Universidad Tecnólogica de la Mixteca

Extensiones de funciones semi-Lipschitz sobre espacios asimétricos

Tesis para obtener el título de:

Licenciado en matemáticas aplicadas

Presenta:

Hector Noe Flores Meza

Directora de tesis:

Dra. Luz del Carmen Álvarez Marín

Codirector de tesis:

Dr. José Margarito Hernández Morales

Huajuapan de León, Oaxaca, México. Diciembre de 2021

Dedicatoria

A mis papás, Clara y Bernardino, quienes me han brindado su amor y apoyo incondicional desde que tengo memoria.

A toda mi familia, especialmente mis siete hermanos que se encuentren lejos o cerca siempre los tengo presentes y los quiero. Por tu paciencia y soporte para ti Elizabeth.

Por último, dedico esta tesis a mis amigos, que compartimos poco tiempo, pero de calidad. Y a ti Daniela por las mil y un aventuras de estos cinco años.

Este logro también es suyo.

Agradecimientos

A todos aquellos que estuvieron presentes conmigo por el más mínimo momento que haya sido en este recorrido les agradezco.
Me cuesta calcular la magnitud que representa terminar este ciclo en mi vida. De corazón agradezco a mi familia, el mayor y mejor pilar en mi formación personal, por todos los valores y principios que me inculcaron, sin ellos no hubiera conseguido terminar una carrera. Mamá y papá gracias por la confianza y tantos sacrificios. Hermanos gracias por brindarme su mano cuando se los pedí.

A mis amigos y compañeros de la UTM: Daniela Hernández, Juan Daniel Ríos, Roberto García, Jasmín Martinez, José Ángel Mendoza, Alex Silva y los que restan; un gusto coincidir en esta etapa y gracias por todos los tipos de apoyo que me dieron en diferentes partes del camino.

Agradezco a esta casa de estudios y a la facultad por abrirme las puertas, y a cada uno de sus profesores que contribuyeron en mi formación académica y profesional, especialmente a los doctores Silvia Reyes Mora, Franco Barragán Mendoza y Jesús F. Tenorio Arvide, por los consejos y apoyos fuera y dentro de la institución.
Mil gracias a mi directora de tesis, la Dra. Luz del Carmen Álvarez Marín, por guiarme y rescatarme tantas veces durante este trabajo. A mi codirector, el Dr. José Margarito Hernández Morales y mis mis revisores el M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno, el M.M.M José Luis Carrasco Pacheco y el Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán, muchas gracias por todos sus consejos y contribuciones para enriquecer este trabajo. A todos ustedes les agradezco su conocimiento, tiempo y dedicación otorgado a mi y a esta tesis.

Índice general

Simbología

Notación	**Significado** (eventualmente puede tener otro uso)
$\mathbb{R}^+$	$\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$
$\mathbb{S}^1$	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2}\right\} = 1$
$\mathrm{Lip}\,(X,Y)$	espacio de funciones de Lipschitz
ρ	cuasi-métrica y/o cuasi-semimétrica
$\overline{\rho}$	cuasi-métrica y/o cuasi-semimétrica conjugada de ρ
ρ^s	métrica o semimétrica $\max\{\rho, \overline{\rho}\}$
q	norma y/o seminorma asimétrica
$\overline{q}$	norma y/o seminorma asimétrica conjugada de q
q^s	norma $\max\{q, \overline{q}\}$
ρ_α	para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$: $\rho_\alpha(n,m) = \begin{cases} 0, & si\ n \leq m; \\ \alpha, & si\ n > m. \end{cases}$
u	para cualquier $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = \max\{x, 0\}$.
τ_ρ	topología generada por ρ
τ_q	topología generada por q
$B(x,r)$	bola abierta con centro en x y radio r
$B[x,r]$	bola cerrada con centro en x y radio r
$\mathrm{SLip}_{\rho,q}\,(X,Y)$	espacio de funciones semi-Lipschitz
$\mathrm{S_0Lip}_{\rho,q}\,(X,Y)$	espacio de funciones semi-Lipschitz con X un conjunto punteado
$\Vert\cdot\vert_{\rho,q}$	norma asimétrica respecto a ρ, q
$\Vert f\vert_{\rho,q}$	la menor constante semi-Lipschitz para f
ω	el conjunto de números enteros no negativos
$\mathcal{C}$	el espacio de funciones de complejidad de algoritmos

Introducción

En años recientes, se ha incrementado el estudio de los espacios asimétricos debido a las distintas aplicaciones que éstos tienen en la misma matemática, particularmente en Optimización, Teoría de Aproximación [7], y en otras áreas como Complejidad de Algoritmos [9], por mencionar algunas. Wilson en 1931 [22], es el primero en introducir formalmente el concepto de cuasi-métrica, posteriormente, Kelly [11], observa que dada una cuasi-métrica, siempre es posible asociarle otra cuasi-métrica llamada su conjugada, y con ellas una semimétrica llamada la semimétrica asociada a la cuasi-métrica. Por otro lado, Alegre, Ferrer y Gregori en [2], introducen el concepto de norma asimétrica para estudiar el análisis funcional desde el punto de vista no simétrico, es decir, el análisis funcional asimétrico y desde entonces, se han estado trasladando conceptos y resultados del área de análisis funcional a esta clase de espacios no simétricos, ver por ejemplo: [1], [5], [8], [9],[12], [15]. Uno de éstos conceptos es el de función Lipschitz. Primeramente, el conjunto de funciones Lipschitz reales definidas en un intervalo real I, es denotado por $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$. Dada $f \in \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$, existe una función $F \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $F(x) = f(x)$, para toda $x \in I$, este resultado es conocido como Teorema de extensión para funciones Lipschitz. Este mismo resultado ha sido probado para funciones Lipschitz definidas entre un espacio métrico arbitrario y el campo de los números reales, quedando pendiente el teorema de extensión para funciones Lipschitz definidas entre espacios métricos arbitrarios. En 1966, Schönbeck dió un contraejemplo sobre ello, [19], en el cual construye espacios métricos y una función Lipschitz entre ellos que no puede ser extendida. Posteriormente, varios autores como Romaguera, Sánchez-Álvarez y Sanchis han trabajado en [16] y [17] con el espacio de funciones semi-Lipschitz; una función semi-Lipschitz es la extensión del concepto de función Lipschitz entre espacios no simétricos. Mustăţa en el 2001 obtiene teoremas de extensión para este nuevo tipo de funciones, ver [14].
Se tiene un amplio interés por estudiar algunos resultados en teoremas de exten-

sión de funciones semi-Lipschitz, para ello iniciamos dando la teoría de la siguiente forma:
En el capítulo 1, se proporcionan algunos conceptos del análisis funcional clásico y en los capítulos siguientes se trasladan al análisis funcional asimétrico. Se describe el espacio de funciones Lipschitz y se describe la estructura del espacio de funciones semi-Lipschitz.
Más tarde, en el segundo capítulo se estudian dos tipos de espacios asimétricos y las funciones que los caracterizan, a saber, cuasi-métrica y norma asimétrica; presentándose ejemplos así como también algunas propiedades topológicas de estos espacios. Se distinguen las diferencias entre las varias funciones que se asocian a una cuasi-métrica (norma asimétrica) como: su conjugada (norma asimétrica conjugada) y propiedades que cumplen entre ellas.
Enseguida, el tercer capítulo presenta el concepto de función semi-Lipschitz y la estructura con que se le dota al espacio donde habitan dichas funciones, se dan condiciones para que el espacio de funciones semi-Lipschitz llegue a tener la estructura de un espacio vectorial y cuando no. También se dan una serie de resultados y relaciones entre los distintos espacios de funciones semi-Lipschitz posibles al cambiar la cuasi-métrica por su conjugada, similarmente con la norma asimétrica. Para cerrar el capítulo se describe el cono normado $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ del cual se estudia una forma para que precisamente se le pueda dotar una norma asimétrica.
En el cuarto capítulo se abordan tres puntos principalmente, primero se estudia la extensión de funciones Lipschitz y se enlistan algunos teoremas que dan condiciones suficientes para garantizar la existencia de una función extensión, ver [20]. El segundo punto es una prueba de que para espacios métricos arbitrarios en general no toda función Lipschitz tiene una función extensión, mostrado en un contraejemplo de Schönbeck [19]. El último punto es sobre el ya mencionado teorema de extensión de funciones semi-Lipschitz dado por Mustăţa, se detalla la demostración, se dan ejemplos de nuestra autoría y se exhibe cuando existe unicidad en la función extensión de acuerdo al mismo artículo de Mustăţa [14].
Finalmente, en el capítulo 5 se propociona una aplicación de esta teoría sobre el área de Complejidad de Algoritmos, la cual consiste en la descripción y utilización de un método para aproximar funciones de complejidad a través de funciones semi-Lipschitz, dicha aplicación es obtenida de la tesis doctoral de Sanchéz-Álvarez [18].

Capítulo 1

Preliminares

Un concepto muy utilizado en análisis funcional clásico, que ha tenido mucha importancia durante el siglo pasado es el de función Lipschitz. La extensión del concepto de función Lipschitz al contexto de los espacios asimétricos se introduce en los años setenta, veáse [4], [13]. En el capítulo tres de la tesis se aborda esto. Iniciemos por recordar la definición de función de Lipschitz en los espacios simétricos.

Definición 1.1. *Sea I un intervalo en los números reales, una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama de Lipschitz (o que cumple la condición de Lipschitz) si existe una constante $M \geq 0$, tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

para cualesquiera $x, y \in I$.

El mismo concepto se ha generalizado a espacios métricos de la siguiente manera:

Definición 1.2. *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos, una función $f : X \to Y$ se llama función de Lipschitz, si existe una constante $L \geq 0$, tal que*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L\ d_1(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$. A L se le llama una constante de Lipschitz. Si f es una función de Lipschitz con una constante Lipschitz L, se indica de forma abreviada diciendo que f es L-Lipschitz.

Sea (X,d) un espacio métrico y $(Y,\|\cdot\|)$ un espacio normado. El conjunto $\mathrm{Lip}(X,Y) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ es Lipschitz y es acotada}\}$ es un espacio vectorial con la suma de funciones y el producto por escalar usuales (suma de imágenes y el producto de escalar con la imagen). En efecto, sean $\lambda \in \mathbb{R}$, f y g funciones L-Lipschitz y M-Lipschitz, respectivamente. Para todo $x, y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(y)\| &= \|\lambda f(x) + g(x) - \lambda f(y) + g(y)\| \\
&= \|\lambda(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)))\| \\
&= |\lambda|\,\|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\| \\
&\leq |\lambda| L d(x,y) + M d(x,y) \\
&= (|\lambda| L + M) d(x,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda f + g$ es $(|\lambda|L + M)$-Lipschitz. Obviamente la función de X a Y que es idénticamente igual a $0 \in Y$ es M-Lipschitz para todo número $M \geq 0$.
La fórmula

$$L(f) = \text{máx}\left\{\sup\left\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} : x, y \in X\ d(x,y) > 0\right\}, \|f\|_\infty\right\},$$

define una norma sobre $\mathrm{Lip}(X,Y)$, ver Weaver [21]. Note que es necesario obtener el máximo entre $\sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)} : x, y \in X\ d(x,y) > 0\right\}$ y $\|f\|_\infty$, para asegurar que la función nula sea la única que tenga norma nula. Precisamente el término $\|f\|_\infty$, es lo que permite distinguir la función nula de cualquier función constante, de hecho en el conjunto cociente de $\mathrm{Lip}(X,Y)$ sobre el conjunto de funciones constantes, el término $\sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)} : x, y \in X\ d(x,y) > 0\right\}$ es una norma.
Para el estudio de "funciones de Lipschitz" en espacios asimétricos se tienen que definir algunos espacios poco conocidos ya que suelen ser teorías que no se estudian en cursos de análisis funcional clásico, que normalmente se ven a nivel licenciatura, sobre todo para el caso de los espacios asimétricos al que dedicamos un capítulo entero de esta tesis. La siguiente definición es una estructura algebraica útil en nuestro marco teórico.

Definición 1.3. *Un cono es una tripleta $(X,+,\cdot)$ donde $(X,+)$ es un monoide abeliano, la función $\cdot\colon \mathbb{R}^+ \times X \to X$ satisface que para cada $r, s \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in X$*

1. $r \cdot (s \cdot x) = (rs) \cdot x$,

2. $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$,

3. $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$,

4. $1 \cdot x = x$.

Así como un monoide puede considerarse como un "semi-grupo", esto es, una estructura que solo carece de inversos respecto a la operación definida para ser un grupo, a un cono se le puede considerar como un "semi-espacio vectorial", porque es una estructura que carece de inversos aditivos para llegar a ser un espacio vectorial. Sin embargo, si existe el inverso aditivo de x, entonces este se denota de manera usual por $-x$. Además, el cono $(X, +, \cdot)$ se denota simplemente por X siempre y cuando no haya duda de las operaciones que están asociadas a X. Un cono X puede ser dotado de diferentes normas, de la siguiente manera.

