



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

**Estudio de las oscilaciones de poblaciones tipo Kolmogorov con
parámetro de bifurcación**

TESIS

Para obtener el título de:
Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Sandra Cecilia Barranco García

Director de tesis:

Dr. Emmanuel Abdias Romano Castillo

Huajuapán de León, Oaxaca

Mayo de 2022

Dedicatoria

A mis padres: Graciela García y Margarito Barranco.

Agradecimientos

A mi madre por apoyarme a cumplir mis metas y siempre motivarme para la realización de estas. A mi padre por el apoyo brindado durante toda la carrera y su confianza.

Al director de este trabajo de tesis, Dr. Emmanuel Abdias Romano Castillo, por aceptar ser mi asesor, por su apoyo y paciencia en la realización de este proyecto, ya que sin su apoyo no me hubiese sido posible realizarlo.

A los sinodales de la Tesis, Dra. Silvia Reyes Mora, Dr. José Margarito Hernández Morales y Dr. Alejandro Iván Aguirre Salado por su tiempo dedicado a la revisión de la tesis, por sus comentarios y observaciones para mejorar este trabajo.

Índice general

Introducción	VII
1. Conceptos básicos	1
1.1. Sistemas no lineales en el plano	1
1.1.1. Linealización	3
1.1.2. Estabilidad global de sistemas no lineales	6
1.2. Teoría de bifurcaciones	9
2. Sistemas tipo Kolmogorov	21
2.1. Modelos matemáticos en ecología	21
2.1.1. Crecimiento logístico	21
2.1.2. Modelo Lotka-Volterra	22
2.1.3. Modelo de Georgii Frantsevich Gause	23
2.1.4. Modelo tipo Kolmogorov	23
2.2. Modelos tipo Kolmogorov modificados	26
3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación	29
3.1. Ceroclinas del modelo sobre el conjunto Ω	30
3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local	31
3.2.1. Análisis del modelo tipo Kolmogorov	31
3.3. Número reproductivo básico	44
3.4. Análisis del comportamiento cíclico del modelo	47
3.5. Bifurcaciones: Análisis de los parámetros y escenarios de simulación	49
3.5.1. Nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio	49
4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación	53
4.1. Ceroclinas del modelo sobre el conjunto Ω	54
4.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local	55
4.2.1. Análisis del modelo cuasi-Kolmogorov	55
4.3. Número reproductivo básico	64
4.4. Análisis del comportamiento cíclico del modelo	66

4.4.1. Cálculo de los ciclos límite (trayectorias cerradas del modelo 4.0.1) .	68
4.5. Bifurcaciones: Análisis del parámetro	70
4.5.1. Nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio	71
5. Simulación de escenarios sintéticos de los modelos	73
5.1. Escenarios sintéticos para el modelo (3.0.1)	73
5.2. Escenarios sintéticos para el modelo (4.0.1)	76
Conclusiones	81
Apéndice A: Retratos fase obtenidos en Mathematica	85
Bibliografía	89

Introducción

Los modelos clásicos presa-depredador aparecieron por primera vez en los trabajos de Malthus (1798), Verhulst (1845), Lotka (1930) y Volterra (1931) para describir la dinámica de una y dos especies. Se ha hecho mucho trabajo para tratar de extender los modelos propuestos por estos autores; dentro de aquellos, un papel fundamental lo ocupa el trabajo de Kolmogorov (Kolmogorov, 1936), que describe la dinámica que resulta de la interacción presa-depredador, de forma más realista. Una de las principales aportaciones de Kolmogorov al estudiar tal sistema de EDO's, es que introdujo los métodos cualitativos de los sistemas dinámicos en el análisis de modelos con relevancia, en lo que actualmente se llama ecología matemática [23]. Los modelos de tipo Kolmogorov, se adecúan al estudio de la dinámica de poblaciones de especies en un entorno y se denominan "más realistas". En esta tesis, presentamos dos modelos modificados; el primer modelo es de tipo Kolmogorov que incluye 3 parámetros: los dos primeros denominados capacidad de carga, denotados por K_1 y K_2 , y el tercero llamado parámetro de bifurcación, denotado por μ . El segundo modelo es de tipo cuasi-Kolmogorov y este incluye 2 parámetros: el primero denominado capacidad de carga, denotado por K y el segundo llamado parámetro de bifurcación, denotado por μ .

En los modelos propuestos, la novedad es que se incluye un parámetro de bifurcación μ definido en la ecuación de depredadores. Es importante aclarar que no se ha localizado un modelo de tipo Kolmogorov que incluya el uso de un parámetro de bifurcación, para resolver la dinámica de dos especies, por lo que al considerar la inclusión de este parámetro en alguna de las ecuaciones, resulta algo novedoso de realizar. En 2021, se publicó un trabajo de modelos tipo Kolmogorov, en el cual se estudia la interacción de dos especies, pero no incluye un parámetro de bifurcación, por lo que el planteamiento de los modelos en este trabajo de tesis sigue siendo novedoso.

El presente trabajo de tesis está dividido de la siguiente manera:

En el primer capítulo se incluye teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias abarcando desde sistemas dinámicos, teoría de estabilidad, Teorema de Hartman-Grobman, Criterio de Dulac hasta teoría de bifurcaciones.

En el segundo capítulo se abordan modelos matemáticos en ecología: comenzando desde el modelo logístico, modelo Lotka-Volterra, modelo de Georgii Frantsevich hasta llegar a los modelos de tipo Kolmogorov, los cuales se abordarán en este trabajo de tesis. Además, se mencionan las suposiciones que se consideran en los modelos tipo Kolmogorov, para después mencionar los modelos que se analizarán en la presente tesis y la región de interés biológica.

En el tercer capítulo, se presenta un modelo tipo Kolmogorov, se prueba que tiene un conjunto invariante y se determinan las condiciones de existencia y estabilidad de los puntos críticos, el cálculo del número reproductivo básico, el cual denota la densidad de la población de presas y el análisis del modelo aplicando el Criterio de Dulac. Además, se presenta el análisis de los parámetros K_1 , K_2 y μ , para obtener intervalos en los que podamos cuantificar el número de puntos críticos del modelo, es decir, cuando nacen o destruyen puntos críticos.

En el cuarto capítulo, se presenta un modelo tipo cuasi-Kolmogorov, se prueba que tiene un conjunto invariante, se calculan los puntos críticos y se analiza su estabilidad. También se presenta el cálculo del número reproductivo básico y el análisis del modelo aplicando el Criterio de Dulac. Dado que en el modelo cuasi-Kolmogorov se tienen 2 parámetros: K y μ , se presenta un análisis de estos, para obtener intervalos que nos ayuden a identificar cuando nacen o se destruyen puntos críticos.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan dos tablas que sintetizan los resultados obtenidos en forma de teoremas, los cuales sirven para mostrar gráficamente los escenarios en cada modelo, realizados con el software Wolfram Mathematica 11.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo, presentamos los conceptos básicos que utilizamos a lo largo del desarrollo de la tesis. Los conceptos y resultados importantes presentados en este capítulo fueron obtenidos de [20].

1.1. Sistemas no lineales en el plano

Consideremos un sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1.1}$$

donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

En esta sección se mostrará que bajo ciertas condiciones sobre la función f , el sistema no lineal (1.1.1) tiene solución única por cada punto $x_0 \in E$ definido en un intervalo máximo de existencia $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. En general, no es posible resolver el sistema no lineal (1.1.1); sin embargo, en esta sección se determinará una gran cantidad de información cualitativa sobre el comportamiento local de la solución.

Para la mejor comprensión de los siguientes resultados importantes, es necesario definir alguna terminología y notación relativa a la derivada Df de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1. *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en x_0 , entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, existen en x_0 y para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j$$

Así, si f es una función diferenciable, la derivada Df viene dada por la **matriz jacobiana** de tamaño $n \times n$.

$$Df = \left[\frac{df_i}{dx_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

La siguiente definición nos habla de la solución del sistema (1.1.1) para todo tiempo t en un intervalo I .

Definición 1.1.2. *Supongamos que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se dice que $x(t)$ es una **solución del sistema** (1.1.1) en un intervalo I si $x(t)$ es diferenciable en I y si para todo $t \in I$, se tiene que $x(t) \in E$ y*

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Un resultado importante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, es el teorema de existencia y unicidad, el cual asegura la existencia y unicidad de un problema de valor inicial en un intervalo determinado.

Teorema 1.1.3 (El Teorema Fundamental de Existencia-Unicidad para sistemas no lineales). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene x_0 y suponga que $f \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [20].

Ahora, enunciaremos resultados que nos relacionan la dependencia de las condiciones iniciales y la dependencia de parámetros.

Dado que es importante saber como se comporta la solución $x(t)$ del PVI cuando se cambia x_0 por un $x_0 + \delta$, con $\delta \approx 0$, o cada vez que se cambie algún parámetro que aparezca en el modelo (1.1.1), se enuncian los siguientes teoremas

Teorema 1.1.4 (Dependencia de la condición inicial). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 . Si $f \in C^1(E)$, entonces existe un $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$, el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

tiene una única solución $\mu(t, y)$ con $\mu \in C^1(G)$, donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Además, para cada $y \in B_\delta(x_0)$, $\mu(t, y)$ es dos veces continuamente diferenciable para todo $t \in [-a, a]$.

1. Conceptos básicos

Dado que el Problema de Valor Inicial (PVI) puede ir acompañado de uno o más parámetros, es importante conocer si la solución sigue siendo única al variar uno o alguno de estos parámetros.

El siguiente resultado se sigue inmediatamente del teorema (1.1.4)

Teorema 1.1.5 (Dependencia sobre los parámetros). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{n+m} que contiene el punto (x_0, μ_0) donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$. Suponga que $f \in C^1(E)$, entonces existen $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$ y $\mu \in B_\delta(\mu_0)$, el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= y,\end{aligned}$$

tiene una única solución, $u(t, y, \mu)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \times B_\delta(\mu_0)$.

Los teoremas anteriores se presentan sin demostración, pero se puede consultar en [20].

1.1.1. Linealización

Para comenzar el análisis del sistema no lineal (1.1.1), es necesario determinar los puntos de equilibrio de (1.1.1) y describir su comportamiento local de dichos puntos de equilibrio.

Se sabe que el comportamiento local del sistema no lineal (1.1.1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 está determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.1.2}$$

con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca del origen. La función lineal $Ax = Df(x_0)x$ se llama la parte lineal de f en x_0 .

El sistema lineal (1.1.2) con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada linealización de (1.1.1) en x_0 .

Para el análisis de estabilidad local del sistema (1.1.2) se calcula la linealización, por lo que se recurre al cálculo de la matriz Jacobiana.

Definición 1.1.6. *El sistema (1.1.1) se puede aproximar en una vecindad del punto crítico x_0 con el sistema lineal (1.1.2), donde*

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_0} \end{pmatrix},$$

*a esta matriz se le llama **matriz jacobiana** en x_0 y se denota por $Df(x_0)$.*

Las siguientes definiciones nos ayudarán en el estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.1.7. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama **punto de equilibrio o punto crítico** de (1.1.1) si $f(x_0) = 0$.*

Definición 1.1.8. *Un punto de equilibrio x_0 se llama punto de equilibrio **hiperbólico** de (1.1.1), si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real distinta de cero.*

Definición 1.1.9. *El **retrato fase o diagrama fase** de un sistema de ecuaciones diferenciales dado por (1.1.2) con $x \in \mathbb{R}^n$, es el lugar geométrico que relaciona el conjunto de todas las soluciones de (1.1.2) en el espacio \mathbb{R}^n .*

Las siguientes definiciones son de gran utilidad para la clasificación de un punto de equilibrio y su estabilidad.

Definición 1.1.10 (Clasificación Local).

Un punto de equilibrio x_0 es llamado:

1. *Sumidero, si todos los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real negativa.*
2. *Fuente, si todos los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real positiva.*
3. *Silla, si x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico y $Df(x_0)$ tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.*

Es posible realizar un análisis semejante, para un sistema de n -ésimo orden, con una matriz de coeficientes $A \in M(\mathbb{R})^{n \times n}$ cuyas soluciones sean curvas en un espacio fase n -dimensional, pero resulta ser más complicado [5].

Los valores o signos de los puntos de equilibrio también determinan la estabilidad local del sistema, dentro de esa teoría encontramos resultados que nos llevan a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.11. *Dado un punto de equilibrio hiperbólico x_0 y los valores propios λ_i de la matriz $Df(x_0)$.*

- *Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es asintóticamente estable si y solo si $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, \dots, n$, es decir; si y solo si x_0 es un sumidero.*
- *Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es inestable si y solo si es un punto fuente o un punto silla.*

En el cuadro (1.1.1), se presenta información acerca del tipo de punto crítico y su estabilidad de tipo local, dependiendo de los valores de estos.

1. Conceptos básicos

Eigenvalor	Tipo de punto crítico	Estabilidad Local
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo impropio	Inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo impropio	Asintóticamente Estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Silla	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo propio o impropio	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo propio o impropio	Asintóticamente Estable
$\lambda_1 = \lambda_2 = a \pm i\mu$ $a > 0$ $a < 0$	Punto espiral	Inestable Asintóticamente estable
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Centro	Estable

Cuadro 1.1.1: Propiedades de estabilidad de los sistemas lineales.

Un resultado muy importante en la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales ordinarias es el Teorema de Hartman-Grobman. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal (1.1.1) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal (1.1.2).

A continuación se presentan algunas definiciones importantes que son de gran ayuda para la demostración del Teorema de Hartman-Grobman.

Definición 1.1.12. Sea X un espacio métrico y A, B subconjuntos de X , un **homeomorfismo** de A sobre B es una función $h : A \rightarrow B$ continua e inyectiva, tal que h^{-1} es continua.

Definición 1.1.13. Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como (1.1.1) y (1.1.2) son **topológicamente equivalentes** en una vecindad del origen si existe un homeomorfismo H que mapea un conjunto abierto U que contiene al origen en un conjunto V que contiene al origen y H mapea las trayectorias de (1.1.1) en las trayectorias de (1.1.2). Si el homeomorfismo preserva parametrizaciones, entonces los sistemas (1.1.1) y (1.1.2) son **topológicamente conjugados**.

El siguiente teorema nos dice que la dinámica de cualquier campo de vectores no-lineal es equivalente a la dinámica de su linealización localmente cerca de un equilibrio hiperbólico.

Teorema 1.1.14 (Teorema de Hartman-Grobman). Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene el origen, $f \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal. Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Si existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen en un conjunto abierto V que contiene el origen de tal manera que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$, es decir U y V son topológicamente conjugados, entonces un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal es o bien asintóticamente estable o inestable.

La demostración se basa en construir una función que nos permita definir un homeomorfismo apropiado entre los flujos de los dos sistemas (el original y su linealización), para así finalmente probar que estos son equivalentes. Para mayores detalles ver [2, 19].

El siguiente teorema muestra que bajo la hipótesis más fuerte que $f \in C^2(E)$, en una vecindad del origen, encontramos que los nodos y focos de un sistema lineal persisten bajo la adición de términos no lineales. Es decir, el siguiente teorema nos muestra otra manera de establecer la conexión del sistema lineal con el no lineal.

Teorema 1.1.15. *Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene el origen y $f \in C^2(E)$. Suponga que el origen es un punto crítico hiperbólico del sistema no lineal. Entonces el origen es un nodo estable (o inestable) para el sistema no lineal si y solo si es un nodo estable (o inestable) para el sistema lineal con $A = Df(0)$. Y el origen es un foco estable (o inestable) para el sistema no lineal si y solo si es un foco estable (o inestable) para el sistema lineal con $A = Df(0)$ ([20]).*

El siguiente teorema muestra que bajo la hipótesis que $f \in C^1(E)$, encontramos que los centros de un sistema lineal persisten bajo la adición de términos no lineales.

Teorema 1.1.16. *Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene el origen y $f \in C^1(E)$ con $f(0) = 0$. Supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal con $A = Df(0)$. Entonces el origen es un centro, un centro-foco o un foco para el sistema no lineal ([20]).*

1.1.2. Estabilidad global de sistemas no lineales

Una de las herramientas más útiles para analizar sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales son las ceroclinas.

Definición 1.1.17. *Para un sistema de la forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y),\end{aligned}$$

Las ***x*-ceroclinas**, son el conjunto de puntos donde $\dot{x} = 0$, mientras que las ***y*-ceroclinas**, son el conjunto de puntos donde $\dot{y} = 0$.

1. Conceptos básicos

La interpretación geométrica de las ceroclinas en el plano fase es la siguiente:

Las x -ceroclinas dividen \mathbb{R}^2 en regiones donde el campo vectorial apunta hacia la izquierda o hacia la derecha; de manera similar, las y -ceroclinas separan a \mathbb{R}^2 en regiones donde el campo vectorial apunta hacia arriba o hacia abajo. Las intersecciones de las x , y -ceroclinas producen los puntos de equilibrio.

En cualquiera de las regiones entre las ceroclinas, las líneas del campo vectorial no son ni verticales ni horizontales, por lo que deben apuntar en una de las cuatro direcciones: noreste, noroeste, sureste o suroeste.

En muchos problemas el interés se centra en las propiedades globales de las trayectorias de este sistema. Las propiedades globales de las trayectorias describen su comportamiento sobre grandes regiones del plano de fases.

El problema central de la teoría global es determinar si el sistema tiene o no trayectorias cerradas.

A continuación se presentan algunos resultados importantes que establecen condiciones bajo las cuales el sistema (1.1.1) con $f = (f_1, f_2)^T$ y $x = (x, y)^T$ no tiene ciclos límite.

Definición 1.1.18. *Un ciclo u órbita periódica de (1.1.1) es una curva solución cerrada de (1.1.1) que no es un punto de equilibrio.*

Definición 1.1.19. *Una solución $(x(t), y(t))$ en forma paramétrica del sistema (1.1.1) se llama periódica si ninguna de esas dos funciones es constante, están ambas definidas para todo t y existe un número $T > 0$ tal que*

$$x(t + T) = x(t),$$

e

$$y(t + T) = y(t),$$

para todo t ([5]).

Notemos que cada solución periódica del sistema define una trayectoria cerrada que se recorre una vez por completo cuando t crece desde t_0 hasta $t_0 + T$, sea cual sea t_0 .

Por otro lado, si $C = (x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada del sistema, entonces $x(t), y(t)$ definen una solución periódica. Las soluciones periódicas tienen una función importante en problemas físicos porque representan fenómenos que ocurren de manera repetida.

Uno de los resultados importantes y de gran utilidad para descartar órbitas periódicas en el plano fase del sistema es el siguiente:

Teorema 1.1.20 (Criterio de Dulac). *Sea $f = (f_1, f_2) \in C^1(D)$ donde D es una región abierta y simplemente conexa en \mathbb{R}^2 . Si existe una función escalar $g \in C^1(D)$ tal que $\nabla \cdot (gf)$ no es idénticamente cero y no cambia de signo en D , entonces (1.1.1) no tiene una órbita cerrada que se encuentre completamente contenida en D ([20]).*

Demostración. Supongamos que $C = (x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada correspondiente a una solución periódica de periodo T . Consideremos:

$$\begin{aligned} dx &= f_1(x(t), y(t))dt, \\ dy &= f_2(x(t), y(t))dt, \end{aligned}$$

luego, multiplicando por g e integrando sobre la curva C , obtenemos:

$$\int_C g f_1 dy - g f_2 dx = \int_0^T [g f_1 f_2 - g f_2 f_1] dt = 0, \quad (1.1.3)$$

por otro lado, utilizando el Teorema de Green tenemos que

$$\int_C g f_1 dy - g f_2 dx = \iint_R \left[\frac{\partial(g f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(g f_2)}{\partial y} \right] dx dy \neq 0. \quad (1.1.4)$$

De (1.1.3) y (1.1.4) tenemos una contradicción, por lo tanto no puede existir una órbita cerrada totalmente contenida en D . ■

Para ilustrar el uso de este teorema, presentamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.1.21. Consideremos el siguiente sistema; definido para $(x, y) \in D$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= yx^2 - 2x^2, \\ \dot{y} &= ax + 4y. \end{aligned}$$

Verifiquemos que el sistema anterior no tiene trayectorias cerradas, para esto utilizaremos el criterio de Dulac. Sea

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Definamos

$$f(x, y) = (yx^2 - 2x^2, ax + 4y),$$

luego

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (gf) &= \nabla \cdot \left(y - 2, \frac{a}{x} + \frac{4y}{x^2} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (y - 2) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{x} + \frac{4y}{x^2} \right), \\ &= \frac{4}{x^2}. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, se tiene que $\nabla \cdot (gf) > 0$, y por lo tanto por el criterio de Dulac, el sistema no presenta trayectorias cerradas dentro de D .

1.2. Teoría de bifurcaciones

El nombre de bifurcación fue introducido por primera vez por Henri Poincaré en 1885 en [21].

La teoría de bifurcaciones contribuye al estudio de los cambios en la estructura cualitativa o topológica del comportamiento de un conjunto de ecuaciones donde intervienen uno o más parámetros y tiene importantes aplicaciones en el campo de la ingeniería y la física.

Los siguientes resultados básicos y algunos ejemplos se obtuvieron de [4], [16] y [22].

Definición 1.2.1. *La teoría de la bifurcación describe la forma en que las características topológicas de un flujo cambian a medida que se varía uno o más parámetros. En particular, los puntos de equilibrio se pueden crear o destruir, o su estabilidad puede cambiar. Estos cambios cualitativos en la dinámica se denominan **bifurcaciones** y los valores de los parámetros en los que se producen se denominan puntos de bifurcación.*

A continuación, mencionaremos como se clasifican las bifurcaciones de puntos críticos. Si se desea profundizar más en el tema de bifurcaciones se puede consultar [3, 25].

Para los ejemplos de cada tipo de bifurcación en un sistema de ecuaciones, que se presentan a continuación, se considera que el parámetro μ , solo afecta a una de las ecuaciones.

Definición 1.2.2. *La **bifurcación silla-nodo** se puede considerar como el tipo de bifurcación más simple, en el cual hay un proceso de creación y destrucción de puntos de equilibrio.*

Si el espacio de fase es unidimensional, uno de los puntos de equilibrio es inestable (silla), mientras que el otro es estable (nodo), y la forma normal es:

$$\frac{dx}{dt} = \mu \pm x^2,$$

donde μ es el parámetro de bifurcación.

El cual es un sistema dinámico simple equivalente a todos los sistemas que muestran esta bifurcación ([22]).

Ejemplo 1.2.3. *Un ejemplo de una bifurcación silla-nodo en dos dimensiones se produce en el sistema dinámico con las ecuaciones diferenciales:*

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Notemos que:

1. Cuando $\mu > 0$, hay dos puntos de equilibrio: $(-\sqrt{\mu}, 0)$ punto silla y $(\sqrt{\mu}, 0)$ nodo (sea un atractor o un repulsor).

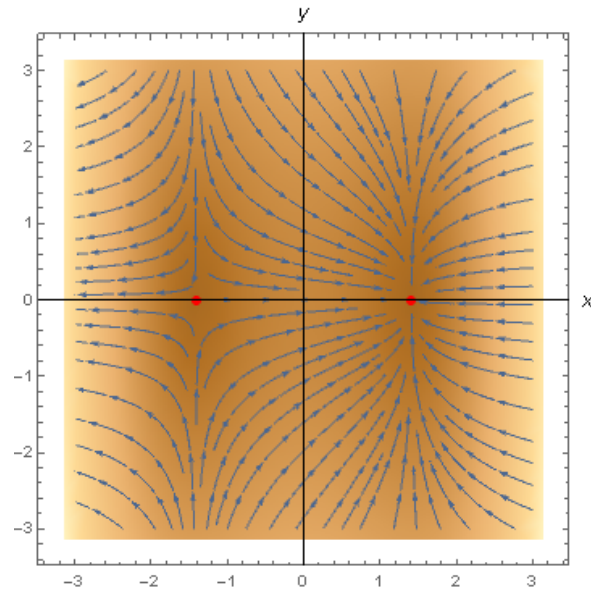


Figura 1.1: Bifurcación silla-nodo, se tienen 2 puntos de equilibrio.

2. Cuando $\mu = 0$, hay un punto silla-nodo, que es el origen.

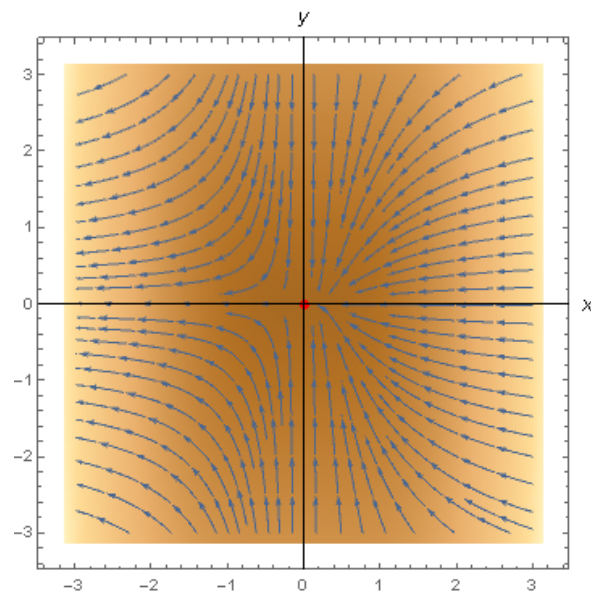


Figura 1.2: Bifurcación silla-nodo, en el origen.

3. Cuando $\mu < 0$, no hay puntos de equilibrio.

1. Conceptos básicos

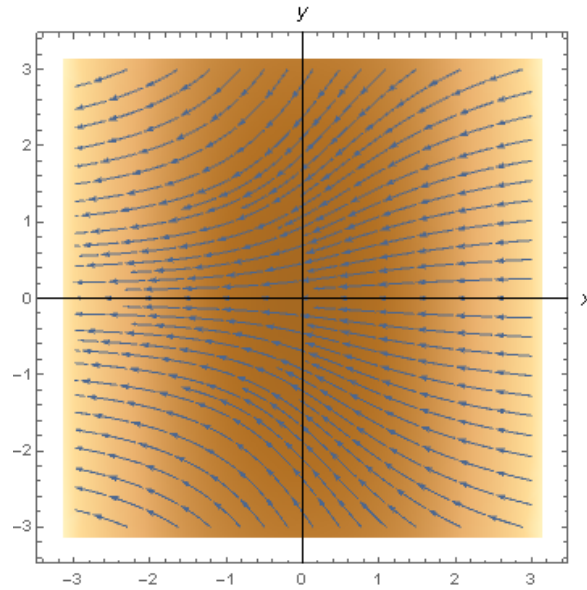


Figura 1.3: Bifurcación silla-nodo, no se tienen puntos de equilibrio.

