\hat{J}}. \quad (4.9)$$

El proceso de separación comienza al derivar ambas ecuaciones con respecto a t

$$\frac{df(t)}{dt} = (\hat{R} + \hat{J})f(t), \quad (4.10)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R}e^{\hat{R}t}e^{g(t)\hat{J}} + e^{\hat{R}t}\frac{dg(t)}{dt}\hat{J}e^{g(t)\hat{J}}. \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) se introduce el operador identidad $I = e^{\hat{R}t}e^{-\hat{R}t}$ y agrupando se obtiene lo siguiente

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R}(e^{\hat{R}t}e^{g(t)\hat{J}}) + \frac{dg(t)}{dt}e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t}(e^{\hat{R}t}e^{g(t)\hat{J}}), \quad (4.12)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \hat{R}f(t) + \frac{dg(t)}{dt}e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t}f(t). \quad (4.13)$$

El producto de los operadores $e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t}$ que aparecen en el segundo termino se pueden desarrollar en series de potencias y al agrupar se obtienen conmutadores como los siguientes

$$e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t} = \hat{J} + t[\hat{R}, \hat{J}] + \frac{t^2}{2!}[\hat{R}, [\hat{R}, \hat{J}]] + \dots, \quad (4.14)$$

si se utiliza el conmutador definido (4.6) y la propiedad $[\hat{R}, \hat{S}\hat{J}] = [\hat{R}, \hat{S}]\hat{J} + \hat{S}[\hat{R}, \hat{J}]$, se encuentra

$$[\hat{R}, \hat{S}\hat{J}] = 0 + \hat{S}\hat{S}\hat{J} = \hat{S}^2\hat{J}, \quad (4.15)$$

entonces al sustituir en (4.15) y factorizar el operador \hat{J}

$$e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t} = \left(I + t\hat{S} + \frac{(t\hat{S})^2}{2!} + \dots \right) \hat{J}, \quad (4.16)$$

por lo que

$$e^{\hat{R}t}\hat{J}e^{-\hat{R}t} = e^{\hat{S}t}\hat{J}. \quad (4.17)$$

El resultado (4.17) se sustituye en (4.13)

$$\frac{df(t)}{dt} = \left[\hat{R} + \frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{S}t} \hat{J} \right] f(t), \quad (4.18)$$

si se comparan las ecuaciones (4.10) y (4.18), se observa que solo se cumple si

$$\frac{dg(t)}{dt} e^{\hat{S}t} = 1, \quad (4.19)$$

es decir,

$$g(t) = \frac{-e^{-\hat{S}t}}{\hat{S}} \Big|_0^t = \frac{1 - e^{-\hat{S}t}}{\hat{S}}, \quad (4.20)$$

con lo que $f(t)$ se puede escribir de la siguiente forma

$$f(t) = e^{\hat{R}t} e^{\frac{1 - e^{-\hat{S}t}}{\hat{S}} \hat{J}}, \quad (4.21)$$

entonces siempre que se pueda obtener los conmutadores (4.6) y (4.7) es posible factorizar (4.5) y por lo tanto el operador de densidad puede ser escrito de la forma

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{R}t} e^{\frac{1 - e^{-\hat{S}t}}{\hat{S}} \hat{J}} \hat{\rho}(0), \quad (4.22)$$

donde el operador de densidad ya se ha separado y al realizar la expansión en series de potencia no aparece el problema de los operadores en forma de binomio a la n , con lo que se pueden aplicar de uno en uno.

Capítulo 5

Interacción átomo campo

5.1. Álgebra de operadores para dos estados

Convencionalmente un operador actuando sobre un estado, hace que el resultado sea un estado igual o distinto, esto puede ser expresado de la siguiente manera

$$\hat{O}|\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad (5.1)$$

gracias a la notación de P. Dirac el mismo operador \hat{O} , puede ser rescrito,

$$\hat{O} = |\phi\rangle\langle\psi|, \quad (5.2)$$

$$(|\phi\rangle\langle\psi|)|\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad (5.3)$$

si se tiene un sistema de dos funciones cada uno con dos estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ y $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$, donde los estados de este sistema son ortogonales, es decir, $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = 0$, de acuerdo a este sistema se define el siguiente operador

$$\hat{U} = |\phi_1\rangle\langle\psi_1| + |\phi_2\rangle\langle\psi_2|. \quad (5.4)$$

Se considera un vector donde cada entrada corresponde a cada estado del sistema, entonces el vector tendría dos componentes y con esto se tiene una manera matricial de representar los estados

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

en consecuencia la matriz de transformación toma la forma de matriz cuadrada

$$[U] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

de tal manera que se cumplen las siguientes relaciones

$$\hat{U}|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle, \quad (5.8)$$

$$\hat{U}|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle. \quad (5.9)$$

5.2. Operadores de subida y bajada

Se tiene un sistema simple de un átomo de dos niveles descrito por el hamiltoniano de un dipolo, donde el sistema atómico cuántico tiene dos niveles de energía. Tal conjunto de estados del sistema cumple con la condición de que es un conjunto ortonormal de tal manera que,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^2 |i\rangle\langle i| = 1, i = 1, 2. \quad (5.11)$$

De manera general todos los estados del sistema están representados en el estado ψ como una combinación linealmente independiente.

$$|\psi\rangle = C_1|g\rangle + C_2|e\rangle = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Al igual que en la cuantización del campo se introdujeron convenientemente los operadores no Hermitianos \hat{a} y \hat{a}^\dagger , que cumplen con el papel de subir y bajar la excitación del campo en $\hbar\omega$, de la misma manera se introducirán operadores de subida y de bajada $\hat{\sigma}_-$ y $\hat{\sigma}_+$ que modificaran el nivel de excitación en $\hbar\omega_o$ para los estados del sistema atómico. De tal manera que estos operadores cumplen las siguientes reglas.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_-|e\rangle &= |g\rangle, & \hat{\sigma}_+|e\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_-|g\rangle &= |0\rangle, & \hat{\sigma}_+|g\rangle &= |e\rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Los operadores $\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ toman el papel del operador número para los operadores de creación y de aniquilación para el campo, los operadores de subida y de bajada pueden ser aplicados de manera consecutiva siendo asociativa la aplicación de estos, salvo en los dos casos siguientes que respetan lo siguiente.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+|e\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-|g\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_- &= 0 \\ \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_+ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Siguiendo la notación del apartado anterior los operadores de subida y de bajada se pueden escribir en términos de los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$,

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|, \quad (5.15)$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (5.16)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ = |g\rangle\langle g|, \quad (5.17)$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- = |e\rangle\langle e|. \quad (5.18)$$

5.3. Matrices de Pauli

Utilizando estos operadores se definen otros cuatro operadores de Pauli,

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+), \quad (5.19)$$

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+), \quad (5.20)$$

$$\hat{R}_3 = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+), \quad (5.21)$$

$$\hat{R}_4 = \frac{1}{2} \hat{I}. \quad (5.22)$$

Teniendo en cuenta que hasta ahora no se ha hablado de que los operadores deben estar normalizados sólo se han definido algunas propiedades, si se pidiera que los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ fueran ortonormales entonces el medio que multiplica a cada operador \hat{R}_i desaparece y se obtienen las conocidas matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+), \quad (5.23)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+), \quad (5.24)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+), \quad (5.25)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}. \quad (5.26)$$

Dentro de las características de las matrices de Pauli se tiene la siguiente

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{\sigma}_0^2 = I, \quad (5.27)$$

y al realizar todas las multiplicaciones posibles puede llegarse a relaciones de conmutación,

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z, \quad (5.28)$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = -i \hat{\sigma}_z, \quad (5.29)$$

$$\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = i \hat{\sigma}_y, \quad (5.30)$$

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = -i \hat{\sigma}_y, \quad (5.31)$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i \hat{\sigma}_x, \quad (5.32)$$

$$\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = -i \hat{\sigma}_x, \quad (5.33)$$

es decir,

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (5.34)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita[36]. También satisfacen las siguientes reglas para el anticonmutador, el determinante y la traza

$$\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij} I, \quad (5.35)$$

$$\det(\hat{\sigma}_i) = -1, \quad (5.36)$$

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}_i) = 0. \quad (5.37)$$

5.4. Interacción exacta Átomo-Campo

Para describir de manera satisfactoria la interacción Átomo-Campo es necesario tomar en cuenta el Hamiltoniano del campo como primera aportación, la segunda aportación a tomar en cuenta es la del átomo y la última es la interacción entre ambos que es consecuencia directa de la imagen de interacción.

Dada la naturaleza atómica, el sistema puede ser descrito por un oscilador armónico, de tal manera que si los dos estados son nombrados por $|g\rangle$ y $|e\rangle$, los niveles están cuantizados en múltiplos de $\hbar\omega_0$ entonces los niveles de energía son los siguientes,

$$\hat{H}|e\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_0\right)|e\rangle, \quad (5.38)$$

$$\hat{H}|g\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_0\right)|g\rangle. \quad (5.39)$$

De acuerdo a la definición de la matriz de Pauli \hat{R}_3 [43], se puede obtener una expresión para los estados en término de este operador.

$$\hat{R}_3|e\rangle = \frac{1}{2}|e\rangle\langle e||e\rangle = \frac{1}{2}|e\rangle, \quad (5.40)$$

$$\hat{R}_3|g\rangle = \frac{1}{2}|g\rangle\langle g||g\rangle = -\frac{1}{2}|g\rangle, \quad (5.41)$$

con esta notación puede reescribirse el Hamiltoniano del átomo de las ecuaciones (5.38) y (5.39)

utilizando el operador de polarización atómica $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ [53].