Definición 1.4. *Sean X un cono y $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ una función tal que para cada $x, y \in X$, $r > 0$ cumple que*

1. $\|rx\| = r\,\|x\|$,

2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

3. $\|x\| = 0$ *implica que* $-x \in X$ *y* $\|-x\| = 0$,

$\|\cdot\|$ *se llama norma sobre X.*

Definición 1.5. *Sea X un cono. Una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ es una norma relativizada sobre X, si para toda $x, y \in X$ y $r > 0$, se cumple que $\|rx\| = \frac{1}{r}\|x\|$ y $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Un cono X equipado con una norma $\|\cdot\|$, se denomina *cono normado*; si $\|\cdot\|$ es una norma relativizada, el cono se denomina normado relativizadamente, vea [18]. Otros espacios análogos a los espacios métricos y los espacios vectoriales normados son los espacios semi-métricos y los espacios vectoriales con una semi-norma, respectivamente; como se observa en las siguientes definiciones:

Definición 1.6. *Dado un conjunto no vacío X, una semi-métrica sobre X es una función $d \colon X \times X \to [0, \infty)$, tal que para cada $x, y, z \in X$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$;*

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definición 1.7. *Sea* X *un espacio vectorial real. Una función* $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$, *es una semi-norma sobre* X *si para cada* $x, y \in X$, $r \in \mathbb{R}$ *se satisfacen las condiciones siguientes:*

1. $\|x\| \geq 0$*;* $x = 0$ *implica que* $\|x\| = 0$*;*

2. $\|rx\| = |r| \, \|x\|$*;*

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

En la definición de semi-métrica se puede ver que la única diferencia respecto a una métrica, es que la semi-métrica permite que existan puntos distintos separados por una distancia nula, es decir se pierde la propiedad $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, de aquí se obtienen los espacios semi-métricos. Por su parte, en la definición de semi-norma note que la única diferencia que hay respecto a una norma es la propiedad $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, lo que ahora permite que existan más de un vector con norma igual a cero. Ambos enfoques extienden o generalizan a los sendos espacios métricos y normados.

Capítulo 2

Espacios asimétricos

En general, las funciones distancia en espacios métricos y las funciones magnitud en espacios vectoriales cumplen tres propiedades, una de ellas: la simetría. De forma interesante, resulta que es posible desarrollar una teoría análoga al prescindir de la propiedad de simetría y de este hecho "surgen" algunos espacios asimétricos, por ejemplo, los espacios cuasi-métricos "surgen" de los espacios métricos al perder la simetría, mientras que de los espacios normados "surgen" los espacios normados asimétricamente, el continuo encomillado de la palabra, *surgen*, se debe a que en realidad los espacios asimétricos generalizan a los espacios métricos y precisamente este trabajo de tesis se enmarca en los dos últimos espacios asimétricos mencionados. Hay una gran cantidad de resultados conocidos en los espacios métricos y en los espacios normados, que se extienden o bien se generalizan, ahora en el marco de los espacios cuasi-métricos y los espacios normados asimétricamente, Stefan Cobzaş reune una buena cantidad de estos resultados en [6], por ejemplo, algunos resultados clásicos de análisis funcional, (operadores lineales y sus normas, teoremas tipo Hahn-Banach, principios fundamentales, aproximación etc. pp. 99, 200.) y resultados topólogicos importantes (completez, compacidad, axiomas de separación, por mencionar algunos pp. 4, 29.).
A rasgos muy generales estos espacios asimétricos mencionados son: el primero un conjunto arbitrario X, sin una estructura dotado de una función "distancia", el segundo, un conjunto con una estructura algebraica de espacio vectorial con una función "magnitud"; y en ninguno de los dos espacios (más exactamente en ninguna de las funciones) la simetría se cumple necesariamente.
Nótese que hay una estrecha relación entre el conjunto y la función pero no se habla de unicidad sobre ella. En esta dirección, en lo que sigue se definirán los dos

tipos de espacios asimétricos en cuestión.

2.1. Espacios cuasi-semimétricos

La definición de un primer tipo de espacio asimétrico viene a raíz del siguiente concepto:

Definición 2.1. *Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto no vacío X, es una función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, que para cualesquiera $x, y, z \in X$, satisface las condiciones siguientes:*

1. $\rho(x, x) = 0$,
2. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.
   Más aún, si para toda $x, y \in X$,
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$ *implica* $x = y$,

entonces ρ es llamada una cuasi-métrica.

El par (X, ρ) recibe el nombre de *espacio cuasi-semimétrico*, respectivamente *espacio cuasi-métrico*. La conjugada de una cuasi-semimétrica ρ, denotada por $\overline{\rho}$, es también una cuasi-semimétrica, ésta se define por $\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$, $x, y \in X$. El mapeo $\rho^s(x, y) = máx\{\rho(x, y),\ \overline{\rho}(x, y)\},\ x,\ y \in X$, es una semimétrica, la cual resulta ser métrica si y sólo si ρ es cuasi-métrica. Con frecuencia se trabaja con cuasi-semimétricas extendidas, entendiendo que la cuasi-semimétrica puede tomar el valor $+\infty$ para algunos pares $(x, y) \in X \times X$.
Las desigualdades que a continuación se muestran, claramente son válidas para cualesquiera $x, y \in X$:

$$\rho(y, x) \leq \rho^s(x, y) \ \text{ y } \ \overline{\rho}(x, y) \leq \rho^s(x, y). \tag{2.1}$$

Nota 2.1. Toda semimétrica y toda métrica son cuasi-semimétricas. Así como toda métrica es una cuasi-métrica.

Ejemplo 2.1. Sea $\alpha > 0$. Defina la función $\rho_\alpha \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty)$ dada por

$$\rho_\alpha(n, m) = \begin{cases} 0, & si \ \ n \leq m; \\ \alpha, & si \ \ n > m. \end{cases}$$

Se tiene que ρ_α es una cuasi-semimétrica. En efecto, $\rho_\alpha(n,n)=0$ y $\rho_\alpha(n,m)\geq 0$ para cualesquiera números $n,m\in\mathbb{N}$. Veamos que se cumple la desigualdad triangular, sean $n,m,r\in\mathbb{N}$:

Caso 1: $n\leq m$, $\rho_\alpha(n,m)=0\leq \begin{cases} 0+\alpha=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & n\leq m<r; \\ 0+0=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & n<r<m; \\ \alpha+0=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & r<n\leq m. \end{cases}$

Caso 2: $n>m$, $\rho_\alpha(n,m)=\alpha\leq \begin{cases} 0+\alpha=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & m<n<r; \\ \alpha+\alpha=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & m<r<n; \\ \alpha+0=\rho_\alpha(n,r)+\rho_\alpha(r,m), & r<m<n. \end{cases}$

En cualquiera de los dos casos, se cumple la desigualdad del triángulo.
Más aún, ρ_α es una cuasi-métrica. Supongamos que $\rho_\alpha(n,m)=\rho_\alpha(m,n)=0$, entonces $n\leq m$ y $m\leq n$, por tanto $n=m$. Así, ρ_α es una cuasi-métrica.
Por otro lado, no es difícil mostrar que la cuasi-métrica conjugada asociada es tal que

$$\overline{\rho_\alpha}(n,m)=\begin{cases} 0 & si\ n\geq m \\ \alpha & si\ n<m \end{cases}$$

Más aún,

$$\rho^s_\alpha(n,m)=\begin{cases} 0 & si\ n=m \\ \alpha & si\ n\neq m \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. Defina la función $\rho\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ por

$$\rho(x,y)=\begin{cases} y-x, & si\ x\leq y; \\ 1, & si\ x>y. \end{cases}$$

Se tiene que ρ es una cuasi-métrica. En efecto, para todo $x,y\in\mathbb{R}$ $\rho(x,x)=0$ y $\rho(x,y)\geq 0$. Además para cualesquiera $x,y,z\in\mathbb{R}$

Caso 1: $x\leq y$, $\rho(x,y)=y-x\leq \begin{cases} z-x+y-z=\rho(x,z)+\rho(z,y), & x\leq z\leq y; \\ 1+y-z=\rho(x,z)+\rho(z,y), & z<x\leq y. \\ z-x+1=\rho(x,z)+\rho(z,y), & x\leq y<z. \end{cases}$

Caso 2: $x > y$, $\rho(x, y) = 1 \leq \begin{cases} z - x + 1 = \rho(x, z) + \rho(z, y), & y < x < z; \\ 1 + 1 = \rho(x, z) + \rho(z, y), & y < z < x; \\ 1 + x - z = \rho(x, z) + \rho(z, y), & z < y < x; \\ 1, & z = x \ 0 \ z = y. \end{cases}$

El siguiente ejemplo muestra geométricamente la ausencia de simetría en una cuasi-métrica.

Ejemplo 2.3. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $x \in X$. Se sabe que la distancia de x a A está dada por

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a)|\ a \in A\}.$$

Si se considera a la familia de subconjuntos de X, no vacíos, cerrados (en X) y acotados; denotada y definida por

$$\mathcal{CB}(X) = \{A \subseteq X|\ A \neq \emptyset,\ A \text{ es acotado y cerrado en } X\}$$

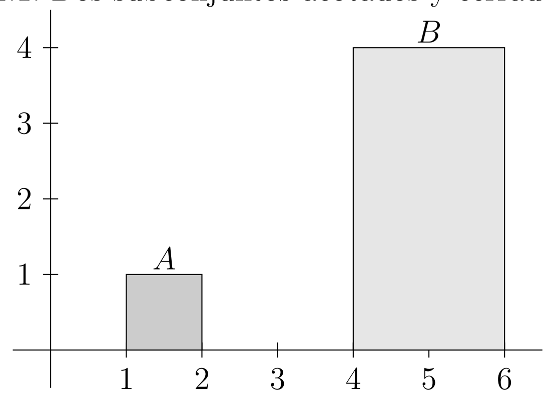
Con la función $\rho\colon \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to [0, +\infty)$ dada por

$$\rho(A, B) = \sup\{d(a, B)|\ a \in A\}$$

para $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Se cumple que la función ρ resulta ser una cuasi-métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$, la prueba puede deducirse de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 en [3], pero por ahora puede observarse un ejemplo que evidencia este hecho, donde $X = \mathbb{R}^2$ con su métrica usual.

Notemos que la función ρ evaluada en A, $B \in \mathcal{CB}(X)$ tales como en la figura 2.1; representa la mayor de las distancias entre algún punto de A con el subconjunto B. Se puede apreciar que los puntos del borde izquierdo de A son los más alejados de B y en ellos se alcanza está "distancia" entre dichos conjuntos, es decir $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B)|\ a \in A\} = 3$. Mientras que para $\rho(B, A) = \sup\{d(b, A)|\ b \in B\}$, obsérvese que ahora la imagen está dada por la mayor de las distancias entre algún punto de B con A, y esta se da entre las esquinas superiores derechas de las figuras. Así, por el Teorema de Pítagoras $\rho(B, A) = 5$. Lo que muestra la ausencia de simetría en la función "distancia" ρ.

Figura 2.1: Dos subconjuntos acotados y cerrados en $\mathbb{R}^2$.



Por otra parte, análogamente a los espacios métricos, una cuasi-semimétrica induce una topología a un espacio cuasi-semimétrico. Más aún, la cuasi-semimétrica del espacio cuasi-semimétrico X induce una topología a X y la cuasi-semimétrica conjugada induce otra topología al mismo conjunto X, a X con estas dos topologías se le conoce como espacio bitopólogico, pero eso es otro tema el cual no abordaremos. Podemos iniciar con algunas definiciones afines a las conocidas en espacios métricos.

Definición 2.2. *Sean (X, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, $r > 0$ un número real y x_0 un elemento de X. Se define la bola abierta $B_\rho(x_0, r)$, centrada en x_0 de radio r por el conjunto*

$$B_\rho(x_0, r) = \{x \in X|\ \rho(x_0, x) < r\}.$$

La bola cerrada centrada en x_0 de radio r se denota y define por

$$B_\rho[x_0, r] = \{x \in X|\ \rho(x_0, x) \leq r\}$$

Note que si (X, ρ) es un espacio cuasi-semimétrico, para cada $x \in X$ y todo $r > 0$, $x \in B_\rho(x, r)$, esto es $B_\rho(x, r) \neq \emptyset$. Similarmente $B_\rho[x, r] \neq \emptyset$.

Definición 2.3. *En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), un subconjunto A de X se llama abierto respecto a ρ o ρ-abierto si para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_\rho(x, r_x) \subseteq A$.*
El subconjunto A se llama cerrado respecto a ρ o ρ-cerrado si A es complemento de algún ρ-abierto.

Las siguientes cuatro proposiciones muestran algunas similitudes y diferencias entre ciertas propiedades de los espacios métricos y las correspondientes en espacios cuasi-métricos vea [10]; por ejemplo el resultado siguiente es casi idéntico a lo que pasa en un espacio métrico:

Proposición 2.1 (ver [10]). *En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), toda bola abierta $B_\rho(x, r)$ es un conjunto ρ-abierto.*

Sin embargo, el siguiente resultado difiere a lo que sucede ahí.

Proposición 2.2 (ver [10]). *En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), toda bola cerrada $B_\rho[x, r]$ es un conjunto $\bar{\rho}$-cerrado.*

Ejemplo 2.4. Considere a $\mathbb{R}$ con la cuasi-métrica ρ del Ejemplo 2.2. Sean x_0 X y $r > 1$. Mostremos que la bola ρ-cerrada $B_\rho[x_0, r] = (-\infty, x_0 + r]$ es un conjunto $\bar{\rho}$-cerrado. Se tiene que la bola $\bar{\rho}$-abierta $B_{\bar{\rho}}(x_0 + r, r) = (x_0 + r, \infty)$ es un conjunto $\bar{\rho}$-abierto y es el complemento de $B_\rho[x_0, r]$. Por definición $B_\rho[x_0, r]$ es un conjunto $\bar{\rho}$-cerrado.