En este ejemplo podemos ver que si partimos de un sistema en el que no hay puntos de equilibrio, a medida que variamos el parámetro pasamos de no tener ningún punto de equilibrio a la aparición de dos, uno estable y otro inestable, o viceversa pasamos de tener dos puntos de equilibrio a la desaparición de los mismos.

Es decir, este ejemplo muestra que la cantidad de los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad, dependen fuertemente del parámetro μ y sobre todo si $\mu \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$ y cercano a cero.

Definición 1.2.4. *El tipo de **bifurcación transcítica** solo se da cuando el sistema tiene un punto crítico, el cual debe existir para todos los valores del parámetro y nunca desaparece. En este tipo de bifurcación no se crean ni destruyen puntos de equilibrio, en cambio a medida que el parámetro varía, dos puntos de equilibrio colisionan e intercambian su estabilidad; esto es, el punto de equilibrio estable se convierte en inestable y el inestable se convierte en estable ([3]).*

La forma normal es:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \pm x^2.$$

Tomando en consideración la definición anterior se construye el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.5.

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Notemos que:

1. Cuando $\mu < 0$, hay dos puntos de equilibrio: un punto silla $(-\mu, 0)$ y un nodo $(0, 0)$.

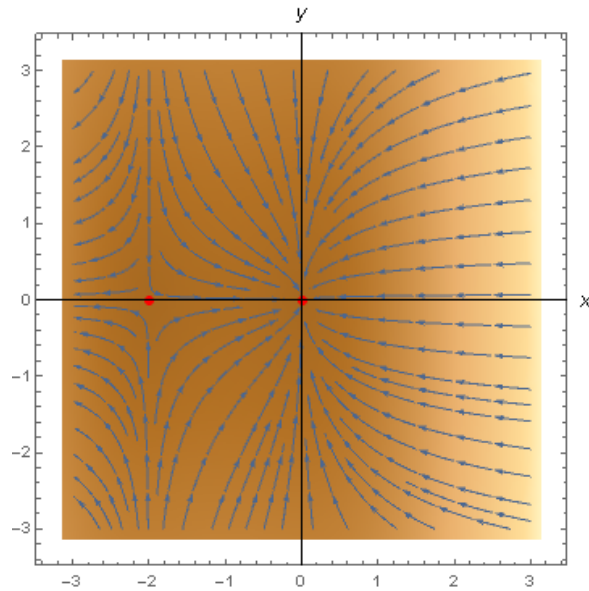


Figura 1.4: Bifurcación Transcrítica $\mu < 0$, se tienen 2 puntos de equilibrio, uno inestable y el otro estable.

2. Cuando $\mu = 0$, los puntos críticos colisionan y solo se tiene un punto de equilibrio, que es el origen.

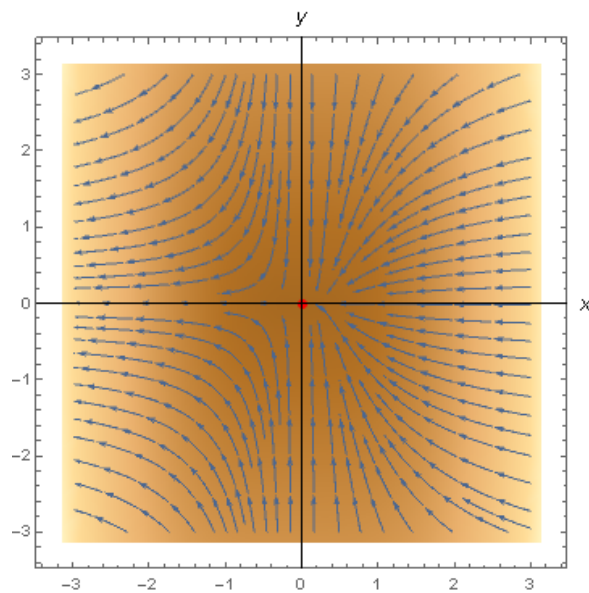


Figura 1.5: Bifurcación Transcrítica $\mu = 0$, en el origen.

1. Conceptos básicos

3. Cuando $\mu > 0$, hay dos puntos de equilibrio: un punto silla $(0, 0)$ y un nodo $(\mu, 0)$.

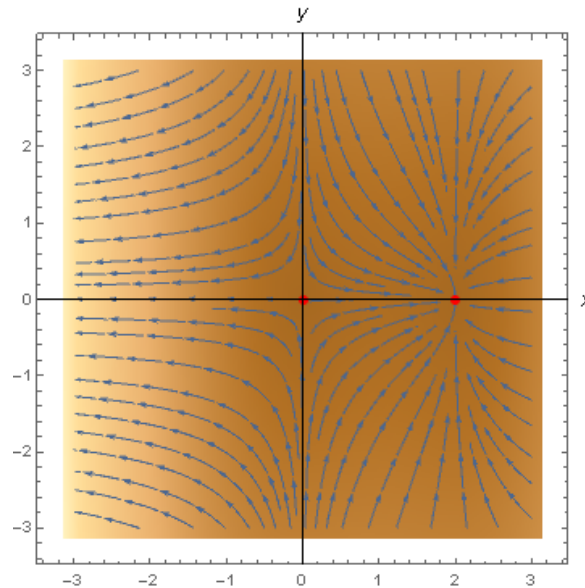


Figura 1.6: Bifurcación Transcítica $\mu > 0$, se tienen 2 puntos de equilibrio, uno inestable y el otro estable.

En este ejemplo, se produce un intercambio de estabilidades entre los dos puntos críticos, además en este tipo de bifurcación los puntos de equilibrio no desaparecen sino cambian su estabilidad.

Definición 1.2.6. Una **bifurcación tridente** es un tipo de bifurcación de una ecuación diferencial de un sistema dinámico, que se produce en sistemas con simetría con respecto al origen; en este tipo de bifurcación, un único punto de equilibrio se bifurca en tres, dos con la misma estabilidad que el original y uno con estabilidad opuesta ([3]).

Las bifurcaciones tipo tridente pueden ser supercríticas o subcríticas. Una referencia para estudiar este tipo de bifurcación es [22].

Si el espacio de fase es unidimensional, la forma normal es:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \pm x^3.$$

Como ya se mencionó, las bifurcaciones tridente pueden ser supercríticas o subcríticas.

La forma normal de la **bifurcación tridente supercrítica** viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3.$$

Notar que es invariante bajo el cambio $x \rightarrow -x$, lo que expresa matemáticamente la simetría respecto del eje x mencionada previamente.

Tomando en consideración la definición anterior se construye el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.7.

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

Tenemos que:

1. Si $\mu < 0$, entonces el único punto crítico es el origen.

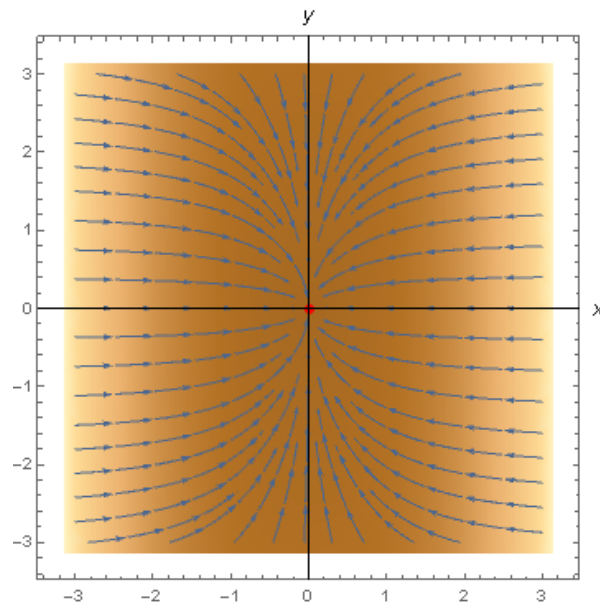


Figura 1.7: Bifurcación Tridente $\mu < 0$, en el que se tiene un único punto crítico estable.

2. Para $\mu = 0$, el único punto crítico es el origen.

1. Conceptos básicos

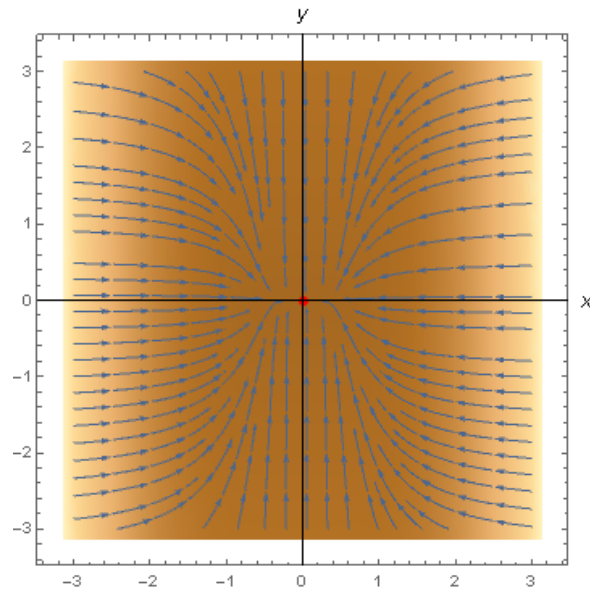


Figura 1.8: Bifurcación Tridente $\mu = 0$, en el que se tiene un único punto crítico estable.

3. Cuando $\mu > 0$, hay 3 puntos de equilibrio: $(-\sqrt{\mu}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{\mu}, 0)$.

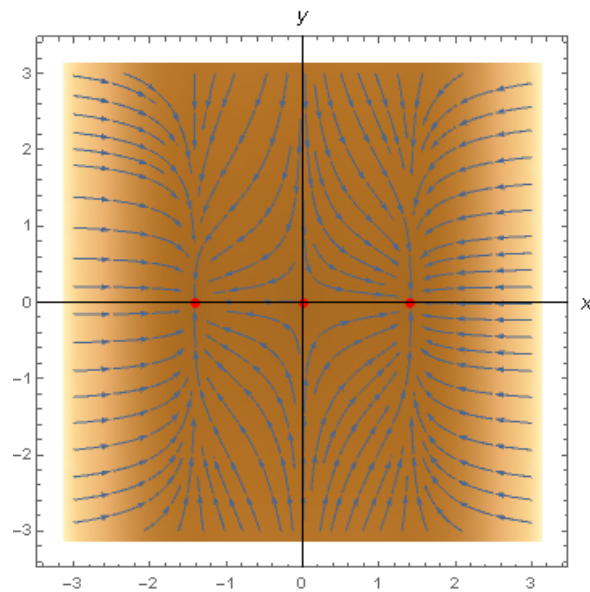


Figura 1.9: Bifurcación Tridente $\mu > 0$, en el que aparecen dos puntos críticos estables y uno inestable.

Observemos que en este ejemplo, el único punto de equilibrio, que es el origen, es estable, y conforme μ cruza el origen para volverse positivo, el único punto de equilibrio se bifurca en dos puntos de equilibrio estables y uno inestable.

Por su parte, la forma normal de la *bifurcación tridente subcrítica* viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3.$$

Ejemplo 1.2.8.

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

Tenemos que:

1. Cuando $\mu < 0$, hay 3 puntos de equilibrio: $(-\sqrt{\mu}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{\mu}, 0)$.

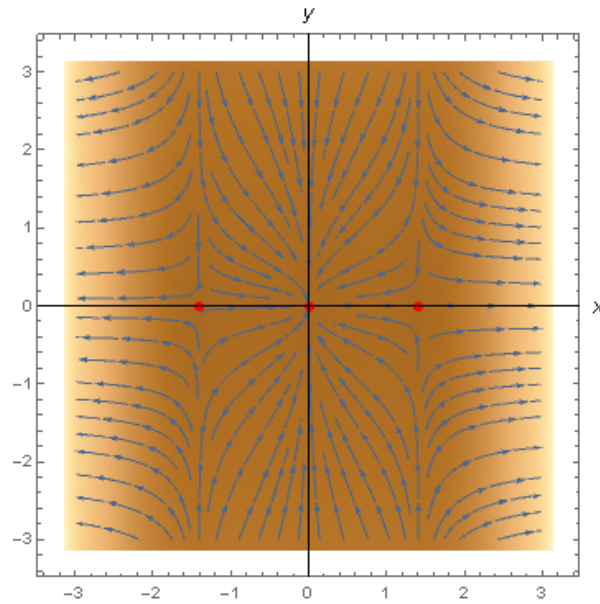


Figura 1.10: Bifurcación Tridente Subcrítica $\mu < 0$, en el que se tiene dos puntos críticos inestables y uno estable.

2. Cuando $\mu > 0$, el único punto crítico es el origen.

1. Conceptos básicos

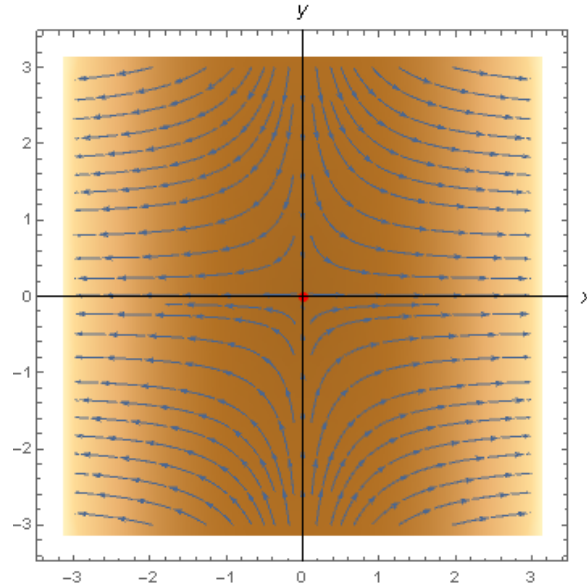


Figura 1.11: Bifurcación Tridente Subcrítica $\mu > 0$, cuyo único punto crítico es inestable.

En este ejemplo, si partimos de un sistema en el que se tienen 3 puntos de equilibrio, de los cuales dos son inestables y uno estable, podemos ver que, conforme μ cruza el origen para volverse positivo, los puntos críticos inestables desaparecen y el punto que era estable ahora se vuelve inestable.

Definición 1.2.9. Una **bifurcación de Hopf** se refiere a la desaparición o aparición local de un equilibrio de una solución periódica de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen un sistema dinámico con el cual ese equilibrio cambia su estabilidad cuando, y solo cuando, el parámetro cambia de valor por la derecha o la izquierda, o matemáticamente, a través de un par de valores propios puramente imaginarios que cruzan el eje imaginario en el plano complejo hacia la parte derecha (la parte real).

La forma normal para la bifurcación de Hopf es:

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu + i) + a|x|^2,$$

donde x , a son complejos con μ siendo el parámetro de bifurcación. Si se escribe con $a = L + ib$, entonces L es el primer coeficiente de Lyapunov. Si L es negativo, entonces hay un ciclo límite estable y la bifurcación se le llama supercrítico. Si L es positivo, entonces hay un ciclo límite inestable y la bifurcación se le llama subcrítico.

Tomando en consideración la definición anterior se construye el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.10.

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + y - x(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \mu y - y(x^2 + y^2),$$

donde μ es el parámetro.

Notemos que este tipo de bifurcación no nos es útil en el presente trabajo de tesis, ya que el parámetro μ aparece en ambas ecuaciones. Mientras que en los modelos a presentar este parámetro solo se encuentra en una de las ecuaciones.

Definición 1.2.11. Una **bifurcación homoclínica** es un tipo de bifurcación en la que un ciclo límite choca con un punto silla. Las bifurcaciones homoclínicas pueden ocurrir de forma supercrítica o subcrítica.

Ejemplo 1.2.12. Un ejemplo de una bifurcación homoclínica en dos dimensiones se produce en el sistema dinámico con las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu y + x - x^2 + xy.$$

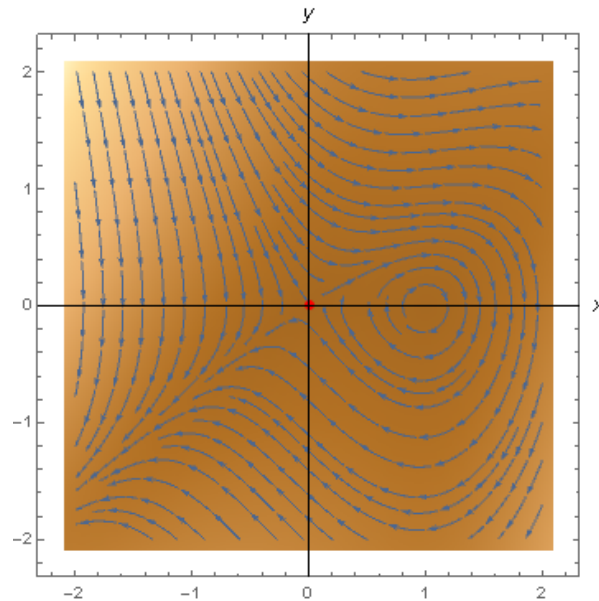


Figura 1.12: Bifurcación Homoclínica.

En la Figura 1.12 se observa que un ciclo límite estable pasa cerca de un punto silla, el cual se encuentra en el origen.

1. Conceptos básicos

Definición 1.2.13. Una **bifurcación heteroclínica** es un tipo de bifurcación en la que un ciclo límite choca con dos o más puntos silla; implican un ciclo heteroclínico. Las bifurcaciones heteroclínicas son de dos tipos: bifurcaciones de resonancia y bifurcaciones transversales. Ambos tipos de bifurcación resultarán en el cambio de estabilidad del ciclo heteroclínico. En una bifurcación de resonancia, la estabilidad del ciclo cambia cuando se satisface una condición algebraica de los valores propios de los equilibrios en el ciclo. Esto suele ir acompañado del nacimiento o muerte de una órbita periódica. Una bifurcación transversal de un ciclo heteroclínico se produce cuando la parte real de un valor propio transversal de uno de los equilibrios del ciclo pasa por cero. Esto también provocará un cambio en la estabilidad del ciclo heteroclínico.

Definición 1.2.14. Una **bifurcación de período infinito** es un tipo de bifurcación en la que un nodo estable y un punto silla ocurren simultáneamente en un ciclo límite. A medida que el límite de un parámetro se acerca a un cierto valor crítico, la velocidad de la oscilación disminuye y el período se acerca al infinito. La bifurcación de período infinito ocurre en este valor crítico.

Tomando en consideración la definición anterior se construye el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.15.

$$\frac{dx}{dt} = (1 - r^2)x - y \left(\mu - \frac{y}{r} \right),$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - r^2)y + x \left(\mu - \frac{y}{r} \right),$$

con $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

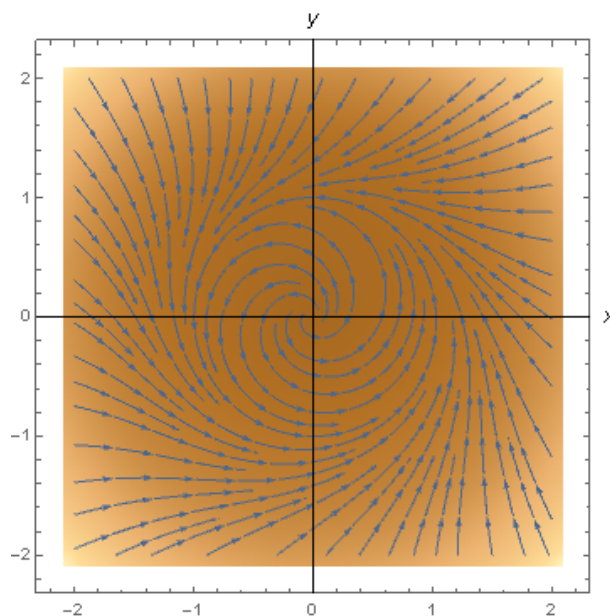


Figura 1.13: Bifurcación de período infinito.

Este tipo de bifurcación no nos es útil en este trabajo de tesis, dado que el parámetro μ aparece en ambas ecuaciones y en los modelos que se estudiarán este parámetro solo se encuentra en una de las ecuaciones.

Los conceptos y teoremas mostrados en este capítulo son suficientes para abordar el presente trabajo y sus demostraciones pueden consultarse en las referencias dadas.

Es importante mencionar que al comparar nuestros modelos con alguna de las formas normales de los tipos de bifurcación presentados anteriormente, no hay manera de reescribir nuestros modelos para poder obtener estas formas, por lo que no es posible emplear estos conceptos. Por esta razón se plantea el uso de bifurcaciones a través del parámetro μ , pero en el sentido de que vamos a determinar, cuando se crean o destruyen puntos críticos.

Capítulo 2

Sistemas tipo Kolmogorov

2.1. Modelos matemáticos en ecología

Las ecuaciones diferenciales ordinarias juegan un papel importante en el estudio de la dinámica, que se da como resultado de la interacción de n especies.

Los modelos clásicos en ecología son: presa-depredador, competencia interespecífica (Lotka/Volterra) y el crecimiento logístico de las poblaciones de seres vivos en un medio con recursos limitados (Verhulst). Existen otros modelos que fueron desarrollados en correspondencia con la interpretación de las relaciones en el ecosistema. A continuación se presentan algunos de estos modelos y como ha sido la evolución de cada uno de ellos.

2.1.1. Crecimiento logístico

El *modelo logístico* fue desarrollado por el matemático Pierre Verhulst (1838) y sugiere que la población no crece ilimitadamente, sino que sigue un crecimiento hasta alcanzar una capacidad máxima K simulando una curva logística según variaciones de tiempo t . La dinámica de la población se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.1.1)$$

donde r y K son constantes positivas. En este modelo, la tasa de natalidad per cápita es $r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$; es decir, que es dependiente de x . La constante K es la capacidad de carga del medio ambiente, que normalmente se determina por los recursos disponibles para la supervivencia de la especie, y su solución está dada por:

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}},$$

donde r es la tasa de crecimiento poblacional y $x_0 = x(0)$ es la población inicial. Notemos que si la población inicial es menor que K , la curva es logística; si es mayor que K , la

población decrece, y si coincide con el valor de K , la población no cambia.

El modelo logístico combina dos procesos ecológicos: la reproducción y la competencia; ambos procesos dependen del número de población (o densidad). El problema con el modelo logístico es que el parámetro r controla no solo la tasa de crecimiento de la población, sino también la tasa de disminución de la población (cuando $x > K$). Aquí el sentido biológico no es claro, ya que no es lógico que los organismos con una tasa de reproducción baja deban morir al mismo ritmo lento. Por lo tanto, si la reproducción es lenta y la mortalidad es rápida, entonces el modelo logístico no funcionará.

2.1.2. Modelo Lotka-Volterra

El estudio de ecología de poblaciones ha tenido un fuerte desarrollo, que se inició con el *Lotka-Volterra*. En 1925 Volterra utilizó un modelo para explicar un descubrimiento en ecología marina, basó su argumento en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias: "si $x(t)$ y $y(t)$ son las densidades de presas y depredadores, respectivamente, entonces la tasa de aumento $\frac{\dot{x}}{x}$ de la presa debería ser una función decreciente de y , ser positiva para $y = 0$, y la tasa de aumento $\frac{\dot{y}}{y}$ debería ser una función creciente de x , y negativa para $x = 0$ ". Si suponemos que estas funciones son lineales, el modelo Lotka-Volterra se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= cxy - dx,\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

El modelo (2.1.2) se conoce como el modelo de *Lotka-Volterra*, ya que las mismas ecuaciones también se derivaron por Lotka [10, 15] a partir de una reacción química hipotética, la cual dijo que podría presentar un comportamiento periódico en las concentraciones químicas.

El modelo de Lotka-Volterra no es muy realista, ya que no se considera ninguna competencia intraespecífica entre presas o depredadores. Como resultado, la población de presas puede crecer infinitamente sin límites de recursos, y, los depredadores no tienen saturación: su tasa de consumo es ilimitada (en la realidad esto no sucede ya que llega un momento en el que los recursos de un habitat se empiezan a agotar, por ejemplo puede suceder que no se tengan nacimientos de nuevas presas y dado que los depredadores consumen a las que quedan, llega un momento en el que estas se extinguen). La tasa de consumo de presas es proporcional a la densidad de presas, es decir, el número de presas consumidas por los depredadores es proporcional al tamaño de la población de presas. Por lo tanto, no sorprende que el comportamiento del modelo no sea natural y no muestre estabilidad asintótica. Sin embargo, existen numerosas modificaciones de este modelo para responder a otras circunstancias muy específicas.

2. Sistemas tipo Kolmogorov

Este modelo tiene algunos problemas, el más importante de ellos es que las soluciones del modelo no persisten al hacerse pequeñas modificaciones en las ecuaciones del modelo, por ejemplo si se asume un crecimiento logístico en las presas, ahora ya no se tienen centros, con esto se tiene que un cambio relativamente menor en las ecuaciones del modelo tiene una gran influencia en sus soluciones.

2.1.3. Modelo de Georgii Frantsevich Gause

En 1934 Georgii Frantsevich Gause propuso otro sistema de ecuaciones mucho más generales, que toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xg(x) - yp(x), \\ \dot{y} &= -dy + yq(x),\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Donde $d > 0$ es la tasa de mortalidad del depredador y en la ausencia de presas x ; las funciones $g(x), p(x), q(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfacen las siguientes restricciones:

- Existe $K > 0$ (capacidad de carga de la presa), tal que $g(x) > 0$ si $0 < x < K$, $g(K) = 0$, y $g(x) < 0$ si $x > K$. Por lo tanto, $g(x)$ es la tasa de crecimiento per cápita de la presa si no hay depredador.
- $p(x)$ es la respuesta funcional del depredador, que describe el número de presas muertas por un depredador, $p(0) = 0$ y $p(x) > 0$ para x positivo.
- $q(x)$ da la eficacia del consumo de presas por los depredadores, $q(0) = 0$, $q(x) > 0$, $\dot{q}(x) > 0$ si $x > 0$.