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \hbar\omega_0 \hat{R}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z, \quad (5.42)$$

con el objetivo de simplificar la notación, se introduce E_i la energía del átomo en el estado i . Como $|i\rangle$ representa el conjunto completo de los estados propios de energía atómica, donde la ecuación de valores propios es $\hat{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle$, entonces

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z, \quad (5.43)$$

donde ω_0 es la frecuencia angular.

5.5. Interacción electromagnética carga-campo

Para ver la interacción, se supone que el campo electromagnético al igual que la materia están cuantizados, de esta manera se busca una solución exacta y no una aproximación semiclásica donde el campo no está cuantizado. Ya se ha encontrado el Hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado, se tiene

$$\hat{H}_c = \sum_{\vec{K},j} \omega \hbar \left[\hat{n} + \frac{1}{2} \right], \quad (5.44)$$

donde \hat{E} , \hat{B} y \hat{n} son el campo eléctrico, magnético y el operador de número. Para la carga, supóngase una partícula de carga e , masa m , y momento \hat{p} , localizada en la posición \vec{r} y que está influenciada por un potencial $U(\vec{r})$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}), \quad (5.45)$$

al aplicar la sustitución mínima para el momento, es decir, $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\hat{A}$ [46], que caracteriza el momento de un sistema con una carga y un campo electromagnético a partir del vector potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\vec{K},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \frac{(\vec{p} - e\hat{A})^2}{2m} + eU(\vec{r}), \\ \hat{H} &= \sum_{\vec{K},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}) \right] - \frac{e}{2m} [\hat{p} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{p}] + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2, \end{aligned}$$

es posible tratar a \hat{p} y \hat{A} como variables de conmutación y puede demostrarse que $\hat{p} \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{p}$, entonces

$$\hat{H} = \sum_{\vec{K},j} \omega \hbar \left[\hat{n}_{\vec{k},j} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + eU(\vec{r}) \right] - \frac{e}{m} (\hat{p} \cdot \hat{A}) + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2. \quad (5.46)$$

Como se puede ver el Hamiltoniano total está conformado por tres términos: el Hamiltoniano del campo, el de la partícula y el Hamiltoniano para la interacción, por lo que entonces el

Hamiltoniano de interacción se define de la siguiente manera

$$\hat{H}_I = -\frac{e}{m}(\hat{p} \cdot \hat{A}) + \frac{e^2}{2m}\hat{A}^2, \quad (5.47)$$

dado que el operador de potencial vectorial correspondiente al campo electromagnético, fundamentalmente tiene una dependencia al inverso del radio al cuadrado, entonces el término del potencial al cuadrado se hace despreciable para el análisis, así $\frac{e^2}{2m}\hat{A}^2$ en la interacción puede ser despreciado y si se relaciona el momento canónico del electrón p con $\frac{m\mu}{e}$ donde μ es el momento dipolar atómico, después de un tratamiento matemático se obtiene el Hamiltoniano de interacción,

$$\hat{H}_I = i\omega_0 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \left[(\mu_{12}\hat{b} - \mu_{12}^*\hat{b}^\dagger) \cdot (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}}) \right]. \quad (5.48)$$

Se define el elemento matricial del dipolo eléctrico

$$\mathcal{P}_{ij} = e\langle i|\vec{r}|j\rangle, \quad (5.49)$$

también,

$$\mathcal{E}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega(\vec{k})}{2\epsilon_0 V}}, \quad (5.50)$$

por último se define la constante de interacción átomo-campo

$$g_{\vec{k}}^{ij} = \frac{\mathcal{P}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}}}{\hbar}, \quad (5.51)$$

con lo que se llega a la expresión para el hamiltoniano de interacción

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{ij} \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{ij} \hat{b}_{ij} (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}}), \quad (5.52)$$

donde se generaliza

$$\hat{b}_{ij} = |i\rangle\langle j|. \quad (5.53)$$

5.6. Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings (JCM) es usado en el estudio de la óptica cuántica como un desarrollo teórico que describe una cavidad óptica de dos niveles energéticos conocido como átomo de dos niveles que interactúa con un campo electromagnético cuantizado. Se considera que el baño de radiación electromagnética puede causar emisión y absorción espontánea. El modelo fue desarrollado por Edwin Jaynes y Fred Cummings en 1963, el JCM revela resultados interesantes entre los que resalta la existencia de oscilaciones de Rabi entre los estados del sistema de dos niveles a medida que interactúa con el campo electromagnético, la existencia de colapsos y reavivamientos de la probabilidad de detectar el sistema de dos niveles en algún estado cuando el campo está en un estado coherente. Si se representan los estados del átomo mediante los vectores $|g\rangle$ para el estado base y $|e\rangle$ para el estado excitado. Al mismo tiempo el

campo está representado por los estados numéricos $|n\rangle$. Estos operadores respetan las acciones,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (5.54)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (5.55)$$

Si se omite en cada Hamiltoniano la energía del estado base dado que esas energías corresponden a la energía de estado fundamental y puede elegirse el nivel de energía base de manera que no interfiera en la evolución del hamiltoniano, las ecuaciones (3.33), (5.43) y (5.52), además de poner la energía del estado excitado como $\hbar\omega$, entonces se puede escribir el Hamiltoniano para el sistema compuesto átomo-campo

$$\hat{\mathcal{H}} = \nu\hbar\hat{n} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar g \left(\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{a} \right), \quad (5.56)$$

aquí el primer término del Hamiltoniano describe la energía de la cavidad o del campo y es igual al producto de un solo paquete de energía (cuanto), es decir, la energía de un fotón $\nu\hbar$ y el número de fotones en la cavidad $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. El segundo término describe la energía del átomo de dos niveles, donde $\frac{1}{2}\hbar\omega$ es la diferencia de energía entre los estados del sistema de dos niveles. El último término describe el acoplamiento entre el sistema de dos niveles y la cavidad, este término se deriva de la radiación cuantizada en un solo modo bosónico del operador del campo electromagnético en términos de los operadores de creación y aniquilación. Esta ecuación también es conocida como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. Puede suprimirse las sumas sobre todos los subsistemas de dos estados por la naturaleza del modelo, en el que solo es considerado un sistema. Una manera alternativa, consecuencia de las definiciones de la sección anterior es la siguiente

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H}_A + \hat{H}_C - e\hat{r} \cdot \hat{E}, \quad (5.57)$$

donde $\hat{H}_A + \hat{H}_C$ son los Hamiltonianos del átomo y del campo respectivamente y el último término describe la interacción

$$\hat{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k E_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad (5.58)$$

aquí $E_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}}$, por lo que el Hamiltoniano queda expresado de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{k,s} \hbar\omega_k \hat{n}_{k,s} + \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| + \hbar \sum_{ij} \sum_k g_k^{ij} \hat{b}_{ij} \left(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \right). \quad (5.59)$$

Capítulo 6

Solución de la ecuación maestra del sistema

6.1. Detalles de la cavidad cuántica

Para estudiar el sistema de la cavidad cuántica se considera las aportaciones de energía del Hamiltoniano y las pérdidas de energía presentes en la cavidad, entonces la ecuación a resolver para el sistema es la siguiente

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I, \hat{\rho}(t)] + \hat{\mathbb{L}}_F \hat{\rho}(t) + \hat{\mathbb{L}}_A \hat{\rho}(t), \quad (6.1)$$

los términos $\hat{\mathbb{L}}_F$ y $\hat{\mathbb{L}}_A$ son operadores de pérdidas que describe la salida de energía por disipación y por emisión espontánea corresponde a un campo de vacío [17], es decir, al medio ambiente a temperatura cero, el intercambio de energía entre el campo de la cavidad y el medio está dada por este término. Al darse la interacción se encuentra que el campo intercambia fotones con el átomo y sólo se disipan debido a la interacción con las paredes de la cavidad [60]

$$\hat{\mathbb{L}}_F \hat{\rho}(t) = 2k\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - k\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} - k\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t), \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathbb{L}}_A \hat{\rho}(t) = 2\gamma\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \gamma\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t). \quad (6.3)$$

Donde es necesario tener en cuenta qué significan las siguientes constantes:

La razón de decaimiento de la cavidad k . Es una propiedad de la superficie que determina la cantidad de radiación que emite un objeto a una temperatura determinada en comparación con un cuerpo negro a la misma temperatura, es decir, la emisividad es la propiedad que indica la eficacia con la cual la superficie de un objeto emite radiación térmica. En la cavidad la emisividad esta relacionada con las paredes siendo este parámetro la medida entre 0 y 1 de radiación térmica emitida por los espejos que confinan al átomo y que constantemente está colisionando con los fotones. Durante las colisiones, el hecho de que los fotones no sean totalmente reflejados implica una pérdida de energía que escapa en forma de calor hacia el infinito.

La emisividad de la cavidad γ . Durante la emisión espontánea un electrón que se en-

cuentra en un estado excitado pasa espontáneamente a un estado de menor energía. Cuando esto ocurre, se emite un fotón, la energía del fotón es igual a la diferencia de energía entre los dos niveles de energía. Este parámetro está entre 0 y 1 y representa la tasa de emisión que caracteriza al átomo.

El parámetro χ . Será la constante de interacción que tiene que ver con un cociente entre frecuencias.

