

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

INGENIERÍA EN FÍSICA APLICADA



DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTO FINITO DE LAS ECUACIONES DE ONDA P Y
S PARA UN MEDIO POROSO CONTINUO FRACTAL

ALFREDO GUADALUPE CARREÑO LÓPEZ

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN FÍSICA APLICADA

DIRECTOR:

DR. HUGO DAVID SÁNCHEZ CHÁVEZ

2022

A mi madre

*A lo largo de mi vida tu bendición
a diario me protege llevándome por
el camino del bien y desde el cielo
tus ojos me guían a donde voy.*



Agradecimientos

Al concluir esta importante etapa de mi vida, quiero extender un pequeño pero profundo agradecimiento a quienes hicieron posible este sueño. . .

Primeramente doy gracias a Dios por permitirme llegar a esta etapa de mi vida y compartir con mi familia este momento. Gracias a mi familia por estar conmigo en todo momento y ser un gran apoyo, principalmente a mis padres Juan Carreño y Paula López, personas de gran sabiduría; quienes han guiado mi camino con valiosos valores.

Gracias a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por permitirme ser parte de ella y abrirme sus puertas en su seno científico para estudiar mi carrera. Gracias a sus docentes quienes fueron mi gran apoyo para forjar los conocimientos que he adquirido, principalmente al Dr. Hugo David Sánchez Chávez por haberme dado la oportunidad de trabajo de tesis y darme un gran apoyo técnico, moral y motivacional para concluirla. Así mismo, agradezco a todos mis compañeros de los distintos semestres, ya que, gracias al compañerismo y apoyo moral pude seguir adelante.

No puedo afirmar que el desarrollo de una tesis sea algo fácil, pero lo que si puedo decir es que en cada momento, cada proceso y cada paso que das, te hace crecer e ir más allá de tus límites. Y no fue simplemente porque yo dispusiera que así fuera, sino porque tuve personas conmigo para lograrlo.

A todos, ¡gracias!

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	ix
Abstract	x
Aspectos preliminares	xi
Introducción	1
1 Marco teórico	3
1.1 Fractales	3
1.2 Dimensión	4
1.3 Autosimilaridad	5
1.4 Tipos de fractales	6
1.4.1 Fractales matemáticos	6
1.4.2 Fractales naturales	8
1.5 Movimiento ondulatorio	9
1.5.1 Ecuación diferencial de onda	9
1.5.2 Energía en una onda armónica	10
1.6 Ondas sísmicas	11
1.6.1 Ondas de cuerpo	12
1.6.2 Ondas superficiales	13
1.6.3 Ecuación de una onda sísmica	14
2 El método del elemento finito	17
2.1 Problemas bidimensionales dependientes del tiempo	19
2.1.1 Formulación débil	19

2.1.2	Funciones de forma para elementos triangulares	23
3	Espacio continuo fractal	26
3.1	Propiedades fractales de un medio permeable	26
3.2	Métrica fractal de medio continuo	28
3.3	Cálculo fraccional en el continuo fractal	29
4	Desarrollo del problema	33
4.1	Desarrollo del problema usando el método de elemento finito	33
4.1.1	Discretización de la onda P fraccionaria	33
4.1.2	Discretización de la onda S fraccionaria	36
	Resultados y discusión	40
	Conclusiones	43
	Apéndices	45
A	Función Gamma y función Beta	46
B	Integral doble de Dirichlet	47
C	Resolución de integrales	48

Resumen

Las ondas son un fenómeno físico que se presenta a menudo en la naturaleza y que consiste en una perturbación física del medio de propagación, dichas ondas pueden ser mecánicas o electromagnéticas. Los tipos de ondas con las que se trabaja en esta tesis son de tipo mecánico, específicamente; ondas sísmicas. La propagación de las ondas sísmicas ha sido un tema de interés en la ciencia e ingeniería, particularmente; ondas tipo P y S. Los estudios hechos hasta ahora emplean la ecuación de onda que de forma implícita considera que la propagación ocurre en un medio homogéneo y continuo.

Así pues, se propone un modelo que permite incluir la geometría intrínseca del medio en el cual se propagan las ondas sísmicas (medio poroso) vinculando la geometría fractal con el orden de derivación de la ecuación de onda. Para abordar el problema se intercambiaron los operadores diferenciales tradicionales de la ecuación de onda por los operadores fraccionarios del continuo fractal, acto seguido, se aplicó el método del elemento finito para discretizar el medio de propagación en elementos triangulares bidimensionales. Mediante este tratamiento se encontró que, para un caso particular de geometría existen soluciones analíticas para la onda tipo P (obteniendo de este modo una expresión general que reducirá el tiempo y recursos de cómputo), no así para la onda tipo S. Sin embargo, ambas expresiones son generales y están en función de propiedades geométricas del medio, cabe señalar que esto aún no ha sido reportado en la literatura. Finalmente, los resultados aquí obtenidos son de mucha utilidad al momento de describir la propagación de una onda (sísmica) si se incluyen aspectos geométricos, téngase presente que los diferentes tipos de suelos en la naturaleza tendrán información geométrica diferente, lo cual, si es tomado en cuenta, contribuirá a realizar simulaciones computacionales más apegadas a la realidad.

Abstract

Waves are a physical phenomenon that often occurs in nature and consists of a disturbance of the propagation medium, such waves can be of two types: mechanical or electromagnetic. Mechanical waves considered in this work are mechanical (seismic waves). Seismic waves propagation has been a topic of interest in science and engineering, particularly; P and S waves. The studies carried out so far use the wave equation that implicitly considers propagation occurring in a homogeneous and continuous medium. Thereby, a model that include intrinsic geometry of the medium (porous medium) is proposed in this work, this model link the medium fractal dimension to derivation order in the wave equation. To address the problem, traditional differential operators in the wave equation were changed for fractional differential operators (fractal continuum operators), then, the finite element method was applied to realize the discretization process on two-dimensional triangular elements. Through this treatment it was found that, for a particular geometry, there are analytical solutions for the P-type wave (obtaining a general expression that will reduce computational resources and time processing), but not for the S-type wave. However, both expressions are general and based on geometric properties of the medium and no previous report has been done in literature. Finally, the results obtained here are very useful to describe the propagation of a seismic wave if this geometric aspects are included, keep in mind that the different types of soils will have different geometric information, this will contribute to make computational simulations more accurately to reality.

Aspectos preliminares

Planteamiento del problema

Siguiendo la metodología empleada tradicionalmente en el proceso de discretización de Galerkin para el análisis numérico de ecuaciones diferenciales en el método del elemento finito y haciendo uso de los operadores diferenciales fraccionarios del continuo fractal, en este trabajo de tesis se plantea realizar el proceso de discretización a las ecuaciones diferenciales de ondas sísmicas tipos P y S cuyo orden de derivación fraccionario sea igual a la dimensión fractal del medio de propagación.

Justificación

En la literatura de sismología reportada en los textos actuales, la dinámica de propagación de las ondas sísmicas se estudia empleando operadores diferenciales de orden entero (primera y segunda derivadas), sin embargo, esto implica hacer supuestos de homogeneidad y continuidad del medio. Es decir, en tal idealización no se toma en consideración su geometría –que es fractal–. Por lo tanto, es de interés académico explorar la aplicación de los operadores diferenciales del cálculo fraccionario del continuo fractal (que sí incluyen dicha información al tomarse su dimensión fractal como orden de derivación) como una propuesta novedosa para abordar este problema de ingeniería.

Hipótesis

Dado que el cálculo fraccionario del continuo fractal emplea operadores diferenciales cuyos ordenes de derivación son no enteros, en este trabajo suponemos que, las ecuaciones diferenciales de orden entero de las ondas sísmicas P y S al ser reescritas con operadores diferenciales fraccionarios y aplicar el proceso de discretización tradicional de Galerkin (del método del elemento finito), describen de mejor manera (o de forma alternativa) su propagación a través de medios porosos.

Objetivos

Objetivo general

Estudiar el comportamiento de la propagación espacio-temporal de perturbaciones ondulatorias tipos P y S a través de un medio poroso hipotético. Para ello, se empleará la dimensión fractal del medio como orden de la derivada fraccionaria junto con el método del elemento finito.

Objetivos específicos

- Aprender las herramientas del cálculo fraccionario y las bases de la geometría fractal.
- Realizar el proceso de discretización de las ondas sísmicas tipos P y S.
- Comprender la relación que existe entre el cálculo fraccionario y la geometría fractal del medio.
- Aplicar los conocimientos adquiridos en el curso de elemento finito a la resolución de un problema que involucra parámetros reales no enteros.
- Explorar la posibilidad de encontrar soluciones analíticas para los términos del elemento maestro.

Metas

- Desarrollar las discretizaciones correspondientes de las ecuaciones diferenciales fraccionarias de las ondas tipos P y S mostradas en la tercera columna de la tabla 3.1.
- Verificar si dichas discretizaciones tienen soluciones analíticas y analizar sus resultados.
- Construir una base teórica de un modelo físico que en un futuro permita su implementación computacional.

Metodología

La metodología a llevar a cabo para la realización de este trabajo se muestra en el siguiente diagrama:

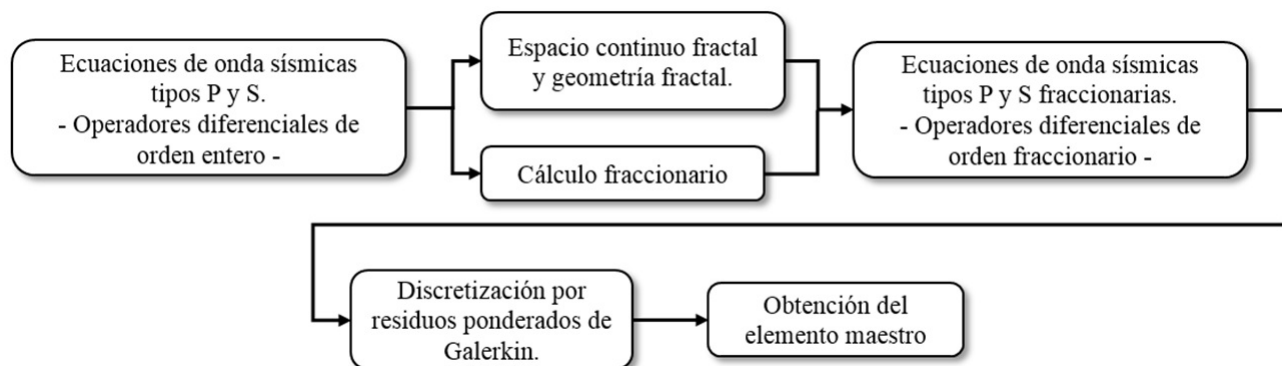


Diagrama 1: Metodología planteada en este trabajo de tesis.

El cual se describe a continuación:

1. **Ecuaciones de onda sísmicas tipos P y S.** Primeramente, el problema a resolver en este trabajo es obtener un nuevo modelo físico para la propagación de las ondas sísmicas tipos P y S, las cuales se propagan a través de un medio poroso, en consecuencia, sus ecuaciones de onda sísmica de orden entero pasaran a ser de orden fraccionario, de tal manera que, el orden de derivación se corresponda con la geometría fractal del medio de propagación.
2. **Espacio continuo fractal y geometría fractal.** Para esta etapa se recopila la información acerca de la teoría fractal, la cual es necesaria y primordial para entender los medios discontinuos (porosos). Estos objetos fractales pueden ser aproximados a un medio continuo mediante la teoría del continuo fractal.
3. **Cálculo fraccionario.** Aquí se aprenden las herramientas matemáticas del continuo fractal las cuales son esenciales para el estudio de fenómenos físicos que se llevan a cabo en un medio continuo fractal.
4. **Ecuaciones de onda sísmicas tipos P y S fraccionarias.** Con ayuda del cálculo fraccionario y la geometría fractal, se plantean las ecuaciones diferenciales de onda fraccionaria para las ondas tipos P y S, recurriendo a un método numérico para obtener sus soluciones.

5. **Discretización por residuos ponderados de Galerkin.** En esta etapa se aplica el método del elemento finito, usando residuos ponderados de Galerkin que consiste en los siguientes pasos:
- a) Desarrollo de las ecuaciones elementales.
 - b) Discretización de las ecuaciones en un dominio de solución de un mallado de elementos finitos.
 - c) Solución de las integrales.
 - d) Obtención del elemento maestro o matriz elemental.
6. **Elemento maestro.** Una vez completada la discretización se llega a la expresión conocida como elemento maestro o matriz elemental que describe la propagación de una onda sísmica y la cual se propaga en un medio poroso, de este modo, se formulan las ideas que enriquecen al tema de investigación resaltando y detallando los resultados obtenidos, así como también aquellos que no fue posible obtener.

Introducción

Durante siglos la geometría euclidiana postulada por el matemático griego Euclides, ha representado una buena aproximación para modelar el mundo en el cual nos desenvolvemos a diario, describiéndolo con formas básicas como la línea recta, el cuadrado o el cubo. Sin embargo, en la naturaleza como tal, estas formas se presentan muy raramente. La dimensión euclidiana se puede definir simplemente con el número de coordenadas que se requieren para determinar la posición de un cuerpo en el espacio [1]. Con la dimensión euclidiana se desarrollaron muchas de las áreas de las matemáticas que hoy conocemos, entre ellas el cálculo infinitesimal desarrollado principalmente por Newton y Leibnitz. En el cálculo infinitesimal se conocían funciones con enormes irregularidades y discontinuidades, pero los científicos de aquella época supusieron que esas mismas funciones discontinuas eran muy escasas y que raramente surgirían en sistemas naturales, por lo que, se consideraban excepciones a la matemática tradicional y simplemente se dejaban de lado. Aún así, todos estos problemas se trabajaban con dimensiones enteras y haciendo uso de derivadas de orden entero pero esto comenzó a cambiar a finales del siglo XVII cuando L'Hopital le hizo la famosa pregunta a Leibnitz ¿qué pasaría si n fuera $1/2$? (Pregunta obviamente inspirada en la notación muy conocida e inventada por Leibnitz para derivadas), la respuesta de Leibnitz a L'Hopital fue; “Va a conducir a una paradoja, de esta aparente paradoja, se sacarán consecuencias algún día” [2, 3]. Tiempo después en el siglo XIX, matemáticos como Georg Cantor, Karl Weierstrab, Giuseppe Peano, David Hilbert, Helge von Koch, Waclaw Sierpinski, Gaston Julia, y Felix Hausdorff por nombrar los más importantes, realizaron trabajos que sentaron las bases para que Benoit Mandelbrot desarrollara una nueva geometría que describía mejor la naturaleza y a la que le dio el nombre de geometría fractal. Con la ayuda de la geometría fractal se desarrolló la idea de la dimensión fraccionaria, que culminó con la realización de trabajos como el de Liouville y los de Riemann, creando las definiciones actuales de los operadores fraccionales diferenciales e integrales de Riemann-Liouville publicadas en 1800. En el siglo XX llegan los operadores fraccionarios de Weyl, Riesz y Caputo, estos operadores se encuentran entre muchos más operadores fraccionarios y son actualmente utilizados. En los últimos 50 años el cálculo fraccionario ha dado solución a una gran variedad de problemas, involucrando las ecuaciones

diferenciales parciales sobre conjuntos fractales, físicos y matemáticos [4], es una herramienta de gran ayuda para abordar problemas en distintas áreas tales como: dinámica poblacional [5], presión transitoria de flujos [6], simulación computacional de sistemas biológicos [7, 10], ciencias geológicas [8, 9], fenómenos de arrugamiento [11], entre otros problemas. En el presente trabajo se hace uso de la información que aporta la geometría fractal junto con el formalismo del cálculo fraccionario para explorar el estudio de la propagación de perturbaciones ondulatorias causadas por las ondas sísmicas en un medio poroso hipotético.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Fractales

Los primeros fractales surgieron como un intento de explorar el contenido y los conceptos fundamentales de dimensión, continuidad y curva, pero fue hasta 1975 cuando Benoit Mandelbrot empezó a definirlos rigurosamente, fue él quien acuñó la palabra fractal proveniente del latín que significa roto o fragmentado.