2.1.4. Modelo tipo Kolmogorov

Una de las consecuencias poco realistas en los modelos de Lotka-Volterra (2.1.2), es que el crecimiento de la presa no está acotado en ausencia de depredadores. Es por esto que las tasas de crecimiento deberían depender tanto de las densidades de las presas y depredadores como en la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xF(x, y), \\ \dot{y} &= yG(x, y),\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

donde F y $G \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dependen del tipo de interacción y la especie, más tarde este dominio se restringe a Ω (que más adelante se define) para su interpretación biológica. El modelo anterior se dice que es del tipo *Kolmogorov* (1936) en donde su principal característica es que los ejes son invariantes ¹ [8, 11, 17].

¹Un conjunto M se dice que es un conjunto invariante respecto a $\dot{x} = f(x)$, si ocurre que, una solución $x(t)$, que pertenece a M en un instante t , siempre permanece en el conjunto M .

Los modelos de tipo Kolmogorov son los modelos más generales para situaciones en las que la tasa de crecimiento per cápita de cada especie depende únicamente del tamaño de la población de ambas especies ([6]).

En los modelos de tipo Kolmogorov, se consideran las siguientes suposiciones:

1. Los depredadores afectan adversamente a las presas, es decir, la tasa de crecimiento neto de la población de presas disminuye cuando ellas han sido aprovechadas por más depredadores:

$$F_y(x, y) < 0$$

2. La disponibilidad de más presas (número de individuos) aumenta el crecimiento de la tasa de depredadores (adquieren experiencia):

$$G_x(x, y) > 0$$

y $G_y(x, y) \leq 0$.

3. Para algún $K > 0$ (capacidad de carga de presas),

$$F(K, 0) = 0,$$

y $F(x, y) < 0$ si, $x > K$.

4. Hay un nivel umbral de presas J que es mínimamente requerida para sostener la población de depredadores, es decir:

$$G(J, 0) = 0.$$

Si se cumplen las 4 suposiciones anteriores, se tiene la formulación de un modelo tipo Kolmogorov, y podemos saber qué le sucede a la solución, lo cual se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *Dado el modelo (2.1.4). Si se cumplen las siguientes suposiciones:*

1. $F_y(x, y) < 0$, $G_x(x, y) > 0$, $G_y(x, y) \leq 0$.
2. Para algún $K > 0$ (capacidad de carga de presas), $F(K, 0) = 0$ y $F(x, y) < 0$ si $x > K$; para algún $J > 0$ (población de presas mínima para sostener la población de depredadores) $G(J, 0) = 0$.

entonces cada solución de un modelo Kolmogorov con $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ permanece acotado para $0 \leq t < \infty$.

2. Sistemas tipo Kolmogorov

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [6].

Además del modelo presentado en esta subsección, existen otros, que se pueden consultar en [6, 14]. En la siguiente sección se ampliará la información planteada acerca de los modelos tipo kolmogorov, además se mencionan algunas mejoras y los modelos a desarrollar en este trabajo de tesis.

Existen muy pocos trabajos en los que se analizan bifurcaciones del sistema de ecuaciones de tipo Kolmogorov, provocadas por parámetros de bifurcación en alguna de las ecuaciones que conforman el sistema. En este trabajo de tesis, se incluye el uso de un parámetro de bifurcación, para dos sistemas de ecuaciones tipo Kolmogorov y se analiza su influencia en el comportamiento de ambos sistemas.

2.2. Modelos tipo Kolmogorov modificados

Estamos interesados en modelar el tipo de interacción presa-depredador no clásico que comprenda dos especies: presas $x(t)$ y, depredadores $y(t)$, se tomarán en cuenta aspectos de ecología de poblaciones que tengan interpretación biológica y matemáticamente nos enfocamos en el primer cuadrante para la representación de las curvas solución. Así, la región de interés biológica Ω se define como sigue:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}. \quad (2.2.1)$$

Los modelos presa-depredador gobiernan muchos fenómenos en la dinámica de la población, inmunología, medicina, etc. bajo la siguiente hipótesis: *"suponemos que hay dos especies: una especie A (depredador) se alimenta de otra especie B (presa), que a su vez se alimenta de otras especies [13, 12]."*

De las hipótesis que gobiernan a los modelos de tipo Kolmogorov, mencionadas anteriormente, se construye el siguiente modelo presa-depredador que se analizará en este proyecto de tesis, el cual se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales, con la novedad de la inclusión de un parámetro en alguna de las ecuaciones. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right), \\ \dot{y} = y \left[\left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} \right) + x \right], \end{cases}$$

con $\mu > 0$ parámetro de bifurcación, K_1 representa la capacidad de carga de la población de presas y K_2 representa la capacidad de carga de la población de depredadores. En este modelo la primera ecuación nos da la dinámica de las presas, donde el término xy representa una competencia interespecífica, por otro lado, la segunda ecuación nos da la dinámica de los depredadores, donde el término y^2 representa una competencia intraespecífica (consigo misma) en los depredadores, xy representa la interacción entre presas y depredadores y el término $\frac{1}{\mu}$ representa el umbral mínimo de presas para sostener la población de depredadores. Este modelo es de tipo Kolmogorov, ya que toma la forma de (2.1.4), donde $F = -y + 1 - \frac{x}{K_1}$, $G = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{y}{K_2}\right) + x$, y además satisface las 4 suposiciones de la pág. 24, como se puede observar a continuación:

1. $F_y(x, y) < 0$; pues, $F_y(x, y) = -1 < 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$.
2. $G_x(x, y) > 0$ y $G_y(x, y) \leq 0$; dado que, $G_x(x, y) = 1 > 0$ y $G_y(x, y) = -\frac{1}{K_2}$, para todo $(x, y) \in \Omega$.

2. Sistemas tipo Kolmogorov

3. $F(K, 0) = 0$ y $F(x, y) < 0$, si $x > K$; pues $F(K_1, 0) = \left(1 - \frac{K_1}{K_1}\right) - 0 = 0$, donde $K = K_1$.

Además, observemos que si $x > K_1$, entonces $F(x, y) = \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - y < 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$.

4. $G(J, 0) = 0$; $G(J, 0) = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{0}{K_2}\right) + J = 0$, de donde, $J = \frac{1}{\mu}$.

Por otro lado, en este trabajo de tesis también estudiaremos un modelo que hemos denominado cuasi-Kolmogorov, ya que satisface todas las condiciones excepto una.

El modelo es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = x[x(1-x) - y], \\ \dot{y} = K\left(x - \frac{1}{\mu}\right)y, \end{cases}$$

donde x, y representan la cantidad de individuos de la población de presas y depredadores, respectivamente, $\mu > 0$ es el parámetro de bifurcación y K representa la capacidad de carga de los depredadores. La primera ecuación nos da la dinámica de las presas, donde el término x^2 representa una competencia intraespecífica (consigo misma) en las presas, xy representa la interacción entre presas y depredadores, y el término x^3 aún sin interpretación ecológica. La segunda ecuación nos da la dinámica del depredador, donde el término Kxy representa una competencia interespecífica (con la otra especie). Notemos que, este modelo toma la forma de (2.1.4), donde $F = x(1-x) - y$, $G = K\left(x - \frac{1}{\mu}\right)$ pero no satisface una de las 4 suposiciones mencionadas anteriormente;

$$F(K, 0) = 0; \text{ no se satisface pues } F(K, 0) = K(1-K) - 0 = K(1-K) \neq 0.$$

por lo tanto, este modelo es llamado cuasi-Kolmogorov.

La presencia del parámetro μ nos permitirá estudiar la cantidad de puntos críticos que nacen o se destruyen, su estabilidad e interpretación biológica, en ambos modelos.

En los próximos dos capítulos se determinará bajo qué condiciones sobre los parámetros en los modelos, se obtiene que las curvas solución que inician en Ω están contenidas en Ω , de modo que Ω con esta propiedad se denomina *conjunto invariante*, geoméricamente nos apoyaremos del campo vectorial obtenido con el software Wolfram Mathematica 11, para visualizar estas trayectorias.

Capítulo 3

Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

En el presente capítulo realizaremos un análisis local del modelo tipo Kolmogorov propuesto en el capítulo anterior, para esto primero analizaremos los puntos de equilibrio y su estabilidad; en donde emplearemos algunas definiciones mostradas en el capítulo 1, luego, calcularemos el número reproductivo básico de este modelo y trabajaremos las bifurcaciones pero desde el punto de vista de nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio, como resultado se formulan un conjunto de teoremas originales, sujetos a restricciones sobre los parámetros. En el capítulo 5, se proponen escenarios sintéticos, que satisfacen a los teoremas y que denominamos simulaciones.

Ahora nos enfocaremos en estudiar ampliamente el modelo tipo Kolmogorov planteado en el capítulo anterior.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right), \\ \dot{y} = y \left[- \left(\frac{1}{\mu} + \frac{y}{K_2} \right) + x \right], \end{cases} \quad (3.0.1)$$

donde x, y representan la cantidad de individuos en la población de presas y depredadores, respectivamente, $\mu > 0$ es un parámetro y $K_1, K_2 > 0$ representan la capacidad de carga. Obsérvese que este modelo es no lineal y el parámetro de bifurcación μ se encuentra en la ecuación de depredadores, es importante considerar que dicho modelo es de tipo Kolmogorov. Posteriormente, se analizará el modelo (3.0.1) utilizando la definición 1.1.10, para determinar los cambios cualitativos y cuantitativos del retrato fase y además su interpretación biológica.

3.1. Ceroclinas del modelo sobre el conjunto Ω

Estudiaremos el comportamiento del modelo (3.0.1) en el conjunto Ω dado en (2.2.1), y así determinar bajo qué condiciones tiene un comportamiento invariante, es decir, que cualquier solución que inicia dentro del conjunto Ω permanece en él al transcurrir el tiempo.

Al analizar el modelo (3.0.1), tenemos que las x -ceroclinas se obtienen cuando $x - xy - \frac{x^2}{K_1} = 0$, es decir, cuando $x = 0$ y $y = 1 - \frac{x}{K_1}$, con $K_1 > 0$. Mientras que las y -ceroclinas se obtienen cuando $xy - \frac{y}{\mu} - \frac{y^2}{K_2} = 0$, es decir, cuando $y = 0$ y $x = \frac{1}{\mu} + \frac{y}{K_2}$; las cuales son dibujadas en el plano fase que se muestra en la Figura 3.1, las x -ceroclinas se trazan en azul, y las y -ceroclinas en rojo. La región Ω es dividida por estas curvas en cuatro regiones, en las cuales se señala, con flechas, el flujo de las ecuaciones del modelo (3.0.1). Observemos que la dirección de estas flechas indican que en el primer cuadrante, todas las soluciones no se escapan de esta región; es decir, al tomar una condición inicial en Ω , al transcurrir el tiempo, la solución permanece en Ω . Es decir, Ω es invariante.

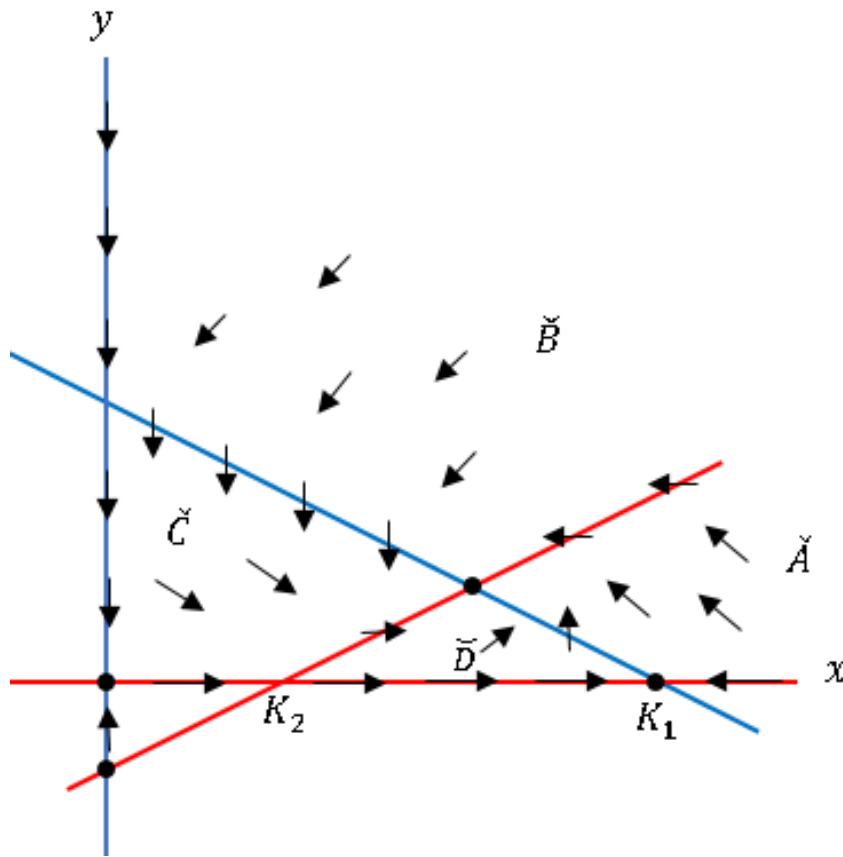


Figura 3.1: Campo direccional del modelo (3.0.1) en la región Ω , para $K_1 > K_2$.

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

Para la clasificación de los puntos críticos del modelo no lineal, se aplican los teoremas 1.1.15 y 1.1.16 mostrados en la pág. 5, los retratos fase mostrados corresponden al modelo lineal y no lineal. Para el modelo lineal se realizó una traslación de cada punto crítico al origen.

3.2.1. Análisis del modelo tipo Kolmogorov

Ahora calculemos los puntos de equilibrio del modelo (3.0.1), igualando a cero las respectivas ecuaciones.

- S_0 , se obtiene considerando, $x = 0$ y $y = 0$.
- S_1 , se obtiene al considerar $y = 0$, de donde

$$x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right),$$

pero $x \neq 0$, por lo tanto:

$$x = K_1.$$

- S_2 , se obtiene considerando $x = 0$, luego

$$y \left[-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} \right] = 0,$$

dado que $y \neq 0$, obtenemos:

$$y = -\frac{K_2}{\mu}.$$

- S_3 , se obtiene al considerar $y = 1 - \frac{x}{K_1}$, luego

$$-\frac{1}{\mu} - \frac{1}{K_2} + \frac{x}{K_1 K_2} + x = 0,$$

al despejar x , obtenemos:

$$x = \frac{K_1(K_2 + \mu)}{\mu(K_1 K_2 + 1)},$$

luego, sustituyendo en y ,

$$y = \frac{K_2(K_1 \mu - 1)}{\mu(K_1 K_2 + 1)}.$$

De los cálculos presentados, obtenemos que los puntos de equilibrio para el modelo (3.0.1) son: $S_0 = (0, 0)$, $S_1 = (K_1, 0)$, $S_2 = \left(0, -\frac{K_2}{\mu} \right)$ y $S_3 = \left(\frac{K_1(K_2 + \mu)}{\mu(K_1 K_2 + 1)}, \frac{K_2(K_1 \mu - 1)}{\mu(K_1 K_2 + 1)} \right)$.

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

Observación 3.2.1. Para el modelo (3.0.1), notemos que al considerar el punto $S_1 = (K_1, 0)$ y x_0 una condición inicial sobre el eje x , tenemos que, si $0 < x_0 < K_1$ entonces $\dot{x} > 0$ y si $x_0 > K_1$ entonces $\dot{x} < 0$ (ver Figura 3.2).

En la Figura 3.2 señalamos con flechas como es el flujo del campo vectorial y x_0 denota la condición inicial sobre el eje x , por ejemplo en la Figura 3.2a podemos observar que cuando $0 < x_0 < K_1$, las flechas apuntan hacia la derecha, lo cual representa un aumento de presas, mientras que en la Figura 3.2b cuando $x_0 > K_1$, las flechas apuntan hacia la izquierda, por lo que se tiene una disminución de presas.

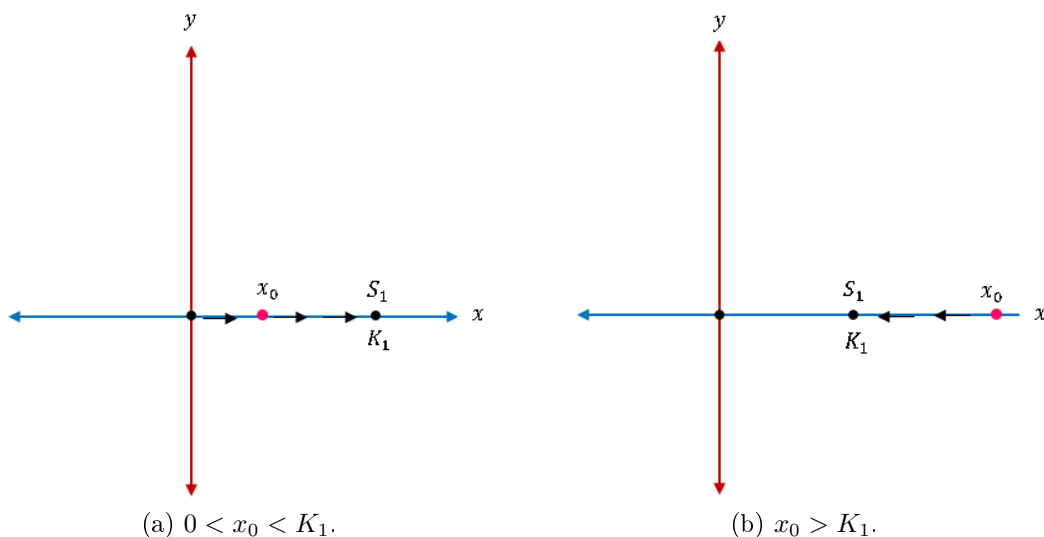


Figura 3.2: Comportamiento de presas al variar la condición inicial x_0 sobre el eje x para el modelo (3.0.1).

Análisis de estabilidad local de los puntos críticos para el modelo (3.0.1).

Ahora, analicemos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio del modelo (3.0.1) empleando el Cuadro 1.1.1 y la definición 1.1.10. La matriz Jacobiana (según la definición 1.1.6) para el modelo(3.0.1) es:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2x}{K_1} - y\right) & -x \\ y & \left(x - \frac{1}{\mu} - \frac{2y}{K_2}\right) \end{bmatrix}.$$

La evaluación del punto S_0 (*en ausencia de ambas especies*) en la matriz Jacobiana para el modelo (3.0.1) es:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix},$$

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

cuyos valores propios son: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{\mu}$. Así, por la definición 1.1.10 y el Cuadro 1.1.1, el punto S_0 es llamado hiperbólico y se clasifica como un punto silla inestable.

Notemos que para cualquier elección de K_1 , K_2 y μ , S_0 sigue siendo un punto silla. Por ejemplo, si tomamos $K_1 = 3$, $K_2 = 4$ y $\mu = 2$, obtenemos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ (ver Figura 3.3).

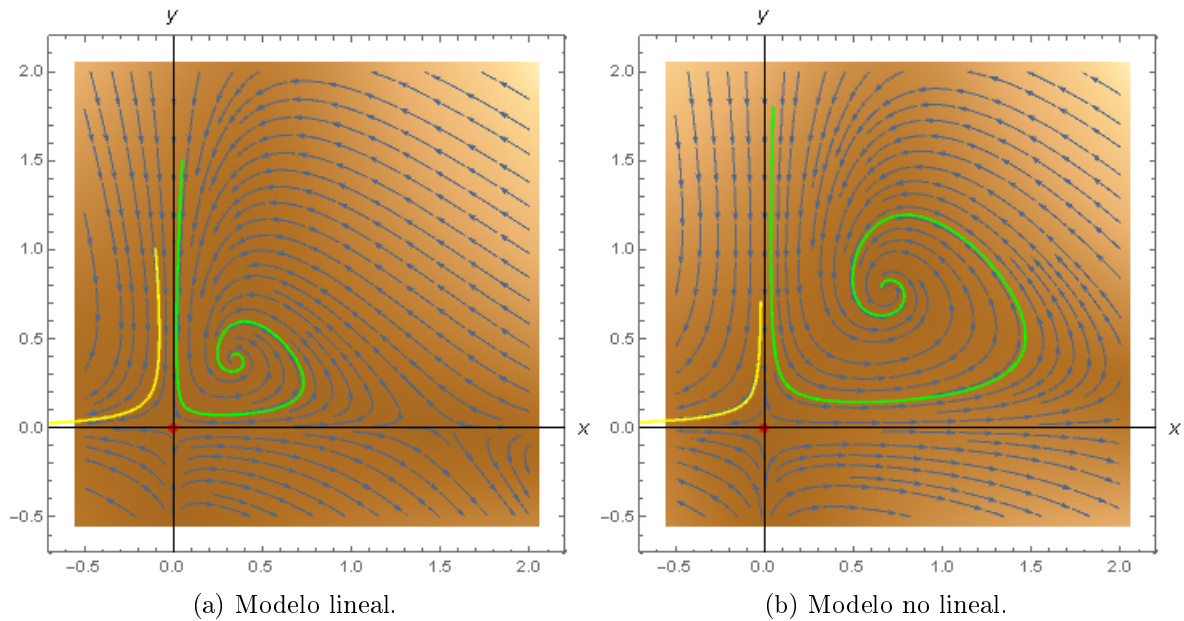


Figura 3.3: Retrato fase del punto S_0 (ausencia de ambas especies), para $\mu = 2$, $K_1 = 3$ y $K_2 = 4$.

En la Figura 3.3, al tomar una condición inicial cercana al punto de equilibrio, se observa que, para el escenario de la Figura 3.3a y 3.3b cuando la población de depredadores disminuye, la población de presas aumenta, posteriormente la población de presas disminuye. Es importante notar en ambos casos que si la condición inicial se encuentra fuera del conjunto invariante, entonces la solución ya no tiene sentido biológico. Más adelante se hace un análisis de este parámetro de bifurcación con una interpretación.

La evaluación del punto S_1 (*en ausencia de depredadores*) en la matriz Jacobiana para el modelo (3.0.1) es:

$$J(K_1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -K_1 \\ 0 & \left(K_1 - \frac{1}{\mu}\right) \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = K_1 - \frac{1}{\mu}$.

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

Dado que $K_1 > 0$, para clasificar el punto S_1 , es necesario conocer el signo de λ_2 , de aquí que, tenemos los siguientes casos:

- Si $K_1 > \frac{1}{\mu}$, entonces $\lambda_2 > 0$.
En este caso, por la definición 1.1.10 y el Cuadro 1.1.1, S_1 se clasifica como un punto silla e inestable.
- Si $K_1 = \frac{1}{\mu}$, entonces $\lambda_2 = 0$.
De aquí que, el punto S_1 es no hiperbólico.
- Si $K_1 < \frac{1}{\mu}$, entonces $\lambda_2 < 0$.
Así, por la definición 1.1.10 y empleando el Cuadro 1.1.1 el punto S_1 es un sumidero (nodo impropio) asintóticamente estable.

Notemos que, si elegimos $K_1 = 2$ y $\mu = \frac{1}{4}$, entonces se tiene la tercera restricción de la raíz λ_2 , es decir $K_1 < \frac{1}{\mu}$ y K_2 arbitrario. Por lo tanto, para estos valores S_1 se clasifica como un punto sumidero (ver Figura 3.4).

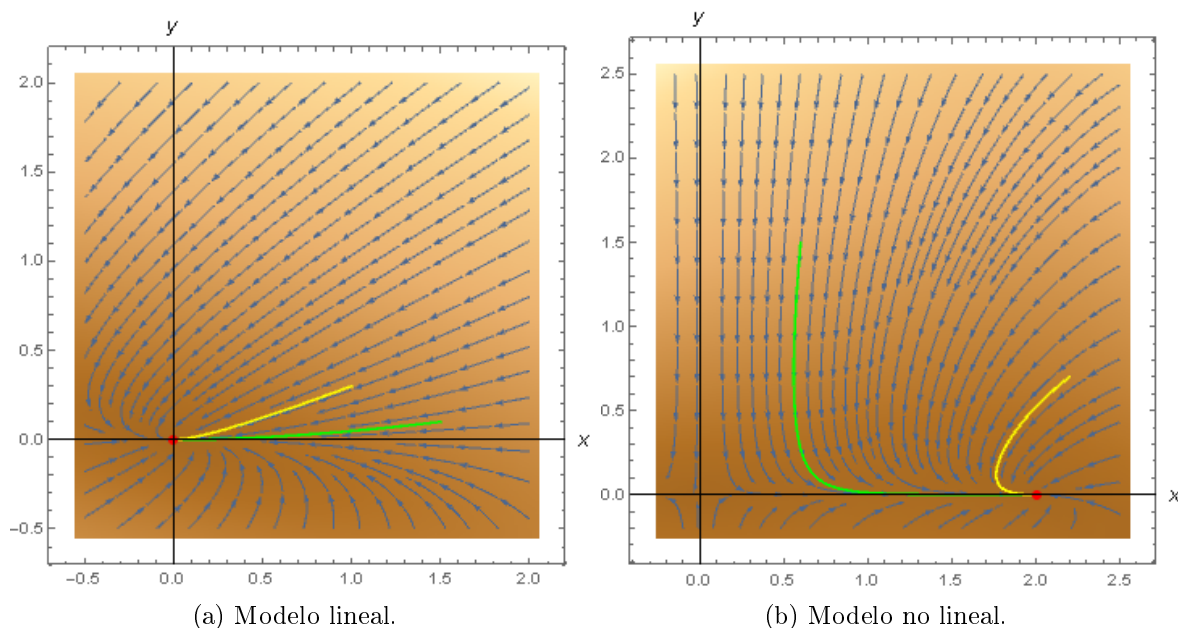


Figura 3.4: Retrato fase del punto S_1 (ausencia de depredadores), para $K_1 = 2$, $K_2 = 6$ y $\mu = \frac{1}{4}$.

En la Figura 3.4 al tomar una condición inicial, observamos que para el escenario de la Figura 3.4a cuando la población de depredadores disminuye, la población de presas también disminuye, en esta figura se puede observar que el punto S_1 se traslada al origen. En el escenario de la Figura 3.4b observamos que la población de depredadores comienza a

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

disminuir mientras que la población de presas aumenta.

Dado que el punto $S_2 \notin \Omega$, no es necesario evaluar este punto en la matriz Jacobiana y tampoco conocer su estabilidad.