Se define la **desintonía** como $\delta = \omega_A - \omega_F$, que mide el desfase entre los dos subsistemas. Cuando H_I puede ser considerado como una perturbación pequeña en el sentido de que $\delta \gg \Omega$, en este caso no es resonante y se está lejos de ello, se tiene entonces un desfase grande llamado “límite dispersivo” y se obtiene un hamiltoniano efectivo [60].

$$\hat{H}_I = \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z, \quad (6.4)$$

donde $\chi = \frac{\Omega^2}{\delta}$ será la constante de interacción. En esta aproximación los estados tienden a desacoplarse, la intensidad del campo disminuye por lo que ya no logra provocar excitación en el átomo y no hay intercambio de energía, pero continúa habiendo dinámica en el sistema, es decir, hay oscilación dipolar en el átomo debido al campo, entonces este hamiltoniano efectivo describe la dinámica del sistema. Con este hamiltoniano (6.4) y los operadores (6.2), (6.3) al sustituirlo en la ecuación maestra (6.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = & -i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t) + i\chi \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z + 2k \hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - k(\hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t)) \\ & + 2\gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+ - \gamma(\hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t)). \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.2. Aplicación del método de superoperadores en la cavidad

Dada la forma de la ecuación (6.5), se usa el método de superoperadores para resolver esta ecuación y para ello se define los siguientes superoperadores

$$\hat{J}_A \hat{\rho}(t) = 2\gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+, \quad (6.6)$$

$$\hat{L}_A \hat{\rho}(t) = -\gamma(\hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t)), \quad (6.7)$$

$$\hat{J}_F \hat{\rho}(t) = 2k \hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger, \quad (6.8)$$

$$\hat{L}_F \hat{\rho}(t) = -k(\hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t)), \quad (6.9)$$

$$\hat{R} \hat{\rho}(t) = -i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t) + i\chi \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z, \quad (6.10)$$

el subíndice A corresponde al átomo, el F al campo y el operador \hat{R} no tiene subíndice porque depende de operadores del campo y del átomo por igual, estos super operadores son sustituidos en la ecuación (6.5) para simplificar la notación

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = (\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F + \hat{J}_A + \hat{J}_F) \hat{\rho}(t). \quad (6.11)$$

La ecuación reescrita más simple muestra su forma diferencial que se resuelve por separación de variables, la solución a la ecuación diferencial es la exponencial

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F + \hat{J}_A + \hat{J}_f)t} \hat{\rho}(0), \quad (6.12)$$

el inconveniente presente es aplicar el operador exponencial a $\hat{\rho}$, al hacer el desarrollo en serie de potencias resulta más complicado, evaluar los operadores elevados a la potencia n porque para cada que n se hace más grande:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F + \hat{J}_A + \hat{J}_f)^n t^n \hat{\rho}(0). \quad (6.13)$$

Para simplificar el cálculo se realiza la separación de operadores exponenciales, lo que reduciría el problema al aplicar un operador a la potencia n y no una suma de ellos. La forma que se propone para realizar la separación es la siguiente

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{\int_0^t e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} dt} \hat{\rho}(0). \quad (6.14)$$

Para verificar que la propuesta es correcta se deriva $\hat{\rho}(t)$ y el resultado debe ser el mismo que al derivar (6.12), es decir (6.11). Si se deriva (6.14) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= (\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{\int_0^t e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} dt} \hat{\rho}(0) \\ &+ e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{\int_0^t e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} dt} \hat{\rho}(0), \\ \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= \left((\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F) + e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) \right) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} \\ &e^{\int_0^t e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} (\hat{J}_F + \hat{J}_A) e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} dt} \hat{\rho}(0), \end{aligned}$$

donde el término $e^{(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} e^{-(\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F)t} = I$ es la identidad y se observa entonces que la propuesta (6.14) queda como

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = (\hat{R} + \hat{L}_A + \hat{L}_F + \hat{J}_A + \hat{J}_f) \hat{\rho}(0), \quad (6.15)$$

con lo que queda claro que el operador de densidad propuesto funciona y lleva al mismo resultado que la ecuación (6.12). Ahora lo que interesa es calcular el integrando que aparece en (6.14), para ello se toma en cuenta la propiedad [45]

$$e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} \hat{\rho}(t) = \left(\hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots \right) \hat{\rho}(t). \quad (6.16)$$

Utilizando esta propiedad el segundo término del integrando se escribe como

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = (\hat{J}_A + [-\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F, \hat{J}_A] + \frac{(-\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)^2}{2!} [-\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F, [-\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F, \hat{J}_A]] + \dots) \hat{\rho}(t).$$

Se separan los conmutadores utilizando $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$ para posteriormente evaluar el primer conmutador de acuerdo a

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = (\hat{J}_A - \hat{J}_A \hat{R}_F + \hat{J}_A 2\gamma + \frac{1}{2!} ([\hat{R}, [\hat{R}, \hat{J}_A]] + [\hat{R}, [\hat{L}_A, \hat{J}_A]] + [\hat{L}_A, [\hat{R}, \hat{J}_A]] + [\hat{L}_A, [\hat{L}_A, \hat{J}_A]] + [\hat{L}_F, [\hat{R}, \hat{J}_A]] + [\hat{L}_F, [\hat{R}, \hat{J}_A]] + [\hat{L}_F, [\hat{L}_A, \hat{J}_A]]) \hat{\rho}(t),$$

donde

$$[\hat{L}_A, \hat{J}_A] \hat{\rho}(t) = 2\gamma \hat{J}_A \hat{\rho}(t), \quad (6.17)$$

$$[\hat{L}_F, \hat{J}_F] \hat{\rho}(t) = 2k \hat{J}_F \hat{\rho}(t), \quad (6.18)$$

$$[\hat{R}, \hat{J}_A] \hat{\rho}(t) = \hat{J}_A \hat{R}_F \hat{\rho}(t), \quad (6.19)$$

$$[\hat{R}, \hat{J}_F] \hat{\rho}(t) = \hat{J}_F \hat{R}_A \hat{\rho}(t). \quad (6.20)$$

Tomando en cuenta que $\hat{R}_F \hat{\rho}(t) = 2i\chi \hat{n} \hat{\rho}(t) - 2i\chi \hat{\rho}(t) \hat{n}$ y $\hat{R}_A \hat{\rho}(t) = i\chi \hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t) - i\chi \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_z$, si se siguen aplicando las propiedades de operadores hasta ponerlos en su forma más simple, se obtiene

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = (2\hat{J}_A - \hat{J}_A \hat{R}_F + \hat{J}_A 2\gamma + \frac{1}{2!} ([\hat{R}, \hat{J}_A \hat{R}_F] + [\hat{L}_A, 2\gamma \hat{J}_A])) \hat{\rho}(t),$$

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \left(2\hat{J}_A - \hat{J}_A \hat{R}_F + 2\gamma + \hat{J}_A \frac{1}{2!} (\hat{R}_F [\hat{R}, \hat{J}_A] + 2\gamma [\hat{L}_A, \hat{J}_A]) + \dots \right) \hat{\rho}(t).$$

Nuevamente, evaluando el valor de los conmutadores según las ecuaciones (6.17) y (6.19), se obtiene

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \hat{J}_A \left(1 + 1 + (-\hat{R}_F) + (2\gamma) + \frac{1}{2!} (-\hat{R}_F)^2 + \frac{1}{2!} (2\gamma)^2 + \dots \right) \hat{\rho}(t),$$

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \hat{J}_A e^{-\hat{R}_F t} e^{2\gamma t} \hat{\rho}(t),$$

$$e^{((- \hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R} - \hat{L}_A - \hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \hat{J}_A e^{-(\hat{R}_F - 2\gamma)t} \hat{\rho}(t).$$

La deducción de las exponenciales del campo y el átomo son parecidos, entonces, una vez hecho para uno el otro se obtiene sólo cambiando las constantes y los operadores, salvo por un signo

menos que aparece durante la evaluación, con lo que se obtiene los resultados siguientes

$$e^{((-\hat{R}-\hat{L}_A-\hat{L}_F)t)} \hat{J}_A e^{-(-(\hat{R}-\hat{L}_A-\hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \hat{J}_A e^{-(\hat{R}_F-2\gamma)t} \hat{\rho}(t), \quad (6.21)$$

$$e^{((-\hat{R}-\hat{L}_A-\hat{L}_F)t)} \hat{J}_F e^{-(-(\hat{R}-\hat{L}_A-\hat{L}_F)t)} \hat{\rho}(t) = \hat{J}_F e^{-(\hat{R}_A+2K)t} \hat{\rho}(t), \quad (6.22)$$

$$(6.23)$$

con estos resultados e integrando dentro del intervalo de 0 a t la ecuación (6.14) queda de la siguiente manera

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}}{\hat{R}_A+2k} \right) t} e^{\hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t} \hat{\rho}(0). \quad (6.24)$$

Al centrar atención en el término $e^{\hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t}$, se puede expandir en series de potencia

$$e^{\hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t} \hat{\rho}(0) = \left(1 + \hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t + \frac{\hat{J}_A^2}{2!} \left(\hat{J}_A \frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t^2 + \dots \right) \hat{\rho}(0), \quad (6.25)$$

como ya se definió

$$\hat{J}_A \hat{\rho}(0) = 2\gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(0) \hat{\sigma}_+, \quad (6.26)$$

y al aplicar dos veces el mismo super operador, se obtiene

$$\hat{J}_A^2 \hat{\rho}(0) = 2\gamma \hat{\sigma}_- 2\gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(0) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_+ = 4\gamma^2 \hat{\sigma}_-^2 \hat{\rho}(0) \hat{\sigma}_+^2, \quad (6.27)$$

dentro de los términos aparece el producto $\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_-$, que al calcularlo utilizando la notación de estados se obtiene un resultado importante

$$\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| |g\rangle \langle e| = 0, \quad (6.28)$$

$$\hat{J}_A^2 \hat{\rho}(0) = 0, \quad (6.29)$$

entonces, se toma en cuenta la aproximación $\hat{J}_A^2 \hat{\rho}(0) = 0$ al igual que los términos de orden superior por lo que se puede describir

$$e^{\hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t} \hat{\rho}(0) = \left(1 + \hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t \right) \hat{\rho}(0), \quad (6.30)$$

con lo que la ecuación (6.31) puede describirse

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}}{\hat{R}_A+2k} \right) t} \hat{\rho}(0) + e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}}{\hat{R}_A+2k} \right) t} \hat{J}_A \left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}}{\hat{R}_F+2\gamma} \right) t \hat{\rho}(0), \quad (6.31)$$

donde

$$\hat{\rho}_1(t) = e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F\left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)} \hat{\rho}(0), \quad (6.32)$$

$$\hat{\rho}_2(t) = e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F\left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)} \hat{J}_A\left(\frac{1-e^{\hat{R}_F+2\gamma}t}{\hat{R}_F+2\gamma}\right) \hat{\rho}(0). \quad (6.33)$$