El concepto de fractal se puede abordar desde varios puntos de vista, sin embargo comúnmente se acepta que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos, también geométricos, de tamaño y orientación variable, pero de aspecto similar. Expresándolo como:

“Es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como características fundamentales las propiedades de auto similitud y la de convivir con extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias” [1]

Con esto, se puede decir que a un fractal se le atribuye dos características principales

- Un fractal posee dimensión no entera
- Un fractal es autosimilar, es decir su geometría está hecha de copias más pequeñas de la misma geometría.

En el estudio de la geometría fractal es necesario incluir conceptos de otras dimensiones, como por ejemplo, las dimensiones euclidiana, topológica y de Hausdorff-Besicovitch, como veremos a continuación.

1.2. Dimensión

En la geometría fractal se habla con frecuencia de distintas dimensiones que ayudan a obtener una mejor definición de lo que es un fractal y que dan lugar a una de las características principales de la mayoría de estos objetos. Estas dimensiones se definen de manera intuitiva a continuación.

Dimensión euclidiana

“La dimensión euclidiana es simplemente el número de coordenadas necesarias para especificar un objeto, por ejemplo la dimensión de un punto es cero, la dimensión de una recta es uno, la dimensión de un plano es dos y la dimensión de un cubo es tres”[12].

Dimensión topológica

“La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disyuntos. La dimensión topológica uno describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos con sólo una intersección entre pares adyacentes de ellos. Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces... La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclidiana” [12].

Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Benoit Mandelbrot se apoyó en el concepto de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para definir un fractal, que es el parámetro empleado para medir dimensiones no enteras. Esta dimensión se define como:

“Un contenido lineal, de superficie o de volumen que se calcula sumando r pasos y elevados a exponentes uno, dos y tres respectivamente donde r es cada una de las líneas, cuadrados o cubos que componen la figura fractal.” [12, 13]

La representación matemática de esta dimensión es:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} \quad (1.1)$$

Donde, N es el número de copias de sí mismo, D es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch [14] y r es la razón de homotecia (razón de similitud).

Utilizando la función inversa de logaritmo se obtiene:

$$1 = Nr^D \quad (1.2)$$

$$\text{Contenido} = Nr^D \quad (1.3)$$

Con las definiciones de fractal y de dimensiones antes mencionadas se puede obtener una definición más rigurosa de lo que es un fractal:

“Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff- Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Los conjuntos con D no entera son fractales”[14].

La dimensión de Hausdorff- Besicovitch es considerada el concepto principal de la geometría fractal. En algunos textos la geometría fractal también es conocida como la geometría de la naturaleza. Para una mejor descripción de los fractales a continuación se presentan las características principales que poseen y que se reportan en la literatura.

1.3. Autosimilaridad

Como se ha mencionado anteriormente los fractales se caracterizan por tener una dimensión no entera, pero también, por poseer otra propiedad muy importante llamada autosimilaridad o autosimilitud.

Un objeto es auto similar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque éste sea observado en diferentes escalas.

- **Invariancia de escala:** significa que la estructura observada permanece sin cambios bajo aumento o contracción. Por lo tanto, un patrón invariante de escala depende de cualquier observación y no puede caracterizarse por una escala única [15]. En otras palabras, la invariancia de escala tiene la característica de que la estructura no sufre la más mínima deformación alguna independientemente de donde esta se observe, como lo muestra la figura 1.1.

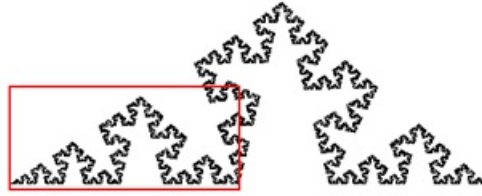


Figura 1.1: *Invariancia de escala de una geometría fractal, donde una parte de él, es exactamente igual que el todo.*

- **Invariancia estadística de escala:** Esta invariancia es un poco menos exigente que la invariancia de escala, ya que en este caso, basta con que las medidas numéricas o estadísticas se conserven con el cambio de escala. Un ejemplo de ello es el valor b de Gutenberg-Richter para la sismicidad, el cual tiene un comportamiento similar independientemente del área a analizar [15, 16].

1.4. Tipos de fractales

Como se ha mencionado anteriormente, la geometría fractal es también conocida como la geometría de la naturaleza, es por eso que se hará distinción entre un “fractal matemático” y un “fractal natural”. Un fractal matemático puede considerarse como un ente matemático cuyas características pueden definirse rigurosamente (como figuras creadas), de tal manera que tienen una autosimilaridad perfecta a cualquier escala que este sea observado. Por otro lado, un fractal natural se presenta en objetos naturales que tiene ciertas irregularidades como pueden ser, hojas, nubes, árboles, entre otros [1].

1.4.1. Fractales matemáticos

Estos fractales son el resultado de un proceso iterativo que se genera mediante una función que se itera un número arbitrario de veces, o también mediante un proceso de recursividad. De esta manera, es posible obtener la autosimilaridad a diferentes escalas. Ejemplos de este tipo de fractales son; el copo de nieve de Koch, la carpeta de Sierpinski y la esponja de Menger, por mencionar algunos y a continuación se describen.

Copo de Nieve de Koch

El copo de nieve de Koch se genera a partir de un triángulo equilátero y generando un triángulo en cada uno de sus lados, repitiendo este proceso infinitamente para todos los triángulos resultantes, tal como lo muestra la figura 1.2.

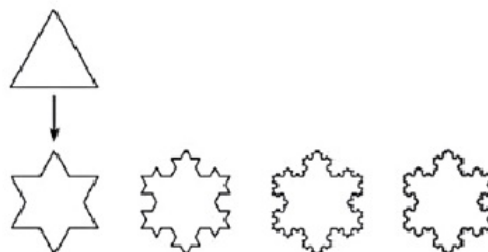


Figura 1.2: *Construcción del copo de Koch, partiendo de un triángulo equilátero y creando triángulos en los lados [14].*

Alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski es otro objeto geométrico fractal que se crea a partir de un cuadrado. A diferencia del copo de Koch, se inicia con un objeto geométrico en 2D, luego perforando el cuadrado con otro cuadrado más pequeño en el centro y así sucesivamente con los 9 cuadrados resultantes de cada perforación, tal como lo muestra la figura 1.3.

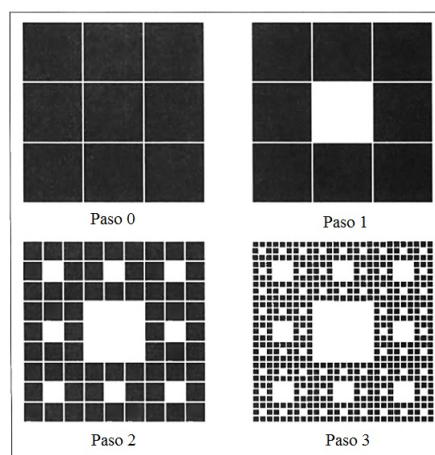


Figura 1.3: *Construcción recursiva de la alfombra de Sierpinski [17].*

Esponja de Menger

La esponja de Menger es otro ejemplo de fractal matemático generado en forma recursiva a partir de un cubo del cual se divide cada cara del cubo en 9 cuadrados. En consecuencia, esto subdivide el cubo

original en 27 cubos más pequeños, luego, se retiran los cubos centrales de cada cara y el cubo central. Esta acción deja únicamente un total de 20 cubos, repitiendo así el mismo proceso una y otra vez para los 20 cubos restantes hasta lograr la esponja fractal de la figura 1.4.

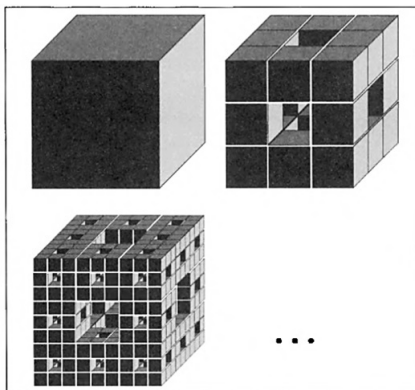


Figura 1.4: Construcción de la esponja de Menger, generada por medio de huecos en el centro de la figura principal de forma recursiva [17].

1.4.2. Fractales naturales

Los fractales naturales son un tipo de fractal que todos hemos visto alguna vez, ya que estos fractales suelen aparecer en algunos sistemas naturales. Ejemplos de fractales naturales son; la ramificación de árboles, arbustos, plantas, tejidos arteriales, cuencas fluviales con sistemas de ríos, afluentes, barrancos, riachuelos, y más.



(a)



(b)

Figura 1.5: Fractales naturales, (a) helecho donde cada una de sus ramas es autosimilar al todo [18] y (b) el romanesco, un híbrido de brócoli y coliflor que también se presenta la autosimilaridad estadística.

1.5. Movimiento ondulatorio

El movimiento ondulatorio se manifiesta casi en todas las áreas de la física. La semejanza de las descripciones físicas y matemáticas de las distintas clases de ondas, indican que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física. En particular, la característica esencial de una onda viajera clásica es su falta de ubicación y puede definirse como sigue.

“Una onda viajera clásica es una perturbación autónoma en un medio, y se mueve en el espacio transportando energía e impulso.”

Al observar y analizar detenidamente ondas verdaderas, se observan fenómenos mixtos, compuestos por un elevado número de partículas que se mueven conjuntamente. Las ondas de agua, ondas sonoras y ondas sísmicas son ejemplos de ondas mecánicas que viajan a través de un medio deformable o elástico. Se originan cuando cierta parte del medio ya sea en sólidos o en fluidos se desplaza de su posición original y queda liberada [19, 20].

Las ondas en un medio presentan su desplazamiento en dos formas principales:

- **Ondas longitudinales:** El medio se desplaza en la dirección del movimiento de la onda.
- **Ondas transversales:** El medio se desplaza en una dirección perpendicular a la dirección de movimiento de la onda.

1.5.1. Ecuación diferencial de onda

La onda más simple que viaja con una velocidad fija necesita de dos constantes (amplitud y frecuencia o longitud de onda) para especificarla, sugiriendo así segundas derivadas.

Considerando a $u(x, t)$ como el desplazamiento de una onda y utilizando el cambio de variable $x' = x \pm vt$ y que $u(x, t) = f(x \pm vt)$, se tiene:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (1.4)$$

$$\text{ya que } \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

Si se mantiene constante a x , la derivada con respecto del tiempo es

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (1.5)$$

Combinando las ecuaciones (1.4) y (1.5) se obtiene:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \pm v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1.6)$$

Esto implica que la velocidad de cambio de $u(x, t)$ con t y x es equivalente, dentro de una constante multiplicativa. Las segundas derivadas de las ecuaciones (1.4) y (1.5) son:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (1.8)$$

Con $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$, y en conjunto con la ecuación (1.5), la ecuación (1.8) queda como:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (1.9)$$

Finalmente combinando las ecuaciones (1.9) y (1.7) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) es denominada la ecuación diferencial de onda. Para una onda viajera clásica la solución de esta ecuación de onda es:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1.11)$$

Donde A es la amplitud de la onda, $\omega = 2\pi\nu$ la frecuencia angular siendo ν la frecuencia temporal, y $k = 2\pi/\lambda$ conocido como el número de onda, siendo λ la longitud de onda.

1.5.2. Energía en una onda armónica

Como se mencionó anteriormente las ondas se desplazan en un medio transportando energía ya sea energía cinética y/o potencial [21]. Se considerará el caso más simple de transporte de energía en un medio, sin considerar transformaciones de energía mecánica a otros tipos de energía, por ejemplo, la energía térmica. Por lo tanto, la energía total en una onda viajera $u(x, t)$ es la suma de su energía cinética y

energía potencial, que están definidas, respectivamente, como:

$$KE = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (1.12)$$

$$PE = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.13)$$

Donde ρ es la densidad del medio y $\tau = v^2\rho$ es el esfuerzo. Por lo tanto, la energía promedio de una onda en un periodo está dada por:

$$E = KE + PE = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \rho \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda \tau \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.14)$$

Sustituyendo la función $u(x, t)$ dada por la ecuación (1.11):

$$E = \frac{1}{2\lambda} \rho A^2 \omega^2 \int_0^\lambda \text{sen}^2(\omega t - kx) dx + \frac{1}{2\lambda} \tau A^2 k^2 \int_0^\lambda \text{sen}^2(\omega t - kx) dx = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} \quad (1.15)$$

Así, la energía de una onda armónica es:

$$E = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} \quad (1.16)$$

1.6. Ondas sísmicas

Los sismos son probablemente una de las catástrofes ante las que el hombre se siente más indefenso y aterrado. Cada día ocurren alrededor de 50 sismos en nuestro planeta lo suficientemente intensos como para ser percibidos localmente y con potencial para causar daños severos en las estructuras. Para estudiar los eventos sísmicos existe una rama de la ciencia llamada sismología, que se encarga de estudiar las ondas elásticas producidas por los movimientos de la corteza terrestre y los efectos asociados que son de utilidad para la ingeniería y la sociedad en general. Las ondas sísmicas se catalogan en dos tipos principales de ondas; las ondas de cuerpo y las ondas superficiales. Las ondas de cuerpo se propagan por el interior de nuestro planeta mientras que las ondas superficiales se propagan por la superficie terrestre. Para ambas ondas hay clasificaciones adicionales, las ondas de cuerpo se dividen en ondas P (primarias) y ondas S (secundarias), y las ondas superficiales se dividen en ondas Rayleigh y ondas Love y que se describen a continuación.

1.6.1. Ondas de cuerpo

Ondas P (primarias)

Las ondas P también conocidas como ondas de compresión son ondas longitudinales, producen un desplazamiento y un cambio de volumen en la dirección de movimiento de la onda. Estas ondas son generadas por un potencial escalar llamado onda de compresión. Se caracteriza principalmente por ser la primera onda en llegar desde el evento sísmico, esa es la razón por la que recibe el nombre de onda primaria P. Esta onda tiene una velocidad aproximadamente de $5.5 \times 10^5 \text{ cm/s}$ (5.5 km/s) y tiene la característica de propagarse por cualquier medio de la estructura terrestre, como puede ser el núcleo externo o por medio del océano [21].