La evaluación del punto S_3 (*en presencia de ambas especies*) en la matriz Jacobiana para el modelo (3.0.1) es:

$$J\left(\frac{K_1(K_2 + \mu)}{\mu(K_1K_2 + 1)}, \frac{K_2(K_1\mu - 1)}{\mu(K_1K_2 + 1)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-K_2 - \mu}{\mu(K_1K_2 + 1)} & -\frac{K_1(K_2 + \mu)}{\mu(K_1K_2 + 1)} \\ \frac{K_2(K_1\mu - 1)}{\mu(K_1K_2 + 1)} & \frac{-K_1\mu + 1}{\mu(K_1K_2 + 1)} \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[(\mu + K_2) + (K_1\mu - 1)] \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 + K_1K_2)\mu}, \quad (3.2.1)$$

donde

$$\Delta = [(\mu + K_2) + (K_1\mu - 1)]^2 - 4[(K_1\mu - 1)(K_2 + \mu)(1 + K_1K_2)]. \quad (3.2.2)$$

1. Asumiendo que $K_1 \neq K_2$ (Capacidades de carga distintas).

Haciendo $a = \mu + K_2$ y $b = K_1\mu - 1$ en (3.2.2), obtenemos que

$$\Delta = (a - b)^2 - 4abK_1K_2.$$

Para conocer la clasificación del punto crítico S_3 , necesitamos conocer el valor o signo de los valores propios, para esto analizaremos el discriminante denotado por Δ . A continuación se proponen los siguientes casos para este análisis:

- (a) Raíces repetidas, significa que $\Delta = 0$, es decir,

$$a = b = 0,$$

lo cual no puede ocurrir, pues los parámetros son positivos.

- (b) Raíces distintas,

- Si $0 < a < \infty$ y $b = 0$, entonces

$$K_1\mu - 1 = 0,$$

de donde

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

$$\mu = \frac{1}{K_1}.$$

Sustituyendo el valor de μ en (3.2.1), obtenemos,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

Por lo tanto, S_3 es un punto no hiperbólico.

- Si $0 < a \leq 1$ y $b \geq 1$, entonces $\Delta < 0$. De aquí que,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{\Delta}i}{2\mu(1+K_1K_2)}.$$

Así, por la definición 1.1.10, S_3 se clasifica como punto espiral.

- Si $a+b = 0$, $a > 0$ y considerando que los parámetros que intervienen tienen sentido biológico, tenemos:

$$(\mu + K_2) + (K_1\mu - 1) = 0, \tag{3.2.3}$$

o bien

$$\mu(1 + K_1) = 1 - K_2.$$

De aquí que

$$\mu = \frac{1 - K_2}{1 + K_1}, \tag{3.2.4}$$

como K_1, K_2 son positivos, el término $1 - K_2 > 0$, es decir, $0 < K_2 < 1$.

Sustituyendo (3.2.3) en (3.2.2):

$$\beta = -4(K_1\mu - 1)(K_2 + \mu)(1 + K_1K_2),$$

al sustituir (3.2.4) en β ,

$$\beta = \frac{4(1 + K_1K_2)^3}{(1 + K_1)^2} > 0,$$

de modo que no es posible que $\Delta < 0$. Por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{1 + K_1K_2}}{1 - K_2}.$$

En este caso, por la definición 1.1.10 y empleando el Cuadro 1.1.1, S_3 es un punto silla inestable.

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

(c) Raíces complejas puras,

Sea Δ el discriminante, reescribiendo los valores propios, tenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu(1+K_1K_2)},$$

Notemos que, si $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ con $a > 0$, entonces $a+b = 0$.

O bien

$$\mu + K_2 = -(K_1\mu - 1),$$

luego, Δ se convierte en

$$\Delta = 4(\mu + K_2)^2(1 + K_1K_2) > 0,$$

es decir, $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{C}$.

Por lo tanto, este caso no se tiene.

En particular, si $K_1 = \frac{1}{2}$ y $\mu = 2$ entonces estamos en el primer caso de las raíces distintas, pues $\mu = \frac{1}{K_1}$, y K_2 arbitrario. Así, S_3 es un punto no hiperbólico (ver Figura 3.5).

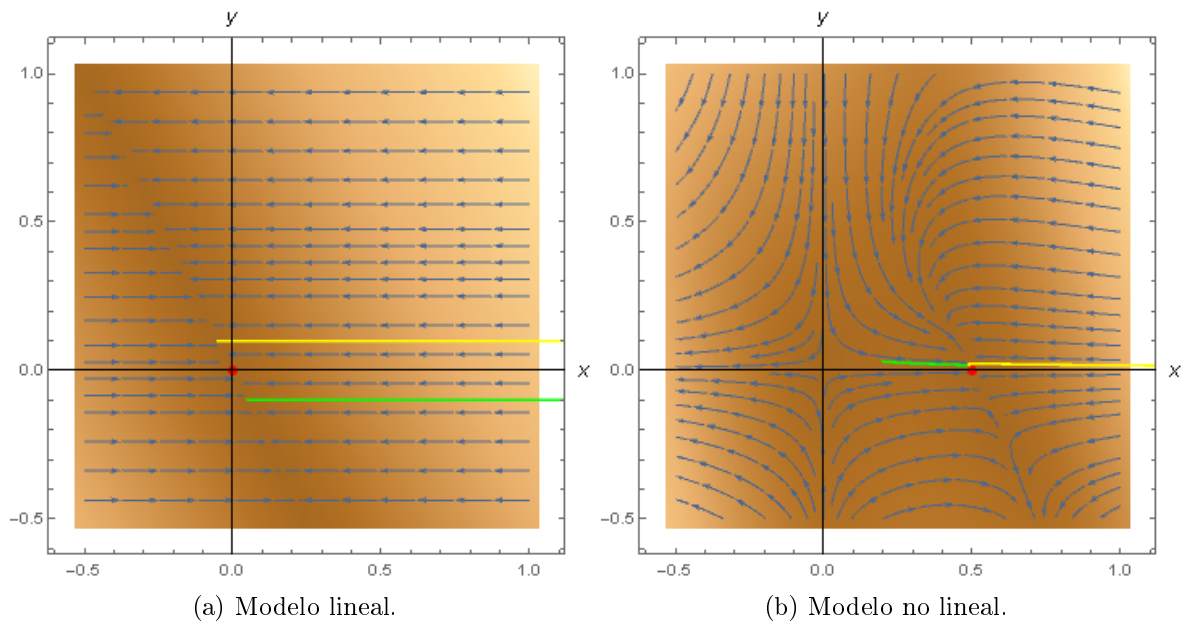


Figura 3.5: Retrato fase del punto S_3 (presencia de ambas especies), para $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_2 = 6$ y $\mu = 2$.

En la Figura 3.5 al tomar una condición inicial, observamos que, para el escenario de la Figura 3.5a la población de depredadores se mantiene constante, mientras que

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

la población de presas disminuye, en esta figura se puede observar que el punto S_3 se traslada al origen. En el escenario de la Figura 3.5b observamos que la población de depredadores se mantiene constante y la población de presas aumenta.

2. Analizando el caso en que $K_1 = K_2$ (Capacidades de carga iguales).

Al sustituir $K_1 = K_2$ en (3.2.2), y asumiendo $a = \mu + K_1$, $b = K_1\mu - 1$, obtenemos que

$$\Delta = (a - b)^2 - 4abK_1^2.$$

Para conocer la clasificación del punto crítico S_3 , necesitamos conocer el valor o signo de los valores propios, para esto analizaremos el discriminante denotado por Δ . A continuación se proponen los siguientes casos para este análisis:

(a) Raíces repetidas, para que ello ocurra es necesario $\Delta = 0$, es decir,

$$a = b = 0,$$

lo cual no puede ocurrir, pues los parámetros son positivos.

(b) Raíces distintas,

■ Si $0 < a < \infty$ y $b = 0$, es decir,

$$K_1\mu - 1 = 0,$$

entonces

$$\mu = \frac{1}{K_1}.$$

Luego, sustituyendo la expresión anterior en (3.2.1) y considerando $K_1 = K_2$, tenemos

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

Por lo tanto, el punto S_3 se clasifica como no hiperbólico.

■ Si $b \geq 1$, entonces $\Delta < 0$. Luego,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\mu + K_1) + (K_1\mu - 1) \pm \sqrt{\Delta}i}{2\mu(1 + K_1^2)}.$$

Así, por la definición 1.1.10, S_3 se clasifica como punto espiral.

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

- Si $a + b = 0$, $a > 0$ y considerando que los parámetros que intervienen tienen sentido biológico, tenemos:

$$(\mu + K_1) + (K_1\mu - 1) = 0, \quad (3.2.5)$$

o bien

$$\mu(1 + K_1) = 1 - K_1.$$

De aquí que

$$\mu = \frac{1 - K_1}{1 + K_1}, \quad (3.2.6)$$

como K_1 es positivo, el término $1 - K_1 > 0$, es decir, $0 < K_1 < 1$.

Sustituyendo (3.2.5) en (3.2.2) y considerando $K_1 = K_2$:

$$\beta = -4(K_1\mu - 1)(K_1 + \mu)(1 + K_1^2),$$

al sustituir (3.2.6) en β ,

$$\beta = \frac{4(1 + K_1^2)^3}{(1 + K_1)^2} > 0,$$

de modo que no es posible que $\Delta < 0$. Por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{1 + K_1^2}}{1 - K_1}.$$

Es decir, por la definición 1.1.10 y empleando el Cuadro 1.1.1, S_3 es un punto silla inestable.

(c) Raíces complejas puras,

Sea Δ el discriminante, reescribiendo los valores propios, tenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu(1 + K_1^2)},$$

Notemos que, si $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ con $a > 0$, entonces $a + b = 0$.

O bien

$$\mu + K_1 = -(K_1\mu - 1),$$

lo que significa,

$$\Delta = 4(\mu + K_1)^2(1 + K_1^2) > 0,$$

luego, $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{C}$.

Por lo tanto, este caso no se tiene.

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

En particular, si elegimos $K_1 = K_2 = 4$ y $\mu = \frac{1}{2}$ entonces estamos en el segundo caso de las raíces distintas, pues $b \geq 1$. Así, S_3 es un punto espiral (ver Figura 3.6).

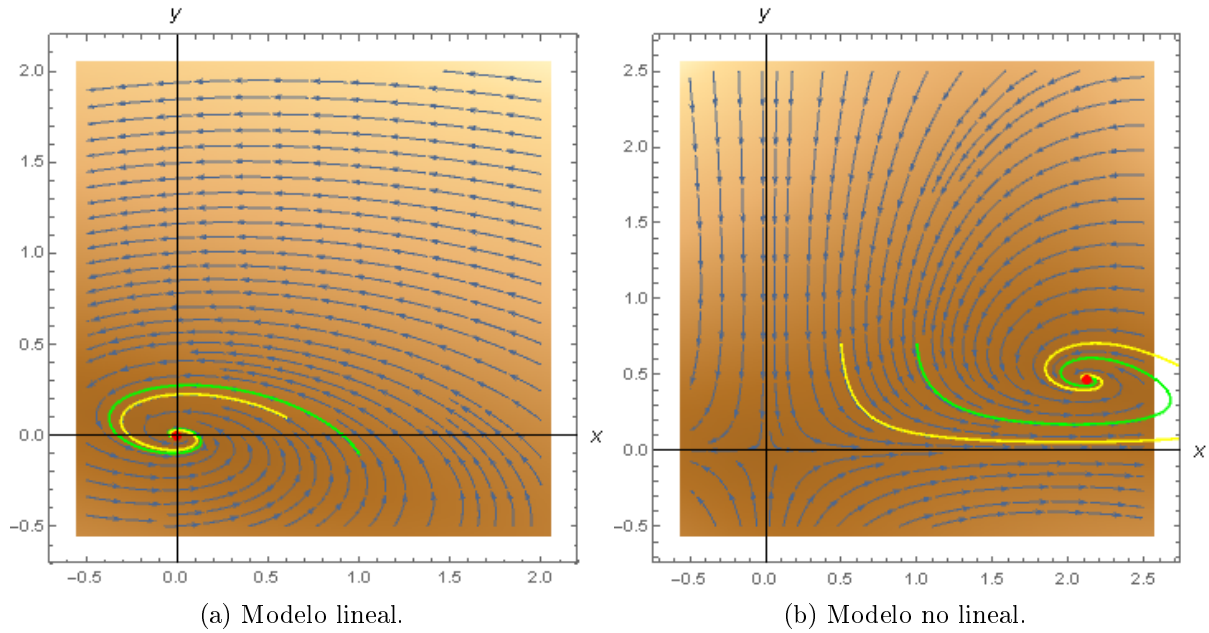


Figura 3.6: Retrato fase del punto S_3 (ausencia de presas), para $K_1 = K_2 = 4$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

En la Figura 3.6 podemos observar que al tomar una condición inicial, para el escenario de la Figura 3.6a la población de presas disminuye, mientras que la población de depredadores aumenta, en esta figura se puede observar que el punto S_3 se traslada al origen. En el escenario de la Figura 3.6b observamos que cuando la población de depredadores disminuye, la población de presas aumenta, posteriormente disminuye.

3. Analizando el caso en que $K_1 = K_2 = \mu$ (Capacidades de carga y parámetro iguales). Sustituyendo $K_1 = K_2 = \mu$ en (3.2.1),

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[(2\mu) + (\mu^2 - 1)] \pm \sqrt{[(2\mu) + (\mu^2 - 1)]^2 - 4[(\mu^2 - 1)(2\mu)(1 + \mu^2)]}}{2(1 + \mu^2)\mu}, \quad (3.2.7)$$

y asumiendo $a = 2\mu$ y $b = \mu^2 - 1$, obtenemos que

$$\Delta = (a - b)^2 - 4ab\mu^2.$$

Para conocer la clasificación del punto crítico S_3 , necesitamos conocer el valor o signo de los valores propios, para esto analizaremos el discriminante denotado por Δ . A continuación se proponen los siguientes casos para este análisis:

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

(a) Raíces repetidas, para que ello ocurra es necesario $\Delta = 0$, es decir,

$$a = b = 0,$$

lo cual no puede ocurrir, pues los parámetros son positivos.

(b) Raíces distintas,

- Si $0 < a < \infty$ y $b = 0$, es decir,

$$\mu^2 - 1 = 0,$$

resolviendo la ecuación, se obtiene

$$\mu = 1,$$

se descarta $\mu = -1$, ya que $\mu > 0$.

Luego, al sustituir el valor de μ en (3.2.7) tenemos,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

De donde, S_3 es un punto no hiperbólico.

- Si $b \geq 1$, entonces $\Delta < 0$. Luego,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(2\mu) + (\mu^2 - 1) \pm \sqrt{\Delta}i}{2\mu(1 + \mu^2)}.$$

Por lo tanto, utilizando la definición 1.1.10, tenemos que S_3 es un punto espiral.

- Si $a+b = 0$, $a > 0$ y considerando que los parámetros que intervienen tienen sentido biológico, tenemos:

$$(2\mu) + (\mu^2 - 1) = 0. \tag{3.2.8}$$

Resolviendo la ecuación, nos quedamos con $\mu > 0$, es decir

$$\mu = -1 + \sqrt{2}, \tag{3.2.9}$$

y descartamos $\mu < 0$, por la interpretación biológica.

Sustituyendo (3.2.8) en (3.2.2) y considerando $K_1 = K_2 = \mu$:

$$\beta = -4(\mu^2 - 1)(2\mu)(1 + \mu^2),$$

al sustituir (3.2.9) en β , observamos que

3.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

$$\beta = 320 - 224\sqrt{2} > 0.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-2\mu(\mu^2 - 1)(1 + \mu^2)}}{\mu(1 + \mu^2)}.$$

Así, por la definición 1.1.10 y empleando el Cuadro 1.1.1, S_3 se clasifica como un punto silla inestable.

(c) Raíces complejas puras,

Sea Δ el discriminante, reescribiendo los valores propios, tenemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu(1 + \mu^2)},$$

Notemos que, si $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ con $a > 0$, entonces $a + b = 0$.

O bien

$$2\mu = -(\mu^2 - 1),$$

lo que significa,

$$\Delta = 4(2\mu)^2(1 + \mu^2) > 0,$$

luego, $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{C}$.

Por lo tanto, este caso no se tiene.

En particular, si $\mu = \frac{3}{2}$, entonces nos encontramos en el segundo caso de las raíces distintas, pues $\mu \geq \sqrt{2}$, por lo tanto, S_3 es un punto espiral.

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

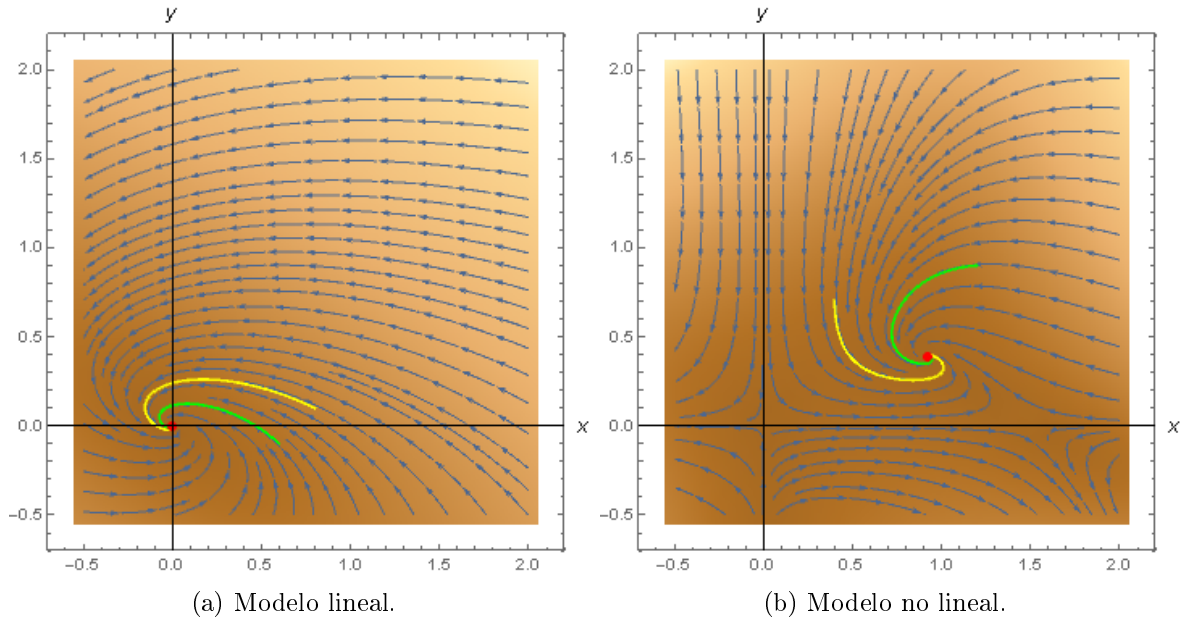


Figura 3.7: Retrato fase del punto S_3 (presencia de ambas especies), para $K_1 = K_2 = \mu = \frac{3}{2}$.

En la Figura 3.7 podemos observar que al tomar una condición inicial, para el escenario de la Figura 3.7a la población de depredadores aumenta, mientras que la población de presas disminuye, además en esta figura se puede observar que el punto S_3 se traslada al origen. En el escenario de la Figura 3.7b observamos que cuando la población de depredadores disminuye, la población de presas aumenta, posteriormente disminuye.

Resumiendo, se han demostrado los siguientes casos del teorema;

Teorema 3.2.2. *Dado el modelo tipo Kolmogorov con parámetro μ y capacidades de carga K_1, K_2*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right), \\ \dot{y} = y \left[-\left(\frac{1}{\mu} + \frac{y}{K_2} \right) + x \right], \end{cases}$$

restringido al conjunto Ω (con interpretación biológica), los puntos de equilibrio se clasifican en:

- $S_0 = (0, 0)$, es un punto de equilibrio inestable, para todo K_1, K_2 y $\mu > 0$.
- $S_1 = (K_1, 0)$, es un punto de equilibrio:

- Inestable si $K_1 > \frac{1}{\mu}$ y para todo $K_2 > 0$.
 - No hiperbólico si $K_1 = \frac{1}{\mu}$ y para todo $K_2 > 0$.
 - Asintóticamente estable si $K_1 < \frac{1}{\mu}$ y para todo $K_2 > 0$.
- $S_3 = \left(\frac{K_1(K_2+\mu)}{\mu(K_1K_2+1)}, \frac{K_2(K_1\mu-1)}{\mu(K_1K_2+1)} \right)$, es un punto de equilibrio:
- No hiperbólico si $0 < a < \infty$ y $b = 0$, para todo K_1, K_2 y $\mu > 0$.
 - Asintóticamente estable,
 - Si $0 < a \leq 1$ y $b \geq 1$ para $K_1 \neq K_2$.
 - Si $b \geq 1$ para $K_1 = K_2 \neq \mu$ o $K_1 = K_2 = \mu$.
 - Inestable si $a + b = 0$ y $a > 0$, para todo K_1, K_2 y $\mu > 0$.

donde $a = \mu + K_2$ y $b = K_1\mu - 1$.

3.3. Número reproductivo básico

Dado que necesitamos analizar la evolución de las especies, recurrimos al número reproductivo básico, este nos permite saber que tan rápido o lento es el crecimiento de cada una de las poblaciones.

Usualmente, se denota por R_0 a este parámetro y es de suma importancia en ecología de poblaciones, ya que a través de él se puede conocer la dinámica de las poblaciones.

Cálculo del número reproductivo para el modelo (3.0.1)

Necesitamos el número reproductivo de ambas especies a los cuales denotaremos como: R_x (número reproductivo para la población de presas) y R_y (número reproductivo para la población de depredadores). Para calcularlos utilizaremos el método denominado *matriz de la siguiente generación* descrito en [6].

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; con cada $x_i \geq 0$, el número de individuos en cada compartimento y dado que solo tenemos dos especies (presas y depredadores), se considerara $n = 2$.

Notemos que, para calcular R_x , es importante determinar los puntos de equilibrio que se encuentren libre de depredadores.

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

A continuación mencionaremos como están definidas las matrices que generan el número reproductivo básico para la población de presas R_x .

Sea $\mathcal{F}_i(x)$ la tasa de aparición de nuevas presas en el compartimento i , sea $\mathcal{V}^+_i(x)$ la tasa de transferencia de los individuos dentro del compartimento i , por otros medios y $\mathcal{V}^-_i(x)$ la tasa de transferencia de los individuos fuera del compartimento i . El modelo compartimental se puede escribir en la forma:

El modelo compartimental se puede escribir en la forma:

$$X_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i(x),$$

donde $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}^- - \mathcal{V}^+$.

Considerando el modelo (3.0.1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right), \\ \dot{y} &= y \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + x \right),\end{aligned}$$

y siguiendo la metodología mencionada anteriormente obtenemos:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\mu} + \frac{y^2}{K_2} \\ xy - x + \frac{x}{K_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^- = \begin{pmatrix} \frac{y}{\mu} + \frac{y^2}{K_2} \\ xy + \frac{x}{K_1} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y} \Big|_{S_1} = K_1, \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \Big|_{S_1} = \frac{1}{\mu}.$$

Para el modelo (3.0.1), R_x toma la forma:

$$R_x = \frac{K_1}{\frac{1}{\mu}} = K_1\mu.$$

Otra forma de determinar el valor de R_x para el modelo (3.0.1) es por medio de los valores propios que determinan la estabilidad del punto de equilibrio libre de depredadores, los cuales fueron obtenidos para el punto de equilibrio S_1 y son:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = K_1 - \frac{1}{\mu}.$$

Sabemos que $\lambda_1 < 0$, mientras que si $K_1 < \frac{1}{\mu}$, o bien, $K_1\mu < 1$, tenemos que, $\lambda_2 < 0$, entonces S_1 es localmente asintóticamente estable; pero si $K_1 > \frac{1}{\mu}$, o bien, $K_1\mu > 1$, tenemos que, $\lambda_2 > 0$, entonces S_1 es un punto de equilibrio inestable. Como podemos notar si realizamos el cociente entre el término de la izquierda sobre el término de la derecha en las desigualdades, podemos definir la estabilidad de S_1 comparándolo como la unidad; a este cociente que definimos se le llama R_x y tiene la siguiente forma:

$$R_x = K_1\mu. \tag{3.3.1}$$

Aplicando el método de la matriz de la siguiente generación para calcular R_y , donde R_y es el R_0 de la población de depredadores, tenemos que

$$F = \left. \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x} \right|_{S_2} = 0, \quad V = \left. \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \right|_{S_2} = -\frac{K_2}{\mu} - 1 + \frac{1}{K_1},$$

de donde

$$R_y = \frac{0}{\frac{\mu - \mu K_1 - K_1 K_2}{\mu K_1}} = 0,$$

y, por lo tanto, no se puede interpretar biológicamente R_y . Además, dado que el punto crítico libre de presas, dado por $S_2 \notin \Omega$, no tiene sentido determinar R_y .

Teorema 3.3.1. *Dado el modelo tipo Kolmogorov restringido al conjunto Ω , con parámetros K_1 , K_2 , μ y número reproductivo $R_x = K_1\mu$, que satisface que $R_x < 1$ ($R_x > 1$) entonces S_1 es asintóticamente estable (inestable).*

Teorema 3.3.2. *Dado el modelo tipo Kolmogorov restringido al conjunto Ω , con parámetros K_1 , K_2 , μ y número reproductivo $R_x = K_1\mu > 1$ ($R_x \leq 1$), que satisface que $0 < \mu + K_2 \leq 1$ y $R_x - 1 \geq 1$ ($R_x - 1 \not\geq 1$) entonces S_3 es asintóticamente estable (inestable).*

Para la demostración de los teoremas anteriores, se recurre al número reproductivo dado en (3.3.1), el cual se sustituye en el teorema (3.2.2) para conocer la estabilidad de los puntos S_1 y S_3 .

3.4. Análisis del comportamiento cíclico del modelo

Notemos que construir funciones de Dulac es de gran importancia, ya que su existencia excluye la existencia de ciclos límites, los cuales pueden ser asociados a escenarios que pueden ser benéficos o perjudiciales para las poblaciones [18].

En esta sección construiremos la función de Dulac para el modelo (3.0.1) con el objetivo de corroborar si presentan o no órbitas periódicas cerradas (ciclos límite), dados los resultados de las secciones previas.

Análisis del modelo (3.0.1).

El siguiente teorema nos muestra un método de construcción de una función de Dulac para el modelo tipo Kolmogorov.