Para continuar con el proceso se considera que en $t = 0$ inicia la interacción entre el átomo con el campo, por lo tanto el operador de densidad es

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_F(0)\hat{\rho}_A(0). \quad (6.34)$$

El operador de densidad del campo se considerará más adelante, por el momento el estado inicial del átomo se considera de la siguiente forma

$$|\psi_A(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle), \quad (6.35)$$

$$\langle\psi_A(0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e| + \langle g|), \quad (6.36)$$

y

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_F(0) \frac{1}{2} (|e\rangle + |g\rangle)(\langle e| + \langle g|) = \frac{1}{2} \hat{\rho}_F(0) (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| + 2|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|), \quad (6.37)$$

lo que se puede simplificar al sustituir los valores $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ y $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$,

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2} \hat{\rho}_F(0) (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+). \quad (6.38)$$

Para el primer sumando de la ecuación (6.31) se define $\hat{\rho}_1(t)$ como el primer sumando de (6.31)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1(t) &= \frac{1}{2} e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F\left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)} (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+) \hat{\rho}_F(0), \\ \hat{\rho}_1(t) &= \frac{1}{2} e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \hat{J}_F^r\left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right) (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+) \hat{\rho}_F(0). \end{aligned}$$

Se tiene que encontrar la manera en que actúa el operador sobre los sigma's

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1(t) &= \frac{1}{2} e^{(\hat{R}+\hat{L}_F+\hat{L}_A)t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \hat{J}_F^r\left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right) \hat{\sigma}_z + \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)^r \hat{\sigma}_+ \\ &\quad + \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)^r \hat{\sigma}_- + 2 \left(\frac{1-e^{\hat{R}_A+2k}t}{\hat{R}_A+2k}\right)^r \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}_F(0), \end{aligned} \quad (6.39)$$

donde se puede encontrar las siguientes relaciones después de desarrollar el operador en series de potencia y operarlos sobre la forma de sigma escrita en término de los estados del átomo

$I = |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ y $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ si se toma $\hat{S} = \hat{R}_A + 2k$, entonces

$$\left(\frac{1 - e^{-t\hat{S}}}{\hat{S}}\right)^r \hat{I} = \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2k}\right)^r \hat{I}, \quad (6.40)$$

$$\left(\frac{1 - e^{-t\hat{S}}}{\hat{S}}\right)^r \hat{\sigma}_- = \left(\frac{1 - e^{-2(k-i\chi)t}}{2(k-i\chi)}\right)^r \hat{\sigma}_-, \quad (6.41)$$

$$\left(\frac{1 - e^{-t\hat{S}}}{\hat{S}}\right)^r \hat{\sigma}_+ = \left(\frac{1 - e^{-2(k+i\chi)t}}{2(k+i\chi)}\right)^r \hat{\sigma}_+, \quad (6.42)$$

donde

$$\left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2k}\right) = f_3(t) \quad (6.43)$$

$$\left(\frac{1 - e^{-2(k-i\chi)t}}{2(k-i\chi)}\right) = f_2(t), \quad (6.44)$$

$$\left(\frac{1 - e^{-2(k+i\chi)t}}{2(k+i\chi)}\right) = f_1(t), \quad (6.45)$$

y entonces,

$$\hat{\rho}_1(t) = \frac{1}{2} e^{(\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A)t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \hat{J}_F^r (f_1^r \hat{\sigma}_+ + f_2^r \hat{\sigma}_- + f_3^r (\hat{\sigma}_z + 2\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+)) \hat{\rho}_F(0), \quad (6.46)$$

por otro lado, si se introduce $\hat{\rho}(0)$ de la ecuación (6.38) en la definición de $\hat{J}_A \hat{\rho}(t)$, para $\hat{\rho}_2(t)$ se obtiene lo siguiente

$$\hat{J}_A \hat{\rho}(0) = 2\gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(0) \hat{\sigma}_+,$$

$$\hat{J}_A \hat{\rho}(0) = 2\gamma \hat{\sigma}_- \frac{1}{2} \hat{\rho}_F(0) (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- + 2\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+) \hat{\sigma}_+,$$

$$\hat{J}_A \hat{\rho}(0) = \gamma \hat{\rho}_F(0) (\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ + 2\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_+),$$

dado que el resultado de los productos es nulo

$$\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| |e\rangle\langle g| = 0, \quad (6.47)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| |g\rangle\langle e| = 0, \quad (6.48)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_+ = |g\rangle\langle e| (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) |e\rangle\langle g| = |g\rangle\langle e| |e\rangle\langle e| |e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e| |g\rangle\langle g| |e\rangle\langle g| = 0, \quad (6.49)$$

entonces, $\hat{J}_A \hat{\rho}(t) = 0$ lo que provoca que todo el operador $\hat{\rho}_2(t)$ no tenga ninguna aportación sobre el resultado total, es decir,

$$e^{(\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A)t} e^{\hat{J}_F \left(\frac{1 - e^{\hat{R}_A + 2k}}{\hat{R}_A + 2k} t \right)} \left(\frac{1 - e^{\hat{R}_F + 2\gamma}}{\hat{R}_F + 2\gamma} t \right) \hat{J}_A \hat{\rho}(0) = 0. \quad (6.50)$$

Tomando en cuenta como están definidos \hat{R} , \hat{L}_F , \hat{L}_A y \hat{J}_F se propone que se cumpla la siguiente ecuación

$$e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) = e^{-\Gamma \hat{n} t} \hat{\rho}(0) e^{-\Gamma^\dagger \hat{n} t}, \quad (6.51)$$

aquí $\hat{\rho}(0)$ es un operador de densidad arbitrario. Para demostrar que la igualdad es válida se deriva ambos miembros con respecto al tiempo

$$\hat{R} e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) = -\Gamma \hat{n} e^{-\Gamma \hat{n} t} \hat{\rho}(0) e^{-\Gamma^\dagger \hat{n} t} - e^{-\Gamma \hat{n} t} \hat{\rho}(0) \Gamma^\dagger \hat{n} e^{-\Gamma^\dagger \hat{n} t}, \quad (6.52)$$

lo cual se puede escribir como

$$\hat{R} e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) = -\Gamma \hat{n} e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) - e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) \Gamma^\dagger \hat{n}. \quad (6.53)$$

Ahora se define $\hat{\rho}(0) = e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0)$ y se obtiene

$$\hat{R} e^{\hat{R}t} \hat{\rho}(0) = -\Gamma \hat{n} \hat{\rho}(0) - \hat{\rho}(0) \Gamma^\dagger \hat{n}, \quad (6.54)$$

que es exáctamente la definición del operador \hat{R} dada por (6.10), por lo tanto es válida la propuesta (6.51) y utilizando este resultado se reescribe la expresión de la ecuación (6.46)

$$e^{(\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A)t} \hat{\rho}_F(0) = e^{-(i\chi \hat{\sigma}_z + k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-} t \hat{\rho}_F(0) e^{(i\chi \hat{\sigma}_z - k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-} t, \quad (6.55)$$

donde

$$\begin{aligned} (\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A) \hat{\rho}(t) &= -i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t) + i\chi \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z - k \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} - k \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \gamma (\hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t)), \\ (\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A) \hat{\rho}(t) &= -i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t) - k \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t) + i\chi \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z - k \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \gamma \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \\ (\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A) \hat{\rho}(t) &= \left[-(i\chi \hat{\sigma}_z + k) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right] \hat{\rho}(t) + \left[(i\chi \hat{\sigma}_z - k) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right] \hat{\rho}(t), \\ (\hat{R} + \hat{L}_F + \hat{L}_A) \hat{\rho}(t) &= \left[-(i\chi \hat{\sigma}_z + k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right] \hat{\rho}(t) + \left[(i\chi \hat{\sigma}_z - k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right] \hat{\rho}(t). \end{aligned}$$

En la última parte solo se ha sustituido $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}$, entonces si se ingresa esto en $\hat{\rho}_1(t)$, se obtiene

$$\hat{\rho}_1(t) = \frac{1}{2} e^{-(i\chi \hat{\sigma}_z + k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-} t \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \hat{J}_F^r (f_1^r \hat{\sigma}_+ + f_2^r \hat{\sigma}_- + f_3^r (\hat{\sigma}_z + 2\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+)) \hat{\rho}_F(0) e^{(i\chi \hat{\sigma}_z - k) \hat{n} - \gamma \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-} t, \quad (6.56)$$

donde el operador de densidad $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_1(t)$ y es el resultado final del operador de densidad.