Incluso no siempre se cumple que toda bola cerrada $B_\rho[x, r]$ sea un conjunto ρ-cerrado.
Como se había mencionado, un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), puede dotarse de dos topologías de manera natural τ_ρ, $\tau_{\bar{\rho}}$. Más aún, se puede otorgar una tercer topología τ_{ρ^s}, estas tres topologías corresponden a las cuasi-semimétricas ρ, $\bar{\rho}$ y la semimétrica ρ^s, respectivamente.
Si A es un subconjunto ρ-abierto de X, entonces para cada $x \in A$, existe $r_x > 0$, tal que $B_\rho(x, r_x) \subseteq A$ pero como $\rho(x, y) \leq \rho^s(x, y)$, se tiene que $B_{\rho^s}(x, r_x) \subseteq B_\rho(x, r_x) \subseteq A$. De donde obtenemos que A es también ρ^s-abierto, esto es, τ_{ρ^s} es más fina que τ_ρ. Análogamente puede verse también que τ_{ρ^s} es más fina que $\tau_{\bar{\rho}}$.
Hay más de una relación sobresaliente entre estas tres topologías, por ejemplo:

Proposición 2.3 (ver [10]). *Sea ρ una cuasi-semimétrica sobre el conjunto X. Para todo $x \in X$ y $r > 0$ se satisface la siguiente igualdad:*

$$B_{\rho^s}(x, r) = B_\rho(x, r) \cap B_{\bar{\rho}}(x, r).$$

Esta igualdad dice que τ_{ρ^s} es la topología generada por la unión de las otras dos, específicamente:

Proposición 2.4 (ver [10]). *Sean (X, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y τ_ρ, $\tau_{\bar{\rho}}$ y τ_{ρ^s} las topologías inducidas por ρ, $\bar{\rho}$ y ρ^s respectivamente. Entonces τ_{ρ^s} es la mínima topología para X que contiene a $\tau_\rho \cup \tau_{\bar{\rho}}$.*

Recordar que un espacio topológico (X, τ) es T_1 si para cualesquiera $a, b \in X$ existen conjuntos abiertos $A, B \in \tau$ de tal forma que $a \in A$, $b \notin A$ y $b \in B$, $a \notin B$.

Proposición 2.5. *Si* (X, ρ)*es un espacio cuasi-semimétrico, entonces la topología* τ_ρ *es* T_1 *si y sólo si* $\rho(x, y) > 0$ *siempre que* $x \neq y$.

Más resultados son mostrados por Kelly en 1963, [11]. Así como también, él introduce axiomas de separación específicos para espacios bitopológicos.

2.2. Espacios normados asimétricamente

A continuación se tiene un segundo tipo de espacio asimétrico, este es un conjunto que tiene una estructura algebraica de espacio vectorial, concretamente:

Definición 2.4. *Sea* X *un espacio vectorial real. Una función* $q : X \to [0, \infty)$ *es una norma asimétrica sobre* X*, si para cualesquiera* $x, y \in X$ *y* $r \geq 0$,

1. $q(x) = q(-x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;

2. $q(rx) = rq(x)$;

3. $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

El par (X, q) recibe el nombre de *espacio vectorial asimétrico*, *espacio no simétrico* o *espacio normado asimétricamente* y se usará este último más a menudo en el escrito. Si la función q sólo satisface las condiciones (2) y (3), entonces ésta se llama una *seminorma asimétrica*, y el par (X, q), *espacio seminormado asimétricamente*. También en algunas instancias, el valor $+\infty$ podrá ser permitido para q, en cuyo caso q es una norma (seminorma) asimétrica extendida.

De manera similar a lo que pasa en espacios cuasi-semimétricos, la conjugada de la seminorma asimétrica q se define por:

$$\overline{q}(x) = q(-x), \quad x \in X,$$

y con ella también se define la función

$$q^s(x) = \text{máx}\{q(x), \overline{q}(x)\}, \quad x \in X,$$

la cual resulta ser una seminorma llamada la seminorma asociada a q. La seminorma asimétrica q es una norma asimétrica si y sólo si q^s es una norma sobre X.

Una seminorma asimétrica q define una cuasi-semimétrica ρ_q sobre X, que recibe el nombre de *cuasi-semimétrica generada por* q, *o asociada a* q, mediante la fórmula

$$\rho_q(x, y) = q(y - x), \quad x, y \in X. \tag{2.2}$$

En este caso, en analogía a las desigualdades (2.1), aquí se tiene que

$$q(x) \leq q^s(x) \quad y \quad \overline{q}(x) \leq q^s(x), \qquad x \in X. \tag{2.3}$$

En la Definición 1.3 se ha visto lo que representa un cono, también se puede dotar de una norma asimétrica, por lo que la dupla, cono, norma asimétrica define un cono normado asimétricamente.

Definición 2.5 (ver [6])**.** *Sea* X *un cono. Una función* $p : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *es una seminorma asimétrica sobre* X*, si para cualesquiera* $x, y \in X$ *y* $r \geq 0$*,*

1. $p(0) = 0$*; si* $x, -x \in X : p(x) = p(-x) = 0$*, entonces* $x = 0$*;*

2. $p(rx) = rp(x)$*;*

3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$*.*
   Si además p *cumple que*

4. $p(x) = 0 \iff x = 0$*, entonces* p *se llama norma asimétrica.*

Donde $0 \in X$ *representa el neutro aditivo de* X*.*

Ejemplo 2.5. En $\mathbb{R}$ la norma asimétrica definida por

$$u(x) = \text{máx}\{0, x\}, \ x \in \mathbb{R},$$

tiene como cuasi-métrica asociada a

$$\rho_u(x, y) = u(x - y) = \text{máx}(0, x - y).$$

Para cualesquiera $x, y \in X$ y para todo $0 \leq r$, $u(x) = 0$ si y sólo si $x \leq 0$. Más aún, $u(-x) = 0$ si y solo si $-x \leq 0$, es decir $u(-x) = 0$ si y sólo si $x \geq 0$.

Con todo, $u(x) = u(-x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Luego, como $r \geq 0$ y por propiedades del máximo $u(rx) = \text{máx}\{0, rx\} = r\,\text{máx}\{0, x\} = ru(x)$. Para la desigualdad triangular, del mismo modo, por propiedades del máximo $u(x+y) = \text{máx}\{0, x+y\} \leq \text{máx}\{0, x\} + \text{máx}\{0, y\} = u(x) + u(y)$. Por lo mostrado u cumple con la definición de norma asimétrica. Si se cambia el espacio vectorial $\mathbb{R}$ por el cono $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, u)$ es un cono normado asimétricamente.

Naturalmente a cualquier espacio normado asimétricamente se le dotan tres topologías respecto a, la norma asimétrica, su conjugada y el máximo de ellas dos, esto se hace a través de una base para los abiertos, de bolas abiertas, como usualmente se conocen. Enseguida se formaliza lo mencionado en la siguiente definición, ver [6].

Definición 2.6. *Sean (X, q) un espacio normado asimétricamente, $r > 0$ y $x_0 \in X$. Se define la bola abierta $B_q(x_0, r)$, de centro en x_0 y radio r por el conjunto*

$$B_q(x_0, r) = \{x \in X |\ q(x - x_0) < r\}.$$

La bola cerrada de centro en x_0 y radio r se denota y define por

$$B_q[x_0, r] = \{x \in X |\ q(x - x_0) \leq r\}.$$

Un conjunto abierto, queda determinado por las bolas abiertas, que son los abiertos básicos, formalmente:

Definición 2.7. *En un espacio normado asimétricamente (X, q), un subconjunto de X, A se llama abierto respecto a q o q-abierto si para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_q(x, r_x) \subseteq A$.*

2.2.1. Funciones crecientes

Definición 2.8. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi-métrico. Se define el orden parcial $\leq_\rho$ como sigue, $x \leq_\rho y$ si y solo si $\rho(x, y) = 0$.*

En efecto, $\leq_\rho$ es un orden parcial. Dado que $\rho(x, x) = 0$ para cualquier $x \in X$, se sigue que $x \leq_\rho x$ para todo $x \in X$. De modo que $\leq_\rho$ es una relación reflexiva. $\leq_\rho$ es antisimétrica, por definición de cuasi-métrica $\rho(x, y) = 0$ y $\rho(y, x) = 0$ implica que $x = y$, esto es, $x \leq_\rho y$, $y \leq_\rho x$ implica $x = y$.
Por la desigualdad del triángulo, si $x \leq_\rho y$ y $y \leq_\rho z$, entonces $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) +$

$\rho(y, z) = 0$, en consecuencia $\rho(x, z) = 0$. Por lo tanto, $\leq_\rho$ es transitivo. Con todo, $\leq_\rho$ es un orden parcial.

Observación 2.1. *Note que todo espacio (X, q) normado asimétricamente se dota del orden anterior con la cuasi-métrica asociada a la norma asimétrica q, en este caso el orden parcial en cuestión se denota solo por $\leq_q$.*

Considerando las definiciones previas podemos definir justificadamente el siguiente término en el ámbito de espacios asimétricos.

Definición 2.9 (Función creciente)**.** *Sea (X, ρ) un espacio cuasi-métrico y (Y, q) un espacio normado asimétricamente. Una función $f\colon X \to Y$ se llama (ρ, q)-creciente si para cada $x, y \in X$ con $x \leq_\rho y$ se sigue que $f(x) \leq_q f(y)$.*

En otras palabras, f es (ρ, q)-creciente si

$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{implica que} \quad q(f(x) - f(y)) = 0, \quad x, y \in X,$$

o equivalentemente

$$q(f(x) - f(y)) > 0 \quad \text{implica que} \quad \rho(x, y) > 0, \quad x, y \in X,$$

Si X y Y son espacios simétricos, entonces la definición de este orden parcial carece de sentido, ya que con el todas las funciones entre X y Y son (ρ, q)-crecientes, por lo que el verdadero sitio de interés de esta definición se encuentra en los espacios asimétricos. Inclusive en esta clase de espacios hay casos para determinar cuando una función es (ρ, q)-creciente. Por ejemplo:

Observación 2.2. *Si (X, τ_ρ) es T_1, entonces toda función $f\colon X \to Y$ es (ρ, q)-creciente. En efecto, si $x \leq_\rho y$, entonces $\rho(x, y) = 0$. Dado que X es T_1, se tiene que $x = y$. Por lo tanto $q(f(x) - f(y)) = q(0) = 0$, esto es $f(x) \leq_q f(y)$.*

Capítulo 3

Espacios de funciones semi-Lipschitz

Ahora analizamos propiedades de las funciones semi-Lipschitz, esto a través de propiedades del espacio de estas funciones y relaciones entre los distintos espacios posibles que resultan de, o bien, equipar al espacio cuasi-métrico con ρ, $\bar{\rho}$ o ρ^s, o bien, equipar al espacio normado asimétricamente con q, $\bar{q}$ o q^s.

3.1. El espacio de funciones semi-Lipschitz

Una de las razones por lo que es importante estudiar al espacio de funciones semi-Lipschitz es por sus aplicaciones, como por ejemplo, en el cómputo de la complejidad de ciertos algoritmos.

Definición 3.1 (Función semi-Lipschitz)**.** *Dado un espacio cuasi-métrico (X, ρ) y un espacio normado asimétricamente (Y, q), una función $f : X \to Y$ es llamada semi-Lipschitz si existe una constante $M \geq 0$, tal que*

$$q(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x, y),$$

para cualesquiera x,$y \in X$.

Observación 3.1. *Si (X, ρ) es espacio cuasi-métrico y (Y, q) un espacio normado asimétrico, toda función $f : X \to Y$ semi-Lipschitz es $(\rho, q)-$creciente. En efecto, si $x \leq_\rho y$, entonces $\rho(x, y) = 0$, luego como f es semi-Lipschitz, existe $M > 0$ tal que $q(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x, y) = 0$, por tanto $f(x) \leq_q f(y)$.*

Como el conjunto de las funciones Lipschitz resulta ser un espacio vectorial con la suma de funciones y , surge la interrogante de ¿qué ocurre con el conjunto de funciones semi-Lipschitz respecto a la suma de funciones? Bueno, el siguiente ejemplo muestra que eso no necesariamente ocurre. De hecho el ejemplo muestra una función semi-Lipschitz cuyo inverso aditivo no es semi-Lipschitz.

Ejemplo 3.1. Sea $X = \mathbb{N}$ con la cuasi-métrica ρ_1 del Ejemplo 2.1 ($\alpha = 1$), y sea $Y = \mathbb{R}$ con la norma asimétrica q del Ejemplo 2.5. Considere la función $f : X \to Y$ dada por $f(n) = -\frac{1}{n}$. Se tiene que f es una función semi-Lipschhitz. Para $n, m \in N$, $f(n) - f(m) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{n-m}{nm}$.

Caso 1: $n \leq m$, $n - m \leq 0$, $\rho(n, m) = 0$ y $\frac{n-m}{nm} \leq 0$ luego $q\left(f(n) - f(m)\right) = 0 \leq 1 \cdot 0 = 1 \cdot \rho_1(n, m)$.

Caso 2: $n > m$, $n - m \geq 0$, $\rho(n, m) = 1$ y $\frac{n-m}{nm} > 0$ luego $q\left(f(n) - f(m)\right) = \frac{n-m}{nm} < \frac{1}{m} \leq 1 \cdot 1 = 1 \cdot \rho_1(n, m)$.

De los casos anteriores, se concluye que f es semi-Lipschitz.

Sin embargo, $-f$ no es una función semi-Lipschitz. En efecto, para $n < m$, se tiene que $\rho_1(n, m) = 0$, luego $q\left((-f)(n) - (-f)(m)\right) = \frac{m-n}{nm} > 0$.

Basándose en lo anterior, se tiene que el espacio de funciones semi-Lipschitz que se define dentro del siguiente teorema, no siempre es un espacio vectorial, y de acuerdo al teorema, la posible carencia de los inversos aditivos (para ser un espacio vectorial) es la única falta posible.

Teorema 3.1. *Sean (X, ρ) un espacio cuasi-métrico y (Y, q) un espacio normado asimétricamente. El conjunto $SLip_{\rho,q}(X, Y) = \{f : X \to Y | f \text{ es semi-Lipschitz}\}$ es un cono.*

Demostración. Para esto basta probar que $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$ es cerrado bajo combinaciones lineales. Sean $f, g \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$ y $\lambda \geq 0$, para $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} q(f(x) - f(y)) &\leq M_1 \rho(x, y) \\ \text{y} \quad q(g(x) - g(y)) &\leq M_2 \rho(x, y), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} & q((f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(y)) \\ = \; & q((f(x)-f(y))+\lambda(g(x)-g(y))) \\ \leq \; & q((f(x)-f(y))+\lambda q(g(x)-g(y)) \\ \leq \; & (M_1+\lambda M_2)\,\rho(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f+\lambda g \in$SLip$_{\rho,q}(X,Y)$. □

El siguiente resultado, muestra una relación entre los espacios SLip$_{\rho,q}(X,Y)$ y SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.