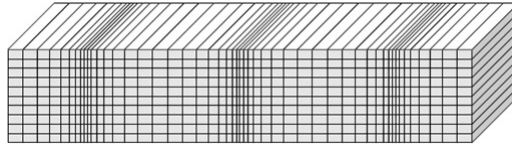


Figura 1.6: *Movimiento de una onda P. Implica tanto un cambio de volumen como un cizallamiento (cambio de forma) en el material.*

Ondas S (secundarias)

Las ondas S u ondas de corte, son un tipo de onda transversal ya que producen un movimiento perpendicular a la dirección de movimiento. Estas ondas a diferencia de las ondas P, no se propagan en fluidos (por ejemplo el núcleo externo de nuestro planeta) si no que solamente se propagan en medios sólidos, y tienen una velocidad aproximadamente de $3.2 \times 10^5 \text{ cm/s}$ (3.2 km/s) por lo que su velocidad es menor que las ondas P y por consiguiente en un evento sísmico son las segundas ondas en llegar, he ahí del por qué son ondas secundarias [21].

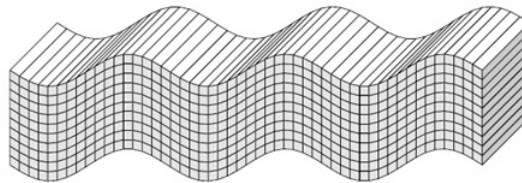


Figura 1.7: *Movimiento de una onda S. La propagación de la onda S es puro corte sin cambio de volumen.*

1.6.2. Ondas superficiales

Existen otras ondas de largo periodo que tiene una llegada con un tiempo mucho mayor que las ondas volumétricas, son conocidas como ondas superficiales y su energía es propagada cerca de la superficie de la tierra disminuyendo conforme a la distancia radial al epicentro del evento. Estas se dividen en ondas Rayleigh y ondas Love.

Ondas Rayleigh

Las ondas Rayleigh son un tipo de ondas superficiales que resultan de la combinación de una onda P y una onda SV (onda S con polarización vertical), es decir este tipo de ondas sólo tiene movimiento vertical, un movimiento elíptico muy parecido a las ondas de las olas en la superficie del agua [21, 22].

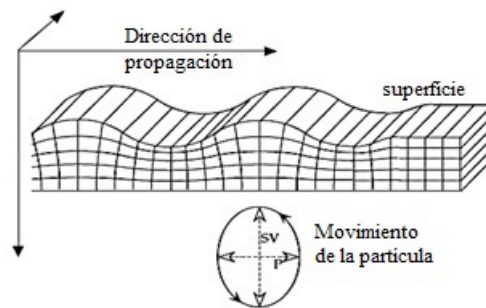


Figura 1.8: El movimiento de una onda Rayleigh consiste en la combinación de una onda P y una onda SV. Las partículas se mueven en sentido prógrado alrededor de una elipse que tiene su eje mayor vertical y el eje menor en la dirección de propagación de la onda [22].

Ondas Love

Las ondas Love son el segundo tipo de ondas superficiales y es el resultado de las interacciones de ondas SH (ondas S con polarización horizontal), es decir, es un tipo de onda S sólo que con componente puramente horizontal en la superficie terrestre y que tiene oscilación perpendicular a la dirección de propagación [21, 22].

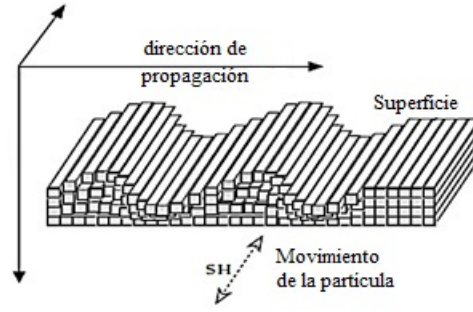


Figura 1.9: En una onda de Love, el movimiento de las partículas es horizontal y perpendicular a la dirección de propagación. La amplitud de la onda disminuye con la profundidad debajo de la superficie libre [20].

1.6.3. Ecuación de una onda sísmica

La ecuación de movimiento de una onda sísmica describe dos tipos de ondas sísmicas, ondas de compresión (ondas P) y ondas de corte (ondas S). Estos dos tipos de onda se propagan de manera diferente, con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material [21]. Para este análisis se considera que la región no contiene ninguna fuente de onda sísmica por lo que las ondas se propagan lejos de la fuente. La relación entre esfuerzos y desplazamientos que proviene de la segunda ley de Newton ($F = ma$), viene dada por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

donde $\sigma_{ij,j}$ es la variación del esfuerzo en la coordenada j -ésima, ρ la densidad del medio y u_i el desplazamiento en el medio. Haciendo enfoque en una sola dirección, en el eje x , la ecuación (1.17) queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(x,t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}(x,t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

Usando la relación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.19)$$

Donde λ y μ son conocidos como parámetros de Lamé que caracterizan el comportamiento elástico lineal de un sólido, θ la dilatación, e_{ij} es el tensor de esfuerzos.

Se reescriben los esfuerzos en términos de los desplazamientos:

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.21)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (1.22)$$

Obteniendo las derivadas de cada uno de los esfuerzos:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) \quad (1.25)$$

Se hace la consideración que para un material homogéneo las constantes elásticas no varían con la posición. Por otro lado, las definiciones de dilatación y del operador Laplaciano son:

$$\theta = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.26)$$

$$\vec{\nabla}^2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (1.27)$$

Ahora, usando las ecuaciones (1.23)-(1.25) y las relaciones (1.26) y (1.27) la ecuación (1.17) queda de la siguiente manera:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \vec{\nabla}^2 (u_x) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (1.28)$$

Para las componentes z y y se tienen ecuaciones similares a la ecuación (1.28). Por lo tanto, de manera general para las tres componentes se tiene:

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x, t)) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}(x, t) = \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.29)$$

Por otro lado, para un Laplaciano vectorial se tiene la siguiente identidad:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (1.30)$$

Usando la identidad (1.30) en la ecuación (1.29) se obtiene:

$$(\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x, t)) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}(x, t)) = \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.31)$$

Reescribiendo el desplazamiento como una ecuación en términos de otras dos funciones, ϕ y $\vec{\gamma}$, que son conocidos como potenciales:

$$\vec{u}(x, t) = \vec{\nabla}\phi(x, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\gamma}(x, t) \quad (1.32)$$

Esta es la representación del desplazamiento como la suma del gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un potencial vectorial. La parte asociada con el potencial escalar no tiene curvatura ni rotación lo que corresponde a las ondas de presión (ondas P). Por el contrario, la parte asociada con el potencial vectorial tiene divergencia cero, no causa cambio en el volumen, por lo que, corresponde a la onda de corte (onda S). Entonces sustituyendo la ecuación (1.32) en la ecuación (1.31) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \left[(\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}^2\phi(x, t) - \rho \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right] = -\vec{\nabla} \times \left[\mu\vec{\nabla}^2\vec{\gamma}(x, t) - \rho \frac{\partial^2 \vec{\gamma}(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (1.33)$$

Ya que las constantes elásticas no varían con la posición, y el orden de diferenciación no tiene efecto, se puede encontrar una solución si ambos términos entre paréntesis de la ecuación (1.33) son cero. En este caso se obtienen dos ecuaciones de onda, una para cada potencial.

Para el potencial escalar que corresponde a la onda P:

$$\vec{\nabla}^2\phi(x, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

Donde a es la velocidad de la onda P y está dada por:

$$a = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} \quad (1.35)$$

En cuanto al potencial vectorial correspondiente a la onda S:

$$\vec{\nabla}^2\vec{\gamma}(x, t) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \vec{\gamma}(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.36)$$

Donde b es la velocidad de la onda S y está dada por:

$$b = (\mu/\rho)^{1/2} \quad (1.37)$$

Capítulo 2

El método del elemento finito

Una forma de abordar un problema en la ingeniería y en otras ramas de la ciencia cuya solución es complicada consiste en separar el sistema en sus componentes individuales, o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

Para vencer la dificultad que representan los problemas continuos reales, los ingenieros y matemáticos han utilizado distintos métodos de discretización, en este caso se hace enfoque al método conocido como “el método del elemento finito” como un método general de discretización de los problemas continuos planteados [23].

La existencia de una manera única de abordar los problemas discretos lleva a la definición de los elementos finitos como procedimiento de aproximación a los problemas continuos, esto es:

- El medio continuo a discretizar se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros. La solución del sistema completo es el ensamblaje de todos los elementos del sistema.

El método del elemento finito puede ser muy laborioso, sin embargo, se pueden obtener resultados satisfactorios para fines prácticos. Un sistema discreto general puede obtenerse de la siguiente manera:

- 1) Se define un conjunto de parámetros discretos, tales como u_i , de manera que describan el comportamiento de cada elemento e , y también el comportamiento del sistema junto. A esto se le llama parámetros del sistema.

2) Para cada elemento se expresa un conjunto de cantidades q_i^e en función de los parámetros del sistema u_i . La relación general puede ser no lineal:

$$q_i^e = q_i^e(u) \quad (2.1)$$

Aunque en muchos casos será lineal:

$$q_i^e = \mathbf{K}_{i1}^e u_1 + \mathbf{K}_{i2}^e u_2 + \dots + f_i^e \quad (2.2)$$

Donde \mathbf{K}_1^e se conoce como matriz de rigidez, q_i^e parámetro nodal en i debido al elemento e y f_i^e parámetro nodal del elemento en i debido a otro parámetro.

3) Las ecuaciones del sistema se obtienen mediante una simple adición:

$$r_i = \sum_{e=1}^m q_i^e \quad (2.3)$$

Donde r_i son las cantidades del sistema (a menudo se les asigna valor cero). Si el problema es lineal, el resultado será un sistema de ecuaciones:

$$[\mathbf{K}]\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Tal que las submatrices que comprenden a todos los elementos son:

$$\mathbf{k}_{ij} = \sum_{e=1}^m \mathbf{K}_{ij}^e \quad f_i = \sum_{e=1}^m f_i^e \quad (2.5)$$

A partir de las cuales pueden determinarse las variables u_i del sistema.

Este proceso se lleva a cabo para determinar algo que se conoce como “elemento maestro” o “matriz elemental” que nos indica los parámetros de un sólo elemento y que posteriormente se realizará el ensamble con todos los elementos para la solución del sistema completo.

Para la resolución de problemas de ingeniería y ciencia puede utilizarse el proceso de transformación de coordenadas que es vital en muchos aspectos y de gran ayuda. Se encontrarán numerosos métodos matemáticos para la resolución de estas ecuaciones como puede ser el método de Galerkin o el método de Rayleigh-Ritz por mencionar algunos.

2.1. Problemas bidimensionales dependientes del tiempo

Existen problemas de la ingeniería y ciencia que se desarrollan en el tiempo. Estos problemas dependientes del tiempo pueden resolverse mediante el método del elemento finito, convirtiendo ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo en ecuaciones algebraicas. Estos incluyen las ecuaciones parabólicas (derivadas de primer orden en el tiempo) e hiperbólicas (derivadas de segundo orden en el tiempo). La formulación de elemento finito en problemas dependientes del tiempo implica dos pasos:

- **Aproximación espacial:** el modelo espacial de elemento finito de la ecuación se desarrolla utilizando los procedimientos de problemas estáticos o de estado estacionario, mientras se transportan todos los términos dependientes del tiempo en la formulación. Este paso da como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales (es decir, un sistema semidiscreto de ecuaciones) en el tiempo para las variables nodales $u_i(t)$ del elemento. La solución u de la ecuación bajo esta consideración se aproxima por expresiones de la forma:

$$u(x, y, t) = U^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) N_j^e(x, y) \quad (2.6)$$

- **Aproximación temporal:** el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se aproximan aún más en el tiempo, a menudo utilizando la fórmula de diferencias finitas para las derivadas temporales. Este paso permite la conversión del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en un conjunto de ecuaciones algebraicas de u_i en el tiempo $t_{s+1} = (s+1)\Delta t$, donde Δt es el incremento de tiempo y s es un número entero. Todos los esquemas de aproximación de tiempo buscan encontrar U_j en el tiempo t_{s+1} usando los valores conocidos de u_j de tiempos anteriores.

Por lo tanto, al final de la aproximación de dos etapas, uno tiene una solución espacial continua a intervalos de tiempo discretos:

$$U^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t_s) N_j^e(x, y) \quad (2.7)$$

2.1.1. Formulación débil

En dos dimensiones, hay más de una forma geométrica simple que se puede usar como elemento finito. La forma del elemento debe ser tal que su geometría esté definida de manera única por un conjunto de puntos, que sirven como nodos del elemento (como se observa en la figura (2.1)). Más adelante, se realizará el análisis para un triángulo, la forma geométrica más simple en dos dimensiones, obteniendo así sus funciones de forma.

Ahora bien, la representación de una región dada por un conjunto de elementos (es decir, discretización o generación de mallas) es un paso importante en el análisis de elemento finito. La elección del tipo de elemento, el número de elementos y la densidad de los elementos depende de la geometría del dominio, el problema a analizar y el grado de precisión deseado.

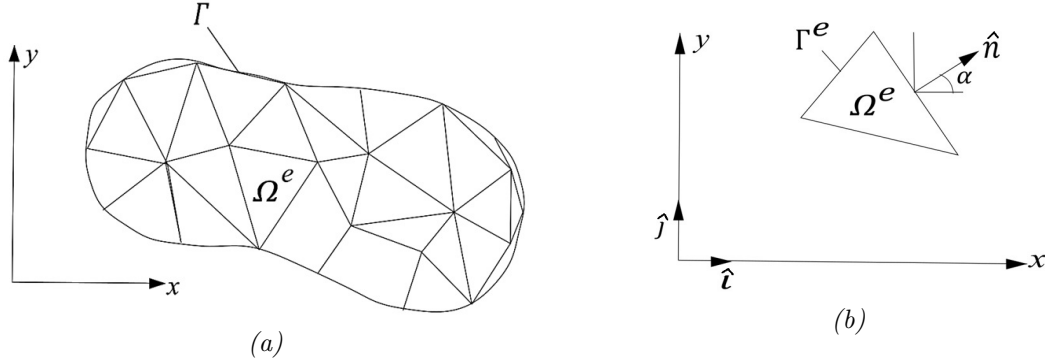


Figura 2.1: *Discretización de elemento finito de un dominio irregular: (a) discretización de un dominio por elementos triangulares; (b) un elemento triangular típico (límite Γ^e y unidad normal $\hat{\mathbf{n}}$ en el límite del elemento)* [24].

En el desarrollo de la forma débil, solo se necesita considerar un elemento arbitrariamente típico. Asumiendo que Ω^e es un elemento de este tipo (particularmente triangular) de la malla de elementos finitos, el desarrollo de la forma débil sobre el elemento típico Ω^e consiste en multiplicar la ecuación diferencial a discretizar por una función de peso w , que es diferenciable con respecto a x e y , y luego integrar la ecuación resultante sobre el dominio del elemento Ω^e .

Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión para una ecuación diferencial de segundo orden dependiente del tiempo:

$$\int_{\Omega^e} w \left[A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y, t) \right] dS = 0 \quad (2.8)$$

Distribuyendo las integrales se obtiene:

$$\int_{\Omega^e} w A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS + \int_{\Omega^e} w \left[B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dS - \int_{\Omega^e} w f(x, y, t) dS = 0 \quad (2.9)$$

La segunda integral se integra por partes haciendo uso las siguientes identidades:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.9) queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} wA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS + \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dS \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} wf(x, y, t) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por otro lado, se tiene el teorema de la divergencia el cual nos da las siguientes identidades:

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) dS = \oint_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial x} n_x dl \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) dS = \oint_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial y} n_y dl \quad (2.14)$$

Donde n_x y n_y son componentes del vector $\hat{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} = \text{Cos}(\alpha) \mathbf{i} + \text{Sen}(\alpha) \mathbf{j}$ normal a la frontera Γ^e (ver figura 2.1 (b)).

Usando las identidades (2.13) y (2.14) en la ecuación (2.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} wA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS + \oint_{\Gamma^e} \left[Bw \frac{\partial u}{\partial x} n_x + Cw \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} wf(x, y, t) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando el método de residuos ponderados de Galerkin [24], donde se requiere que las funciones de peso w sean las funciones de forma o funciones de interpolación, es decir $w = N_i$, la ecuación (2.15) queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} N_i A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS + \oint_{\Gamma^e} \left[BN_i \frac{\partial u}{\partial x} n_x + CN_i \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dS - \int_{\Omega^e} N_i f(x, y, t) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otro lado, la propuesta de solución (2.6) se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) N_j^e(x, y) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & \cdots & N_n(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad (2.17)$$

Donde \mathbf{N}^T es el vector transpuesto que contiene las funciones de forma y \mathbf{u} el vector de las soluciones nodales en un tiempo t . Ahora obteniendo las derivadas parciales de la propuesta de solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & \dots & N_n(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

Remplazando las ecuaciones (2.18 - 2.20) en la ecuación (2.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} AN_i \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}} dS + \oint_{\Gamma^e} [BN_i \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} n_x + CN_i \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} n_y] dl \\ & - \int_{\Omega^e} \left[B \frac{\partial N_i}{\partial x} \mathbf{B}_x^T \mathbf{u} + C \frac{\partial N_i}{\partial y} \mathbf{B}_y^T \mathbf{u} \right] dS - \int_{\Omega^e} N_i f(x, y, t) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) se utiliza para cada una de las N_i por lo tanto, se tienen n ecuaciones. De esta manera se obtiene una ecuación en forma matricial.

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathbf{u}} \int_{\Omega^e} ANN^T dS + \mathbf{u} \oint_{\Gamma^e} [BN\mathbf{B}_x^T n_x + CN\mathbf{B}_y^T n_y] dl \\ & - \mathbf{u} \int_{\Omega^e} [B\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + C\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T] dS - \int_{\Omega^e} \mathbf{N} f(x, y, t) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

si se escriben las integrales de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega^e} ANN^T dS \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K} = \oint_{\Gamma^e} [B\mathbf{N}B_x^T n_x + C\mathbf{N}B_y^T n_y] dl - \int_{\Omega^e} [B\mathbf{B}_x\mathbf{B}_x^T + C\mathbf{B}_y\mathbf{B}_y^T] dS \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}f(x, y, t)dS \quad (2.25)$$

entonces la ecuación (2.22) queda como:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) es conocida como la ecuación del elemento maestro, la cual es utilizada para ensamblar cada uno de los elementos del sistema el cual fue discretizado.

2.1.2. Funciones de forma para elementos triangulares

Para una malla regular con todos los elementos del mismo tamaño existen regiones donde la variable nodal no es relativamente constante. La capacidad de variar el tamaño del elemento es una ventaja importante del elemento triangular.

El elemento triangular lineal tiene tres nodos, uno en cada vértice y lados rectos tal como lo muestra la figura 2.2. Es necesario un etiquetado de los nodos, en este caso particular el etiquetado será en sentido antihorario a partir del nodo 1 que se especifica arbitrariamente. Los valores nodales en los vértices del triángulo son u_1, u_2 y u_3 , mientras que las coordenadas de dichos nodos son $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3) , respectivamente.

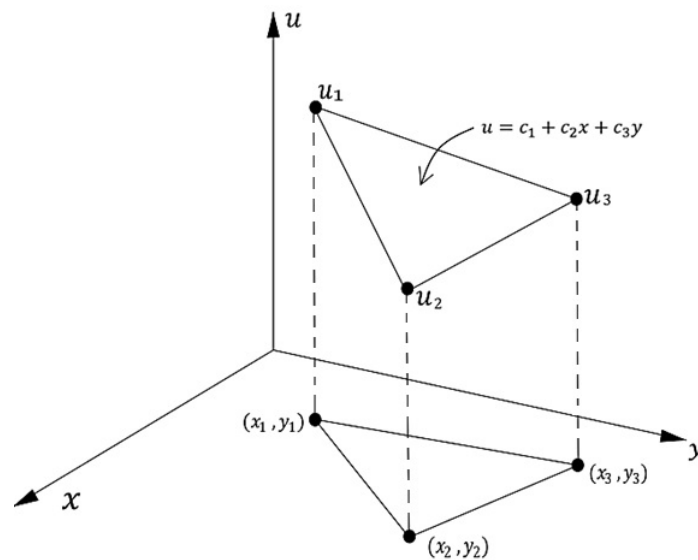


Figura 2.2: Parámetros de un elemento triangular lineal [25].

La función polinomial de interpolación para un elemento triangular es:

$$u = c_1 + c_2x + c_3y \quad (2.27)$$

para cada uno de los nodos se tiene:

$$u_1 = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1 \quad (2.28)$$

$$u_2 = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 \quad (2.29)$$

$$u_3 = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3 \quad (2.30)$$

Con las ecuaciones (2.28 - 2.30) se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Resolviendo para las constantes c_1, c_2 y c_3 se tiene que:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$c_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2)u_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)u_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)u_3] \quad (2.33)$$

$$c_2 = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3] \quad (2.34)$$

$$c_3 = \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_2 - x_1)u_3] \quad (2.35)$$

Donde $2A = (x_2y_3 - x_3y_2) - x_1(y_3 - y_2) + y_1(x_3 - x_2) \neq 0$. Por lo tanto, la matriz que contiene las coordenadas en la ecuación (2.31), es invertible.

Remplazando el valor de las constantes c_1, c_2 y c_3 en la función de interpolación (2.27) se tiene que:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2A} & \left[[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] u_1 \right. \\ & + [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] u_2 \\ & \left. + [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] u_3 \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Recordando la solución propuesta (2.6) e igualándola a la ecuación (2.36) queda:

$$N_1 u_1 + N_1 u_1 + N_1 u_1 = \frac{1}{2A} \left[[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] u_1 \right. \\ \left. + [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] u_2 + [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] u_3 \right] \quad (2.37)$$

Por lo tanto, se obtienen las funciones de forma para un elemento triangular:

$$N_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (2.38)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (2.39)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (2.40)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable:

$$A_{10} = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad A_{11} = y_2 - y_3, \quad A_{12} = x_3 - x_2 \\ A_{20} = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad A_{21} = y_3 - y_1, \quad A_{22} = x_1 - x_3 \\ A_{30} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad A_{31} = y_1 - y_2, \quad A_{32} = x_2 - x_1$$

Las funciones de forma (2.38 - 2.40) quedan como:

$$N_1 = \frac{1}{2A} [A_{10} + A_{11}x + A_{12}y] \quad (2.41)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} [A_{20} + A_{21}x + A_{22}y] \quad (2.42)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} [A_{30} + A_{31}x + A_{32}y] \quad (2.43)$$

O bien en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) expresa las funciones de forma o funciones de interpolación en forma matricial y las cuales son particulares para un elemento triangular bidimensional.

Capítulo 3

Espacio continuo fractal

Hablar de un medio continuo implica trabajar en la aproximación del continuo fractal, la cual consiste en realizar la transformación del medio fractal discontinuo en un medio fractal continuo. Un fractal de dimensión D (no entera) no llega a llenar por completo el espacio euclideo, sin embargo, dicho fractal está embebido en este espacio. En consecuencia, las propiedades y variables físicas que se presentan en este objeto tal como la densidad, la velocidad, la aceleración y la elasticidad, por mencionar algunos, se pueden considerar continuas y diferenciables con respecto a las variables espaciales y temporales.

3.1. Propiedades fractales de un medio permeable

Un fractal es caracterizado por la dimensión denominada métrica intrínseca d_ℓ , o también conocida como dimensión química. Esta dimensión cuantifica cómo cada una de las partes fundamentales de un fractal son unidas unas con otras para formar el objeto fractal completo y de este modo determinar el número de direcciones ortogonales independientes del fractal. Las propiedades dinámicas del fractal están determinadas por su dimensión espectral d_s . La dimensión fractal de una caminata aleatoria sobre el fractal es igual a $d_W = 2d_\ell/d_s$ [26].

Cuando un fractal es introducido en el espacio euclidiano de dimensión n ($d_\ell < n$), éste se puede caracterizar por la dimensión métrica D asociada con la respectiva medida Euclidiana y la dimensión fractal de ruta mínima d_{min} . D está relacionada con d_{min} de la forma $D = d_{min}d_\ell$, mientras que con la dimensión de caminata aleatoria se relaciona como $D_W = 2D/d_s = 2d_{min}d_\ell/d_s = 2 + \theta$, donde θ es el exponente de difusión anómalo [26].

La definición de D parte del concepto de que un fractal está cubierto por esferas o cubos de algún tamaño ℓ . Las definiciones de dimensiones fractales para sistemas del mundo real están basadas en algún tipo de cuasi medida fractal.

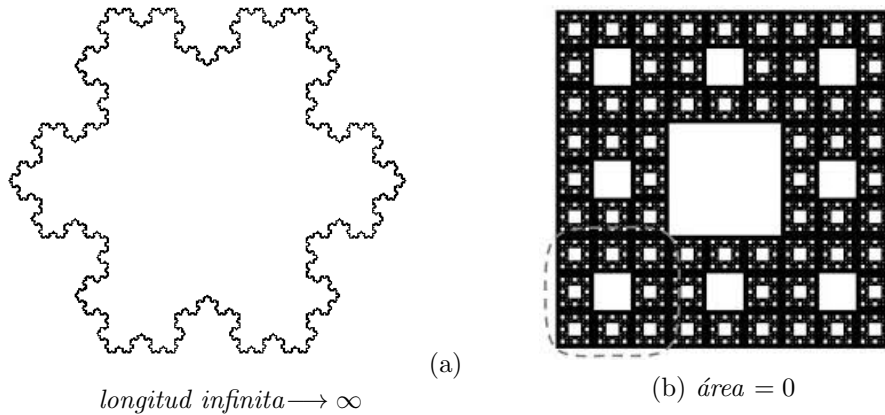


Figura 3.1: Los fractales carecen de propiedades geométricas para los análisis de medida de dimensión, por ejemplo, la longitud infinita del copo de nieve Koch (a), o el área cero como la carpeta de Sierpinski (b), por lo tanto, se tiene que usar el concepto de masa en lugar de área o longitud [5].

La dimensión de un fractal físico está relacionada con la ley de potencia de la masa, donde dicha masa es el análogo a lo que es la longitud, área o volumen de un fractal ya que estas cantidades no pueden calcularse como tal. Cualquiera de sus fracciones $m(L)$ sobre el tamaño característico de esta fracción $L \gg \ell_0$, puede ser expresada como

$$m(L) = m_0(L/\ell_0 + 1)^D \quad (3.1)$$

donde m_0 es una constante de proporcionalidad, ℓ_0 es el parámetro de corte, y D es la dimensión fractal de masa. Los fractales caracterizados por la misma dimensión fractal D , pueden tener dimensiones químicas, rutas mínimas, y dimensiones espectrales diferentes, de esta manera se puede asegurar que se trata de un fractal en específico.

3.2. Métrica fractal de medio continuo

El objetivo de la aproximación del continuo fractal consiste en el mapeo de un medio fractal intrínsecamente discontinuo en un modelo continuo fractal, para el que la masa se define como:

$$m = \int_W \rho(x_i) dV_D = \int_W \rho(x_i) c_3(x_i, D) dV_3 \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) sirve para encontrar la masa de un objeto en un espacio continuo fractal donde m es la *masa del objeto*, $\rho(x_i)$ es la *densidad* del objeto que depende de tres coordenadas espaciales, dV_D es un *elemento de volumen infinitesimal en el continuo fractal* (dV_3 es lo mismo pero en el espacio continuo euclídeo) y $c_3(x_i, D) = dV_D/dV_3$ es la *densidad de estados* en el continuo fractal [27, 28].

El elemento infinitesimal de volumen del continuo fractal puede presentarse en la siguiente forma:

$$dV_D = dl_{D1}(x_1) dl_{D2}(x_2) dl_{D3}(x_3) = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} dx_1 dx_2 dx_3 = c_3 dV_3 \quad (3.3)$$

Donde $c_3 = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)}$. Para el coeficiente de transformación de superficie $c_2^{(k)}$ se considera un elemento cúbico, $dV_3 = dx_1 dx_2 dx_3$ cuyos elementos de superficie están especificados por el vector normal a lo largo de los ejes i, j o k tal como lo muestra la figura 3.2.

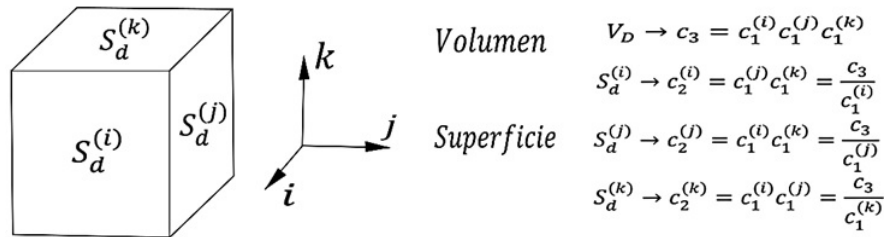


Figura 3.2: Función de los coeficientes $c_1^{(i)}$, $c_2^{(k)}$ y c_3 en la homogeneización de un cuerpo fractal de volumen dV_D , superficie dS_D y longitudes dl_D en un paralelepípedo euclidiano de volumen dV_3 , superficie dS_2 y longitud dx [29].

