



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

**Dimensiones de Hausdorff y de Conteo de Cajas y aplicación en
identificación biométrica del iris del ojo**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

JUAN FELIPE MONTESINOS IBÁÑEZ

DIRECTOR:

Dr. Tomás Pérez Becerra

CO-DIRECTOR:

Dr. Salvador Sánchez Perales

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA

FEBRERO DE 2022

Dedicatoria

A mis padres Evencio y Alba quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía. A mis hermanos por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento. A toda mi familia porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mi una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas. Finalmente quiero dedicar esta tesis a mis amigos, por apoyarme cuando más los necesito, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día.

Agradecimientos

A mi familia, por haberme dado la oportunidad de formarme en esta prestigiosa universidad y haber sido mi apoyo durante todo este tiempo, a mis profesores quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer día a día como profesional, gracias a cada uno de ustedes por su paciencia, dedicación, apoyo incondicional y amistad.

De manera especial quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al Dr. Tomas Pérez Becerra y Dr. Salvador Sánchez Perales, quienes con sus conocimientos, enseñanzas y colaboraciones permitieron el desarrollo de esta tesis.

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por haberme brindado tantas oportunidades y enriquecerme en conocimiento.

Índice general

Introducción	VII
Algunos monstruos y su dimensión	VII
Estado del arte en identificación biométrica	IX
Planteamiento del problema y objetivo general	IX
Estructura de la tesis	X
Justificación e hipótesis	X
1. Preliminares	1
1.1. Medida exterior	1
1.2. Espacios métricos	3
2. Fractales y dimensión fractal	9
2.1. Dimensión topológica	9
2.2. Dimensión fractal	10
2.3. Dimensión de Hausdorff	14
2.4. Dimensión de conteo de cajas	22
2.5. Teorema de Moran	38
3. Dimensión fractal en identificación biométrica del iris del ojo	51
3.1. Identificación biométrica	51

3.2. Sistemas de identificación basados en el iris	53
3.3. Clasificación híbrida de las imágenes del iris	53
3.3.1. Extracción del Iris	53
3.3.2. Extracción de color del iris	55
Conclusiones	57
Referencias	59

Introducción

Algunos monstruos y su dimensión

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.”

(Mandelbrot, de su libro “The Fractal Geometry of Nature”, [20])

La frase anterior es quizás la más conocida por la comunidad científica dedicada al estudio de la geometría fractal, la cual es el área encargada del análisis y desarrollo de unas estructuras matemáticas consideradas en un principio como monstruos matemáticos debido a que no encajaban en la teoría desarrollada por Euclides. De hecho, se puede rastrear el origen de la geometría fractal a partir del año 1885, cuando Weierstrass construye una función continua en todo punto de su dominio y no derivable en ninguno de ellos.

La etapa de desarrollo de la geometría fractal duró aproximadamente hasta el año 1925, siendo sus principales desarrolladores Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, Bolzano, Koch, Osgood, Sierpinsky y Urysohn. Durante esta etapa, los matemáticos observaban que era imposible establecer el concepto de irregularidad y de fragmentación de estas figuras, siendo Cantor el primero en iniciar con un análisis riguroso (en su carta a Dedekind), seguido de Peano.

Estos monstruos matemáticos son actualmente conocidos con el nombre de fractales debido a su naturaleza fragmentada y fueron bautizados por el matemático polaco-francés-norteamericano Benoit Mandelbrot en 1982 ([20]). Desde el descubrimiento de la función de Weierstrass, se ha observado la gran posibilidad de recrear la naturaleza a partir de estas estructuras, esto generó un gran interés en descubrir la riqueza de información con la que cuentan estas formas, una de ellas es su grado de irregularidad o de fragmentación. Desde entonces, se han realizado diversos intentos de medir la irregularidad, siendo la medida más aceptada, y descubierta de forma puramente intuitiva, la dimensión en la que se encuentra inmerso el objeto.

Existen diversas ideas de dimensión, una de ellas es la dimensión topológica según Brouwer, Lebesgue, Menger y Uryson (quienes fueron sus principales desarrolladores), otra de ellas es la dada por Hausdorff y desarrollada por Besicovitch, la cual está basada en conceptos topológicos y de teoría de la medida y que generaliza la longitud, área, volumen y la dimensión de un espacio topológico. La principal diferencia entre ellas es que, en un espacio de dimensión finita, la dimensión topológica es un valor entero mientras que la de Hausdorff ya no tiene por qué serlo. Por lo anterior, Mandelbrot define a los fractales como los conjuntos con dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que la dimensión topológica, esto es, la dimensión fraccionaria es una de las características intrínsecas que debe poseer una figura para ser considerada fractal; sin embargo, aún se presentaba el problema de cómo calcularla.

Es hasta el año 1981 cuando J. E. Hutchinson ([11]) plantea una teoría con rigurosa formalidad basada en otra propiedad observable de los fractales: la autosimilitud, esto es, la observación de la misma estructura a diferentes escalas, en su trabajo establece una dimensión llamada de autosimilitud, definida a través de bolas abiertas (véase la Sección 2.2), no obstante, su definición no proporciona por sí misma una forma práctica para calcularla. Por otro lado, en años recientes se creó un algoritmo para calcular la dimensión: el método de conteo de cajas, el cual resulta muy práctico y facilita la estimación de la dimensión, el único inconveniente de este es la falta de rigor matemático en su construcción, a pesar de ello, es uno de los métodos más utilizados. Para darle el rigor matemático a este método, se demuestra que la dimensión fractal, de Hausdorff y de conteo de cajas en realidad son equivalentes y lo establece el teorema de Moran (P. A. P. Moran en [24]) que se encuentra en la Sección 2.5 de esta tesis, con lo que se logra unir dos herramientas poderosas para nuestro análisis.

El método de conteo de cajas se caracteriza por cubrir al fractal con formas medibles, que en dimensión dos son cuadros y cubos en dimensión tres (de ahí su característico nombre), que luego se hacen cada vez más «pequeños» de tal forma que la suma de sus medidas se aproxime a la medida del objeto de estudio; la forma en la que se construye la dimensión de Hausdorff muestra que esta estrategia aproxima muy bien a la dimensión fraccionaria de la figura cuando este límite existe.

A inicios del año 2010, el cálculo de la dimensión fractal mediante el cubrimiento por cajas se realizaba a mano, un ejemplo se puede observar en [26], sin embargo, actualmente existen algunos tipos de Software de uso libre, tal como el Fractal Research on Geoscience (FROG) desarrollado por el Dr. Jean-Francois Parrot en el Laboratorio de Análisis GeoEspacial, del Instituto de Geografía de la Universidad Nacional Autónoma de México UNAM; también se cuentan con programas comerciales, uno muy útil es BENOIT de TruSoft.

Estado del arte en identificación biométrica

Las aplicaciones de la dimensión fractal han sido diversas, podemos mencionar en neurología, biología, medicina, arqueología y exploración petrolera; el objetivo principal de la tesis es mostrar la forma en la que se aplica en reconocimiento biométrico del iris del ojo. Los métodos utilizados en la identificación de personas a través de esta técnica toman ciertas características de este y las comparan con bases de datos preestablecidas. Estos algoritmos logran una alta precisión en la búsqueda, pero uno de los problemas más comunes es que son adecuados para su uso solo en pequeñas instancias ([13]) el cual denominaremos como el problema de escalabilidad.

Una solución parcial al problema de escalabilidad es la introducción de una clasificación en la primera etapa de detección, por ejemplo, si el iris del ojo es de cierto color, es conveniente compararlo con valores de ojos con esta misma característica, en lugar de realizar el cotejo contra toda la base de datos; sin embargo, a lo más se pueden introducir tres tipos de color: claro, promedio y oscuro ([13]), por lo que la base solo se logra dividir en ese mismo número de partes, lo que genera que los métodos de reconocimiento aún presenten una deficiencia en el rastreo si la instancia cuenta con una cantidad mayor a 3000 imágenes. La dimensión fractal es una herramienta de apoyo para efectuar un primer filtrado en la búsqueda, debido a que permite descomponer un catálogo relativamente grande en conjuntos de ilustraciones con dimensión dentro de un intervalo de longitud pequeña, por lo que la base se puede seccionar en tantas proporciones como se requiera.

Planteamiento del problema y objetivo general

El objetivo general se dividirá en las siguientes dos partes, a manera de ser específicos, al mismo tiempo se planteará el problema:

OBJETIVO 1 El problema que se desea resolver en esta tesis es demostrar de forma detallada que la dimensión de Hausdorff, de conteo de cajas y fractal son equivalentes, así se le proporcionará el rigor matemático que requiere el método de conteo de cajas y, al mismo tiempo, se brindará un proceso para calcular la dimensión fractal.

OBJETIVO 2 Un segundo objetivo de esta tesis es brindar al lector una visión de las aplicaciones de esta teoría. Para lograrlo, se mostrará que la dimensión fractal puede ser útil en una primera etapa en los métodos de identificación biométrica, esto a través de la inserción del filtrado que proporciona aunado con la clasificación por color, así, se exhibirá la manera en que esta coadyuva para adecuar los sistemas usuales de reconocimiento a bases de datos grandes, manteniendo la precisión en la detección de personas.

Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis se encuentra estructurado en tres capítulos:

- 1. Preliminares.** Con el objetivo de elaborar esta tesis lo más auto contenida posible, se presentan los conceptos utilizados en el desarrollo de la investigación, en específico, las definiciones de topología, medida, métrica, medida exterior métrica y el espacio topológico, de medida y métrico.
- 2. Fractales y dimensión fractal.** En esta sección se introducen las distintas dimensiones de nuestro interés: topológica; fractal, junto con el análisis de la caracterización de estas formas; de Hausdorff y la construcción de la dimensión de conteo de cajas y algunas de sus propiedades. Se finaliza este capítulo mostrando el teorema de Moran.
- 3. Identificación biométrica del iris del ojo.** En este capítulo, se discuten los sistemas de identificación basados en el iris del ojo, se muestra una propuesta de clasificación de las imágenes a través de un método híbrido que involucra la dimensión fractal y el color del ojo y, finalmente, se analiza esta categorización como primer paso en los métodos usuales de reconocimiento biométrico.

Justificación e hipótesis

La justificación de esta investigación es que el desarrollo de esta tesis proporcionará los fundamentos teóricos para comprender los conceptos de las dimensiones de Hausdorff, de conteo de cajas y fractal, asimismo, exhibirá una demostración detallada de la equivalencia entre ellos, logrando el objetivo general del trabajo, además, se discutirá la implementación de la dimensión fractal en los métodos usuales de identificación biométrica de personas, a través del iris del ojo con el objetivo de mostrar la utilidad de la teoría recopilada en esta investigación.

Por lo tanto, tomamos como hipótesis que la dimensión fractal cuenta con el rigor matemático requerido que le proporcionará la dimensión de Hausdorff, además, el método de conteo de cajas será un proceso con el que se podrá calcular la dimensión fractal de una figura arbitraria. Por otro lado, la aplicación mencionada mostrará la utilidad de los conceptos abstractos plasmados en este trabajo, específicamente, cómo la dimensión fractal puede mejorar la precisión de los sistemas de reconocimiento biométrico en bases de datos relativamente grandes.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir los fundamentos básicos que son utilizados en el desarrollo de la tesis, en particular, los relacionados con teoría de la medida y espacios métricos.

1.1. Medida exterior

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto. Denotamos por 2^X a la colección de subconjuntos X .

Definición 1.1.2. Sea X un conjunto. Una *medida exterior en X* es una función $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A, B \in 2^X$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. Si $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n).$$

Proposición 1.1.3. Sean X un conjunto; \mathcal{G} una familia de subconjuntos de X para el cual $\emptyset \in \mathcal{G}$ y cada $E \subseteq X$ tiene una cubierta $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en \mathcal{G} , y $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ una función tal que $\lambda(\emptyset) = 0$. Si $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ se define como

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n) : \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G} \text{ - cubierta de } E \right\},$$

entonces μ^* es una medida exterior y se llama *medida exterior generada por λ* .

Demostración. La demostración se dividirá en tres pasos:

1. Mostremos que $\mu^*(\emptyset) = 0$. Consideremos la sucesión $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $G'_n = \emptyset$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ y $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta de \emptyset . Luego,

$$\mu^*(\emptyset) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n) : \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G} - \text{cubierta de } \emptyset \right\} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G'_n) = 0,$$

con lo que se concluye lo deseado.

2. Demostremos que si $A, B \in 2^X$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sea $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cubierta para B , luego $B \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} G'_n$. Así $A \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} G'_n$ por tanto $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta para A . Se sigue que

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n) : \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G} - \text{cubierta de } A \right\} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G'_n).$$

Dada la arbitrariedad de $\{G'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ resulta que

$$\mu^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n) : \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G} - \text{cubierta de } B \right\} = \mu^*(B),$$

con lo cual se demuestra la desigualdad.

3. Sean $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^X$ y $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos una sucesión $\{A_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ tal que

$$B_n \subseteq \cup_{m \in \mathbb{N}} A_{nm} \text{ y } \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda(A_{nm}) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Luego $\{A_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una colección numerable de conjuntos de \mathcal{G} , cuya unión contiene a $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, por tanto,

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \epsilon.$$

Con lo que se concluye que $\mu^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$.

■

1.2. Espacios métricos

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *métrica* o *distancia* sobre X si cumple con las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Al par (X, d) se le llama *espacio métrico* y al número $d(x, y)$ se le llama distancia de x a y .

Ejemplo 1.2.2. El conjunto \mathbb{R}^n con la función

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

es un espacio métrico ([1, Teorema 3.3, pag. 59]). La función d se le conoce como métrica usual de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.3. Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

Ejemplo 1.2.4. 1. Sea \mathbb{R}^* el conjunto de los reales extendidos, es decir, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. A este espacio le dotamos de una métrica $d_u : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente relación

$$d_u(x, y) = d(u(x), u(y)),$$

donde d es la distancia usual de \mathbb{R} y $u : \mathbb{R}^* \rightarrow [-1, 1]$ está definida por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{si } x \in \mathbb{R}; \\ 1, & \text{si } x = \infty; \\ -1, & \text{si } x = -\infty. \end{cases}$$

De esta forma, u es una isometría, de modo que (\mathbb{R}^*, d_u) es un espacio métrico compacto y, por tanto, completo (véase [33]). Además $u|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ es un homeomorfismo (con la métrica usual d). Esto hace que una sucesión de elementos de \mathbb{R} converge con la métrica d_u a un número real si y solo si converge a ese mismo número con la distancia usual d . También una sucesión (x_n) en \mathbb{R}^* tiende a $\pm\infty$ con la métrica d_u si y solo si lo hace en el sentido usual.

2. De igual forma que el inciso anterior, véase [33], $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es un espacio métrico con la métrica $d_s : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$d_s(m, n) = d(s(m), s(n)),$$

donde $s : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$s(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{si } n = \infty. \end{cases}$$

Definición 1.2.5. Sea (X, d) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que x es un punto de acumulación de A si para cualquier subconjunto abierto U de X que contenga al punto x , se tiene que

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama conjunto derivado de A , y se representa por A' .

Teorema 1.2.6. Sean M_1, M_2 y M espacios métricos con M completo; $A \subseteq M_1, B \subseteq M_2, x_0 \in A' \setminus A, y_0 \in B' \setminus B$ y $f : A \times B \rightarrow M$ una función. Si las siguientes condiciones se cumplen:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ existe para cada $y \in B$,
2. $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ existe uniformemente en $x \in A$,

entonces los tres límites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

existen y son iguales (véase [30]).

Definición 1.2.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \rightarrow X$ es una *contracción*, si existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. La constante c se llama constante de contracción. En el caso en que

$$d(f(x), f(y)) = c d(x, y)$$

se dice que f es una similaridad en X y en esta situación la constante c se llama factor de contracción.

Proposición 1.2.8. Si $X = \mathbb{R}^n$ y $f : X \rightarrow X$ es una similaridad con factor de contracción c , entonces para cada $x \in X$ y $r > 0$, $f(B(x, r)) = B(f(x), cr)$.

Demostración. ([29]). ■

En el siguiente teorema f^n denota a la composición de f consigo misma n veces.

Teorema 1.2.9. ([25]) [**Principio de contracción de Banach**] Sea X un espacio métrico completo. Si $f : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo p , y para cualquier $x \in X$, la sucesión $(f^n(x))$ converge a p . Más aún,

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x, f(x)).$$

Definición 1.2.10. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A, B \subseteq X$. La *distancia entre los conjuntos* A y B se define como

$$d(A, B) = \inf\{d(y, z) : y \in A, z \in B\}$$

y la *distancia entre el punto* x y el conjunto A como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Definición 1.2.11. Sea (X, d) un espacio métrico, diremos que una medida exterior μ^* definida en X es *medida exterior métrica*, si dados $A, B \subseteq X$ tales que $d(A, B) > 0$, se tiene que

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Definición 1.2.12. Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subseteq X$ y $\epsilon > 0$. Se define la *nube de* E con radio ϵ como:

$$(E)_\epsilon = \{x \in X : d(x, E) < \epsilon\}.$$

Observe que $(E)_\epsilon$ es un conjunto abierto que contiene a E (véase [2]), pues

$$(E)_\epsilon = \bigcup_{y \in E} B_\epsilon(y).$$

Definición 1.2.13. Sea (X, d) un espacio métrico y \mathcal{S} la colección de subconjuntos compactos y no vacíos de X . La función $H : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como

$$H(E, F) = \inf\{\epsilon > 0 : E \subseteq (F)_\epsilon \text{ y } F \subseteq (E)_\epsilon\},$$

para cada $E, F \in \mathcal{S}$, es una métrica sobre \mathcal{S} . Esta métrica comúnmente se conoce como *métrica de Hausdorff*.