Capítulo 7

Cálculo de la polarización atómica

7.1. Cálculo de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$

El operador $\hat{\sigma}_x$ da la polarización del átomo, por lo que es un buen indicador del comportamiento del sistema, también se le conoce como operador de polarización atómica. El valor del operador está dado por

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = Tr(\hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t)) = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle e | \langle m | \hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t) | m \rangle | e \rangle + \langle g | \langle m | \hat{\sigma}_x \hat{\rho}(t) | m \rangle | g \rangle), \quad (7.1)$$

donde $\hat{\sigma}_x = (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) = (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$, así que

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle e | \langle m | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | m \rangle | e \rangle + \langle g | \langle m | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | m \rangle | g \rangle),$$

como los estados del campo $|m\rangle$ no interactúan con los del átomo $|e\rangle$ y $|g\rangle$ entonces pueden conmutar:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle g | (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Dado que los estados del átomo son ortogonales entonces los productos cruzados se anulan $\langle e | g \rangle = \langle g | e \rangle = 0$, con lo que al distribuir los estados los únicos productos que no se anulan son

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | e \rangle \langle g | \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle g | g \rangle \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Como el producto $\langle e | e \rangle = \langle g | g \rangle = 1$, entonces

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle g | \hat{\rho}(t) | e \rangle | m \rangle + \langle m | \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle).$$

Se puede ver quedan dos términos donde uno es el complejo conjugado del otro

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | \hat{\rho}(t) | g \rangle | m \rangle + c.c.). \quad (7.2)$$

Para calcular el valor esperado del operador $\hat{\sigma}(x)$ se sustituye $\rho(t)$ de la ecuación (6.56) y queda

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (\langle m | \langle e | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)\hat{n}+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2k)^r \hat{a}^r \hat{\rho}_F(0) \hat{a}^{\dagger r}}{r!} (f_1^r \hat{\sigma}_+ + f_2^r \hat{\sigma}_- + f_3^r (\hat{\sigma}_z + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+)) e^{((i\chi\hat{\sigma}_z-k)\hat{n}-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle | m \rangle + c.c.),$$

al evaluar estos productos, se obtiene

$$\langle m | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)\hat{n}+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} = \langle m | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t}, \quad (7.3)$$

$$e^{((i\chi\hat{\sigma}_z+k)\hat{n}-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | m \rangle = e^{((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | m \rangle, \quad (7.4)$$

con esto se simplifica la ecuación

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\langle m | (2k)^r \hat{a}^r \hat{\rho}_F(0) \hat{a}^{\dagger r} | m \rangle}{r!} \langle e | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} (f_1^r \hat{\sigma}_+ + f_2^r \hat{\sigma}_- + f_3^r (\hat{\sigma}_z + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+)) e^{((i\chi\hat{\sigma}_z-k)m-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle + c.c.$$

Se distribuyen las exponenciales y quedan tres términos, el primero es

$$\langle e | f_1^r e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} \hat{\sigma}_+ e^{((i\chi\hat{\sigma}_z-k)m-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle = e^{-2kmt} \langle e | f_1^r e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | e \rangle \langle g | e^{(i\chi\hat{\sigma}_z-k)m-\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle. \quad (7.5)$$

Al expandir la exponencial en series de potencias y evaluar los superoperadores, se tiene que

$$e^{i\chi\hat{\sigma}_z mt - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- t} | g \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (i\chi\hat{\sigma}_z mt - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- t)^r | g \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (i\chi\hat{\sigma}_z mt - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- t)^r | g \rangle, \quad (7.6)$$

para calcular este resultado se obtiene el valor de esta operación

$$(i\chi\hat{\sigma}_z mt - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- t) | g \rangle = (i\chi mt (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)) | g \rangle - (\gamma |e\rangle\langle g| |g\rangle\langle e|) | g \rangle = -i\chi mt | g \rangle, \quad (7.7)$$

de donde se obtiene

$$e^{(i\chi\hat{\sigma}_z - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle = e^{-i\chi mt} | g \rangle. \quad (7.8)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se calcula

$$e^{(i\chi\hat{\sigma}_z - \gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | e \rangle = e^{\gamma t} e^{-i\chi mt} | e \rangle, \quad (7.9)$$

sustituyendo (7.8) y (7.9) en (7.5) se obtiene

$$\langle e | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} f_1^r | e \rangle \langle g | e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z-k)\hat{n}+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle = f_1^r e^{\gamma t} e^{-2(k+i\chi)mt}. \quad (7.10)$$

Realizando un procedimiento similar los siguientes términos se calculan y son cero

$$\begin{aligned} \langle e | f_2^r e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z+k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} \hat{\sigma}_- e^{-((i\chi\hat{\sigma}_z-k)m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle &= f_2^r e^{\gamma t} e^{-2(k+i\chi)mt} \langle e || g \rangle = 0, \\ \langle e | f_3^r e^{-(\hat{\Gamma}m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} (\hat{\sigma}_z + 2\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+) e^{-(\hat{\Gamma}^\dagger m+\gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)t} | g \rangle &= f_3^r e^{\gamma t} e^{-2(k+i\chi)mt} (-\langle e || g \rangle + 2\langle e || g \rangle) = 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2k)^r f_1^r}{r!} \left(\langle m | \hat{a}^r \hat{\rho}_F(0) \hat{a}^{\dagger r} | m \rangle e^{-2(k+i\chi)mt} + c.c \right), \quad (7.11)$$

después de reducir y sustituir f_1^r se obtiene

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2(k+i\chi)mt} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^r}{r!} \left(\frac{1 - e^{-2(k+i\chi)t}}{(k+i\chi)} \right)^r \left(\langle m | \hat{a}^r \hat{\rho}_F(0) \hat{a}^{\dagger r} | m \rangle \right) + c.c \right). \quad (7.12)$$

Al aplicar las propiedades de los operadores de creación y aniquilación, (3.42) y (3.43), se ve que

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2(k+i\chi)mt} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^r}{r!} \left(\frac{1 - e^{-2(k+i\chi)t}}{(k+i\chi)} \right)^r \frac{(m+r)!}{m!} \langle m+r | \hat{\rho}_F(0) | m+r \rangle + c.c \right), \quad (7.13)$$

haciendo un cambio de indice $n = m + r \implies m = n - r$. Con lo que la suma iniciaría en $n = 0$ por lo que también r inicia en cero

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{r=0}^n \left(k \frac{e^{2(k+i\chi)t} - 1}{(k+i\chi)} \right)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \right) e^{-2(k+i\chi)rt} \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle + c.c \right]. \quad (7.14)$$

Se observa que aparece el desarrollo binomial de la forma

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} x^k, \quad (7.15)$$

considerando $a = 1$ y $x = \left(k \frac{e^{2(k+i\chi)t} - 1}{(k+i\chi)} \right)$, se reescribe

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{r=0}^n \left(1 + k \frac{e^{2(k+i\chi)t} - 1}{(k+i\chi)} \right)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \right) e^{-2(k+i\chi)rt} \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle + c.c \right], \quad (7.16)$$

sumando las fracciones entre paréntesis,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{r=0}^n \left(\frac{(k+i\chi)}{(k+i\chi)} + k \frac{e^{2(k+i\chi)t} - 1}{(k+i\chi)} \right)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \right) e^{-2(k+i\chi)rt} \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle + c.c \right], \\ \langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{r=0}^n \left(\frac{k+i\chi + k e^{2(k+i\chi)t} - k}{(k+i\chi)} \right)^r e^{-2(k+i\chi)rt} \frac{n!}{r!(n-r)!} \right) \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle + c.c \right], \end{aligned}$$

se anulan ambas k y se introduce la exponencial que está elevada a la r dentro del paréntesis

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{k + (i\chi)e^{-2(k+i\chi)t}}{(k+i\chi)} \right)^m \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle + c.c. \right]. \quad (7.17)$$

Esta es la forma del valor esperado de $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ considerando un operador de densidad inicial para el campo totalmente arbitrario.

7.2. Estados coherentes

El interés del trabajo es considerar que el campo electromagnético esté conformado por estados coherentes,

$$\hat{\rho}_F(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \Rightarrow \langle r | \hat{\rho}_F(0) | r \rangle = |\langle r | \alpha \rangle|^2 \quad (7.18)$$

donde

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}} |s\rangle, \quad (7.19)$$

por lo tanto, si se hace el producto de $\langle r |$ con los estados coherentes y se eleva la magnitud al cuadrado, la sumatoria completa se convierte en una delta de Kronecker la cual no se anula en $\alpha = r$

$$|\langle r | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2s}}{s!} |\langle r | s \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2r}}{r!}. \quad (7.20)$$

Con este resultado para los estados coherentes del campo electromagnético se encuentra la expresión final para el cálculo del operador de polarización

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{k + (i\chi)e^{-2(k+i\chi)t}}{(k+i\chi)} \right)^m e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} + \left(\frac{k - (i\chi)e^{-2(k-i\chi)t}}{(k-i\chi)} \right)^m e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} \right], \quad (7.21)$$

este es el valor esperado del operador $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ en términos del operador de densidad tomando en cuenta que tiene estados coherentes.

Capítulo 8

Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos al realizar el cálculo numérico de la ecuación (7.21) donde se variaron α , χ , k y γ , utilizando el software Mathcad Prime 6.0.0.0. Para generar las simulaciones del valor esperado del operador de polarización, comienza la simulación a partir del instante cero. Tomando como parámetros $\alpha = 5$, $\chi = 0,9$, $k = 0,0001$ y $\gamma = 0,1$, se obtiene la visualización del comportamiento de la polarización como se muestra en la Figura 8.1. Donde se toma para todos los cálculos siguientes la aproximación de la sumatoria hasta el término $n = 170$. Cabe mencionar que la gráfica deja de sufrir cambios sustanciales a partir de utilizar $n = 150$, 170 es el máximo número de términos que permite procesar la computadora que se utiliza (con procesador Core i7 10Th y 16 Gb de memoria RAM).