Por lo tanto $c_2^{(k)}$ asociado a la superficie es

$$c_2^{(k)} = c_1^{(i)} c_1^{(j)} = \frac{c_3^{(k)}}{c_1^{(k)}}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq k \quad (3.4)$$

En el continuo fractal homogéneo, la densidad de estados puede ser expresada como:

$$c_3(x_i, D) = c_1^{(k)} c_2^{(k)} = \ell_k^{\zeta_k - 1} (x_k / \ell_k + 1)^{\zeta_k - 1} c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k) \quad (3.5)$$

donde ℓ_i es el *parámetro de corte* a lo largo del eje cartesiano i y el *exponente de escala* ζ_k caracteriza la densidad de estados a lo largo de la dirección de la normal a la intersección y que está definida como

$$\zeta_k = D - d_k, \quad (3.6)$$

tal que,

$$\sum_i^3 \zeta_i \neq D \quad (3.7)$$

3.3. Cálculo fraccional en el continuo fractal

Para describir la dinámica del continuo fractal es necesario definir un cálculo fraccional de acuerdo a la métrica fractal definida por las ecuaciones (3.2) - (3.6) y considerando las propiedades del continuo fractal.

El operador laplaciano en el espacio euclidiano de n dimensiones puede ser generalizado para el espacio euclidiano de α dimensiones con la dimensión topológica fraccional α . El operador laplaciano local fraccional está dado como:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{D-2}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \quad (3.8)$$

donde los ángulos ϑ se miden relativos a cualquier eje en el espacio fraccional pasando a través del origen.

Generalizando para tres ejes coordenados ortogonales:

$$\nabla_D^2 = \sum_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i - 1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_i^3 \frac{1}{x_i^{\alpha_i - 1}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{\alpha_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (3.9)$$

donde $\alpha_i \leq 1$ son los exponentes topológicos a lo largo de los ejes cartesianos $i = 1, 2, 3$ en el espacio euclidiano tales que $\sum_i^3 \alpha_i = \alpha \leq 3$.

Por otro lado, se tiene la derivada de Hausdorff definida por:

$$\frac{d^H}{dx^\zeta} f = \left(\frac{x}{\ell_0} + 1 \right)^{1-\zeta} \frac{d}{dx} f \quad (3.10)$$

Así entonces, la derivada parcial fraccional de Hausdorff está definida en la forma:

$$\nabla_k^H = \left(\frac{x_k}{\ell_k} + 1 \right)^{1-\zeta_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.11)$$

donde los exponentes ζ_k están definidos por la expresión (3.6). Por tanto, el laplaciano fraccional para el continuo fractal puede ser definido como:

$$\Delta_H \psi = \nabla_i^H \nabla_i^H \psi = \sum_i^3 \left(\chi^{(i)} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.12)$$

donde

$$\chi^{(i)} = \ell_i^{\zeta_i - 1} / c_1^{(i)}(x_i) = (x_i / \ell_i + 1)^{1 - \zeta_k} \quad (3.13)$$

Es directo presentar el Laplaciano fraccional generalizado para el continuo fractal con la dimensión química:

$$d_\ell = \sum_i^3 \alpha_i = \alpha \leq 3, \quad (3.14)$$

en la forma:

$$\Delta_H \psi = \sum_i^3 \left(\chi^{(i)} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\alpha_i - D + d_\ell}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.15)$$

considerando la topología fractal, tal como la métrica fractal del continuo fractal.

Se verifica que las derivadas parciales de Hausdorff obedecen las mismas reglas que las derivadas parciales convencionales. Además, se pueden construir los operadores fraccionarios locales (de Hausdorff) para el cálculo vectorial sobre el continuo fractal. El operador nabla (de Hausdorff) se define como:

$$\vec{\nabla}^H = \vec{e}_1 \chi^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \chi^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \chi^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (3.16)$$

donde \vec{e}_i son los vectores base. De acuerdo a esto, el gradiente de Hausdorff se define como el operador nabla (3.16) aplicado a una función escalar $\psi(x_i)$:

$$\vec{\nabla}^H \psi = (\nabla_1^H \psi) \vec{e}_1 + (\nabla_2^H \psi) \vec{e}_2 + (\nabla_3^H \psi) \vec{e}_3 \quad (3.17)$$

mientras que la divergencia de Hausdorff del vector campo $\vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ está definido como el producto escalar:

$$\vec{\nabla}^H \cdot \Psi = \sum_i^3 \nabla_i^H \Psi_i \quad (3.18)$$

La divergencia de Hausdorff representa la razón de flujo total a través de una superficie encerrada para el continuo fractal delimitado por la superficie cuando el volumen se encoge hacia ℓ_0^3 . Esto lleva a la definición de operador rotacional de Hausdorff del vector de campo y está definido de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi} = \nabla_i^H \Psi_j = \varepsilon_{kij} \nabla_i^H \Psi_j \quad (3.19)$$

Además, se cumplen las relaciones del cálculo vectorial común

$$\vec{\nabla}^H \cdot (\vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\vec{\nabla}^H \times (\vec{\nabla}^H \psi) = 0 \quad (3.21)$$

$$\vec{\nabla}^H \cdot \vec{\nabla}^H \psi = \Delta_H \psi \quad (3.22)$$

donde el operador Δ_H laplaciano de Hausdorff es definido en (3.12), mientras que el laplaciano de Hausdorff de un vector de campo está definido como:

$$\Delta_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\Psi} - \vec{\nabla}^H \times \vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi} \quad (3.23)$$

También, se cumple el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\int_A \vec{\Psi} \cdot \hat{n} dA_d = \int_W \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\Psi} dV_d \quad (3.24)$$

donde $\vec{\Psi} = \Psi_k \vec{e}_k$ es cualquier vector de campo y $\hat{n} = n_k \vec{e}_k$ es un vector normal.

Por otro lado, el teorema de Stokes se conserva, se escribe como:

$$\oint_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{x}^{(\zeta)} = \int_A \hat{n} \cdot \vec{\nabla}^H \times \vec{f} dA_d \quad (3.25)$$

Todos los operadores fraccionarios presentados anteriormente son utilizados en una variedad de ecuaciones diferenciales que modelan algún fenómeno físico en particular. Para plantear las ecuaciones diferenciales fraccionarias se lleva a cabo un proceso de homogeneización, para pasar de un medio poroso a un medio continuo. Este procedimiento aplica para un segmento diferencial de línea dl_D asociado a un diferencial dx , un segmento de superficie dS_D asociado a un diferencial dS_2 y a un diferencial de volumen dV_D asociado a un diferencial dV_3 , cada uno con su respectiva densidad de estados c_1, c_2 y c_3 .

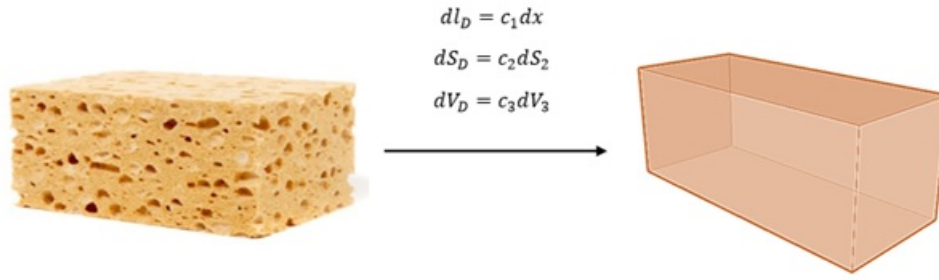


Figura 3.3: Proceso de homogeneización a partir de configuraciones de geometría.

Ecuación diferencial de onda sísmica de orden fraccionario.

Con ayuda del cálculo fraccionario, se plantean las ecuaciones de onda sísmicas fraccionarias para las ondas P y S las cuales se muestran en la siguiente tabla:

	Orden entero	Orden fraccionario
Onda P	$\frac{\partial^2 \phi(x,y,t)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi(x,y,t)}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^\alpha \phi(x,y,t)}{\partial x_i^\alpha} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi(x,y,t)}{\partial t^2}$
Onda S	$\frac{\partial^2 \gamma(x,y,t)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \gamma(x,y,t)}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^\alpha \gamma(x,y,t)}{\partial x_i^\alpha} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \gamma(x,y,t)}{\partial t^2}$

Tabla 3.1: En la segunda columna se observan las ecuaciones de onda P y S de orden de derivación entero, en la tercera columna se observan ecuaciones de onda P y S escritas con un orden de derivación fraccionario.

Los valores de a y b mostrados en la tabla 3.1 son las velocidades de las ondas P y S, respectivamente, ϕ y γ las posiciones en el medio de las ondas P y S, y α es el orden fraccionario de la derivada con respecto a la posición. Estas ecuaciones serán resueltas con ayuda del cálculo fraccionario haciendo uso de la dimensión fractal de un medio poroso hipotético, usando el orden de la derivada, ya que esto ayudará a incluir la geometría del medio en las ecuaciones de movimiento de la onda sísmica.

Capítulo 4

Desarrollo del problema

4.1. Desarrollo del problema usando el método de elemento finito

La ecuaciones diferenciales de ondas sísmicas P y S fraccionaria mostradas en la tabla (3.1) requieren de un tratamiento matemático complicado para solucionarlas de forma analítica, si es que dichas soluciones existen, por lo que, es preferible recurrir a algún método numérico para obtener una solución. Por tal razón, en este trabajo se aplica el método del elemento finito el cual permite trabajar un medio mediante pequeñas partes discretas. Para este caso se usan elementos triangulares lineales en 2D formulados en la sección 2.1.2 y en conjunto con el método de los residuos ponderados de Galerkin se obtiene la discretización correspondiente.

4.1.1. Discretización de la onda P fraccionaria

Partiendo de la ecuación de onda para la onda sísmica P, es decir

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x, y, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

usando el Laplaciano fraccionario del continuo fractal $\Delta_H \phi = \sum_{i=1}^2 (\chi^{(i)})^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + \frac{1-\zeta_i}{x_i + \ell_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right]$ la ecuación (4.1) queda como:

$$\left(\chi^{(x)} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1-\zeta_x}{x + \ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \left(\chi^{(y)} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1-\zeta_y}{y + \ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \left(\chi^{(x)} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1-\zeta_x}{x + \ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - a^2 \left(\chi^{(y)} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1-\zeta_y}{y + \ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = 0 \quad (4.3)$$

donde $\chi^{(i)} = \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1\right)^{1-\zeta_i}$

Multiplicando la ecuación (4.3) por $\left((\chi^{(x)})^2 (\chi^{(y)})^2\right)^{-1}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left((\chi^{(x)})^2 (\chi^{(y)})^2\right)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{a^2}{(\chi^{(y)})^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{a^2}{(\chi^{(x)})^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 (\chi^{(x)})^2 (\chi^{(y)})^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(\chi^{(y)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\chi^{(x)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \\ - a^2 \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, aplicando el método de los residuos ponderados de Galerkin a la ecuación (4.4) queda:

$$\begin{aligned} \int_S w \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dS_D - \int_S w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(\chi^{(y)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\chi^{(x)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] a^2 (\chi^{(x)})^2 (\chi^{(y)})^2 dS_D \\ - \int_S w \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] a^2 dS_D = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si $w = N_i$, donde N_i son las funciones de forma o funciones de interpolación, la ecuación (4.5) queda como:

$$\begin{aligned} \int_S N_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dS_D - \int_S N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(\chi^{(y)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\chi^{(x)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] a^2 (\chi^{(x)})^2 (\chi^{(y)})^2 dS_D \\ - \int_S N_i \left[(\chi^{(x)})^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\chi^{(y)})^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] a^2 dS_D = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

La segunda integral se resolverá por partes mediante los siguientes cambios de variable:

$$u = N_i a^2 (\chi^{(i)})^2 (\chi^{(j)})^2 \text{ y } dv = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{(\chi^{(j)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx_i$$

$$\text{y en consecuencia: } du = a^2 (\chi^{(j)})^2 \left[(\chi^{(i)})^2 \frac{\partial N_i}{\partial x_i} + N_i \frac{2(1-\zeta_i)}{\ell_i} \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{1-2\zeta_i} \right] dx_i \text{ y } v = \frac{1}{(\chi^{(j)})^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Por lo tanto, después de la integración, la ecuación (4.6) se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \int_S N_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dS_D + \int_S a^2 \left[\left(\chi^{(x)} \right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\chi^{(y)} \right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dS_D \\
& + \int_S \left[N_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{2a^2(1-\zeta_x)}{\ell_x} \left(\frac{x}{\ell_x} + 1 \right)^{1-2\zeta_x} \right) + N_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{2a^2(1-\zeta_y)}{\ell_y} \left(\frac{y}{\ell_y} + 1 \right)^{1-2\zeta_y} \right) \right] dS_D \\
& - \oint_{\Gamma} \left[\frac{1}{\left(\chi^{(y)} \right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{1}{\left(\chi^{(x)} \right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] N_i a^2 \left(\chi^{(x)} \right)^2 \left(\chi^{(y)} \right)^2 dl_D \\
& - \int_S N_i \left[\left(\chi^{(x)} \right)^2 \frac{1-\zeta_x}{x+\ell_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\chi^{(y)} \right)^2 \frac{1-\zeta_y}{y+\ell_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] a^2 dS_D = 0 \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación (4.7) de una manera más compacta:

$$\int_S N_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dS_D + \sum_{j=1}^2 \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{1j} dS_D - \sum_{j=1}^2 \int_S N_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{2j} dS_D - \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} N_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{1j} n_j dl_D = 0 \quad (4.8)$$

Usando la densidad de estados correspondientes $dS_D = c_2 dS_2$ y $dl_D = c_1 dl_1$.

$$\int_S N_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^2 \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{1j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \int_S N_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{2j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} N_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \gamma_{1j} n_j c_1 dl_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\text{Donde } \gamma_{1j} = a^2 \left(\chi^{(j)} \right)^2 \text{ y } \gamma_{2j} = \left[\frac{2a^2(1-\zeta_j)}{\ell_j} \left(\frac{x_j}{\ell_j} + 1 \right)^{1-2\zeta_j} - \left(\chi^{(j)} \right)^2 \left(\frac{1-\zeta_j}{x_j+\ell_j} \right) \right]$$

Por otro lado, la solución de (4.9) tiene la forma matricial:

$$\phi(x, y, t) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \Phi \quad (4.10)$$

Obteniendo cada una de las derivadas de la solución propuesta (4.10):

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_j} & \frac{\partial N_2}{\partial x_j} & \frac{\partial N_3}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{x_j}^T \Phi \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1(t) \\ \ddot{\phi}_2(t) \\ \ddot{\phi}_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \ddot{\Phi} \quad (4.12)$$

Remplazando el valor de las parciales (4.11) y (4.12) en la ecuación (4.9):

$$\ddot{\Phi} \int_S N_i \mathbf{N}^T c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^2 \Phi \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \Phi \int_S N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \Phi \oint_{\Gamma} N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} n_j c_1 dl_1 = 0 \quad (4.13)$$

La ecuación (4.13) es utilizada para cada una de las N_i , por lo tanto, generalizando, toma la siguiente forma matricial:

$$[\mathbf{M}^1] \ddot{\Phi} + [\mathbf{K}^1 - \mathbf{K}^2] \Phi = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Donde:

$$\mathbf{M}^1 = \int_S \mathbf{N} \mathbf{N}^T c_2 dS_2 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}^1 = \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2j} c_2 dS_2 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{K}^2 = \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} n_j c_1 dl_1 \quad (4.17)$$

4.1.2. Discretización de la onda S fraccionaria

Partiendo de la ecuación de onda para la onda sísmica S,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\gamma}(x, y, t) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \vec{\gamma}(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

para el laplaciano de un vector se tiene la identidad:

$$\Delta_H \vec{\gamma} = \vec{\nabla}^H \cdot (\vec{\nabla}^H \vec{\gamma}) \quad (4.19)$$

Donde $\vec{\nabla}^H = e_x \chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} + e_y \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} + e_z \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z}$

Aplicando para un vector de onda en dos dimensiones:

$$\Delta_H \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} & \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} & \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} & \chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} & 0 \\ \chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} & \chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} & 0 \\ \chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} & \chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_H \vec{\gamma} &= \left(\chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} \right) \right) \vec{e}_x \\ &+ \left(\chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} \right) \right) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sustituyendo el laplaciano (4.21) en la ecuación de onda S (4.18) da como resultado dos ecuaciones, una para la componente x y otra para la componente y .