Teorema 3.2. *Sean (X,ρ) un espacio cuasi-métrico y (Y,q) un espacio normado asimétricamente. Se satisface que $f \in SLip_{\rho,q}(X,Y)$ si y sólo si $-f \in SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.*

Demostración. Si $f \in$SLip$_{\rho,q}(X,Y)$, entonces existe $M>0$ tal que

$$q(f(x)-f(y)) \leq M\rho(x,y)$$

para todos los $x,y\in X$. Cambiando x por y y viceversa, tenemos

$$q(f(y)-f(x)) \leq M\rho(y,x)$$

$$q((-f)(x)-(-f)(y)) \leq M\overline{\rho}(x,y)$$

por tanto $-f \in$SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.
El recíproco se obtiene de manera análoga. □

En lo que se sigue se exhiben algunos casos de espacios de funciones semi-Lipschitz que resultan ser espacios vectoriales o bien se proporcionan condiciones sobre las cuasi-métricas para que sean espacios vectoriales.

Teorema 3.3. *Si (X,ρ) es un espacio cuasi-métrico y (Y,q) un espacio normado asimétricamente, entonces $H=$SLip$_{\rho,q}(X,Y)\cap$SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Por el Teorema 3.2 $f\in H$ si y sólo si $-f\in H$. Luego sólo hay que probar que para cualquiera $f\in H$ y $\lambda<0$, $\lambda f\in H$, pero $\lambda f=-\lambda(-f)\in H$ □

Proposición 3.1. *Si* (X,ρ) *es un espacio cuasi-métrico y* $(Y,\|\cdot\|)$ *un espacio normado, entonces* $SLip_{\rho,\|\cdot\|}(X,Y)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración. Para esto basta probar que $\mathrm{SLip}_{\rho,\|\cdot\|}(X,Y)$ es cerrado bajo combinaciones lineales. Sean $f,g\in\mathrm{SLip}_{\rho,\|\cdot\|}(X,Y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, para $x,y\in X$,

$$\begin{array}{rrcl} & \|f(x)-f(y)\| & \leq & M_1\rho(x,y) \\ \text{y} & \|g(x)-g(y)\| & \leq & M_2\rho(x,y) \end{array}$$

luego

$$\begin{aligned} \|(f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(y)\| &= \|f(x)-f(y)+\lambda\left(g(x)-g(y)\right)\| \\ &\leq \|f(x)-f(y)\|+|\lambda|\,\|g(x)-g(y)\| \\ &\leq \left(M_1+|\lambda|\,M_2\right)\rho(x,y), \end{aligned}$$

por tanto $f+\lambda g\in\mathrm{SLip}_{\rho,\|\cdot\|}(X,Y)$. □

Lo que nos dice que si el codominio de las funciones es simétrico el conjunto de funciones sem-Lipschitz es un espacio vectorial. Ahora si la simetría sólo está presente en el dominio de las funciones también se consigue la estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.2. *Si* (X,d) *es un espacio métrico y* (Y,q) *un espacio normado asimétricamente, entonces* $SLip_{d,q}(X,Y)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración. Sea $f\in\mathrm{SLip}_{d,q}(X,Y)$, para cualesquiera $x,y\in X$, se tiene que $q\left(f(x)-f(y)\right)\leq M_1d(x,y)$ cambiando x por y y viceversa, tenemos $q\left(f(y)-f(x)\right)\leq M_1d(y,x)$. Luego, $q\left((-f)(x)-(-f)(y)\right)\leq M_1d(x,y)$, por tanto $-f\in\mathrm{SLip}_{d,q}(X,Y)$. Tome dos funciones $f,g\in\mathrm{SLip}_{d,q}(X,Y)$ y $\lambda<0$, en consecuencia

$$q\left(f(x)-f(y)\right)\leq M_1d(x,y)\ \ y\ \ q\left(g(x)-g(y)\right)\leq M_2d(x,y)$$

luego

$$\begin{aligned} & q\left((f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(y)\right) \\ = \; & q\left(f(x)-f(y)+(-\lambda)\left((-g)(x)-(-g)(y)\right)\right) \\ \leq \; & q\left(f(x)-f(y)\right)+(-\lambda) q\left((-g)(x)-(-g)(y)\right) \\ \leq \; & \left(M_1+(-\lambda) M_2\right) d(x, y) \end{aligned}$$

por tanto $f+\lambda g \in$SLip$_{d,q}(X,Y)$. □

De este modo basta con tener un dominio o un codominio simétrico para las funciones semi-Lipschitz y así el espacio de funciones semi-Lipschitz sea un espacio vectorial. Obsérvese que los espacios de funciones SLip$_{\rho^s,q}(X,Y)$, SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$ y SLip$_{\rho^s,q^s}(X,Y)$ son espacios vectoriales.

Teorema 3.4. *Dados un espacio cuasi-métrico* (X,ρ) *y un espacio normado asimétricamente* (Y,q)*. La siguente afirmación se satisface:*

$$H = SLip_{\rho,q}(X,Y) \cap SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho^s,q}(X,Y),$$

es decir, H *es un subespacio de* $SLip_{\rho^s,q}(X,Y)$*.*

Demostración. Sea $f \in H$, entonces

$$q(f(x)-f(y)) \leq M_1 \rho(x,y),$$

y

$$q(f(x)-f(y)) \leq M_2 \overline{\rho}(x,y),$$

luego

$$\begin{aligned} q(f(x)-f(y)) & \leq \max\{M_1, M_2\} \max\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} \\ & = M\rho^s(x,y), \end{aligned}$$

por tanto $f \in$SLip$_{\rho^s,q}(X,Y)$. □

La igualdad no es necesariamente cierta, esto se muestra con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. Sea $X = \mathbb{N}$ con la cuasi-métrica

$$\rho_1(n,m) = \begin{cases} 0 & n \leq m \\ 1 & n > m \end{cases}$$

como en el Ejemplo 2.1. Recordar que

$$\overline{\rho_1}(n,m) = \begin{cases} 1 & n < m \\ 0 & \geq m \end{cases},$$

así como también

$$\rho_1^s(n,m) = \begin{cases} 0 & n = m \\ 1 & n \neq m \end{cases}.$$

Sea $Y = \mathbb{R}$ con la norma asimétrica $q = u$ dada en el Ejemplo 2.5. Sea

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \text{ dada por } f(n) = -\frac{1}{n},$$

ya se vio que $f \in \mathrm{SLip}_{\rho_1,q}(X,Y)$, pero $-f \notin \mathrm{SLip}_{\rho_1,q}(X,Y)$, luego por el Teorema 3.2

$$f \notin H$$

sin embargo, $f \in \mathrm{SLip}_{\rho_1^s,q}(X,Y)$, en efecto, probémoslo por casos:

Caso 1: $n = m$, $\rho_1^s(n,m) = 0$ y

$$q(f(n) - f(m)) = q(0) = 0 \leq 1 \cdot \rho_1^s(n,m).$$

Caso 2: $n < m$, $\rho_1^s(n,m) = 1$ y

$$q(f(n) - f(m)) = q(-\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) = q(\frac{n-m}{nm}) = 0 \leq 1 \cdot \rho_1^s(n,m).$$

Caso 3: $n > m, \ \ \rho_1^s(n,m) = 1$ y

$$\begin{aligned} q(f(n) - f(m)) &= q(-\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \\ &= q(\frac{n-m}{nm}) = \frac{n-m}{nm} \\ &< \frac{1}{m} \leq 1 \cdot \rho_1^s(n,m). \end{aligned}$$

Así, para este ejemplo se tiene que $H \subsetneq \mathrm{SLip}_{\rho^s,q}(X,Y)$.

En los siguientes teoremas, se presentan algunos conjuntos de funciones semi-Lipschitz que coinciden con $\mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$ como lo es H y una intersección de espacios de funciones semi-Lipschitz análoga a la intersección en H:

Teorema 3.5. *Sea* (X,ρ) *un espacio cuasi-métrico y* (Y,q) *un espacio normado asimétricamente, entonces* $H = SLip_{\rho,q^s}(X,Y)$.

Demostración. Para la primera contención, si $f \in H$, entonces

$$q(f(x) - f(y)) \leq M_1 \rho(x,y), \tag{A}$$

y

$$q(f(x) - f(y)) \leq M_2 \overline{\rho}(x,y), \tag{B}$$

de la última desigualdad (B), tenemos

$$q(f(x) - f(y)) \leq M_2 \rho(y,x), \tag{C}$$

como esto es válido para todos los $x, y \in X$, podemos cambiar en la última desigualdad x por y y viceversa, obteniendo

$$\begin{aligned} \bar{q}(f(x) - f(y)) &= q(f(y) - f(x)) \\ &\leq M_2 \rho(x,y). \end{aligned}$$

De (A) y (C) tenemos que

$$q^s(f(x) - f(y)) \leq \max\{M_1, M_2\}\, \rho(x,y)$$

luego $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$. Con todo lo mostrado $H \subset \mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$.
Para la contención de regreso, si $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$, entonces

$$q^s(f(x)-f(y)) \leq M\rho(x,y)$$

pero

$$q(f(x)-f(y)) \leq q^s(f(x)-f(y))$$

$$y \quad \bar{q}(f(x)-f(y)) \leq q^s(f(x)-f(y)),$$

luego $f \in$SLip$_{\rho,q}(X,Y)\cap$SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$. Con todo lo mostrado SLip$_{\rho,q^s}(X,Y) \subset H$.
De ambas contenciones se concluye que $H =$SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$. □

Similarmente al teorema anterior, resulta interesante el hecho de cambiar los intersectandos por los espacios análogos con la diferencia de conjugar la norma asimétrica en vez de la cuasi-métrica y es aún más interesante que la nueva intersección coincide con el mismo conjunto, SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$.

Teorema 3.6. *Sea (X,ρ) es un espacio cuasi-metrico y (Y,q) un espacio normado asimétricamente, entonces $L =SLip_{\rho,q}(X,Y)\cap SLip_{\rho,\bar{q}}(X,Y) =SLip_{\rho,q^s}(X,Y)$.*

Demostración. Para probar la primera contención, sea $f \in L$, entonces

$$\begin{aligned} q(f(x)-f(y)) &\leq M_1\rho(x,y) \\ \text{y} \quad \bar{q}(f(x)-f(y)) &\leq M_2\rho(x,y), \end{aligned}$$

luego

$$q^s(f(x)-f(y)) \leq \text{máx}\{M_1,M_2\}\,\rho(x,y),$$

por tanto $L \subseteq$SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$.
Ahora, si $f \in$SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$, entonces

$$q^s(f(x)-f(y)) \leq M\rho(x,y),$$

pero

$$\begin{aligned} q(f(x)-f(y)) &\leq q^s(f(x)-f(y)) \\ \text{y} \quad \bar{q}(f(x)-f(y)) &\leq q^s(f(x)-f(y)), \end{aligned}$$

por tanto $f \in L$. Con todo, SLip$_{\rho,q^s}(X,Y) \subseteq L$.

De ambas contenciones se concluye que $L = \mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$. □

Observación 3.2. *Si* (X,ρ) *es un espacio cuasi-métrico y* (Y,q) *un espacio normado asimétricamente, entonces los siguientes conjuntos son iguales:*

- $H = SLip_{\rho,q}(X,Y) \cap SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$,
- $L = SLip_{\rho,q}(X,Y) \cap SLip_{\rho,\bar{q}}(X,Y)$,
- $SLip_{\rho,q^s}(X,Y)$.

Note que, $\mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$.
Con base en las Proposiciones 3.1 y 3.2, si alguno de los espacios (X,ρ) o (Y,q)son simétricos, entonces el espacio $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ es un espacio vectorial. De modo que, $\mathrm{SLip}_{\rho^s,q}(X,Y)$ y $\mathrm{SLip}_{\rho,q^s}(X,Y)$ son espacios vectoriales pero ¿habrá alguna relación de contención entre ellos? En camino a responder esta pregunta se tiene el siguiente hecho.

Teorema 3.7. $SLip_{\rho,q}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho^s,q}(X,Y)$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, entonces

$$q(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x,y),$$

para algún $M > 0$, pero $\rho(y,x) \leq \rho^s(y,x)$. Por tanto $f \in \mathrm{SLip}_{\rho^s,q}(X,Y)$. Y con ello se obtiene la contención deseada. □

Observación 3.3. $SLip_{\rho,q^s}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho^s,q}(X,Y)$. *En efecto,*

$$SLip_{\rho,q^s}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho,q}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho^s,q}(X,Y).$$

El Teorema 2.10 dado por por Sánchez-Álvarez en [17], se puede entender más rápidamente si se ve el siguiente resultado,

Teorema 3.8. *Si* $SLip_{\rho,q}(X,Y) \subseteq SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$, *entonces* $SLip_{\rho,q}(X,Y) = SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.

Demostración. Sólo hay que probar que $\mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$. Tome una función $f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$, por el Teorema 3.2 se cumple que

$$-f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y),$$

luego $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$. Así, $\mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$. □

A diferencia de Sánchez-álvarez en el enunciado del siguiente teorema, ocupamos el concepto de espacio vectorial en lugar del de grupo, aunque claramente todo espacio vectorial es un grupo.

Teorema 3.9. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) $SLip_{\rho,q}(X,Y) = SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$

2) $SLip_{\rho,q}(X,Y)$ *es un espacio vectorial.*

3) $SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ *es un espacio vectorial.*

4) $SLip_{\rho,q}(X,Y) \subseteq SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.