Proposición 1.2.14. Si $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{S}$ entonces

$$H(\cup_{i=1}^m A_i, \cup_{i=1}^m B_i) \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} H(A_i, B_i).$$

Demostración. Sea $\gamma > 0$ luego para cada $i = 1, \dots, m$, existe $\epsilon_i > 0$ tal que $\epsilon_i < H(A_i, B_i) + \gamma$ y

$$A_i \subseteq (B_i)_{\epsilon_i}, \quad B_i \subseteq (A_i)_{\epsilon_i}.$$

Sea $\epsilon = \max\{\epsilon_i : i = 1, \dots, m\}$. Mostremos que

$$\cup_{i=1}^m A_i \subseteq (\cup_{i=1}^m B_i)_{\epsilon}.$$

Sea $x \in \cup_{i=1}^m A_i$ luego existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in A_j$ de modo que $x \in (B_j)_{\epsilon_j}$ y, por tanto, $x \in (B_j)_{\epsilon}$. Así $d(x, B_j) < \epsilon$. Ahora, observe que

$$\{d(x, y) : y \in B_j\} \subseteq \{d(x, y) : y \in \cup_{i=1}^m B_i\},$$

por tanto,

$$d(x, \cup_{i=1}^m B_i) = \inf\{d(x, y) : y \in \cup_{i=1}^m B_i\} \leq \inf\{d(x, y) : y \in B_j\} = d(x, B_j).$$

En consecuencia, $d(x, \cup_{i=1}^m B_i) < \epsilon$, es decir, $x \in (\cup_{i=1}^m B_i)_{\epsilon}$. De igual forma se muestra que

$$\cup_{i=1}^m B_i \subseteq (\cup_{i=1}^m A_i)_{\epsilon}.$$

Por lo tanto, $H(\cup_{i=1}^m A_i, \cup_{i=1}^m B_i) \leq \epsilon$. Note que $\epsilon = \epsilon_s$ para algún $s \in \{1, \dots, m\}$, así $\epsilon \leq H(A_s, B_s) + \gamma \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} H(A_i, B_i) + \gamma$ de modo que

$$H(\cup_{i=1}^m A_i, \cup_{i=1}^m B_i) \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} H(A_i, B_i) + \gamma,$$

siendo γ arbitrario tenemos la desigualdad deseada. ■

Definición 1.2.15. Sea X un conjunto y $F \subseteq 2^X$. Se dice que F tiene la *propiedad de la intersección finita* si la intersección de cualquier subfamilia finita de F es no vacía.

Definición 1.2.16. Sea (X, d) un espacio métrico. Si cada $F \subseteq 2^X$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces decimos que (X, d) *tiene la propiedad de intersección finita*.

Proposición 1.2.17. Sea (X, d) un espacio métrico que tiene la propiedad de intersección finita. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathcal{S} tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A_n \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ con la métrica de Hausdorff.

Demostración. Puesto que X tiene la propiedad de intersección finita, se sigue que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$, por tanto, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$. Sea $\epsilon > 0$. Mostremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)_{\epsilon}$$

para toda $n \geq n_0$. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ tal que $A_m \not\subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$. Esto implica la existencia de una sucesión estrictamente creciente de naturales $n_1 < n_2 < \dots$ tales que

$$A_{n_s} \not\subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$$

para toda $s \in \mathbb{N}$. Tomemos $x_{n_s} \in A_{n_s} \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$ para toda $s \in \mathbb{N}$. Dado que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, se tiene que $\{x_{n_s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en A_{n_1} . Por la compacidad de A_{n_1} podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $x \in A_{n_1}$ tal que $x_{n_s} \rightarrow x$. Dado que $X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$ es cerrado y (x_{n_s}) está en $X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$ se tiene que $x \in X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$. Supongamos que existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_{k^*}$, luego existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A_{k^*} = \emptyset$. Puesto que $x_{n_s} \rightarrow x$, tenemos que existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_s} \in B(x, r)$ para toda $s \geq s_0$. Tomemos $s' \in \mathbb{N}$ tal que $s' \geq s_0$ y $n_{s'} > k^*$ luego $x_{n_{s'}} \in B(x, r) \subseteq X \setminus A_{k^*}$ y $x_{n_{s'}} \in A_{n_{s'}} \subseteq A_{k^*}$ lo cual es una contradicción. Así para toda $k \in \mathbb{N}$, $x \in A_k$, luego $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, esto es una contradicción. Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)_\epsilon$$

para toda $n \geq n_0$. Por otro lado, claramente

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq (A_n)_\epsilon,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así para cada $n \geq n_0$, $h(A_n, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \epsilon$. ■

La siguiente proposición fue demostrada por F. Hausdorff en [8], aquí la exhibimos sin demostración debido a su complejidad.

Proposición 1.2.18. El espacio (\mathcal{S}, h) es completo.

Definición 1.2.19. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A'$ y $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. El límite superior e inferior de f se define como

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\gamma > 0} \sup_{x \in A \cap (x_0, x_0 + \gamma)} f(x)$$

y

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\gamma > 0} \inf_{x \in A \cap (x_0, x_0 + \gamma)} f(x).$$

Proposición 1.2.20. ([1, Teorema 8.3, pag. 225]) Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A'$ y $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Luego

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Capítulo 2

Fractales y dimensión fractal

La primera definición concreta de fractal dada por Mandelbrot es la siguiente:

Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica.

(Tomado de Montesdeoca, [23])

Posteriormente, Hutchinson en [11] le brinda formalidad al anterior concepto e introduce de forma matemática una propiedad adicional observable en los fractales: la autosimilitud y, a través de ella, define una dimensión equivalente a la fractal. (Vea la Definición 2.2.1).

Por otro lado, el método de conteo de cajas es una forma para calcular la dimensión fractal que, a pesar de que es un proceso muy intuitivo, posee bases sólidas matemáticas y lo demuestra el teorema de Moran. En este capítulo, mostraremos la construcción de cada una de estas dimensiones y se finaliza con la formulación y demostración de la equivalencia entre ellas, con lo que se proporciona un algoritmo para encontrar la dimensión fractal con el rigor matemático de la dimensión de Hausdorff.

2.1. Dimensión topológica

La dimensión topológica se conoce también como la dimensión de cubiertas debido a que se define a través de ellas. Iniciaremos definiendo dichos recubrimientos para posteriormente proporcionar su definición.

Definición 2.1.1. Sean (X, τ) un espacio topológico, K un subconjunto de X y $\mathcal{G} \subseteq 2^X$. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una *cubierta de K* , si $K \subseteq \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Cuando para cada

$\alpha \in I$, $U_\alpha \in \mathcal{G}$, se dice que \mathcal{U} es una \mathcal{G} -cubierta de K . En el caso particular en que $\mathcal{G} = \tau$ se dice que \mathcal{U} es una cubierta abierta de K .

Se dice que una cubierta \mathcal{V} de K es *más fina* que la cubierta \mathcal{U} si todo elemento de \mathcal{V} está contenido en algún elemento de \mathcal{U} . Si la familia \mathcal{U} es finita se define el *orden* de \mathcal{U} como el máximo número de conjuntos de \mathcal{U} que tienen una intersección no vacía, es decir, el orden de \mathcal{U} está dado por

$$\text{máx}\{\text{cad}(\mathcal{J}) : \cap \mathcal{J} \neq \emptyset \text{ y } \mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}\}.$$

Definición 2.1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. La *dimensión topológica* de un subconjunto K de X es el mínimo valor n , con $n \in \mathbb{N}$, para el que toda cubierta abierta de K admite una cubierta abierta más fina de orden no superior a $n + 1$. Si no existe un valor mínimo de n , entonces se dice que el conjunto es de dimensión infinita.

2.2. Dimensión fractal

Mandelbrot en [19] introduce la palabra fractal, a partir del adjetivo latino *fractus*, que significa ‘interrumpido’ o ‘irregular’, y la utiliza para referirse a las figuras que tienen una forma irregular cuya estructura se repite a diferentes escalas, pero principalmente a objetos con dimensión no entera, esto es, puede ser una fracción simple como $\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{3}$, e incluso un número irracional, por ejemplo π , e o $\sqrt{2}$. Así, se puede decir que algunas curvas tienen dimensión entre 1 y 2, o que, para ciertas superficies su dimensión está entre 2 y 3, y finalmente definir “polvo” con dimensión entre 0 y 1. Cuando una dimensión no es entera se le llama *dimensión fraccionaria*.

Para dar contexto al surgimiento del concepto de fractal, considérese como punto de partida la geometría euclidiana, cuyos elementos básicos son puntos, líneas, curvas, etcétera, estos entes resultan ser adecuados para modelar algunos de los fenómenos naturales y cuantificarlos midiendo longitudes, áreas o volúmenes. La geometría euclidiana describe las formas presentes en la vida cotidiana del ser humano y las que han sido creadas por él. Ahora que, si los objetos presentan formas tan complejas e irregulares, la métrica euclidiana no es suficiente para medir su grado de complejidad (o de fragmentación); por ejemplo, en 1961 Lewis F. Richardson ([28]) realizó un tratado sobre el cálculo de la extensión de líneas fronterizas y observó que esta aumenta en función de la precisión con la que se mide, esto es, las longitudes dependen de la escala de observación, lo que ocasiona que el largo de una frontera no se pueda establecer o tienda a infinito y crea «monstruos» que no son coherentes con la geometría de Euclides, muestra de ello son las curvas cerradas de longitud infinita. Posteriormente, Mandelbrot en [19], basado en los trabajos de Richardson, propone un método para calcular la irregularidad de un objeto evaluando cuán rápido crece la distancia, la superficie o el volumen, si se cuantifica en escalas cada vez más pequeñas, lo que da origen a la geometría fractal.

Existen principalmente dos clases de fractales, los creados por alguna fórmula recursiva, llamados *matemáticos*, y los *naturales*. Una peculiaridad de los primeros es la auto-similitud sin límite, es decir, que a cualquier «nivel» se observa la misma estructura, por lo tanto, tienen una cantidad infinita de detalles. Por otro lado, los niveles de observación de los diseñados por la naturaleza es un número finito y la semejanza en diferentes escalas no es totalmente exacta. Específicamente, se cuenta con las tres clasificaciones siguientes:

Auto-similitud exacta. Este es el tipo más restrictivo de auto-similitud debido a que exige que el fractal sea idéntico a diferentes escalas. A menudo se encuentra en fractales matemáticos definidos por sistemas iterados de funciones (Vea la Definición 2.5.4).

Cuasi auto-similitud. Exige que el fractal sea aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Las estructuras de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. En este sentido, D. Sullivan definió de forma matemática a un conjunto cuasi auto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de esta categoría (véase [26]).

Auto-similitud estadística. Es el tipo más débil de auto-similitud, se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de estas estructuras (véase [19]).

El polvo de Cantor (Figura 2.1) muestra auto-similitud exacta, la Curva de Koch (Figura 2.2) tiene cuasi auto-similitud y ejemplos de auto-similitud estadística es la que se observa en los contornos de las nubes, costas, las ramificaciones de los árboles, entre otros. De la propiedad de auto-similitud se desprende la imposibilidad de medir el contorno de

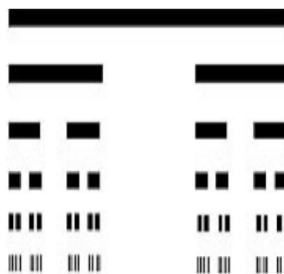


Figura 2.1: Polvo de Cantor

un fractal matemático, es decir, su perímetro es infinito y su área es finita ([23]), esto es una muestra más de que la geometría euclidiana no puede describir a este tipo de formas.

Por todo lo anterior, un fractal se caracteriza mediante las siguientes propiedades:

1. Tiene una estructura compleja a cualquier escala de observación.
2. Es auto-similar independientemente de la escala.
3. Tiene dimensión no entera.

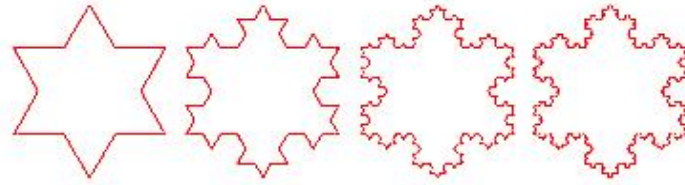


Figura 2.2: Curva de Von Koch

4. Tiene perímetro de longitud infinita pero un área finita. En una dimensión mayor, área infinita con volumen finito, etc.

Los fractales se construyen a través de procesos recursivos, por ejemplo, Mandelbrot en [21] muestra un algoritmo para construir árboles, este método consiste en colocar dos líneas rectas unidas por un extremo e ir agregando nuevas en cada uno de los extremos restantes (Figura 2.3); obsérvese la semejanza del árbol obtenido por una serie de iteraciones con el real en la Figura 2.4. Actualmente estos algoritmos son recreados por programas computacionales.

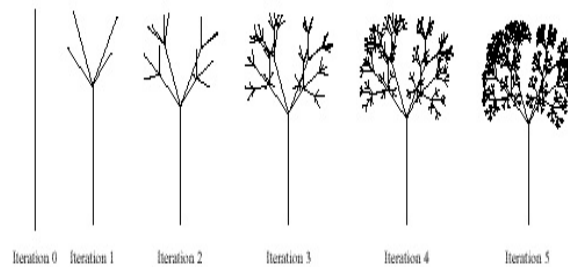


Figura 2.3: Construcción de un árbol fractal



Figura 2.4: Árbol real

Se puede verificar que los puntos tienen dimensión topológica 0; las líneas, 1; las superficies, 2 y los volúmenes, 3. Sin embargo, en geometría fractal, las formas son tan complejas que casi «cubren» el espacio en el que se encuentran, por ejemplo, es posible que una línea sea prácticamente una superficie (ver Figura 2.5); por esta razón, se considera a la irregularidad como un incremento fraccionario de la dimensión topológica. En este contexto, es viable que una curva posea un área en un rango dimensional entre 1 y 2, así mismo, una superficie tenga volumen entre 2 y 3, a este valor se le conoce como la dimensión fractal y, formalmente, se define con base en la propiedad de auto-similitud de la siguiente manera:

Definición 2.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $K \subseteq X$. Consideremos $N(K, \epsilon)$ como el número mínimo de bolas abiertas de radio ϵ necesarias para cubrir el conjunto K . La *dimensión fractal* (o de *similitud*), \dim_{sim} , se define como

$$\dim_{sim}(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(K, \epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\log N(K, \epsilon)}{\log \epsilon},$$

siempre que el límite exista.

La idea intuitiva que sustenta la anterior definición de dimensión fractal en forma de límite se aborda a detalle en la Sección 2.4.

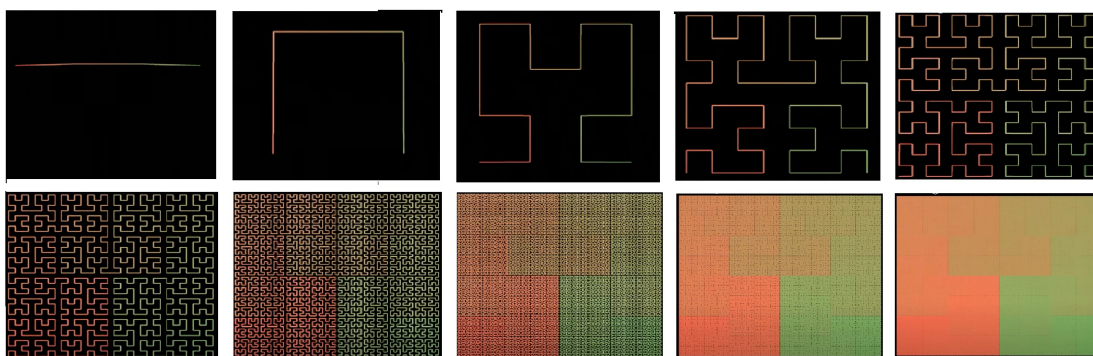


Figura 2.5: Distintas iteraciones de la curva de Hilbert, considerada una curva que tiene área. Imagen adaptada de *Encanto fractal: curvas que recubren el plano*. <https://matemelga.wordpress.com/2018/07/25/curvas-fractales-que-rellenan-el-plano/>

Hemos observado de manera intuitiva que la dimensión fractal es mayor o igual que la dimensión topológica, en el caso de que sea estrictamente más grande es muy probable que el conjunto K forme un fractal dentro del espacio topológico X .

2.3. Dimensión de Hausdorff

Uno de los objetivos de la geometría fractal es medir la irregularidad de formas complejas, por lo que se requiere introducir un mecanismo especial que logre hacerlo, en este caso, la medida exterior de Hausdorff cumple con los requisitos y, aún más, extrae la información necesaria para posteriormente calcular la dimensión fractal. En esta sección se muestra su construcción, se prueba que es una métrica y, en la parte final, se introduce la dimensión generada por ella.

Una manera de medir un conjunto en un espacio normado es mediante el diámetro, el cual brinda una forma de comparar el «tamaño» de dos conjuntos. En lo que sigue de esta tesis a menos que se indique lo contrario el espacio con el que se trabajará será $X = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.3.1. Sean $X = \mathbb{R}^n$ con la métrica habitual d y $U \subseteq X$ no vacío. El *diámetro* de U se denota por $|U|$ y se define como

$$|U| = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Cuando $U = \emptyset$ ponemos $|U| = 0$.

Mediante el diámetro se puede controlar la magnitud de los elementos de una cubierta, la siguiente definición nos muestra una manera de hacerlo.