Teorema 3.4.1. *El modelo tipo Kolmogorov admite una función de Dulac, para todo $x, y > 0$.*

Demostración. Definamos,

$$f_1 = x \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right),$$

$$f_2 = y \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + xy \right).$$

Calculando el negativo de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(f_1, f_2) &= - \left[x \left(\frac{d}{dx} \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right) \right) + \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right) \right] \\ &\quad - \left[y \left(\frac{d}{dy} \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + xy \right) \right) + \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + xy \right) \right], \\ &= - \left[x \left(-\frac{1}{K_1} \right) + \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right) + y \left(-\frac{1}{K_2} \right) + \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + xy \right) \right], \\ &= - \left[-\frac{x}{K_1} + \left(-y + 1 - \frac{x}{K_1} \right) - \frac{y}{K_2} + \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{y}{K_2} + xy \right) \right], \\ &= -\frac{1}{x}f_1 - \frac{1}{y}f_2 - \left[-\frac{x}{K_1} - \frac{y}{K_2} \right]. \end{aligned}$$

La función $c(x, y)$, se define como:

$$c(x, y) = -\frac{x}{K_1} - \frac{y}{K_2},$$

3.4. Análisis del comportamiento cíclico del modelo

utilizando $c(x, y)$ se construye la siguiente ecuación diferencial parcial

$$f_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi(c(x, y) - \operatorname{div}(f_1, f_2)),$$

cuya solución es una función de Dulac.

Sea $\phi = h(z)$, donde $z = z(x, y)$, se tiene que

$$\left[f_1 \frac{\partial z}{\partial x} + f_2 \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c(x, y) - \operatorname{div}(f_1, f_2)),$$

luego

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{c(x, y) - \operatorname{div}(f_1, f_2)}{f_1 \frac{\partial z}{\partial x} + f_2 \frac{\partial z}{\partial y}},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{f_1 y + f_2 x}{xy}}{f_1 y + f_2 x},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto,

$$h(x, y) = \frac{1}{xy}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0),$$

es una función de Dulac para el modelo (3.0.1). ■

A continuación se enuncia el siguiente Lema, en el cual se demuestra que utilizando la función $h(x, y)$ obtenida en el Teorema 3.4.1 y utilizando el criterio de Dulac, el modelo (3.0.1) no presenta trayectorias cerradas.

Lema 3.4.2. *El modelo (3.0.1) no presenta trayectorias cerradas en $\operatorname{int}(\Omega)$.*

Demostración. Veamos que el modelo (3.0.1) no tiene una trayectoria cerrada en el interior de Ω , para esto, emplearemos la función $h(x, y)$ obtenida previamente. Al aplicar el criterio de Dulac:

Definamos

$$f(x, y) = \left(-xy + x - \frac{x}{K_1}, -\frac{y}{\mu} - \frac{y^2}{K_2} + xy \right).$$

Luego

$$\nabla \cdot (hf) = \nabla \cdot \left(-1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{K_1 y}, -\frac{1}{\mu x} - \frac{y}{K_2 x} + 1 \right),$$

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{K_1 y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{\mu x} - \frac{y}{K_2 x} + 1 \right), \\ &= -\frac{1}{K_2 x}. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, se tiene que $\nabla \cdot (hf) < 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$ y además, $\text{int}(\Omega)$ es un subconjunto simplemente conexo de \mathbb{R}^2 , es decir, se cumplen las hipótesis del criterio de Dulac (Teorema 1.1.20). Por lo tanto, el modelo (3.0.1) no tiene trayectorias cerradas en el interior de Ω , es decir, no tiene un ciclo límite. ■

3.5. Bifurcaciones: Análisis de los parámetros y escenarios de simulación

En esta sección vamos a trabajar las bifurcaciones, no desde el punto de vista clásico diciendo que nuestro modelo pertenece a alguna de ellas, si no, que el parámetro μ influye: primero en la determinación del nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio, y después en el comportamiento de la estabilidad.

3.5.1. Nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio

Tomando en consideración el modelo (3.0.1), el parámetro μ juega un rol importante en la determinación de la cantidad de puntos de equilibrio. Recordemos que todo sistema de ecuaciones diferenciales posee un número ya sea finito o infinito de puntos de equilibrio, en este caso tenemos un número finito de puntos y nos interesa cuantificarlos en función del parámetro μ .

Análisis del parámetro μ para el modelo (3.0.1).

La caracterización del parámetro μ *sin interpretación biológica* para el modelo (3.0.1) se enuncia como sigue:

Teorema 3.5.1. *Dado el modelo (3.0.1), K_1, K_2, μ parámetros y Ω el conjunto invariante dado en (2.2.1), se obtienen las siguientes restricciones sobre el parámetro μ :*

(a) *Si $\mu > \frac{1}{K_1}$ entonces los puntos críticos: S_0, S_1 y $S_3 \in \Omega$.*

(b) *Si $\mu = \frac{1}{K_1}$ entonces el modelo tiene 2 puntos críticos: S_0 y $S_1 \in \Omega$, ya que S_3 se degenera en S_1 .*

3.5. Bifurcaciones: Análisis de los parámetros y escenarios de simulación

(c) Si $\mu < \frac{1}{K_1}$ entonces los puntos críticos $S_0, S_1 \in \Omega$ y $S_3 \notin \Omega$.

Demostración. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ el conjunto invariante del modelo (3.0.1).

(a) Supongamos que $\mu > \frac{1}{K_1}$. De aquí que,

$$K_1\mu > 1.$$

Notemos que, si se cumple la desigualdad anterior, entonces $K_1\mu - 1$ es positivo. Y dado que todos los parámetros son positivos, se tiene que $S_3 \in \Omega$. Por lo tanto, S_0, S_1 y $S_3 \in \Omega$ (ver Figura 3.8a).

(b) Supongamos que $\mu = \frac{1}{K_1}$. Al sustituir este valor en S_3 , tenemos

$$S_3 = \left(\frac{K_1 \left(K_2 + \frac{1}{K_1} \right)}{\frac{1}{K_1} (K_1 K_2 + 1)}, \frac{K_2 \left(K_1 \frac{1}{K_1} - 1 \right)}{\frac{1}{K_1} (K_1 K_2 + 1)} \right),$$

simplificando,

$$S_3 = (K_1, 0) = S_1$$

es decir, S_3 se degenera en S_1 (ver Figura 3.8b).

(c) Supongamos que $\mu < \frac{1}{K_1}$. De donde,

$$K_1\mu < 1.$$

Si la desigualdad anterior se cumple, entonces $K_1\mu - 1$ es negativo, de aquí que $S_3 \notin \Omega$. Por lo tanto, $S_0, S_1 \in \Omega$ y $S_3 \notin \Omega$ (ver Figura 3.8c).

■

3. Modelo tipo Kolmogorov con parámetro de bifurcación

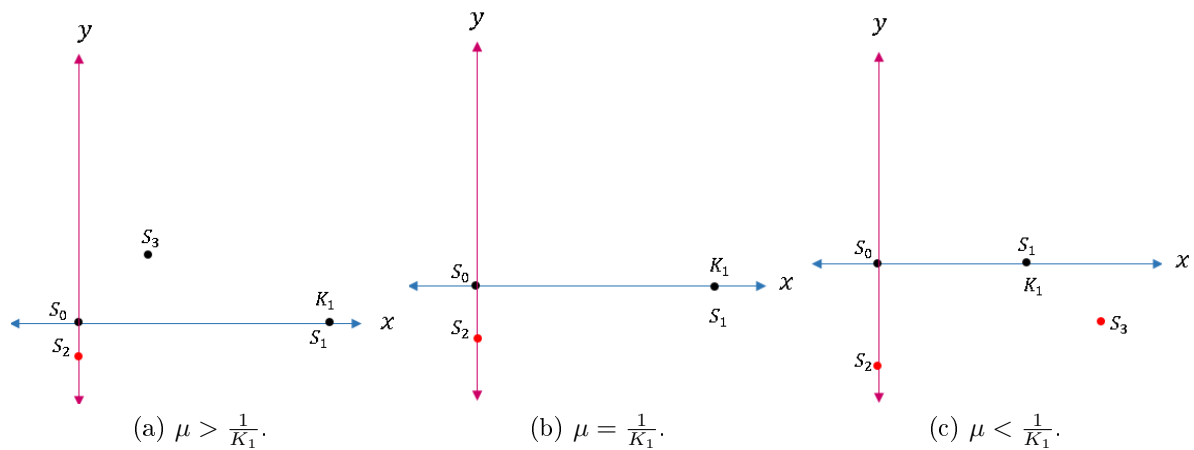


Figura 3.8: Puntos de equilibrio al variar el parámetro μ para el modelo (3.0.1).

Dado el cálculo de R_x (número reproductivo) en la sección 3.3 para el modelo (3.0.1) se puede reescribir *con interpretación biológica* el teorema anterior para ciertos casos:

Teorema 3.5.2. *Dado el modelo (3.0.1), K_1, K_2, μ parámetros, $R_x = K_1\mu$ y Ω el conjunto invariante dado en (2.2.1), se obtienen las siguientes restricciones sobre R_x :*

- (a) *Si $R_x = K_1\mu \in (0, 1)$ entonces la población de presas disminuye.*
- (b) *Si $R_x = K_1\mu = 1$ entonces el crecimiento de las presas es lineal.*
- (c) *Si $R_x = K_1\mu > 1$ entonces la población de presas aumenta (aun sin determinar el tipo).*

Demostración. Aplica la demostración anterior. ■

Capítulo 4

Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

En este capítulo realizaremos un análisis local del modelo cuasi-Kolmogorov propuesto en la sección 2.2, para esto primero analizaremos los puntos de equilibrio y su estabilidad; en donde emplearemos algunas definiciones mostradas en el capítulo 1, luego, calcularemos el número reproductivo básico de este modelo, además se muestra que el modelo presenta trayectorias cerradas y trabajaremos las bifurcaciones pero desde el punto de vista de nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio, como resultado se formula un conjunto de teoremas originales sujetos a restricciones sobre los parámetros. En el capítulo 5, se proponen escenarios sintéticos, que satisfacen a los teoremas y que denominamos simulaciones.

Ahora nos enfocaremos en estudiar el modelo planteado en el capítulo 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x[x(1-x) - y], \\ \dot{y} = K \left(x - \frac{1}{\mu}\right) y, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

donde x, y representan la cantidad de individuos en la población de presas y depredadores, respectivamente, $\mu > 0$ es un parámetro y $K > 0$ representa la capacidad de carga de los depredadores. Notemos que el modelo (4.0.1) es no lineal y el parámetro de bifurcación μ se encuentra en la ecuación de depredadores, es importante considerar que el modelo (4.0.1) es un modelo cuasi-Kolmogorov. Posteriormente, se analizará el modelo (4.0.1) utilizando la definición 1.1.10, para determinar los cambios cualitativos y cuantitativos del retrato fase y además su interpretación biológica.

4.1. Ceroclinas del modelo sobre el conjunto Ω

Estudiaremos el comportamiento del modelo(4.0.1) en el conjunto Ω dado en (2.2.1), y así determinar bajo qué condiciones tiene un comportamiento invariante, es decir, que cualquier solución que inicia dentro del conjunto Ω permanece en él al transcurrir el tiempo.

Para el modelo (4.0.1) tenemos que las x -ceroclinas se obtienen cuando $x^2 - x^3 - xy = 0$, es decir, cuando $x = 0$ y $y = x - x^2$. Por otra parte, las y -ceroclinas se obtienen cuando $Kxy - \frac{K}{\mu}y = 0$, es decir, cuando $y = 0$ y $x = \frac{1}{\mu}$, con $\mu \neq 0$; las cuales son dibujadas en el plano fase que se muestra en la Figura 4.1, donde las x -ceroclinas se trazan en azul, y las y -ceroclinas en verde; estas curvas dividen a la región Ω en cuatro regiones y en cada una señalamos, con flechas a los vectores tangentes a las curvas solución en el plano fase; ya que esto nos indica cómo es el comportamiento o flujo de las ecuaciones del modelo (4.0.1). Observemos que la dirección de los vectores tangentes indican que en el primer cuadrante, todas las soluciones no se escapan de la región, pues están acotadas por los ejes coordenados; de aquí que, dada una condición inicial en Ω , al transcurrir el tiempo la solución permanece acotada en Ω . Es decir Ω es invariante.

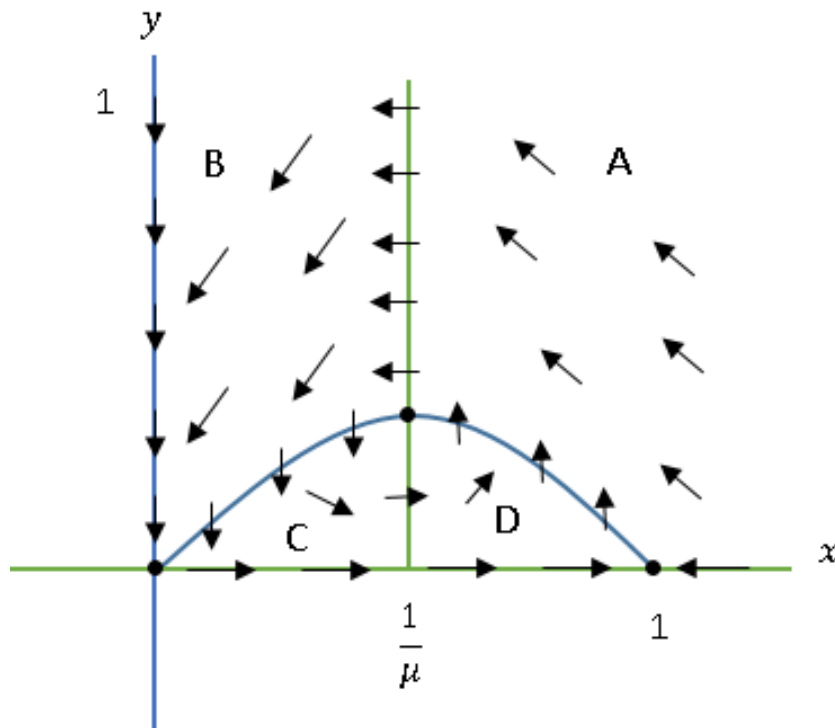


Figura 4.1: Campo direccional del modelo (4.0.1) en la región Ω .

4.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

Para la clasificación de los puntos críticos del modelo no lineal, se aplican los teoremas 1.1.15 y 1.1.16 mostrados en la pág. 5, los retratos fase mostrados corresponden al modelo lineal y no lineal. Para el modelo lineal se realizó una traslación de cada punto crítico al origen.

4.2.1. Análisis del modelo cuasi-Kolmogorov

Primero calculemos los puntos de equilibrio del modelo (4.0.1), igualando a cero las respectivas ecuaciones.

- E_0 , se obtiene al considerar $x = 0$. Luego

$$K \left(-\frac{1}{\mu} \right) y = 0,$$

pero $K \neq 0$, por lo tanto:

$$y = 0.$$

- E_1 , se tiene considerando $y = 0$, de donde

$$x[x(1-x)] = 0,$$

pero $x \neq 0$, por lo tanto:

$$x = 1.$$

- E_2 , se obtiene al considerar $x = \frac{1}{\mu}$. De aquí que

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) - y \right] = 0,$$

por lo tanto, al despejar obtenemos que:

$$y = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{\mu - 1}{\mu^2}.$$

A partir de los cálculos anteriores, obtenemos que los puntos de equilibrio para el modelo (4.0.1) son: $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (1, 0)$ y $E_2 = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu^2} \right)$.

Observación 4.2.1. Considerando el punto $E_1 = (1, 0)$ y x_0 una condición inicial sobre el eje x . Para el modelo (4.0.1), tenemos que si $0 < x_0 < 1$ entonces $\dot{x} > 0$ y si $x_0 > 1$ entonces $\dot{x} < 0$ (ver Figura 4.2).

4.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

En la Figura 4.2 señalamos con flechas como es el flujo del campo vectorial y x_0 denota la condición inicial sobre el eje x , por ejemplo en la Figura 4.2a podemos observar que cuando $0 < x_0 < 1$, las flechas apuntan hacia la derecha, es decir, se tiene un aumento de presas, mientras que en la Figura 4.2b cuando $x_0 > 1$, las flechas apuntan hacia la izquierda, por lo que se tiene una disminución de presas.

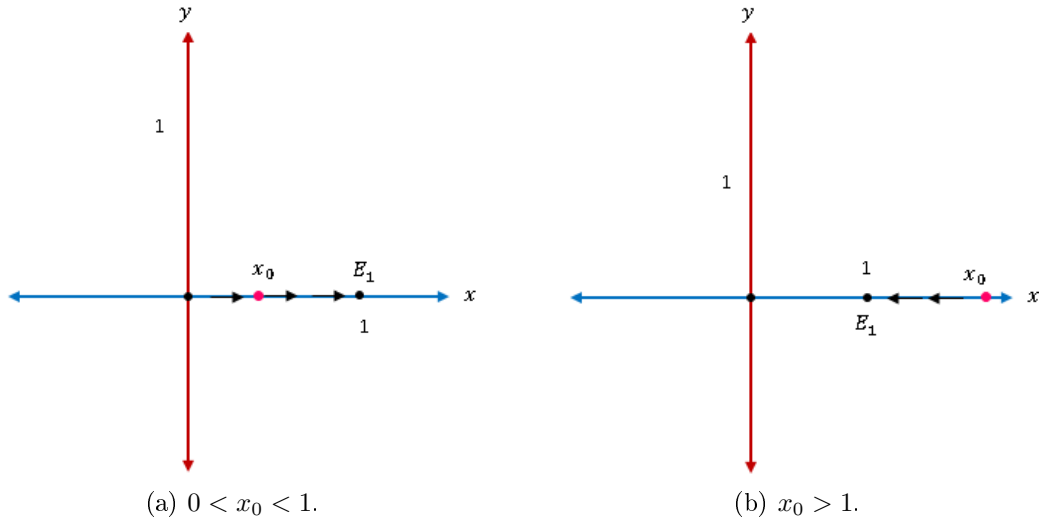


Figura 4.2: Comportamiento de presas al variar la condición inicial x_0 sobre el eje x para el modelo (4.0.1).

Análisis de estabilidad local de los puntos críticos para el modelo (4.0.1).

Ahora, analicemos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio del modelo (4.0.1) empleando la información del Cuadro 1.1.1 y la definición (1.1.10). La matriz Jacobiana (según la definición 1.1.6) para el modelo (4.0.1) es:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} (-3x^2 + 2x - y) & -x \\ Ky & K\left(x - \frac{1}{\mu}\right) \end{bmatrix}.$$

La evaluación del punto E_0 (*en ausencia de ambas especies*) en la matriz Jacobiana para el modelo (4.0.1) es:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K}{\mu} \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\frac{K}{\mu}$, por lo que E_0 es un punto no hiperbólico.

Dado que $K > 0$, en particular elegimos $K = 3$ y $\mu = 2$, obtenemos que $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ y $\lambda_1 = 0$, por lo tanto, E_0 es un punto no hiperbólico (ver Figura 4.3).

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

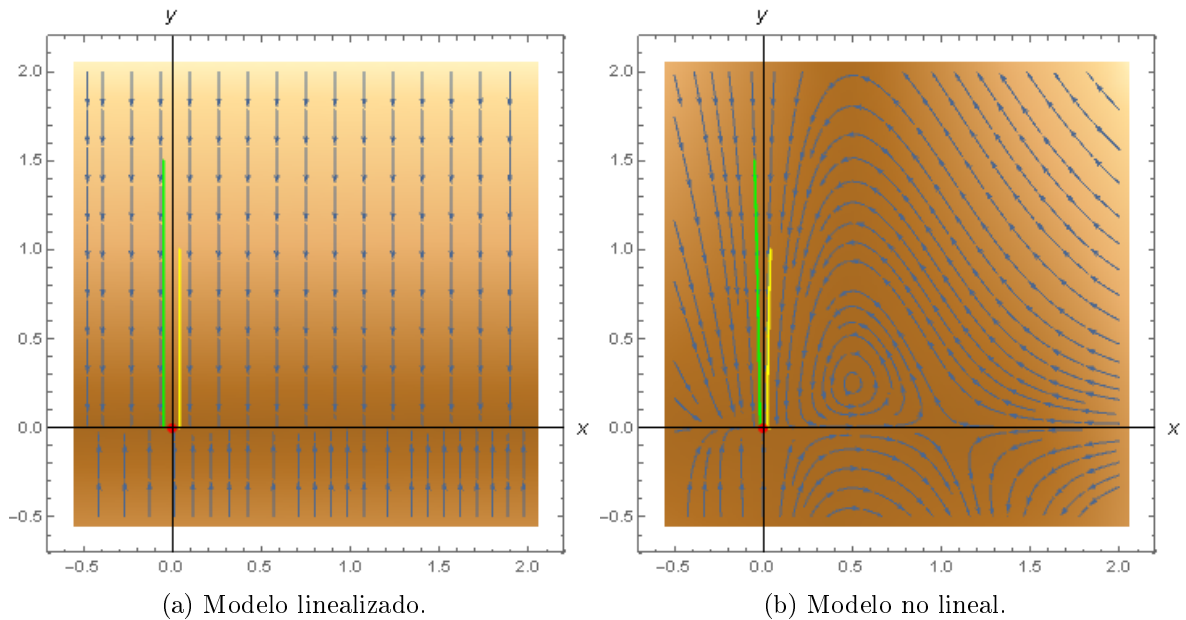


Figura 4.3: Retrato fase del punto E_0 (ausencia de ambas especies), para $\mu = 2$, $K = 3$.

En la Figura 4.3, al tomar una condición inicial cercana al punto de equilibrio, se observa que, para el escenario de la Figura 4.3a y 4.3b donde la capacidad de carga K es positiva la población de las presas se mantiene constante, pero la población de los depredadores comienza a disminuir. Notemos que en la Figura 4.3a el punto E_0 se traslada al origen. Es importante notar en estos casos que si la condición inicial se encuentra fuera del conjunto invariante, entonces la solución ya no tiene sentido biológico. Más adelante se hace un análisis de este parámetro de bifurcación con una interpretación.

La evaluación del punto E_1 (*en ausencia de depredadores*) en la matriz Jacobiana para el modelo (4.0.1) es:

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & K \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = K \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$.

Dado que $K > 0$, tenemos que si $\mu \in (0,1)$ entonces λ_2 es negativo, y en este caso por la definición 1.1.10, el punto E_1 se clasifica como un punto sumidero. Si $\mu > 1$ entonces λ_2 es positivo y por la definición 1.1.10, el punto E_1 es llamado hiperbólico y se clasifica como un punto silla.

En particular, si elegimos $K = 3$ y $\mu = 2$, nos encontramos en el caso en que $\lambda_2 > 0$, así, E_1 se clasifica como un punto silla (ver Figura 4.4).

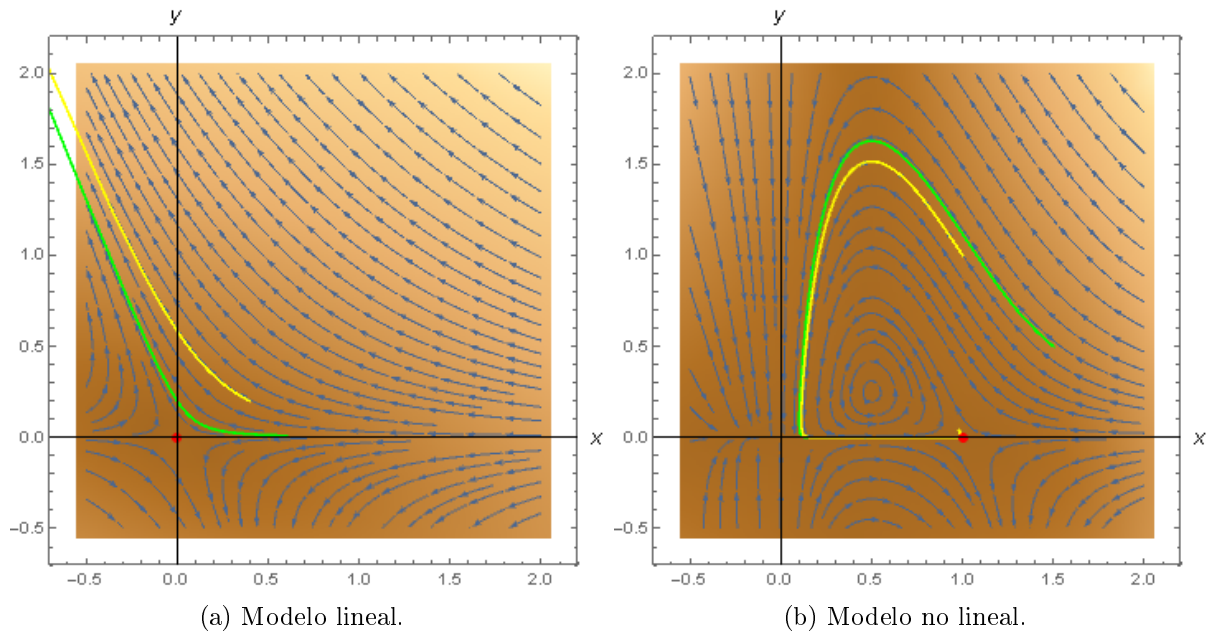


Figura 4.4: Retrato fase del punto E_1 (ausencia de depredadores), para $K = 3$ y $\mu = 2$.

En la Figura 4.4 al tomar una condición inicial, se observa que para el escenario de la Figura 4.4a la población de depredadores aumenta mientras que la población de presas disminuye, en esta figura es importante notar que el punto crítico E_1 se traslada al origen. Para el escenario de la Figura 4.4b se tiene que cuando la población de presas comienza a disminuir, la población de depredadores también disminuye, posteriormente, la población de presas aumenta.