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} - b^2 \left(\chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial t^2} - b^2 \left(\chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (4.23)$$

Aplicando el método de los residuos ponderados de Galerkin a la ecuación (4.22):

$$\int_S N_i \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} dS_D - \int_S N_i \left[\chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(x)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi^{(y)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi^{(z)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} \right) \right] b^2 dS_D = 0 \quad (4.24)$$

La segunda integral se resolverá por partes mediante los siguientes cambios de variable: $u = N_i \chi^{(i)} b^2$ y $dv = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\chi^{(i)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_i} \right) dx_i$.

y en consecuencia: $du = \left(b^2 \chi^{(i)} \frac{\partial N_i}{\partial x_i} + b^2 N_i \frac{(1-\zeta_i)}{\ell_i} \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{-\zeta_i} \right) dx_i$ y $v = \chi^{(i)} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_i}$.

Por lo tanto, después de la integración por partes, la ecuación (4.24) queda desarrollada como:

$$\begin{aligned} &\int_S N_i \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} dS_D + \int_S \left[\left(\chi^{(x)} \right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \left(\chi^{(y)} \right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \left(\chi^{(z)} \right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} \right] b^2 dS_D \\ &+ \int_S N_i \left[\frac{(1-\zeta_x)}{\ell_x} \left(\frac{x}{\ell_x} + 1 \right)^{1-2\zeta_x} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{(1-\zeta_y)}{\ell_y} \left(\frac{y}{\ell_y} + 1 \right)^{1-2\zeta_y} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{(1-\zeta_z)}{\ell_z} \left(\frac{z}{\ell_z} + 1 \right)^{1-2\zeta_z} \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} \right] b^2 dS_D \\ &- \oint_{\Gamma} N_i \left[\left(\chi^{(x)} \right)^2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} n_x + \left(\chi^{(y)} \right)^2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} n_y + \left(\chi^{(z)} \right)^2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} n_z \right] b^2 dl_D = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Reescribiendo la ecuación (4.25) de una manera más compacta:

$$\int_S N_i \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} dS_D + \sum_{j=1}^3 \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{3j} dS_D + \sum_{j=1}^3 \int_S N_i \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{4j} dS_D - \sum_{j=1}^3 \oint_{\Gamma} N_i \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{3j} n_j dl_D = 0 \quad (4.26)$$

Usando la densidad de estados correspondiente $dS_D = c_2 dS_2$ y $dl_D = c_1 dl_1$.

$$\int_S N_i \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{3j} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \int_S N_i \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{4j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^3 \oint_{\Gamma} N_i \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_j} \gamma_{3j} n_j c_1 dl_1 = 0 \quad (4.27)$$

Donde $\gamma_{3j} = b^2 (\chi^{(j)})^2$ y $\gamma_{4j} = \left[\frac{(1-\zeta_j)}{\ell_j} \left(\frac{x_j}{\ell_j} + 1 \right)^{1-2\zeta_j} \right] b^2$.

Por otro lado, análogamente a (4.9), la solución de (4.27) tiene la forma matricial:

$$\gamma(x, y, t) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{x1}(t) \\ \gamma_{x2}(t) \\ \gamma_{x3}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \Gamma_x \quad (4.28)$$

Obteniendo cada una de las derivadas de la solución propuesta (4.28):

$$\frac{\partial \gamma(x, y, t)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_j} & \frac{\partial N_2}{\partial x_j} & \frac{\partial N_3}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{x1}(t) \\ \gamma_{x2}(t) \\ \gamma_{x3}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{x_j}^T \Gamma_x \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma(x, y, t)}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_{x1}(t) \\ \ddot{\gamma}_{x2}(t) \\ \ddot{\gamma}_{x3}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \ddot{\Gamma}_x \quad (4.30)$$

Remplazando el valor de las parciales (4.29) y (4.30) en la ecuación (4.27):

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma}_x \int_S N_i \mathbf{N}^T c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \int_S N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{4j} c_2 dS_2 \\ - \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \oint_{\Gamma} N_i \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} n_j c_1 dl_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

La ecuación (4.31) es utilizada para cada una de las N_i , por lo tanto se obtiene la siguiente forma matricial:

$$\ddot{\Gamma}_x \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \int_S \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{4j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^3 \Gamma_x \oint_{\Gamma} \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} n_j c_1 dl_1 = 0 \quad (4.32)$$

Para la componente en y (ecuación (4.23)), se obtiene una ecuación similar a (4.32):

$$\ddot{\Gamma}_y \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_y \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_y \int_S \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{4j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^3 \Gamma_y \oint_{\Gamma} \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} n_j c_1 dl_1 = 0 \quad (4.33)$$

Sumando las ecuaciones (4.32) y (4.33) queda como resultado la siguiente forma matricial:

$$[\mathbf{M}^2] [\ddot{\Gamma}_x + \ddot{\Gamma}_y] + [\mathbf{K}^3 - \mathbf{K}^4] [\Gamma_x + \Gamma_y] = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

Donde:

$$\mathbf{M}^2 = \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T c_2 dS_2 \quad (4.35)$$

$$\mathbf{K}^3 = \sum_{j=1}^3 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} c_2 dS_2 + \sum_{j=1}^3 \int_S \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{4j} c_2 dS_2 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{K}^4 = \sum_{j=1}^3 \oint_{\Gamma} \mathbf{N}\mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{3j} n_j c_1 dl_1 \quad (4.37)$$

Resultados y discusión

Una vez resueltas las integrales que aparecen en la ecuación (4.13) obtenidas de la discretización se obtiene una expresión general para el elemento (ij) perteneciente a la ecuación diferencial de la onda sísmica P:

$$M_{ij}^1 \ddot{\phi}_j(t) + [K^1 + K^2]_{ij} \phi_j(t)$$

Misma que al ser desarrollada toma la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta \ddot{\phi}_j(t)}{4A^2} \left\{ A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \right. \\ & + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\ell_x \zeta_x + \ell_y \zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \ell_y \right] \\ & + (A_{i1}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_x \zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] + (A_{i2}A_{j2}) \left[\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_y \zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \left. \right\} \\ & + \frac{\phi_j(t)}{4A^2} \left\{ a^2 A_{i1}A_{j1} (\ell_x)^{2(\zeta_x - 1)} \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 1)} + a^2 A_{i2}A_{j2} (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \right. \\ & + \zeta_x(\zeta_x - 1)(\ell_x)^{2(\zeta_x - 1)}(1 - 2a^2) \left[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1} \left(\frac{1 - \zeta_x}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} + \ell_x \right) - A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \\ & + \zeta_y(\zeta_y - 1)(\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)}(1 - 2a^2) \left[A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1 - \zeta_y}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} + \ell_y \right) - A_{i1}A_{j2} \left(\ell_x - \frac{\zeta_x}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \\ & + \frac{\sqrt{2}a^2\phi_j(t)}{8A^2} \left\{ \ell_y^{2(\zeta_y - 1)} \left[\frac{1}{3 - \zeta_y} (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) + \frac{1}{2 - \zeta_y} (A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2}\ell_y + A_{i1}A_{j2}(1 - \ell_x)) \right] \right. \\ & \left. - \ell_x^{2(\zeta_x - 1)} \left[\frac{1}{3 - \zeta_x} (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) + \frac{1}{2 - \zeta_x} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(1 - \ell_y)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Esta expresión general posee la información de los parámetros fractales bidimensionales asociados a la geometría propia del medio en el que se propaga la onda sísmica del tipo P. Dichos parámetros son los exponentes de escala ζ_i y los parámetros de corte ℓ_i obtenidos por medio del laplaciano fraccionario del continuo fractal y las densidades de estado c_1 y c_2 . Con ayuda de esta expresión se da a conocer un

nuevo modelo matemático para la solución de la ecuación de onda sísmica P. Esta ecuación puede ser solucionada numéricamente con ayuda de un software y finalmente visualizar los resultados gráficamente, inclusive, en forma de simulación dinámica.

Para el caso de las soluciones de las integrales presentes en las ecuaciones (4.32) y (4.33) pertenecientes a la ecuación de onda sísmica tipo S, no se realizan en este trabajo, solo se ofrece la discretización mediante los residuos ponderados de Galerkin, pero no las soluciones de las integrales. Una vez discretizando por elemento finito ambas ondas sísmicas P y S, se analizaron y encontraron las siguientes dificultades y detalles principales en el cálculo de éstas:

En la discretización de la onda tipo P se presentó lo siguiente:

- Las integrales presentan un elevado grado de dificultad para ser resueltas de manera analítica, ya que las variables involucradas provienen de las funciones de forma de elementos triangulares pertenecen a un espacio entero euclideo, por lo que, se buscó el cambio de variable correspondiente y que perteneciera a una región en particular donde las soluciones de dichas integrales tuvieran solución analítica.
- Se observó que las integrales en la discretización de la onda P tienen una solución analítica. Utilizando cambios de variable correspondientes para un tipo de triángulo en particular y en conjunto con el uso de las funciones Beta y Gamma (ver Apéndice C), se logró obtener una expresión general (ecuación (4.38)) para la solución espacio-temporal de propagación de onda sísmica P.

En la discretización de la onda tipo S se presentaron las siguientes dificultades:

- El operador laplaciano de un campo vectorial incluyó en el cálculo parámetros fractales correspondientes a la coordenada z en una placa bidimensional.
- Al analizar y definir los límites en la discretización de la onda tipo S, se presentó dificultad ya que al tratarse de una placa bidimensional, es necesario hacer consideraciones adicionales sobre las integrales de frontera.
- En la onda tipo S las integrales de línea en la frontera del elemento triangular son rectas en el espacio y ya no en el plano, se necesita buscar un método de solución factible para ese tipo de integrales que incluyen la variable z .

Por lo tanto, en el caso de la onda P se ha encontrado que el cálculo fraccionario del continuo fractal nos permite estudiar de otra manera la propagación de una onda sísmica en un medio poroso, incluyendo así una característica propia del medio, su geometría. Para el caso de una onda tipo S se observó que un tratamiento bidimensional no es suficiente para darle la interpretación física correcta, por lo que sería necesario llevarlo a un tratamiento tridimensional y analizar su comportamiento y su método de solución correspondiente.

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se emplean los conocimientos adquiridos durante la estadía en la carrera, particularmente, la materia de elemento finito fue fundamental para llevar a cabo las discretizaciones de las ecuaciones de ondas sísmicas fraccionarias. También, se ha recurrido a la herramienta del cálculo fraccionario, específicamente, el cálculo fraccionario del continuo fractal, utilizando los operadores presentados en la sección (3.3). Esta herramienta es fundamental aquí, ya que, debido a su formulación ayuda a incluir las características geométricas propias del medio en el que las ondas sísmicas se están propagando (exponentes de escala ζ_i y parámetros de corte ℓ_i), vinculando de manera directa la dimensión fractal con el orden de derivación no entero. Dicho de otra manera, dimensiones no enteras (dimensiones del medio) están asociadas con ordenes de derivación no entero.

Al utilizar el método de los residuos ponderados de Galerkin, en conjunto con las funciones de forma para elementos triangulares bidimensionales, arrojó una serie de integrales con características de los parámetros fractales. Tales integrales fueron resueltas de manera analítica haciendo uso de cambios de variable y de las funciones Beta y Gamma, encontrando una expresión general para la propagación de una onda sísmica tipo P. Desafortunadamente, para el caso de la onda sísmica tipo S no se encontró solución analítica ya que se requieren consideraciones adicionales para tratar con tales parámetros.

Cabe señalar que, hoy en día existe una gran variedad de información del cálculo fraccionario, así como varias definiciones de operadores diferenciales fraccionarios (Riez, Caputo, Riemann–Liouville,...), por lo que, en este trabajo se hizo enfoque en la mostrada en la sección 3.2. Esto implica que, el uso de tales operadores está en constante estudio creando así nuevos modelos matemáticos los cuales pueden dar resultados diferentes a los que se obtuvieron en este trabajo.

Para finalizar, se resalta el hecho de que con este trabajo quedan sentadas las bases para llevar a cabo la implementación correspondiente de cada elemento maestro según sea el caso. Estas implementaciones en software ayudarán a comprobar la validez de los resultados obtenidos.

Trabajo a futuro

Cabe mencionar que la resolución de integrales se obtuvo analíticamente y de forma general para una geometría triangular particular y para cualquier valor de parámetro fractal, por lo que, sería de interés como trabajo futuro y/o continuación del presente, obtener soluciones a las ecuaciones de onda para geometrías triangulares arbitrarias y llevar a cabo la simulación dinámica correspondiente, encontrando así las limitaciones y el rango en que son válidas tales soluciones.

Apéndices

Apéndice A

Función Gamma y función Beta

La **función Gamma**^{*} denotada por $\Gamma(n)$ se define como:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Las cuales convergen para $n > 0$. Algunas relaciones de recurrencia de la función Gamma:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n = 0, 1, 2, \dots$$

para valores de negativos no enteros de n :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

Por otro lado, la **función Beta** denotada por $B(m, n)$ se define como:

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

Que es convergente para $m > 0, n > 0$.

La relación entre la función Gamma y la función Beta está dada por:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

La cual también puede incluir valores de $m < 0, n < 0$ no enteros.

^{*}Si el lector desea profundizar acerca de las funciones Gamma y Beta, recomiendo el libro *Mathematical methods for physicists* de G. B. Arfken, 6^a ed. [30].

Apéndice B

Integral doble de Dirichlet

La integral doble de Dirichlet* es un tipo especial de integral definida de la siguiente manera:

$$D_2 = \iint_T x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy, \quad T(\text{Triangulo}) : \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

para obtener su valor se realiza una transformación como se observa en la siguiente figura.

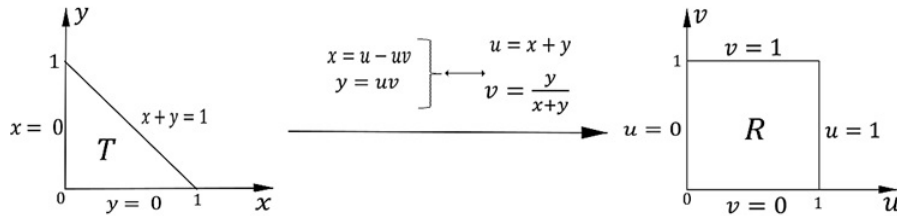


Figura B.1: transformación del sistema (x, y) al sistema (u, v) .