Definición 2.3.2. Sean $\delta > 0$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. Se define la familia \mathcal{G}_δ en la siguiente forma

$$\mathcal{G}_\delta = \{G \subseteq \mathbb{R}^n : |G| \leq \delta\}.$$

2. Para cada $s \in (0, \infty)$ se define $\lambda_\delta^s : \mathcal{G}_\delta \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\lambda_\delta^s(G) = \begin{cases} |G|^s, & \text{si } |G| > 0; \\ 0, & \text{si } |G| = 0. \end{cases}$$

Defínase también $\lambda_\delta^0 : \mathcal{G}_\delta \rightarrow [0, \infty)$ como

$$\lambda_\delta^0(G) = \begin{cases} 1, & \text{si } G \neq \emptyset; \\ 0, & \text{si } G = \emptyset. \end{cases}$$

3. Una colección $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de \mathbb{R}^n es un δ -recubrimiento de E , si $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cubierta de E y $U_i \in \mathcal{G}_\delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Consideremos un δ -recubrimiento numerable de un subconjunto E de \mathbb{R}^n y sumemos los diámetros de cada elemento elevados a una potencia positiva s ; luego hallemos el límite cuando δ tiende a cero, esto nos dará una medida aproximada del conjunto E dependiente de s . En las siguientes dos definiciones se mostrará con más detalle su construcción.

Definición 2.3.3. Sean $s \in [0, \infty)$ y $\delta > 0$. Se define $H_\delta^s(E) : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ como

$$H_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^s(U_n) : \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } E \right\},$$

con $E \in 2^{\mathbb{R}^n}$.

Proposición 2.3.4. Para cualesquiera $s \in [0, \infty)$ y $\delta > 0$, H_δ^s es una medida exterior.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Es claro que $\emptyset \in \mathcal{G}_\delta$ y que para cada subconjunto E de \mathbb{R}^n , existe una cubierta $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de E tal que $U_i \in \mathcal{G}_\delta$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Además, para un $s \in [0, \infty)$ fijo, $\lambda_\delta^s(\emptyset) = 0$. Luego por la Proposición 1.1.3 se tiene que

$$H_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^s(U_n) : \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G}_\delta\text{-cubierta de } E \right\}$$

es una medida exterior. ■

Definición 2.3.5. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y s un número no negativo, la medida exterior s -dimensional de Hausdorff de E se define como

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E).$$

En el Teorema 2.3.7 se muestra que en efecto H^s es una medida exterior. La siguiente proposición muestra que el límite anterior existe en $[0, \infty]$ y da una forma alternativa para calcular la medida exterior s -dimensional de Hausdorff en términos de un supremo.

Proposición 2.3.6. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $s \in [0, \infty)$. Luego

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(E).$$

Demostración. Para $\delta, \delta' > 0$ tales que $\delta' < \delta$, se tiene que $\mathcal{G}_{\delta'} \subseteq \mathcal{G}_\delta$, por lo que $H_\delta^s(E) \leq H_{\delta'}^s(E)$. Esto muestra que $H_\delta^s(E)$ es decreciente con respecto a δ . Luego $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E)$ existe en $[0, \infty]$ y es igual a $\sup_{\delta > 0} H_\delta^s(E)$. ■

Teorema 2.3.7. La función $H^s : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior métrica con la distancia euclidiana.

Demostración. Por la Proposición 2.3.4, H_δ^s es una medida exterior para toda $\delta > 0$. Esto hace que H^s sea una medida exterior, en efecto,

$$(1) H^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(\emptyset) = 0.$$

(2) Si E_1, E_2 son subconjuntos de \mathbb{R}^n con $E_1 \subseteq E_2$ entonces $H^s(E_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E_1) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E_2) = H^s(E_2)$.

(3) Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Para demostrar la desigualdad deseada de este inciso usaremos el Teorema 1.2.6. Sean $M_1 = [0, \infty)$, $M_2 = \mathbb{N}^*$, $M = \mathbb{R}^*$, $A = (0, \infty)$, $B = \mathbb{N}$, $\delta_0 = 0$, $n_0 = \infty$ y $f : A \times B \rightarrow M$ definida por $f(\delta, n) = \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k)$. Observe que

$$\lim_{\delta \rightarrow d_0} f(\delta, n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k) = \sum_{k=1}^n \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E_k) = \sum_{k=1}^n H^s(E_k)$$

para cada $n \in B$. Por otra parte, $\{H_\delta^s(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0, \infty]$ tal que $H_\delta^s(E_n) \leq H^s(E_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n \in \mathbb{N}} H^s(E_n)$ converge en \mathbb{R}^* . Luego por el criterio de Weierstrass, $\sum_{n \in \mathbb{N}} H_\delta^s(E_n)$ converge uniformemente en $\delta \in (0, \infty)$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow n_0} f(\delta, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} H_\delta^s(E_n)$$

existe uniformemente en $\delta \in (0, \infty)$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.6,

$$\lim_{\delta \rightarrow \delta_0} \lim_{n \rightarrow n_0} f(\delta, n) = \lim_{n \rightarrow n_0} \lim_{\delta \rightarrow \delta_0} f(\delta, n).$$

Lo cual implica que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k).$$

Así

$$\begin{aligned} H^s(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{N}} H_\delta^s(E_n) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n H_\delta^s(E_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H^s(E_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} H^s(E_n). \end{aligned}$$

Mostremos ahora que H^s es una medida exterior métrica. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $d(A, B) > 0$ y δ tal que $0 < \delta < d(A, B)$. Sea $\epsilon > 0$, luego existe $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de $A \cup B$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_\delta^s(C_n) < H_\delta^s(A \cup B) + \epsilon.$$

Consideremos los conjuntos

$$I = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap A \neq \emptyset\}, \quad J = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap B \neq \emptyset\}.$$

Luego $I \cap J = \emptyset$, $A \subseteq \cup_{n \in I} C_n$ y $B \subseteq \cup_{n \in J} C_n$, en efecto, si existe $m \in I \cap J$ entonces $C_m \cap A \neq \emptyset$ y $C_m \cap B \neq \emptyset$ por lo que existen $x \in A$ y $y \in B$ tales que $x, y \in C_m$. Esto implica que

$$\delta < d(A, B) \leq \|x - y\| < |C_m| \leq \delta,$$

lo cual es una contradicción.

El hecho de que los conjuntos I y J sean ajenos permite tener la siguiente igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\delta}^s(C_n) = \sum_{n \in I} \lambda_{\delta}^s(C_n) + \sum_{n \in J} \lambda_{\delta}^s(C_n).$$

Por lo tanto,

$$H_{\delta}^s(A) + H_{\delta}^s(B) \leq \sum_{n \in I} \lambda_{\delta}^s(C_n) + \sum_{n \in J} \lambda_{\delta}^s(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\delta}^s(C_n) < H_{\delta}^s(A \cup B) + \epsilon.$$

Siendo ϵ arbitrario tenemos que

$$H_{\delta}^s(A) + H_{\delta}^s(B) \leq H_{\delta}^s(A \cup B).$$

Por otra parte, dado que H_{δ}^s es una medida exterior, se tiene que $H_{\delta}^s(A \cup B) \leq H_{\delta}^s(A) + H_{\delta}^s(B)$. De aquí que $H_{\delta}^s(A \cup B) = H_{\delta}^s(A) + H_{\delta}^s(B)$. Por lo tanto, en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, $H^s(A \cup B) = H^s(A) + H^s(B)$. ■

Proposición 2.3.8. (Propiedades de la medida exterior s -dimensional de Hausdorff H^s) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, luego

- I) Si $E = \{x_1, \dots, x_k\}$ es un conjunto finito con $k \in \mathbb{N}$ elementos, entonces $H^0(E) = k$ y $H^q(E) = 0$ para cada $q > 0$.
- II) Si E es infinito, entonces $H^0(E) = \infty$.

Demostración. I) Sea $\delta > 0$. Tomemos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E , luego para cada $i = 1, \dots, k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U_{n_i}$. Así, $U_{n_i} \neq \emptyset$ para toda $i = 1, \dots, k$, de modo que $\lambda_{\delta}^0(U_{n_i}) = 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Por lo tanto,

$$k = \sum_{i=1}^k \lambda_{\delta}^0(U_{n_i}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{\delta}^0(U_n).$$

Siendo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ arbitrario, obtenemos que $k \leq H_{\delta}^0(E)$.

Ahora, sea

$$\epsilon_\delta = \min\{\delta, d(x_i, x_j) : i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ y } j \neq i\}.$$

Pongamos $V_n = B_{\epsilon_\delta}(x)$ para toda $n = 1, \dots, k$, y $V_n = \emptyset$ para cada $n > k$. Luego $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -recubrimiento de E y

$$H_\delta^0(E) \leq \sum_{n=1}^k \lambda_\delta^0(V_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_\delta^0(V_n) = k.$$

Además, para $q > 0$,

$$H_\delta^q(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_\delta^q(V_n) = \sum_{n=1}^k \lambda_\delta^q(B_{\epsilon_\delta}(x)) = \sum_{n=1}^k |B_{\epsilon_\delta}(x)|^q < \sum_{n=1}^k \epsilon_\delta^q = k\epsilon_\delta^q.$$

Así, $H_\delta^0(E) = k$ y $H_\delta^q(E) \leq k\epsilon_\delta^q$ para todo $q > 0$. Aplicando límite cuando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos que $H^0(E) = k$ y $H^q(E) = 0$ para toda $q > 0$.

II) Sean $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ subconjuntos de E , donde cada E_k tiene k elementos. Por (I) y por la monotonía de la medida exterior H^0 , se tiene que

$$k = H^0(E_k) \leq H^0(E),$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $H^0(E) = \infty$. ■

Obsérvese que la medida exterior s -dimensional de Hausdorff se encuentra definida en términos de la potencia s . Al considerar distintos valores de s positivos, se genera una familia de medidas exteriores. El Teorema 2.3.12 muestra el rango de cada una de ellas para un conjunto fijo. Más aún, establece la existencia de un valor de s que separa a las medidas finitas de las infinitas.

Lema 2.3.9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si existe $s \in [0, \infty)$ tal que $H^s(E) < \infty$ entonces para cada $q > s$, $H^q(E) = 0$.

Demostración. Sea $s \in [0, \infty)$ tal que $H^s(E) < \infty$.

Caso 1: $s = 0$. En esta situación tenemos que $H^0(E) < \infty$. Luego, por el inciso (II) de la Proposición 2.3.8, E es finito y, por el inciso (I) de la misma proposición, $H^q(E) = 0$ para toda $q > 0$.

Caso 2: $s > 0$. Sea $\epsilon > 0$, dado que $H_\delta^s(E) < H_\delta^s(E) + \epsilon$, existe $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^s(V_n) < H_\delta^s(E) + \epsilon$. Tomemos $q > s$. Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^q(V_n) &= \sum_{|V_n| \neq 0} \lambda_\delta^q(V_n) + \sum_{|V_n|=0} \lambda_\delta^q(V_n) = \sum_{|V_n| \neq 0} |V_n|^q \\ &= \sum_{|V_n| \neq 0} |V_n|^s |V_n|^{q-s}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Ahora, dado que $q - s > 0$, se tiene que $|V_n|^{q-s} \leq \delta^{q-s}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{|V_n| \neq 0} |V_n|^s |V_n|^{q-s} &\leq \delta^{q-s} \sum_{|V_n| \neq 0} |V_n|^s = \delta^{q-s} \sum_{|V_n| \neq 0} \lambda_\delta^s(V_n) \leq \delta^{q-s} (H_\delta^s(E) + \epsilon) \\ &\leq \delta^{q-s} (H^s(E) + \epsilon). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

En consecuencia por (2.3.1) y (2.3.2),

$$H_\delta^q(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^q(V_n) \leq \delta^{q-s} (H^s(E) + \epsilon),$$

es decir,

$$H_\delta^q(E) \leq \delta^{q-s} (H^s(E) + \epsilon).$$

Aplicando límite a ambos lados de la desigualdad anterior, cuando $\delta \rightarrow 0$, obtenemos que $H^q(E) = 0$. ■

Teorema 2.3.10. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si existe $s > 0$ tal que $0 < H^s(E) < \infty$ entonces la medida exterior s -dimensional de Hausdorff induce una bifurcación, esto es,

$$H^q(E) = \begin{cases} \infty, & \text{si } q \in [0, s); \\ 0, & \text{si } q \in (s, \infty). \end{cases}$$

En esta situación,

$$s = \inf\{q > 0 : H^q(E) = 0\} = \sup\{q > 0 : H^q(E) = \infty\}.$$

Demostración. Sea $s > 0$ tal que $0 < H^s(E) < \infty$. Tomemos $q \in (0, s)$ y sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E . En forma similar a (2.3.1), se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^q(U_n) = \sum_{|U_n| \neq 0} |U_n|^s |U_n|^{q-s}. \quad (2.3.3)$$

Como $q - s < 0$, obtenemos que $|U_n|^{q-s} \geq \delta^{q-s} = \frac{1}{\delta^{s-q}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\sum_{|U_n| \neq 0} |U_n|^s |U_n|^{q-s} \geq \frac{1}{\delta^{s-q}} \sum_{|U_n| \neq 0} |U_n|^s. \quad (2.3.4)$$

En consecuencia por (2.3.3) y (2.3.4),

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_\delta^q(U_n) \geq \frac{1}{\delta^{s-q}} \sum_{|U_n| \neq 0} |U_n|^s \geq \frac{1}{\delta^{s-q}} H_\delta^s(E).$$

Dada la arbitrariedad de $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$\frac{1}{\delta^{s-q}} H_\delta^s(E) \leq H_\delta^q(E).$$

Finalmente, puesto que $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E) = H^s(E) \neq 0$ y $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{s-q}} = \infty$, vemos que

$$H^q(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^q(E) = \infty.$$

Consideremos ahora el caso en $q = 0$. Si E es un conjunto finito, entonces por el inciso (I) de la Proposición 2.3.8, se tiene que para cada $r > 0$, $H^r(E) = 0$. Esto implica que $H^s(E) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, E es un conjunto infinito. Así por el inciso (II) de la Proposición 2.3.8 $H^q(E) = \infty$.

Por otro lado, por el Lema 2.3.9, para cada $q > s$, $H^q(E) = 0$. En consecuencia,

$$H^q(E) = \begin{cases} \infty, & \text{si } q \in [0, s); \\ 0, & \text{si } q \in (s, \infty). \end{cases}$$

Lo cual implica que

$$s = \inf\{q > 0 : H^q(E) = 0\} = \sup\{q > 0 : H^q(E) = \infty\}.$$

■

Corolario 2.3.11. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $s := \inf\{q > 0 : H^q(E) = 0\}$ existe y $s > 0$ entonces para cada $q \in [0, s)$, $H^q(E) = \infty$.

Demostración. Supongamos que

$$s = \inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\} \tag{2.3.5}$$

existe y que $s > 0$. Tomemos $q \in (0, s)$, luego $0 < q < \inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\}$. Por tanto, $H^q(E) > 0$. Si $H^q(E) < \infty$, entonces por el Teorema 2.3.10,

$$q = \inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\}.$$

Luego por (2.3.5), $s = q$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $H^q(E) = \infty$.

Supongamos ahora que $q = 0$. Si E es un conjunto finito, entonces por el inciso (I) de la Proposición 2.3.8, $H^r(E) = 0$ para toda $r > 0$, lo cual implica que $\inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\} = 0$. Luego por (2.3.5), $s = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, E es un conjunto infinito, de modo que $H^q(E) = H^0(E) = \infty$. ■

Teorema 2.3.12. (Bifurcación de la medida s -dimensional de Hausdorff). Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ existe un único $s_E \in [0, \infty]$ que satisface únicamente una de las siguientes condiciones:

1. $s_E = \infty$ y para cada $0 \leq q < s_E$, $H^q(E) = \infty$.

2. $0 < s_E < \infty$ y

$$H^q(E) = \begin{cases} \infty, & \text{si } q \in [0, s_E); \\ 0, & \text{si } q \in (s_E, \infty). \end{cases}$$

En esta situación,

$$s_E = \inf\{q > 0 : H^q(E) = 0\} = \sup\{q > 0 : H^q(E) = \infty\}.$$

3. $s_E = 0$ y para cada $q > s_E$, $H^q(E) = 0$.

Demostración. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. La demostración se dividirá en dos casos.

Caso 1: Para cada $q \in [0, \infty)$, $H^q(E) = \infty$. En este caso, tomamos $s_E = \infty$ y obtenemos que para cada $0 \leq q < s_E$, $H^q(E) = \infty$. Por lo tanto, s_E satisface (1).

Caso 2: Existe $q^* \in [0, \infty)$ tal que $H^{q^*}(E) < \infty$. Por el Lema 2.3.9, se tiene que para cada $r > q^*$, $H^r(E) = 0$. Lo cual implica que $\inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\}$ existe. Pongamos

$$s_E = \inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\}.$$

Sea $q > s_E$ luego q no es cota inferior de $\{r > 0 : H^r(E) = 0\}$, por tanto, existe $t > 0$ tal que $s_E \leq t < q$ y $H^t(E) = 0$. Así por el Lema 2.3.9, $H^q(E) = 0$. Siendo q arbitrario, obtenemos que

$$\forall q > s_E, \quad H^q(E) = 0. \quad (2.3.6)$$

Si $s_E = 0$ entonces (3) se cumple.

Si $s_E > 0$ entonces por el Corolario 2.3.11, para cada $q \in [0, s_E)$, $H^q(E) = \infty$. Esto junto con (2.3.6) implican que $s_E = \sup\{r > 0 : H^r(E) = \infty\}$. En consecuencia se cumple (2). ■

La siguiente definición establece la dimensión de Hausdorff de un subconjunto E de \mathbb{R}^n .