La evaluación del punto E_2 (*con presencia de ambas especies*) en la matriz Jacobiana para el modelo (4.0.1) es:

$$J\left(\frac{1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu^2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-2+\mu}{\mu^2} & -\frac{1}{\mu} \\ K\left(\frac{\mu-1}{\mu^2}\right) & 0 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 - 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right)}}{2}. \quad (4.2.1)$$

Buscamos ver bajo qué condiciones tenemos raíces repetidas, distintas o complejas, para esto al analizar el discriminante, encontramos que:

- Raíces repetidas, significa que $\Delta = \left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 - 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right) = 0$,

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

es decir,

$$\left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 = 4K \left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right),$$

desarrollando e igualando a cero,

$$(4K-1)\mu^2 + (4-4K)\mu - 4 = 0.$$

Resolviendo, obtenemos

$$\mu(K) = \frac{-2(1-K) \pm 2\sqrt{K(K+2)}}{4K-1}, \quad (4.2.2)$$

con K variable (parámetro no fijo) y $K \neq \frac{1}{4}$, al sustituir (4.2.2) en (4.2.1), se tiene $\lambda_1 = \lambda_2$, es decir,

$$\lambda_{1,2}(K) = -\left(\frac{2-\mu(K)}{2\mu(K)^2}\right).$$

En particular, si $K = 2$, $\mu(K) = \frac{2 \pm 2\sqrt{8}}{7}$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{5-3\sqrt{2}}{2}$. Este punto matemáticamente existe y por la definición 1.1.10 se clasifica como punto sumidero (ver Figura 4.5).

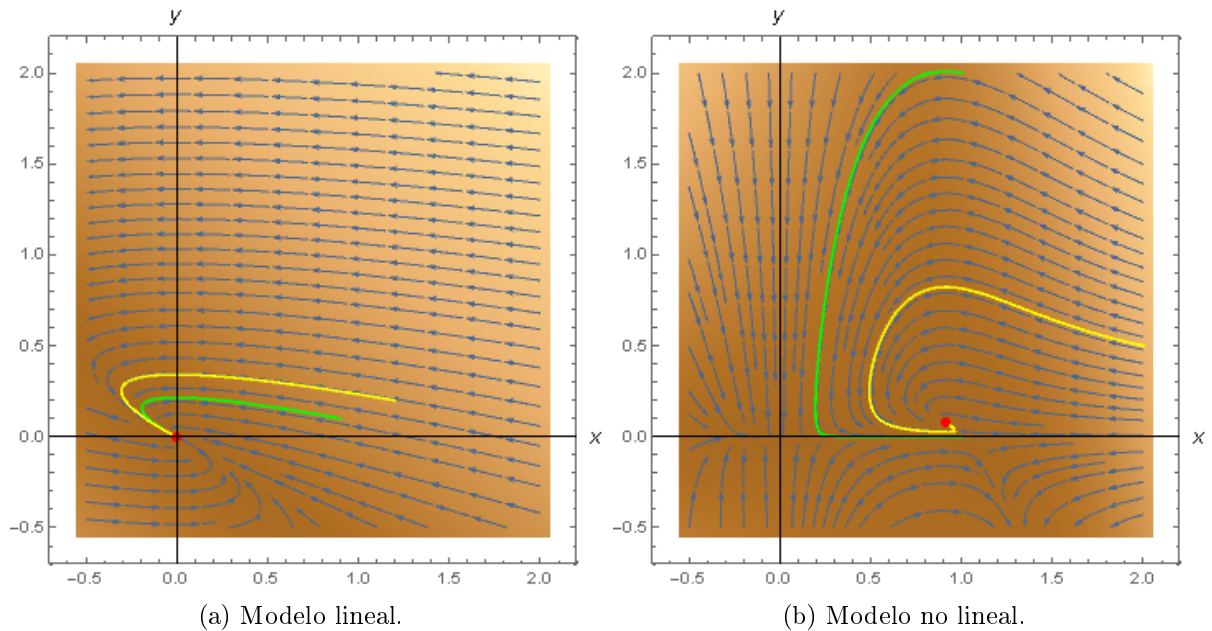


Figura 4.5: Retrato fase del punto E_2 (presencia de ambas especies), para $\mu_1 = \frac{2+2\sqrt{8}}{7}$ y $K = 2$.

En la Figura 4.5, al tomar una condición inicial, observamos que para el escenario de la Figura 4.5a y 4.5b, la población de depredadores disminuye al igual que la población

4.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

de presas, posteriormente se recupera la población de presas. Es importante notar que el retrato fase de la Figura 4.5a pertenece al sistema lineal por lo que se realizó una traslación del punto E_2 al origen.

- Raíces distintas, significa que $\Delta = \left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 - 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right) > 0$,

o bien,

$$\left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 > 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right),$$

simplificando

$$(4K-1)\mu^2 + (4-4K)\mu - 4 < 0. \quad (4.2.3)$$

Notemos que, en particular (4.2.3) se cumple si elegimos $K = \frac{1}{4}$ (parámetro fijo). De aquí que:

$$\mu < \frac{4}{3},$$

por lo tanto, $\mu \in (0, \frac{4}{3})$, donde $\mu > 0$ y no depende del parámetro K .

Si elegimos $K = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{5}{6}$, con $\mu < \frac{4}{3}$, entonces $\lambda_{1,2} = \frac{-21 \pm 9\sqrt{6}}{25}$. Notemos que matemáticamente este punto existe y por la definición 1.1.10, este punto es llamado hiperbólico y se clasifica como punto silla.

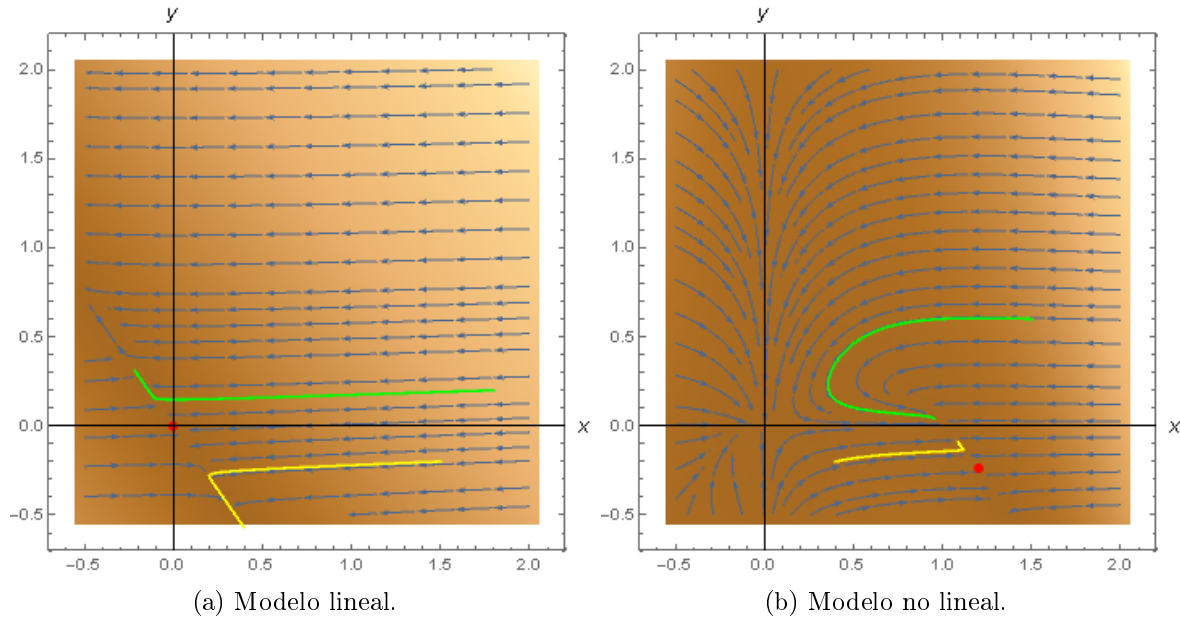


Figura 4.6: Retrato fase del punto E_2 (presencia de ambas especies) para $\mu = \frac{5}{6}$ y $K = \frac{1}{4}$.

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

Notemos que en el escenario de la Figura 4.6a el punto E_2 se traslada al origen. Y en el escenario de la Figura 4.6b podemos observar que el punto crítico abandona el conjunto invariante.

- Raíces complejas conjugadas, significa que $\Delta = \left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 - 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right) < 0$,

es decir,

$$\left(\frac{2-\mu}{\mu^2}\right)^2 < 4K\left(\frac{\mu-1}{\mu^3}\right),$$

al simplificar, tenemos

$$(4K-1)\mu^2 + (4-4K)\mu - 4 > 0. \quad (4.2.4)$$

En particular (4.2.4) se satisface si $K = \frac{1}{4}$ (parámetro fijo). Así, obtenemos:

$$\mu > \frac{4}{3},$$

por lo tanto, $\mu \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, donde $\mu > 0$ y no depende del parámetro K .

Al elegir $K = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{10}{7}$, con $\mu > \frac{4}{3}$, tenemos $\lambda_{1,2} = -\frac{7}{50} \pm \frac{7\sqrt{14}}{200}i$ (ver Figura 4.7). En este caso el punto existe matemáticamente y por la definición 1.1.10, es llamado asintóticamente estable y se clasifica como punto espiral.

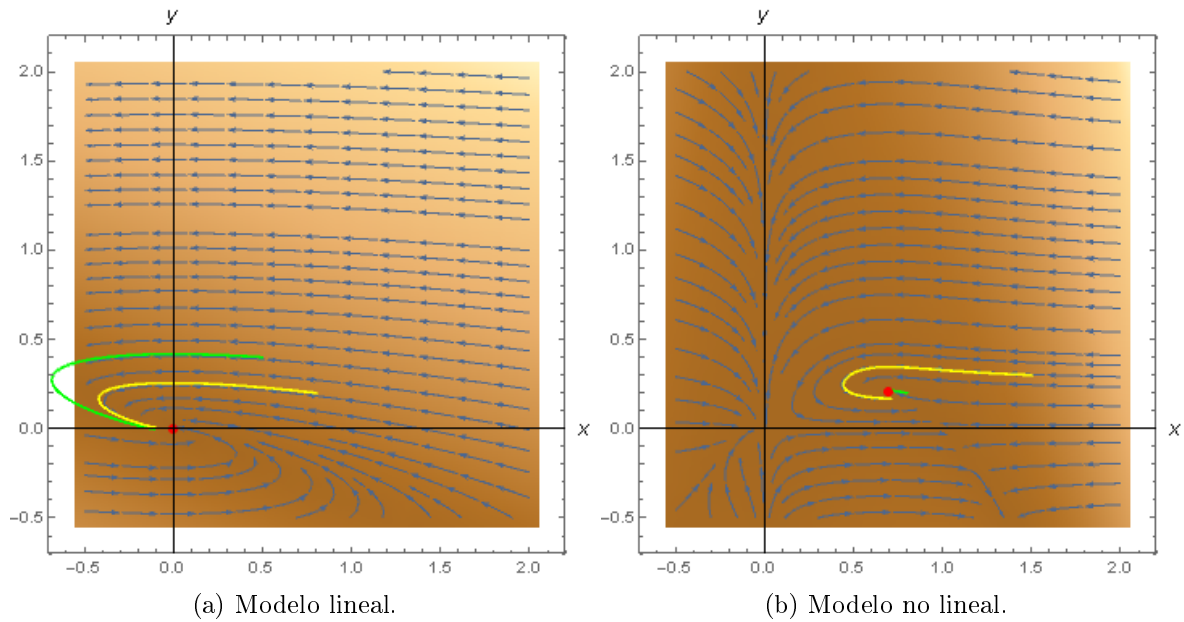


Figura 4.7: Retrato fase del punto E_2 (presencia de ambas especies), para $K = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{10}{7}$.

Observemos que en la Figura 4.7a el punto E_2 se traslada al origen, por otro lado, al tomar una condición inicial, en el escenario de la Figura 4.7b observamos que la población de

4.2. Puntos críticos y análisis de estabilidad local

presas disminuye al igual que la población de depredadores, posteriormente, se recupera la población de presas.

En particular, al elegir $K = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{7}{2}$, con $\mu > \frac{4}{3}$, tenemos $\lambda_{1,2} = \frac{3}{49} \pm \frac{\sqrt{26}}{49}i$ (ver Figura 4.8), y por la definición 1.1.10, el punto E_2 es llamado inestable y se clasifica como punto espiral.

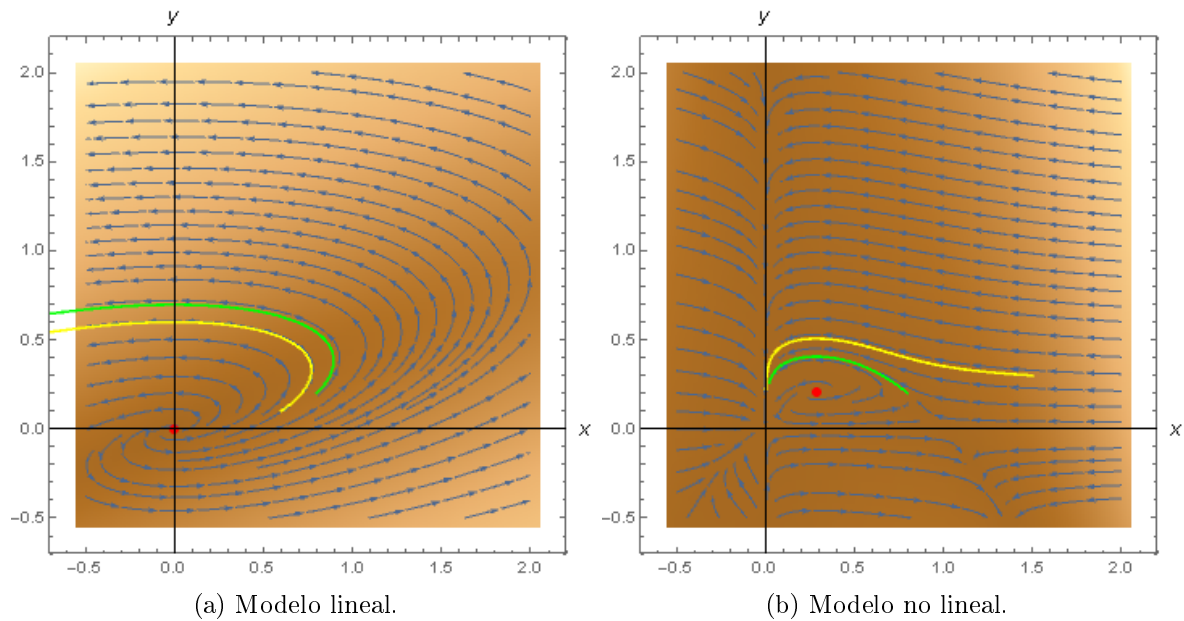


Figura 4.8: Retrato fase del punto E_2 (presencia de ambas especies), para $K = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{7}{2}$.

Para los escenarios de la Figura 4.8a y 4.8b, al tomar una condición inicial podemos observar que la población de depredadores disminuye al igual que la población de presas, posteriormente, se recupera la población de presas. Además, en el retrato fase de la figura 4.8a se observa que el punto E_2 se traslada al origen.

Por otra parte, para K arbitrario y $\mu = 2$ en (4.2.1) obtenemos que $\lambda_{1,2}$ son complejos puros. En particular, si elegimos $K = 5$ y $\mu = 2$ se tienen raíces complejas puras (ver Figura 4.9).

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

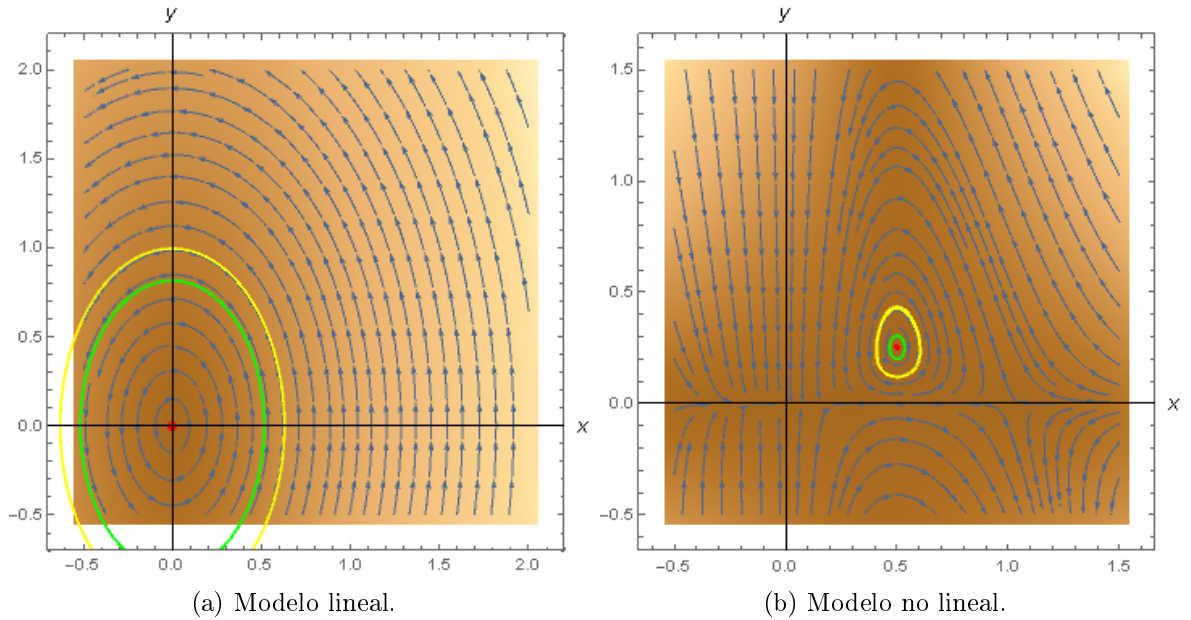


Figura 4.9: Retrato fase del punto E_2 (presencia de ambas especies), para $K = 5$ y $\mu = 2$.

En la Figura 4.9, al tomar una condición inicial, podemos observar, que en el escenario de la Figura 4.9a y 4.9b se tiene centros, de aquí que, tenemos la existencia de ciclos límite. Notemos que en la Figura 4.9a el punto E_2 se traslada al origen.

Resumiendo, se han demostrado los siguientes casos del teorema.

Teorema 4.2.2. *Dado el modelo tipo cuasi-Kolmogorov con parámetro μ y capacidad de carga K ,*

$$\dot{x} = x[x(1-x) - y],$$

$$\dot{y} = K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) y,$$

restringido al conjunto Ω (con interpretación biológica), para cada punto de equilibrio se obtiene:

- $E_0 = (0, 0)$, es un punto de equilibrio no hiperbólico, para todo valor de K y μ .
- $E_1 = (1, 0)$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable para $\mu \in (0, 1)$ e inestable para $\mu > 1$.
- $E_2 = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu^2} \right)$, es un punto de equilibrio:
 - Inestable si $K = \frac{1}{4}$ y $\mu \in (0, \frac{4}{3}) \cup (2, \infty)$.

- Asintóticamente estable si $K = \frac{1}{4}$ y $\mu \in [\frac{4}{3}, 2)$.
- Estable si $\mu = 2$.

Observación 4.2.3. La elección del parámetro $K = \frac{1}{4}$ se realizó con el objetivo de simplificar la expresión (4.2.3) y (4.2.4), obtenidas en el análisis realizado con anterioridad, pero es importante considerar que al tomar otro valor de este parámetro, la estabilidad del punto E_2 puede cambiar.

4.3. Número reproductivo básico

Para analizar la evolución de las especies, recurrimos al número reproductivo básico, el cual nos permite saber que tan rápido o lento es el crecimiento de cada una de las poblaciones.

Usualmente, se denota por R_0 a este parámetro y es de suma importancia en ecología de poblaciones, ya que a través de él se puede conocer la dinámica de las poblaciones.

Cálculo del número reproductivo para el modelo(4.0.1).

Utilizando el método de la *matriz de la siguiente generación*, calcularemos el número reproductivo de cada una de las especies denotado como: R_x y R_y .

Notemos que para calcular R_x , es importante determinar los puntos de equilibrio que se encuentren libre de depredadores. A continuación mencionaremos como están definidas las matrices que generan el número reproductivo básico para la población de presas R_x .

Sean $\mathcal{F}_i(x)$ la tasa de aparición de nuevos depredadores en el compartimiento i , $\mathcal{V}_i^+(x)$ la tasa de transferencia de los individuos dentro del compartimiento i , por otros medios y $\mathcal{V}_i^-(x)$ la tasa de transferencia de los individuos fuera del compartimiento i . El modelo compartimental se puede escribir en la forma:

$$X_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i(x),$$

donde $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}^- - \mathcal{V}^+$.

La dinámica en \mathcal{F} , \mathcal{V} y la designación de compartimentos en los que se tiene ausencia o presencia de depredadores puede no ser único. Las definiciones de \mathcal{F} y \mathcal{V} utilizadas aquí difieren ligeramente de las de [van den Driessche y Watmough (2002)].

Considerando el modelo (4.0.1):

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

$$\dot{x} = x[x(1-x) - y],$$

$$\dot{y} = K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) y,$$

y siguiendo la metodología de [6], obtenemos el número reproductivo para la especie de las presas R_x :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} Kxy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{K}{\mu}y \\ x^3 + xy - x^2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathcal{V}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^- = \begin{pmatrix} \frac{K}{\mu}y \\ x^3 + xy \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos que

$$F = \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y} \right|_{E_1} = K, \quad V = \left. \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} \right|_{E_1} = \frac{K}{\mu}.$$

Así, para el modelo (4.0.1), R_x toma la forma

$$R_x = \frac{K}{\frac{K}{\mu}} = \mu.$$

Otra forma de determinar el valor de R_x es por medio de los valores propios que determinan la estabilidad del punto de equilibrio libre de depredadores, los cuales fueron obtenidos para el punto de equilibrio E_1 y son:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = K \left(1 - \frac{1}{\mu} \right).$$

Sabemos que $\lambda_1 < 0$, mientras que si $K < \frac{K}{\mu}$, o bien, $\mu < 1$, tenemos que, $\lambda_2 < 0$, entonces E_1 es localmente asintóticamente estable; pero si $K > \frac{K}{\mu}$, o bien, $\mu > 1$, tenemos que, $\lambda_2 > 0$, entonces E_1 es un punto de equilibrio inestable. Como podemos notar si realizamos el cociente entre el término de la izquierda sobre el término de la derecha en las desigualdades, podemos definir la estabilidad de E_1 comparándolo como la unidad; a este cociente que definimos se le llama R_x y tiene la siguiente forma:

$$R_x = \mu. \tag{4.3.1}$$

Aplicando el método de la matriz de la siguiente generación para calcular R_y , donde R_y es el R_0 de la población de depredadores, tenemos que

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x}(0, y) = 0, \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x}(0, y) = y,$$

de donde,

$$R_y = \frac{0}{y} = 0,$$

y, por lo tanto, no se puede interpretar biológicamente R_y . Esto también se obtiene al considerar que el punto $(0, y)$ no es un punto de equilibrio del modelo (4.0.1).

Teorema 4.3.1. *Dado el sistema tipo cuasi-Kolmogorov restringido al conjunto Ω , con parámetros K , μ y número reproductivo $R_x = \mu$, si satisface que $R_x < 1$ ($R_x > 1$) entonces E_1 es asintóticamente estable (inestable).*

Para la demostración de este teorema, se recurre al número reproductivo dado en (4.3.1), el cual se sustituye en el teorema 4.2.2 para conocer la estabilidad del punto E_1 .

4.4. Análisis del comportamiento cíclico del modelo

Dado que construir funciones de Dulac es de gran importancia, ya que su existencia excluye la existencia de ciclos límites [18], en esta sección construiremos la función de Dulac para el modelo (4.0.1), con el objetivo de corroborar si presentan o no órbitas periódicas cerradas.

Análisis del modelo (4.0.1).

En el siguiente teorema se muestra un método de construcción de una función de Dulac, para el modelo tipo cuasi-Kolmogorov.

Teorema 4.4.1. *El modelo tipo cuasi-Kolmogorov admite una función de Dulac, para todo $x, y > 0$.*

Demostración. Definamos,

$$f_1 = x[x(1-x) - y],$$

$$f_2 = K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) y.$$

Calculando el negativo de la divergencia, se tiene

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(f_1, f_2) &= - \left[x \left(\frac{d}{dx} (x(1-x) - y) \right) + (x(1-x) - y) \right] \\
 &\quad - \left[Ky \left(\frac{d}{dy} \left(x - \frac{1}{\mu} \right) \right) + K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) \right], \\
 &= - \left[x \left(x \left(\frac{d}{dx} (1-x) \right) + (1-x) \right) + (x(1-x) - y) + K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) \right], \\
 &= - \left[x(x(-1) + (1-x)) + (x(1-x) - y) + K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) \right], \\
 &= - \left[x(-x + 1 - x) + (x(1-x) - y) + K \left(x - \frac{1}{\mu} \right) \right], \\
 &= -\frac{1}{x}f_1 - \frac{1}{y}f_2 - [x(-x + 1 - x)].
 \end{aligned}$$

La función $c(x)$, se define como:

$$c(x) = x(-x + 1 - x),$$

utilizando $c(x)$ se construye la siguiente ecuación diferencial parcial

$$f_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi(c(x) - \operatorname{div}(f_1, f_2)),$$

cuya solución es una función de Dulac.

Sea $\phi = g(z)$, donde $z = z(x, y)$, se tiene que

$$\left[f_1 \frac{\partial z}{\partial x} + f_2 \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial g}{\partial z} = g(c(x) - \operatorname{div}(f_1, f_2)),$$

luego

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial z}}{g} = \frac{c(x) - \operatorname{div}(f_1, f_2)}{f_1 \frac{\partial z}{\partial x} + f_2 \frac{\partial z}{\partial y}},$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial z} = \frac{-\frac{f_1 y + f_2 x}{xy}}{f_1 y + f_2 x},$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto,

$$g(x, y) = \frac{1}{xy}, \text{ con } (x, y) \neq (0, 0)$$

es una función de Dulac para el modelo (4.0.1). ■

Verifiquemos que el modelo (4.0.1) tiene una trayectoria cerrada en Ω , para lo cual, utilizaremos la función obtenida en el Teorema 4.4.1. Así, aplicando el Criterio de Dulac tenemos:

Definamos

$$f(x, y) = \left(x^2 - x^3 - xy, Kxy - \frac{K}{\mu}y \right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (gf) &= \nabla \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y} - 1, K - \frac{K}{\mu x} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K - \frac{K}{\mu x} \right), \\ &= \frac{1}{y} - \frac{2x}{y}. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, se tiene que $\nabla \cdot (gf)$ presenta cambios de signo en Ω (conjunto invariante), por lo que no se satisface una de las hipótesis del criterio de Dulac (teorema 1.1.20) y, por lo tanto, no se puede concluir si el modelo presenta o no trayectorias cerradas.