5) $SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y) \subseteq SLip_{\rho,q}(X,Y)$.

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Se obtiene de inmediato por el Teorema 3.3.
2) $\rightarrow$ 3) Supongamos que $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ es un espacio vectorial, sea $f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ entonces $-f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ y como este es un espacio vectorial, $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, luego $-f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.

3) $\rightarrow$ 4) Sea $\mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ un espacio vectorial, dado cualquier $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ se tiene que $-f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ y $f \in \mathrm{SLip}_{\bar{\rho},q}(X,Y)$, luego

$$\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y).$$

4) $\rightarrow$ 5) Si $f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$ entonces $-f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, por 4) se sigue que $-f \in \mathrm{SLip}_{\overline{\rho},q}(X,Y)$, así $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$.

5) $\rightarrow$ 1) Se satisface por el Teorema 3.8 al cambiar ρ por su conjugada. □

La utilidad de este teorema, radica en que es más fácil trabajar en espacios vectoriales que en conos y por supuesto para comprobar una igualdad de conjuntos por contenciones es más rápido cotejar solo una de ellas. A continuación se presenta un hecho relacionado con el intercambio de las conjugaciones entre la norma y la cuasi-métrica.

Proposición 3.3. $SLip_{\rho,\bar{q}}(X,Y) \subseteq SLip_{\overline{\rho},q}(X,Y)$.

Demostración. Si $f \in$SLip$_{\rho,\bar{q}}(X,Y)$, entonces existe $M>0$ tal que $\bar{q}(f(x)-f(y)) \leq M\rho(x,y)$, para cualesquiera x,$y \in X$, luego

$$q(f(y)-f(x)) \leq M\rho(x,y) = M\overline{\rho}(y,x),$$

de aquí que $f \in$SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$. Por lo tanto SLip$_{\rho,\bar{q}}(X,Y) \subseteq$SLip$_{\overline{\rho},q}(X,Y)$. □

Obsérvese que

$$\mathrm{SLip}_{\bar{\rho},q}(X,Y) = \mathrm{SLip}_{\bar{\rho},\bar{\bar{q}}}(X,Y) \subseteq \mathrm{SLip}_{\bar{\bar{\rho}},\bar{q}}(X,Y) = \mathrm{SLip}_{\rho,\bar{q}}(X,Y),$$

consecuentemente tenemos que SLip$_{\rho,\bar{q}}(X,Y)$ =SLip$_{\bar{\rho},q}(X,Y)$.

3.2. El cono normado SLip$_{\rho,q}(X,Y)$

Se ha dotado de una estructura algebraica al espacio de funciones semi-Lipschitz y a continuación a esa estructura la equipamos con una norma asimétrica. Así se obtiene una forma de comparar funciones semi-Lipschitz. En el capítulo de aplicaciones son las herramientas utilizadas para aproximar funciones semi-Lipschitz.

Definimos la aplicación $\|\cdot\,|_{\rho,q}$:SLip$_{\rho,q}(X,Y) \longrightarrow [0,+\infty)$ dada por

$$\|f\;|_{\rho,q} = \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)}. \tag{3.1}$$

Para un número real $r>0$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \|rf\;|_{\rho,q} &= \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q((rf)(x)-(rf)(y))}{\rho(x,y)} \\ &= r\sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)} = r\,\|f\;|_{\rho,q}. \end{aligned}$$

Y para $f, g \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f + g|_{\rho,q} &= \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q((f+g)(x)-(f+g)(y))}{\rho(x,y)}\\
&\leq \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))+q(g(x)-g(y))}{\rho(x,y)}\\
&\leq \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)} + \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(g(x)-g(y))}{\rho(x,y)}\\
&= \|f\,|_{\rho,q} + \|g\,|_{\rho,q}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, si $f, -f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ tales que $\|f\,|_{\rho,q} = \|-f\,|_{\rho,q} = 0$, entonces

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)} = \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q((-f)(x)-(-f)(y))}{\rho(x,y)} = 0,$$

luego $q(f(x)-f(y)) = q(-(f(x)-f(y))) = 0$, para cualesquiera x,$y \in X$, dado que q es una norma asimétrica, esto se cumple si y sólo si $f(x)-f(y)=0$. Por tanto f es una función constante.

Ejemplo 3.3. Consideremos el espacio $\mathrm{SLip}_{\rho,u}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donde ρ y u son como en el Ejemplo 2.5, estas tienen la forma siguiente

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x-y, & y \leq x;\\ 0, & y > x; \end{cases} \quad \text{y} \quad u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x;\\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Nótese que para cualquier constante C, la función $f(x) = C$ es semi-Lipschitz y $\|f\,|_{\rho,u} = 0$.

El ejemplo anterior muestra que $\|\cdot\,|_{\rho,q}$ no necesariamente es una norma asimétrica para el cono $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ ya que no se cumple que $\|f\,|_{\rho,u} = 0 \iff f = 0$. Se tienen dos opciones para construir un cono normado asimétricamente. La primera opción es tomar el cociente de $\mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$ sobre el conjunto de funciones constantes entre X y Y, de tal manera que $\|f|_{\rho,q} = 0$ si y sólo si $f = 0$. Y la segunda opción es, volver un espacio punteado a X, esto es distinguir un punto x_0 en X (x_0 es la punta del conjunto). Para el segundo caso, sea $x_0 \in X$ definimos

$$\mathrm{S_0Lip}_{\rho,q}(X,Y) = \left\{ f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y) \middle| f(x_0) = 0 \right\}.$$

Claramente en $\mathrm{S_0Lip}_{\rho,q}(X,Y)$ la suma y la multiplicación por un escalar positivo son cerradas, luego $\mathrm{S_0Lip}_{\rho,q}(X,Y)$ es un cono. Para este espacio, si $\|f\,|_{\rho,q} = \|-f\,|_{\rho,q} = 0$, entonces

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)} = \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q((-f)(x)-(-f)(y))}{\rho(x,y)} = 0,$$

luego f es una constante, pero $f(x_0) = 0$ así que $f = 0$. Por lo tanto, la función $\|\cdot|_{\rho,q}$ es una norma asimétrica para el cono $\mathrm{S_0Lip}_{\rho,q}(X,Y)$. Más aún, tenemos que

Proposición 3.4. *El conjunto* $\left(S_0Lip_{\rho,q}(X,Y), \|\cdot|_{\rho,q}\right)$ *es un cono normado asimétricamente.*

Demostración. Sólo resta probar que $\|f\,|_{\rho,q} = 0$ implica que $f = 0$.

Supongamos que $\|f\,|_{\rho,q} = 0$, entonces

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(x,y)\neq 0}} \frac{q(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)} = 0$$

lo que implica que $q(f(x)-f(y)) = 0$ para todos los x,$y \in X$, tales que $\rho(x,y) \neq 0$. Ahora, cambiando x por y y viceversa, tenemos

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(y,x)\neq 0}} \frac{q(f(y)-f(x))}{\rho(y,x)} =$$

$$= \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(y,x)\neq 0}} \frac{q(-f(x)-(-f)(y))}{\rho(y,x)} = 0,$$

lo que implica que

$$q(f(y)-f(x)) = 0,$$

Así f es constante, pero como $f(x_0) = 0$, entonces $f = 0$. □

Teorema 3.10. *Sea (X,ρ) es un espacio cuasi-métrico y (Y,q) un espacio normado asimétrico, entonces se cumple:*

1) *$SLip_{\rho,q}(X,Y)$ es un cono en el espacio vectorial $Lip_{\rho^s,q^s}(X,Y)$ y*

$$\|f\|_{\rho^s,q^s} \le \|f\ |_{\rho,q}$$

para toda $f \in SLip_{\rho,q}(X,Y)$, donde $\|f\|_{\rho^s,q^s} = \sup\limits_{x,y\in X, x\neq y} \frac{q^s(f(x)-f(y))}{\rho^s(x,y)}$.

2) *Si $f \in SLip_{\rho,q}(X,Y)$, entonces $\|f\ |_{\rho,q}$ es la constante de semi-Lipschitz más pequeña para f.*

3) *$f \in SLip_{\rho,q}(X,Y)$ si y sólo si f es $(\rho,q)-creciente$ y $\|f\ |_{\rho,q} < \infty$.*

Demostración. 1) La primera parte se debe al Teorema 3.1. Para la segunda parte se procede como sigue: sea $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, para algún $M \ge 0$, se cumple que

$$q(f(x)-f(y)) \le M\rho(x,y) \le M\rho^s(x,y),$$

y también se tiene que

$$q(f(y)-f(x)) \le M\rho(y,x) \le M\rho^s(x,y)$$
$$\bar{q}(f(x)-f(y)) \le M\overline{\rho}(x,y) \le M\rho^s(x,y),$$

por tanto

$$q^s(f(y)-f(x)) \le M\rho^s(x,y),$$

así $f \in Lip_{\rho^s,q^s}(X,Y)$. Por otro lado, si $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$,

$$q(f(y)-f(x)) \le \|f\ |_{\rho,q}\, \rho(x,y),$$

de aquí que

$$q^s(f(y)-f(x)) \le \|f\ |_{\rho,q}\, \rho^s(x,y),$$

luego $\|f\|_{\rho^s,q^s} \le \|f\ |_{\rho,q}$.

2) Para $f \in \mathrm{SLip}_{\rho,q}(X,Y)$, de la definición de $\|f\ |_{\rho,q}$, se tiene que $q(f(y)-f(x)) \le \|f\ |_{\rho,q}\, \rho(x,y)$, para todos los $x,y \in X$. Si L es otra constante de

semi-Lipschitz para f, se tiene

$$\frac{q(f(y)-f(x))}{\rho(x,y)} \leq L$$

luego $\|f\,|_{\rho,q} \leq L$.

3) Es inmediata de las definiciones. $\square$

Recordar que SLip$_{\rho,q}(X,Y)\cap$SLip$_{\rho,\bar{q}}(X,Y)$ =SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$ es un espacio vectorial, para este caso $\|\cdot\,|_{\rho,q^s}$ queda como:

$$\|f\,|_{\rho,q^s} = \sup_{\substack{x,y\in X\\ \rho(y,x)\neq 0}} \frac{q^s(f(x)-f(y))}{\rho(x,y)}.$$

Es fácil ver que $\|\cdot\,|_{\rho,q^s}$ es una norma asimétrica. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *El espacio* $S_0Lip_{\rho,q}(X,Y)\cap S_0Lip_{\rho,\bar{q}}(X,Y) = S_0Lip_{\rho,q^s}(X,Y)$ *es cerrado en* $SLip_{\rho,q}(X,Y)\cap SLip_{\rho,\bar{q}}(X,Y) = SLip_{\rho,q^s}(X,Y)$.

Demostración. Sea $\{f_n\}\subset S_0Lip_{\rho,q}(X,Y)\cap S_0Lip_{\rho,\bar{q}}(X,Y)$ tal que $f_n\to f$. Para cualquier $\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\|f_n-f|_{\rho,q^s}<\epsilon$, para $n\geq N$. Lo previo implica que

$$q^s\Big(\big(f_n(x)-f(x)\big)-\big(f_n(y)-f(y)\big)\Big)<\epsilon\rho(x,y).$$

Probemos que $f\in S_0Lip_{\rho,q^s}(X,Y)$. Para cualesquiera $x,y\in X$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
q^s(f(x)-f(y)) &\leq q^s(f(x)-f_n(x)+f_n(x)+f_n(y)-f(y)-f_n(y))\\
&\leq q^s((f_n-f)(y)-(f_n-f)(x))+q^s(f_n(x)-f_n(y))\\
&\leq (\epsilon+M)\rho(x,y).
\end{aligned}$$

Y dado que $f_n(x)\to f(x)$, se tiene que $f(x_0)=0$. Luego $S_0Lip_{\rho,q^s}(X,Y)$ es cerrado en SLip$_{\rho,q^s}(X,Y)$. $\square$

Teorema 3.12. *Sean* (X,ρ) *es un espacio cuasi-métrico,* $x_0,\ y_1\in X$ *elementos arbitrarios fijos y* A *un subconjunto de* X *no vacío.*

1. *Las funciones* $s : X \to \mathbb{R}$ *y* $r : X \to \mathbb{R}$ *dadas por* $s(x) = \rho(x, y_1)$ *y* $r(x) = d(x, A) = \text{ínf}\,\{\rho(x, a) \colon a \in A\}$, *para cualesquiera* $x \in X$, *son funciones semi-Lipschitz con* $\|s\,|_{\rho,u} = 1$ *y* $\|r\,|_{\rho,u} = 1$, *donde* u *es la norma asimétrica del Ejemplo 2.5 sobre* $\mathbb{R}$.

2. *Para cada* $a \in X$,

$$\begin{aligned} & f(x) = \rho(a, x_0) - \rho(a, x) \\ y \qquad & g(x) = \rho(x, a) - \rho(x_0, a), \end{aligned}$$

cumplen que

$$f \in SLip_{\rho,\overline{u}}(X, \mathbb{R}) \ \ y \ g \in SLip_{\rho,u}(X, \mathbb{R})$$

con $\|f\,|_{\rho,\bar{u}} \leq 1$ *y* $\|g\,|_{\rho,u} \leq 1$.