Definición 2.3.13. Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n . La *dimensión de Hausdorff de E* , denotada como $\dim_H(E)$, se define como

$$\dim_H(E) = s_E.$$

Observación 2.3.14. De la demostración del Teorema 2.3.12 se observa lo siguiente:

(I) Si $\dim_H(E) < \infty$ entonces

$$\dim_H(E) = \inf\{r > 0 : H^r(E) = 0\}$$

y para cada $s > \dim_H(E)$, $H^s(E) = 0$.

(II) Si $\dim_H(E) > 0$ entonces

$$\dim_H(E) = \sup\{r > 0 : H^r(E) = \infty\}$$

y para cada $0 \leq s < \dim_H(E)$, $H^s(E) = \infty$.

(III) Si existe $0 < s < \infty$ tal que $0 < H^s(E) < \infty$ entonces $\dim_H(E) = s$.

2.4. Dimensión de conteo de cajas

Una definición más general que la dimensión de auto-similitud la proporciona la de conteo de cajas o de Minkowski-Bouligard, esta es equivalente a la dimensión fractal de un conjunto en \mathbb{R}^n .

El método de conteo de cajas para obtener la dimensión fractal de una figura consiste en generalizar el proceso con el que se encuentra la longitud, el área y el volumen. A continuación, se mostrará la idea detrás de su construcción. Consideremos una recta de magnitud 1 y la dividimos en N partes cada una con una longitud δ igual a $\frac{1}{N}$ (véase la Figura 2.6). De esta forma se tiene que

$$N \cdot \delta = 1.$$

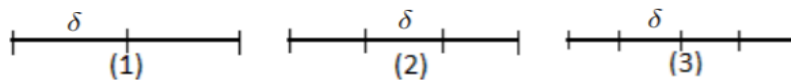


Figura 2.6: Distintas divisiones de la recta unitaria. (1) $N = 2$, $\delta = \frac{1}{2}$; (2) $N = 3$, $\delta = \frac{1}{3}$; (3) $N = 4$, $\delta = \frac{1}{4}$.

Ahora, consideremos un cuadrado de área 1 y dividámoslo en N cuadrados, donde cada uno de sus lados mide δ unidades (Figura 2.7), con lo que se obtiene

$$N \cdot \delta^2 = 1.$$

Nuevamente, repetimos el mismo procedimiento para un cubo de volumen 1, como se muestra en la Figura 2.8, y se obtiene que

$$N \cdot \delta^3 = 1.$$

Observemos que el exponente del valor δ coincide con la dimensión del espacio en el que se encuentra cada figura. Si se generaliza el proceso para cualquier dimensión d del objeto se obtiene la relación

$$N \cdot \delta^d = 1. \tag{2.4.1}$$

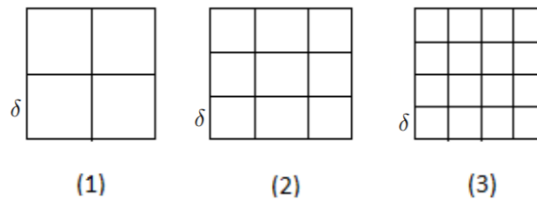


Figura 2.7: Distintas divisiones del cuadrado unitario. (1) $N = 4$, $\delta = \frac{1}{2}$; (2) $N = 9$, $\delta = \frac{1}{3}$; (3) $N = 16$, $\delta = \frac{1}{4}$.

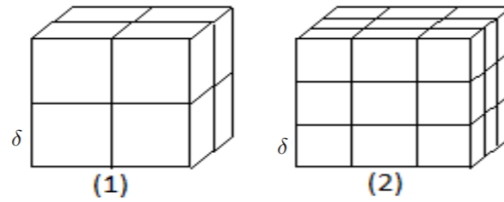


Figura 2.8: Distintas divisiones del cubo unitario. (1) $N = 8$, $\delta = \frac{1}{2}$; (2) $N = 27$, $\delta = \frac{1}{3}$.

Consideremos a d como una variable dependiente de δ , por lo que la denotaremos por d_δ y al despejarla de la igualdad (2.4.1) se obtiene la fórmula:

$$d_\delta = \frac{\log(N_\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}, \quad (2.4.2)$$

donde N_δ es el número de «cajas» correspondientes al valor δ . Algunos ejemplos del cálculo de d_δ a partir de la fórmula (2.4.2) se pueden observar en la Figura 2.9. En la parte (1) se muestra una recta en la que

$$d_{\frac{1}{3}} = \frac{\log(3)}{\log(3)} = 1,$$

en (2) aparece un cuadrado con

$$d_{\frac{1}{3}} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2,$$

y en (3) se tiene un segmento de la curva de Koch con

$$d_{\frac{1}{3}} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2619.$$

Para calcular la dimensión por el método de cajas de un conjunto acotado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se encierra este por una caja, donde cada uno de sus lados tenga una longitud fija L . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $L = 1$. Luego esta caja se divide en subcajas, donde los lados de cada subcaja tengan una longitud δ , y se cuentan las subcajas

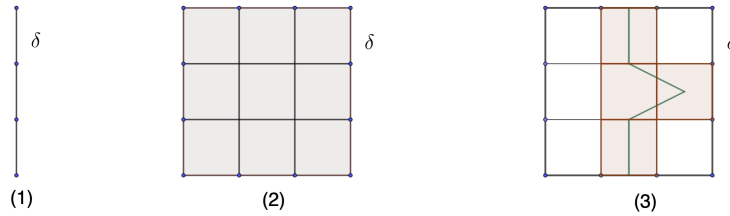


Figura 2.9: Cálculo del valor de d_δ para distintas figuras. (1) Recta con $d_{\frac{1}{3}} = 1$. (2) Cuadrado con $d_{\frac{1}{3}} = 2$. (3) Segmento de la curva de Koch con $d_{\frac{1}{3}} = 1.26$.

que cubren a E . El menor número de subcajas que cubren a E se denota por N_δ . A continuación, se realiza el cociente de logaritmos

$$d_\delta = \frac{\log(N_\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Este procedimiento se repite considerando subdivisiones más pequeñas, es decir, para valores de δ progresivamente más pequeños. En consecuencia, la dimensión se obtiene en el límite $\lim_{\delta \rightarrow 0} d_\delta$ (siempre que exista), es decir,

$$\dim_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}. \quad (2.4.3)$$

Al valor \dim_B se le conoce como la *dimensión de conteo de cajas*

El método de conteo de cajas es un proceso infinito, realizarlo a mano carece de sentido, sin embargo, es posible llevarlo a cabo solo para un número finito de fases y luego efectuar un ajuste lineal por el método de mínimos cuadrados. Por ejemplo, para la curva de Koch, la Figura 2.10 (a) muestra que la curva está cubierta por $N_\delta = 12$ cajas, donde $\delta = 0.25$. La figura (b) muestra que la curva está cubierta por $N_\delta = 29$ cajas para $\delta = 0.125$. Estos datos junto con los de las figuras (d) y (e) son puestos en el Cuadro 2.4.1, el cual muestra los resultados obtenidos de realizar manualmente el conteo de cajas y los cálculos de los cocientes de los logaritmos.

Fila	δ	N_δ	$\frac{1}{\delta}$	$\log(\frac{1}{\delta})$	$\log(N_\delta)$	$\log(N_\delta)/\log(\frac{1}{\delta})$
1	0.5	4	2	1	2	2
2	0.25	12	4	2	3.58496	1.79248
3	0.125	29	8	3	4.85798	1.61933
4	0.0626	87	16	4	6.44294	1.61074

Cuadro 2.4.1: Datos obtenidos por medio de recubrimientos realizados a mano.

Los datos $\hat{x} = \log(N_\delta)$ y $\hat{y} = \log(\frac{1}{\delta})$, para cada valor que toman N_δ y δ en estas cuatro filas, son graficados en la Figura 2.11 como una serie de puntos que, al ajustarlos

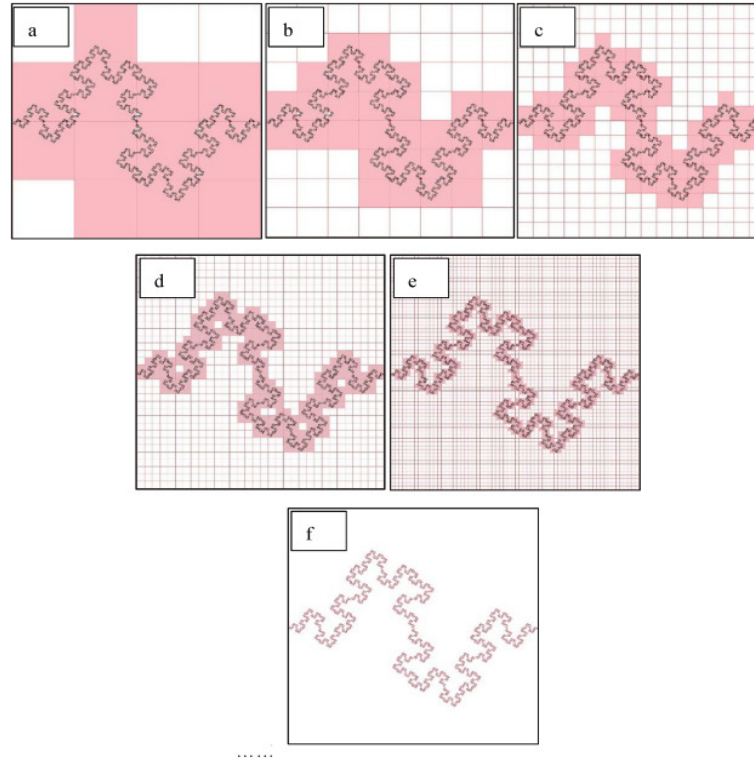


Figura 2.10: Distintos recubrimientos de la curva de Koch donde $\delta \rightarrow 0$. Se omiten figuras entre e y f. Imagen obtenida de <https://bit.ly/2SJ4GiQ>.

mediante el procedimiento de mínimos cuadrados, se obtiene una línea recta cuya ecuación está dada por $\hat{y} = 1.4602\hat{x} + 0.5716$. Observe que esta recta tiene la propiedad de que su pendiente es una aproximación de la dimensión de conteo de cajas, pues,

$$\dim_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})} \approx \lim_{\hat{x} \rightarrow \infty} \frac{1.4602\hat{x} + 0.5716}{\hat{x}} = 1.4602.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la dimensión de conteo de cajas de la curva de Koch es el valor fraccionario $\dim_B \approx 1.4602$.

La descripción que hemos dado del método de cajas tiene deficiencias teóricas, por ejemplo, δ no puede ser un número arbitrario pequeño, pues este debe cumplir que $\delta n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En realidad en (2.4.3) se tendría el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\delta_n})}{\log(\frac{1}{\delta_n})}$ para una sucesión de números positivos (δ_n) tal que $\delta_n \rightarrow 0$. Por lo que cabe la duda si para otra sucesión de números positivos (δ_n^*) con $\delta_n^* \rightarrow 0$ el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\delta_n^*})}{\log(\frac{1}{\delta_n^*})}$ existe y es igual que el anterior. En adelante, se presentarán algunas propiedades adicionales con la finalidad de demostrar que este proceso cuenta con el rigor matemático requerido.

Definición 2.4.1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$.

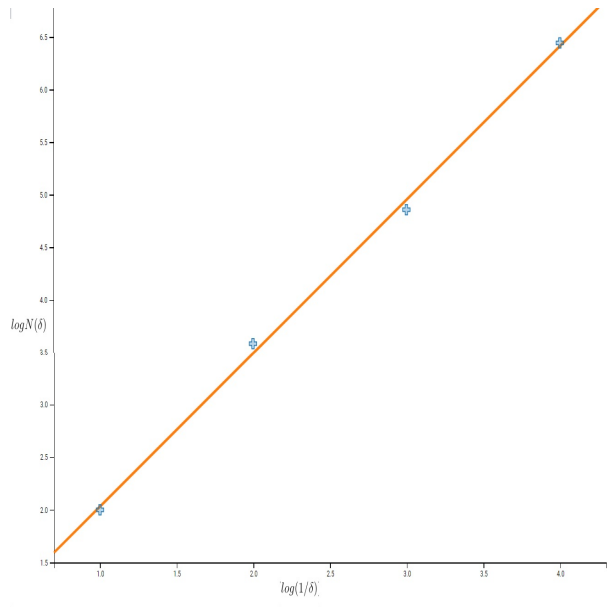


Figura 2.11: Gráfico de relación entre $\log(1/\delta)$ contra $\log(N)$.

1. Para cada recubrimiento \mathcal{U} de E se define

$$n(\mathcal{U}) = \text{card}(\{U \in \mathcal{U} : U \neq \emptyset\}).$$

2. Se define

$$N_\delta(E) = \text{mín}\{n(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } E\}.$$

Proposición 2.4.2. Sean $E, E_1, E_2, F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. $1 \leq N_\delta(E)$ para toda $\delta > 0$.
2. Si $\delta_1 \leq \delta_2$ entonces $N_{\delta_2}(E) \leq N_{\delta_1}(E)$.
3. Si $E_1 \subseteq E_2$ entonces $N_\delta(E_1) \leq N_\delta(E_2)$.
4. $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$.

Demostración. Solo probaremos el inciso 3, pues los otros incisos son directos de la definición de $N_\delta(E)$. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} δ -recubrimientos de E y F . Luego $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es un δ -recubrimiento de $E \cup F$ y $n(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \leq n(\mathcal{U}) + n(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $N_\delta(E \cup F) \leq n(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \leq n(\mathcal{U}) + n(\mathcal{V})$. Así $N_\delta(E \cup F) - n(\mathcal{U}) \leq n(\mathcal{V})$. Dada la arbitrariedad de \mathcal{V} , tenemos que $N_\delta(E \cup F) - n(\mathcal{U}) \leq N_\delta(F)$. Luego $N_\delta(E \cup F) - N_\delta(F) \leq n(\mathcal{U})$. Ahora, de la arbitrariedad de \mathcal{U} , tenemos que $N_\delta(E \cup F) - N_\delta(F) \leq N_\delta(E)$, es decir, $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$. ■

Definición 2.4.3. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y no vacío. Se define la *dimensión inferior y superior del conteo de cajas* como

$$\underline{\dim}_B(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{\log(N_\delta(E))}{-\log(\delta)} = \liminf_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log(\frac{1}{\delta})},$$

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log(N_\delta(E))}{-\log(\delta)} = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Si la dimensión inferior y superior coinciden, entonces por la Proposición 1.2.20, $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log(\frac{1}{\delta})}$ existe y la *dimensión de conteo de cajas* se define como

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log(\frac{1}{\delta})}. \quad (2.4.4)$$

El siguiente teorema propone una manera en la que se puede elegir el valor de δ de tal forma que las dimensiones fractal y de cajas de un conjunto, en un espacio métrico, sean iguales.

Teorema 2.4.4. Sean E un subconjunto de \mathbb{R}^n , $C > 0$ y $0 < r < \min\{\frac{1}{C}, 1\}$. Defínase $\beta_n = Cr^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}$$

existe, entonces $\dim_B(E)$ existe y $\dim_B(E) = T$.

Demostración. Observemos primero que $0 < \dots \beta_4 < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1 = Cr < 1$ y que $\beta_n \rightarrow 0$. Definamos la función $f : (0, Cr) \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$f(\delta) = k, \text{ si } \delta \in [\beta_k, \beta_{k-1}), \text{ para } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Note que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = \infty. \quad (2.4.5)$$

Sea $\delta \in (0, Cr)$, luego $\beta_{f(\delta)} \leq \delta < \beta_{f(\delta)-1}$ y, por tanto, $1 < \frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}} < \frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{\beta_{f(\delta)}}$, de donde

$$0 < \log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}}\right) < \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \leq \log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}}\right)$$

$$\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}}\right)} \leq \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} < \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}}\right)}.$$

Sabemos que

$$1 \leq N_{\beta_{f(\delta)-1}}(E) \leq N_{\delta}(E) \leq N_{\beta_{f(\delta)}}(E).$$

Luego

$$\frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)-1}}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}}\right)} \leq \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)}}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}}\right)} \quad (2.4.6)$$

Por otra parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}} = \frac{T}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}} = \frac{T}{1} = T, \quad (2.4.7)$$

donde el valor del límite del denominador se debe a lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{Cr^{x-1}}\right)}{\log\left(\frac{1}{Cr^x}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{r^{1-x}}{C}\right)}{\log\left(\frac{r^{-x}}{C}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\log\left(\frac{r^{1-x}}{C}\right)\right]'}{\left[\log\left(\frac{r^{-x}}{C}\right)\right]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{C}{r^{1-x}} \left(-\frac{r^{1-x}}{C} \ln(r)\right)}{\frac{C}{r^{-x}} \left(-\frac{r^{-x}}{C} \ln(r)\right)} = 1. \end{aligned}$$

También

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\beta_{n-1}}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\beta_{n-1}}(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)}} = \frac{T}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)}} = \frac{T}{1} = T. \quad (2.4.8)$$

El límite del denominador en (2.4.8) es 1 debido a lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{Cr^x}\right)}{\log\left(\frac{1}{Cr^{x-1}}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{r^{-x}}{C}\right)}{\log\left(\frac{r^{1-x}}{C}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\log\left(\frac{r^{-x}}{C}\right)\right]'}{\left[\log\left(\frac{r^{1-x}}{C}\right)\right]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{C}{r^{-x}} \left(-\frac{r^{-x}}{C} \ln(r)\right)}{\frac{C}{r^{1-x}} \left(-\frac{r^{1-x}}{C} \ln(r)\right)} = 1. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por (2.4.7) y (2.4.8), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{n-1}})} - T \right| < \epsilon$$

y

$$\left| \frac{\log(N_{\beta_{n-1}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_n})} - T \right| < \epsilon.$$

Luego para cada $n \geq N$,

$$-\epsilon + T < \frac{\log(N_{\beta_{n-1}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_n})} \quad \text{y} \quad \frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{n-1}})} < \epsilon + T \quad (2.4.9)$$

Por (2.4.5), existe $0 < \delta^* < Cr$ tal que para cada $0 < \delta < \delta^*$, $N \leq f(\delta)$.