Observación 4.4.2. *Del estudio de las raíces realizado con anterioridad, el modelo linealizado tiene una trayectoria cerrada (centro), y dado que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.1.16 se tiene que el modelo no lineal también debe de tener una trayectoria cerrada (deformada).*

Observación 4.4.3. *El modelo (4.0.1) presenta trayectorias cerradas en la región Ω (conjunto invariante) dada en (2.2.1).*

4.4.1. Cálculo de los ciclos límite (trayectorias cerradas del modelo 4.0.1)

Dado que no se pudo emplear el criterio de Dulac (teorema 1.1.20), para el modelo (4.0.1), se analizan dos técnicas que faciliten la construcción de las funciones que describen la trayectoria de la solución.

Conversión a coordenadas polares.

4. Modelo cuasi-Kolmogorov con parámetro de bifurcación

Seguindo la metodología presentada en [1, 20] y considerando que $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, tenemos:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \quad (4.4.1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}. \quad (4.4.2)$$

Sustituyendo las ecuaciones diferenciales del modelo (4.0.1) en (4.4.1) y (4.4.2)

$$\dot{r} = \frac{x(x^2 - x^3 - xy) + y\left(Kyx - \frac{K}{\mu}y\right)}{r},$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\left(Kyx - \frac{K}{\mu}y\right) - y(x^2 - x^3 - xy)}{r^2},$$

Simplificando las expresiones por medio de $x = r\cos\theta$, $y = r\sen\theta$, obtenemos que el modelo (4.0.1) en coordenadas polares está dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = Kr^2\sen^2\theta\cos\theta + r^2\cos^3\theta - r^3\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta\sen\theta - \frac{K}{\mu}r\sen^2\theta, \\ \dot{\theta} = Kr\cos^2\theta\sen\theta - \frac{K}{\mu}\cos\theta\sen\theta - r\cos^2\theta\sen\theta - r^2\cos^3\theta\sen\theta - r\sen^2\theta\cos\theta. \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Notemos que al aplicar esta técnica no es sencillo determinar los ciclos límite, ya que en el sistema (4.4.3) las ecuaciones diferenciales dependen de las variables r , θ y de los parámetros K y μ , además de que no se observa alguna expresión de la forma $x^2 + y^2$ que nos ayude a simplificar las ecuaciones.

Trayectoria de la solución de la ecuación diferencial.

Otra de las técnicas para determinar las trayectorias cerradas [7] es resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Kyx - \frac{K}{\mu}y}{x^2 - x^3 - xy}. \quad (4.4.4)$$

O bien

$$\left(Kyx - \frac{K}{\mu}y\right)dx - (x^2 - x^3 - xy)dy = 0, \quad (4.4.5)$$

de donde

$$M(x, y) = Kyx - \frac{K}{\mu}, \quad N(x, y) = -(x^2 - x^3 - xy). \quad (4.4.6)$$

Dado que

$$M(tx, ty) = Kt^2yx - \frac{K}{\mu}ty = t \left[Ktyx - \frac{K}{\mu}y \right]$$

y

$$N(tx, ty) = t^3x^3 - t^2x^2 + t^2xy = t^2[tx^3 - x^2 + xy],$$

no satisfacen las siguientes condiciones

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y).$$

Por lo tanto, (4.4.5) no es homogénea. De manera similar tenemos que no se cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

De (4.4.6) tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = Kx - \frac{K}{\mu}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 - 2x + y,$$

y, por lo tanto, (4.4.5) no es exacta.

Es importante mencionar, que siguiendo las técnicas convencionales no es sencillo determinar los ciclos límite para el modelo (4.0.1).

Observación 4.4.4. *En general no es posible resolver (4.4.4), pero el retrato fase nos da una perspectiva de como es la trayectoria de la curva solución.*

Dado que no se puede aplicar ninguna de las técnicas, en la siguiente sección se presentaran simulaciones para corroborar la forma del ciclo límite.

4.5. Bifurcaciones: Análisis del parámetro

En esta sección vamos a trabajar las bifurcaciones, no desde el punto de vista clásico diciendo que nuestro modelo pertenece a alguna de ellas, si no, que el parámetro μ influye: primero en la determinación del nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio, y después en el comportamiento de la estabilidad.

4.5.1. Nacimiento y destrucción de puntos de equilibrio

Tomando en consideración el modelo (4.0.1), el parámetro μ juega un rol importante en la determinación de la cantidad de puntos de equilibrio. Recordemos que todo sistema de ecuaciones diferenciales posee un número ya sea finito o infinito de puntos de equilibrio, en este caso tenemos un número finito de puntos y nos interesa cuantificarlos en función del parámetro μ .

Análisis del parámetro μ para el modelo (4.0.1).

La caracterización del parámetro μ *sin interpretación biológica* se enuncia como sigue:

Teorema 4.5.1. *Dado el modelo (4.0.1), K , μ parámetros y Ω el conjunto invariante dado en (2.2.1), se obtienen las siguientes restricciones sobre el parámetro μ :*

- (a) *Si $\mu \in (0, 1)$ entonces los puntos críticos: $E_0, E_1 \in \Omega$ y $E_2 \notin \Omega$.*
- (b) *Si $\mu = 1$ entonces el modelo solo tiene 2 puntos críticos, pues E_2 se degenera en E_1 .*
- (c) *Si $\mu > 1$ entonces los puntos críticos: E_0, E_1 y $E_2 \in \Omega$.*

Demostración. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ el conjunto invariante del modelo (4.0.1).

- (a) Supongamos que $\mu \in (0, 1)$. Pongamos $\mu = \frac{1}{2}$, luego, al sustituir el valor de μ en E_2 , tenemos que

$$E_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right),$$

de donde $E_2 = (2, -2)$. Es decir, $E_2 \notin \Omega$ (ver Figura 4.10a). Es trivial que $E_0, E_1 \in \Omega$.

- (b) Supongamos que $\mu = 1$, así

$$E_2 = E_1 = (1, 0),$$

es decir, E_2 se degenera en E_1 (ver Figura 4.10b).

- (c) Supongamos que $\mu > 1$. Pongamos $\mu = 2$, así, al sustituir el valor de μ en E_2 obtenemos:

$$E_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2 - 1}{2^2} \right),$$

de donde $E_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Y, por lo tanto, E_0, E_1 y $E_2 \in \Omega$ (ver Figura 4.10c).

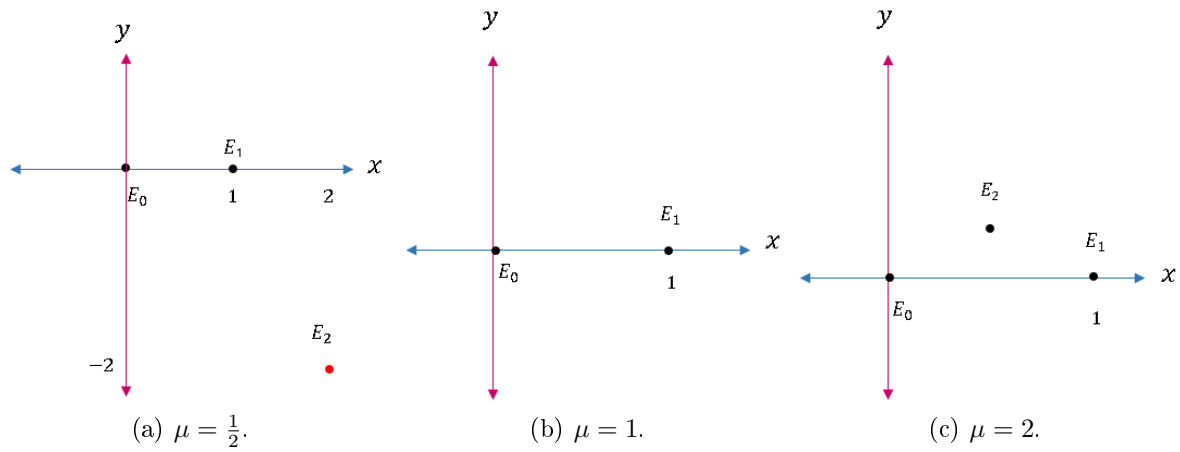


Figura 4.10: Puntos de equilibrio al variar el parámetro μ para el modelo (4.0.1).

Dado el cálculo de R_x (número reproductivo) en la sección 3.3 para el modelo (4.0.1) se puede reescribir *con interpretación biológica* el teorema anterior para ciertos casos:

Teorema 4.5.2. *Dado el modelo (4.0.1), K , μ parámetros, $R_x = \mu$ y Ω el conjunto invariante dado en (2.2.1), se obtienen las siguientes restricciones sobre R_x :*

- (a) *Si $R_x = \mu \in (0, 1)$ entonces la población de presas disminuye.*
- (b) *Si $R_x = \mu = 1$ entonces el crecimiento de las presas es lineal.*
- (c) *Si $R_x = \mu > 1$ entonces la población de presas aumenta (aun sin determinar el tipo).*

Demostración. Aplica la demostración anterior. ■

Capítulo 5

Simulación de escenarios sintéticos de los modelos

En los modelos (3.0.1) y (4.0.1) planteados en el capítulo 3 y 4 respectivamente, se puede observar que se incluyen los parámetros: K , K_1 , K_2 y μ , los 3 primeros representan la capacidad de carga y el último, el parámetro μ . Para el modelo (3.0.1), el número reproductivo es $K_1\mu$ y su interpretación corresponde al aumento de la densidad de la población de presas, mientras que para el modelo (4.0.1) inicialmente μ carece de interpretación biológica, pero una vez que se conoce el número reproductivo básico para este modelo, se le puede dar una interpretación, en este caso la interpretación corresponde al aumento de la densidad de la población de presas. Es importante notar que estos parámetros son responsables del comportamiento biológico de los modelos en la región de estudio Ω (conjunto invariante), dada en (2.2.1).

Dado que no se dispuso de datos reales para contrastar con la realidad, se proponen escenarios sintéticos.

5.1. Escenarios sintéticos para el modelo (3.0.1)

En la realidad, un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias es más complejo y depende de más parámetros, pero para propósitos prácticos en esta tesis se consideran solo 3 parámetros. En esta sección se presentan simulaciones del modelo (3.0.1) que bajo ciertas condiciones sobre los parámetros y que satisfacen los teoremas: 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1, 3.5.2 y lema 3.4.2.

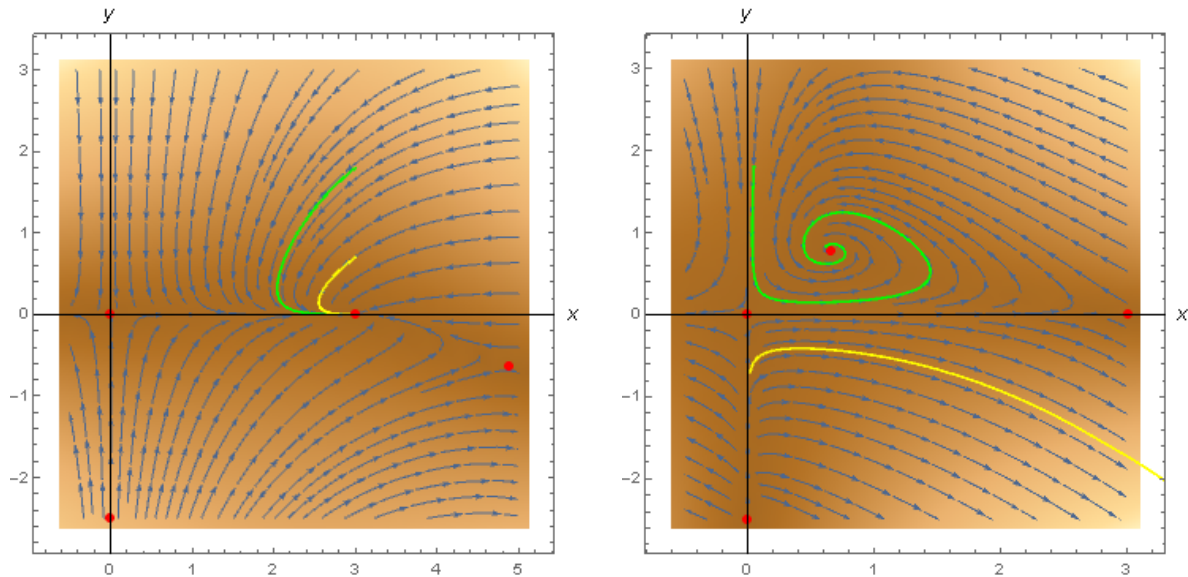
5.1. Escenarios sintéticos para el modelo (3.0.1)

Escenario \ Parámetro	K_1	K_2	μ	R_x	S_i	Estabilidad	Tipo
Figura 5.1a	3	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	S_1	A.E	Sumidero
Figura 5.1b	3	5	2	6	S_3	A.E	Espiral
Figura 5.2a	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{7}{5}$	$\frac{49}{10}$	S_1	I	Silla
Figura 5.2b	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{35}{4}$	S_3	A.E	Espiral
Figura 5.3a	2	2	3	6	S_1	I	Silla
Figura 5.3b	2	2	6	12	S_3	A.E	Espiral

Cuadro 5.1.1: Selección de parámetros.

Considerando los cambios en los parámetros K_1 , K_2 y μ , para el modelo (3.0.1), cuyos puntos de equilibrio son S_0 , S_1 , S_2 y S_3 , obtenemos:

Sea el conjunto de parámetros: $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $\mu = \frac{1}{5}$ y $\mu = 2$, se obtienen 2 retratos fase, con punto crítico asintóticamente estable (A.E).



(a) El punto crítico $(3, 0)$ es un punto sumidero con $\mu = \frac{1}{5}$.

(b) El punto crítico $(\frac{21}{32}, \frac{25}{32})$ es un punto espiral con $\mu = 2$.

Figura 5.1: Retratos fase al variar el parámetro μ para el modelo (3.0.1).

En el escenario de la Figura 5.1a si el valor de $K_1\mu = R_x = \frac{3}{5} < 1$ el punto S_2 se clasifica como un punto sumidero, mientras que en el escenario de la Figura 5.1a observamos que cuando $K_1\mu = R_x = 6 > 1$ el punto S_3 se encuentra en la región Ω y en este caso es un punto espiral. En la Figura 5.1b podemos ver que al tomar condiciones iniciales la población de presas aumenta, esto sucede, ya que al tener $R_x > 1$, la densidad de la población

5. Simulación de escenarios sintéticos de los modelos

de presas aumenta, es decir, el tamaño de la población de presas aumenta como se espera.

Sea el conjunto de parámetros: $K_1 = \frac{7}{2}$, $K_2 = 2$, $\mu = \frac{7}{5}$ y $\mu = \frac{5}{2}$, se obtienen dos retratos fase, con punto crítico inestable (I) y asintóticamente estable (A.E), respectivamente.

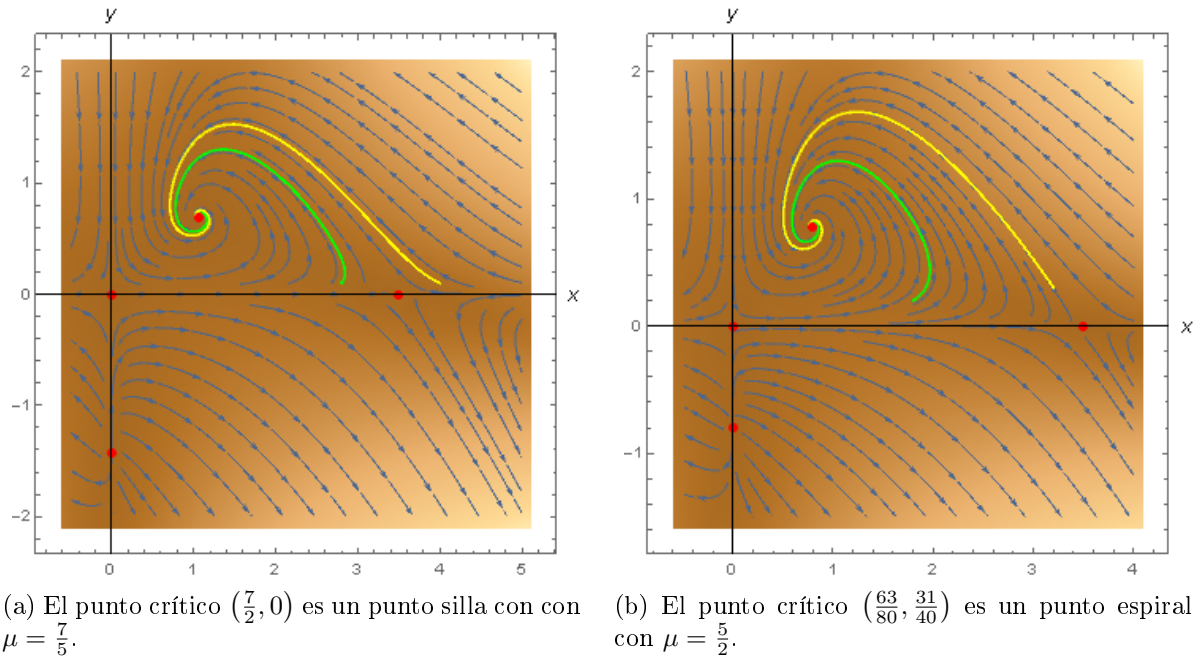
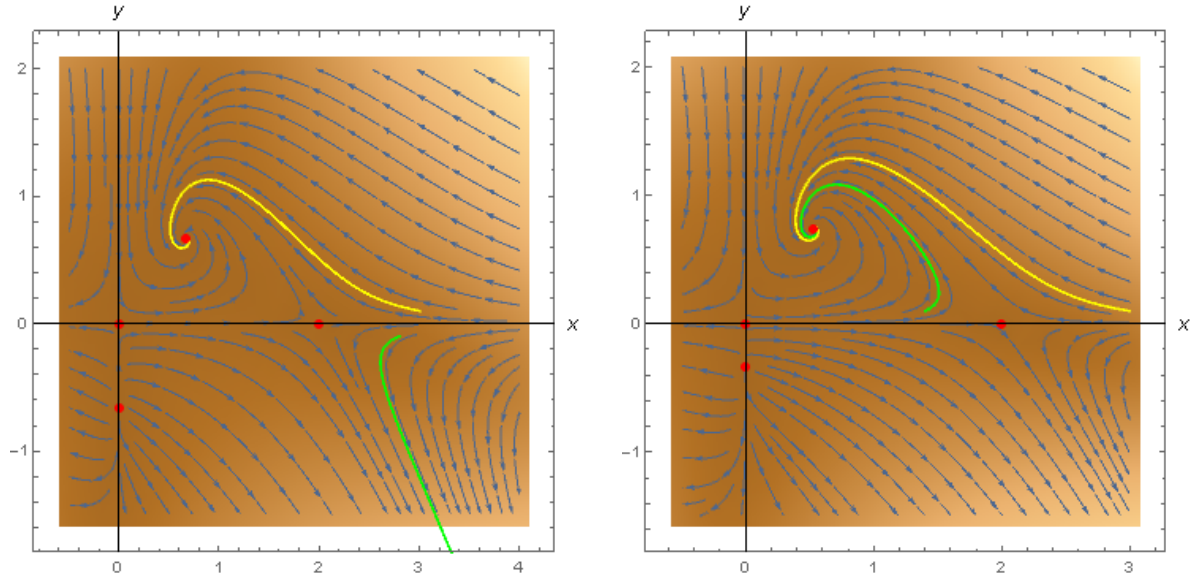


Figura 5.2: Retratos fase al modificar el punto crítico para el modelo (3.0.1).

En el escenario de la Figura 5.2a y 5.2b podemos ver que los puntos críticos S_0 , S_1 y S_3 , se encuentran en la región Ω . En la Figura 5.2a se tiene que S_1 es un punto silla inestable y en la Figura 5.2b, S_3 es un punto espiral asintóticamente estable. Además, al tomar una condición inicial, en el escenario de la Figura 5.2a se puede observar que cuando la población de presas disminuye, la población de presas aumenta. Y para el escenario de la Figura 5.2b podemos observar que ocurre lo mismo.

5.2. Escenarios sintéticos para el modelo (4.0.1)

Sea el conjunto de parámetros: $K_1 = K_2 = 2$, $\mu = 3$ y $\mu = 6$, se obtienen dos retratos fase con punto crítico inestable (I) y asintóticamente estable (A.E), respectivamente.



(a) El punto crítico $(2,0)$ es un punto silla con $\mu = 3$.

(b) El punto crítico $(\frac{8}{15}, \frac{11}{15})$ es un punto espiral con $\mu = 6$.

Figura 5.3: Retratos fase al modificar el punto crítico para el modelo (3.0.1).

En el escenario de la Figura 5.3a y 5.3b se puede observar que cuando $K_1\mu = R_x = 6 > 1$ y $K_1\mu = R_x = 12 > 1$ la población de depredadores disminuye mientras que la población de presas aumenta, posteriormente la población de depredadores aumenta.

5.2. Escenarios sintéticos para el modelo (4.0.1)

En esta sección se presentan simulaciones del modelo (4.0.1) que bajo ciertas condiciones sobre los parámetros satisfacen los teoremas: 4.2.2, 4.3.1, 4.5.1 y 4.5.2.

5. Simulación de escenarios sintéticos de los modelos

Escenario \ Parámetro	K	μ	R_x	E_i	Estabilidad	Tipo
Figura 5.4a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	E_1	A.E	Sumidero
Figura 5.4b	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	E_1	I	Silla
Figura 5.5a	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	E_2	A.E	Sumidero
Figura 5.5b	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	E_2	A.E	Sumidero
Figura 5.6a	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	E_1	A.E	Sumidero
Figura 5.6b	2	2	2	E_2	E	Centro
Figura 5.7a	3	3	3	E_2	A.E	Espiral
Figura 5.7b	3	5	5	E_2	A.E	Espiral

Cuadro 5.2.1: Selección de parámetros.

Al considerar cada uno de los cambios en los parámetros K y μ , para el modelo (4.0.1), cuyos puntos de equilibrio son E_0 , E_1 y E_2 , obtenemos:

Sea el conjunto de parámetros: $K = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $\mu = \frac{3}{2}$, se obtienen dos retratos fase con punto crítico asintóticamente estable (A.E) e inestable (I), respectivamente.

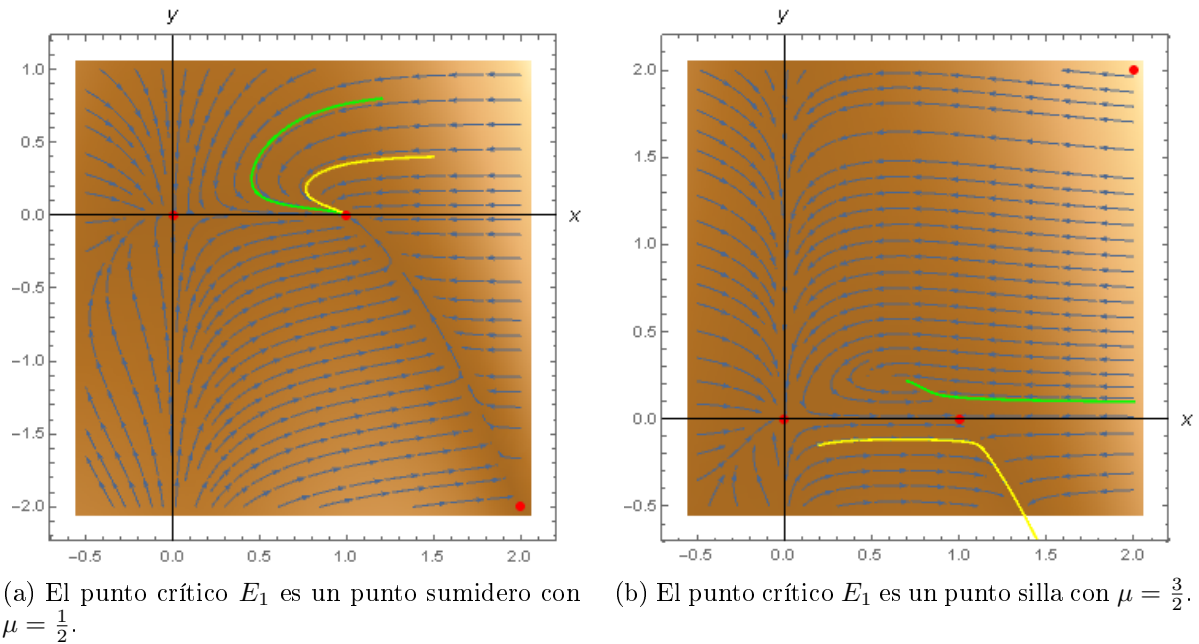


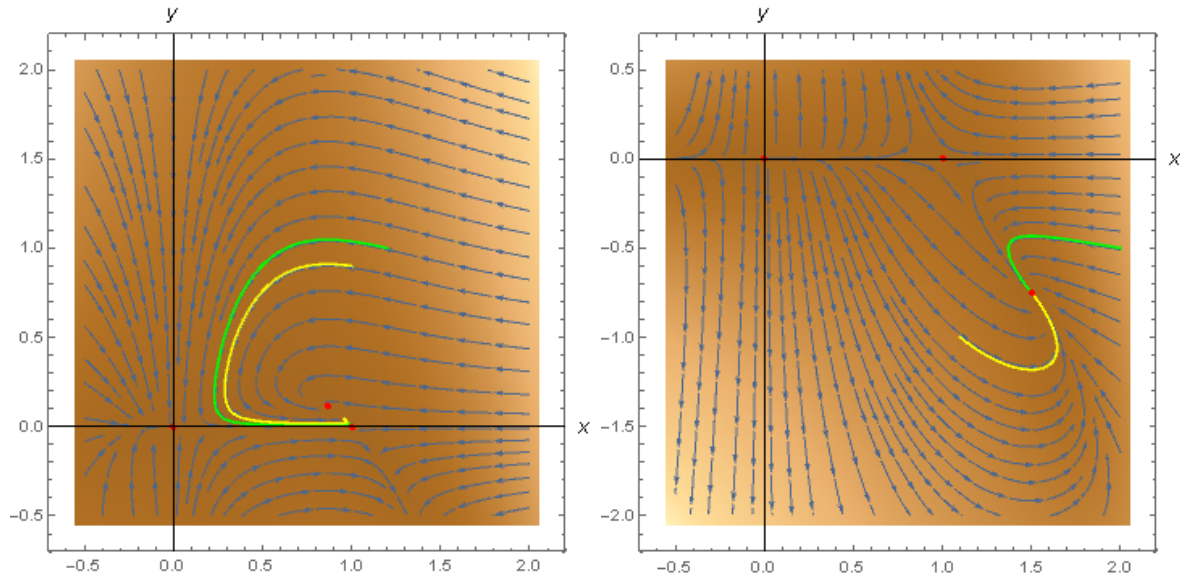
Figura 5.4: Retratos fase al variar el parámetro μ para el modelo (4.0.1).