Demostración. 1. Sea $x \in X$, por la desigualdad triangular, para cada $x' \in X$ $\rho(x, y_1) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y_1)$, de donde

$$\begin{aligned} u\left(\rho(x, y_1) - \rho(x', y_1)\right) &= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \rho(x, y_1) < \rho(x', y_1), \\ \rho(x, y_1) - \rho(x', y_1), & \text{si} \quad \rho(x, y_1) \geq \rho(x', y_1), \end{cases} \\ &\leq 1\rho(x, x'). \end{aligned}$$

Esto es para cada $x, x' \in X$, $u(s(x) - s(x')) \leq \rho(x, x')$, de donde se obtiene que s es una función semi-Lipschitz, puesto que se cumple $u(s(x) - s(y_1)) = u(\rho(x, y_1)) = \rho(x, y_1)$ se tiene que $\|s\,|_{\rho,u} = 1$. Análogamente, dado que la desigualdad $\rho(x, a) \leq \rho(x, x') + \rho(x', a)$ se cumple para cada $a \in A$ y $x, x' \in X$. Al tomar el ínfimo respecto a $a \in A$ se obtiene que $d(x, A) \leq \rho(x, x') + d(x', A)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} u\left(d(x, A) - d(x', A)\right) &= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad d(x, A) < d(x', A), \\ d(x, A) - d(x', A), & \text{si} \quad d(x, A) \geq d(x', A), \end{cases} \\ &\leq 1\rho(x, x'). \end{aligned}$$

Además si $x' \in A$, entonces $u(r(x) - r(x')) = u\left(d(x, A) - d(x', A)\right) = \rho(x, x')$. Con todo lo mostrado r es una función semi-Lipschitz y $\|r\,|_{\rho,u} = 1$.

2. De la desigualdad $\rho(a,x_0) \leq \rho(a,x) + \rho(x,x_0)$ se sigue que

$$f(x) = \rho(a,x_0) - \rho(a,x) \leq \rho(x,x_0),$$

así que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \rho(a,x_0) - \rho(a,x) - \rho(a,x_0) + \rho(a,y) \\ &= \rho(a,y) - \rho(a,x) \\ &\leq \rho(y,x) = \overline{\rho}(x,y) \end{aligned}$$

por tanto $f \in$SLip$_{\overline{\rho},u}(X,\mathbb{R})$ =SLip$_{\rho,\overline{u}}(X,\mathbb{R})$.

Análogamente se prueba para g.

□

Se acostumbra denotar por SLip$_\rho(X)$ al espacio SLip$_{\rho,u}(X)$ y a la norma asimétrica $\|\cdot|_{\rho,u}$ se le denota por $\|\cdot|_\rho$.

Teorema 3.13. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi-métrico, si*

$$S_0Lip_\rho(X) = S_0Lip_{\overline{\rho}}(X),$$

entonces τ_ρ es T_1 y existen constantes positivas α, β tales que $\rho(a,x_0) \leq \alpha\rho(x_0,a)$ y $\rho(x_0,a) \leq \beta\rho(a,x_0)$ para cualquier $a \in X$.

Demostración. Supongamos que $S_0Lip_\rho(X) = S_0Lip_{\overline{\rho}}(X)$, sean $a, b \in X$ tales que $\rho(a,b) = 0$. Definamos

$$f(x) = \rho(x,a) - \rho(x_0,a), \quad x \in X,$$

por el Teorema 3.12 $f \in S_0Lip_\rho(X) = S_0Lip_{\overline{\rho}}(X)$, con una constante semi-Lipschitz L, luego

$$\begin{aligned} \rho(x,a) - \rho(y,a) &= f(x) - f(y) \\ &\leq L\rho(y,x) \end{aligned}$$

para todas las $x, y \in X$. Tomando $x = b$, $y = a$, se tiene:

$$\rho(b,a) - \rho(a,a) \leq L\rho(a,b) = 0$$

de este modo se ha probado que si $\rho(a,b)=0$, entonces $\rho(b,a)=0$, de aquí que $a=b$ y por tanto la topología τ_ρ es T_1 al igual que $\tau_{\overline{\rho}}$.

Ahora , sea $g(x)=\rho(x,x_0)$, claramente por el Teorema 3.12 $g\in S_0Lip_\rho(X)=S_0Lip_{\overline{\rho}}(X)$, luego existe $\beta>0$ tal que

$$g(x)-g(y)\leq \beta\overline{\rho}(x,y)=\beta\rho(y,x)$$

tomando $y=x_0$

$$g(x)-g(x_0)=\rho(x,x_0)\leq \beta\rho(x_0,x)$$

Análogamente, haciendo $g(x)=\rho(x_0,x)$, llegamos a que

$$\rho(x_0,x)\leq \alpha\rho(x,x_0).$$

□

Con algunas modificaciones, tenemos el recíproco del teorema anterior.

Teorema 3.14. *Sea (X,ρ) es un espacio cuasi-metrico, tal que τ_ρ es T_1 y existen constantes positivas α,β tales que $\rho(x,y)\leq\alpha\rho(y,x)$ y $\rho(y,x)\leq\beta\rho(x,y)$. para cualesquiera $x,y\in X$, entonces $S_0Lip_\rho(X)=S_0Lip_{\overline{\rho}}(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.9, sólo hay que probar que se cumple una contención (cualquiera de las dos posibles). Sea $f\in S_0Lip_\rho(X)$ y sean $x,y\in X$ tales que $x\neq y$, por ser T_1, $\rho(x,y)>0$ al igual que $\rho(y,x)>0$, luego

$$f(x)-f(y)\leq M\rho(x,y)\leq M\alpha\rho(y,x)=M\alpha\overline{\rho}(x,y).$$

Y si $x=y$, trivialmente se cumple que

$$f(x)-f(y)=0\leq M\alpha\overline{\rho}(x,y).$$

Con todo lo mostrado $u(f(x)-f(y))\leq M\alpha\bar{\rho}(x,y)$ para cualesquiera $x,y\in X$. Por lo tanto $f\in S_0Lip_{\overline{\rho}}(X)$, de modo que $f\in S_0Lip_\rho(X)\subseteq f\in S_0Lip_{\bar{\rho}}(X)$. □

Capítulo 4

Extensiones de funciones semi-Lipschitz

Existen teoremas de extensión sobresalientes en distintas áreas de la matemática, por ejemplo el de Hahn-Banach en análisis funcional, incluso existen teoremas de extensión en análisis funcional asimétrico, ver [6]. En este documento estamos enfocados en teoremas de extensión para funciones semi-Lipschitz, pero primero se presentan algunos resultados análogos, para funciones Lipschitz. El ejemplo de la sección 4.0.1 deja claro que este tipo de teoremas dependen profundamente del espacio en donde está definida la función. Unos resultados son los siguientes:

Teorema 4.1 (Extensión de una función Lipschitz real.)**.** *Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto A de X. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces existe una función Lipschitz $F\colon X \to \mathbb{R}$ que extiende a f y $\|F\|_{(d,\|\cdot\|)} = \|f\|_{(d,\|\cdot\|)}$.*

Otro teorema de este tipo fue dado por Kirsbraun, obtenido de [20].

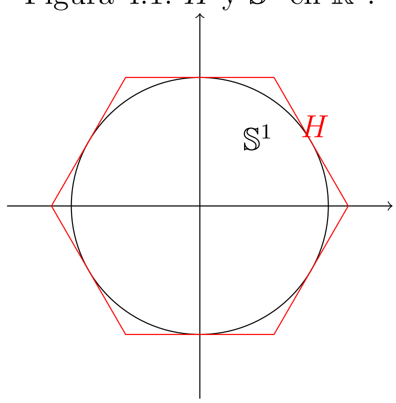
Teorema 4.2 (De Kirszbraun)**.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, E un espacio euclideo, $A \subset E^n$ y $f\colon A \to E^m$ una función Lipschitz. Entonces existe una función Lipschitz $F\colon E^n \to E^m$ que extiende a f y tiene la misma constante Lipschitz que f.*

En este mismo ámbito surge la interrogativa acerca de la existencia una función extensión.

4.0.1. Sobre la extensión de una función Lipschitz entre espacios métricos.

Los teoremas de extensión son un tipo de teoremas convenientes y en distintas áreas son buscados. Pero en esa busqueda no siempre es posible determinar si este existe o no. Sobre el que un día fue un problema abierto, determinar si existe un teorema de extensión de funciones Lipschitz sobre espacios métricos arbitrarios, Schönbeck demostró que este no existe, a través un contraejemplo en 1966 [19]. Este se presenta a continuación; sobre el plano real $\mathbb{R}^2$. Sea H el hexágono regular qeu circunscribe a la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ y que tiene un lado paralelo a el eje x.

Figura 4.1: H y $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^2$.



Sean E y F iguales a $\mathbb{R}^2$, como espacios vectoriales con las operaciones usuales, dotados respectivamente con las normas $\|(x,y)\|_E = \text{máx}\left\{|y|, \frac{\sqrt{3}}{2}|x| + \frac{1}{2}|y|\right\}$ y $\|\cdot\|_F$ igual a la norma usual de $\mathbb{R}$, de tal forma que $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_E = 1\} = H$ y $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_F = 1\} = \mathbb{S}^1$. Sean $x_1 = (0,1)$ y $x_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se tiene que x_1 y x_2 son dos puntos contiguos de tangencia entre H y $\mathbb{S}^1$. Notar que $\|x_1\|_E = \|x_1\|_F = \|x_2\|_E = \|x_2\|_F = 1$. Defina $z = \frac{x_1+x_2}{3} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$.
Se satisface que, $\|x_1 - x_2\|_F = \left\|(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})\right\|_F = 1$ y $\|x_1 - x_2\|_E = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} = 1$. Además,

$$\|z\|_E = \left\|\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)\right\|_E = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2};$$
$$\|z - x_1\|_E = \left\|\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)\right\|_E = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2};$$
$$\|z - x_2\|_E = \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right\|_E = \text{máx}\left\{0, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2};$$

Figura 4.2: Representación gráfica de algunos elementos significativos.

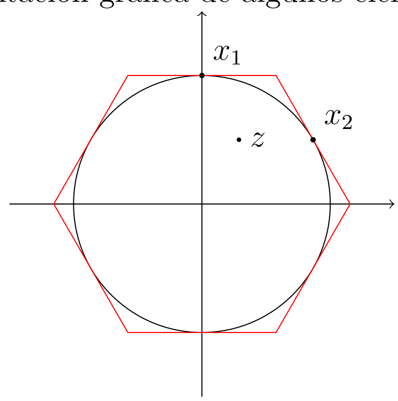
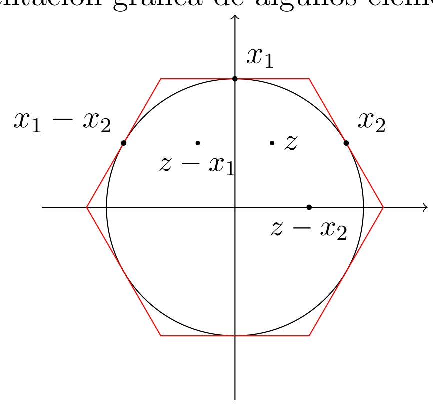


Figura 4.3: Representación gráfica de algunos elementos significativos.



Ahora, póngase $D = \{(0,0), x_1, x_2\} \subseteq E$. Defina la función, $T\colon D \to F$ tal que $T(0,0) = (0,0)$, $T(x_1) = x_1$ y $T(x_2) = x_2$. Luego,

$$\|T(0,0) - T(x_i)\|_F = \|(0,0) - x_i\|_F = \|x_i\|_E \quad \text{para } i = 1, 2;$$
$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|x_1 - x_2\|_F = \|x_1 - x_2\|_E \,.$$

Con todo, dado que para cualesquiera $x, y \in D$, $\|T(x) - T(y)\|_F \leq \|x - y\|_E$, se tiene que T es una función Lipschitz, con constante Lipschitz igual a 1.
Afirmamos que T no tiene una función extensión sobre E. En efecto, por contradicción. Supóngase que T' es una extensión de T, luego se satisface lo siguiente:

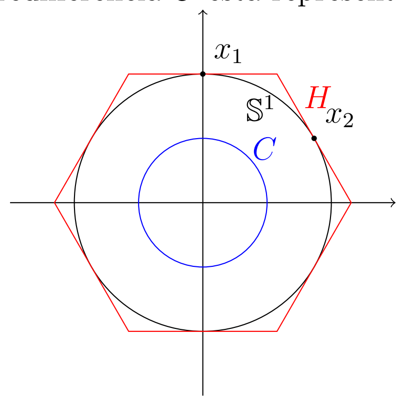
$$\|T'(z)\|_F = \|T'(z) - T'(0,0)\|_F \leq \|z\|_E = \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$
$$\|T'(z) - x_i\|_F = \|T'(z) - T'(x_i)\|_F \leq \|z - x_i\|_E = \frac{1}{2}, \qquad i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Se tiene que para $i = 1, 2$:

$$|\|T'(z)\|_F - \|x_i\|_F| \leq \frac{1}{2}, \text{ si y sólo si } -\frac{1}{2} + \|x_i\|_F \leq \|T'(z)\|_F \leq \|x_i\|_F + \frac{1}{2}.$$

Puesto que $\|x_i\|_F = 1$ para $i = 1, 2$; y por (4.1), se sigue que $\|T'(z)\|_F = \frac{1}{2}$. De donde, $T'(z)$ se encuentra en la circunferencia C de radio $\frac{1}{2}$.

Figura 4.4: La circunferencia C está representada en color azul.



A continuación, dado que

$$\begin{aligned} 1 = \|x_1 - x_2\|_F &= \|x_1 - T'(z) + T'(z) - x_2\|_F \\ &\leq \|x_1 - T'(z)\|_F + \|T'(z) - x_2\|_F \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

De aquí que $\|x_1 - T'(z) + T'(z) - x_2\|_F = \|x_1 - T'(z)\|_F + \|T'(z) - x_2\|_F$, por tanto x_1, x_2 y $T'(z)$ son colineales. Lo que claramente resulta imposible. Por lo tanto, T no tiene una función extensión.