Sea $0 < \delta < \delta^*$. Luego $f(\delta) \geq N$. Así por (2.4.9) y (2.4.6),

$$-\epsilon + T < \frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)-1}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}})} \leq \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}})} < \epsilon + T$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log(\frac{1}{\delta})} - T \right| < \epsilon.$$

■

Corolario 2.4.5. Sean E un subconjunto de \mathbb{R}^n , $C > 0$ y $0 < \gamma < \min\{\frac{1}{C}, 1\}$. Defínase $\beta_n = C\gamma^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\frac{\log(N_{\beta_n}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_n})} \leq T_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = s$, entonces

$$\overline{\dim}_B(E) \leq s.$$

Demostración. Primero observemos que

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log(\frac{1}{\delta})} = \inf_{\eta > 0} \sup_{\delta \in (0, \eta)} \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Por (2.4.6) tenemos que

$$\frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}})} = \frac{\frac{\log(N_{\beta_{f(\delta)}}(E))}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}})}}{\frac{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}})}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}})}} \leq \frac{T_{\beta_{f(\delta)}}}{\frac{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}})}{\log(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}})}}$$

para cada $\delta \in (0, Cr)$. Ahora como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)} = \frac{s}{1} = s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}$$

tenemos que para $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$,

$$\frac{T_n}{\log\left(\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)} \leq \epsilon + s.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{\log\left(\frac{1}{\beta_n}\right)}$$

Por (2.4.5), existe $0 < \eta^* < Cr$ tal que para cada $0 < \delta < \eta^*$, $N \leq f(\delta)$.

Sea $0 < \delta < \eta^*$. Luego $f(\delta) \geq N$ y, por tanto,

$$\frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \frac{T_{\beta_{f(\delta)}}}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)-1}}\right)} \leq \epsilon + s.$$

$$\frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\beta_{f(\delta)}}\right)}$$

Así,

$$\sup_{\delta \in (0, \eta^*)} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \epsilon + s.$$

En consecuencia,

$$\overline{\dim}_B(E) = \inf_{\eta > 0} \sup_{\delta \in (0, \eta)} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \sup_{\delta \in (0, \eta^*)} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \epsilon + s.$$

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario tenemos que $\overline{\dim}_B(E) \leq s$. ■

En ocasiones, los fractales son sujetos a transformaciones previas al cálculo de su dimensión fractal; por ejemplo, el software BENOIT requiere de modificar las imágenes en blanco y negro, el programa FROG necesita convertir en un conjunto de píxeles cada figura antes de aplicar cualquier método. Sin embargo, las modificaciones, en general, no conservan la dimensión de la figura original, en otras palabras, esta puede alterarse bajo los tratamientos; el siguiente objetivo particular de esta tesis es establecer las condiciones sobre los cambios de tal forma que la preserven.

Definición 2.4.6. Sean $X = \mathbb{R}^n$ con la métrica habitual d , $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función.

- Se dice que f es *lipschitziana* si existe $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in E$.

- Se dice que f es una *transformación bilipschitz* si existen $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ tales que

$$k_1 \cdot d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq k_2 \cdot d(x, y), \quad (2.4.10)$$

para cualesquiera $x, y \in E$.

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ cumple la *condición de Hölder de exponente* α si existen constantes reales $c, \alpha > 0$, tales que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)^\alpha,$$

para cada $x, y \in E$. El número c se llama constante de Hölder.

Proposición 2.4.7. Sean $s \in [0, \infty)$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ cumple la condición de Hölder de exponente α entonces

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(E),$$

donde $c > 0$ es la constante de Hölder.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E . Por la condición de Hölder tenemos que

$$|f(E \cap U_n)| \leq c \cdot |E \cap U_n|^\alpha \leq c \cdot |U_n|^\alpha \leq c \cdot \delta^\alpha.$$

Por otro parte, sabemos que

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \iff E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap U_n) \implies f(E) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E \cap U_n).$$

De lo anterior tenemos que $\{f(E \cap U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un $c \cdot \delta^\alpha$ -recubrimiento de $f(E)$. Luego, elevando a $\frac{s}{\alpha}$ y sumando se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(E \cap U_n)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s.$$

Se sigue que

$$H_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(E \cap U_n)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s.$$

Dada la arbitrariedad del δ -recubrimiento $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$H_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H_\delta^s(E).$$

En el límite cuando δ tiende a 0 resulta que

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(E).$$

■

Proposición 2.4.8. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ cumple la condición de Hölder con exponente α , entonces

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E).$$

Demostración. En efecto, la Proposición 2.4.7 garantiza que

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(E), \text{ para cada } s \geq 0.$$

Si $\dim_H(E) = \infty$ entonces claramente se cumple la desigualdad deseada. Supongamos ahora que $\dim_H(E) < \infty$. Si tomamos un valor $s > \dim_H(E)$, entonces por la observación 2.3.14, se tiene que

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(E) = 0.$$

De aquí que $H^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) = 0$, por lo tanto,

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{s}{\alpha}, \quad (2.4.11)$$

para cada $s > \dim_H(E)$. Veamos que $\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$. Supongamos lo contrario, que $\frac{1}{\alpha} \dim_H(E) < \dim_H(f(E))$. Luego $\frac{\dim_H(f(E)) - \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)}{2} > 0$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \dim_H(E) &< \frac{1}{\alpha} \dim_H(E) + \frac{\dim_H(f(E)) - \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)}{2} \\ &= \frac{\dim_H(f(E)) + \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)}{2} \\ &= \frac{\frac{\alpha}{2} \dim_H(f(E)) + \frac{1}{2} \dim_H(E)}{\alpha}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\dim_H(E) < \frac{\alpha}{2} \dim_H(f(E)) + \frac{1}{2} \dim_H(E). \quad (2.4.12)$$

También se observa que

$$\begin{aligned} \frac{\dim_H(E)}{\alpha} &< \dim_H(f(E)) \\ \frac{\dim_H(E)}{2\alpha} &< \frac{\dim_H(f(E))}{2} \\ \frac{\dim_H(f(E))}{2} + \frac{\dim_H(E)}{2\alpha} &< \dim_H(f(E)) \\ \frac{\frac{\alpha}{2} \dim_H(f(E)) + \frac{1}{2} \dim_H(E)}{\alpha} &< \dim_H(f(E)). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Tomemos $s = \frac{\alpha}{2} \dim_H(f(E)) + \frac{1}{2} \dim_H(E)$. Por (2.4.12), se tiene que $s > \dim_H(E)$, así por 2.4.11,

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{s}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{2} \dim_H(f(E)) + \frac{1}{2} \dim_H(E)}{\alpha}.$$

Pero por (2.4.13), resulta que

$$\dim_H(f(E)) < \dim_H(f(E)),$$

lo cual es una contradicción. ■

Corolario 2.4.9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego las siguientes proposiciones se cumplen:

- I) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es lipschitziana, entonces $\dim_H(f(E)) \leq \dim_H(E)$.
- II) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación bilipschitz, entonces $\dim_H(f(E)) = \dim_H(E)$.

Demostración. I) Basta con tomar $\alpha = 1$ en la Proposición 2.4.8.

- II) La desigualdad $\dim_H(f(E)) \leq \dim_H(E)$ se obtiene por el apartado I). Mostremos ahora que $\dim_H(f(E)) \geq \dim_H(E)$. Nótese que f es inyectiva luego existe $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$. De la primera desigualdad en (2.4.10), tenemos que

$$k_1 d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) = k_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)),$$

es decir,

$$d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) \leq \frac{1}{k_1} d(f(x), f(y)).$$

Por lo tanto, f^{-1} es lipschitziana. Así utilizando I),

$$\dim_H(f^{-1}(f(E))) \leq \dim_H(f(E)).$$

Se concluye que $\dim_H(E) \leq \dim_H(f(E))$. Y con esto se obtiene que $\dim_H(f(E)) = \dim_H(E)$. ■

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de la dimensión de conteo de cajas, en particular, en el punto IV) se encuentran las condiciones bajo las cuales una transformación la preserva.

Proposición 2.4.10. Sean $E, E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. La dimensión de conteo de cajas, si existe, tiene las siguientes propiedades:

- I) Si $E_1 \subseteq E_2$ entonces $\dim_B(E_1) \leq \dim_B(E_2)$.
- II) La dimensión $\dim_B(E)$ es finitamente estable, es decir,

$$\dim_B(E_1 \cup E_2) = \max\{\dim_B(E_1), \dim_B(E_2)\}.$$

- III) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es lipschitziana, entonces $\dim_B(f(E)) \leq \dim_B(E)$.
- IV) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación bilipschitz, entonces $\dim_B(f(E)) = \dim_B(E)$.
- v) Si \bar{E} es la cerradura de E , entonces $\dim_B(\bar{E}) = \dim_B(E)$.

Demostración. I) Por la Proposición 2.4.2, $N_\delta(E_1) \leq N_\delta(E_2)$ y puesto que la función logaritmo es monótona creciente, se sigue que

$$\frac{\log(N_\delta(E_1))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \frac{\log(N_\delta(E_2))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}, \quad (2.4.14)$$

para δ suficientemente pequeño. Por tanto, en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se obtiene la monotonía de la dimensión de conteo de cajas.

- II) Sabemos que tanto E_1 como E_2 están contenidos en la unión de ambos. De aquí, basta con aplicar la monotonía de la dimensión de conteo de cajas (inciso I) para obtener

$$\max\{\dim_B(E_1), \dim_B(E_2)\} \leq \dim_B(E_1 \cup E_2).$$

Por otro lado, por la Proposición 2.4.2, tenemos que

$$N_\delta(E_1 \cup E_2) \leq N_\delta(E_1) + N_\delta(E_2) \leq 2 \max\{N_\delta(E_1), N_\delta(E_2)\}.$$

Al aplicar logaritmos a ambos lados en la desigualdad anterior se obtiene que

$$\frac{\log(N_\delta(E_1 \cup E_2))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} + \frac{\log(\max\{N_\delta(E_1), N_\delta(E_2)\})}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Debido a que el logaritmo de un máximo es igual al máximo de los logaritmos, en el límite, cuando $\delta \rightarrow 0$, de la desigualdad anterior; se obtiene que $\dim_B(E_1 \cup E_2) \leq \max\{\dim_B(E_1), \dim_B(E_2)\}$.

- III) Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E tal que $n(\mathcal{U}) = N_\delta(E)$. Por tanto, $f(E) \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} f(U_i)$. Como f es lipschitziana, $|f(U_i)| \leq c\delta$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así $f(\mathcal{U}) := \{f(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un $c\delta$ -recubrimiento de E . Por otro lado, observe que $n(f(\mathcal{U})) = n(\mathcal{U})$. Luego,

$$N_{c\delta}(f(E)) \leq n(f(\mathcal{U})) = n(\mathcal{U}) = N_\delta(E).$$

De modo que

$$\frac{\log(N_{c\delta}(f(E)))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \dim_B(f(E)) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{c\delta}(f(E)))}{\log\left(\frac{1}{c\delta}\right)} \\
 &= \frac{\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{c\delta}(f(E)))}{\log\left(\frac{1}{c\delta}\right)}}{\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{1}{c\delta}\right)}} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{c\delta}(f(E)))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \\
 &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \dim_B(E).
 \end{aligned}$$

- IV) Una desigualdad la garantiza el apartado precedente. La otra se deriva de un razonamiento análogo al del apartado II) del Corolario 2.4.9.
- V) Dado un conjunto E , es claro que, por la monotonía de la dimensión de conteo de cajas, $\dim_B(E) \leq \dim_B(\overline{E})$. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E tal que $n(\mathcal{U}) = N_{\delta}(E)$. Si $N_{\delta}(E) = \infty$ entonces claramente se tiene que $N_{\delta}(\overline{E}) \leq N_{\delta}(E)$. Supongamos ahora que $N_{\delta}(E) < \infty$. Pongamos $\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{U}_i : i \in \mathbb{N}\}$ luego $n(\mathcal{U}) = n(\overline{\mathcal{U}})$ y dado que $E \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ se sigue que

$$\overline{E} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U}_i.$$

La igualdad anterior se debe a que $n(\mathcal{U}) < \infty$, es decir, se está uniendo una cantidad finita de conjuntos no vacíos. Por otro lado,

$$|\overline{U}_i| = |U_i| \leq \delta$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Así $\overline{\mathcal{U}}$ es un δ -recubrimiento de \overline{E} , de modo que, $N_{\delta}(\overline{E}) \leq n(\overline{\mathcal{U}}) = n(\mathcal{U}) = N_{\delta}(E)$. En consecuencia,

$$\dim_B(\overline{E}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\delta}(\overline{E}))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\delta}(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \dim_B(E).$$

■

Proposición 2.4.11. Para cualquier subconjunto E de \mathbb{R}^n ,

$$\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E).$$

Demostración. Observemos primero que para cada $\delta > 0$ con $N_\delta(E) < \infty$ se tiene que

$$H_\delta^s(E) \leq \delta^s N_\delta(E) \quad (2.4.15)$$

para toda $s > 0$. En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ un δ -recubrimiento de E tal que $n(\mathcal{U}) = N_\delta(E)$ y sean $i_1, i_2, \dots, i_{n(\mathcal{U})} \in \mathbb{N}$ tales que $U_{i_k} \neq \emptyset$ para toda $k = 1, \dots, n(\mathcal{U})$. Luego

$$H_\delta^s(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s = \sum_{k=1}^{n(\mathcal{U})} |U_{i_k}|^s \leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{U})} \delta^s = \delta^s N_\delta(E).$$

Por lo tanto, $H_\delta^s(E) \leq \delta^s N_\delta(E)$.

Es claro que si $\underline{\dim}_B(E) = \infty$ entonces la conclusión del teorema se cumple. Supongamos ahora que $\underline{\dim}_B(E) < \infty$. Mostremos que para cada $s > \underline{\dim}_B(E)$, $H^s(E) = 0$. Sea $s > \underline{\dim}_B(E)$, luego $s - \underline{\dim}_B(E) > 0$ y, por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < s - \underline{\dim}_B(E)$, así $s - (\epsilon + \underline{\dim}_B(E)) > 0$. Por otro lado, note que

$$\underline{\dim}_B(E) = \sup_{\gamma > 0} \inf_{\delta \in (0, \gamma)} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{\delta \in (0, \frac{1}{n})} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} < \underline{\dim}_B(E) + \epsilon.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que

$$\frac{\log(N_{\delta_n}(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta_n}\right)} < \underline{\dim}_B(E) + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log(N_{\delta_n}(E)) &< (\underline{\dim}_B(E) + \epsilon) \log\left(\frac{1}{\delta_n}\right) \\ &= \log\left(\delta_n^{-(\underline{\dim}_B(E) + \epsilon)}\right), \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$; de modo que

$$N_{\delta_n}(E) < \delta_n^{-(\underline{\dim}_B(E) + \epsilon)},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. De (2.4.15) se tiene que

$$H_{\delta_n}^s(E) \leq \delta_n^s N_{\delta_n}(E) \leq \delta_n^s \delta_n^{-(\underline{\dim}_B(E) + \epsilon)} = \delta_n^{s - (\underline{\dim}_B(E) + \epsilon)}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. En el límite cuando $\delta_n \rightarrow 0$, se tiene que $H^s(E) = 0$. Por lo tanto, para cada $s > \underline{\dim}_B(E)$, $H^s(E) = 0$.

Si $\underline{\dim}_B(E) < \dim_H(E)$ entonces existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{\dim}_B(E) < s < \dim_H(E)$. Por lo tanto, $H^s(E) = 0$, pero por la observación 2.3.14 (II), $H^s(E) = \infty$, así tenemos una contradicción. En consecuencia,

$$\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E).$$

■

Al calcular la dimensión de Hausdorff, se asignan diferentes tamaños $|U_n|^s$ a los conjuntos que cubren, mientras que en la de conteo de cajas se utiliza la misma longitud delta para realizar los cubrimientos. Es decir, el segundo método es más eficiente debido a que un conjunto lo podemos recubrir por grupos del mismo tamaño; en cambio, en el primero también se hacen recubrimientos pequeños, pero, quizás, de distintas magnitudes.

Para establecer el siguiente resultado se debe tener en cuenta los siguientes conceptos. Sea μ una medida exterior sobre \mathbb{R}^n . El soporte de μ se define como

$$\text{spt}(\mu) = \cap F,$$

donde la intersección es sobre todos los conjuntos $F \subseteq \mathbb{R}^n$, tales que F es cerrado y $\mu(\mathbb{R}^n \setminus F) = 0$. Una *distribución de masa* es una medida exterior μ sobre \mathbb{R}^n tal que $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ y $\text{spt}(\mu) \subseteq E$ para algún subconjunto acotado E de \mathbb{R}^n . Usualmente se dice que μ es una distribución de masa sobre E . En esta situación se tiene que $0 < \mu(E) < \infty$, pues si $\mu(E) = 0$ entonces $\mu(F) = 0$, donde $F = \text{spt}(\mu)$. Así $\mu(\mathbb{R}^n) = \mu((\mathbb{R}^n \setminus F) \cup F) \leq \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) + \mu(F) = 0$, lo cual es una contradicción.