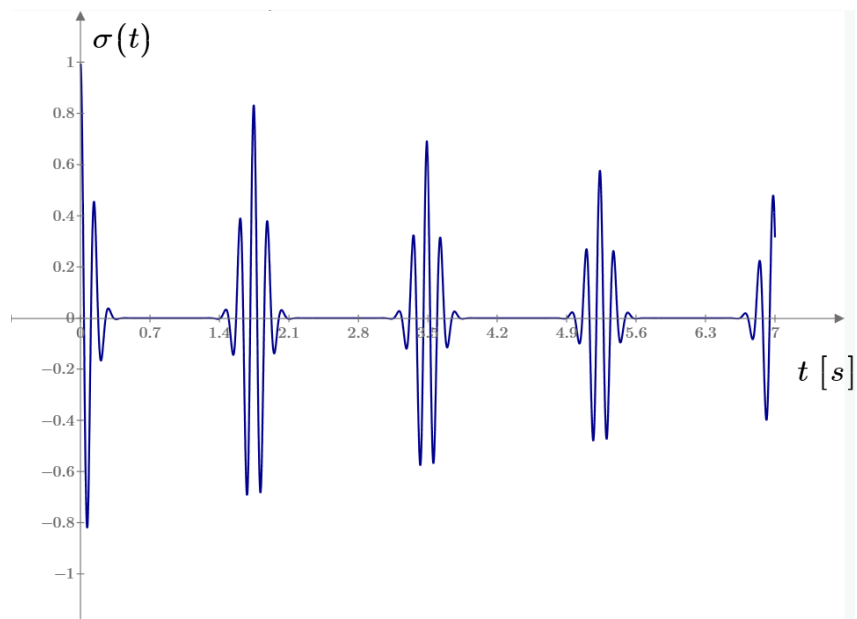


Figura 8.1: Polarización con parámetros $\alpha = 4$, $\chi = 0,9$, $k = 0,0001$ y $\gamma = 0,9$.

Cuando se varía el número de fotones n tomando en cuenta que $n = |\alpha|^2$, se encuentra el problema que bajo las mismas características computacionales sólo se puede simular hasta $\alpha = 7$, para valores mayores no es posible graficar pero con los primeros 7 se observa el comportamiento que se muestra en la Figura 8.2.

Como se puede observar, a medida que el número de fotones aumenta también aumenta el

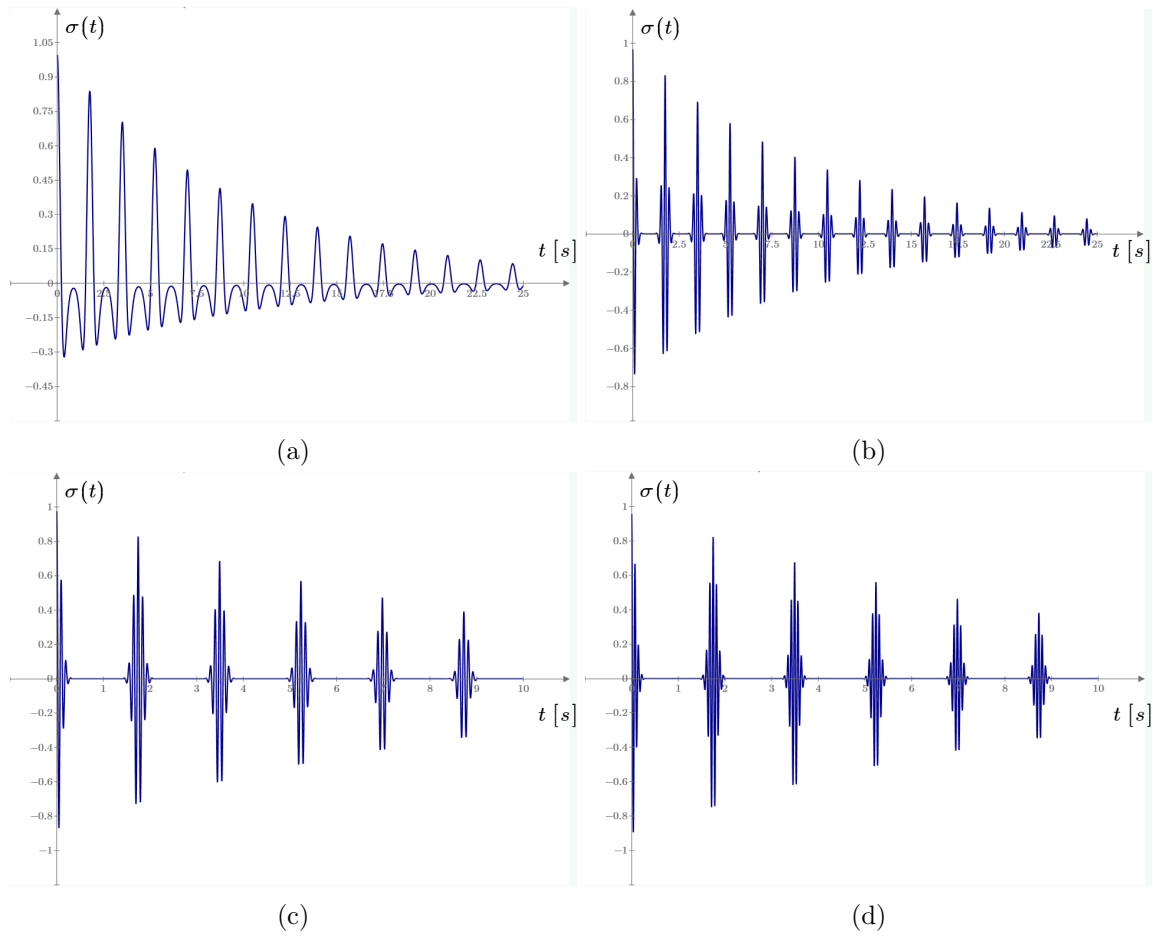


Figura 8.2: Comportamiento del $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ para diferente número de fotones (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 4$, (c) $\alpha = 6$ y (d) $\alpha = 7$.

número de oscilaciones de la polarización del átomo, aunque no afecta el tiempo en el que se dan las oscilaciones ni la amplitud.

Al poner atención a la figura 8.2a se observa que al trabajar con el mínimo número de fotones confinados dentro de la cavidad hay un comportamiento diferente con respecto al de valores mayores de α , en la parte negativa se reparten en dos oscilaciones y no en una como en la parte positiva. Es de notar que la duración del tiempo de los revivimientos y colapsos no cambia para valores mayores, aunque si lo hace la amplitud máxima registrada.

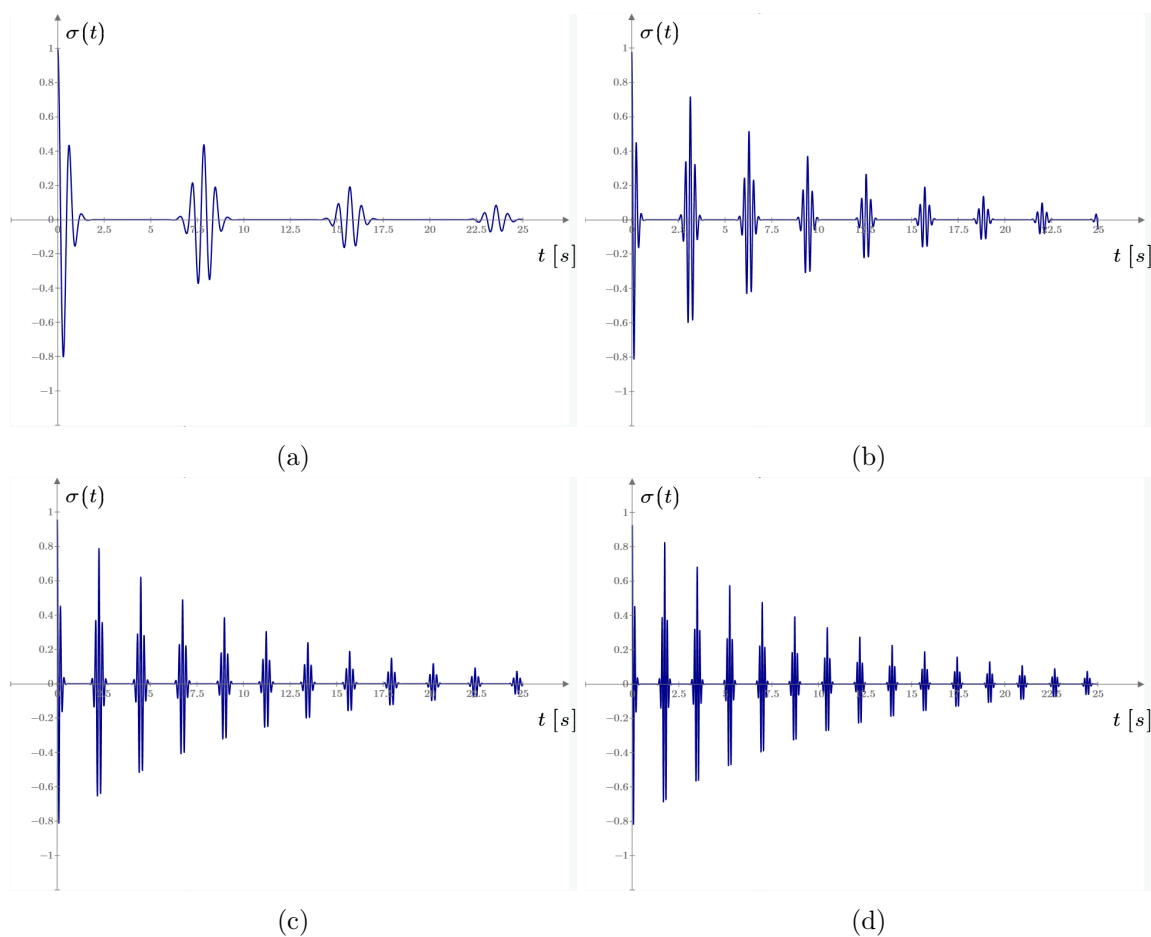


Figura 8.3: Comportamiento del $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ al variar la constante de interacción entre el átomo y el campo (a) $\chi = 0,2$, (b) $\chi = 0,5$, (c) $\chi = 0,7$ y (d) $\chi = 0,9$.