4.1. Extensiones de funciones semi-Lipschitz

Preparando el terreno para la exposición del teorema de extensión para funciones semi-Lipschitz dado por Mustăţa [14], se introduce el espacio $\mathrm{SLip}_{\rho,u}(X, \mathbb{R})$, donde u es la norma asimétrica dada en el Ejemplo 2.5, recordar que dicho espacio se denota de forma abreviada por $\mathrm{SLip}_\rho(X)$.
Sean (X, ρ) un espacio cuasi-métrico y $A \subseteq X$, se tiene que la dupla (A, ρ) es un espacio cuasi-métrico con la cuasi-métrica inducida por ρ y denotada también por ρ. Denote por $\mathrm{SLip}_\rho(A)$=$\mathrm{SLip}_{\rho,u}(A, \mathbb{R})$ al conjunto de funciones semi-Lipschitz

definidas entre (A,ρ) y $(\mathbb{R},u)$; además $\|\cdot\;|_\rho$ denota la restricción de $\|\cdot\;|_\rho$ sobre A. Note que $\|f\;|_\rho$ es la menor constante semi-Lipschitz para $f\in \mathrm{SLip}_\rho(A)$.

Para una función $f\in \mathrm{SLip}_\rho(A)$, una extensión de f es una función $F\in \mathrm{SLip}_\rho(X)$ si y sólo si $F|_A=f$.

Teorema 4.3. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi-métrico y $A\subseteq X$, un subconjunto no vacío. Si $f\in SLip_\rho(A)$, entonces existe $F\in SLip_\rho(X)$ tal que F es una extensión de f y conserva la menor constante semi-Lipschitz de f, es decir $\|F|_\rho=\|f|_\rho$.*

Demostración. Sea $f\in \mathrm{SLip}_\rho(A)$, defina la función

$$F(x)=\text{ínf}\Big\{f(a)+\|f|_\rho\,\rho(x,a)\Big|a\in A\Big\}\qquad x\in X. \tag{4.3}$$

1. Sean $z\in A$ fijo. Para cada $x\in X$ y para cada $a\in A$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(a)+\|f|_\rho\,\rho(x,a) &= f(z)+\|f|_\rho\,\rho(x,a)-(f(z)-f(a))\\ &\geq f(z)+\|f|_\rho\,\rho(x,a)-u(f(z)-f(a))\\ &\geq f(z)+\|f|_\rho\,\rho(x,a)-\|f|_\rho\,\rho(z,a)\\ &= f(z)-\|f|_\rho\big(\rho(z,a)-\rho(x,a)\big)\\ &\geq f(z)-\|f|_\rho\,\rho(z,x). \end{aligned}$$

   Lo anterior prueba que para cada $x\in X$, el conjunto $\Big\{f(a)+\|f|_\rho\,\rho(x,a)\Big|a\in A\Big\}$ está acotado inferiormente, así el ínfimo en (4.3) existe.

2. La función F es una extensión de f. Sea $y\in A$, se sigue que

$$F(y)\leq f(y)+\|f|_\rho\,\rho(y,y)=f(y).$$

   Para cada $a\in A$, se tiene que

$$u(f(y)-f(a))\leq \|f|_\rho\,\rho(y,a)$$

   de donde se obtiene que

$$f(y)-f(a)\leq \|f|_\rho\,\rho(y,a),$$

de esta manera,
$$f(y) \leq \|f|_\rho \, \rho(y,a) + f(a).$$
Por lo tanto,
$$f(y) \leq \inf \Big\{ f(a) + \|f|_\rho \, \rho(y,a) | a \in A \Big\} = F(y).$$
En consecuencia, $F(y) = f(y)$ para cada $y \in A$.

3. Se cumple que $\|F|_\rho = \|f|_\rho$. En efecto, dado que $F|_A = f$, por definición, $\|F|_\rho \geq \|f|_\rho$.
   Por otro lado, dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que
$$F(y) \leq f(a) + \|f|_\rho \, \rho(y,a) \leq F(y) + \varepsilon,$$
   de donde,
$$-F(y) \leq -\big(f(a) + \|f|_\rho \, \rho(y,a) - \varepsilon\big).$$
   Además,
$$F(x) \leq f(a) + \|f|_\rho \, \rho(x,a),$$
   de ambas desigualdades previas, se obtiene que
$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &\leq f(a) + \|f|_\rho \, \rho(x,a) - \big(f(a) + \|f|_\rho \, \rho(y,a) - \varepsilon\big) \\ &= \|f|_\rho \big(\rho(x,a) - \rho(y,a)\big) + \varepsilon \\ &\leq \|f|_\rho \, \rho(x,y) + \varepsilon. \end{aligned}$$
   Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se concluye que
$$F(x) - F(y) \leq \|f|_\rho \, \rho(x,y)$$
   por lo que
$$u\big(F(x) - F(y)\big) \leq \|f|_\rho \, \rho(x,y)$$
   para cualesquiera $x, y \in X$, luego $\|F|_\rho \leq \|f|_\rho$. De modo que $\|F|_\rho = \|f|_\rho$.

4. La función F es $(\rho, u) -$ *creciente*. Dado que para cada $x, y \in X$ tales que $x \leq_\rho y$, se tiene que $\rho(x,y) = 0$. Por la desigualdad del triángulo, $\rho(x,a) \leq \rho(x,y) + \rho(y,a)$ para cualquier $a \in A$. Con esto, $\rho(x,a) \leq \rho(y,a)$

En consecuencia,

$$f(a) + \|f|_\rho \rho(x,a) \leq f(a) + \|f|_\rho \rho(y,a).$$

De la desigualdad previa, se sigue que $F(x) \leq F(y)$. Así, $u(F(x)-F(y)) = 0$, por definición $F(x) \leq_u F(y)$.

De los puntos, 3 y 4 de acuerdo al tercer punto del Teorema 3.10 concluimos que $F \in \mathrm{SLip}_\rho(X)$. □

Similarmente, la función

$$G(x) = \sup\left\{f(b) - \|f|_\rho \bar{\rho}(x,b)\middle|b \in A\right\}$$

es una extensión semi-Lipschitz de f. De hecho para cualquier $a, b \in A$ y $x \in X$, como f es semi-Lipschitz se tiene que

$$\begin{aligned}\|f|_\rho \rho(x,a) + \|f|_\rho \rho(b,x) &\geq u(f(x) - f(a)) + u(f(b) - f(x));\\ &\geq u(f(b) - f(a));\\ &\geq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar el ínfimo respecto a a y el supremo respecto a b se sigue que

$$G(x) = \sup\left\{f(b) - \|f|_\rho \bar{\rho}(x,b)|b \in A\right\} \leq \inf\left\{f(a) + \|f|_\rho \rho(x,a)|a \in A\right\} = F(x).$$

Es de gran utilidad que se tenga la unicidad de una función extensión, pero aunque no ocurre así siempre, las dos extensiones anteriores F y G cumplen un papel importante para determinar si la hay.

Teorema 4.4. *Dados un espacio cuasi-métrico (X,ρ), $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío y $f \in SLip_\rho(A)$, si H es una extensión semi-Lipschitz de la función f, entonces*

$$G(x) \leq H(x) \leq F(x), \qquad x \in X.$$

Demostración. Sea $H \in \mathrm{SLip}_\rho(X)$ una extensión de f. Sea $x \in X$ y $y \in A$ se tiene

$$u(H(x) - H(y)) \leq \|f|_\rho \rho(x,y), \text{ así } H(x) - H(y) \leq \|f|_\rho \rho(x,y)$$

lo que implica que

$$H(x) \leq H(y) + \|f|_\rho \rho(x,y) = f(y) + \|f|_\rho \rho(x,y).$$

Tomando el supremo respecto a $y \in A$ da como resultado que

$$H(x) \leq \sup\left\{ f(y) + \|f|_\rho \rho(x,y) | y \in A \right\} = F(x), \qquad x \in X.$$

De manera análoga se prueba que $G(x) \leq H(x)$, para todo $x \in X$. □

Corolario 4.1. *Una función $f \in SLip_\rho(A)$ tiene una única extensión en $SLip_\rho(X)$ si y sólo si*

$$\sup\left\{ f(b) - \|f|_\rho \bar{\rho}(x,b) | b \in A \right\} = \inf\left\{ f(a) + \|f|_\rho \rho(x,a) |\ a \in A \right\},$$

para cada $x \in X$.

Ejemplo 4.1. Sean $X = (0, +\infty)$, $A = \mathbb{N}$ subconjuto de X y $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = -\frac{1}{n}$. Se tiene que f es semi-Lipschitz, $f \in \mathrm{SLip}_{\rho_\alpha, u}(A, \mathbb{R})$, donde ρ_α está definida en el Ejemplo 2.1, con $\alpha \geq 1$ y u es la norma asimétrica definida en el Ejemplo 2.5. Note que $\|f|_{\rho_\alpha} = 1$. Para la función F definida por (4.3) se tiene que

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf\left\{ f(a) + \|f|_\rho \rho(x,a) :\ a \in A \right\}, \\ &= \inf\left\{ -\frac{1}{a} + \rho(x,a) :\ a \in A = \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Si $0 < x \leq 1$, entonces $F(x) = \inf\left\{ -\frac{1}{a} :\ a \in A = \mathbb{N} \right\} = -1$.
Si $x \in A = \mathbb{N}$, entonces $F(x) = \inf\left\{ -\frac{1}{a} :\ a \in A = \mathbb{N} \right\} = -\frac{1}{x}$.
Si $n < x < n+1$, entonces $F(x) = \inf\left\{ -\frac{1}{a} + \alpha, -\frac{1}{n+1} :\ a \in A = \mathbb{N} \right\} = -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{\lceil x \rceil}$. Así

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{si } x \in A = \mathbb{N}; \\ -\frac{1}{\lceil x \rceil}, & \text{si } x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Y de manera similar la función G definida por (4.1) es

$$G(x) = \begin{cases} -\alpha, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{si } x \in A = \mathbb{N}; \\ -\frac{1}{\lfloor x \rfloor}, & \text{si } \ x \notin \mathbb{N} \cup (0,1]. \end{cases}$$

Claramente, $G(x) \leq F(x)$ para todo $x \in X$.

Capítulo 5

Aplicaciones

En lo que sigue nos centraremos en el espacio de funciones semi-Lipschitz $\mathrm{SLip}_{\bar{\rho}_\alpha, d_\mathcal{C}}(\omega, \mathcal{C})$ donde ω es igual al conjunto de los números enteros no negativos, $\bar{\rho}_\alpha$ es la conjugada de la cuasi-métrica definida en el Ejemplo 2.1 sobre ω y $\mathcal{C}$ es el espacio cuasi-métrico de funciones de complejidad que se describe a continuación. En 2004 M. Schellekens introdujo el espacio (cuasi-métrico) de funciones de complejidad para obtener un fundamento topológico para el análisis de complejidad de programas y algoritmos. Este espacio consiste de el par $(\mathcal{C}, d_\mathcal{C})$, donde

$$\mathcal{C} = \left\{ f : \omega \to (0, \infty] \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty \right\},$$

y $d_\mathcal{C}$ es la cuasi-métrica sobre $\mathcal{C}$ dada por

$$d_\mathcal{C}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right],$$

para cada $f, g \in \mathcal{C}$ y se toma la convención que $\frac{1}{\infty} = 0$. Los elementos de $\mathcal{C}$ se llaman *funciones de complejidad*.

En [18] Sánchez Álvarez muestra que las funciones semi-Lipschitz proveen una herramienta eficiente para computar la complejidad de cierto tipo de algoritmos en el siguiente sentido: Si T es la ecuación de recurrencia sobre $\mathbb{N}$ asociada a un algoritmo dado (con $T(n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$), y f denota la función de complejidad que es solución de dicha ecuación de recurrencia, entonces la complejidad de este algoritmo se representa via f. Más aún, f constituye una función total definida recursivamente, esto es, al mismo tiempo, el límite de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

de funciones parciales también definido recursivamente.

Presentamos ahora el modelo para computar la complejidad representada por f dado el significado de los valores que toma una cierta norma relativizada y su cuasi-métrica inducida sobre la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sus segmentos iniciales. Esto se hace con ayuda de un espacio de funciones semi-Lipschitz apropiado, el cual se construye aquí; particularmente, la cuasi-métrica inducida permite medir fácilmente el progreso realizado en la reducción de la complejidad cuando la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea remplazada por cualquier segmento inicial de esta.