Teorema 2.4.12. Sea μ una distribución de masa sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si para algún $s \in [0, \infty)$ existen números $c > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

para todo conjunto U con $|U| \leq \epsilon$, entonces

$$H^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0$$

y

$$s \leq \dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(E).$$

Demostración. Dada una distribución de masa μ , al ser una medida, se tiene que

$$\mu(E) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

para todo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de E . En particular, se cumple para el ínfimo, es decir, $0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq H_\delta^s(E)$. Así, en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$,

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq H^s(E).$$

Observe que si $s > \dim_H(E)$ entonces por la observación 2.3.14, $H^s(E) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $s \leq \dim_H(E)$. Ahora, por la Proposición 2.4.11, $s \leq \dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(E)$. ■

2.5. Teorema de Moran

Hasta el momento se han mostrado tres tipos de dimensión: fractal, de conteo de cajas y de Hausdorff. También, se ha establecido que la primera y la segunda coinciden (Teorema 2.4.4), solo resta demostrar la analogía entre estas y la tercera y, con ello, se tendrá un método para hallar la dimensión fractal con la potencia teórica de la dimensión de Hausdorff. El teorema de Moran brinda las condiciones para garantizar la equivalencia y, por tal razón, esta sección está dedicada a exhibir este resultado.

Lema 2.5.1. Sean $\alpha, \beta > 0$. Si $r > 0$ y $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos ajenos de \mathbb{R}^n de modo que cada V_i contiene una bola de radio αr y está contenida en otra bola de radio βr , entonces toda bola B de radio r interseca a lo más a $2^n(1 + 2\beta)^n \alpha^{-n}$ clausuras \overline{V}_i de V_i .

Demostración. Pongamos $B = B(x, r)$. En el caso en que B no interseca a ningún conjunto \overline{V}_i , el resultado es evidente. Supongamos que existe algún $j \in \mathbb{N}$ para el cual $B \cap \overline{V}_j \neq \emptyset$. Mostremos que $\overline{V}_j \subseteq B[x, (1 + 2\beta)r]$. Puesto que $B \cap \overline{V}_j \neq \emptyset$, existe $z \in B \cap \overline{V}_j$. Por otra parte, por hipótesis, existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $V_j \subseteq B(w, \beta r)$. Luego, si $v \in \overline{V}_j$ entonces

$$d(v, x) \leq d(v, w) + d(z, w) + d(z, x) \leq \beta r + \beta r + r,$$

es decir, $v \in B[x, (1 + 2\beta)r]$. Por tanto, la inclusión $\overline{V}_j \subseteq B[x, (1 + 2\beta)r]$ se cumple. Ahora bien, supongamos que existen $i_1, i_2, \dots, i_p \in \mathbb{N}$ tales que $B \cap \overline{V}_{i_k} \neq \emptyset$ para toda $k = 1, \dots, p$. Luego por lo anterior

$$\overline{V}_{i_k} \subseteq B[x, (1 + 2\beta)r]$$

para toda $k = 1, \dots, p$. Por hipótesis, los conjuntos $\{V_{i_k}\}_{k=1}^p$ son ajenos y cada V_{i_k} contiene una bola B_k de radio αr . Considerando los volúmenes $V(B_k)$ de B_k y $V(B[x, (1 + 2\beta)r])$ de $B[x, (1 + 2\beta)r]$, obtenemos que

$$p(\alpha r)^n \leq \sum_{k=1}^p V(B_k) \leq V(B[x, (1 + 2\beta)r]) \leq 2^n(1 + 2\beta)^n r^n.$$

Por tanto, $p \leq 2^n(1 + 2\beta)^n \alpha^{-n}$. ■

Recordemos que una característica de los fractales es que poseen autosimilitud, J. E. Hutchinson en [11] presentó esta propiedad con una teoría formal y fundamentada y los llamó *conjuntos autosimilares*; a continuación se presentarán algunos de los conceptos y resultados establecidos por él.

Definición 2.5.2. Autosimilitud. Un conjunto T es *auto-similar*, si es un subconjunto compacto no vacío de un espacio métrico completo X tal que $T = \cup_{i=1}^m f_i(T)$, donde f_1, \dots, f_m son similaridades en X .

La Definición 2.5.2 anterior sugiere que cada vez que se acerque el conjunto T , por medio de una similaridad, se observa una copia idéntica a T , parte esencial en el comportamiento de los fractales.

El siguiente teorema es un resultado conocido. Una demostración puede consultarse en [9].

Teorema 2.5.3. Teorema de encaje de Cantor. Si $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección numerable de conjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n tales que

- I) $Q_{i+1} \subseteq Q_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
- II) cada uno de los conjuntos Q_i es cerrado y Q_1 está acotado;

entonces la intersección $\cap_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ es cerrada y no vacía.

Definición 2.5.4. Una familia finita de contracciones $\{f_1, \dots, f_m\}$, donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m \geq 2$, se llama un *sistema iterado de funciones* (SIF).

Definición 2.5.5. Sea $\{f_1, \dots, f_m\}$ un sistema iterado de funciones. Un subconjunto compacto no vacío K de \mathbb{R}^n es un *atractor* para $\{f_1, \dots, f_m\}$, si

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K).$$

Teorema 2.5.6. Si $\{f_1, \dots, f_m\}$ es un sistema iterado de funciones entonces existe un único atractor $K \subseteq \mathbb{R}^n$ para $\{f_1, \dots, f_m\}$. Más aún, si se define la transformación $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ por medio de

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m f_i(E)$$

entonces

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$$

para todo $E \in \mathcal{S}$ con $f_i(E) \subseteq E$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Demostración. Por la Proposición 1.2.18, \mathcal{S} es completo con la métrica de Hausdorff h . Sean $c_1, \dots, c_m \in (0, 1)$ constantes de contracción de f_1, \dots, f_m . Para obtener la conclusión de este teorema usaremos el principio de Banach, Teorema 1.2.9. Mostremos que S es contractiva. Sean $A, B \in \mathcal{S}$. Luego por la Proposición 1.2.14,

$$h(S(A), S(B)) = h\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A), \bigcup_{i=1}^m f_i(B)\right) \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} h(f_i(A), f_i(B)). \quad (2.5.1)$$

Tomemos $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} h(f_i(A), f_i(B)) = h(f_j(A), f_j(B))$. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $h(A, B) < h(A, B) + \epsilon$ se tiene que existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < h(A, B) + \epsilon$ y

$$A \subseteq (B)_\gamma \quad \text{y} \quad B \subseteq (A)_\gamma. \quad (2.5.2)$$

Observe que

$$d(f_j(a), f_j(B)) \leq d(f_j(a), f_j(b)) \leq c_j d(a, b) \leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i\right) d(a, b)$$

para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Por tanto,

$$d(f_j(a), f_j(B)) \leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i\right) d(a, B)$$

para cualquier $a \in A$. Por (2.5.2) se tiene que

$$d(f_j(a), f_j(B)) \leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i\right) \gamma$$

para cualquier $a \in A$. Esto implica que

$$f_j(A) \subseteq (f_j(B))_{\gamma \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i}.$$

De igual forma se muestra que

$$f_j(B) \subseteq (f_j(A))_{\gamma \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i}.$$

Así

$$h(f_j(A), f_j(B)) \leq \gamma \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i,$$

luego

$$h(f_j(A), f_j(B)) < (h(A, B) + \epsilon) \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i.$$

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario obtenemos que

$$h(f_j(A), f_j(B)) < h(A, B) \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i.$$

Finalmente, por (2.5.1),

$$h(S(A), S(B)) < h(A, B) \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i,$$

lo cual implica que S es una contracción. Luego por el Teorema 1.2.9, S tiene un único punto fijo K y

$$S^n(E) \rightarrow K \quad (2.5.3)$$

para cualquier $E \in \mathcal{S}$. Dado que $K \in \mathcal{S}$, se tiene que K es un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^n , más aún, como $S(K) = K$, se observa que

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K).$$

Por lo tanto, K es el único atractor para $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f_i(E) \subseteq E$ para toda $i = 1, \dots, m$. Luego $S(E) \subseteq E$ de modo que $S^2(E) \subseteq S(E) \subseteq E$ y así sucesivamente $S^n(E) \subseteq S^{n-1}(E)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.2.17, tomando $A_n = S^{n-1}(E)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $A_n \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, es decir, $S^n(E) \rightarrow \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$. En consecuencia por (2.5.3),

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

■

Definición 2.5.7. Condición del conjunto abierto de Moran. Un conjunto finito de funciones $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen la *condición del conjunto abierto de Moran*, si existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y acotado tal que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(U) \subseteq U$$

y para cualesquiera $i \neq j$, $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$.

Definición 2.5.8. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que f es una *similaridad*, si existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) = c \cdot d(x, y), \text{ para todo } x, y \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Al valor c se le conoce como *factor de contracción de f* .

Una interpretación de la Definición 2.5.8 anterior, en nuestro contexto, es que al aplicar la función f al conjunto de puntos en \mathbb{R}^n , todos son afectados de la misma forma, esto es, la distancia entre ellos es proporcional a la original. Un acercamiento (o alejamiento) del fractal cumple con estas condiciones.

El siguiente teorema es el principal resultado de esta investigación, establece la equivalencia entre las dimensiones fractal, de Hausdorff y de conteo de cajas.

Teorema 2.5.9. De Moran. Sean $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ similaridades (con factores de contracción c_1, \dots, c_m) tales que satisfacen la condición del conjunto abierto de Moran. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un atractor para $\{f_1, \dots, f_m\}$ entonces

$$\dim_H(K) = \dim_B(K) = s,$$

donde s es tal que $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$. Además, $0 < H^s(K) < \infty$.

Demostración. Consideremos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(s) = \sum_{i=1}^m c_i^s$. Esta función es estrictamente decreciente, pues para cada $i = 1, \dots, m$, $0 < c_i < 1$, más aún, como $h(0) = m$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} h(s) = 0$, se sigue que existe un único $0 < s < \infty$ tal que

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Por el Teorema 2.5.6 existe un único $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que es atractor para $\{f_1, \dots, f_m\}$. Es decir, K es un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^n tal que

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K). \quad (2.5.4)$$

Dado que f_1, \dots, f_m satisfacen la condición del conjunto abierto de Moran, existe $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío y acotado tal que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(V) \subseteq V \quad (2.5.5)$$

y para cualesquiera $i \neq j$,

$$f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset. \quad (2.5.6)$$

Por la continuidad de cada f_i y por la inclusión (2.5.5),

$$f_i(\overline{V}) \subseteq \overline{f_i(V)} \subseteq \overline{V}, \quad (2.5.7)$$

para toda $i = 1, \dots, m$.

Pongamos $J = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \{1, \dots, m\}^k$. Para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$, $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$ y $B \in \{K, V, \overline{V}\}$ definamos

$$B_{i_1, \dots, i_k} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(B).$$

Claramente cualesquiera K_{i_1, \dots, i_k} , $\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}$ son subconjuntos compactos no vacíos y, por la Proposición 1.2.8, cada V_{i_1, \dots, i_k} es un conjunto abierto no vacío. Consideremos el operador $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definido en el Teorema 2.5.6, es decir, el operador dado por

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m f_i(E).$$

Por (2.5.7) y el Teorema 2.5.6 obtenemos que

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(\bar{V}).$$

Luego $K \subseteq S^0(\bar{V}) = \bar{V}$, de modo que

$$K_{i_1, \dots, i_k} \subseteq \bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \quad (2.5.8)$$

para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ e $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$. Por otro lado, por la igualdad (2.5.4), $f_{i_1}(K), \dots, f_{i_k}(K) \subseteq K$, para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ e $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$. Por lo tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_k) \in J_k, \quad K_{i_1, \dots, i_k} \subseteq K. \quad (2.5.9)$$

Además,

$$\forall (i_1, i_2, \dots) \in J, \forall k \in \mathbb{N}, \quad K_{i_1, i_2, \dots, i_k} \supseteq K_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}.$$

Por el Teorema 2.5.3, para cada $(i_1, i_2, \dots) \in J$,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_{i_1, i_2, \dots, i_k} \neq \emptyset.$$

Consideremos

$$c_{\max} = \text{máx}\{c_i : i = 1, \dots, m\} \quad (2.5.10)$$

luego $0 < c_{\max} < 1$ por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{\max}^k = 0$. Así

$$\forall (i_1, i_2, \dots) \in J, \quad |K_{i_1, \dots, i_k}| = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})|K| \leq c_{\max}^k |K| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (2.5.11)$$

es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} |K_{i_1, \dots, i_k}| = 0$ independientemente de la sucesión de puntos (i_1, i_2, \dots) . Esto hace que la intersección $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ esté formada por un único punto. Para cada $(i_1, i_2, \dots) \in J$, sea $x_{i_1, i_2, \dots} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\{x_{i_1, i_2, \dots}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_{i_1, i_2, \dots, i_k}. \quad (2.5.12)$$

A continuación mostremos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad K = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in J_k} K_{i_1, \dots, i_k}. \quad (2.5.13)$$

Por la inclusión (2.5.9), $K_{i_1, \dots, i_k} \subseteq K$, para cualquier $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$, lo cual implica que $\bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in J_k} K_{i_1, \dots, i_k} \subseteq K$. Para la inclusión contraria, sea $x \in K$, luego por la igualdad (2.5.4), existe $i_1 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in f_{i_1}(K)$, así $x = f_{i_1}(x_{i_1})$ para algún $x_{i_1} \in K$. Nuevamente por la igualdad (2.5.4), existe $i_2 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x_{i_1} \in f_{i_2}(K)$. Así $x_{i_1} = f_{i_2}(x_{i_2})$ para algún $x_{i_2} \in K$. Continuando con este proceso obtenemos $i_1, i_2, \dots, i_k \in$

$\{1, \dots, m\}$ y puntos $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in K$ tales que $x_{i_k} = f_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}})$ para toda $k = 1, \dots, k-1$. Esto implica que

$$\begin{aligned} x &= f_{i_1}(x_{i_1}) \\ &= f_{i_1}(f_{i_2}(x_{i_2})) \\ &= f_{i_1}(f_{i_2}(f_{i_3}(x_{i_3}))) \\ &\vdots \\ &= f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_{i_k}) \in K_{i_1, \dots, i_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $K \subseteq \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in J_k} K_{i_1, \dots, i_k}$.

Ahora construiremos una medida exterior sobre J . Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cada $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$, pongamos

$$I^{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, i_2, \dots, i_k, t_{k+1}, \dots) : t_l \in \{1, \dots, m\} \text{ para toda } l \geq k+1\}.$$

Definamos

$$\mathcal{G} = \{\emptyset\} \cup \{I^{i_1, \dots, i_k} : k \in \mathbb{N}, (i_1, \dots, i_k) \in J_k\}$$

y $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ por medio de la regla

$$\lambda(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E = \emptyset; \\ (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s, & \text{si } E = I^{i_1, \dots, i_k}. \end{cases}$$

Por la Proposición 1.1.3, la función $\mu^* : 2^J \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mu^*(W) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n) : \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una } \mathcal{G} \text{ - cubierta de } W \right\}$$

es una medida exterior sobre J . Más aún, dado que

$$(c_{i_1} \cdots c_{i_p})^s = \sum_{j=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_p} c_j)^s, \quad (2.5.14)$$

es decir, $\lambda(I^{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{j=1}^m \lambda(I^{i_1, \dots, i_p, j})$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$ e $(i_1, \dots, i_p) \in J_p$, se tiene que

$$\lambda(I^{i_1, \dots, i_k}) = \mu^*(I^{i_1, \dots, i_k})$$

para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ e $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$.

La medida exterior μ^* nos permite construir una medida exterior sobre \mathbb{R}^n . Veamos cómo hacer esto. Para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se define

$$W_A = \{(i_1, i_2, \dots) \in J : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}.$$

Luego la función $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mu(A) = \mu^*(W_A)$$

es una medida exterior. En efecto:

- 1) $\mu(\emptyset) = \mu^*(W_\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.
- 2) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A \subseteq B$. Si $(i_1, i_2, \dots) \in W_A$ entonces $x_{i_1, i_2, \dots} \in A \subseteq B$ por lo que $x_{i_1, i_2, \dots} \in B$, así $(i_1, i_2, \dots) \in W_B$. Luego $W_A \subseteq W_B$. Por lo tanto, $\mu(A) = \mu^*(W_A) \leq \mu^*(W_B) = \mu(B)$.
- 3) Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Si $(i_1, i_2, \dots) \in W_{\cup A_n}$ entonces $x_{i_1, i_2, \dots} \in \cup A_n$ por lo que $x_{i_1, i_2, \dots} \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así $(i_1, i_2, \dots) \in W_{A_n}$. Luego $W_{\cup A_n} \subseteq \cup W_{A_n}$. En consecuencia, $\mu(\cup A_n) = \mu^*(W_{\cup A_n}) \leq \mu^*(\cup W_{A_n}) \leq \sum \mu^*(W_{A_n}) = \sum \mu(A_n)$.