Observando los cambios de variable de la figura B.1 y sin más consideraciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} D_2 &= \iint_R (u - uv)^{p-1}(uv)^{q-1}(1 - u)^{r-1}(u)dudv = \iint_R u^{p+q-1}(1 - u)^{r-1} [v^{q-1}(1 - v)^{p-1}] dudv \\ &= \int_0^1 u^{p+q-1}(1 - u)^{r-1}du \int_0^1 v^{q-1}(1 - v)^{p-1}dv = B(p + q, r)B(p, q) = \frac{\Gamma(p + q)\Gamma(r)}{\Gamma(p + q + r)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución de la integral doble de Dirichlet es:

$$D_2 = \iint_T x^{p-1}y^{q-1}(1 - x - y)^{r-1}dxdy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p + q + r)}$$

*Para un mayor conocimiento acerca de la integral de Dirichlet, consultar el libro *Cálculo integral y aplicaciones* de F. Granero Rodríguez. [31]

Apéndice C

Resolución de integrales

Obtención de los valores de la matriz:

$$\mathbf{M}^1 = \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T c_2 dS_2$$

El producto $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ esta dado por:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 & N_1N_3 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_3 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Donde las N_i son las funciones de forma, están definidas como:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Por lo tanto, el producto de N_iN_j viene dado por la siguiente expresión:

$$N_iN_j = \frac{1}{4A^2} \left\{ A_{io}A_{j0} + (A_{io}A_{j1} + A_{i1}A_{j0})x + (A_{io}A_{j2} + A_{i2}A_{j0})y \right. \\ \left. + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1})xy + A_{i1}A_{j1}x^2 + A_{i2}A_{j2}y^2 \right\} \quad (\text{C.3})$$

En consecuencia, el elemento M_{ij}^1 de la matriz \mathbf{M}^1 queda expresado de la siguiente manera:

$$M_{ij}^1 = \frac{1}{4A^2} \int_S \left\{ A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0})x + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0})y \right. \\ \left. + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1})xy + A_{i1}A_{j1}x^2 + A_{i2}A_{j2}y^2 \right\} c_2 dS_2 \quad (\text{C.4})$$

Ya que se esta trabajando el proceso de homogeinización (pasar de un medio poroso a un medio homogéneo), como caso particular se traslada el espacio (x, y) a un espacio $(x + \ell_x, y + \ell_y)$ mediante los cambios de variable, $u_x = x + \ell_x$ y $u_y = y + \ell_y$, tal como lo muestra la figura C.1.

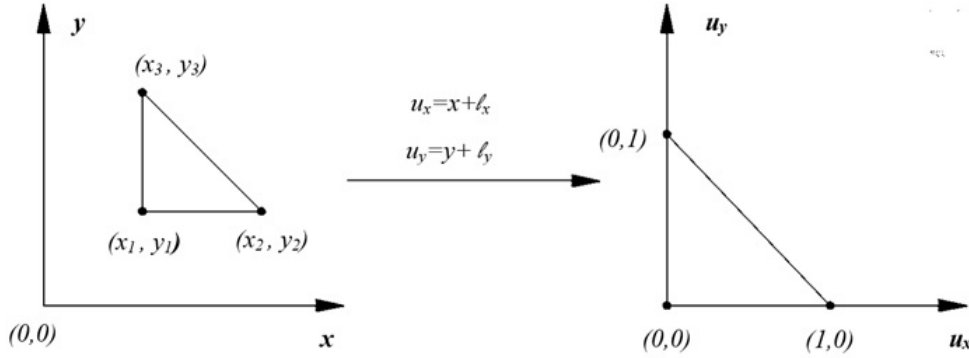


Figura C.1: traslado de cordenadas (x, y) a (u_x, u_y) .

Como consecuencia, la función de transformación $c_2 dS_2$ se convierte en $u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$, de acuerdo con la expresión (3.5). Sustituyendo estos cambios de variable en la expresión para M_{ij}^1 , se obtienen seis integrales a resolver, las cuales son las siguientes:

1. $\frac{1}{4A^2} A_{i0}A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$
2. $\frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$
3. $\frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$
4. $\frac{1}{4A^2} (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$
5. $\frac{1}{4A^2} A_{i1}A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$
6. $\frac{1}{4A^2} A_{i2}A_{j2} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x$

Solucionando cada una de las integrales mediante un cambio de variable, haciendo $u_y = (1 - u_x)t$, entonces $du_y = (1 - u_x)dt$ y cambiando los limites $t(u_y = 0) = 0$ y $t(u_y = 1 - u_x) = 1$. Para la primera integral se tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned}
1. \quad \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x &= \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} (1-u_x)^{\zeta_y} t^{\zeta_y-1} dt du_x \\
&= \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} \int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} (1-u_x)^{\zeta_y} du_x
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la función beta mostrada en el apéndice A, $B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} B(\zeta_x, \zeta_y + 1)$$

Ahora haciendo uso de la siguiente propiedad $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (ver apéndice A), la ecuación anterior queda como:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{1}{\zeta_y} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y + 1)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$$

Utilizando la propiedad $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)} = \frac{1}{4A^2} A_{i0} A_{j0} \Theta \quad (\text{C.5})$$

donde $\Theta = \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 1)}$.

Aplicando el mismo método a las demás integrales se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
= \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] \Theta \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j2} + A_{i2} A_{j0}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} du_y du_x \\
= \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j2} + A_{i2} A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \Theta \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{4.} \quad \frac{1}{4A^2}(A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y)u_x^{\zeta_x-1}u_y^{\zeta_y-1}du_ydu_x \\
& = \frac{1}{4A^2}(A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x\zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\ell_y\zeta_x + \ell_x\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x\ell_y \right] \Theta
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{5.} \quad \frac{1}{4A^2}A_{i1}A_{j1} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_x - \ell_x)^2u_x^{\zeta_x-1}u_y^{\zeta_y-1}du_ydu_x \\
& = \frac{1}{4A^2}A_{i1}A_{j1} \left[\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_x\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \Theta
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{6.} \quad \frac{1}{4A^2}A_{i2}A_{j2} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} (u_y - \ell_y)^2u_x^{\zeta_x-1}u_y^{\zeta_y-1}du_ydu_x \\
& = \frac{1}{4A^2}A_{i2}A_{j2} \left[\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_y\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \Theta
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Sumando las 6 integrales (ecuaciones (C.5) - (C.10)) se obtiene una expresión general para el elemento M_{ij}^1 perteneciente a la matriz \mathbf{M}^1 expresado por:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^1 & = \frac{\Theta}{4A^2} \left\{ A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \right. \\
& + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x\zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\ell_y\zeta_x + \ell_x\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x\ell_y \right] \\
& + (A_{i1}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_x\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] \\
& \left. + (A_{i2}A_{j2}) \left[\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_y\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Obtención de los valores de la matriz:

$$\mathbf{K}^1 = \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} c_2 dS_2 - \sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2j} c_2 dS_2$$

Para la primera suma de integrales se tiene el siguiente desarrollo:

$$\sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{B}_{x_j} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{1j} c_2 dS_2 = \int_S \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T \gamma_{1x} c_2 dS_2 + \int_S \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T \gamma_{1y} c_2 dS_2$$

Calculando los productos de $\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T$

$$\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{11}A_{21} & A_{11}A_{31} \\ A_{11}A_{21} & A_{21}^2 & A_{21}A_{31} \\ A_{11}A_{31} & A_{21}A_{31} & A_{31}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{pmatrix} A_{12}^2 & A_{12}A_{22} & A_{12}A_{32} \\ A_{12}A_{22} & A_{22}^2 & A_{22}A_{32} \\ A_{12}A_{32} & A_{22}A_{32} & A_{32}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Para un elemento general de las matrices $\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T$, se tienen las siguientes expresiones:

$$(\mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T)_{ij} = \frac{1}{4A^2} A_{i1} A_{j1} \quad (\text{C.14})$$

$$(\mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T)_{ij} = \frac{1}{4A^2} A_{i2} A_{j2} \quad (\text{C.15})$$

Para la segunda suma de integrales se tiene:

$$\sum_{j=1}^2 \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_{x_j}^T \gamma_{2j} c_2 dS_2 = \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_x^T \gamma_{2x} c_2 dS_2 + \int_S \mathbf{N} \mathbf{B}_y^T \gamma_{2y} c_2 dS_2$$

Calculando el producto de $\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{N} \mathbf{B}_y^T$

$$\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{11}N_1 & A_{21}N_1 & A_{31}N_1 \\ A_{11}N_2 & A_{21}N_2 & A_{31}N_2 \\ A_{11}N_3 & A_{21}N_3 & A_{31}N_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{N} \mathbf{B}_y^T = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} A_{12}N_1 & A_{22}N_1 & A_{32}N_1 \\ A_{12}N_2 & A_{22}N_2 & A_{32}N_2 \\ A_{12}N_3 & A_{22}N_3 & A_{32}N_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Para un elemento general de las matrices $\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T$ y $\mathbf{N} \mathbf{B}_y^T$, se tienen las siguientes expresiones:

$$(\mathbf{N} \mathbf{B}_x^T)_{ij} = \frac{1}{2A} N_i A_{j1} = \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j1} + A_{i1} A_{j1} x + A_{i2} A_{j1} y) \quad (\text{C.18})$$

$$(\mathbf{N} \mathbf{B}_y^T)_{ij} = \frac{1}{2A} N_i A_{j2} = \frac{1}{4A^2} (A_{i0} A_{j2} + A_{i1} A_{j2} x + A_{i2} A_{j2} y) \quad (\text{C.19})$$

Con ayuda de las expresiones (C.14), (C.15), (C.18) y (C.19) se obtiene una expresión general para el elemento K_{ij}^1 perteneciente a la matriz \mathbf{K}^1 :

$$K_{ij}^1 = \frac{1}{4A^2} \left\{ A_{i1}A_{j1} \int_S \gamma_{1x}c_2dS_2 + A_{i2}A_{j2} \int_S \gamma_{1y}c_2dS_2 - \int_S (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{2x}c_2dS_2 \right. \\ \left. - \int_S (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{2y}c_2dS_2 \right\} \quad (\text{C.20})$$

De la expresión (C.20) se obtienen ocho integrales a resolver

1. $A_{i1}A_{j1} \int_S \gamma_{1x}c_2dS_2$
2. $A_{i2}A_{j2} \int_S \gamma_{1y}c_2dS_2$
3. $A_{i0}A_{j1} \int_S \gamma_{2x}c_2dS_2$
4. $A_{i1}A_{j1} \int_S x\gamma_{2x}c_2dS_2$
5. $A_{i2}A_{j1} \int_S y\gamma_{2x}c_2dS_2$
6. $A_{i0}A_{j2} \int_S \gamma_{2y}c_2dS_2$
7. $A_{i1}A_{j2} \int_S x\gamma_{2y}c_2dS_2$
8. $A_{i2}A_{j2} \int_S y\gamma_{2y}c_2dS_2$

Mediante los métodos y cambios de variable utilizados anteriormente en la solución de las integrales de la matriz \mathbf{M}^1 se obtienen los siguientes resultados para las ocho integrales:

$$1. \quad A_{i1}A_{j1} \int_S \gamma_{1x}c_2dS_2 = a^2 A_{i1}A_{j1} (\ell_x)^{2(\zeta_x-1)} \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 1)} \quad (\text{C.21})$$

$$2. \quad A_{i2}A_{j2} \int_S \gamma_{1y}c_2dS_2 = a^2 A_{i2}A_{j2} (\ell_y)^{2(\zeta_y-1)} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \quad (\text{C.22})$$

$$3. \quad A_{i0}A_{j1} \int_S \gamma_{2x}c_2dS_2 = -A_{i0}A_{j1}\zeta_x(\zeta_x - 1)(\ell_x)^{2(\zeta_x-1)}(1 - 2a^2) \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \quad (\text{C.23})$$

$$4. \quad A_{i1}A_{j1} \int_S x\gamma_{2x}c_2dS_2 = A_{i1}A_{j1}\zeta_x(\zeta_x - 1)(\ell_x)^{2(\zeta_x-1)}(1 - 2a^2) \left[\frac{1 - \zeta_x}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} + \ell_x \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \quad (\text{C.24})$$

$$5. \quad A_{i2}A_{j1} \int_S y \gamma_{2x} c_2 dS_2 = A_{i2}A_{j1} \zeta_x (\zeta_x - 1) (\ell_x)^{2(\zeta_x - 1)} (1 - 2a^2) \left[\ell_y - \frac{\zeta_y}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \quad (\text{C.25})$$

$$6. \quad A_{i0}A_{j2} \int_S \gamma_{2y} c_2 dS_2 = -A_{i0}A_{j2} \zeta_y (\zeta_y - 1) (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} (1 - 2a^2) \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{C.26})$$

$$7. \quad A_{i1}A_{j2} \int_S x \gamma_{2y} c_2 dS_2 = A_{i1}A_{j2} \zeta_y (\zeta_y - 1) (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} (1 - 2a^2) \left[\ell_x - \frac{\zeta_x}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{C.27})$$

$$8. \quad A_{i2}A_{j2} \int_S y \gamma_{2y} c_2 dS_2 = A_{i2}A_{j2} \zeta_y (\zeta_y - 1) (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} (1 - 2a^2) \left[\frac{1 - \zeta_y}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} + \ell_y \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \quad (\text{C.28})$$

Sustituyendo las expresiones (C.21)-(C.28) en la ecuación (C.20) se obtiene una expresión general para un elemento K_{ij}^1 perteneciente a la matriz \mathbf{K}^1 :

$$\begin{aligned} K_{ij}^1 = & \frac{1}{4A^2} \left\{ a^2 A_{i1}A_{j1} (\ell_x)^{2(\zeta_x - 1)} \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 1)} + a^2 A_{i2}A_{j2} (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(2 - \zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \right. \\ & + \zeta_x (\zeta_x - 1) (\ell_x)^{2(\zeta_x - 1)} (1 - 2a^2) \left[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1} \left(\frac{1 - \zeta_x}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} + \ell_x \right) \right. \\ & \left. \left. - A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x) \Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right. \\ & + \zeta_y (\zeta_y - 1) (\ell_y)^{2(\zeta_y - 1)} (1 - 2a^2) \left[A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1 - \zeta_y}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} + \ell_y \right) \right. \\ & \left. \left. - A_{i1}A_{j2} \left(\ell_x - \frac{\zeta_x}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(\zeta_x) \Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right\} \quad (\text{C.29}) \end{aligned}$$

Obtención de los valores de la matriz:

$$\mathbf{K}^2 = \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_{x_j}^T \gamma_{1j} n_j c_1 dl_1$$

Desarrollando la suma se obtiene:

$$\mathbf{K}^2 = \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_x^T \gamma_{1x} n_x c_1 dl_1 + \oint_{\Gamma} \mathbf{NB}_y^T \gamma_{1y} n_y c_1 dl_1$$

Las expresiones de los productos \mathbf{NB}_x^T y \mathbf{NB}_y^T están dados por (C.18) y (C.19). Por lo tanto, un elemento K_{ij}^2 perteneciente a \mathbf{K}^2 está dado por:

$$K_{ij}^2 = \oint_{\Gamma} \frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y) \gamma_{1x} n_x c_1 dl_1 + \oint_{\Gamma} \frac{1}{4A^2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y) \gamma_{1y} n_y c_1 dl_1 \quad (\text{C.30})$$

A continuación se muestra en la figura el elemento triangular particular con todos sus componentes a considerar en el cálculo de este trabajo en particular.