En el escenario de la Figura 5.4a podemos ver que cuando $\mu = R_x = \frac{1}{2} < 1$, el tercer punto que se genera no se localiza en la región Ω y además el punto E_1 se clasifica como sumidero, mientras que en el escenario de la Figura 5.4b si el valor de μ aumenta, por ejemplo,

5.2. Escenarios sintéticos para el modelo (4.0.1)

cuando $\mu = R_x = \frac{3}{2} > 1$ el tercer punto ya se encuentra en Ω y ahora el punto E_1 se clasifica como un punto silla. Además, podemos observar que al tomar una condición inicial en Ω , en el escenario de la Figura 5.4a, tenemos que cuando la población de depredadores empieza a disminuir, la población de presas también disminuye. Esto sucede ya que al tener $R_x < 1$, la densidad de la población de presas disminuye, es decir, el tamaño de la población de presas decrece como se espera, esto en función de la capacidad de carga K .

Sea el conjunto de parámetros: $K = 1$, $\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $\mu = \frac{2}{3}$, se obtienen dos retratos fase con punto crítico asintóticamente estable (A.E).



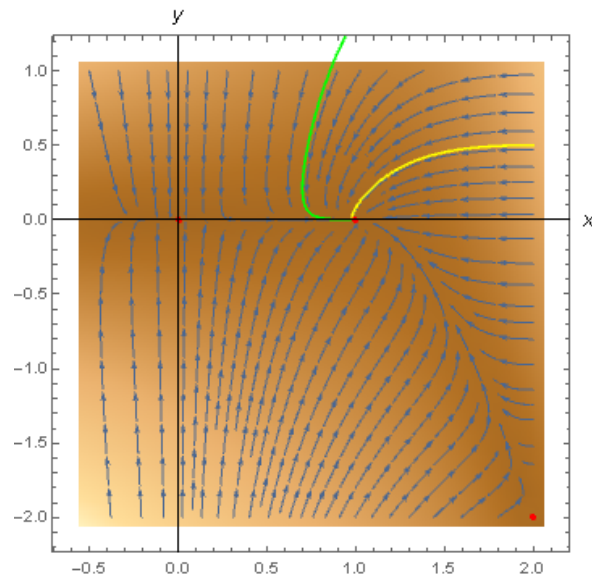
(a) El punto crítico $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{4}\right)$ es un punto sumidero con $\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 (b) El punto crítico $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ es un punto sumidero con $\mu = \frac{2}{3}$.

Figura 5.5: Retratos fase al variar el parámetro μ para el modelo (4.0.1).

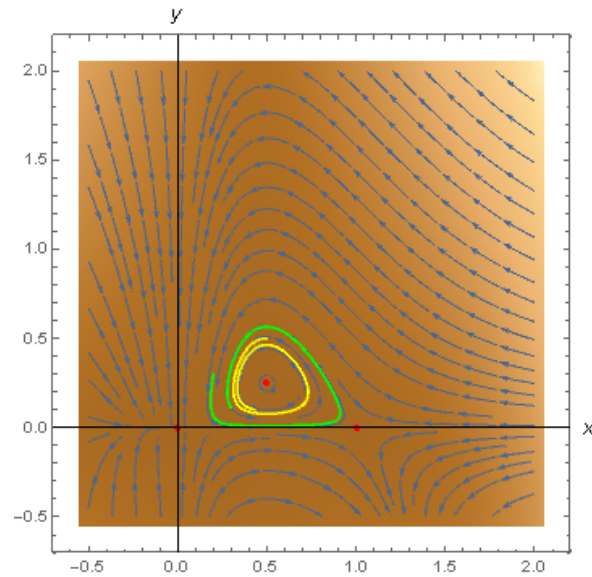
En el escenario de la Figura 5.5a podemos ver que cuando $\mu = R_x = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$, el tercer punto que se genera se localiza en la región Ω y además se clasifica como sumidero, mientras que en el escenario de la Figura 5.5b si el valor de μ disminuye, por ejemplo, cuando $\mu = R_x = \frac{2}{3} < 1$ el tercer punto ya no se encuentra en Ω y se sigue clasificando como un punto sumidero. Además, podemos notar que en el escenario de la Figura 5.5a, al tomar una condición inicial en Ω , tenemos que cuando la población de depredadores empieza a disminuir, la población de presas aumenta. Esto sucede ya que al tener $R_x > 1$, la densidad de la población de presas aumenta, es decir, el tamaño de la población de presas crece como se espera, esto en función de la capacidad de carga K . En el escenario de la Figura 5.5b es importante notar que si la condición inicial se encuentra fuera del conjunto invariante, entonces la solución ya no tiene sentido biológico.

5. Simulación de escenarios sintéticos de los modelos

Sea el conjunto de parámetros: $K = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $\mu = 2$, obtenemos dos retratos fase con punto crítico asintóticamente estable (A.E) y estable (E), respectivamente.



(a) El punto crítico E_1 es un punto sumidero con $\mu = \frac{1}{2}$.



(b) El punto crítico $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ es un centro con $\mu = 2$.

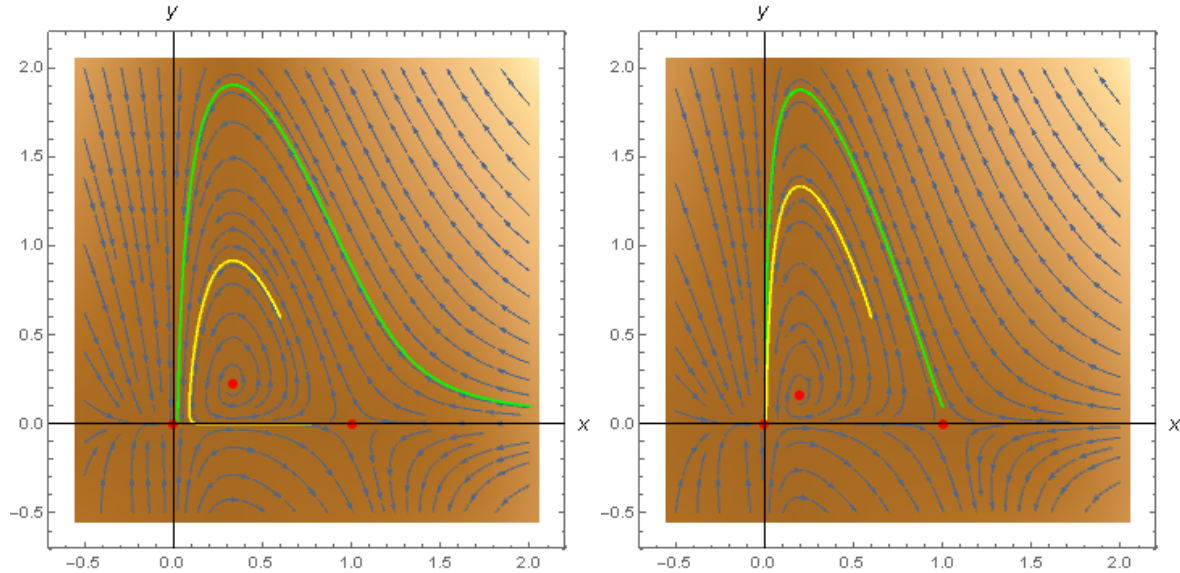
Figura 5.6: Retratos fase al variar el parámetro μ para el modelo (4.0.1)

En la Figura 5.6 los valores que se utilizaron para el parámetro $\mu = R_x$ son: $\mu = \frac{1}{2}$ y $\mu = 2$. Observemos que cuando $\mu = R_x = \frac{1}{2} < 1$ el tercer punto que se genera no se encuentra en la región Ω y en este caso el punto E_1 es un sumidero, mientras que si el valor de μ aumenta, por ejemplo, cuando $\mu = R_x = 2 > 1$ el tercer punto ya se encuentra

5.2. Escenarios sintéticos para el modelo (4.0.1)

en Ω y este punto se clasifica como un centro. En la Figura 5.6a el valor de la capacidad de carga K es mayor que en los casos anteriores y al tomar una condición inicial podemos observar que cuando los depredadores disminuyen las presas aumentan. En la Figura 5.6b, al tomar una condición inicial podemos observar que se tiene la existencia de ciclos límite.

Sea el conjunto de parámetros: $K = 3$, $\mu = 3$ y $\mu = 5$, se obtuvieron dos retratos fase con punto crítico asintóticamente estable (A.E).



(a) El punto crítico $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$ es un punto espiral con $\mu = 3$.
 (b) El punto crítico $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{25}\right)$ es un punto espiral con $\mu = 5$.

Figura 5.7: Retratos fase al variar el parámetro μ para el modelo (4.0.1).

En el escenario de la Figura 5.7a y 5.7b podemos observar que como $\mu = R_x > 1$ en ambos escenarios, los 3 puntos críticos se encuentran en la región Ω , y el tipo de estabilidad es el mismo. Además, al tomar condiciones iniciales en Ω , para ambos escenarios se tiene que cuando la población de depredadores disminuye, también lo hace la población de presas para posteriormente aumentar.

Conclusiones

En este trabajo de tesis realizamos el análisis de dos modelos; el primero denominado más realista de tipo Kolmogorov donde K_1 , K_2 y μ son los parámetros y el segundo llamado cuasi-Kolmogorov, donde K y μ son los parámetros. A continuación se presentan los resultados importantes obtenidos para cada uno de estos modelos.

- Para el modelo tipo Kolmogorov se obtuvo:
 1. Recordemos que en los modelos de tipo Kolmogorov los parámetros son fijos, sin embargo, en este trabajo se propone que μ sea un parámetro no fijo, es decir $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. El planteamiento de este modelo nos condujo a la determinación del conjunto de puntos críticos explícitamente identificados sobre el conjunto invariante, su clasificación y tipo de estabilidad. Es importante notar que los resultados obtenidos en el análisis del modelo al utilizar el concepto de matriz Jacobiana son de tipo local, sin embargo, estos resultados se pueden extender utilizando los teoremas 1.1.15 y 1.1.16 para el sistema no lineal y de este modo se puede conocer su estabilidad, es decir, el comportamiento topológico del sistema lineal se puede extender al no lineal utilizando estos teoremas.
 2. Se estudió el concepto de número reproductivo básico y las formas de calcularlo. Se presentó como herramienta principal para el cálculo del R_0 el método denominado *matriz de la siguiente generación*. Inicialmente, el parámetro μ carece de interpretación biológica, y el parámetro K_1 representa la capacidad de carga de las presas, sin embargo, al realizar el estudio del número reproductivo básico, utilizando el método de la matriz de siguiente generación, se obtuvo que el número reproductivo es μK_1 , el cual denota la densidad de la población de presas para este modelo.
 3. En el estudio analítico de las raíces se obtuvo que el modelo no posee trayectorias cerradas, además, según los escenarios planteados podemos ver que los retratos fase incluyen espirales, puntos silla y sumideros.

4. Se obtuvieron dos teoremas importantes, que clasifican el nacimiento o destrucción de puntos de equilibrio para restricciones sobre los parámetros K_1 capacidad de carga y μ , primero, sin interpretación biológica: Teorema 4.5.1 y después dándole una interpretación biológica en sentido de la densidad de población de presas: Teorema 4.5.2.
- Dentro de los resultados importantes, para el modelo cuasi-Kolmogorov tenemos:
1. Para este modelo, se propone que μ sea un parámetro no fijo, es decir $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. El planteamiento de este modelo nos condujo a la determinación del conjunto de puntos críticos explícitamente identificados sobre el conjunto invariante, su clasificación y tipo de estabilidad. Notemos que, los resultados obtenidos en el análisis del modelo al utilizar el concepto de matriz Jacobiana son de tipo local, sin embargo, estos resultados se pueden extender utilizando los teoremas 1.1.15 y 1.1.16 para el sistema no lineal y de este modo se puede conocer su estabilidad.
 2. Se estudió el concepto de número reproductivo básico y las formas de calcularlo, presentando como herramienta principal el método denominado *matriz de la siguiente generación*. Inicialmente, el parámetro μ carece de interpretación biológica, sin embargo, al realizar el estudio del número reproductivo básico, utilizando el método de la matriz de siguiente generación, se consigue que al parámetro μ se le pueda dar una interpretación biológica, el cual denota la densidad de la población de presas.
 3. En el estudio analítico de las raíces se obtuvo que el sistema posee trayectorias cerradas y dada la complejidad de los sistemas, no se consiguió la construcción del ciclo límite. Además, según los escenarios planteados podemos ver que los retratos fase incluyen trayectorias cerradas, espirales, puntos silla y sumideros.
 4. Se obtuvieron dos teoremas importantes, que clasifican el nacimiento o destrucción de puntos de equilibrio para restricciones sobre los parámetros K capacidad de carga y μ , primero, sin interpretación biológica: Teorema 3.5.1 y después dándole una interpretación biológica en sentido de la densidad de población de presas: Teorema 3.5.2.

Es importante mencionar que en ambos sistemas, el conjunto de escenarios sintéticos es la reafirmación de los resultados teóricos obtenidos y con los cuales geoméricamente se puede mostrar el comportamiento señalado de acuerdo a las condiciones dadas.

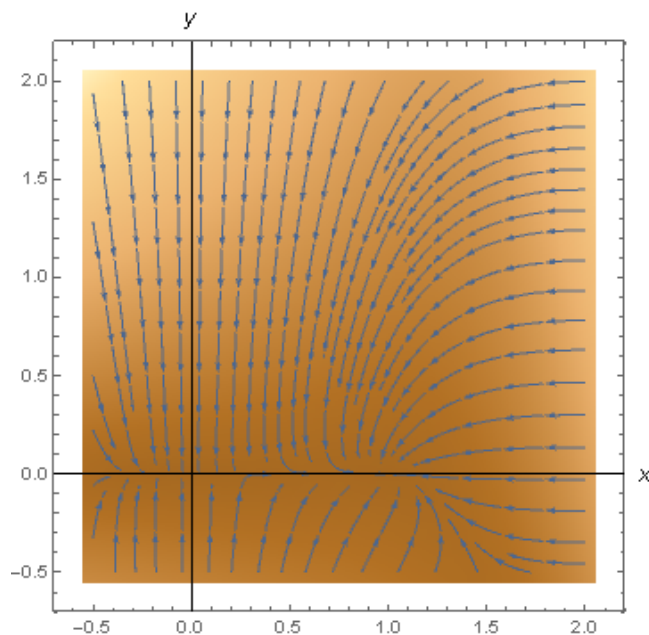
Un posible trabajo a futuro es la inclusión de más parámetros, u otras ecuaciones, por ejemplo se podría tener un modelo que tenga dos tipos de presas y un depredador u otro escenario en el que se tenga un tipo de presa y dos tipos de depredadores. Además de otros tipos de competencia: intraespecífica(consigo misma) e interespecífica(con la otra especie).

Apéndice A: Retratos fase obtenidos en Mathematica

En esta sección se mostrarán las instrucciones y sintaxis de los comandos, utilizando el programa Mathematica para la realización de las figuras mostradas en este trabajo.

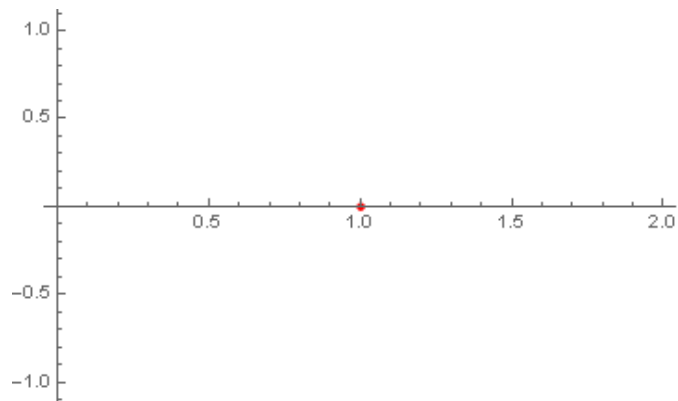
El comando `StreamDensityPlot` traza las líneas de flujo para un campo vectorial con fondo basado en la magnitud de dicho campo.

```
S = StreamDensityPlot[{x^2 - x^3 - x y, 2 x y - (2 y)/0.5}, {x, -0.5, 2},  
{y, -0.5, 2}, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y},  
AxesStyle -> Directive[Black, 12]]
```



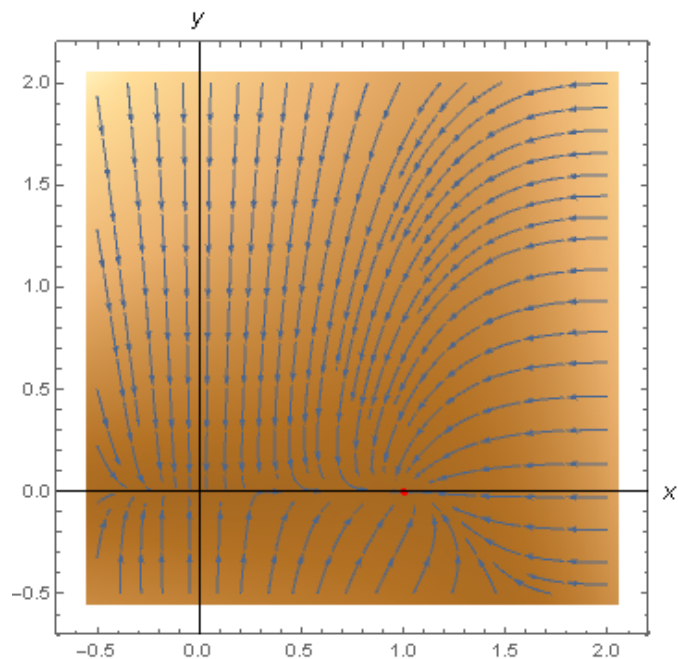
`ListPlot` grafica el punto $(1,0)$ y `PlotStyle` pinta el punto del color que se le indique.

```
puntos = {{1, 0}}; M = ListPlot[puntos, PlotStyle -> {Red}]
```



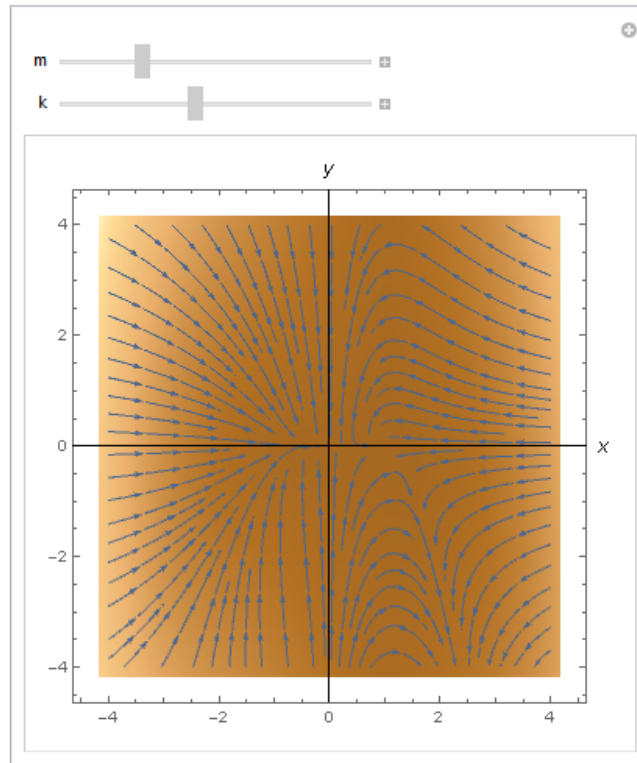
El comando Show une las dos gráficas anteriores en una sola.

```
Show[S, M]
```



El comando Manipulate muestra un conjunto de escenarios del campo vectorial, según cambios de dos parámetros en el sistema de ecuaciones diferenciales.

```
Manipulate[ StreamDensityPlot[ {x^2 - x^3 - x y, k x y - (k y)/m}, {x, -4, 4},
{y, -4, 4}, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> Directive[Black, 12]],
{m, 0.1, 3}, {k, 0.1, 6}]
```

Resolución numérica del PVI del sistema de ecuaciones diferenciales, designando valores a K_1 y al parámetro μ .

Vector de datos K_1 .

```
K_1= Table[i, {i, 0.1, 0.5, 0.1}];
```

```
solus = Table[NDSolve[{x'[t] == x[t]^2 - x[t]^3 - x[t] y[t],
y'[t] == -K_1[[i]] ((-1 + 2 Sqrt[1.25])/2) y[t] + K_1[[i]] x[t] y[t], x[0] == 2,
y[0] == 0.5}, {x, y}, {t, 20}], {i, 1, Length[K_1]}]
```

Evaluación de la solución para un intervalo de tiempo y representación de la curva solución

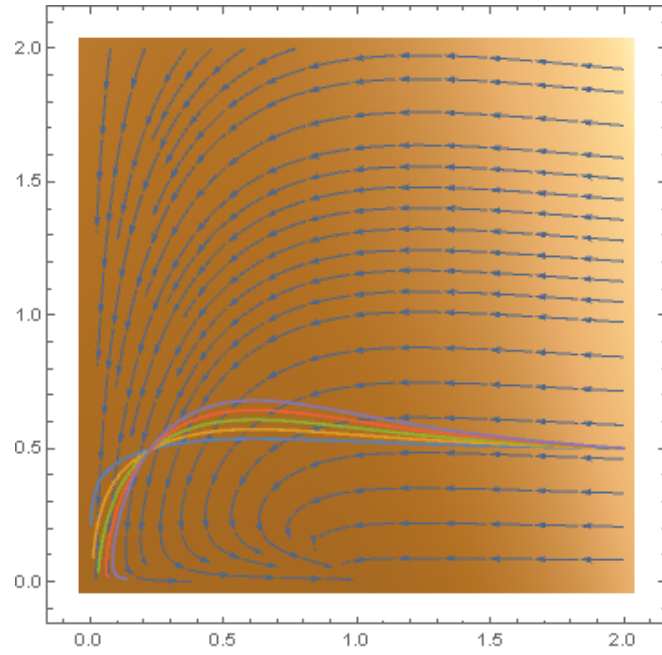
```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. solus], {t, 0, 20}]
```

Retrato fase en una porción del plano, designando valores a K_1 y al parámetro μ .

```
StreamDensityPlot[{x^2 - x^3 - x y, 0.5 x y - (1 (-1 + 2 Sqrt[1.25]))/2 y},
{x, 0, 2}, {y, 0, 2}]
```

Unión de las gráficas

```
Show[%, %]
```



Bibliografía

- [1] Arrowsmith D.K and Place C.M. (1982). *Ordinary Differential Equations: A qualitative approach with applications*. Chapman and Hall.
- [2] Barreira Luis and Valls Claudia. (2012) *Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory*. Vol. 137. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- [3] Begines Begines Francisco. (2015) *Análisis de bifurcaciones en modelos dinámicos macroeconómicos en tiempo continuo*, [Tesis de doctorado, Universidad de Sevilla].
- [4] Blanchard P., L. Devaney R. and R. Hall G.(1998). *Differential Equations*. Thompson.
- [5] Boyce William E. and Diprima Richard C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa-Willey.
- [6] Brauer Fred and Castillo C. Carlos. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer-Verlag.
- [7] Braun Martin. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [8] Braun Martin, Coleman Courtney S. and Drew Donald A. eds. (1983). *Differential Equation Models*. New York: Springer-Verlag.
- [9] Cullen Michael R. and Zill Dennis G. (2009, Septima edición). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*. ISBN-13: 978-607-481-314-2: ISBN-10: 607-481-314-0.
- [10] Edelstein Keshet Leah. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM.
- [11] Freedman H. L. (1980). *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. New York: Marcel Dekker.
- [12] Georgescu Adelina. (2004). *Dynamic bifurcation diagrams for some models in economics and biology*. Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics - ICTAMI, Thessaloniki, Greece, Acta Universitatis Apulensis, pp.156-163.

-
- [13] Georgescu R. M.(2005). *Bifurcation in a model of the population dynamics*, Proceedings of the International Conference on Theory and Application of Mathematics and Informatics - ICTAMI- Alba Iulia, Romania, Acta Universitatis Apulensis, pp.225-233.
- [14] González Olivares E, Rojas Palma A. (2021) *Stability in Kolmogorov-type quadratic systems describing interactions among two species. A brief revision*. Selecciones Matemáticas, Vol.8(1), pp.131-146.
- [15] J. Lotka Alfred. (1920). *Undamped oscillations derived from the law of mass action*. Journal of the American Chemical Society, Vol.42, pp.1595-1599.
- [16] Kuznetsov Yuri A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag.
- [17] Martínez Jeraldo Nicole De Lourdes. (2016) *Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con doble efecto Allee en las presas*, [Tesis de maestría, UTFSM].
- [18] Mendoza Emmanuel, Osuna Osvaldo and Villavicencio P. Geiser. (JUN 25, 2020). *Funciones de Dulac para modelos matemáticos de la ecología*. TEORÍA Y APLICACIONES, vol.27, pp.367-382.
- [19] Palis Jr. Jacob and de Melo Wellington . (1982). *Geometric Theory of Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- [20] Perko Lawrence. (2001, Third Edition). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- [21] Poincaré Henri. (1885). *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*. Acta Mathematica, vol.7, pp.259-380.
- [22] Romero Medrano Lorena. *Bifurcaciones en redes dinámicas: Aplicación al estudio de redes de neuronas*, [Tesis de fin de grado, Universidad de Zaragoza].
- [23] Sánchez Garduño F., Miramontes P. and Gutiérrez Sánchez J. L. (2002). *Clásicos de la biología matemática*. México: Siglo XXI.
- [24] Sigmund Karl. (2007). *Kolmogorov and population dynamics*. En Kolmogorov's Heritage in Mathematics (pp. 177-186). New York: Springer.
- [25] Torres Henao Jorge Alberto. (2013) *Sistemas Dinámicos Planos*, [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].