Al modificar la constante de interacción entre el átomo y el campo χ se puede observar que es modificado el tiempo de duración en que la polarización permanece colapsada, cuando χ aumenta el tiempo de colapso disminuye y cuando χ disminuye ocurre lo contrario. Por otra parte, el aumento del parámetro χ es inversamente proporcional a la amplitud (si se aumenta el primero disminuye el segundo) ver Figura 8.3a.

Al variar la constante de decaimiento de la cavidad k puede verse que se necesita variar en un orden de magnitud para que su influencia sea notoria, pues regula la amplitud de las oscilaciones como una función exponencial envolvente decreciente, algo notable es que al variar k y hacerla muy pequeña cada vez su influencia es menor después de los 6 o 7 órdenes de magnitud; después del cero prácticamente el cambio que ocasiona es nulo, es decir, el primer cambio es bastante notorio comparado con respecto a los siguientes y el último que se grafica prácticamente no es notorio, ver Figura 8.4.

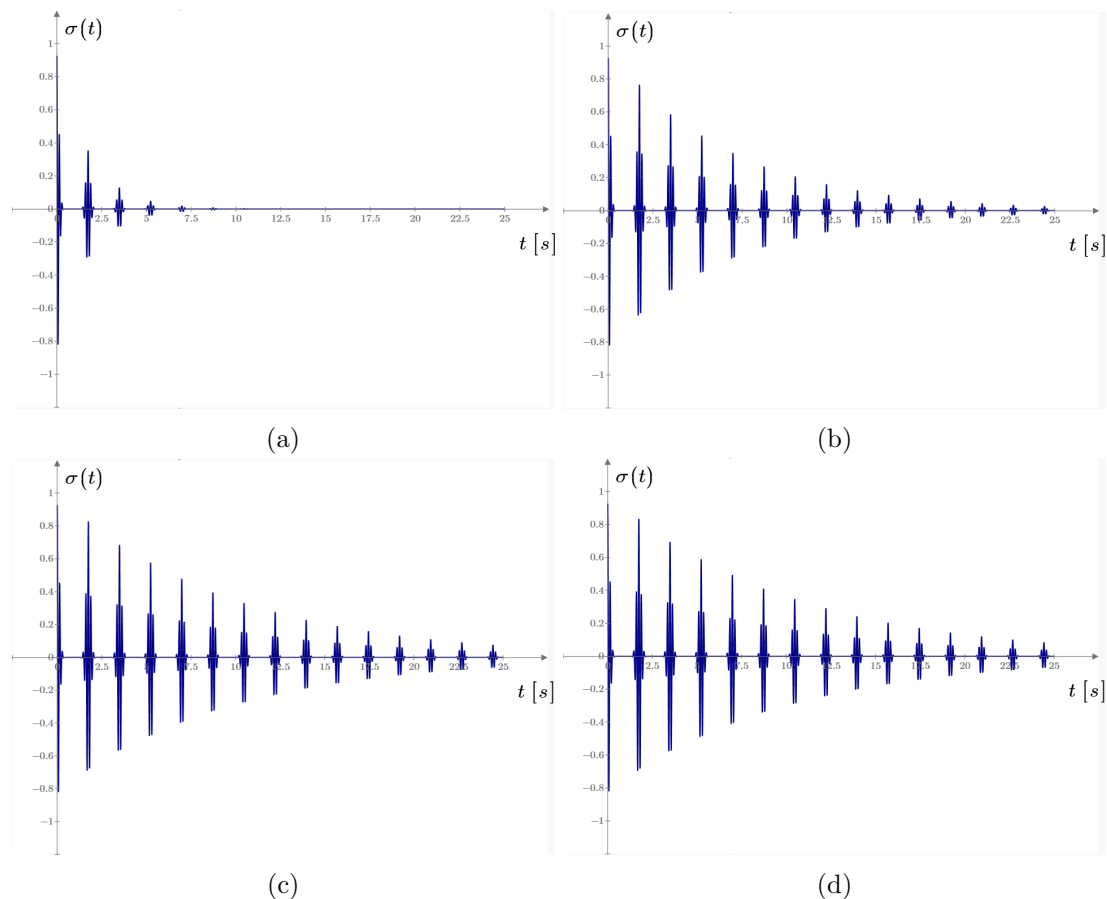


Figura 8.4: Comportamiento del $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ al variar la constante de decaimiento de la cavidad (a) $k = 0,01$, (b) $k = 0,001$, (c) $k = 0,0001$ y (d) $k = 0,00001$.

Por último, al modificar la emisividad γ ocurre algo similar a cuando se modifica k sólo que su influencia es mayor y no decrece como sucede con el parámetro k , para γ , cuanto más pequeño es más bruscamente cae la amplitud de las oscilaciones y por el contrario mientras más grande es la amplitud varía menos.

Cuando el parámetro k es llevado a cero no necesariamente las oscilaciones de Rabi desaparecen dado que las pérdidas de energía por el decaimiento atómico son muy pequeñas al compararlas con la energía que se puede perder por la disipación de las paredes de la cavidad γ .

Cuando el parámetro γ es llevado a 0 la variación es muy pequeña pues sólo depende de las pérdidas por el decaimiento atómico. Para el caso contrario, cuando es llevado a 1 no hay oscilaciones y la pérdida de la energía dentro del sistema es instantánea.

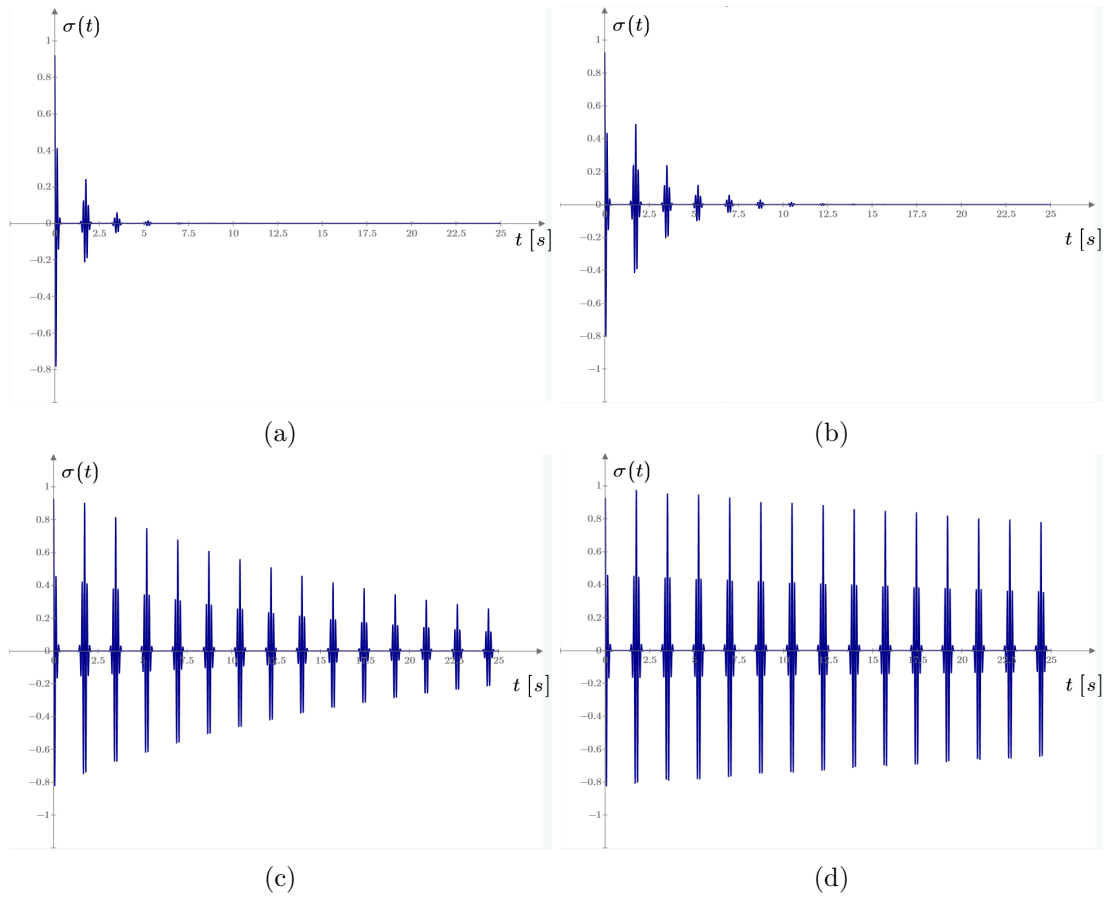


Figura 8.5: Comportamiento del $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ al variar la emisividad (a) $\gamma = 0,8$, (b) $\gamma = 0,4$, (c) $\gamma = 0,05$ y (d) $\gamma = 0,005$.

En el caso extremo en el que ambos parámetros son cero las amplitudes de las oscilaciones permanecen constantes, es el caso en el que el sistema es un sistema conservativo en su totalidad, en este caso la duración de los tiempos de colapsos y revivimientos, así como el número de variaciones de las oscilaciones sigue cambiando conforme a χ y α .