5.1. Computando complejidad a través de funciones semi-Lipschitz y funciones parciales

El espacio de funciones semi-Lipschitz que resulta útil para los fines mencionados está descrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathrm{SLip}_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}(\omega,\mathcal{C}) &= \left\{F\in\mathcal{C}^\omega_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})} \middle| \sup_{\bar\rho_\alpha(n,m)\neq 0}\frac{d_{\mathcal{C}}(F(n),F(m))}{\bar\rho_\alpha(n,m)}<\infty\right\}\\ &= \left\{F\in\mathcal{C}^\omega_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})} \middle| \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_{\mathcal{C}}(F(n),F(m))<\infty\right\}\end{aligned}$$

Dadas dos funciones $F,\ G$ en $\mathrm{SLip}_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}(\omega,\mathcal{C})$ y $r>0$ defina las operaciones suma y producto, de F con G y r con F respectivamente por

$$\begin{aligned}(F+G)(n) &= F(n)+G(n)\\ (r\cdot F)(n) &= r\cdot F(n)\end{aligned}$$

para cada $n\in\omega$. Con la función $\|\cdot|_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}:\mathrm{SLip}_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}(\omega,\mathcal{C})\to\mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F|_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}=\frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_{\mathcal{C}}(F(n),F(m))$$

para todo elemento F en $\mathrm{SLip}_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}(\omega,\mathcal{C})$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *El espacio* $\left(SLip_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}(\omega,\mathcal{C}),\|\cdot|_{(\bar\rho_\alpha,d_{\mathcal{C}})}\right)$ *es un cono normado relativizadamente.*

5.2. Descripción del método de aproximación

Sea T una ecuación de recurrencia sobre $\mathbb{N}$ asociada a un algoritmo dado y denote por f a la función de complejidad que es solución de dicha ecuación de recurrencia (suponga que $f(0) = \infty$). Se afirma que f se constituye como una función total definida recursivamente. De hecho, la función f puede ser aproximada por una sucesión de funciones parciales $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde cada función $p_n\colon \{0, 1, \ldots, n\} \to (0, \infty]$ está definida como sigue

$$p_n(k) = \begin{cases} \infty, & si\ k = 0; \\ T(k), & si\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Cada una de las funciones p_n puede asociarse con una función de complejidad f_n definida por

$$f_n(k) = \begin{cases} \infty, & si\ k = 0; \\ T(k), & si\ k = 1, 2, \ldots, n; \\ \infty, & si\ k > n. \end{cases} \tag{5.1}$$

De tal manera que se cumple $f \leq f_n$ y $f_{n+1} \leq f_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
Primeramente, a continuación se demuestra que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f respecto las cuasi-métricas $d_{\mathcal{C}}$ y su conjugada, lo que concuerda con la interpretación computacional de las funciones parciales p_n.
Dado que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f \leq f_n$, es claro que $d_{\mathcal{C}}(f, f_n) = 0$, de tal manera que $\bar{d}_{\mathcal{C}}(f_n, f) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, si $n \to \infty$, entonces $f_n \longrightarrow_{\bar{d}_{\mathcal{C}}} f$. Por otro lado, puesto que $f_n(k) = f(k)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ y $f_n(k) = \infty$ si $k > n$, se obtiene que para $n \in \omega$ arbitrario

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(f_n, f) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left[\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f_n(k)} \right) \vee 0 \right] = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{T(k)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{T(1)} \\ &= \frac{1}{T(1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{T(1)} \left(\frac{1}{1 - 2^{-1}} - \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} \right) = \frac{2^{-n}}{T(1)} \end{aligned}$$

En consecuencia si $n \to \infty$, entonces $d_{\mathcal{C}}(f_n, f) \to 0$, así $f_n \longrightarrow_{d_{\mathcal{C}}} f$.
Como segundo paso, se demuestra que la complejidad representada por la función f puede ser obtenida calculando la norma relativizada $\|\cdot|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})}$ sobre ciertas funciones semi-Lipschitz que toman valores en la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en sus segmentos iniciales; por lo que se tiene una ventaja de calcular sumas finitas (que son correspondientes a los segmentos iniciales de elementos en $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) en lugar de las series infinitas.
En efecto, sea $F\colon \omega \to \mathcal{C}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} f_n, & si\ n = 1, 2, \ldots; \\ f_\infty, & si\ n = 0. \end{cases}$$

Donde $f_\infty(n) = \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Note que en cierto sentido F puede identificarse con la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto con f. Veáse que $F \in \mathrm{SLip}_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})}(\omega, \mathcal{C})$ dado que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_{\mathcal{C}}(F(n), F(m)) &= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_{\mathcal{C}}(f_n, f_m) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\left[\left(\frac{1}{f_m(k)} - \frac{1}{f_n(k)}\right) \vee 0\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m}\sum_{k=n+1}^{m} 2^{-k}\frac{1}{f_m(k)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\frac{1}{f_m(k)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\frac{1}{f(k)} < \infty
\end{aligned}$$

De donde se observa que

$$\|F|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\frac{1}{f(k)}$$

Construya la sucesión de funciones $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que van del espacio cuasi-métrico ω al espacio de complejidad $\mathcal{C}$. Para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se define

$$F_i(n) = \begin{cases} f_\infty, & si\ n = 0; \\ f_n, & si\ 0 < n < i; \\ f_i & si\ i \leq n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Obsérvese que $F \leq F_i$ y $F_{i+1} \leq F_i$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Más aún, $F_i \in$SLip$_{(\bar{\rho}_\alpha, d_\mathcal{C})}(\omega, \mathcal{C})$, dado que

$$\frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_\mathcal{C}(F_i(n), F_i(m)) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\sup\limits_{i\leq n<m} d_\mathcal{C}(f_i, f_i) & (si\ i \leq n); \\ \frac{1}{\alpha}\sup\limits_{n<i\leq m} d_\mathcal{C}(f_n, f_i) & (si\ n < i\ y\ i \leq m); \\ \frac{1}{\alpha}\sup\limits_{n<m<i} d_\mathcal{C}(f_n, f_m) & (si\ m < i). \end{cases}$$

Para los tres casos anteriores observe que si $i \leq n$ se tiene que

$$\frac{1}{\alpha}\sup_{i\leq n<m} d_\mathcal{C}(f_i, f_i) = 0;$$

si $n < i$ y $i \leq m$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\sup_{n<i\leq m} d_\mathcal{C}(f_n, f_i) &= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<i\leq m}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\left[\left(\frac{1}{f_i(k)} - \frac{1}{f_n(k)}\right) \vee 0\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<i\leq m}\sum_{k=n+1}^{i} 2^{-k}\frac{1}{f_i(k)} \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{i} 2^{-k}\frac{1}{f_i(k)}. \end{aligned}$$

Y si $m < i$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\sup_{n<m<i} d_{\mathcal{C}}(f_n, f_m) &= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<i<m}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\left[\left(\frac{1}{f_m(k)} - \frac{1}{f_n(k)}\right)\vee 0\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m<i}\sum_{k=n+1}^{m} 2^{-k}\frac{1}{f_m(k)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{i-1} 2^{-k}\frac{1}{f_{i-1}(k)}.
\end{aligned}$$

Puesto que $f_i \leq f_{i-1}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se obtiene que

$$\|F_i|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha}\sup_{n<m} d_{\mathcal{C}}(F_i(n), F_i(m)) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{i} 2^{-k}\frac{1}{f_i(k)} < \infty \tag{5.3}$$

Con base en el resultado anterior, se concluye que $\lim\limits_{i\to\infty} \|F_i|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \|F|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})}$. Más concretamente,

$$\begin{aligned}
\|F|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} - \|F_i|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{i} 2^{-k}\frac{1}{f_i(k)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{i} 2^{-k}\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f_i(k)}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{1}{f(k)} \\
&= \frac{1}{\alpha} d_{\mathcal{C}}(f_j, f) \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\frac{2^{-i}}{T(1)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, note que el uso de la cuasi-semimétrica inducida D también resulta en una interpretación satisfactoria puesto que la relación

$$D(F, F_i) = 0 \text{ y } D(F_{i+1}, F_i) = 0$$

concuerda con el hecho de que F es más eficiente que F_i y el hecho de que F_{i+1} es más eficiente que F_i, dando así una cuantificación de la cercanía a la función solución por cada nuevo valor de la sucesión (F_i).
El siguiente ejemplo ilustra el método desarrollado.

Ejemplo 5.1. Considere el algoritmo Quicksort para el caso promedio, donde se tiene la siguiente ecuación de recurrencia, $T(1) = 1$ y

$$T(n) = \frac{n+2}{n+1}T(n-1) + \frac{2n}{n+1}$$

para $n \geq 2$.

Se considera hasta $n = 3$, primero note que $T(2) = \frac{8}{3}$ y $T(3) = \frac{58}{12}$. En seguida defina la sucesión de funciones f_n como en (5.1) (he aquí la imagen de los primeros 3 elementos)

$f_1 \colon \omega \to (0, \infty]$	$f_2 \colon \omega \to (0, \infty]$	$f_3 \colon \omega \to (0, \infty]$
$f_1(0) = \infty$	$f_2(0) = \infty$	$f_3(0) = \infty$
$f_1(1) = 1$	$f_2(1) = 1$	$f_3(1) = 1$
$f_1(n) = \infty \; n > 1$	$f_2(2) = \frac{8}{3}$	$f_3(2) = \frac{8}{3}$
	$f_2(n) = \infty \; n > 2$	$f_3(3) = \frac{58}{12}$
		$f_3(n) = \infty \; n > 3$

Nuevamente, defina la otra sucesión de funciones (F_i), como en (5.2), para las primeras tres funciones, de acuerdo a la ecuación (5.3) se tienen los siguientes valores para las normas de dichos elementos:
Para $n = 1$:

$$\|F_1|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{f_1(k)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}.$$

Para $n = 2$:

$$\|F_2|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{f_2(k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{32}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{19}{32}.$$

Para $n = 3$:

$$\|F_3|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{f_3(k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{32} + \frac{12}{464}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{575}{928}.$$

Por lo que si se considera un error $\varepsilon = 0.003$, se puede obtener el número de pasos (i) resolviendo

$$\frac{2^{-i}}{\alpha} \leq 0.003$$

y para $\alpha = 1$ se tiene que $i \geq 9$.

Conclusiones

Se estudió un tipo de función del área de análisis funcional asimétrico, la función semi-Lipschitz hasta el punto de detallar la prueba del Teorema de extensión de funciones semi-Lipschitz, dado por Mustăţa en su artículo: *Extensions of semi-Lipschitz functions on quasi-metric spaces*, del año 2001 [14] y desarrollar una aplicación de esta teoría dada por Sánchez-Álvarez en su tesis doctoral, en el año 2009 [18].
El trabajo inició con la presentación de una serie de definiciones clave en el ámbito de los espacios métricos y normados para entender las diferencias y similitudes de los resultados correspondientes al trasladarse al área asimétrica, luego se adentró al lector al sitio donde inicia la teoría del análisis funcional asimétrico, ahí se dieron las definiciones y ejemplos de algunos espacios asimétricos que fueron utilizados aquí. Además se mencionaron algunos resultados topológicos de estos espacios de manera concisa y compacta juntando todo esto en un solo documento. En seguida se mostró el concepto de función semi-Lipschitz, se dieron y probaron propiedades de diferentes espacios que generan estas funciones enfocándose principalmente en las estructuras posibles con que se le pueden dotar. Después se exhibió el teorema de extensión de funciones semi-Lipschitz ya mencionado y se detalló su prueba. También se dió un contraejemplo de que en algunos casos no siempre existe una función extensión. Finalmente, se describió una aplicación de las funciones semi-Lispchitz para aproximar funciones de complejidad que resulta util para determinar la eficiencia de los algoritmos y compararlos entre ellos.
Con todo, se cumplieron cabalmente los objetivos y metas planteados en el proyecto de investigación. Más aún, se incluyó una aplicación de esta teoría que no estaba contemplada. La meta más reconfortante es que se obtuvo una fuente en español acerca del tema, confiable y amigable, al alcance de estudiantes de la licenciatura o personas con gusto por la matemática, dándoles acceso a un área novedosa.

Bibliografía

[1] ALEGRE, C. Continuous operators on asymmetric normed spaces. *Acta Mathematica Hungarica 28* (2009), 357–372.

[2] ALEGRE, C., FERRER, J., Y GREGORI, V. Quasi-uniformities on real vector spaces. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 28* (1997), 929–938.

[3] BARRAGÁN, F., ROMERO, A., PERALES, S. S., Y GRIJALVA, V. M. Breve introducción a la métrica de Hausdorff. *Sistemas dinámicos III (Editores: JJ Angoa, J. Arrazola, R. Escobedo, A. Illanes, M. Osorio, J. Poisot, G. Sierra, A. Tamariz), Dirección de Fomento Editorial, Textos Cientıficos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla* (2014).

[4] CHADAM, J. M. On the cauchy problem for the coupled maxwell-dirac equations. *Journal of Mathematical Physics 13*, 5 (1972), 597–604.

[5] COBZAŞ, Ş. Functional analysis in asymmetric normed spaces. *arXiv preprint arXiv:1006.1175* (2010).

[6] COBZAŞ, Ş. *Functional analysis in asymmetric normed spaces.* Springer Science & Business Media, 2012.

[7] COBZAŞ, Ş.., Y MUSTĂŢA, C. Extension of bounded linear functionals and best approximation in spaces with asymmetric norm. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 33*, 1 (2004), 39–50.

[8] GARCÍA-RAFFI, L. M., ROMAGUERA, S., Y SÁNCHEZ-PÉREZ, E. The bicompletion of an asymmetric normed linear space. *Acta Mathematica Hungarica 97*, 3 (2002), 183–191.

[9] GARCÍA-RAFFI, L. M., ROMAGUERA, S., Y SÁNCHEZ-PÉREZ, E. A. Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity. *Mathematical and Computer Modelling 36*, 1-2 (2002), 1–11.

[10] Hernández Morales, J. M., Álvarez Marín, L. D. C., et al. Espacios con distancias no simétricas. *REPOSITORIO NACIONAL CONACYT* (2014).

[11] Kelly, J. C. Bitopological spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 1 (1963), 71–89.

[12] Künzi, H. P. A. Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology. *Handbook of the History of General Topology*. Springer, 2001, pp. 853–968.

[13] Meyer, R., y Taylor, A. D. Run-up on beaches. *Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport, edited by RE Meyer* (1972), 357–411.

[14] Mustăţa, C. Extensions of semi-Lipschitz functions on quasi-metric spaces. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 30*, 1 (2001), 61–67.

[15] Oltra, S., y Valero, O. Isometries on quasi-normed cones and bicompletion. *New Zealand J. Math 33* (2004), 83–90.

[16] Romaguera, S., y Sanchis, M. Properties of the normed cone of semi-Lipschitz functions. *Acta Mathematica Hungarica 108*, 1-2 (2005), 55–70.

[17] Sánchez-Álvarez, J. On semi-Lipschitz functions with values in a quasi-normed linear space. *Applied General Topology 6*, 2 (2005), 217–228.

[18] Sánchez Álvarez, J. M. *Semi-lipschitz functions, best approximation, and fuzzy quasi-metric hyperspaces.* Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2009.

[19] Schönbeck, S. O. Extension of nonlinear contractions. *Bulletin of the American Mathematical Society 72*, 1 (1966), 99–101.

[20] Sevilla, M. J., y de Rábago, M. G. Una introducción a las extensiones diferenciables de funciones. Tesis de maestría, Universidad Complutense de Madrid, 2017.

[21] Weaver, N. *Lipschitz algebras.* World Scientific, 1999.

[22] Wilson, W. A. On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics 53*, 3 (1931), 675–684.