Mostremos que μ es una distribución de masa sobre K . Si $W_{\mathbb{R}^n \setminus K} \neq \emptyset$ entonces existe $(i_1, i_2, \dots) \in J$ tal que $x_{i_1, i_2, \dots} \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Por (2.5.12), $x_{i_1, i_2, \dots} \in K_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Luego por (2.5.9), $x_{i_1, i_2, \dots} \in K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $W_{\mathbb{R}^n \setminus K} = \emptyset$. Así $\mu(\mathbb{R}^n \setminus K) = \mu^*(W_{\mathbb{R}^n \setminus K}) = \mu^*(\emptyset) = 0$. Esto implica que $\text{spt}(\mu) \subseteq K$, es decir, el soporte de μ está contenido en un conjunto acotado. Por otro lado, es claro que $J = \cup_{j=1}^m I^j$, luego $\mu(\mathbb{R}^n) = \mu^*(J) = \mu^*(\cup_{j=1}^m I^j) \leq \sum_{j=1}^m \mu^*(I^j) = \sum_{j=1}^m \lambda(I^j) = \sum_{j=1}^m c_j^s = 1 < \infty$. Más aún, $0 < c_j^s = \lambda(I_j) = \mu^*(I_j) \leq \mu^*(J) = \mu(\mathbb{R}^n)$. Por tanto tenemos que $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Ahora consideremos B una bola arbitraria de radio $r < 1$. Para cada $\mathbf{v} = (i_1, i_2, \dots) \in J$, sea

$$k_{\mathbf{v}} = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r\}. \quad (2.5.15)$$

Definamos

$$\mathcal{Q}_r = \{(i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}}}) : \mathbf{v} = (i_1, i_2, \dots) \in J\} \quad (2.5.16)$$

y

$$\mathcal{Q}_{r1} = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r : B \cap \bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \neq \emptyset\}.$$

Luego la familia

$$\mathcal{V}_r = \{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r\}$$

tiene elementos ajenos entre sí y

$$\mathcal{W}_r = \{\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r\}$$

es una cubierta de K . En efecto, sean $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_{k^*}) \in \mathcal{Q}_r$ tales que $V_{i_1, \dots, i_k} \cap V_{j_1, \dots, j_{k^*}} \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $k \leq k^*$. Tomemos $y \in V_{i_1, \dots, i_k} \cap V_{j_1, \dots, j_{k^*}}$ luego existen $z, x \in V$ tales que $(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k})(x) = y = (f_{j_1} \circ \dots \circ f_{j_{k^*}})(z)$, esto implica que $f_{i_1}((f_{i_2} \dots f_{i_k})(x)) = y = f_{j_1}((f_{j_2} \dots f_{j_{k^*}})(z))$, de modo que $y \in f_{i_1}(V) \cap f_{j_1}(V)$. Luego por (2.5.6), $i_1 = j_1$, así $f_{i_1}((f_{i_2} \dots f_{i_k})(x)) = f_{i_1}((f_{j_2} \dots f_{j_{k^*}})(z))$. Por lo tanto, por la inyectividad de f_{i_1} , se obtiene que $(f_{i_2} \dots f_{i_k})(x) = (f_{j_2} \dots f_{j_{k^*}})(z)$. Repetimos este

proceso para obtener $i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k$. Esto implica que $c_{j_1}c_{j_2}\dots c_{j_k} = c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k} \leq r$ y, por tanto, $k^* \leq k$. Así $k = k^*$, de modo que $V_{i_1, \dots, i_k} = V_{j_1, \dots, j_{k^*}}$. Por tanto, los elementos de la familia \mathcal{V}_r son ajenos entre sí. Ahora mostremos que \mathcal{W}_r es una cubierta de K . Sea $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$c_l = c_{\max}.$$

Tomemos

$$\mathbf{v}^* = (l, l, \dots) \in J. \quad (2.5.17)$$

Por (2.5.13),

$$K = \bigcup_{(i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}) \in J_{k_{\mathbf{v}^*}}} K_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}}.$$

Sea $x \in K$, por la igualdad anterior, existe $(i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}) \in J_{k_{\mathbf{v}^*}}$ tal que $x \in K_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}}$. Pongamos $z = (i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}, l, \dots)$ luego $z \in J$. Dado que $c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_{k_{\mathbf{v}^*}}} \leq \underbrace{c_l \cdots c_l}_{k_{\mathbf{v}^*} \text{ veces}} \leq r$ se tiene que $k_{\mathbf{z}} \leq k_{\mathbf{v}^*}$, así $K_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{v}^*}}} \subseteq K_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{z}}}}$ y, por tanto, $x \in K_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{z}}}}$. Luego por (2.5.8), $x \in \bar{V}_{i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{z}}}}$. Note que $(i_1, \dots, i_{k_{\mathbf{z}}}) \in \mathcal{Q}_r$, en consecuencia \mathcal{W}_r es una cubierta de K .

Observe que la familia \mathcal{Q}_r es finita, pues si $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r$ entonces $k \leq k_{\mathbf{v}^*}$, donde \mathbf{v}^* es como en (2.5.17), ya que de lo contrario, $k_{\mathbf{v}^*} < k$ y por tanto $c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_{k_{\mathbf{v}^*}}} \leq \underbrace{c_l \cdots c_l}_{k_{\mathbf{v}^*} \text{ veces}} \leq r$,

así $k \leq k_{\mathbf{v}^*}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\mathcal{Q}_r \subseteq \bigcup_{q=1}^{k_{\mathbf{v}^*}} \{1, \dots, m\}^q.$$

Esto hace que \mathcal{Q}_r sea finito, y así también \mathcal{Q}_{r1} . Mostremos ahora que existe $u > 0$ que no depende de r tal que $\text{Card}(\mathcal{Q}_{r1}) \leq u$.

Tomemos $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que V contiene una bola de radio α y está contenido en una bola de radio β . Sea $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r$, por la Proposición 1.2.8, se tiene que V_{i_1, \dots, i_k} contiene una bola de radio $c_{i_1}\dots c_{i_k}\alpha$. Ahora puesto que

$$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_{k-1}} > r,$$

vemos que

$$(c_{i_1}, c_{i_2}\dots c_{i_{k-1}})c_{i_k} > rc_{i_k} > rc_{\min}, \quad (2.5.18)$$

donde

$$c_{\min} = \min\{c_i : i = 1, \dots, m\}. \quad (2.5.19)$$

Por lo tanto, V_{i_1, \dots, i_k} contiene una bola de radio rc_{\min} . Usando nuevamente la Proposición 1.2.8, vemos que V_{i_1, \dots, i_k} está contenido en una bola de radio $c_{i_1}\dots c_{i_k}\beta$, pero por (2.5.15), $c_{i_1}\dots c_{i_k} \leq r$, así V_{i_1, \dots, i_k} está contenido en una bola de radio βr . En consecuencia,

$$\mathcal{V}_r = \{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r\}$$

es una familia de abiertos de \mathbb{R}^n ajenos entre sí de modo que cada V_{i_1, \dots, i_k} contiene una bola de radio αc_{\min} y está contenido en una bola de radio βr . Luego por el Lema 2.5.1, B corta a lo más $u = 2^n(1 + 2\beta)^n(\alpha c_{\min})^{-1}$ clausuras de elementos de \mathcal{V}_r . Dado que $\overline{V_{i_1, \dots, i_{k_v}}} = \overline{V_{i_1, \dots, i_{k_v}}}$ para cada $(i_1, \dots, i_{k_v}) \in \mathcal{Q}_r$, se sigue que la familia \mathcal{Q}_{r^1} tiene a lo más u elementos.

A continuación verificaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.12. Para esto mostremos que para toda bola B de radio $0 < r < 1$, $\mu(B) \leq r^s u$. Sea B una bola de radio $0 < r < 1$. Si $B \cap K = \emptyset$ entonces dado que $\text{spt}(\mu) \subseteq K$ se tiene que $\mu(B) = 0 \leq r^s u$. Supongamos ahora que $K \cap B \neq \emptyset$. Observe que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu((B \setminus K) \cup (B \cap K)) \\ &\leq \mu(B \setminus K) + \mu(B \cap K) \\ &\leq \mu(\mathbb{R}^n \setminus K) + \mu(B \cap K) \\ &= 0 + \mu(B \cap K) = \mu^*(W_{B \cap K}). \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{z} = (j_1, j_2, \dots) \in W_{K \cap B}$ luego $x_{j_1, j_2, \dots} \in K \cap B$. Por otra parte, por (2.5.12), $x_{j_1, j_2, \dots} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_{j_1, j_2, \dots, j_k}$, de modo que, $x_{j_1, j_2, \dots} \in K_{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}}$, pero por (2.5.8), $K_{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}} \subseteq \overline{V_{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}}}$. Así $x_{j_1, j_2, \dots} \in \overline{V_{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}}} \cap B$. Luego $\overline{V_{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}}} \cap B \neq \emptyset$, de modo que $(j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}) \in \mathcal{Q}_{r^1}$. Note que $\mathbf{z} = (j_1, j_2, \dots) \in I^{j_1, \dots, j_{k_{\mathbf{z}}}}$. En consecuencia,

$$W_{K \cap B} \subseteq \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} I^{i_1, \dots, i_k}.$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} \mu^*(W_{B \cap K}) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} I^{i_1, \dots, i_k} \right) \leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} \mu^*(I^{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} \lambda(I^{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} c_{i_1}^s \cdots c_{i_k}^s \leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_{r^1}} r^s \leq r^s u, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se debe a (2.5.15). Así

$$\mu(B) \leq r^s u \tag{2.5.20}$$

para toda bola B de radio $r < 1$. Aquí el número u es independiente de la bola B . Tomemos un subconjunto arbitrario U de \mathbb{R}^n tal que $|U| < 1$. Es claro que U está contenido en una bola B_U de radio $r = |U|$, por tanto por (2.5.20),

$$\mu(U) \leq \mu(B_U) \leq |U|^s u,$$

es decir, $\mu(U) \leq |U|^s u$ para todo conjunto U con $|U| < 1$. Luego por el Teorema 2.4.12,

$$H^s(K) > 0 \tag{2.5.21}$$

y

$$s \leq \dim_H(K) \leq \underline{\dim}_B(K) \leq \overline{\dim}_B(E). \quad (2.5.22)$$

De acuerdo a la desigualdad (2.5.22) solo necesitamos mostrar que $\overline{\dim}_B(E) \leq s$ para obtener que $\dim_H(K) = \dim_B(K) = s$. Para esto usaremos el Corolario 2.4.5. Pongamos $C = |\overline{V}|$ y tomemos $0 < \gamma < \min\{\frac{1}{C}, 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\beta_n = C\gamma^n$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y pongamos $r = \gamma^n$. Para este número r , consideremos para cada $\mathbf{v} \in J$, $k_{\mathbf{v}}$ como en (2.5.15), y \mathcal{Q}_r como en (2.5.16). Luego

$$\mathcal{W}_r = \{\overline{V}_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r\}$$

es un rC - recubrimiento de K , pues $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r |\overline{V}| = rC$ para cada $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r$. En consecuencia, tenemos que

$$N_{rC}(K) \leq n(\mathcal{W}_r) = \text{Card}(\mathcal{Q}_r). \quad (2.5.23)$$

Dado que el conjunto \mathcal{Q}_r es finito, se tiene por (2.5.14), que

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = 1.$$

Así, por (2.5.18),

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_r} r^s c_{\min}^s \leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = 1,$$

lo cual implica que $\text{Card}(\mathcal{Q}_r) \leq r^{-s} c_{\min}^{-s}$.

Por lo tanto, hemos mostrado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $N_{\beta_n}(K) \leq \gamma^{-ns} c_{\min}^{-s}$. En consecuencia,

$$\frac{\log(N_{\beta_n}(K))}{\log(\frac{1}{\beta_n})} \leq \frac{\log(\gamma^{-ns} c_{\min}^{-s})}{-\log(\gamma^n |\overline{V}|)}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\gamma^{-ns} c_{\min}^{-s})}{-\log(\gamma^n |\overline{V}|)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\gamma^{-ns}) + \log(c_{\min}^{-s})}{-[\log(\gamma^n) + \log(|\overline{V}|)]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-ns \log(\gamma) - s \log(c_{\min})}{-[n \log(\gamma) + \log(|\overline{V}|)]} \\ &= s \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(\gamma) + \log(c_{\min})}{n \log(\gamma) + \log(|\overline{V}|)} \\ &= s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Corolario 2.4.5,

$$\overline{\dim}_B(K) \leq s.$$

Finalmente, mostraremos que la medida de Hausdorff de K es finita. Sea $\delta > 0$, por el límite 2.5.11, existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $c^{k^*} |K| < \delta$. Luego

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}, \quad |K_{i_1, \dots, i_{k^*}}| = (c_{i_1} \cdots c_{i_{k^*}}) |K| \leq c^{k^*} |K| < \delta.$$

Por tanto, por (2.5.13),

$$\{K_{i_1, \dots, i_{k^*}} : (i_1, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}\}$$

es un δ -recubrimiento de K , con lo que

$$H_\delta^s(K) \leq \sum_{(i_1, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}} |K_{i_1, \dots, i_{k^*}}|^s.$$

Por otro lado, cada composición $f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_{k^*}}$ es una similaridad y tiene por factor de contracción al producto $c_{i_1} \cdots c_{i_{k^*}}$. Así

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}} |K_{i_1, \dots, i_{k^*}}|^s &= \sum_{(i_1, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}} (c_{i_1}^s \cdots c_{i_{k^*}}^s) |K|^s \\ &= \left(\sum_{i_1 \in \{1, \dots, m\}} c_{i_1}^s \right) \cdots \left(\sum_{i_{k^*} \in \{1, \dots, m\}} c_{i_{k^*}}^s \right) |K|^s \\ &= |K|^s, \end{aligned}$$

ya que $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$. Por lo tanto,

$$H_\delta^s(K) \leq \sum_{(i_1, \dots, i_{k^*}) \in J_{k^*}} |K_{i_1, \dots, i_{k^*}}| = |K|^s$$

y, en el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se concluye que $H^s(K) \leq |K|^s < \infty$. ■

El teorema de Moran le da la formalidad requerida al método de conteo de cajas, ya que establece que este es equivalente a la dimensión de Hausdorff. Al mismo tiempo, se demuestra que el proceso conduce a la obtención de la dimensión fractal.

Capítulo 3

Dimensión fractal en identificación biométrica del iris del ojo

En este capítulo, se mostrará una aplicación de la dimensión fractal en métodos de identificación de personas a través del iris del ojo. Como se mencionó en la introducción, uno de los objetivos es mostrar una clasificación mediante la dimensión en una primera etapa en el proceso de reconocimiento, lo que permitirá a los procedimientos usuales ajustarse para bases de datos relativamente grandes y garantizar su escalabilidad. En un primer paso, a manera de contexto, se introducirán los diversos tipos de detección biométrica, luego, se mostrarán en específico los algoritmos basados en la medición del disco del ojo, para finalmente, establecer una jerarquía generada por la combinación entre la dimensión fractal y el color del ojo.

3.1. Identificación biométrica

El término biométrico se deriva de dos palabras griegas antiguas: *Bios* que significa vida y *Metron*, medida. Este concepto se refiere a los métodos de identificación humana basados en uno o más caracteres fisiológicos o conductuales de un individuo. La biometría es la ciencia del reconocimiento de individuos a través de características innatas tales como huella dactilar, palma, rostro, firma, escritura a mano, iris, escaneo de retina, voz, entre otras. Los sistemas biométricos y los procesos de autenticación utilizan aspectos naturales en lugar de artificiales, por ejemplo, contraseñas, lo que genera una mayor seguridad. Estos rasgos pueden ser divididos en tres grupos:

Características físicas. Algunas de las características fisiológicas del cuerpo humano pueden usarse para identificar a alguien, como la huella dactilar o la geometría de la mano. La medición de órganos es uno de los métodos más antiguos de identificación

humana que se ha diversificado con el desarrollo de la tecnología. Los métodos de identificación a través de la cara, del iris o las venas de la retina son otras formas en este caso.

Características de comportamiento. Las técnicas conductuales miden la ejecución de un trabajo especial realizado por humanos como firmar o decir una frase. Los métodos de este grupo son la identificación a través de la firma, el ritmo de escritura, la voz, entre otros.

Características químicas. Estas técnicas miden una característica química del usuario. Algunos de estos métodos son la identificación mediante ADN, azúcar en la sangre, olor corporal, entre otros.

En el Cuadro 3.1.1 se realiza una comparación de todas las tecnologías biométricas basado en los criterios de simplicidad del mecanismo, precisión, integridad y costo ([12]); de ahí se observa que las funciones del iris y huellas dactilares resultan ser las apropiadas. Además, el ojo tiene muchas propiedades, por ejemplo, es el único órgano del cuerpo que es visible desde el exterior y que se encuentra protegido en un ambiente agradable; mas aún, este se forma en los primeros meses de la concepción y permanece inalterable hasta el final de la existencia, también, su estructura está llena de información fisiométrica, lo que significa que existen más de doscientos rasgos analizables dentro de él y que no se pueden duplicar como las impresiones dactilares. La captura de la imagen del iris se lleva a cabo sin contacto humano, lo cual es una ventaja en esta época en la que es vital evitar tocar superficies expuestas.

Características biométricas	Simplicidad del mecanismo	Precisión	Integridad	Costo
Huella dactilar	7	7	4	3
Firma	3	4	5	4
Geometría facial	9	4	7	5
Iris del ojo	8	9	8	8
Retina del ojo	6	8	5	7
Geometría de la mano	6	5	6	5
Geometría del dedo	7	3	7	4
Venas de las manos	6	6	6	5
Anatomía del oído	5	4	7	5
Voz	4	2	3	2
ADN	1	7	9	9
Olor	N. A.	2	7	N. A.
Golpe de tecla	4	1	2	1
Contraseña y Comparación	5	2	8	1

Cuadro 3.1.1: Comparación de los métodos de identificación humana.