8.1. Conclusiones

El objetivo del trabajo fue concluido satisfactoriamente. El problema de la interacción dispersiva entre el campo electromagnético cuantizado con estados coherentes como estado inicial del campo y el átomo de dos niveles dentro de una cavidad, sujeta a dispersión de energía por la disipación de las paredes de la cavidad y la emisión espontánea del átomo fue resuelto usando el comportamiento de la polarización entre el átomo y el campo. Con este trabajo se contribuye a entender la interacción entre el átomo y el campo al demostrar que aún en el límite dispersivo y con un número reducido de fotones, es posible revivir las oscilaciones e incluso manipular la duración, frecuencia y la pérdida de amplitud de estas oscilaciones.

La consecuencia de la manipulación de los parámetros k , γ , χ y α arroja lo siguiente:

- A medida que el número de fotones aumenta también aumenta el número de oscilaciones de la polarización del átomo, aunque no afecta el tiempo en el que se dan las oscilaciones ni la amplitud.
- Al modificar la constante de interacción entre el átomo y el campo χ es modificado el tiempo de duración en que la polarización permanece colapsada.
- El aumento del parámetro χ es inversamente proporcional a la amplitud de probabilidad de la polarización.
- Al variar la constante de decaimiento de la cavidad k se regula la amplitud de las oscilaciones como una función exponencial envolvente decreciente
- Al modificar la emisividad γ ocurre algo similar a cuando se modifica k solo que su influencia es mayor y no decrece como sucede con el parámetro k , para γ , cuanto más pequeño es, más bruscamente cae la amplitud de las oscilaciones.

Como propuesta a trabajos posteriores, puede considerarse una cavidad con temperatura diferente a 0°K, como se hizo en este trabajo.

Bibliografía

- [1] S. KUYPERS, ArXiv e-print 2108.02771, 2021.
- [2] F. TAMBURINI, D. VICINO, Phys. Rev. A 78 052116, 2008.
- [3] M. DUELL, W. DYBALSKI, ArXiv e-print 2111.04831, 2021.
- [4] Y. ZHANG, Q. WU, S. SU, Q. LOU, C.X. SHAN, K. MØLMER, ArXiv e-print 2110.10950, 2021.
- [5] Y. SHEE ,P-K.TSAI, C-L. HONG, H-C. CHENG, H-S. GOAN, ArXiv e-print 2110.04112, 2021.
- [6] A. KAHAN, L. ERMANN, C. CORMIK, Phys. Rev. A 104 043705, 2021.
- [7] K. YOSHII, ArXiv e-print 2111.05999, 2021.
- [8] G. CRIPPA, G. STEFANI, ArXiv e-print 2110.15648, 2021.
- [9] K. KARMARAJ, P. S. JOHNSON, A. SATHEESH, ArXiv e-print 2108.05873, 2021.
- [10] Y. AONO, S. LIU, T.TANAKA, S. UNO, R. VAN METER, N. SHINOHARA, R. NOJMA, ArXiv e-print 2111.06102, 2021.
- [11] S.KHORASANI, ArXiv e-print 1810.08030, 2018.
- [12] M. WANG, S. WANG, T. M. YA LI, Y. XIE, H. JIAO, H. LIU, S. LIU, H. WANG, ArXiv e-print 2110.10971, 2021.
- [13] B. M. WHITE, P. J. LOW, Y. SEREVILLE, M. L. DAY, N. GREENBERG, R. RADEMACHER, C. SENKO, ArXiv e-print 2110.08456, 2021.
- [14] J. L. FIGUEIREDO, ArXiv e-print 2102.11213, 2021.
- [15] D. A. VAJNER, L. RICHERT, T. GAO, K. KAYMAZLAR, T. HEINDEL, ArXiv e-print 2108.13877, 2021.
- [16] W. CHEN, M. ABBASI, B. HA, S. ERDAMAR, Y. N. JOGLEKAR, K. W. MURCH, ArXiv e-print 2111.04754, 2021.
- [17] A. ZUÑIGA-SEGUNDO, R. JUÁRES-AMARO, O.AGUILAR-LORETO, H. M. MOYA-CESSA, Phys. Rev. A 379 150-158, 2017.
- [18] K. JÜRGENS, F. LENGERS, D. GROLL, D. E. REITER, D. WIGGER, T. KUHN, ArXiv e-print 2111.06286, 2021.
- [19] U. D. JENTSCHURA, P. J. MOHR, J. N. TAN, ArXiv e-print 1003.3706, 2010.

- [20] J. RAMETTE, J. SINCLAIR, Z. VENDEIRO, A. RUDELIS, M. CETINA , V. VLADAN , ArXiv e-print 2109.08391, 2021.
- [21] R. JUÁRES-AMARO, A. ZUÑIGA-SEGUNDO, H. M. MOYA-CESSA, Sci. 9, No. 1 299-303, 2015.
- [22] L. L. PING, W. LI, C. J. ZU, Y. P. YANG, G. S. AGARWAL, ArXiv e-print 2110.12557, 2021.
- [23] A. E. DORCHE, B. WEI, C. RAMAN, A. ADIBI, ArXiv e-print 2008.0054, 2020.
- [24] D. N. BERNAL-GARCÍA, L. H. ANDREY, M. J. WOLLEY, ArXiv e-print 2111.04041, 2021.
- [25] D. J. GRIFFITHS, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2nd ed., Springer, 1995.
- [26] L.D. LANDAU, *Mecánica Cuántica no-relativista*, tercera edición, Editorial Reverté, 1983.
- [27] N. ZETTILI, *Quantum Mechanics concepts and applications*, 2nd ed., Wiley, 1995.
- [28] L.DE LA PEÑA, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, tercera edición, Universidad Nacional Autónoma de México, Fondo de cultura económica, 1976.
- [29] D. T. GUILLESPIE, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Ediciones Ariel, 1976.
- [30] YNDURAIN MUÑOS y FRANCISCO JOSE, *Mecánica Cuántica*, segunda edición, Springer, 2003.
- [31] W. GREINER, *Quantum mechanics. An introduction*, 4th ed., Springer, 2001.
- [32] P. R. FERRER, L. H. MASSMANN, G. V. MUÑOS, B. J. RÖSSLER y C. J. ROGAN, *Mecánica Cuántica I*, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, 2007.
- [33] P. A. M. DIRAC, *Principios De La Mecánica Cuántica*, Ediciones Ariel, 1958.
- [34] P. ATKINS y R. FRIEDMAN, *Molecular Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2005.
- [35] E. M. ROBERTO, *Teoría Cuántica de Campos*, Universidad Nacional de Colombia Bogotá, 2002.
- [36] S. CANNAS, *Notas de Mecánica Estadística*, Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, 2013.
- [37] F. MANDL y G. SHAW, *Quantum Field Theory*, Springer, 1986.
- [38] W. N. COTTINGHAM y D. A. GREENWOOD, *An introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, 1998.
- [39] C. C. GERRY y P. L. KNIGHT, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2005.
- [40] EISBERG y R. M. RESNICK, *Física cuántica. Átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*, Limusa, 1989.
- [41] P. YOAV, P. REUVEN y Z. ELYAHU, *Theory and Problems of Quantum Mechanics*, McGRAW-HILL, 1998.
- [42] H. DEKKER, *Classical and Quantum Mechanics of the Damped Harmonic Oscillator*, North-Hollan Publishing Company, 1981.
- [43] J. M. ZIMAN, *Elements of Advanced Quantum Theory*, CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS, 1969.
- [44] G. STEPHEN, *Quantum Physics*, 3th ed, Hamilton Printing Company, 2003.

- [45] C. T. CLAUD, D. R. JACQUES, G. GILBERT, *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, Springer.
- [46] C. G. CALLAN, *Advanced Quantum Mechanics*, Princeton University, 1996.
- [47] A. C. PHILLIPS, *Introduction to Quantum Mechanics*, Wiley, 2003.
- [48] RICHARD P. FAYNMAN, *QED. The Strange Theory of Light and Matter*, Prince University Press, 1983.
- [49] RICHARD L. LIBOFF, *Introductory Quantum Mechanics*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1980.
- [50] R. GREINER, *Field Quantization*, Springer, 1996.
- [51] I. J. R. AITCHISON, A. J. G. HEY, *Gauge Theories in Particle Physics* Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED, 3th ed., IoP, 1996.
- [52] LESLIE E. BALLENTINE, *Quantum Mechanics A Modern Development*, 3th ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Lid., 1998.
- [53] SERGIO M. DUTRA, *Cavity Quantum Electrodynamics. The Strange Theory of ligh in a Box*, Wiley, 2005.
- [54] W. GREINER, *Quantum Mechanics an Introductution*, 4th ed., Springer, 2001.
- [55] W. GREINER, *Quantum Electrodynamics*, 3th ed., Springer, 2003.
- [56] J. R. REITZ, F. J. MILFORD y R. W. CHRISTY *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, cuarta edición, Addison-Wesley Iberomerica, 2003.
- [57] E. M. PURCELL, *Electricidad y Magnetismo*, segunda edición, EDITORIAL REVERTE, S. A. 2001.
- [58] A. BAKER, *Matrix Groups. An Introduction to Lie Group Theory*, Springer, 2002.
- [59] T. BRÖCKER y T. TOM DIECK, *Representations of Compact Lie Groups*, 2nd ed, Springer, 1985.
- [60] M. LEONARD y W. EMIL, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995
- [61] J. I. ILLANA, *Teoría Cuántica de Campos*, Departamento de física teórica y del cosmos, Universidad de Granada, 2021.
- [62] N. QUINTERO, F. MOLINA, *A Brief Description of Gauge Theories*, TUMBAGA, 2009.
- [63] B. V. LEONARD, *Teorías de Gauge*, Facultad de física, P. Universidad Católica de Chile, 2015.