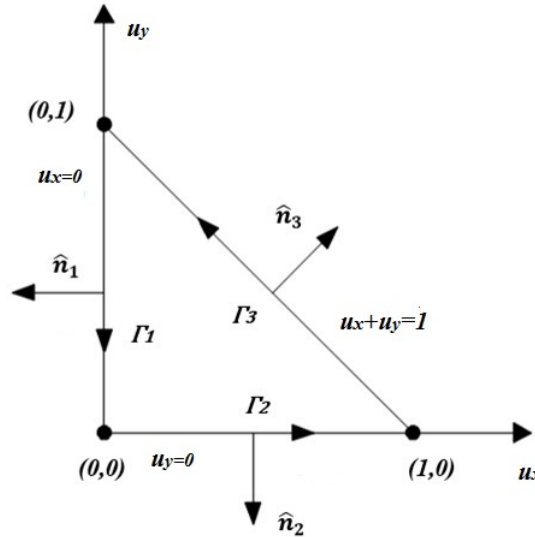


Figura C.2: Elemento triangular y sus componentes.

De acuerdo con la figura C.2 se obtiene una expresión más extendida de (C.30) para las tres trayectorias del elemento triangular.

$$\begin{aligned}
K_{ij}^2 = \frac{1}{4A^2} & \left\{ \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y)\gamma_{1x}n_{1x}c_1 dl_1 + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y)\gamma_{1x}n_{2x}c_1 dl_1 \right. \\
& + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}x + A_{i2}A_{j1}y)\gamma_{1x}n_{3x}c_1 dl_1 + \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y)\gamma_{1y}n_{1y}c_1 dl_1 \\
& \left. + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y)\gamma_{1y}n_{2y}c_1 dl_1 + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}x + A_{i2}A_{j2}y)\gamma_{1y}n_{3y}c_1 dl_1 \right\} \quad (C.31)
\end{aligned}$$

Realizando los cambios de variable manejados anteriormente $u_x = x + \ell_x$ y $u_y = y + \ell_y$ en las matrices \mathbf{M}^1 y \mathbf{K}^1 , se obtiene:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^2 = \frac{1}{4A^2} & \left\{ \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y))\gamma_{1x}n_{1x}c_1 dl_1 \right. \\
& + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y))\gamma_{1x}n_{2x}c_1 dl_1 \\
& + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y))\gamma_{1x}n_{3x}c_1 dl_1 \\
& + \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y))\gamma_{1y}n_{1y}c_1 dl_1 \\
& + \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y))\gamma_{1y}n_{2y}c_1 dl_1 \\
& \left. + \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y))\gamma_{1y}n_{3y}c_1 dl_1 \right\} \quad (C.32)
\end{aligned}$$

Por otro lado, los vectores unitarios perpendiculares a la superficie y las ecuaciones de la recta según la trayectoria que les corresponda, de acuerdo con la figura C.2, son:

	vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_i$	ecuaciones de la recta
Γ_1	$\hat{\mathbf{n}}_1 = -\mathbf{i}$	$u_x = 0$
Γ_2	$\hat{\mathbf{n}}_2 = -\mathbf{j}$	$u_y = 0$
Γ_3	$\hat{\mathbf{n}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$	$u_x + u_y = 1$

Tabla C.1: parametrizaciones

Reemplazando las componentes de los vectores unitarios y las rectas correspondientes a cada trayectoria (ver figura C.2), la expresión (C.32) queda como:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^2 = & \frac{1}{4A^2} \left\{ - \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y))\gamma_{1x}c_1 dl_1 \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(1 - u_x - \ell_x))\gamma_{1x}c_1 dl_1 \\
& - \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y)\gamma_{1y}c_1 dl_1 \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - u_y - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y))\gamma_{1y}c_1 dl_1 \right\} \quad (C.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^2 = & \frac{1}{4A^2} \left\{ - a^2 \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \left(\chi^{(x)}\right)^2 c_1 dl_1 \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(1 - u_x - \ell_x)) \left(\chi^{(x)}\right)^2 c_1 dl_1 \\
& - a^2 \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y) \left(\chi^{(y)}\right)^2 c_1 dl_1 \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - u_y - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \left(\chi^{(y)}\right)^2 c_1 dl_1 \right\} \quad (C.34)
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las $(\chi^{(i)})^2 = \left(\frac{x_x}{\ell_{x_i}} + 1\right)^{2(1-\zeta_{x_i})} = \left(\frac{u_{x_i}}{\ell_{x_i}}\right)^{2(1-\zeta_{x_i})}$ y que los diferenciales están dados por $c_1 dl_1 = u_{x_i}^{\zeta_{x_i}-1} du_{x_i}$. La ecuación (C.34) se reduce a :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^2 = & \frac{1}{4A^2} \left\{ - a^2 \int_{\Gamma_1} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(u_y - \ell_y)) \left(\frac{u_x}{\ell_x}\right)^{2(1-\zeta_x)} u_x^{\zeta_x-1} du_x \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j1}(u_x - \ell_x) + A_{i2}A_{j1}(1 - u_x - \ell_x)) \left(\frac{u_x}{\ell_x}\right)^{2(1-\zeta_x)} u_x^{\zeta_x-1} du_x \\
& - a^2 \int_{\Gamma_2} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(u_x - \ell_x) - A_{i2}A_{j2}\ell_y) \left(\frac{u_y}{\ell_y}\right)^{2(1-\zeta_y)} u_y^{\zeta_y-1} du_y \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \int_{\Gamma_3} (A_{i0}A_{j2} + A_{i1}A_{j2}(1 - u_y - \ell_x) + A_{i2}A_{j2}(u_y - \ell_y)) \left(\frac{u_y}{\ell_y}\right)^{2(1-\zeta_y)} u_y^{\zeta_y-1} du_y \right\} \quad (C.35)
\end{aligned}$$

Nótese que en la figura C.2, $u_x = 0$ para Γ_1 y $u_y = 0$ para Γ_2 , en consecuencia, las integrales sobre Γ_1 y Γ_2 de la ecuación (C.35) son nulas, por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión a integrar:

$$K_{ij}^2 = \frac{\sqrt{2}a^2}{8A^2} \left\{ -\ell_x^{2(\zeta_x-1)} \int_0^1 \left[(A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(1-\ell_y)) + (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1})u_x \right] u_x^{1-\zeta_x} du_x \right. \\ \left. + \ell_y^{2(\zeta_y-1)} \int_0^1 \left[(A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2}\ell_y + A_{i1}A_{j2}(1-\ell_x)) + (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2})u_y \right] u_y^{1-\zeta_y} du_y \right\} \quad (C.36)$$

Integrando de manera directa (C.36), se obtiene la expresión general para el elemento K_{ij}^2 perteneciente a la matriz \mathbf{K}^2

$$K_{ij}^2 = \frac{\sqrt{2}a^2}{8A^2} \left\{ \ell_y^{2(\zeta_y-1)} \left[\frac{1}{3-\zeta_y} (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) + \frac{1}{2-\zeta_y} (A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2}\ell_y + A_{i1}A_{j2}(1-\ell_x)) \right] \right. \\ \left. - \ell_x^{2(\zeta_x-1)} \left[\frac{1}{3-\zeta_x} (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) + \frac{1}{2-\zeta_x} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(1-\ell_y)) \right] \right\} \quad (C.37)$$

Ahora teniendo en cuenta que las matrices \mathbf{M}^1 y $\mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2$ son multiplicadas por $\ddot{\Phi}$ y Φ respectivamente, y con ayuda de las expresiones (C.11), (C.29) y (C.37), finalmente se obtiene una expresión general para las matrices presentes en el elemento maestro de la ecuación de onda P fraccionaria (ver tabla (3.1)):

$$\frac{\Theta \ddot{\theta}_j(t)}{4A^2} \left\{ A_{i0}A_{j0} + (A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_x \right] + (A_{i0}A_{j2} + A_{i2}A_{j0}) \left[\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} - \ell_y \right] \right. \\ \left. + (A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{\ell_y \zeta_x + \ell_x \zeta_y - \ell_x \ell_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} \right] \right. \\ \left. + (A_{i1}A_{j1}) \left[\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_x \zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_x^2 \right] + (A_{i2}A_{j2}) \left[\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + 2)(\zeta_x + \zeta_y + 1)} - \frac{2\ell_y \zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + 1} + \ell_y^2 \right] \right\} \\ \left. + \frac{\theta_j(t)}{4A^2} \left\{ a^2 A_{i1}A_{j1} (\ell_x)^{2(\zeta_x-1)} \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 1)} + a^2 A_{i2}A_{j2} (\ell_y)^{2(\zeta_y-1)} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 3)} \right. \right. \\ \left. + \zeta_x(\zeta_x - 1)(\ell_x)^{2(\zeta_x-1)}(1-2a^2) \left[A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1} \left(\frac{1-\zeta_x}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} + \ell_x \right) - A_{i2}A_{j1} \left(\ell_y - \frac{\zeta_y}{(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_y - \zeta_x + 2)} \right. \\ \left. + \zeta_y(\zeta_y - 1)(\ell_y)^{2(\zeta_y-1)}(1-2a^2) \left[A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2} \left(\frac{1-\zeta_y}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} + \ell_y \right) - A_{i1}A_{j2} \left(\ell_x - \frac{\zeta_x}{(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right) \right] \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(-\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x - \zeta_y + 2)} \right\} \\ \left. + \frac{\sqrt{2}a^2 \theta_j(t)}{8A^2} \left\{ \ell_y^{2(\zeta_y-1)} \left[\frac{1}{3-\zeta_y} (A_{i2}A_{j2} - A_{i1}A_{j2}) + \frac{1}{2-\zeta_y} (A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j2}\ell_y + A_{i1}A_{j2}(1-\ell_x)) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \ell_x^{2(\zeta_x-1)} \left[\frac{1}{3-\zeta_x} (A_{i1}A_{j1} - A_{i2}A_{j1}) + \frac{1}{2-\zeta_x} (A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j1}\ell_x + A_{i2}A_{j1}(1-\ell_y)) \right] \right\} \right\}.$$

Bibliografía

- [1] P. Valdez, *Introducción a la Geometría Fractal*, tesis para obtener el título de profesor de enseñanza media en educación matemática. Facultad de educación y humanidades departamento de ciencias de la educación escuela de pedagogía en matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile, 2016. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1998/3/Valdes_Vasquez_Patricio.pdf
- [2] B. Ross, *Historia Mathematica*, Academic Press, Inc., New Heaven Conn, Vol. 4, 1977, pp. 75-89.
- [3] H. Richard, *Fractional calculus: an introduction for physicists*, World Scientific, 2014.
- [4] H. S. Chávez, C. A. López-Ortiz, & L. Flores-Cano, *Generalities on finite element discretization for fractional pressure diffusion equation in the fractal continuum. Revista Mexicana de Física*, 65(3), 251-260, 2019.
- [5] M. Matías, *Dinámica poblacional en el espacio continuo fractal*, tesis para obtener el título de Ingeniero en Física Aplicada. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, Mex. 2019.
- [6] C. López, *Discretización por Elemento Finito de la Ecuación de Presión Transitoria de un Flujo Fractal Continuo Tridimensional*, tesis para obtener el título de Ingeniero en Física Aplicada. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, Mex. 2017.
- [7] P. J. Bentley, *Methods for improving simulations of biological systems: systemic computation and fractal proteins*, *Journal of The Royal Society Interface* 6.suppl-4, 2009.
- [8] M. Hayakawa, T. Ito, & N. Smirnova, *Geophys, Res. Lett.*, **26**. 2797, 1999.
- [9] V.P. Dimri. *Fractals in geophysics and seismology: an introduction. In Fractal Behaviour of the Earth System*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [10] P. J. Bentley, *Fractal proteins. Genetic Programming and Evolvable Machines* 5. (2004).

- [11] H. D. Sánchez-Chávez, L. Flores-Cano. *Shortest path fractal dimension for randomly crumpled thin paper sheets*. Revista mexicana de física, 64(4), 2018, pp. 415-419.
- [12] E. Rivera Henao, R. López Varona, *Geometría fractal y transformada de Fourier*, Scientia ET Technica vol XVI núm. 48, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, 2011, pp 269-274.
- [13] E. Braun, *Caos, fractales y cosas raras*. Fondo de cultura económica, 2011.
- [14] B. Mandelbrot, *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets editores S.A. Barcelona, 2006.
- [15] L. Seuront, *Fractals and multifractals in ecology and aquatic science*, CRC Press, 2019.
- [16] J. Henderson, I. G. Main., R. G. Pearce., M. Takeya, *Seismicity in north-eastern Brazil: fractal clustering and the evolution of the b value*, Geophysical Journal International, 1994, pp. 217-226.
- [17] H.O. Peitgen, H. Jürgens., D. Saupe. *Chaos and fractals: new frontiers of science*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [18] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 2004.
- [19] R. Resnick, D. Halliday, K.S. Krane. *Física, Vol. 1. 4ta*. Edición. México, CECSA, 2001.
- [20] E. Hecht. *Óptica*. 3ra edición, Addison Wesley, 2002.
- [21] S. Stein, M. Wysession. *An introduction to seismology, earthquakes and earth structure*. Blackwell Publishing Co, 2003.
- [22] W. Lowrie, *Fundamentals of geophysics*. 2d ed., 4th reprint. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [23] O. Z. R. Taylor & O. C. Zienkiewicz, *El método de los elementos finitos, 4ta*. Edición, Mc Graw - Hill, 1994.
- [24] J. N. Reddy, *Introduction to the finite element method* (2a ed.), McGraw-Hill, 1993.
- [25] L. J. Segerlind, *Applied finite element analysis*, (Vol. 316). New York: Wiley, 1976.
- [26] A. S. Balankin, & B. E. Elizarraraz, *Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow*, Physical Review E, 85(5), 056314, 2012.

-
- [27] Li, J. y Ostoja-Starzewski, *Fractal solids, product measures and fractional wave equations*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 467(2128), 1214, 2010.
- [28] Vasily E. Tarasov, *Fractional hydrodynamic equations for fractal media*, Annals of Physics, Elsevier, 2005.
- [29] M. Ostoja-Starzewski, J. Li, H. Joumaa and P. Demmie, *From fractal media to continuum mechanics*, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 94, no. 5, pp. 373-401, 2013. Available: 10.1002/zamm.201200164.
- [30] G. B. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, (6a ed.), Elsevier, 2005.
- [31] F. Granero Rodríguez, *Cálculo integral y aplicaciones*, Madrid: Pearson Educación, 2001.