3.2. Sistemas de identificación basados en el iris

En 1993, John Daugman presentó el primer sistema de identificación del iris a través de la *transformada de ondas de Gabor*, su idea se basó en transformar la imagen en un conjunto de 256 Bytes que se denomina *Código de Iris*; luego, comparó la discrepancia de los códigos, mediante la *distancia de Hamming*, y observó la similitud entre dos imágenes ([5], [6]). En 1996, Wildes sugirió el proceso de reconocimiento automático, el cual resultó ser un procedimiento de alta complejidad computacional ([31],[32]). Wageeh fue otro investigador en este contexto, el algoritmo que definió utiliza la transformación de ondículas en diferentes niveles ([3]). Zhu, Tan y Sánchez también presentaron otras técnicas ([17],[18] y [22]). La mayoría de los procesos de años anteriores se basaban en el análisis multiescala, esto es, métodos que consideren diversas características para realizar la búsqueda de los datos correspondiente al usuario.

En los últimos años se han presentado nuevas técnicas basadas en la geometría fractal, según las propiedades fractales del iris y otras características ([14], [15]); estas son muy estables en bases de datos pequeñas, por lo que la mayoría están restringidas a la búsqueda en conjuntos de a lo más 1,000 imágenes. Los sistemas de las empresas desarrolladas de todo el mundo presentan esta restricción. Los centros internacionales, como aeropuertos de algunos países, han comenzado a utilizar operaciones automáticas de identificación por iris, sin embargo, también tienen muchas limitaciones. En la mayor parte de los mecanismos automáticos de reconocimiento, normalmente, después de extraer las métricas, se inician los procesos de comparación directamente, lo que ocasiona algunas restricciones en la localización. Por lo tanto, la combinación de parámetros puede mejorar los resultados y aumentar el número de elementos en la base (a la que llamaremos *instancia*).

3.3. Clasificación híbrida de las imágenes del iris

La clasificación híbrida de las imágenes del iris se realiza mediante la combinación de dos variables, en este caso, consideraremos la dimensión fractal y el color; ambos parámetros tienen la complejidad adecuada que aumenta la efectividad del algoritmo en la búsqueda. El primer paso del proceso es calcular la dimensión, el segundo es extraer la tonalidad del ojo.

3.3.1. Extracción del Iris

El primer paso en la clasificación es extraer el iris y transformar la figura en una imagen única y estándar. La extracción se realiza determinando el centro, estimando el radio interior y exterior y recortando hasta obtener solo el disco; posteriormente, mediante una transformación de rotación geométrica, se mapea su forma circular en una rectangular,

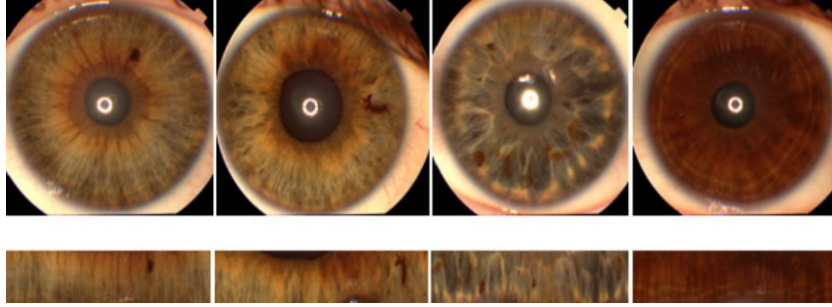


Figura 3.1: Arriba: Imágenes originales. Abajo: espectro extraído del iris. Imagen obtenida de [13].

en [13] se propone aplicar la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde el dominio está en coordenadas polares y su codominio en rectangulares, dada por

$$f(r, \theta) = (x, y), \quad (3.3.1)$$

con

$$x = r \cos^2(\theta) + r\theta \sin(\theta), \quad (3.3.2)$$

$$y = r\theta \sin(\theta) - r \cos(\theta) \sin(\theta); \quad (3.3.3)$$

sin embargo, no se demuestra que esta transformación cumple con la condición IV de la Proposición 2.4.10, para garantizar que se preserve la dimensión fractal original. El resultado es el espectro con toda su información (véase la Figura 3.1); por supuesto, este proceso no tiene ningún efecto secundario negativo en el estudio basado en el color que tendrá lugar en la próxima fase. Como se observa en la parte inferior de la Figura 3.1, el producto final de esta extracción son rectángulos iguales que son muy adecuados para realizar el análisis deseado.

Luego, se calcula la dimensión fractal del espectro extraído aplicando el método de conteo de cajas, análogo al realizado en la Sección 2.4 para la curva de Koch, en síntesis, se debe calcular el siguiente límite:

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(E))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)},$$

en este caso, $E \subseteq \mathbb{R}^2$ es el conjunto de píxeles de la imagen.

Este proceso se repite con cada una de las imágenes en la instancia y se crea un conjunto con todas las dimensiones obtenidas. En el artículo [13], se considera la base de fotografías *Phoenix* ([7]), la cual cuenta con 384 capturas de ojos tanto derechos como izquierdos, y se muestra que el rango en el que caen las dimensiones fractales es [1.30, 1.90]. Luego, se propone dividir tal intervalo en cuatro grupos, por lo que se obtienen los siguientes subintervalos:

Grupo A=[1.30,1.45],
 Grupo B=[1.45,1.60],
 Grupo C=[1.60,1.75],
 Grupo D=[1.75,1.90].

Sin embargo, el problema de la escalabilidad de los métodos aún no se resuelve, debido a que los intervalos son arbitrarios y pueden contener cantidades no uniformes de elementos, por ejemplo, en el Cuadro 3.3.1 se muestra la cantidad de imágenes con dimensión fractal dentro de cada categoría, obsérvese que si se multiplica por 10 y suponiendo que se sigue la misma tendencia, entonces en el intervalo C la búsqueda presentarán algunos problemas. En esta tesis no se abordará la forma de determinar la división adecuada del rango de dimensiones ya que se encuentra fuera de los objetivos, no obstante, se plantea como un trabajo futuro y extensión de esta.

Intervalo	No. de imágenes
A	72
B	84
C	156
D	72
Total	384

Cuadro 3.3.1: Frecuencia de imágenes por intervalo.

3.3.2. Extracción de color del iris

Ahora, se analizará una forma de combinar los intervalos propuestos en la sección anterior con el color del ojo. La estructura del iris posee propiedades únicas y un patrón complejo, la tonalidad es uno de ellos, esta se basa en el conteo de pigmentos y criptas de melanina y tiene un amplio rango el cual varía de marrón oscuro a azul claro ([10]) y para catalogarlo podemos utilizar algunos términos, por ejemplo, café, ojo de miel, verde, gris, azul o una combinación de estos, pero derivado de la falta de una delimitación explícita entre estos colores, en [13] se propone clasificarlos en tres clases: claro, oscuro y medio. Luego, se calcula el promedio del valor de color en la escala RGB , en otras palabras, se estima la media de rojo, verde y azul en la imagen; además, debido a muchos factores como la ambigüedad de la luz, este dato es aproximado e influye el criterio del personal que se encuentre realizando el análisis. Al final, en [13] proponen los siguientes parámetros para cada clasificación:

1. **Iris claro:** El valor de R debe ser mayor que 105; el de G , más de 90 y el de B , sobrepasar a 40.

2. **Iris oscuro:** El valor de R debe ser menor que 110; el de G , menos que 70 y el de B , a lo más 50.
3. **Iris medio:** El iris que no pertenece a las dos clases anteriores.

El Cuadro 3.3.2 muestra los resultados de la clasificación de todas las imágenes de la base de datos.

Clase de color	No. de imágenes
Claro	132
Medio	144
Oscuro	108
Total	384

Cuadro 3.3.2: Frecuencia de imágenes por color.

Con lo anterior se puede proponer una clasificación híbrida considerando la dimensión fractal y luego la clase de color de cada imagen antes de aplicar algún método de identificación biométrica. Con tal propuesta se logrará aumentar la precisión de los métodos de reconocimiento utilizando el iris del ojo a bases de datos relativamente mayores a 1,000 imágenes, logrando el objetivo general de esta tesis y verificando la veracidad de la hipótesis planteada.

Conclusiones

Esta tesis se basó en dos temas principales: la equivalencia entre la dimensión fractal, de Hausdorff y conteo de cajas y la exhibición de una aplicación en el reconocimiento biométrico de personas a través del iris del ojo. El Capítulo 1 está dedicado a introducir algunos conceptos y propiedades que son utilizados en el desarrollo del trabajo, principalmente, la noción de medida exterior (Sección 1.1); espacios métricos y algunas propiedades (Sección 1.2) y el límite superior e inferior de una función (Definición 1.2.19).

En el Capítulo 2 se mostraron los diferentes conceptos de dimensión de interés en nuestro estudio: topológica, fractal, de Hausdorff y de conteo de cajas; luego, mediante el teorema de Moran, se estableció que los últimos tres tipos son en realidad equivalentes y que extienden al primero, con este resultado se le brindó al método de conteo de cajas una base teórica sólida fundamentada principalmente en la dimensión de Hausdorff, la cual hace uso de resultados en topología y teoría de la medida. Logrando la parte **OG1** del objetivo general de esta tesis.

Parte fundamental de esta investigación es que se presentó una de las propiedades intrínsecas principales de los fractales en un lenguaje matemático: la autosimilitud (Definición 2.5.2). Este concepto se define a través de funciones contractivas sobre espacios métricos, lo que permite aterrizar tal propiedad y analizarla con herramientas desarrolladas en topología, teoría de la medida y análisis matemático.

Por otro lado, como consecuencia de la propiedad de autosimilitud, al aplicar una transformación a un fractal «aparenta» preservar su forma original, por ejemplo, al acercarla y alejarla, sin embargo, en ocasiones la dimensión fractal se ve alterada por ciertos mapeos. En la Proposición 2.4.10 se mostraron las condiciones sobre las funciones para que preserven las dimensiones, en particular, si es bilipschitz, la dimensión no se altera.

En el Capítulo 3 se introdujo la teoría alrededor de la identificación biométrica. Se mostraron algunas de las características que consideran los métodos usuales, tales como las físicas, de comportamiento y las químicas y se exhibieron los principales sistemas de reconocimiento.

En la Sección 3.3 se mostró la forma de procesar una imagen del iris del ojo, la manera de extraerlo y la función con la que se transforma en una imagen rectangular. En segundo paso, se exhibió el método de cajas para calcular la dimensión fractal de la figura procesada, se mostró el rango en el que se encuentran los valores de las dimensiones de las imágenes de la instancia Phoenix, este intervalo es el propuesto por Jampour en el artículo [13], ahí mismo, se propone dividirlos en cuatro subintervalos. Finalmente, se catalogaron las figuras de los iris por color en tres categorías: claro, medio y oscuro, de tal modo se podrá dividir la base de datos en doce partes iguales antes de aplicar algún sistema de identificación, con lo que se incrementa la efectividad del reconocimiento. Como consecuencia, la parte **OG2** del objetivo general es alcanzada.

Trabajo futuro

Durante el análisis de la aplicación exhibida en este trabajo surgieron algunas interrogantes, las cuales son listadas a continuación y se plantean como trabajo futuro.

- En el proceso de extracción del iris se elimina la parte que no aporta información y se conserva solo el disco entre la pupila y la esclerótica, para luego transformarla a coordenadas rectangulares mediante la función (3.3.1)-(3.3.2), sin embargo, a este mapeo no se le realiza un análisis para verificar que preserve la dimensión fractal de la imagen original, es decir, comprobar la condición IV de la Proposición 2.4.10, en el caso que no lo cumpla, se sugiere plantear una nueva transformación.
 - La propuesta de clasificación aún presenta algunos inconvenientes de escalabilidad, una de ellas es que, a pesar de que se divide la base de datos en doce partes, puede darse el caso en que una parte absorba la mayor cantidad de imágenes, excediendo del valor 1,000, con lo que nuevamente los métodos presentarían deficiencias. Una forma de resolver este problema es dividir el intervalo de dimensión fractal en categorías no uniformes, sino que dependan del comportamiento de tales dimensiones, combinados con sistemas de inteligencia artificial, lo cual actualmente se encuentra en desarrollo como trabajo de tesis de maestría del sustentante, esta tesis es el pilar de esa nueva investigación.
-

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. M., Análisis matemático, 2da. edición, *Ed. Reverté*, Barcelona, España.
- [2] BARRAGÁN, F., ROMERO, A, SÁNCHEZ PERALES, S. Y GRIJALVA V.M., *Breve Introducción a la Métrica de Hausdorff*, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2014.
- [3] BOLES, W. Y BOASHASH, B., *A human identification technique using images of the iris and wavelet transform*, IEEE Transactions Signal Processing, Vol. 46, no. 4, pp. 1185-1188, Abril 1998.
- [4] BONILLA, A., *Medida, dimensión, fractales*, Trabajo final de grado en Matemáticas, Universidad La Laguna, Tenerife, España, 2018.
- [5] DAUGMAN, J., *High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 15, no. 11, pp. 1148-1161, Noviembre 1993.
- [6] DAUGMAN, J., *How iris recognition works*, IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, Vol. 14, no. 1, pp. 21-30, 2004.
- [7] DOBEŠ, M. Y MACHALA, L., Iris Database, <http://phoenix.inf.upol.cz/iris/>
- [8] HAUSDORFF, F., *Grundzge der Mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.
- [9] HERRERO PIÑEYRO, P.J., *Topología de Espacios Métricos*, Universidad de Murcia, pp.144-145, 2010.
- [10] HUIQIONG WANG, STEPHEN LIN, XIAOPEI LIU, SING BING KANG, *Separating Reflections in Human Iris Images for Illumination Estimation*, Proceeding of the IEEE International Conference Computer Vision, 2005.
- [11] HUTCHINSON, J. E., *Fractals and Self-similarity*, Indiana University Mathematical Journal, 30, pp. 713-747, 1981.

-
- [12] JAIN, A.K., ROSS, A. Y PRABHAKAR, S., *An introduction to biometric recognition*, IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, vol. 14, no. 1, pp. 7-13, Enero 2004.
- [13] JAMPOUR, M. Y NASERASADI, A., *Extract and classification of iris images by fractal dimension and efficient color*, International Journal of Computer Applications (975-8887), vol. 18, no. 1, pp. 11-14, Marzo 2011.
- [14] JAMPOUR, M., SHOJAEI, H., ASHOURZADEH, M. Y YAGHOOBI, M., *Compressing of Fingerprint Images by Means of Fractals Feature*, IEEE International Conference ICMV'09, pp. 18-22, 2009.
- [15] JAMPOUR, M., YAGHOOBI, M., ASHOURZADEH, M. Y SOLEIMANI, A., *A New Fast Technique for Fingerprint Identification with Fractal and Chaos Game Theory Fractals*, Vol. 18, Issue 3, pp. 293-300, 2010.
- [16] JUVENTENY, A., Trabajo final de grado de Matemáticas por Departament de Matemática Aplicada i Anàlisi, pp. 20, 2016.
- [17] LI MA, TIENIU TAN, YUNHONG WANG, Y DEXIN ZHANG, *Personal identification based on iris texture analysis*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 25(12), pp. 1519–1533, 2003.
- [18] LIU-JIMENEZ, J., SANCHEZ-REILLO, R. Y SANCHEZ-AVILA, C., *Biometric co-processor for an authentication system using iris biometrics*, IEEE International Conference on Security Technology, pp. 131-135, 2004.
- [19] MANDELBROT, B., *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, Science, vol. 156, pp. 636-638, 1967.
- [20] MANDELBROT, B., The fractal geometry of nature, *W.H. Freeman*, San Francisco, 1982.
- [21] MANDELBROT, B., The fractal geometry of trees and other natural phenomena. In Roger E. Miles and Jean Serra, editors, *Geometrical Probability and Biological Structures: Buffon's 200th Anniversary*, pages 235-249, Berlin, Heidelberg, 1978. Springer Berlin Heidelberg.
- [22] DE MARTIN-ROCHE, D., SANCHEZ-AVILA, C. Y SANCHEZ-REILLO, R., *Iris recognition for biometric identification using dyadic wavelet transform zero-crossing*, IEEE International Carnahan Conference on Security Technology, pp. 272-277, 2001.
- [23] MONTESDEOCA PÉREZ, P., Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal, en *Cómo Resolver Problemas*, 2005.
- [24] MORAN, P. A. P., Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42, pp. 15-23, 1946.
-

-
- [25] PALAIS, R. S., *A simple proof of the Banach contraction principle*, Journal of Fixed Point and Applications, 2, pp. 221-223, 2007.
- [26] PÉREZ BECERRA, T., *Ecuaciones de reacción-difusión y formación de patrones en determinados sistemas biológicos*, Tesis de licenciatura, Departamento de ciencias básicas, ingeniería y tecnología, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 2012.
- [27] PRÄHOFFER, M. H. , *Spohn, Statistical self-similarity of one-dimensional growth processes*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 279 (1-4), pp. 342-352, 2000.
- [28] RICHARDSON, L. F., en *General Systems Yearbook* 6, 139, 1961.
- [29] ROQUE VIDAL, L. G., en *Teoremas del punto fijo para funciones monótonas y sus aplicaciones*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.
- [30] VERA, G., *Lecciones de Análisis Matemático II*, Universidad de Murcia, España, webs.um.es/gvb/, 2011.
- [31] WILDES, R. P., ASMUTH, J. C., GREEN, G. L., ET AL., *A system for automated iris recognition*, Second IEEE Workshop on Applications of Computer Vision, pp. 121-128, 1994.
- [32] WILDES, R. P., *Iris recognition: An emerging biometric technology*, Proceedings of the IEEE, Vol. 85, no. 9, pp. 1348-1363, Septiembre 1997
- [33] WILKINS, D. R., *Course 221: Hilary Term 2007, Section 6: The Extended Real Number System*, lecture notes, DPMMS, University of Cambridge.
-